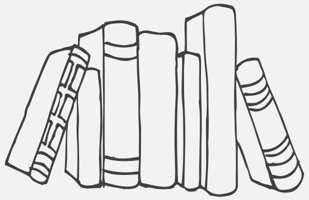
微积分B2

线面积分习题课

多元函数积分学

线面积分习题课



一、曲线积分的计算法

1. 基本方法

曲线积分 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类 (对弧长)}\\ \text{第二类 (对坐标)}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{转化}]{}$ 定积分

（1）统一积分变量 $\left\{\begin{array}{l}\text{用参数方程}\\ \text{用直角坐标方程}\\ \text{用极坐标方程}\end{array}\right.$

（2）确定积分上下限 $\left\{\begin{array}{l}\text{第一类:下小上大}\\ \text{第二类:下始上终}\end{array}\right.$

2. 第一类（对弧长）的曲线积分计算方法：

（1） 写出曲线 *L* 方程及相应弧微分公式ds

① *L*为参数方程：$\begin{cases} x=\varphi(t), y=\psi(t) \quad (\alpha \le t \le \beta) \\ \mathrm{d}s=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t \end{cases}$

② *L*为直角坐标方程：$\begin{cases} y=g(x) \quad (a \le x \le b) \\ \mathrm{d}s=\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,\mathrm{d}x \end{cases}$

③ *L*为极坐标方程：$\begin{cases} r=r(\theta) \quad \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \\ \mathrm{d}s=\sqrt{r^2+(r')^2}\,\mathrm{d}\theta \end{cases}$

(2）将 L 的表达式及弧微分公式直接代入曲线积分式, 化为定积分， 定出积分限. (注: 下限小于上限)

①L为参数方程

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

②L为直角坐标方程 $y=g(x),\quad a\le x\le b$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{a}^{b} f(x,g(x))\sqrt{1+[g'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

③L为直角坐标方程 $x=\varphi(y),\quad c\le y\le d$

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{c}^{d} f[\varphi(y),y]\sqrt{1+\varphi'^2(y)}\,\mathrm{d}y$$

④L为极坐标方程

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\sqrt{r^2+(r')^2}\,\mathrm{d}\theta$$

⑤L为空间曲线

$$\Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ z=\omega(t)\ (\alpha \le t \le \beta),$$

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}\ \mathrm{d}t$$

3. 第二类（对坐标）的曲线积分计算方法：

（1）直接化为对参变量的定积分

$$L: x=\varphi(t), y=\psi(t)$$

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

注：下限对起点，上限对终点

起点：$A(t=\alpha)$　终点：$B(t=\beta)$

$$\Gamma: x=\varphi(t),\ y=\psi(t), z=\omega(t),\quad t:\alpha\to\beta,$$

$$\int_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+$$

$$Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

(2) 利用积分与路径无关的条件

若 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ，则积分只与L的起点与终点有关,故可选取便于计算的路径,如折线段、圆弧段、直线段(结合P、Q考虑).

(3) 利用格林公式(适用于封闭曲线)化为定积分

$$\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

注：若曲线L不是封闭的,直接计算又困难, 可考虑添加辅助曲线C, 使$L+C$为封闭曲线, 再利用格林公式.

(4) 利用斯托克斯公式(适用空间封闭曲线积分).

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

利用行列式记号可记为:

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

或：

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R\end{vmatrix} ds = \oint_{\Gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

注：格林公式(斯托克斯公式)反映的是平面闭区域 D(空间曲面Σ)上重积分(曲面积分)与边界曲线上曲线积分之关系.

4. 基本技巧

（1） 利用对称性简化第一类曲线积分计算；

①平面曲线的对称性

A. 若L关于y轴对称，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & f(-x,y)=-f(x,y),\\ 2\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s, & f(-x,y)=f(x,y),\end{cases}$$

B. 若L关于x轴对称，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\begin{cases}0, & f(x,-y)=-f(x,y),\\ 2\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s, & f(x,-y)=f(x,y),\end{cases}$$

C. 关于 $y=x$ 的对称性：

(1)对称的几何形式：平面曲线具有轮换对称性是指：曲线关于直线 $x=y$ 对称。

(2)对称的代数形式：如果平面曲线 L 有轮换对称性，则它的方程 $F(x,y)=0$，有如下特征：将 $F(x,y)$ 中的变量 x,y 的位置任意互换，不会改变 F 的表达式。

(3)对称的积分形式：如果平面曲线 L 有轮换对称性，那么交换被积函数 $f(x,y)$ 中变量 x,y 的位置，积分值不会改变，即 $\int_L f(x,y)ds=\int_L f(y,x)ds$

② 空间曲线的轮换对称性

A.几何形式：空间曲线具有轮换对称性是指：曲线关于直线$x=y=z$ 对称。

B.代数形式：如果空间曲线 L 有轮换对称性，则它的方程$G(x,y,z)$ 中的变量 x,y,z 的位置任意互换，不会改变 F，G 的表达式。

C.积分形式：如果空间曲线L关于直线 $x=y=z$ 对称，那么被积函数 $f(x,y,z)$ 中的变量 x,y,z 无论怎样互换，积分值不会改变。即

$$\int_L f(x,y,z)ds=\int_L f(z,x,y)ds$$

$$=\int_L f(y,z,x)ds=\int_L f(x,z,y)ds=\cdots$$

③ 曲线的对称性的其它性质

A. 如果两条平面曲线 L_1、L_2 关于直线 $x=y$ 对称，则

$$\int_{L_1} f(x,y)ds = \int_{L_2} f(y,x)ds$$

B. 如果两条空间曲线 L_1、L_2 关于平面 $x=y$ 对称，则

$$\int_{L_2} f(x,y,z)ds = \int_{L_1} f(y,x,z)ds$$

同理，如果L_1、L_2 关于平面 $y=z$ 及 $z=x$ 对称，也有类似的性质。

C. 如果空间曲线 L 关于平面 $x = y$ 对称，那么交换被积函数 $f(x, y, z)$ 中的变量 x, y 的位置，z的位置不动，积分值不会改变。即

$$\int_L f(x,y,z)ds = \int_L f(y,x,z)ds$$

同理，如果空间曲线 L 关于平面 $y= z$ 及 $z= x$ 对称，有类似的性质。

(2) 利用积分与路径无关的等价条件;

在单连通区域G上$P(x,y),Q(x,y)$具有连续的一阶偏导数，对于曲线积分 $\int_L Pdx+Qdy$, 下面四个条件等价:

① 在G内 $\int_L Pdx+Qdy$与路径无关,

② 在G内存在 $u(x,y)$使$du=Pdx+Qdy$,

③ 在G内, $\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$,

④ $\oint_C Pdx+Qdy=0$, 闭曲线$C\subset G$.

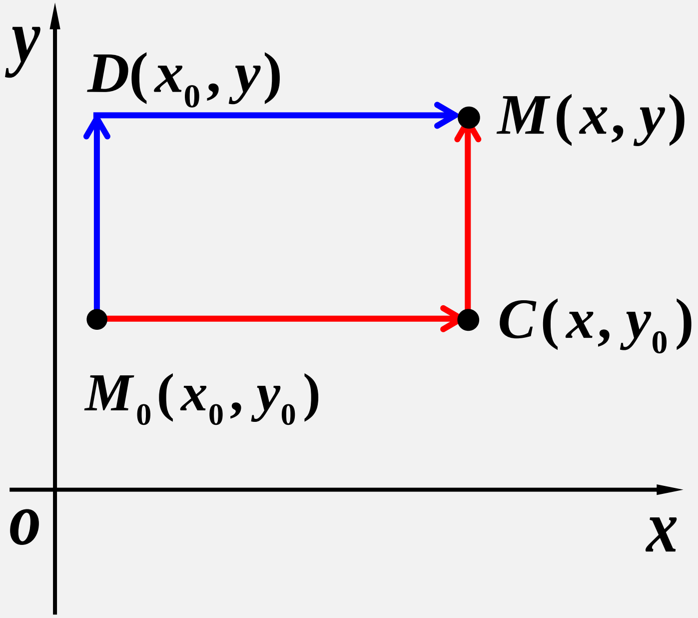
注：

如何求$u(x,y)$使$\mathrm{d}u(x,y)=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$？

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overline{M_0CM}}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$$



或 $u(x,y)=\int_{\overline{M_0DM}}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x}P(x,y)\mathrm{d}x$$

（3）利用格林公式（注意加辅助线的技巧）；

（4）利用斯托克斯公式；

（5）利用两类曲线积分的联系公式.

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_L [P\cos\alpha + Q\cos\beta]\mathrm{d}s$$

其中α,β为有向曲线L上点(x, y)处的切向量的方向角.

5. 格林公式

(1) 格林公式：$\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy$

其中 ①有向性：L是D 的正向边界曲线

②封闭性：D是有界闭区域

③连续性：$P(x,y),Q(x,y)$ 在D上有一阶连续偏导数.

注：

①如果闭曲线L^-是D的正向边界曲线L的反方向,则有：

$$\oint_{L^-} Pdx + Qdy = -\iint\limits_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$

②对复连通区域D,格林公式右端应包括沿区域D的全部边界的曲线积分，且边界的方向对区域D来说都是正向.

(2) 使用格林公式的方法：

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

闭合 $\Rightarrow$ 满足连续性的条件,则可直接用格林公式. 不满足连续性的条件,则添加曲线挖洞.

