

Démonstration guidée de la commutativité $(\mathbf{a} \star \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \star \mathbf{a})$

• Montrons que $(a \star b) \leq (b \star a)$

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{(a \star b) \leq a}^{e1} \text{ Règle 1} \\
 \overbrace{(a \star b) \leq b}^{e2} \text{ Règle 2} \\
 \underbrace{(a \star b) \leq b}_{e2} \wedge \underbrace{(a \star b) \leq a}_{e1} \Rightarrow \overbrace{(a \star b) \leq (b \star a)}^{e3} \text{ Règle 3}
 \end{array}$$

• Montrons que $(b \star a) \leq (a \star b)$

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{(b \star a) \leq b}^{e5} \text{ Règle 1} \\
 \overbrace{(b \star a) \leq a}^{e6} \text{ Règle 2} \\
 \underbrace{(b \star a) \leq a}_{e6} \wedge \underbrace{(b \star a) \leq b}_{e5} \Rightarrow \overbrace{(b \star a) \leq (a \star b)}^{e7} \text{ Règle 3}
 \end{array}$$

• Synthèse $(a \star b) = (b \star a)$

$$\underbrace{(a \star b) \leq (b \star a)}_{e3} \wedge \underbrace{(b \star a) \leq (a \star b)}_{e7} \Rightarrow \overbrace{(a \star b) = (b \star a)}^{e8} \text{ Règle antisymétrique}$$