期末自测题 2

一、选择题

1+ y-1

1、设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，则 $f_x(1,1)=$（ B ）.

（A） 0 （B） 1 （C） π （D） $\frac{\pi}{2}$

2、下列级数中条件收敛的是（ ）

（A）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n-1}{n+10}$ （B）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$ （C）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$ （D）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$

3、函数 $z=xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向的方向导数为（ ）

A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、填空题

1、极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=$ ______ $\frac{1}{2}$ ______.

2、已知有向曲线 L 为直线 $y=1-x$ 从起点 $A(0,1)$ 到终点 $B(1,0)$ 的一段，计算曲线积分

$\int_L xydx=$ ________________________________.

3、函数 $u=x^2+xy^2+\cos z$，则 $du=$ ________________ .

4、交换二次积分的积分次序 $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy=$ ________________.

5、设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $(-1,1]$ 上的定义为 $f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 1,\end{cases}$ 则

$f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=1$ 处收敛于 ______ $\frac{3}{2}$ ______

6. 过点 P（2，-1,1）且平行于直线 $\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{-3}$ 的直线方程为______________.

三、计算题一

1、设 $z=f(x^2-y^2,2xy)$，其中 f 具有连续二阶偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

2、 一平面过点 $(1,0,-1)$ 且平行于向量 $\vec{a}=(2,1,1)$ 和 $\vec{b}=(1,-1,0)$，求该平面的方程.

3、某工厂要生产一批无盖的长方体容器，计划造价为 36 元，已知底面造价为 2 元/平方米，侧面造价为 1 元/平方米，求容积最大的长方体的尺寸.

x y z

四、计算题二

1、求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的收敛域与和函数.

2、将函数 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$ 展开为 x 的幂级数.

五、解答题

1、曲线 L 的方程为 $x=t+1, y=t-1, (1\le t\le 2)$，求 $\int_L xyds$.

2、计算 $\oint_L (2xy-2y)dx+(x^2-4x)dy$，其中 L 为逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=R^2$.

3、计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2\le 4$ 所围成的闭区域.

4、求三重积分 $\iiint_\Omega xdxdydz$，其中 Ω 为三个坐标面和平面 $x+y+z=1$ 所围成的闭区域.

5、计算曲面积分 $\iint_\Sigma y^2dydz+x^2dzdx+z^2dxdy$，其中 Σ 是抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 z=1 截得的部分的下侧.

六、证明题　已知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 也收敛.

参考答案

一、选择题

1、 B

本题求对 x 的偏导数，在求导过程中 y 为常数，所以先将 y=−1 代入，得 $f(x,1)=x$。

于是 $f_x(x,1)=1 \Rightarrow f_x(1,1)=1$

2、B

绝对收敛：$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛；条件收敛：$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n-1}{n+10}$：其通项的极限 $\lim_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n-1}{n+10}\ne 0$，级数发散

（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$：　级数本身是收敛的（交错级数，可用莱布尼兹判定），

但$\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散 ，所以是条件收敛

（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2}$： $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ，是 p 级数，p=2>1 收敛，所以是绝对收敛

（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n}$： $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\right|=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n}$，由比值审敛法，$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{-n-1}}{e^{-n}}=\frac{1}{e}<1$收敛，是绝对收敛.

3.、D

方向导数$\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\cos\beta$，本题是课本例题 P105 例 1

二、填空题

1、 $\frac{1}{2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{xy\left(\sqrt{xy+1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

2、$\frac{1}{6}$

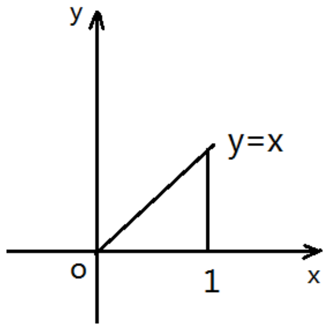
只有一个积分号，积分元素是 dx，是第二类曲线积分

$y=1-x\Rightarrow\begin{cases}x=t,\\ y=1-t,\end{cases}$ t 从 0 变到 1，$\int_L xydx=\int_0^1 t\left(1-t\right)dt=\frac{1}{6}$.

3、$\left(2x+y^2\right)dx+2xydy-\sin zdz$

$$du=u_xdx+u_ydy+u_zdz=\left(2x+y^2\right)dx+2xydy-\sin zdz$$

4、$\int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$



积分区域如图，改写成 y 型

5、$\frac{3}{2}$

本题考查 Fourier 级数的狄利克雷收敛定理：$f\left(x\right)$的 Fourier 级数在连续点处收敛于函数本身，在间断点处收敛于该点处左右极限之和的一半.

本题中给出$f(x)$在一个周期上的函数表达式，画出图像后，易见 1 是间断点，其左极限为 1，右极限为 2，所以在该点处级数收敛于$\frac{1}{2}\left(1+2\right)$，即$\frac{3}{2}$.

6、$\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{-3}$

利用直线的点向式方程，方向向量为(2,1,-3)．*延伸复习：*直线的参数式和一般式方程.