非闭 $\Rightarrow$ 补充曲线后用格林公式或直接计算

则 $I = \oint_{L+l} Pdx + Qdy - \int_l Pdx + Qdy$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

闭合 $\Rightarrow$ $I = \int_L Pdx + Qdy = 0$ (注意条件)

非闭 $\Rightarrow$ $I = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$(更换路径)

补充曲线的原则：1.尽可能与x、y轴平行；

2.与原来的图形围在一起为∂D^+或∂D^-.

6. 线积分的应用

(1) 求弧长 $L_{弧长}=\int_L \mathrm{d}s.$ $\Gamma_{弧长}=\int_\Gamma \mathrm{d}s.$

(2) 求柱面面积 $A_{柱面面积}=\int_L f(x,y)\mathrm{d}s.$

其中$f(x,y)$表示立于L上的柱面在点(x,y)处的高。

(3) 求平面图形面积 $A=\dfrac{1}{2}\oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$

(4) 求曲线的质量

①当$\mu(x,y)$为L的线密度时，质量$M=\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s$；

②当$\rho(x,y,z)$为Γ的线密度时，质量$M=\int_\Gamma \rho(x,y,z)\mathrm{d}s$.

(5) 求质心的坐标

①平面线型的质心： $\bar{x}=\dfrac{\int_L x\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s},\bar{y}=\dfrac{\int_L y\mu(x,y)\mathrm{d}s}{\int_L \mu(x,y)\mathrm{d}s}$;

②空间曲线的质心：

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}s},\bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}s},\bar{z}=\frac{\int_L z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_L \rho(x,y,z)\mathrm{d}s}.$$

(6) 转动惯量

①平面线型的转动惯量： $I_x=\int_L y^2\mu(x,y)\mathrm{d}s, I_y=\int_L x^2\mu(x,y)\mathrm{d}s$;

②空间线型的转动惯量：

$$I_x=\int_L (y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s, I_y=\int_L (z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s;$$

$$I_z=\int_L (x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

(7) 变力沿曲线做的功

① 变力 $\vec{F}$ 沿曲线 AB 所作的功为：

$$W=\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{AB}\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$\vec{F}=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ 为向量值函数，$\mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}$.

② 变力 $\vec{F}$ 沿曲线 AB 所作的功为：

$$W=\int_{AB} P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$\vec{F}=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$ 为向量值函数，

二、曲面积分的计算法

1. 基本方法

$$\text{曲面积分}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类(对面积)}\\ \text{第二类(对坐标)}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{转化}]{}\text{二重积分}$$

(1) 统一积分变量 — 代入曲面方程

$$\text{(2) 积分元素投影}\left\{\begin{array}{l}\text{第一类: 始终非负}\\ \text{第二类: 有向投影}\end{array}\right.$$

(3) 确定积分区域

— 把曲面积分域投影到相关坐标面

2. 第一类（对面积）的曲线积分计算方法

若曲面Σ：$z = z(x, y)$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

D_{xy}是Σ在xoy面上的投影.

如果积分曲面Σ由方程 $y = y(z, x)$或$x = x(y, z)$给出,可类似地把对面积的曲面积分化为相应的二重积分.

3. 第二类(对坐标)的曲面积分

(1) 分面投影法

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1) 若曲面Σ： $z = z(x,y)$, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Σ上侧取正号, 下侧取负号.

2) 若曲面Σ： $x = x(y,z)$, 则

$$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm\iint_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

Σ前侧取正号，后侧取负号.

3) 若曲面Σ：$y = y(z, x)$, 则

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm\iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

Σ右侧取正号，左侧取负号.

注：对于封闭曲面, 可考虑用高斯公式.

(2)“合一投影法”或“点积法”

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

若$\Sigma_{上}: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$，则 $\vec{n}_{上} = (-z_x, -z_y, 1)$，

$$\cos\alpha = \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos\beta = \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}, \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}.$$

$$\iint_{\Sigma_{上}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Sigma_{上}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{\Sigma_{上}} \left(P \cdot \frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} + Q \cdot \frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}} + R \cdot \frac{1}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\right)\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} [P \cdot (-z_x) + Q \cdot (-z_y) + R]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} [(P, Q, R) \cdot (-z_x, -z_y, 1)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} [(P, Q, R) \cdot \vec{n}_{上}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2) 第二类曲面积分需注意的问题

①积分曲面的方程必须表示为单值显函数，否则分片计算，结果相加.

②要写出积分曲面的方程、侧及投影区域.

由所给积分的形式确定将 Σ 向哪个坐标面投影.

③第二类曲面积分的简化计算方法有：

i.利用积分曲面的方程代入被积函数,化简被积函数.

ii.利用积分曲面的垂直性.

iii.利用两类曲面积分的关系化简计算第二类曲面积分.

4. 高斯公式

$$\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中Σ是Ω的外侧曲面(方向性),Ω是有界闭区域(封闭性),

$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在$\Omega$上有一阶连续偏导(连续性)

注: (1) 高斯公式的条件:封闭性,有向性,连续性.

(2) Ω的体积$V = \dfrac{1}{3}\oiint_{\partial\Omega_{外}} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(3)$\iiint_{\Omega} \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \oiint_{\partial\Omega_{外}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}S.$

其中: $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$是$\Sigma$上点$(x,y,z)$处指定侧的法向量的方向余弦.

(4) 高斯公式使用技巧

$$\Sigma:\begin{cases}\text{闭 合} \longrightarrow \begin{cases}\text{满足连续性的条件，则可直接用高斯公式.}\\ \text{不满足连续性的条件，则添加曲面挖洞.}\end{cases}\\ \text{非 闭} \longrightarrow \text{补充曲面使其闭合后用高斯公式}\end{cases}$$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)P\,dydz+Q\,dzdx+R\,dxdy$$

补充曲面的原则：(1)尽可能与坐标面平行；

(2)与原来的曲面围在一起为$\partial\Omega^+$或$\partial\Omega^-$.

5. 斯托克斯公式

(1) 斯托克斯公式

$$\iint_{\Sigma}[(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma]\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\oint_{\Gamma}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\mathrm{d}s$$

其中 Σ的单位法向量为 $\vec{n}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$

Γ的单位切向量为 $\vec{\tau}=\cos\lambda\,\vec{i}+\cos\mu\,\vec{j}+\cos\nu\,\vec{k}$

(2) 斯托克斯公式记忆方法

$$\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}S$$

其中$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.

(3) 斯托克斯公式几点说明

①表达了有向曲面上的曲面积分与其边界曲线上的曲线积分之间的关系.

②曲面 Σ 是定向曲面，其边界 $\partial\Sigma$ 是定向曲线，$\partial\Sigma$ 的正向与 Σ 的正侧法向量符合右手法则;

③被积函数 P, Q, R 在包含曲面 Σ 在内的一个空间区域内具有一阶连续偏导数.

即一Γ封闭, 二$\Gamma = \partial\Sigma^{+}$,

三P, Q, R在Σ上有一阶连续偏导数.

6. 基本技巧

1）利用对称性简化计算

与第一类曲线积分类似，第一类曲面积分也具有奇偶对称性及轮换对称性

(1) 关于曲面的轮换对称性

曲面Σ具有轮换对称性是指：

①**几何意义**：曲面关于直线 $x = y = z$ 对称。

②**代数意义**：它的方程 $F(x,y,z)=0$ 有如下特征：

将 $F(x,y,z)$ 中的变量 x,y,z 的位置任意互换，不会改变 F 的表达式。

③用关于曲面的轮换对称性转化曲面积分

如果 曲面 Σ 有轮换对称性，那么被积函数

$f(x, y, z)$ 中的变量 x, y, z 无论怎样互换，积值

不会改变。即

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \iint_{\Sigma} f(z,x,y)dS$$

$$= \iint_{\Sigma} f(y,z,x)dS = \iint_{\Sigma} f(x,z,y)dS = \cdots$$

$f(x,y,z)$ 中 x,y,z的全排列.

2) 关于曲面的对称性

①如果曲面 Σ关于平面 $y=x$ 对称，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma} f(y,x,z)dS$$ (x,y 互换，z不变.)

②如果曲面 Σ关于平面 $y=z$ 对称，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma} f(x,z,y)dS$$ (z,y 互换，x不变.)

③如果曲面 Σ关于平面 $z=x$ 对称，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma} f(z,y,z)dS$$ (z,x 互换，y不变.)

④如果曲面 Σ关于坐标平面 xoy 对称，

$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2,\Sigma_1$与$\Sigma_2$ 关于xoy对称，

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{dS}=\begin{cases}2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{dS}, & f\text{关于}z\text{是偶函数}, \\ 0, & f\text{关于}z\text{是奇函数}.\end{cases}$$

⑤如果曲面 Σ关于坐标平面 yoz 对称，

$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2,\Sigma_1$与$\Sigma_2$ 关于yoz对称，

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{dS}=\begin{cases}2\iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{dS}, & f\text{关于}x\text{是偶函数}, \\ 0, & f\text{关于}x\text{是奇函数}.\end{cases}$$

⑥如果曲面 Σ关于坐标平面 zox 对称,

$\Sigma=\Sigma_1\cup\Sigma_2$, Σ_1与Σ_2 关于zox对称,

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & f\text{关于}y\text{是偶函数},\\ 0, & f\text{关于}y\text{是奇函数}.\end{cases}$$

2）利用高斯公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

高斯公式反映的是空间闭区域Ω上三重积分与其边界曲面Σ上的曲面积分之间的关系.

