UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA

CÁLCULO DAS FUNÇÕES RAIZ QUADRADA E SENO

Acadêmicos:	RA:
Vanessa Yukari Kajihara	78605
Vinícius Menossi	108840

Professor: Airton Marco Polidório

Disciplina: 6900 – Matemática Computacional

Maringá, 21 de abril de 2021.

Pelo desenvolvimento da série de Taylor, chega-se na seguinte expressão (para $|x| < 1$):

$$\sqrt{x + 1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(2k-2)!}{k!(k-1)!2^{2k-1}} x^k \quad (1)$$

Truncando essa série com 7 termos, tem-se:

$$\sqrt{x + 1}^* = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \frac{21x^6}{1024} \quad (2)$$

O oitavo termo é $+ \frac{99x^7}{2048}$.

Os valores solicitados foram calculados e os resultados estão apresentados na Tabela 1. Todos os valores deste trabalho foram calculados usando o GNU Octave.

Tabela 1 – Resultados calculados de $\sqrt{a}$ e $\sqrt{x + 1}$ usando 7 e 8 termos da série de Taylor.

		$\sqrt{a}$	$\sqrt{x + 1}$ usando 7 termos	$\sqrt{x + 1}$ usando 8 termos
0,95	-0,05	0,974679434480896	0,974679434494018	0,974679434456253
1,10	0,10	1,048808848170150	1,048808846679690	1,048808851513670
1,90	0,90	1,378404875209020	1,373931112304690	1,397051909716800
0,30	-0,70	0,547722557505166	0,550925206054687	0,546944212060547

É possível perceber que para alguns valores a precisão aumentou e para outros diminuiu considerando a utilização de 7 ou 8 termos da série. Isso porque a precisão pode variar de acordo com vários fatores: a quantidade de termos da série utilizados para o cálculo da raiz quadrada, a distância entre o valor de x e o valor em torno da qual a série é definida (raio de convergência) e a representação do número decimal em base binária, que pode estar errada e seu erro é propagado nos cálculos ao utilizar a série.

Além disso, o computador não trabalha bem com números que possuem grandes quantidades de casas decimais, pois neste ambiente a sua representação tem quantidade finita de casas. Por isso ele pode arredondar ou truncar o número de casas, o que também gera erros de cálculo.

UTILIZANDO O ESQUEMA DE HORNER

Considerando que operações de multiplicação demoram mais tempo que adições, para diminuir o tempo de processamento, é possível escrever as equações segundo o esquema de Horner. Rearranjando a Equação (2), fazendo:

$$A = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$B = -\frac{1}{8} = -0,125$$

$$C = \frac{1}{16} = 0,0625$$

$$D = -\frac{5}{128} = -0,0390625$$

$$E = \frac{7}{256} = 0,02734375$$

$$F = -\frac{21}{1024} = -0,020507812$$

Então:

$$\sqrt{x+1}^{*} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + Fx^6$$
$$= 1 + x\left(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5\right)$$
$$= 1 + x\left(A + x\left(B + Cx + Dx^2 + Ex^3 + Fx^4\right)\right)$$
$$= 1 + x\left(A + x\left(B + x\left(C + Dx + Ex^2 + Fx^3\right)\right)\right)$$
$$= 1 + x\left(A + x\left(B + x\left(C + x\left(D + Ex + Fx^2\right)\right)\right)\right)$$
$$= 1 + x(A + x(B + x(C + x(D + x(E + Fx)))))$$

$$\sqrt{x+1}^{*} = 1 + x(A + x(B + x(C + x(D + x(E + Fx))))) \tag{3}$$

Do mesmo modo, sendo $G = \frac{99}{2048} = 0,048339844$, a série com 8 termos fica:

$$\sqrt{x + 1}^{*} = 1 + x(A + x(B + x(C + x(D + x(E + x(F + Gx)))))) \qquad (4)$$

A Tabela 2 apresenta os valores de multiplicações e somas das equações originais e escritas de acordo com o esquema de Horner. Pode-se perceber que, equanto o número de somas continua o mesmo, o número de multiplicações cai significativamente no segundo caso.

Tabela 2 – Comparação do número de operações das equações originais e escritas no esquema de Horner.

Equação	Multiplicações		Somas	
	Original	Horner	Original	Horner
7 termos	20	6	6	6
8 termos	28	7	7	7

A Tabela 3 apresenta os cálculos das raízes dos mesmos casos experimentais da Tabela 1. É possível verificar que, apesar da diminuição do número de multiplicações, não houve alteração na precisão dos resultados.

Tabela 3 – Cálculos de raiz quadrada usando as equações ecritas com o esquema de Horner.

