图论 课堂习题参考答案

一、设有向图 *G* 有 12 条边，度数为 3 的结点有 6 个，其余结点的度数均小于 3，问图中至少有几个结点？为什么？

解：假设图中有 n 个结点，6 个结点度数为 3，其余结点度数都小于 3。所以，图中结点度数之和小于 3n。根据握手定理，我们有：12*2 ＜ 3n。

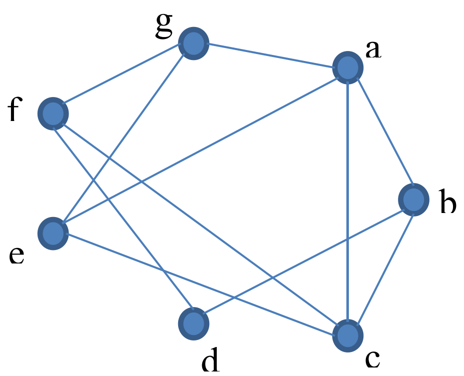
所以，n＞8

由于只有 6 个结点度数为 3，其余都小于 3。所以 n 的最小取值是大于 8 的最小整数。

即至少有 9 个结点。

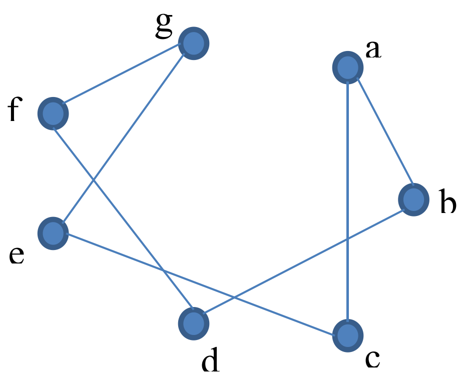
二、 **已知一次国际会议中有 a、b、c、d、e、f、g 七个人，会讲的语言分别为 a 会英语和德语，b 会英语和汉语，c 会英语、意大利语和俄语，d 会汉语和日语，e 会意大利语和德语，f 会俄语、日语和法语，g 会德语和法语。请问能否将他们的位置安排在圆桌旁，使得每个人都能与他身边的人交谈？若能，请给出具体的安排；若不能请说明原因。**

解：将每人人看成一个结点，如果两个人会同一种语言，则在对应的结点间增加一条边，由此可以得到如下无向图：



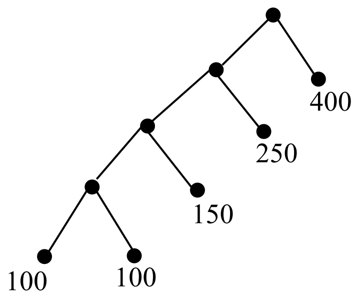
上述问题可以转化为判断上图中是否存在汉密顿回路。

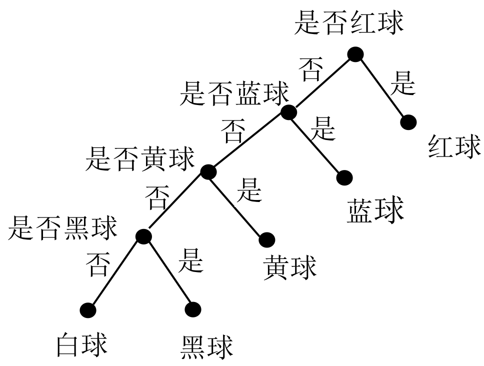
由图可知，该图到哈密顿图，其中哈密度回路可以是： （答案不唯一）



三、玩具厂现有 1000 个不种颜色的球混装在一起，可使用机器分辨球的颜色，已知红色球、黄色球、蓝色球、黑色球、白色球各 400 个，150 个，250 个，100 个，100 个。如何设计一个分辨各种颜色球的方法，使所需的时间最少？给出方案和所需时间。（假设每作一次判断所用的时间相同，都设为一个时间单位）

