Adatszerkezetek és algoritmusok

Horváth Géza

második előadás

Előadások témái

1. Az algoritmusokkal kapcsolatos alapfogalmak bevezetése egyszerű példákon keresztül.
2. Az algoritmusok futási idejének aszimptotikus korlátai.
3. Az adatszerkezetekkel kapcsolatos alapfogalmak. A halmaz, a multihalmaz és a tömb adatszerkezet bemutatása.
4. Az adatszerkezetek folytonos és szétszórt reprezentációja. A verem, a sor és a lista.
5. Táblázatok, önátrendező táblázatok, hash függvények és hash táblák, ütközéskezelés.
6. Fák, bináris fák, bináris keresőfák, bejárás, keresés, beszúrás, törlés.
7. Kiegyensúlyozott bináris keresőfák: AVL fák.
8. Piros-fekete fák.
9. B-fák.
10. Gráfok, bejárás, legrövidebb út megkeresése.
11. Párhuzamos algoritmusok.
12. Eldönthetőség és bonyolultság, a P és az NP problémaosztályok.
13. Lineáris idejű rendezés. Összefoglalás.

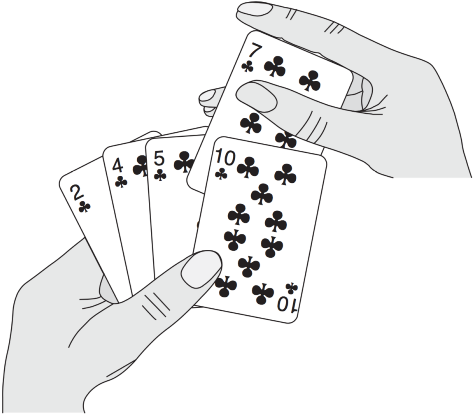
Rendezési feladat

Bemenet: Számok véges ($n \geq 2$ elemű) sorozata $< a_1, a_2, \ldots, a_n >$.

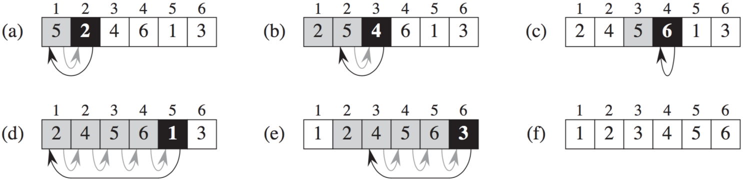
Kimenet: A bemenet azon $< a'_1, a'_2, \ldots, a'_n >$ permutációja, melyre $a'_1 \leq a'_2 \leq \ldots \leq a'_n$.

Példa: Ha a bemenet $< 31, 41, 59, 26, 41, 58 >$, akkor egy rendező algoritmus kimenetként a $< 26, 31, 41, 41, 58, 59 >$ sorozatot adja meg.

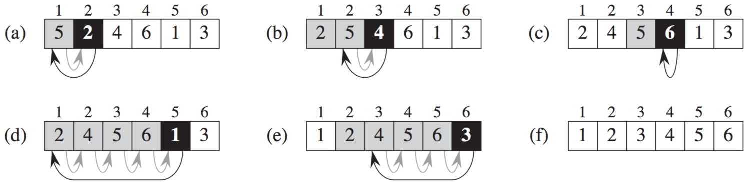
A beszúró rendezés – alapgondolat



Beszúró rendezés – példa

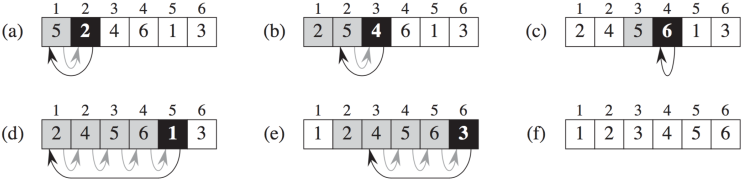


Beszúró rendezés – pszeudokód




```
INSERTION-SORT(A)
for j = 2 to A.length
    key = A[j]
    // Insert A[j] into the sorted sequence A[1 .. j − 1].
    i = j − 1
    while i > 0 and A[i] > key
        A[i + 1] = A[i]
        i = i − 1
    A[i + 1] = key
```