(辅助面一般取平行坐标面的平面)

3） 两类曲面积分的转化

$$\iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_{\Sigma} [P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma]dS$$

其中α,β,γ为有向曲面Σ上点(x, y, z)处的法向量的方向角.

4) 曲面积分与曲线积分一样,可用积分曲面的方程代入被积表达式化简被积函数.

5) 利用曲面积分的几何意义简化计算曲面积分.

7. 第二类曲面积分的应用

(1) 曲面薄片的质量 $M = \iint\limits_{\Sigma} \mu(x, y, z)\,\mathrm{d}S.$

(2) 曲面的质心坐标 曲面Σ的质心坐标$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$,

若$\mu(x, y, z)$为曲面Σ的面密度,则

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma} x\mu\,\mathrm{d}S,\quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma} y\mu\,\mathrm{d}S,\quad \bar{z} = \frac{1}{M}\iint\limits_{\Sigma} z\mu\,\mathrm{d}S.$$

(3) 曲面薄片的转动惯量

$$I_x = \iint\limits_{\Sigma} (y^2 + z^2)\mu(x, y, z)\mathrm{d}S,\quad I_y = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + z^2)\mu(x, y, z)\mathrm{d}S,$$

$$I_z = \iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2)\mu(x, y, z)\mathrm{d}S,$$

(4) 通量与散度：设向量场$\vec{A}(x,y,z)=(P,Q,R)$

通过有向曲面 Σ 的通量为：$\Phi=\iint\limits_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

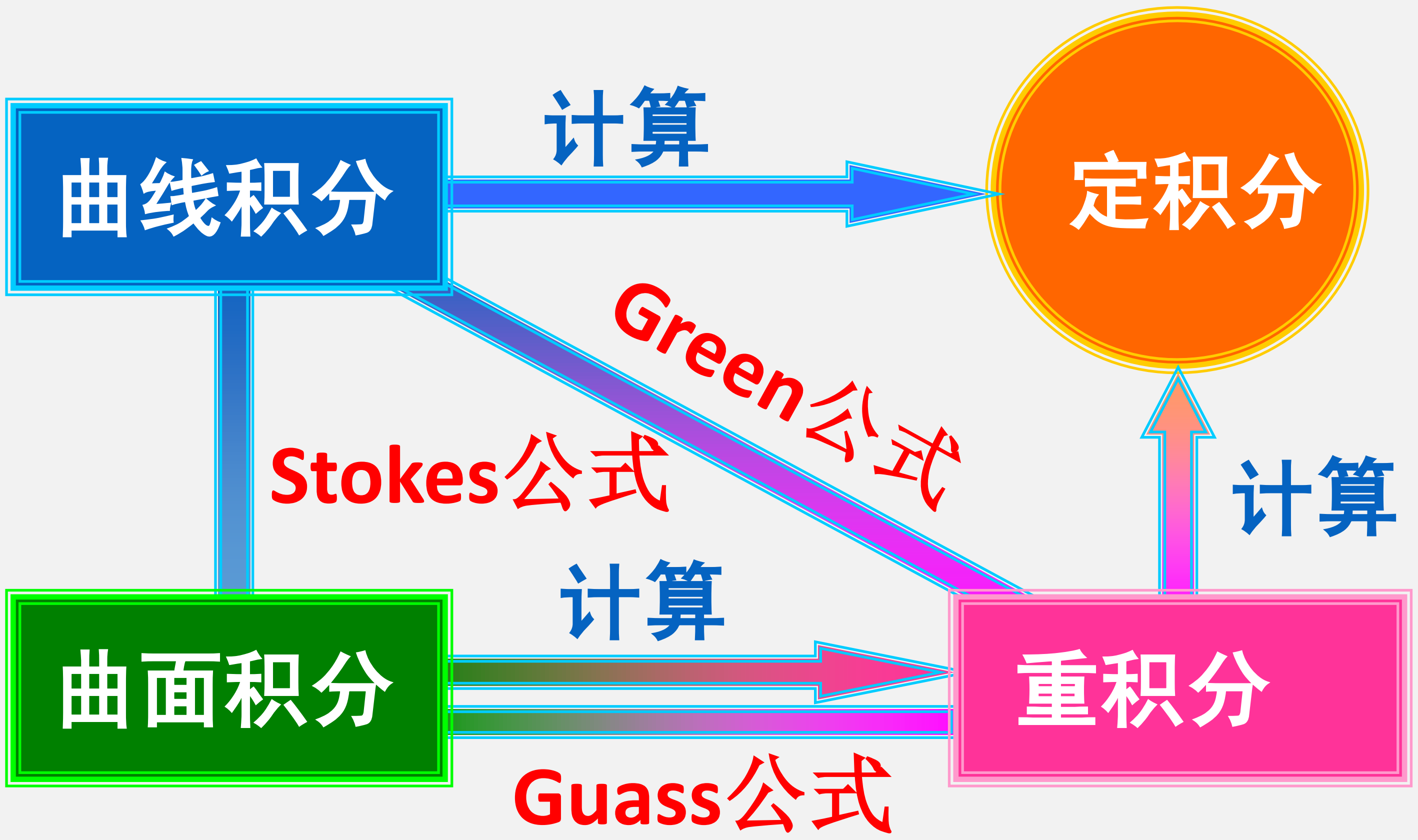
向量内任意点处的散度为：$\mathrm{div}\vec{A}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$

(5) 环流量与旋度：设向量场$\vec{A}(x,y,z)=(P,Q,R)$

$$\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

旋度 $\mathrm{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=(\dfrac{\partial R}{\partial y}-\dfrac{\partial Q}{\partial z})\vec{i}+(\dfrac{\partial P}{\partial z}-\dfrac{\partial R}{\partial x})\vec{j}+(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y})\vec{k}$

三、各种积分之间的关系



四、积分概念的联系

$$\int_{\Sigma} f(M)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M)\Delta\sigma_i,\ f(M)\text{点函数}$$

1.定积分 当 $\Sigma \to R_1$ 上区间 $[a,b]$ 时,

（区间域） $$\int_{\Sigma} f(M)d\sigma = \int_a^b f(x)dx.$$

2.二重积分 当 $\Sigma \to R_2$ 上区域 D 时,

（平面区域） $$\int_{\Sigma} f(M)d\sigma = \iint_D f(x,y)d\sigma.$$

3. 曲线积分

（曲线域）

当 $\Sigma \to R_2$ 上平面曲线 L 时，

$$\int_{\Sigma} f(M)d\sigma = \int_{L} f(x,y)ds.$$

4.三重积分

（空间域）

当 $\Sigma \to R_3$ 上区域 Ω 时，

$$\int_{\Sigma} f(M)d\sigma = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$$

5.曲线积分

（曲线域）

当 $\Sigma \to R_3$ 上空间曲线 Γ 时，

$$\int_{\Sigma} f(M)d\sigma = \int_{\Gamma} f(x,y,z)ds.$$

6.曲面积分

（曲面域）

当 $\Sigma \to R_3$ 上曲面 S 时，

$$\int_{\Sigma} f(M)d\sigma = \iint_{S} f(x,y,z)dS.$$

五、积分计算的联系

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_a^b [\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy]dx, (d\sigma\text{面元素})$$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)dV = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz, (dV\text{体元素})$$

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f[x,y(x)]\sqrt{1+y'^2}dx, (ds\text{线元素(曲)})$$

$$\int_L f(x,y)dx = \int_a^b f[x,y(x)]dx, (dx\text{线元素(投影)})$$

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)ds = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy$$

(ds面元素(曲))

$$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]dxdy$$

(dxdy面元素(投影))

其中 $\int_L Pdx+Qdy=\int(P\cos\alpha+Q\cos\beta)ds$

$$\iint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds$$

六、积分理论的联系

1.定积分与不定积分的联系

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (F'(x) = f(x))$$

牛顿--莱布尼茨公式

2.二重积分与曲线积分的联系

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L Pdx + Qdy \quad (\text{沿}L\text{的正向})$$

格林公式

3.三重积分与曲面积分的联系

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv=\oiint_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

高斯公式

4.曲面积分与曲线积分的联系

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$$

斯托克斯公式

七、Green公式, Guass公式, Stokes公式的关系

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$ 或 $$\oint_L -Qdx+Pdy=\iint_D(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y})dxdy$$

$\vec{A}(M)$为平面向量场

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{s}=\iint_D(rot\vec{A}\cdot\vec{k})dxdy$$

$$\oint_L(\vec{A}\cdot\vec{n})ds=\iint_D div\vec{A}dxdy$$

推广

$\vec{A}(M)$为空间向量场

推广

$$\oint_\Gamma A\cdot dS=\iint_\Sigma(rot\vec{A}\cdot\vec{n})dS$$

$$\oint_\Gamma Pdx+Qdy+Rdz$$

$$=\iint_\Sigma\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\oiint_\Sigma(\vec{A}\cdot\vec{n})ds=\iiint_\Omega div\vec{A}dv$$