三、计算题一

1、解：$z=f\left(x^2-y^2,2xy\right)$，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot\left(x^2-y^2\right)_x'+f_2'\cdot\left(2xy\right)_x'=2xf_1'+2yf_2',$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot\left(x^2-y^2\right)_y'+f_2'\cdot\left(2xy\right)_y'=-2yf_1'+2xf_2'.$$

2、解：可取平面的法向量

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$$

根据平面的点法式方程，所求平面的方程为　$1(x-1)+1(y-0)-3(z+1)=0$

3、本题考查条件极值（拉格朗日乘数法）

解　设长方体的长、宽、高分别为 x,y,z，则目标函数为 $v\left(x,y,z\right)=xyz$，约束条件为

$xy+yz+zx=18$.

令 $F\left(x,y,z,\lambda\right)=xyz+\lambda\left(xy+yz+zx-18\right)$，则有

$$\begin{cases}F_x=yz+\lambda\left(y+z\right)=0\\ F_y=xz+\lambda\left(x+z\right)=0\\ F_z=xy+\lambda\left(y+x\right)=0\\ F_\lambda=xy+yz+zx-18=0\end{cases}$$ 解之有　$x=y=z=\sqrt{6}$ 是唯一驻点，

故长、宽、高为 $\sqrt{6}$ 可使得容积最大.

四、计算题二

1．解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+2}{n+1}\right|=1$，所以收敛半径 R=1，

当 $x=-1$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n\left(n+1\right)$，其通项极限不为零，级数发散；

当 $x=1$ 时，级数成为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)$，其通项极限不为零，级数发散.

于是级数的收敛域为（-1，1）.

设 $S\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(n+1\right)x^n=1+2x+3x^2+\cdots$，两边积分得

$$\int_0^x S\left(x\right)dx=\int_0^x\left(1+2x+3x^2+\cdots\right)dx=x+x^2+x^3+\cdots$$

$$=\left(1+x+x^2+x^3+\cdots\right)-1$$

$$=\frac{1}{1-x}-1=\frac{x}{1-x}$$

于是，$S(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}$.

2、解：$f(x)=\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}}$，

$-1<\frac{x}{2}<1\Rightarrow$ 收敛域为 $-2<x<2$.（注意级数展开必须说明收敛域!）

五、解答题

1、只有一个积分号，积分元素是 ds，是第一类曲线积分

解：$\int_L xyds=\int_1^2(t+1)(t-1)\sqrt{1+1}dt=\sqrt{2}\int_1^2\left(t^2-1\right)dt=\sqrt{2}\left(\frac{1}{3}t^3-t\right)\Big|_1^2=\frac{4}{3}\sqrt{2}$

2、只有一个积分号，积分元素是 dx，dy，是第二类曲线积分。是封闭曲线，用格林公式.

解：$\oint_L(2xy-2y)dx+\left(x^2-4x\right)dy=\iint_D\left(\left(x^2-4x\right)'_x-(2xy-2y)'_y\right)d\sigma$

$$=\iint_D(-2)d\sigma=-2(D\text{的面积})=-2\pi R^2.$$

3、有 2 个积分号，积分元素是 dxdy 或 $d\sigma$，是二重积分. 积分区域是圆域，用极坐标.

解：$\iint_D\sqrt{x^2+y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\rho\cdot\rho d\rho=\frac{16\pi}{3}$.

4、积分区域是四面体，用先一后二的方法计算.

解：$\iiint_\Omega xdxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}xdz=\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy$

$$=\int_0^1 x[(1-x)^2-\frac{1}{2}(1-x)^2]dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x-2x^2+x^3)dx=\frac{1}{24}.$$

5、解：（有 2 个积分号，积分元素是 dxdy，dydz，dzdx，是第二类曲面积分）

注意题中的积分区域并非封闭曲面，不可以直接用高斯公式!!!

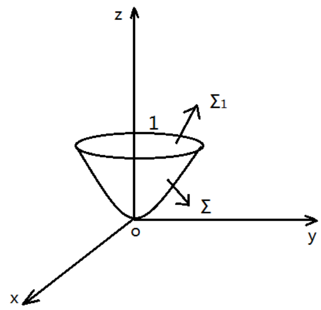
补一个面 $\Sigma_1:z=1$，方向向上，则 $\Sigma_1+\Sigma$ 形成封闭曲面，

由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}y^2dydz+x^2dzdx+z^2dxdy=\iiint_\Omega\left(\left(y^2\right)_x+\left(x^2\right)_y+\left(z^2\right)_z\right)dv=2\iiint_\Omega zdv$$

利用柱面坐标计算三重积分 $2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_{\rho^2}^1 zdz = \frac{2\pi}{3}$.

（注意是补面用高斯公式，所以还要减去 $\sum_1$ 的积分）



下面计算 $\sum_1$ 上的积分，由于 $\sum_1$ 垂直于 yoz 面和 zox 面，所以

$\iint\limits_{\Sigma_1} y^2 dydz = \iint\limits_{\Sigma_1} \left(z + x^2\right) dzdx = 0$,

$\iint\limits_{\Sigma_1} z^2 dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} 1dxdy = D_{xy}$ 的面积 $= \pi$

于是 $\iint\limits_{\Sigma} y^2 dydz + x^2 dzdx + z^2 dxdy = \frac{2\pi}{3} - \pi = -\frac{\pi}{3}$

六、证明题

证明：由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，知 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ，于是存在正整数 N，当 $n > N$ 时，必有

$$a_n < 1 \Rightarrow a_n{}^2 < a_n ,$$

由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，知 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 收敛，因此 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n{}^2$ 也收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ 收敛.