		$\sqrt{a}$	$\sqrt{x + 1}$ usando 7 termos	$\sqrt{x + 1}$ usando 8 termos
0,95	-0,05	0,974679434480896	0,974679434494019	0,974679434456253
1,10	0,10	1,048808848170150	1,048808846679687	1,048808851513672
1,90	0,90	1,378404875209020	1,373931112304688	1,397051909716797
0,30	-0,70	0,547722557505166	0,550925206054688	0,546944212060547

GENERALIZANDO O CÁLCULO DA RAIZ

Para generalizar o cálculo da raiz quadrada, para um valor de $a \in [0, \infty_c)$, pode-se realizar a redução do argumento da seguinte forma: primeiro, escreve-se o número em base binária em notação científica normalizada. Deste modo, obter-se-á o seguinte:

$$(1 + mantissa)2^{e}$$

Manipulando a expressão acima, é possível calcular a raiz de qualquer valor utilizando a série de Taylor apresentada, pois será obtido um valor do tipo $a = 1 + x$, sendo x a mantissa. Além disso, a multiplicação ou divisão por 2 é computacionalmente ágil, pois para isso basta realizar um shift de bits.

Além disso, é necessário observar o expoente da base. Isso porque se ele for ímpar, é necessário multiplicar e dividir o número por 2 para que seja possível extrair a raiz da base, ou seja:

$$\sqrt{(1\,+\,mantissa)2^{e}} = \sqrt{\frac{(1+mantissa)}{2}2^{e+1}} = 2^{\frac{e+1}{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1\,+\,mantissa)}$$

$$= 2^{\frac{e+1}{2}-1}\sqrt{2}\sqrt{(1\,+\,mantissa)} = 2^{\frac{e-1}{2}}\sqrt{2}\sqrt{(1\,+\,mantissa)}$$

e o valor $\sqrt{2}$ pode ser armazenado como uma constante.

Já para números de expoente par, tem-se:

$$\sqrt{(1\,+\,mantissa)2^{e}} = 2^{\frac{e}{2}}\sqrt{(1\,+\,mantissa)}$$

Os cálculos realizados para os valores experimentais estão expostos na Tabela 4. Pode-se perceber que, embora a generalização possa ser aplicada em um intervalo maior, os resultados de raiz quadrada obtidos perderam precisão utilizando este método.

Tabela 4 – Cálculo dos valores de raiz quadrada.

n_{10}	**0,95**	**1,10**	**1,90**	**0,30**
n_2	0,111100110011010	1,000110011001101	1,111001100110011	0,010011001100110
Notação científica n_2	1,11100110011010 x 2^{-1}	1,000110011001101 x 2^{0}	1,111001100110011 x 2^{0}	1,0011001100110 x 2^{-2}
Mantissa (decimal)	0,899047852	0,100006104	0,899993896	0,199951172
Valor reduzido	(1+0,899047852) 2^{-1}	(1+0,100006104)2^{0}	(1+0,899993896)2^{0}	(1+0,199951172)2^{-2}
Expressão para cálculo da raiz	$2^{-1}\sqrt{2}\sqrt{1\ +\ 0,8990478}$	$\sqrt{1\ +\ 0,100006104}$	$\sqrt{1\ +\ 0,899993896}$	$2^{-1}\sqrt{1\ +\ 0,199951172}$
$\sqrt{n}$	0,974679434480896	1,048808848170150	1,378404875209020	0,547722557505166
$\sqrt{1\ +\ x}$ **usando 7 termos**	1,37361675749370	1,04881175664284	1,37392909790607	1,09542265073955
$\sqrt{1\ +\ x}$ **usando 8 termos**	1,39656687410706	1,04881176147889	1,39704879766781	1,09542326843289
Resultado final usando 7 termos	0,971293723975273	1,04881175664284	1,37392909790607	0,547711325369775
Resultado final usando 8 termos	0,987521907061602	1,04881176147889	1,39704879766781	0,547711634216445

CÁLCULO DO SENO

Pelo desenvolvimento da série de Taylor para sen(x) tem se o seguinte polinômio:

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \ldots$$

Ao truncarmos essa série no seu sexto elemento obtemos que:

$$\operatorname{sen}(x) \cong x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!}$$

com uma precisão mínima de 10^{-10} para $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

para conseguirmos calcular com argumentos fora do intervalo será feita a seguinte equivalência:

$$x' = x - kc, \text{ para } c = \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{Sen}(x)' = \begin{cases} \operatorname{sen}(x'), & |k| \bmod 4 = 0 \\ \cos(x'), & |k| \bmod 4 = 1 \\ -\operatorname{sen}(x'), & |k| \bmod 4 = 2 \\ -\cos(x'), & |k| \bmod 4 = 3 \end{cases}$$