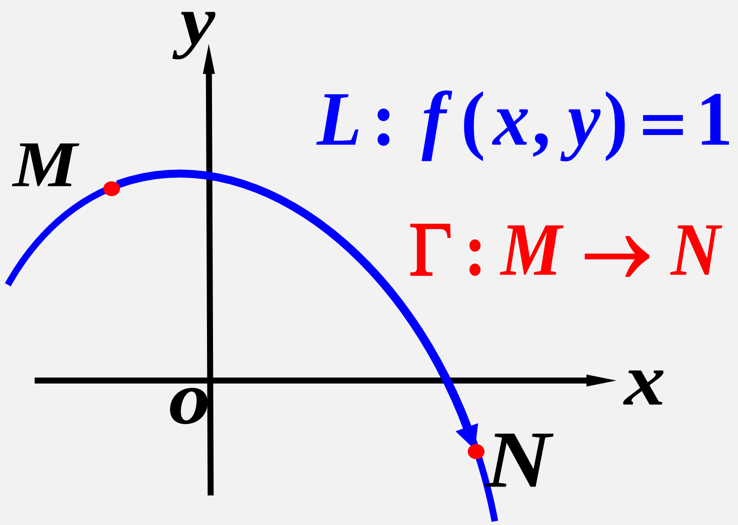
$$\oiint_\Sigma Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\iiint_\Omega(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})dv$$

例1 设曲线L：$f(x,y)=1$（$f(x,y)$具有一阶连续偏导数），过第二象限内的点M和第四象限内的点N，Γ为L上从点M到点N的一段弧，则下列小于零的是(B)

(A) $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}x$　　(B) $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}y$

(C) $\int_{\Gamma} f(x,y)\mathrm{d}s$　　(D) $\int_{\Gamma} f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$



例2. 求$I=\int_\Gamma (x^2+y-z)ds$,其中$\Gamma$为圆周$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$

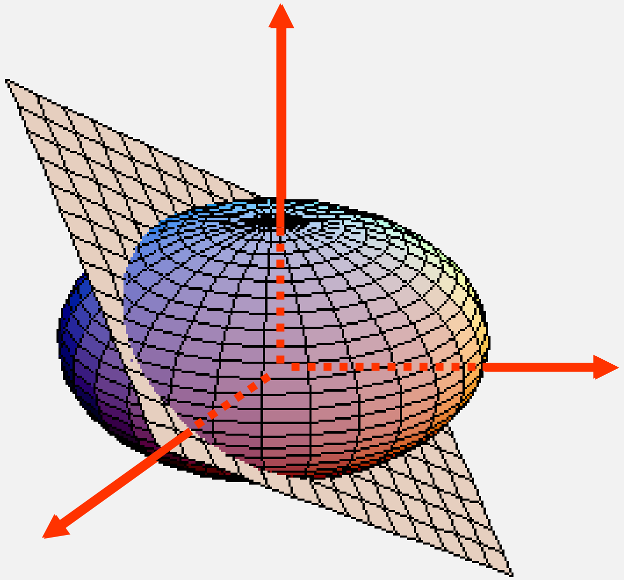
解 由对称性知: $\int_\Gamma x^2 ds=\int_\Gamma y^2 ds=\int_\Gamma z^2 ds.$

$$\int_\Gamma y ds=\int_\Gamma z ds=\int_\Gamma x ds=\frac{1}{3}\int_\Gamma (x+y+z)ds=0$$

则 $I=\int_\Gamma x^2 ds+\int_\Gamma y ds-\int_\Gamma z ds$

$$=\int_\Gamma x^2 ds=\frac{1}{3}\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)ds$$

$$=\frac{a^2}{3}\int_\Gamma ds=\frac{2\pi a^3}{3}.$$



$(\int_\Gamma ds=2\pi a$,球大圆周长)

例3. 计算$I=\int_\Gamma y\mathrm{d}s$,其中$\Gamma$为空间点$(1,0,0)$与$(0,1,1)$的直线段.

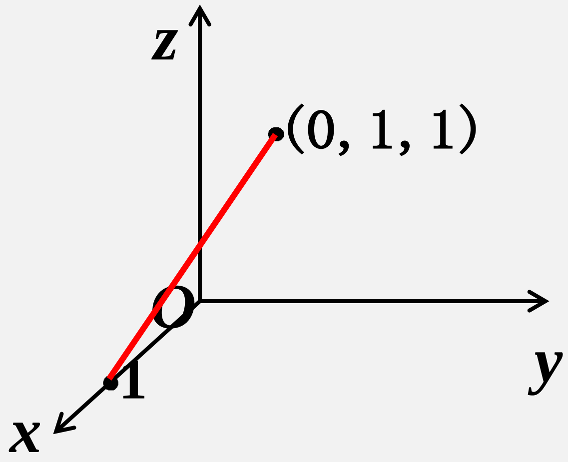
解 直线Γ: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{1}$

直线Γ的参数方程: $\begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=t \end{cases} \quad (0\le t\le 1)$

$$I=\int_0^1 t\cdot\sqrt{1+1+1}\,\mathrm{d}t$$

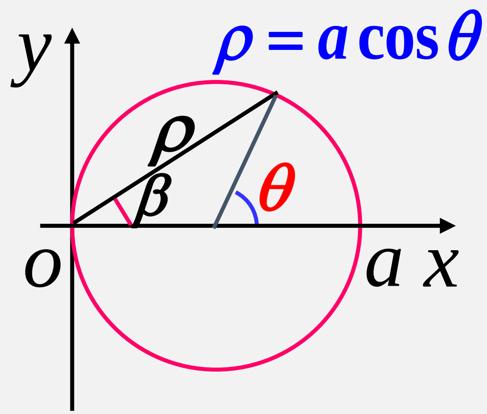
$$=\sqrt{3}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



例4. 计算 $\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中$L$为圆周 $x^2+y^2=ax$.

解 原式 $=\int_L \sqrt{ax}\,\mathrm{d}s$



法1 设L的参数方程为

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{2}(1+\cos\theta) \\ y=\dfrac{a}{2}\sin\theta \end{cases} \qquad (0\le\theta\le 2\pi)$$

$$\int_L \sqrt{ax}\,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\sqrt{a\cdot\frac{a}{2}(1+\cos\theta)}\cdot\frac{a}{2}\,\mathrm{d}\theta = 2a^2$$

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$$

法2 设L的参数方程为 $\begin{cases} x=a\cos^2\beta \\ y=a\cos\beta\sin\beta \end{cases} \quad (-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$

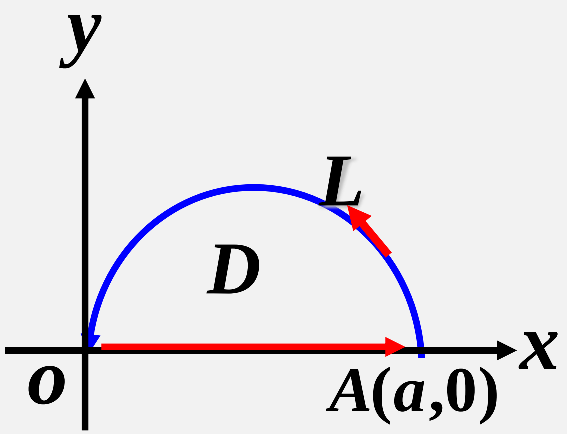
$$\int_L \sqrt{ax}\,\mathrm{d}s = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\beta}\cdot a\,\mathrm{d}\beta = 2a^2$$

例5. 计算$I=\int_L (e^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\mathrm{d}y$,其中 L为由点$(a,0)$ 到$(0,0)$的上半圆周 $x^2+y^2=ax, y\geq 0.$

解 $\because P(x,y)=e^x\sin y-my,\ Q(x,y)=e^x\cos y-m,$

$$\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=e^x\cos y-m,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=e^x\cos y,$$

添加辅助线 $\overline{OA}$ ： $y=0,\ x:0\to a$



$$则I=\oint_{L+\overline{OA}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{\overline{OA}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{OA}} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

$$=m\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^a 0\cdot\mathrm{d}x+(e^x-m)\cdot 0\mathrm{d}x=\frac{m}{8}\pi a^2-0=\frac{m}{8}\pi a^2.$$

例6. 已知曲线积分$\int_L F(x,y)[y\sin x\,dx-\cos x\,dy]$与路径无关，其中$F\in C^1$，$\underline{F(0,1)=0}$，求由$F(x,y)=0$确定的隐函数 $y=f(x)$.

解 因积分与路径无关，故有

$$\frac{\partial}{\partial x}[-F(x,y)\cos x]=\frac{\partial}{\partial y}[F(x,y)y\sin x]$$

即 $$-F_x\cos x+\cancel{F\sin x}=F_y y\sin x+\cancel{F\sin x}$$

$$\boxed{y'} \longrightarrow \boxed{-\frac{F_x}{F_y}}=y\tan x$$

因此有 $$\begin{cases} y'=y\tan x \\ y\big|_{x=0}=1 \end{cases} \longrightarrow y=\sec x$$

例7. 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有一阶连续导数, L是上半平面 $(y>0)$内的有向分段光滑曲线，其起点为(a,b),其终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分I 与路径L无关; (2) 当$ab=cd$ 时,求I 值.

证 (1) $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\{\frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\}=-\frac{1}{y^2}+f(xy)+xyf'(xy)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\{\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\}=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2}$$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, 所以在上半平面内曲线积分$I$与路径$L$无关.

