# 解微分方程

微分方程式 (\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)) 的解可以通过分离变量法来求解。设 (T(0) = T_1) 为初始条件。

1. 使用分离变量法，将方程式分离变量：

$$\frac{dT}{T - T_0} = -k\,dt$$

2. 对两边分别积分：

$$\int \frac{1}{T - T_0}\,dT = \int -k\,dt$$

3. 计算积分：

$$\ln|T - T_0| = -kt + C$$

4. 对方程的两边取指数，得到：

$$|T - T_0| = e^{-kt+C} = e^C e^{-kt}$$

令 (A = e^C)，则有：

$$T - T_0 = Ae^{-kt}$$

5. 利用初始条件 (T(0) = T_1) 来确定常数 (A)：

$$T_1 - T_0 = Ae^{-k\cdot 0} = A$$

因此，

$$A = T_1 - T_0$$

6. 最终解为：

$$T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-kt}$$

这个解表示温度 (T) 随时间 (t) 的变化关系。

**例：** 物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温差成正比，如果物体在20分钟内由100度冷却到60度，那么经过多长时间此物体的温度将达到30度？

**解** 牛顿的冷却定律是：将温度为T的物体放入处于常温$T_0$的介质中时，T的变化速率正比于T与周围介质的温度差。

由题意得 $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$

$T(0) = 100$

$T\left(\frac{1}{3}\right) = 60$

**解** 设$T_0$=20，解微分方程得

$$T = Ce^{-kt} + 20$$

根据初始条件，求得

$$T = 80(\frac{1}{2})^{3t}+20$$

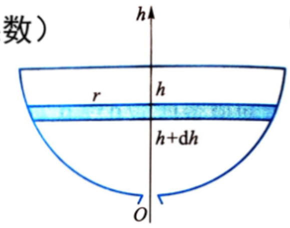
令T=30，代入上式，求得t=1。

所以经过1小时此物体温度可以降到30度。

□ **容器漏水问题：** 有高为1m的半球形容器，水从它的底部小孔流出。小孔横截面积S为1cm²。开始时容器内盛满了水。求水从小孔流出过程中容器里水面的高度 **h**（水面与孔口中心的距离）随时间 **t** 变化的规律。

**解** 由流体力学知，水从孔口流出的流量（通过孔口横截面的水的体积V对时间t的变化率）为

$$Q = \frac{dV}{dt} = 0.62 \times S \times \sqrt{2gh}$$（0.62为流量系数）




设在微小时间间隔[t, t+dt]内，

水面高度由h降至h+dh(dh<0)，则

$$dV = -\pi r^2 dh$$

$$r = \sqrt{100^2 - (100-h)^2} = \sqrt{200h - h^2}$$

**题解**

□ 微分方程的解析解命令：

**dsolve**(‘方程1’, ‘方程2’,…‘方程n’, ‘初始条件’ , ‘自变量’ )

- D表示求微分，D2、D3等表示求高阶微分；
- 任何D后所跟字母为因变量；
- 自变量可以指定或由系统规则选定为缺省。

□ **例**：求方程 $\frac{du}{dt} = 1 + u^2$ 的通解。

输入命令：u=dsolve('Du=1+u^2','t')

输出结果：u=tan(t+C1)

□例：求下列微分方程的特解。

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+29y=0 \\ y(0)=0，\ y'(0)=15 \end{cases}$$

解 输入命令:

```
y=dsolve('D2y+4*Dy+29*y=0','y(0)=0,Dy(0)=15','x')
```

结果： $y=3e^{-2x}\sin(5x)$

□例：求微分方程组的通解。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}=2x-3y+3z \\ \frac{dy}{dt}=4x-5y+3z \\ \frac{dz}{dt}=4x-4y+2z \end{cases}$$

解 输入命令:

```
[x,y,z]=dsolve('Dx=2*x-3*y+3*z','Dy=4*x-5*y+3*z',
                'Dz=4*x-4*y+2*z', 't');
```

## 数值解

- 常微分方程：$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$
- 数值解：初始点$x_0$开始的若干离散的$x(x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n)$值处，求出准确值$y(x_1), y(x_2),\ldots, y(x_n)$的相应近似值$y_1, y_2,\ldots, y_n$。

例：求解微分方程

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}-1000(1-x^2)\frac{dx}{dt}+x=0 \\ x(0)=2\ , \qquad x'(0)=0 \end{cases}$$

解：令$y_1=x, y_2=y_1'$，则微分方程变为一阶微分方程组

$$\begin{cases} y_1'=y_2 \\ y_2'=1000(1-y_1^2)y_2-y_1 \\ y_1(0)=2\,, \qquad y_2(0)=0 \end{cases}$$