A beszúró rendezés vizsgálata



INSERTION-SORT(A)	*cost*	*times*
for $j = 2$ **to** $A.length$	c_1	n
$key = A[j]$	c_2	$n-1$
// Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1\,..\,j-1]$.	0	$n-1$
$i = j-1$	c_4	$n-1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
$A[i+1] = A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n}(t_j-1)$
$i = i-1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n}(t_j-1)$
$A[i+1] = key$	c_8	$n-1$

A beszúró rendezés vizsgálata

INSERTION-SORT(A)	*cost*	*times*
for $j = 2$ **to** $A.length$	c_1	n
$key = A[j]$	c_2	$n-1$
// Insert $A[j]$ into the sorted sequence $A[1\,..\,j-1]$.	0	$n-1$
$i = j - 1$	c_4	$n-1$
while $i > 0$ and $A[i] > key$	c_5	$\sum_{j=2}^{n} t_j$
$A[i+1] = A[i]$	c_6	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
$i = i - 1$	c_7	$\sum_{j=2}^{n} (t_j - 1)$
$A[i+1] = key$	c_8	$n-1$

$$
\begin{aligned}
T(n) \;=\; & c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) \\
& + c_7 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8(n-1)\,.
\end{aligned}
$$

A beszúró rendezés vizsgálata legjobb eset – ha a bemenet eleve rendezett

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8(n-1) .$$

Legjobb eset: $t_j = 1$ minden $j = 2, \ldots, n$ esetén.

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5(n-1) + c_8(n-1) \\ &= (c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8)n - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8) . \end{aligned}$$

$a = c_1 + c_2 + c_4 + c_5 + c_8$
$b = -1 * (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)$

T(n)=a*n+b

A beszúró rendezés vizsgálata legrosszabb eset – ha a bemenet fordítva rendezett

$$T(n) = c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5 \sum_{j=2}^{n} t_j + c_6 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_7 \sum_{j=2}^{n} (t_j - 1) + c_8(n-1) .$$

Legrosszabb eset: $t_j = j$ minden $j = 2, \ldots, n$ esetén.

$$\sum_{j=2}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} - 1$$

and

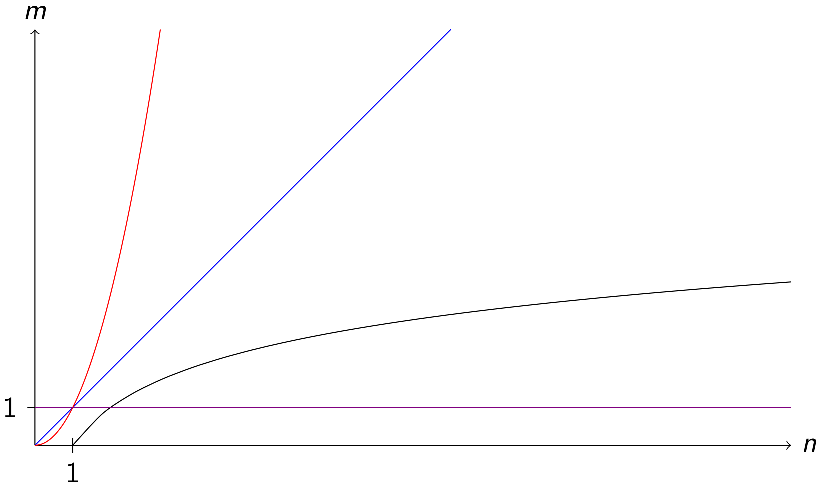
$$\sum_{j=2}^{n} (j-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

A beszúró rendezés vizsgálata legrosszabb eset – ha a bemenet fordítva rendezett

$$\begin{aligned} T(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_4(n-1) + c_5\left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) \\ &\quad + c_6\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_7\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) + c_8(n-1) \\ &= \left(\frac{c_5}{2} + \frac{c_6}{2} + \frac{c_7}{2}\right)n^2 + \left(c_1 + c_2 + c_4 + \frac{c_5}{2} - \frac{c_6}{2} - \frac{c_7}{2} + c_8\right)n \\ &\quad - (c_2 + c_4 + c_5 + c_8)\ . \end{aligned}$$