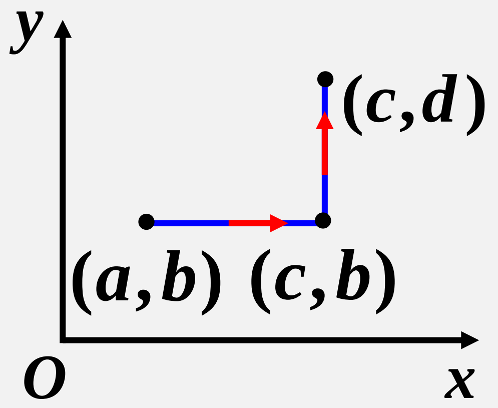
(2) 由于曲线积分I与路径L无关,

法一 $$I=\int_a^c \frac{1}{b}[1+b^2 f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d \frac{c}{y^2}[y^2 f(cy)-1]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc} f(t)\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd} f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd} f(t)\mathrm{d}t=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$$



$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\mathrm{d}y,\ (a,b)\to(c,d)$$

$$\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x=\int_a^c f(bx)\mathrm{d}(bx)\overset{t=bx}{=\!=\!=}\int_{ab}^{bc} f(t)\mathrm{d}(t)$$

$$\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y=\int_b^d f(cy)\mathrm{d}(cy)\overset{t=cy}{=\!=\!=}\int_{bc}^{cd} f(t)\mathrm{d}(t)$$

(2) 法二

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2 f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

$$=\int_L \frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x\mathrm{d}y}{y^2}+\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y,$$

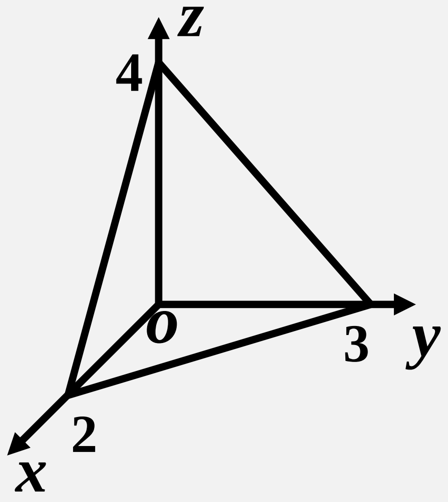
$$=\int_L \frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2}+\int_L f(xy)\left(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y\right)$$

$$=\int_L \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)+\int_L f(xy)\mathrm{d}\left(xy\right)$$

$$\boxed{F'(t)=f(t)}$$

$$=\left.\frac{x}{y}\right|_{(a,b)}^{(c,d)}+F(xy)\Big|_{ab}^{cd}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+0=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

例8 求 $\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS$，其中Σ为平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一象限中的部分.



解 $\Sigma: z=4-2x-\frac{4}{3}y$

$$D_{xy}: 0\le x\le 2, 0\le y\le 3(1-\frac{x}{2})$$

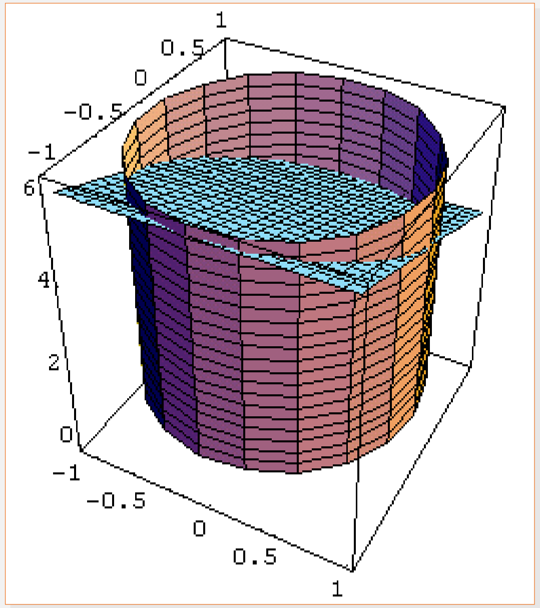
$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$$

$$\iint\limits_{\Sigma}(z+2x+\frac{4}{3}y)dS=\iint\limits_{D_{xy}}4\cdot\frac{\sqrt{61}}{3}dxdy$$

$$=\frac{4\sqrt{61}}{3}\iint\limits_{D_{xy}}dxdy=4\sqrt{61}$$

例9 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS$，其中$\Sigma$为平面$y+z=5$被柱面$x^2+y^2=25$所截得的部分.

解 积分曲面 Σ：$z=5-y$，



投影域：

$$D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 25\}$$

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{1+0+(-1)^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{2}\,dxdy,$$

故 $\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\iint\limits_{D_{xy}}(x+y+5-y)\cdot\sqrt{2}dxdy$

$$=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}(5+x)dxdy$$

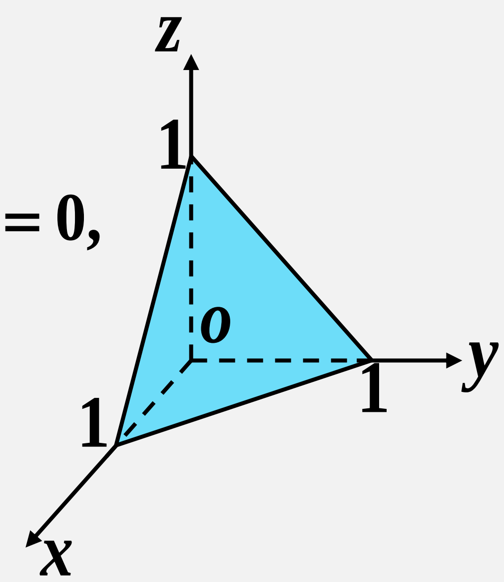
$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^5(5+r\cos\theta)rdr$$

$$=125\sqrt{2}\pi.$$

$z=5-y,\quad D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 25\}$

$D_{r\theta}=\{(r,\theta)\mid 0\le r\le 5,0\le\theta\le 2\pi\}$

例10. 计算$\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是由平面$x=0, y=0, z=0$及$x+y+z=1$所围成的四面体的整个边界曲面.



解: 设$\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$分别表示$\Sigma$在平面$x=0, y=0,$

$z=0$及$x+y+z=1$上的部分，则

$$\iint\limits_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S = \left(\iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} + \iint\limits_{\Sigma_3} + \iint\limits_{\Sigma_4}\right) xyz\,\mathrm{d}S$$

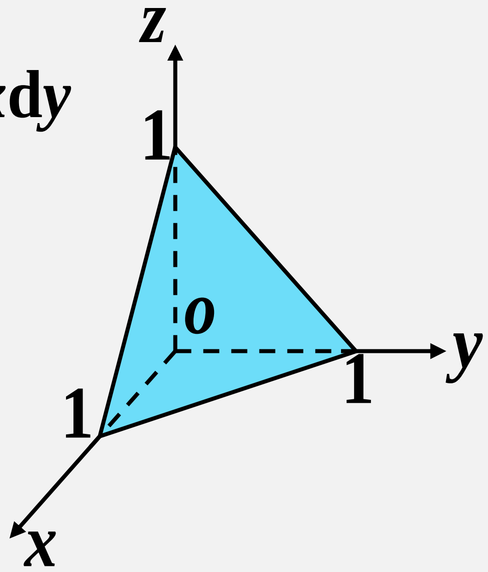
平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$\Sigma_4: z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$
$\Sigma_3: z=0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$
$\Sigma_2: y=0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}: 0\le z\le 1, 0\le x\le 1-z$
$\Sigma_1: x=0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}: 0\le z\le 1, 0\le y\le 1-z$

$$\iint_{\Sigma} xyz\,dS = \iint_{\Sigma_1} xyz dS + \iint_{\Sigma_2} xyz dS + \iint_{\Sigma_3} xyz dS + \iint_{\Sigma_4} xyz\,dS$$

$$= 0+0+0+\iint_{\Sigma_4} xyz\,dS = \iint_{D_{xy}} xy(1-x-y)\sqrt{3}dxdy$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,dx\int_0^{1-x} y(1-x-y)\,dy$$

$$= \sqrt{3}/120 .$$



平面方程	dS	投影域
$\Sigma_4: z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,dxdy$	$D_{xy}: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$
$\Sigma_3: z=0$	$dxdy$	$D_{xy}: 0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x$
$\Sigma_2: y=0$	$dzdx$	$D_{zx}: 0\le z\le 1, 0\le x\le 1-z$
$\Sigma_1: x=0$	$dydz$	$D_{yz}: 0\le z\le 1, 0\le y\le 1-z$

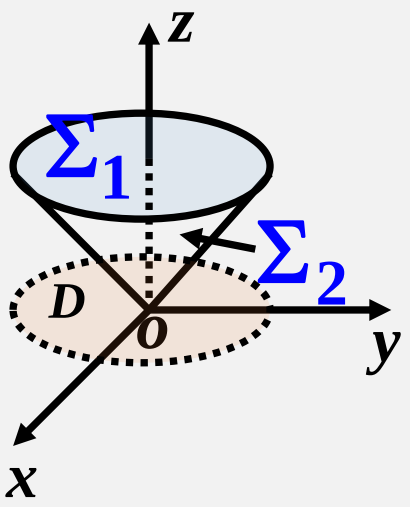
例11 计算$\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中Σ是:锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$

及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界曲面.