- 建立m-文件vdp1000.m如下：

```
function dy=vdp1000(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=1000*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1);
```

- 取$t_0$=0，$t_f$=3000，输入命令：

```
[T,Y]=ode15s('vdp1000',[0 3000],[2 0]);
plot(T,Y(:,1),'-')
```

- 输出结果

例：求解微分方程组 $\begin{cases} y_1' = y_2 y_3 \\ y_2' = -y_1 y_3 \\ y_3' = -0.51 y_1 y_2 \\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1, y_3(0) = 1 \end{cases}$

解：

- 建立m-文件如下：

```
function dy=rigid(t,y)
    dy=zeros(3,1);
    dy(1)=y(2)*y(3);
    dy(2)=-y(1)*y(3);
    dy(3)=-0.51*y(1)*y(2);
```

- 取$t_0$=0，$t_f$=12，输入命令：

```
[T,Y]=ode45('rigid',[0 12],[0 1 1]);
plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'*',T,Y(:,3), '+')
```

## 例题

### 导弹追踪

#### 解析解

设位于坐标原点的甲舰向位于 $x$ 轴上点 A(1, 0) 处的乙舰发射导弹，导弹头始终对准乙舰。如果乙舰以最大的速度$v_0$（是常数）沿平行于 $y$ 轴的直线行驶，导弹的速度是$5v_0$，求导弹运行的曲线方程。又乙舰行驶多远时，导弹将它击中？

➤ 设导弹在t时刻的位置为P($x$(t), $y$(t))

乙舰位于Q(1, $v_0$t)

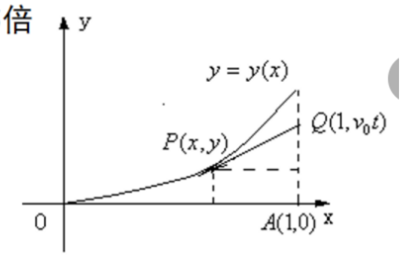
➤ 由于导弹头始终对准乙舰，故此时直线PQ就是导弹的轨迹曲线弧OP在点P处的切线

$y'=(v_0t-y)/(1-x)$ 即 $v_0t=(1-x)y'+y$

➤ 根据题意，弧OP的长度为|AQ|的5倍

$$\int_0^x \sqrt{1+(y')^2}dx = 5v_0 t$$

平面曲线的弧长公式




➤ 由以上两式消去t整理得模型

$$(1-x)y'' = \frac{1}{5}\sqrt{1+(y')^2}$$

初值条件：$y(0)=0$ $y'(0)=0$

➤ 解得导弹的运行轨迹：$y = -\frac{5}{8}(1-x)^{\frac{4}{5}} + \frac{5}{12}(1-x)^{\frac{6}{5}} + \frac{5}{24}$

□ 当$x=1$时$y=5/24$，即当乙舰航行到点（1,5/24）处被导弹击中。被击中时间：$t=y/v_0=5/24v_0$。若$v_0=1$，则在$t=0.21$处被击中。

**数值解**

➤ 令$y_1=y$, $y_2=y_1'$，将微分方程化为一阶微分方程组

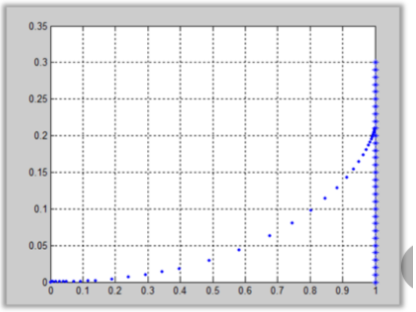
$$(1-x)y'' = \frac{1}{5}\sqrt{1+(y')^2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \frac{1}{5}\sqrt{1+y_2^2}/(1-x) \end{cases}$$

➤ 建立m-文件eq1.m

```
function dy=eq1(x,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=y(2);
dy(2)=1/5*sqrt(1+y(2)^2)/(1-x);
```

- 取x0 = 0, xf = 0.9999，建立主程序如下：

```
x0=0，xf=0.9999
[x,y]=ode15s('eq1',[x0 xf],[0 0]);
plot(x,y(:,1), 'b.')
hold on
y=0:0.01:2;
plot(1,y, 'b*')
```




- **结论**：导弹大致在（1，0.21）处击中乙舰。

- 设时刻 t 乙舰的坐标为(X(t)，Y(t))

  导弹的坐标为($x$(t)，$y$(t))

- 设导弹速度恒为$w$　$(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2=w^2$

- 由于弹头始终对准乙舰，故导弹的速度平行于乙舰与导弹头位置的差向量　$\begin{pmatrix}\frac{dx}{dt}\\ \frac{dy}{dt}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}X-x\\ Y-y\end{pmatrix}\quad \lambda>0$