T(n)=a*n^2+b*n+c

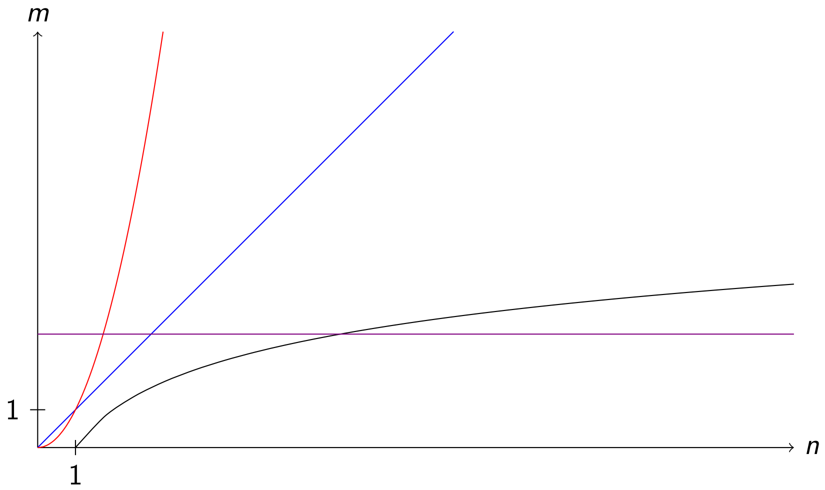
Polinomiális, lineáris, logaritmikus és konstans futási idő



n – **bemenet mérete**

m – **futási idő**

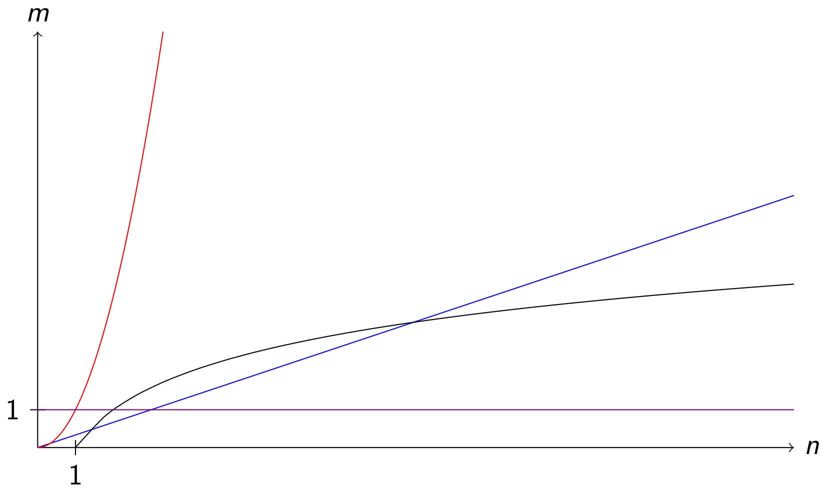
A konstans futási idő növelése



n – **bemenet mérete**

m – **futási idő**

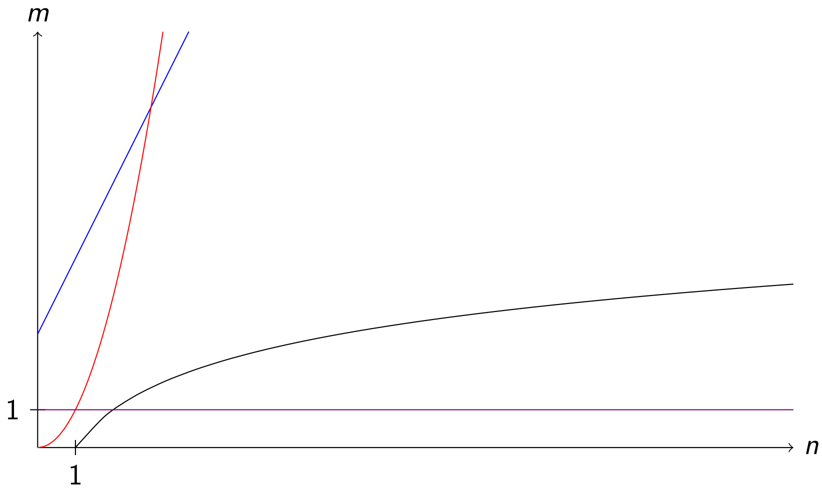
A lineáris futási idő csökkentése



n – **bemenet mérete**

m – **futási idő**

A lineáris futási idő növelése



n – **bemenet mérete**

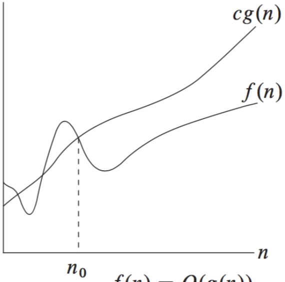
m – **futási idő**

Az $\mathcal{O}$ jelölés – aszimptotikus felső korlát

Definíció

Egy adott $g(n)$ függvény esetén $\mathcal{O}(g(n))$ jelöli a függvényeknek azt a halmazát, amelyre