Desenvolvendo a série de Taylor para cos(x):

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!} - \ldots$$

truncando no primeiros sete termos:

$$\cos(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \frac{x^{12}}{12!}$$

com uma precisão mínima de 10^{-10} para $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

UTILIZANDO O ESQUEMA DE HORNER

sendo:

$A = -1/3! = -1.666666666666667e-1$

$B = 1/5! = 8.333333333333333e-3$

$C = -1/7! = -1.984126984126984e-4$

$D = 1/9! = 2.755731922398589e-6$

$E = -1/11! = -2.505210838544172e-08$

$w = x^2$

$Sen(x) \cong x *(1 + w *(A + w *(B + w *(C + w *(D + E*a5)))))$

sendo

$A = -1/2! = -0.5$

$B = 1/4! = 0.041666666666666664$

$C = -1/6! = -0.001388888888888889$

$D = 1/8! = 2.48015873015873e-05$

$E = -1/10! = -2.755731922398589e-07$

$F = 1/12! = 2.08767569878681e-09$

$Cos(x) \cong 1 + w *(A + w *(B + w *(C + w *(D + w *(E + w *F)))))$

CÁLCULO DESTA APROXIMAÇÃO DO SENO x math.sin() DO PYTHON:

x (em graus)	Sen(x)’	math.sin(x)	erro
0º	0,0	0,0	0,0
10º	0,17364817766693036	0,17364817766693033	2,7755575615628914e-17
20º	0,3420201433256685	0,3420201433256687	2,220446049250313e-16
30º	0,4999999999999643	0,49999999999999994	3,5638159090467525e-14
40º	0,64278760968504	0,6427876096865393	1,4992451724538114e-12
50º	0,7660444431190528	0,766044443118978	7,482903185973555e-14
60º	0,86602540378444	0,8660254037844386	1,4432899320127035e-15
70º	0,9396926207859084	0,9396926207859083	1,1102230246251565e-16
80º	0,984807753012208	0,984807753012208	0,0
90º	1,0	1,0	0,0
100º	0,984807753012208	0,984807753012208	0,0
110º	0,9396926207859084	0,9396926207859084	0,0
120º	0,86602540378444	0,8660254037844387	1,3322676295501878e-15
130º	0,7660444431190528	0,766044443118978	7,482903185973555e-14
140º	0,64278760968504	0,6427876096865395	1,4994672170587364e-12
150º	0,4999999999999643	0,49999999999999994	3,5638159090467525e-14
160º	0,3420201433256685	0,3420201433256689	3,885780586188048e-16
170º	0,17364817766693036	0,17364817766693028	8,326672684688674e-17
180º	-0,0	1,2246467991473532e-16	1,2246467991473532e-16
190º	-0,17364817766693036	-0,17364817766693047	1,1102230246251565e-16
200º	-0,3420201433256685	-0,34202014332566866	1,6653345369377348e-16
210º	-0,4999999999999643	-0,5000000000000001	3,58046925441613e-14
220º	-0,64278760968504	-0,6427876096865393	1,4992451724538114e-12
230º	-0,7660444431190528	-0,7660444431189779	7,494005416219807e-14
240º	-0,86602540378444	-0,8660254037844385	1,5543122344752192e-15
250º	-0,9396926207859084	-0,9396926207859084	0,0
260º	-0,984807753012208	-0,984807753012208	0,0
270º	-1,0	-1,0	0,0
280º	-0,984807753012208	-0,9848077530122081	1,1102230246251565e-16
290º	-0,9396926207859084	-0,9396926207859083	1,1102230246251565e-16
300º	-0,.86602540378444	-0,8660254037844386	1,4432899320127035e-15
310º	-0,7660444431190528	-0,7660444431189781	7,471800955727304e-14
320º	-0,64278760968504	-0,6427876096865396	1,499578239361199e-12
330º	-0,4999999999999643	-0,5000000000000004	3,6137759451548845e-14
340º	-0,3420201433256685	-0,3420201433256686	1,1102230246251565e-16

350º	-0,17364817766693036	-0,1736481776669304	2,7755575615628914e-17
360º	0,0	-2,4492935982947064e-16	2,4492935982947064e-16

Tabela 5 – Cálculo dos valores do seno.

