代数系统习题课

一、 代数系统<**R**, #>上的运算“#”定义为：$x \# y=(x+1)(y+1)-1$。给出关于运算“#”的等幂元、零元、幺元、各元素的逆元、可消去元。

解：

① 等幂元是 0 或-1；

② 零元为-1；

③ 幺元为 0；

④ 除了-1 之外的其他元素 x 的逆元为-1+1/(x+1)；

⑤ 除了-1 之外其他元素 x 都是可消去元。

二、（15 分）判断如下数学结构是否构成一个代数系统，如果不是代数系统请说明原因：

① $\mathbf{N}_8$，模 5 加法“$\oplus_5$”，模 8 乘法“$\otimes_8$”；

② $\mathbf{N}_7$，模 4 加法“$\oplus_4$”，模 4 乘法“$\otimes_4$”；

③ $\mathbf{N}_6$，模 5 加法“$\oplus_5$”，模 5 乘法“$\otimes_5$”；

④ $\mathbf{N}_5$，模 8 加法“$\oplus_8$”，模 8 乘法“$\otimes_8$”；

⑤ **N**，模 8 加法“$\oplus_8$”，模 5 乘法“$\otimes_5$”。

解：

① $\mathbf{N}_8$，模 5 加法“$\oplus_5$”，模 8 乘法“$\otimes_8$”；（不是，$\oplus_5$不满足封闭性）

② $\mathbf{N}_7$，模 4 加法“$\oplus_4$”，模 4 乘法“$\otimes_4$”；（不是，$\oplus_4$不满足封闭性）

③ $\mathbf{N}_6$，模 5 加法“$\oplus_5$”，模 5 乘法“$\otimes_5$”；（是）

④ $\mathbf{N}_5$，模 8 加法“$\oplus_8$”，模 8 乘法“$\otimes_8$”；（不是，$\oplus_8$和$\otimes_8$不满足封闭性）

⑤ **N**，模 8 加法“$\oplus_8$”，模 5 乘法“$\otimes_5$”。（是）

三、（共 16 分）对于整数集 **Z**，判断以下哪些运算“$*$”构成的代数系统<**Z**, $*$>是独异点？

① $x*y = x\cdot y + 1$；

② $x*y = y$；

③ $x*y = xy+x+y$；

④ $x*y = x+ y - 2$。

解：

① $x*y = x\cdot y + 1$； 不是独异点，因为**运算“$*$”不满足结合律；**

② $x*y = y$； 不是独异点，因为**运算“$*$”虽然满足结合律，但无幺元；**

③ $x*y = xy+x+y$；是独异点，因为**运算“$*$”满足结合律，存在幺元 e=0；**

④ $x*y = x+ y - 2$。是独异点，因为**运算“$*$”满足结合律，存在幺元 e=2。**

四、（14 分）设$<G, \circ>$为群，$u\in G$，G 上的二元运算*定义为：$\forall a,b\in G, a*b=a\circ u^{-1}\circ b$, 求证：$<G, *>$为群。

证明：由$<G, \circ>$为群以及*运算的定义，$<G, *>$是代数系统，而且：

（1） *满足结合律：对于$\forall a,b,c\in G$,

$(a*b)*c=(a\circ u^{-1}\circ b)\, u^{-1}\circ c=a\circ(u^{-1}\circ b\, u^{-1})\circ c$， $a*(b*c)= a\circ u^{-1}\circ(b\circ\ u^{-1}\circ c)=a\circ(u^{-1}\circ b\circ\ u^{-1})\circ c$

所以*满足结合律

（2）幺元：设 e 是群$<G, \circ>$的幺元，$e^{-1}\in G$，

若对任意 $x\in G$ 有：$e'*x=e'\circ u^{-1}\circ x=x$, 左右两边同时右乘 x^{-1} 得：$e'\circ u^{-1}\circ x\circ x^{-1}= x\circ x^{-1}$，即 $e'\circ u^{-1}\circ e =e$，即 $e'\circ u^{-1}=e$。左右两边同时右乘 u 得：$e'=u$。因此 u 是代数系统$<G, *>$的左幺元；

若对任意 $x\in G$ 有：$x*e'=x\circ u^{-1}\circ e'=x$, 左右两边同时左乘 x^{-1} 得：$x^{-1}\circ x\circ u^{-1}\circ e' = x^{-1}\circ x$，即 $e\circ u^{-1}\circ e'=e$，即 $u^{-1}\circ e'=e$。左右两边同时左乘 u 得：$e'=u$。因此 u 是代数系统$<G, *>$的右幺元；

所以 $e'=u$ 是代数系统$<G, *>$的幺元。

（3）逆元：对于任意 $x,y\in G$, 令：$x*y=x\circ u^{-1}\circ y=e'=u$，左右两边同时左乘 x^{-1} 得：$x^{-1}\circ x\circ u^{-1}\circ y= x^{-1}\circ u$

于是，$u^{-1}\circ y= x^{-1}\circ u$，左右两边同时左乘 u 得：$y= u\circ x^{-1}\circ u$。所以 x 的右逆元为 $u\circ x^{-1}\circ u$;