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) : \text{létezik } c \text{ és } n_0 \text{ pozitív állandó úgy, hogy } 0 \leq f(n) \leq c * g(n) \text{ teljesül minden } n \geq n_0 \text{ esetén}\}.$$



$f(n) = O(g(n))$

Aszimptotikus felső korlát – példák

Definíció

Egy adott $g(n)$ függvény esetén $\mathcal{O}(g(n))$ jelöli a függvényeknek azt a halmazát, amelyre

$$\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) : \text{létezik } c \text{ és } n_0 \text{ pozitív állandó úgy, hogy } 0 \leq f(n) \leq c * g(n) \text{ teljesül minden } n \geq n_0 \text{ esetén}\}.$$

Példa

$3*n+8=\mathcal{O}(n)$.

Legyen $c=4$ *és* $n_0=8$. $4*n \geq 3*n+8$ *ha* $n \geq 8$.

Példa

$2*n^2+4*n=\mathcal{O}(n^2)$.

Legyen $c=3$ *és* $n_0=4$. $3*n^2 \geq 2*n^2+4*n$ *ha* $n \geq 4$.

Másik megoldás: $c=4$ *és* $n_0=2$. $4*n^2 \geq 2*n^2+4*n$ *ha* $n \geq 2$.

Aszimptotikus felső korlát – példák

Példa

$2*n^2+4*n=\mathcal{O}(n^2)$.
Legyen $c=3$ és $n_0=4$. $3*n^2 \geq 2*n^2+4*n$ ha $n \geq 4$.
Másik megoldás: $c=4$ és $n_0=2$. $4*n^2 \geq 2*n^2+4*n$ ha $n \geq 2$.

	1	2	3	4	5
$2*n^2+4*n$	6	16	30	48	70
$3*n^2$	3	12	27	48	75

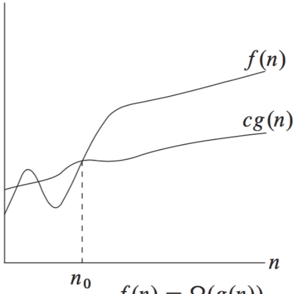
	1	2	3	4	5
$2*n^2+4*n$	6	16	30	48	70
$4*n^2$	4	16	36	64	100

Az Ω jelölés – aszimptotikus alsó korlát

Definíció

Egy adott $g(n)$ függvény esetén $\Omega(g(n))$ jelöli a függvényeknek azt a halmazát, amelyre

$$\Omega(g(n)) = \{f(n) : \text{létezik } c \text{ és } n_0 \text{ pozitív állandó úgy, hogy } 0 \leq c * g(n) \leq f(n) \text{ teljesül minden } n \geq n_0 \text{ esetén}\}.$$



$f(n) = \Omega(g(n))$

Aszimptotikus alsó korlát – példák

Definíció

Egy adott $g(n)$ függvény esetén $\Omega(g(n))$ jelöli a függvényeknek azt a halmazát, amelyre

$\Omega(g(n)) = \{f(n)$: *létezik c és n_0 pozitív állandó úgy, hogy*
$0 \leq c * g(n) \leq f(n)$ *teljesül minden $n \geq n_0$ esetén*$\}$.

Példa

$2*n-6=\Omega(n)$.
Legyen $c=1$ *és* $n_0=6$. $n \leq 2*n-6$ *ha* $n \geq 6$.

Példa

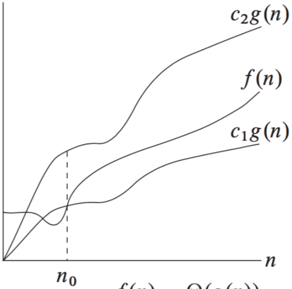
$n^2-3*n=\Omega(n^2)$.
Legyen $c=0.5$ *és* $n_0=6$. $\frac{n^2}{2} \leq n^2-3*n$ *ha* $n \geq 6$.