解 将 Σ 分解为 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$, 其中

Σ_1: $z=1$, D_1: $x^2+y^2\le 1$, $dS=dxdy$;

Σ_2 : $z=\sqrt{x^2+y^2}$, D_2: $x^2+y^2\le 1$,



$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\,dxdy=\sqrt{2}\,dxdy$$

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)dS=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)dS+\iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)dS$$

$$=\iint_{D_1}(x^2+y^2)dxdy+\sqrt{2}\iint_{D_2}(x^2+y^2)dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr+\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$=\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$$

$$=\frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi$$

例12 计算 $\iint\limits_{\Sigma}|xyz|dS$，其中 Σ 为 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$

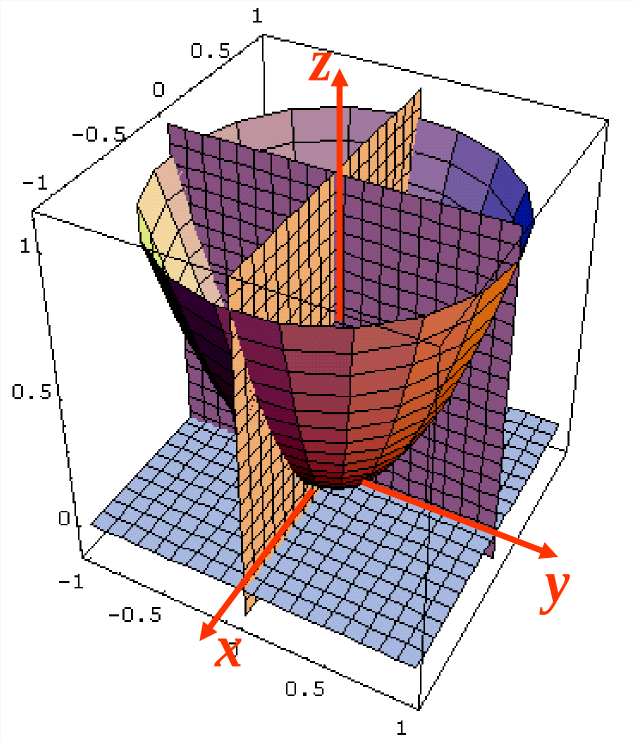
解 依对称性知：

抛物面 $z=x^2+y^2$

关于 zox, yoz 对称，

被积函数 $|xyz|$ 也对称，

则 $\iint\limits_{\Sigma} \quad = 4\iint\limits_{\Sigma_1}$



(Σ_1为第一卦限部分曲面)

其中 $D'_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

$$dS=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy=\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy$$

$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}|xyz|dS=4\iint_{\Sigma_1}xyz\,dS$$

$$=4\iint_{D_{xy}'}xy(x^2+y^2)\sqrt{1+(2x)^2+(2y)^2}dxdy$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt\int_0^1 r^2\cos t\sin t\cdot r^2\sqrt{1+4r^2}rdr$$

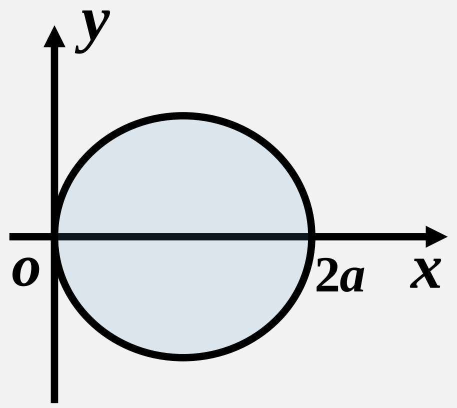
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt\int_0^1 r^5\sqrt{1+4r^2}dr$$

令$u=1+4r^2$

$$=\frac{1}{4}\int_1^5\sqrt{u}\left(\frac{u-1}{4}\right)^2du=\frac{125\sqrt{5}-1}{420}.$$

例13 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS$，其中Σ为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $x^2+y^2=2ax$ 所截得的有限部分.

解 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}, D_{xy}: x^2+y^2\le 2ax,$



$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy$$

$$=\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy$$

$$=\sqrt{2}dxdy$$

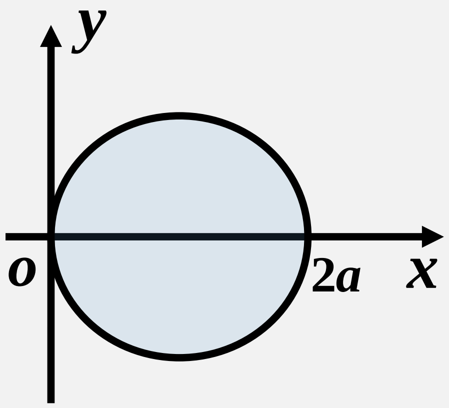
$$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS=\sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]dxdy$$

$$(1)\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]dxdy$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}[r^2\sin\theta\cos\theta+r^2(\cos\theta+\sin\theta)]rdr$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos^5\theta+\cos^5\theta+\sin\theta\cos^4\theta)d\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$$

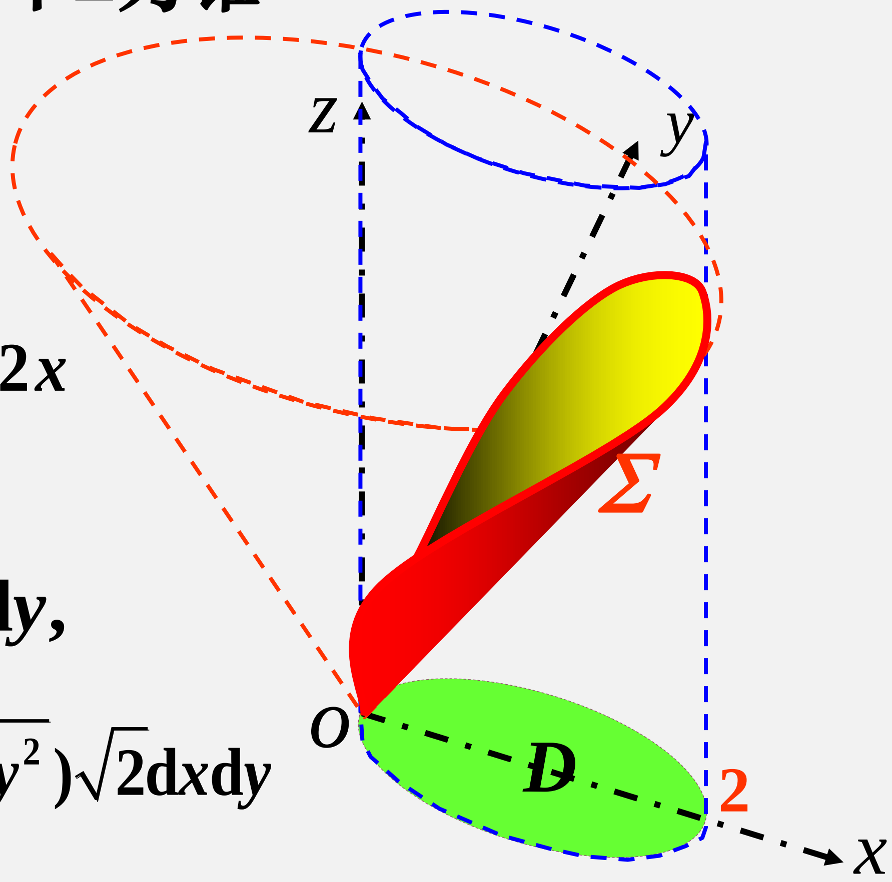
$$(2)\iint_{\Sigma}(xy+yz+zx)dS=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]dxdy$$



$$=\sqrt{2}\iint_{D_{xy}}x\sqrt{x^2+y^2}dxdy+0$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^2\cos\theta\cdot rdr=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4$$

例14. 求$\iint\limits_{\Sigma}(xy+zx+yz)\mathrm{d}S$,其中Σ为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被曲面$x^2+y^2=2x$所割下的部分.