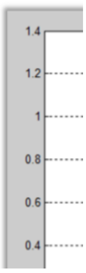
- 消去λ　$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\frac{w}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}}(X-x)\\ \frac{dy}{dt}=\frac{5}{\sqrt{(X-x)^2+(Y-y)^2}}(Y-y)\end{cases}$

- 建立m-文件eq2.m如下：

```
function dy=eq2(t,y)
dy=zeros(2,1);
dy(1)=5*(1-y(1))/sqrt((1-y(1))^2+(t-y(2))^2);
dy(2)=5*(t-y(2))/sqrt((1-y(1))^2+(t-y(2))^2);
```

- 取$t_0$=0，$t_f$=1，建立主程序如下：

```
[t,y]=ode45('eq2',[0 2],[0 0]);
Y=0:0.01:2;
plot(1,Y,'-'),
hold on
plot(y(:,1),y(:,2),'*')
grid on
```




- 乙舰以速度$v_0$沿直线x=1运动，

  设$v_0$=1，则w=5，X=1，Y=t

- 导弹运动方程：$\begin{cases}\frac{dx}{dt}=\frac{5}{\sqrt{(1-x)^2+(t-y)^2}}(1-x)\\ \frac{dy}{dt}=\frac{5}{\sqrt{(1-x)^2+(t-y)^2}}(t-y)\\ x(0)=0,\quad y(0)=0\end{cases}$

## 地中海鲨鱼

- 意大利生物学家Ancona曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究。他从第一次世界大战期间地中海各港口捕获的几种鱼类捕获量百分比的资料中，发现鲨鱼等的比例有明显增加（见下表），而供其捕食的食用鱼的百分比却明显下降。显然战争使捕鱼量下降，食用鱼增加，鲨鱼等也随之增加，但为何鲨鱼的比例大幅增加呢？他无法解释这个现象，于是求助于著名的意大利数学家Volterra希望建立一个食饵-捕食系统的数学模型，定量地回答这个问题。

| 年代 | 1914 | 1915 | 1916 | 1917 | 1918 |
|---|---|---|---|---|---|
| 百分比 | 11.9 | 21.4 | 22.1 | 21.2 | 36.4 |
| 年代 | 1919 | 1920 | 1921 | 1922 | 1923 |
| 百分比 | 27.3 | 16.0 | 15.9 | 14.8 | 19.7 |

- 符号说明
  - $x_1(t)$：食饵在t时刻的数量
  - $x_2(t)$：捕食者在t时刻的数量
  - $r_1$：食饵独立生存时的增长率
  - $r_2$：捕食者独立存在时的死亡率
  - $\lambda_1$：捕食者掠取食饵的能力
  - $\lambda_2$：食饵对捕食者的供养能力
  - e：捕获能力系数

- 模型（一）：不考虑人工捕获

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(r_1 - \lambda_1 x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1(1-0.1x_2) \\ x_2' = x_2(-0.5+0.02x_1) \\ x_1(0)=25, x_2(0)=2 \end{cases}$$

- 建立m-文件shier.m如下：

```
function dx=shier(t,x)
dx=zeros(2,1);
dx(1)=x(1)*(1-0.1*x(2));
dx(2)=x(2)*(-0.5+0.02*x(1));
```

- 建立主程序shark.m如下：

```
[t,x]=ode45('shier',[0 15],[25 2]);
plot(t,x(:,1),'-',t,x(:,2),'*')
```

## 模型二

**模型（二）：考虑人工捕获**

- 设表示捕获能力的系数为e，相当于食饵的自然增长率由$r_1$降为$r_1$-e，捕食者的死亡率由$r_2$增为$r_2$+e

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1[(r_1 - e) - \lambda_1 x_2] \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2[-(r_2 + e) + \lambda_2 x_1] \end{cases}$$

- 仍取$r_1=1$, $\lambda_1=0.1$, $r_2=0.5$, $\lambda_1=0.02$, $x_{10}=25$, $x_{20}=2$；
- 站前捕获能力系数e=0.3，战争中降为e=0.1，则站前与战争中的模型分别为：

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(0.7 - 0.1x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(-0.8 + 0.02x_1) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_1(0.9 - 0.1x_2) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_2(-0.6 + 0.02x_1) \\ x_1(0) = 25, x_2(0) = 2 \end{cases}$$

```
[t1,x]=ode45('shier1',[0 15],[25 2]);
[t2,y]=ode45('shier2',[0 15],[25 2]);
    x1=x(:,1);x2=x(:,2);
    x3=x2./(x1+x2);
    y1=y(:,1);y2=y(:,2);
    y3=y2./(y1+y2);
    plot(t1,x3,'-',t2,y3,'*')
```