解：由 Huffman 算法，可得树叶赋权为 400、150、250、100、100 个的最优树如下左图所示。





由最优树可设计分辨各种颜色球的方案如上右图所示（方案可以用文字描述）。

由最优树可知其分辨各种颜色球所需的时间最少，所需时间为：

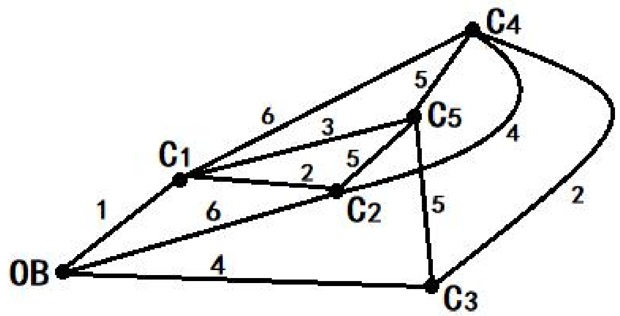
(100+100)×4+150×3+250×2+400×1=2150 时间单位。

四、为了发展乡村经济，某乡政府邀请若干企业代表组成考察团到其所管辖的 5 个村庄 C1~C5 进行考察调研。乡政府计划由工作人员带领考察团车队每天上午从乡政府办公楼出发，一天考察一个村庄，五天完成所有的考察任务。若乡政府办公楼及各村庄之间的距离（以公里计算）如下表所示（若两个地点间没有机动车道，则在表中标注为“无”）。请问工作人员每天应该如何选择路线，使得考察团车队从乡政府办公楼到各个村庄的路线最短？给出方案及最短的路线距离。

	办公楼 OB	**村庄 C_1**	**村庄 C_2**	**村庄 C_3**	**村庄 C_4**	**村庄 C_5**
办公楼 OB	0	1	6	4	无	无
村庄 C_1	1	0	2	无	6	3
村庄 C_2	6	2	0	无	4	5
村庄 C_3	4	无	无	0	2	5
村庄 C_4	无	6	4	2	0	5
村庄 C_5	无	3	5	5	5	0

解：

（1）对原问题进行抽象建模。将办公楼或村庄看成图中的结点，办公楼及各村庄之间的机动车道看成连接相应结点的边，机动车道的长度抽象为相应边上的权，可得下图所示的无向赋权图。



题给问题即为求上面赋权图中结点 OB 到各结点的最短通路。可以通过 Dijkstra 算法求结点 OB 到其

余各结点的最短通路，过程如下：

计算步骤	集合 S	辅助变量 $L(v)$					
		L(OB)	$L(C_1)$	$L(C_2)$	$L(C_3)$	$L(C_4)$	$L(C_5)$
1	$\varnothing$	0	∞	∞	∞	∞	∞
2	{OB}		1（经由OB得到）	6	4	∞	∞
3	{OB,C_1}			3（经由C_1得到）	4	7	4
4	{OB,C_1,C_2}				4（经由OB得到）	7	4
5	{OB,C_1,C_2,C_3}					6	4（经由C_1得到）
6	{OB,C_1,C_2,C_3,C_5}					6（经由C_3得到）	
7	{OB,C_1,C_2,C_3,C_5,C_4}						

OB 到 C_1 的最短路径为 OB C_1；长度为 1；
OB 到 C_2 的最短路径为 OB C_1 C_2；长度为 3；
OB 到 C_3 的最短路径为 OB C_3；长度为 4；
OB 到 C_4 的最短路径为 OB C_3 C_4；长度为 6；
OB 到 C_5 的最短路径为 OB C_1 C_5；长度为 4；

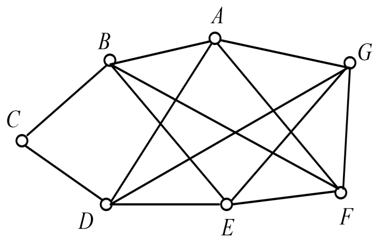
五、某通讯公司在六个地点 A, B, C, D, E, F, G 间铺设的通讯线路情况如下表所示，其中线路 AB 表示地点 A 与 B 之间有直达的线路，其余类同。