解1 $\Sigma: z=\sqrt{x^2+y^2}$, $D:\begin{cases} x^2+y^2\le 2x \\ z=0 \end{cases}$

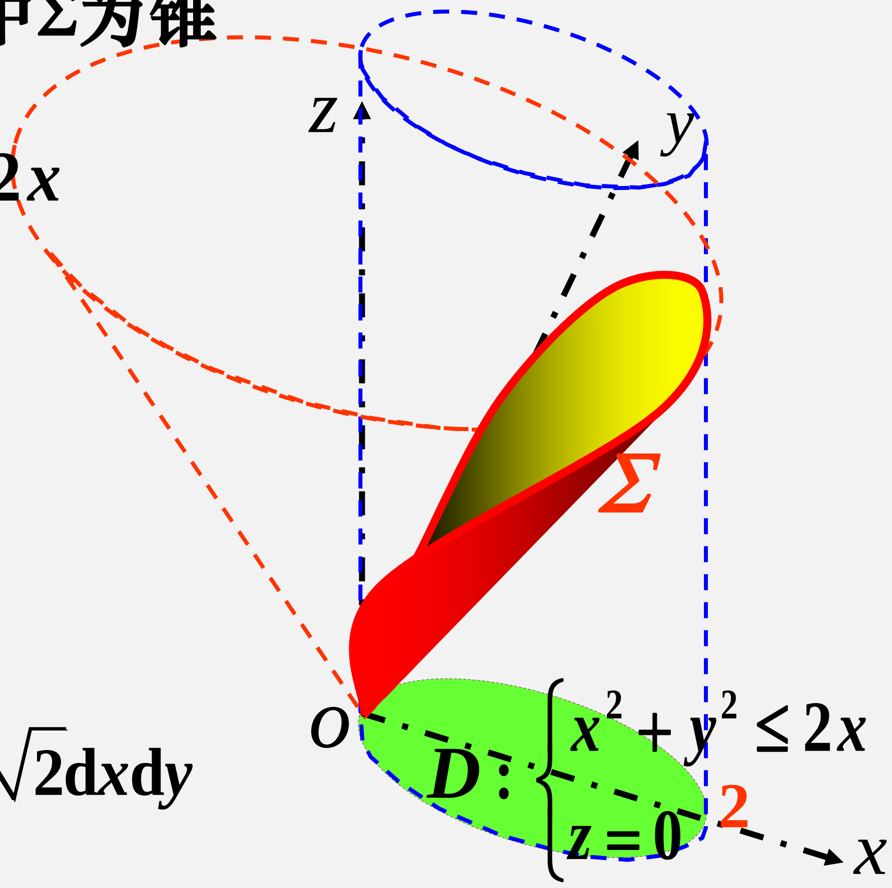
$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\text{原式}=\iint\limits_{D}(xy+y\sqrt{x^2+y^2}+x\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}(\rho^2\sin\theta\cos\theta+\rho^2\sin\theta+\rho^2\cos\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$=4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos^5\theta\sin\theta+\cos^4\theta\sin\theta+\cos^5\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}.$$

例14. 求$\iint\limits_{\Sigma}(xy+zx+yz)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被曲面$x^2+y^2=2x$所割下的部分.



解2 由于Σ关于zox面对称，

则 $\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz)\mathrm{d}S=0$,

$$原式=\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}S=\iint\limits_{D}x\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\cos\theta\cdot\rho\mathrm{d}\rho$$

$$=8\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta=8\sqrt{2}\cdot\frac{4!!}{5!!}\cdot 1=\frac{64}{15}\sqrt{2}.$$

例15 $\oiint\limits_{\Sigma} xzdxdy + xydydz + yzdzdx$ 其中Σ是平面$x=0, y=0, z=0,$

$x+y+z=1,$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

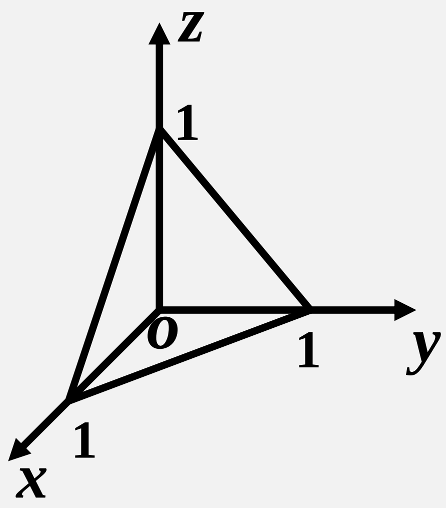
解法1 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$，其中

Σ_1: $x=0$, D_{yz}: $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1-y$,

Σ_2: $y=0$, D_{zx}: $0\le z\le 1$, $0\le x\le 1-z$,

Σ_3: $z=0$, D_{xy}: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$,

Σ_4: $z=1-x-y$, D_{xy}: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$,



$$\oiint\limits_{\Sigma} xzdxdy = \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} + \iint\limits_{\Sigma_3} + \iint\limits_{\Sigma_4} = 0+0+0+\iint\limits_{\Sigma_4} xzdxdy$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}} x(1-x-y)dxdy = \int_0^1 xdx\int_0^{1-x}(1-x-y)dy = \frac{1}{24}$$

例15 $\oiint\limits_{\Sigma} xzdxdy + xydydz + yzdzdx$ 其中Σ是平面$x=0, y=0, z=0,$ $x+y+z=1,$ 所围成的空间区域的整个边界曲面的外侧.

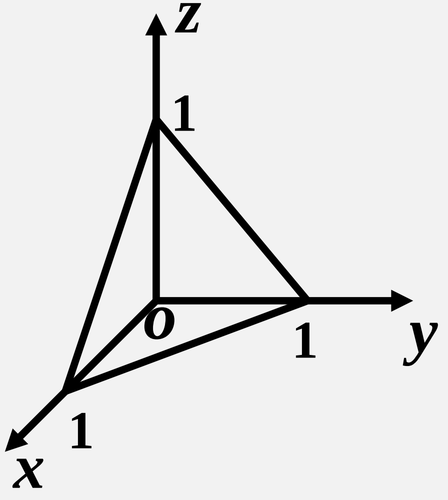
$$\oiint\limits_{\Sigma} xzdxdy = \frac{1}{24},$$

由积分变元的轮换对称性可知:

$$\oiint\limits_{\Sigma} xydydz = \oiint\limits_{\Sigma} yzdzdx = \frac{1}{24}$$

$$\oiint\limits_{\Sigma} xzdxdy + xydydz + yzdzdx = 3\times\frac{1}{24}$$

$$= \frac{1}{8}.$$

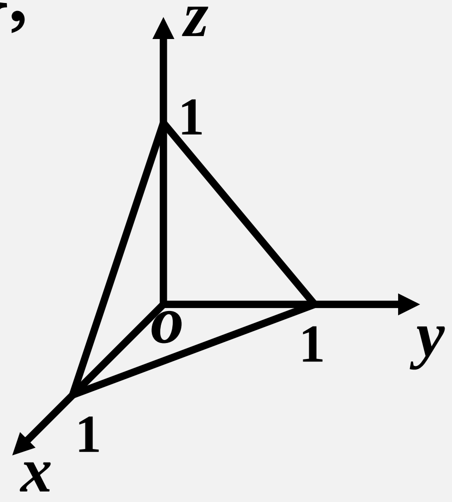


解法2　$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3+\Sigma_4$,

其中Σ_1、Σ_2、Σ_3是位于坐标面上的三块;

Σ_4: $z=1-x-y$, D_{xy}: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1-x$.

显然在Σ_1、Σ_2、Σ_3上的曲面积分均为零,



$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} xzdxdy + xydydz + yzdzdx$$

$$= \iint_{\Sigma_4} xzdxdy + xydydz + yzdzdx$$

$$= \iint_{\Sigma_4} (xy\cos\alpha + yz\cos\beta + xz\cos\gamma)dS$$

$$= 3\iint_{D_{xy}} [xy + (x+y)(1-x-y)]dxdy = \frac{1}{8}$$

例16 计算曲面积分

$$I=\oiint_{\Sigma}\frac{x}{r^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\frac{y}{r^3}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\frac{z}{r^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

其中，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\Sigma: x^2+y^2+z^2=R^2$ 取外侧.

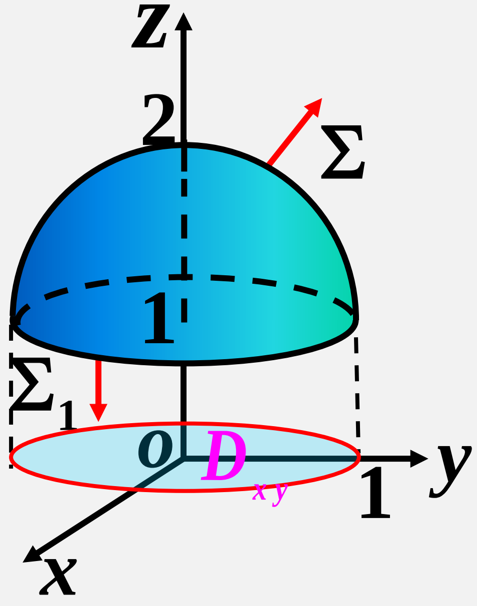
解： $I=\dfrac{1}{R^3}\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{R^3}\iiint_{\Omega}3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=4\pi$$

例17. 设Σ为曲面$z=2-x^2-y^2,\ 1\le z\le 2$ 取上侧，求

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



解: 补充曲面 $\Sigma_1: z=1$, 下侧

$(x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$, 则

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

$$=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r=\frac{13\pi}{12}$$

例18. 计算 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$, 其中Σ是

$2x^2+2y^2+z^2=4$的外侧.