令：$y*x=y\circ u^{-1}\circ x=e'=u$，左右两边同时右乘 x^{-1} 得：$y\circ u^{-1}\circ x\circ x^{-1}=u\circ x^{-1}$，于是，$y\circ u^{-1}=u\circ x^{-1}$，左右两边同时右乘 u 得：$y= u\circ x^{-1}\circ u$。所以 x 的左逆元为 $u\circ x^{-1}\circ u$;

所以，x 的左逆元为 $u\circ x^{-1}\circ u$。

综上可知$<G, *>$为群。

五、（12 分）设$<G,*>$为群，a 是 G 中元素，定义 G 上的函数 f 为：$f(x)=a*x*a^{-1}$。证明：f 是$<G,*>$到$<G,*>$的同构映射。

证明：（1）函数 f 是 G 到 G 的双射函数：

首先，对任意 $x,y\in G$, 若 $f(x)= f(y)$, 即 $a*x*a^{-1}=a*y*a^{-1}$。由于$<G,*>$为群，G 中的所有元素均为可消去元，所以 $x= y$。因此 f 是 G 到 G 的一一映射；

其次，对于任意 $u,v\in G$，令 $u= f(x)= a*x*a^{-1}$；$v= f(y)= a*y*a^{-1}$，则：

$$a^{-1}*u*a = a^{-1}*a*x*a^{-1}*a；\ a^{-1}*v*a = a^{-1}*a*y*a^{-1}*a,$$

即：$a^{-1}*u*a =x$；$a^{-1}*v*a = y$, 即存在 $x =a^{-1}*u*a$；$y=a^{-1}*v*a$ 使 $f(x)=u$，$f(y)=v$。所以 f 是 G 到 G 的满射。

由此可知函数 f 为双射函数。

（2）对于任意 $x,y\in G, f(x*y)=a*x*y*a^{-1}, f(x)*f(y)=(a*x*a^{-1})*(a*y*a^{-1})= a*x*(a^{-1}*a)*y*a^{-1}= a*x*y*a^{-1}$

所以 $f(x*y)= f(x)*f(y)$。

综上可知，f 是$<G,*>$到$<G,*>$的同构映射。

六、（18 分）求群的子群：

（1）（8 分）设$<G, *>$是 4 阶群，其中 $G=\{a,b,c,e\}$, *运算定义如下，请写出$<G, *>$的所有子群。

*	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

（2）（10 分）设$<G, *>$是 12 阶循环群，请写出$<G, *>$的所有子群。

解：（1）根据拉格朗日定理有限群的子群的阶数是有限群阶数的因子，因此 4 阶群只有 1，2，4 阶子群，其中 1 阶和 4 阶群为平凡子群，非平凡子群为 2 阶群。故：

平凡子群为：$<G, *>$和$<\{e\}, *>$

非平凡子群：$<\{a,e\}, *>$, $<\{b,e\}, *>$, $<\{c,e\}, *>$

（2）$<G, *>$是 12 阶循环群，则其子群的阶数为：1，2，3，4，6，12，且 k 阶子群是唯一的。由于循环群的子群都是循环群，故$<G, *>$的 k 阶子群即由 G 中的 k 阶元素为生成元得到的子群。假设$<G, *>$的生成元为 a，则有：

平凡子群：$\{a^0\}$，G

2 阶子群：$\{a^0, a^6\}$

3 阶子群：$\{a^0, a^4, a^8\}$

4 阶子群：$\{a^0, a^3, a^6, a^9\}$

6 阶子群：$\{a^0, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}\}$

或者，由于$<G, *>$与$<N_{12}, \oplus_{12}>$同构，故仅需给出$<N_{12}, \oplus_{12}>$的子群。下面仅给出各阶子群的载体。

1 阶子群：$\{0\}$

2 阶子群：$\{0, 6\}$

3 阶子群：$\{0, 4, 8\}$

4 阶子群：$\{0, 3, 6, 9\}$

6 阶子群：$\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$

12 阶子群：$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,11\}$

七、（10 分）设$<G,*>$为群，$C=\{a|a\in G$ 且对任意 $x\in G$ 有 $a*x=x*a\}$，证明：$<C,*>$是$<G,*>$的子群。

证明：

（1）设群$<G,*>$的幺元为 e，对任意 $x\in G$ 有 $e*x=x*e$，故 $e\in C$；所以 C 是 G 的非空子集；

（2）证明*运算在 C 上是封闭的。对于任意 $a,b\in C$，根据 C 的定义：对任意 $x\in G$ 有 $a*x=x*a$ 及 $b*x=x*b$。

$$(a*b)*x=a*(b*x)= a*(x*b) = (a*x)*b=(x*a)*b=x*(a*b),$$

由此可知 $a*b\in C$。

（3）结合律：由于 C 中元素均属于 G，$<G,*>$为群，故*在 C 上满足结合律。

（4）幺元：由（1）知群$<G,*>$的幺元也属于 C;

（5）逆元：对 C 中的任意元素 a，其逆元为 a^{-1}，对于任意 $x\in G$，$a*x=x*a$;

$$\text{同时右乘}*a^{-1}\text{：}a*x*a^{-1}=x*a*a^{-1}\text{，即 } a*x*a^{-1}=x,$$

$$\text{同时左乘 }a^{-1}\text{：}a^{-1}*a*x*a^{-1}= a^{-1}*x\text{，即 } x*a^{-1}= a^{-1}*x$$

于是 $a^{-1}\in C$。

综上可知，$<C,*>$是$<G,*>$的子群。