A Θ jelölés – aszimptotikus éles korlát

Definíció

Egy adott $g(n)$ függvény esetén $\Theta(g(n))$ jelöli a függvényeknek azt a halmazát, amelyre

$\Theta(g(n)) = \{f(n)$: *létezik c_1, c_2 és n_0 pozitív állandó úgy, hogy $0 \leq c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$ teljesül minden $n \geq n_0$ esetén*$\}$.



$f(n) = \Theta(g(n))$

Aszimptotikus éles korlát – példa

Definíció

Egy adott $g(n)$ függvény esetén $\Theta(g(n))$ jelöli a függvényeknek azt a halmazát, amelyre

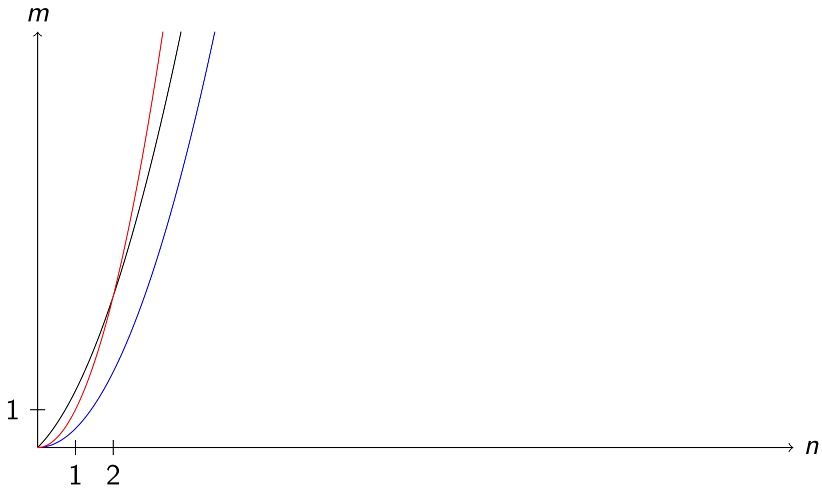
$\Theta(g(n)) = \{f(n)$ *: létezik c_1, c_2 és n_0 pozitív állandó úgy, hogy $0 \leq c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$ teljesül minden $n \geq n_0$ esetén*$\}$.

Példa

$\frac{n^2}{2} + n = \Theta(n^2)$.

Lgyen $c_1 = 0.5$, $c_2 = 1$ *és* $n_0 = 2$. $\frac{n^2}{2} \leq \frac{n^2}{2} + n \leq n^2$ *ha* $n \geq 2$.

Aszimptotikus éles korlát – példa



n – **bemenet mérete**

m – **futási idő**

Aszimptotikus éles korlát

Definíció

Egy adott $g(n)$ függvény esetén $\Theta(g(n))$ jelöli a függvényeknek azt a halmazát, amelyre

$\Theta(g(n)) = \{f(n)$: *létezik c_1, c_2 és n_0 pozitív állandó úgy, hogy $0 \leq c_1 * g(n) \leq f(n) \leq c_2 * g(n)$ teljesül minden $n \geq n_0$ esetén*$\}$.

Tétel

Bármely két $f(n)$ és $g(n)$ függvény esetén $f(n) = \Theta(g(n))$ akkor és csak akkor, ha $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ és $f(n) = \Omega(g(n))$.

Számítási kapacitás
egységnyi idő alatt megtett lépések száma

We assume a 30 day month and 365 day year.

	1 Second	1 Minute	1 Hour	1 Day	1 Month	1 Year	1 Century
$\lg n$	$2^{1\times10^6}$	$2^{6\times10^7}$	$2^{3.6\times10^9}$	$2^{8.64\times10^{10}}$	$2^{2.592\times10^{12}}$	$2^{3.1536\times10^{13}}$	$2^{3.15576\times10^{15}}$
$\sqrt{n}$	1×10^{12}	3.6×10^{15}	1.29×10^{19}	7.46×10^{21}	6.72×10^{24}	9.95×10^{26}	9.96×10^{30}
n	1×10^6	6×10^7	3.6×10^9	8.64×10^{10}	2.59×10^{12}	3.15×10^{13}	3.16×10^{15}
$n\lg n$	62746	2801417	133378058	2755147513	71870856404	797633893349	6.86×10^{13}
n^2	1000	7745	60000	293938	1609968	5615692	56176151
n^3	100	391	1532	4420	13736	31593	146679
2^n	19	25	31	36	41	44	51
$n!$	9	11	12	13	15	16	17

Irodalomjegyzék