解 $P=\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},Q=\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},R=\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{y^2+z^2-2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{x^2+z^2-2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

得 $\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}=0$

P,Q,R在Σ所围区域内偏导，不连续(因在原点不连续)

添加曲面Σ_1：$x^2+y^2+z^2=a^2$取外侧

添加曲面Σ_1: $x^2+y^2+z^2=a^2$取外侧

则$I=\left(\oiint\limits_{\Sigma-\Sigma_1}+\oiint\limits_{\Sigma_1}\right)\dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$,

$$=0+\frac{1}{a^3}\oiint\limits_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$=\frac{1}{a^3}\iiint\limits_{\Omega}3\,\mathrm{d}v$$ Ω是Σ_1所围区域

$$=\frac{1}{a^3}3\cdot\frac{4\pi a^3}{3}=4\pi$$

例19. 设 Σ 为简单闭曲面, $\vec{a}$ 为任意固定向量, $\vec{n}$ 为 Σ 的单外法向向量，试证

证明: 设 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

$$\overrightarrow{a^0}=(\cos\alpha',\cos\beta',\cos\gamma')$$ (常向量)

则 $\displaystyle\oiint_\Sigma \cos(\vec{n},\vec{a})\,\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma \vec{n}\cdot\vec{a}^0\,\mathrm{d}S$

$$=\oiint_\Sigma\left(\cos\alpha\cos\alpha'+\cos\beta\cos\beta'+\cos\gamma\cos\gamma'\right)\mathrm{d}S$$

$$=\oiint_\Sigma \cos\alpha'\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\cos\beta'\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\cos\gamma'\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_\Omega\left[\frac{\partial}{\partial x}(\cos\alpha')+\frac{\partial}{\partial y}(\cos\beta')+\frac{\partial}{\partial z}(\cos\gamma')\right]\mathrm{d}v$$

$$=0$$

例20 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$，其中$\Sigma$为有向曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$的上侧.

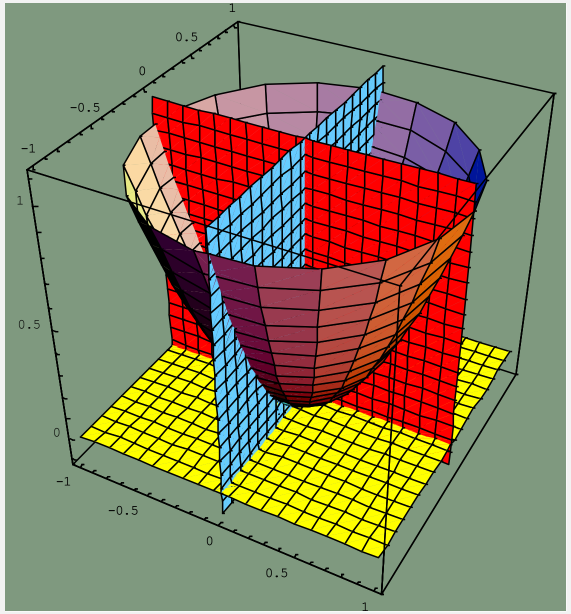
解法1　分面投影法

$$I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz+zdxdy$$

$$=I_1+I_2,$$

其中 $I_1=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)dydz,$

$$I_2=\iint\limits_{\Sigma}zdxdy\ .$$



计算I_1时，将Σ分成两片：$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$.

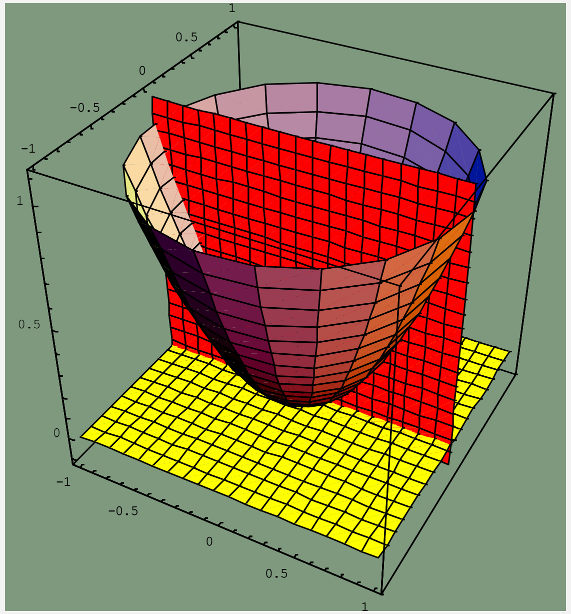
Σ_1为$x=\sqrt{z-y^2}$(取后侧)，Σ_2为$x=-\sqrt{z-y^2}$(取前侧)

$$(y,z)\in D_{yz}=\{(y,z)\mid y^2\le z\le 1,-1\le y\le 1\}.$$

$$I_1=\iint_{\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_2}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=-\iint_{D_{yz}}(2\sqrt{z-y^2}+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\iint_{D_{yz}}(-2\sqrt{z-y^2}+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

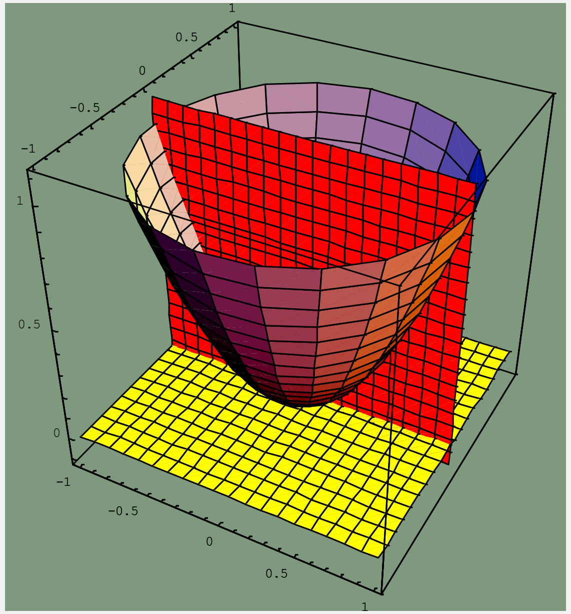


$$= -4\iint_{D_{yz}} \sqrt{z-y^2}\,dydz = -4\int_{-1}^{1} dy \int_{y^2}^{1} \sqrt{z-y^2}\,dz$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^{\frac{3}{2}}dy \underline{\underline{\;y=\sin t\;}} -\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt \; = -\pi.$$

而$I_2 = \iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)dxdy$,其中$D_{xy} = \{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \le 1\}$

是Σ在xoy面上的投影区域.



$$I_2 = \iint_{D_{xy}} \rho^3 d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2},$$

故原式$= I_1 + I_2 = -\pi + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}.$

例20 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$为有向曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$的上侧.

解法2　合一投影法

由于$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=(-z_x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,故

$$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma}((2x+z)(-2x)+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\cos\alpha=\pm\frac{-z'_x}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}},\quad \cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}.$$

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}=-z'_x,\quad dydz=\cos\alpha\,dS\ ,\quad dxdy=\cos\gamma\,dS$$

$$\iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}((2x+z)(-2x)+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}[-4x^2-2x(x^2+y^2)+(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-3\iint_{D_{xy}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}}2x(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{xy}}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-3\cdot\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-0+\frac{1}{2}\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho=-\frac{\pi}{2}.$$

例20 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$为有向曲面$z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$的上侧.

解法3 用两类曲面积分的关系，将第二类曲面积分转化为第一类曲面积分，即向量点积法

由于Σ上任一点(x,y,z)处的单位向量

$$\vec{n}^0=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}}(-z_y,-z_z,1)=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\cdot(-2x,-2y,1)$$

$$\cos\alpha=\frac{-z_x}{\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}},\cos\beta=\frac{-z_y}{\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+z_x^{\ 2}+z_y^{\ 2}}}$$

$$\iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\left(P,Q,R\right)\cdot\overrightarrow{n^0}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(2x+z)\cdot\frac{(-2x)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}+z\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{(2x+x^2+y^2)\cdot(-2x)+(x^2+y^2)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\cdot\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}}[-4x^2-2x(x^2+y^2)+(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}.$$

$$\cos\alpha=\frac{-2x}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

解法4 利用高斯公式进行计算.

作辅助曲面$\Sigma'=\{(x,y,z)\mid z=1,x^2+y^2\le 1\}$取下侧,

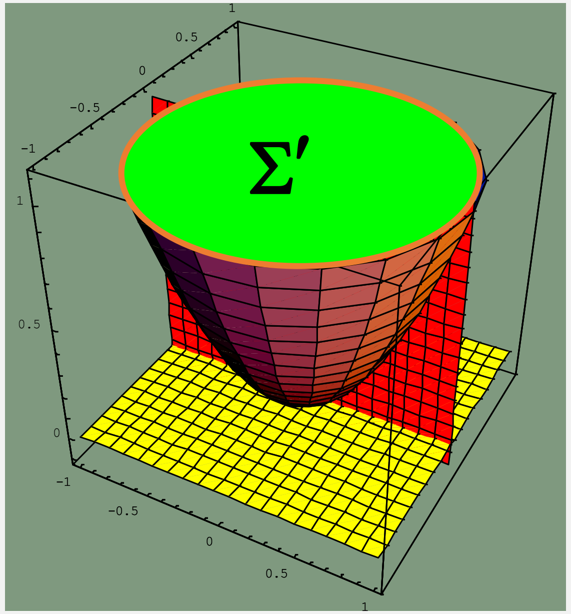
记Ω为由Σ与Σ'所围之立体,则由高斯公式知

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma'}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial(2x+z)}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial z}\right]\mathrm{d}v$$

$$=-3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}v$$

$$=-3\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\le z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-3\int_0^1\pi z\mathrm{d}z=-\frac{3\pi}{2},$$



由于Σ'在yoz面上的投影为一线段,其面积为零,

$$\iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\iint_{\Sigma'}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{D_{xy}}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi,$$

$$\iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\frac{3\pi}{2}-(-\pi)=-\frac{\pi}{2}.$$

可见就本题的计算而言,
以方法四最简便.