地点间的线路	运维成本（万）	地点间的线路	运维成本（万）
$A-B$	1	C－D	1
$A-G$	1	D－E	1
$A-D$	2	D－G	5
$A-F$	4	E－F	2
B－C	3	E－G	3
$B-E$	4	F－G	4
B－F	5		

（1）假设公司在地点 A，每年维护人员需要从公司出发对所有线路例行检查。请问能够规划出一条路线，使得维护人员能够检查完所有的线路一次并且仅一次，最后仍然回到公司？请说明原因。
（2）因经营效益下降，公司计划取消部分线路以节约运维成本。已知各线路运维成本如下表所示。请问取消哪些线路后仍然能够保持任意两地点间相互到达（两个地点可以通过其他地点中转），并给出改造方案及最少的运维成本。

解：

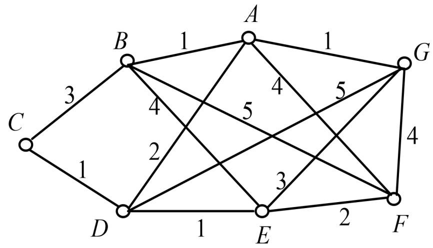
（1）将每个地点看做图中的结点，两个地点之间存在之间线路就相应地连一条边，则根据题意可以得到如下无向图：



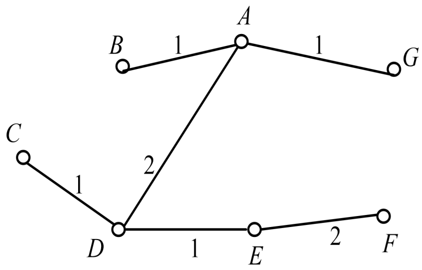
由上图可知每个结点的度数均为偶数，所以在该图中存在欧拉回路，因此存在一条路线可以从地点 A 出发检查该公司的所有运输线路一次并且仅一次，并最后返回地点 A。

该路线为：A →B →C →D →E →F →G →A→F→B→E→G→D→A

（2）根据题意，在第 1 题无向图的基础上将边上的权重设置为对应线路的运维成本，得到以下赋权图：



求出上图中的最小生成树即为所求的改造方案：



最少的运维成本为：1+1+2+1+1+2=8（万元）

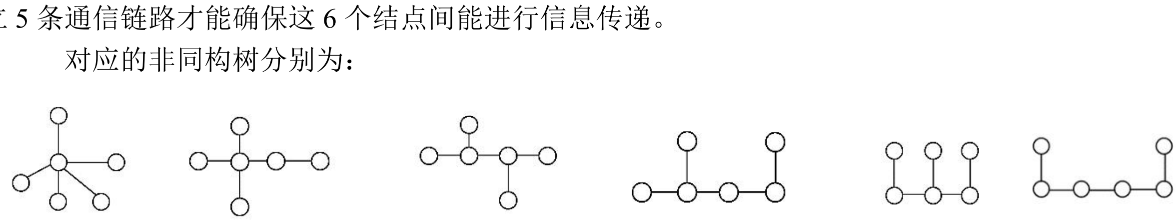
六、假设某网络由 6 个结点和连接这些结点的通信链路构成，试问至少需要建立多少条通信链路才能确保这 6 个结点间能进行信息传递？并给出满足上述条件的所有非同构的网络结构。

解：

将网络中的 6 个结点作为图中的结点，连接这些结点的通信链路作为图中的边，这样原问题就转化为求一个具有 6 个结点且边数最少的连通的无向图。

由树的性质可知，该无向图即为一棵具有 6 个结点的树 T。树 T 中边的数目为 6–1=5。故至少需要建立 5 条通信链路才能确保这 6 个结点间能进行信息传递。

对应的非同构树分别为：



上述 6 种非同构树即为满足题意要求的所有非同构的网络结构。