Gráfico comparando o erro relativo entre Sen(x)’ e math.sin(x):

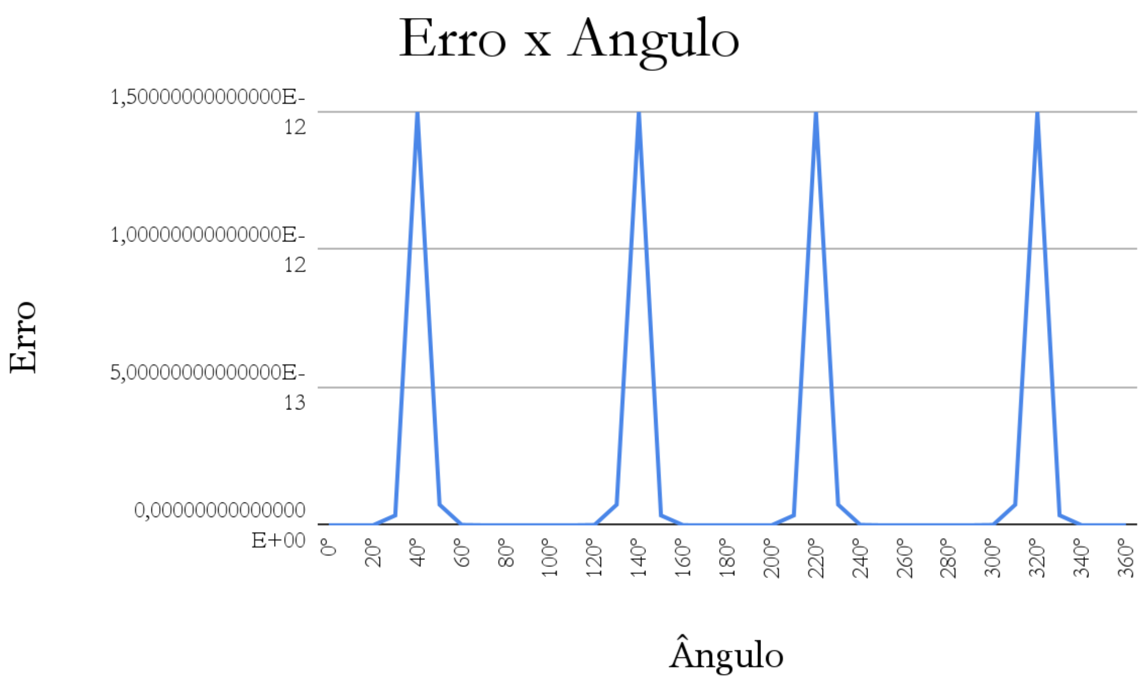

Gráfico 1 – Erro x Ângulo º.

É possível observar uma repetição nos valores dos erros, isso se deve ao caráter cíclico da função Sen(x)’, o maior erro registrado corresponde ao valor de 1,499578239361199e-12, pertencente ao ângulo de 320º, é possível observar também que o valor do erro é diretamente proporcional ao valor do argumento x’ , assim quanto maior x’ maior o erro.

APÊNDICE:

Neste apêndice será demonstrado a implementação da aproximação do seno tratada neste caso:

Nesta parte são definidas as constantes que serão utilizadas no esquema de horner:

```
#### valores para o seno ####
a1 = -1.666666666666667e-1      #-1/3!
a2 = 8.333333333333333e-3       #+1/5!
a3 = -1.984126984126984e-4      #-1/7!
a4 = 2.755731922398589e-6       #+1/9!
a5 = -2.505210838544172e-08     #-1/11!

#### valores para o cosseno ####
b1 = -0.5                        #-1/2!
b2 =  0.041666666666666664       #+1/4!
b3 = -0.001388888888888889       #-1/6!
b4 =  2.48015873015873e-05       #+1/8!
b5 = -2.755731922398589e-07      #-1/10!
b6 =  2.08767569878681e-09       #+1/12!
```

Em seguida as funções seno e cosseno no esquema de horner:

```
def seno(x):

    w = x*x

    return x *(1 + w *( a1 + w *(a2 + w *(a3 + w *(a4 + w*a5)))))

def coseno(x):

    w = x*x

    return 1 + w *( b1 + w *( b2 + w *( b3 + w *(b4 + w *(b5 + w *b6)))))
```

Nesta parte é feita a transformação do argumento de acordo com o valor do ângulo, e feita a comparação entre essa aproximação e a função math.sin() do python.

```
    erroMax= 0
    angulo = -1
    for x in range(0,361,10):

        if(x <= 45):
            res = seno(math.radians(x))

        elif(x <= 135):
            res = coseno(math.radians(x-90))

        elif(x <= 225):
            res = -1*seno(math.radians(x-180))

        elif(x <= 315):
            res = -1*coseno(math.radians(x-270))

        elif(x <=360):
            res = seno(math.radians(x-360))

        senpy = math.sin(math.radians(x))
        erro = abs(res - senpy)
        if(erro > erroMax):
            erroMax = erro
            angulo = x
```