期末自测题 1

一．填空题

$\vec{n}$ (-3, 2, 0) (0, -2, 1)

1．已知平面经过点 $(3,0,0)(0,2,0)(0,0,1)$，则该平面的方程为________.

2．若 D 为 xOy 坐标面上半径为 2 的圆域，则二重积分 $\iint\limits_D d\sigma =$ 4π .

3．极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)\cos\frac{1}{1+x^2+y^2}=$ ________. $\to 0$　$\to 1$ 有界　0

4．已知三元函数 $u=x^2+y^2+z^2-2z$，则该函数的全微分 $du=$ ________.

$\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t \, dt$

5．若 $L:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}, 0\le t\le 2\pi$，则曲线积分 $\oint_L\left(x^2+y^2\right)ds=$ ________.

$t=x+1$　$y=t-1$　$e^{(t-1)}$　$t+$

6．函数 $f(x)=e^x$ 展开成 $x+1$ 的幂级数为 $\frac{1}{e}\frac{(t)^n}{n!}$.　$=1+(t-1)t\cdots$

7．设 $f(x)=x(-\pi\le x\le\pi)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的和函数为 $S(x)$，则 $S(\pi)=$ 0 .

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

二．单选题

$2x, -2y, 2z$

1．函数 $u=x^2-y^2+z^2$ 在点 $M_1(1,0,1)$ 沿（ C ）方向的方向导数最大：

2　0　2

A. $\{1,1,1\}$　　B. $\{1,0,-1\}$　　C. $\{1,0,1\}$　　D. $\{-1,0,1\}$

2 交换二次积分 $\int_0^1 dx\int_0^{x^2} f(x,y)dy$ 的积分顺序得（ D ）

A. $\int_0^1 dy\int_0^{x^2} f(x,y)dx$　　B. $\int_0^1 dy\int_0^{y^2} f(x,y)dy$

C. $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$　　D. $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)dx$

3．函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微是函数在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续的（ B ）条件

A．充要　　B．充分　　C．必要　　D．无关

4．下列级数中**发散** 的是（ ~~B~~ D ）

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$　　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

三．计算题一

1．已知向量 $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}, \vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$，求数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 和向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$.

2．已知二元函数 $z=x^2\sin y+y^2\sin x$，计算偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

3．计算二重积分 $\iint\limits_D(2x+5y)d\sigma$，其中 D 为由 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成的闭区域.

$\phi = x+y+z=12$

4．将自然数 12 分成三个数 x, y, z 的和，使得函数 $u = x^2 yz$ 的值最大.

$$\begin{cases} L_x = u_x + \lambda\phi_x \\ L_y = u_y + \lambda\phi_y \\ L_z = u_z + \lambda\phi_z \\ \phi_x. \end{cases}$$

四．解答下列各题

1．将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数，并指出收敛域.

2．求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{n}$ 的收敛域. -1 , 1

五．解答题

1．计算 $\iint\limits_{\Sigma} zdS$，其中曲面 $\Sigma: z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ (a > 0)$ 为上半球面.

代入求导 $\iint\sqrt{a^2-x^2-y^2}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

2．计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} \left(y + z^2\right) dydz + \left(z + x^2\right) dzdx + \left(z + y^2\right) dxdy$，其中曲面 Σ 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被平面 $z = 1$ 截得的部分的外侧.

0　0　1　不封闭 - 盖子　$1\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$

3．分析曲线积分 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} (2x + y)dx + (x - 2y)dy$ 是否与路径无关，并求积分值.

P　Q

$Q_x = P_y$

六．证明题

证明：通过变换 $\begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + 3y \end{cases}$，可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$.

参考答案

一、填空题

1．$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{1} = 1$

*考点分析：*注意到题目给出的三个点分别在三个坐标轴上，本题考查平面的截距式方程 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

*延伸复习：*平面的点法式方程 $A\left(x - x_0\right) + B\left(y - y_0\right) + C\left(z - z_0\right) = 0$

直线的点向式方程 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

（同学们可以试试用点法式求解本题）

2．　4π

*考点分析：*当被积函数为 1 时，二重积分的值等于区域 D 的面积.

延伸复习：

三重积分当被积函数为 1 时等于什么？第一类曲面积分当被积函数为 1 时等于什么？

3．　0

*考点分析：*利用无穷小×有界=无穷小

*延伸复习：*多元函数的极限，常用的方法是

1. 无穷小×有界=无穷小 ； 2. 无穷小代换； 3. 重要极限

4. $2xdx+2ydy+(2z-2)dz$

*考点分析：*全微分 $du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$

5. 2π

*考点分析：*只有一个积分号，积分元素为 ds，是第一类曲线积分.

方法一：（直接用曲线的参数方程计算）

$$\oint_L(x^2+y^2)ds=\int_0^{2\pi}(\cos^2 t+\sin^2 t)\sqrt{(\cos t)'^2+(\sin t)'^2}dt=\int_0^{2\pi}dt=2\pi$$

方法二：（把曲线方程代入到被积函数）

$L:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2=1$ 代入曲线积分的被积函数，得

$\oint_L(x^2+y^2)ds=\oint_L 1ds=L\text{的弧长}=2\pi$ （注意计算曲线曲面积分时，可以将曲线曲面方程代入被积函数，但是二重三重积分计算时不可以代入）

6. $e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!}$

$$f(x)=e^x=e^{x+1-1}=e^{-1}\cdot e^{x+1}=e^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n!},\quad -\infty<x<+\infty$$

（注意级数展开一定要写收敛域）

7. 0

*考点分析：*本题考查 Fourier 级数的狄利克雷收敛定理：$f(x)$ 的 Fourier 级数在连续点处收敛于函数本身，在间断点处收敛于该点处左右极限之和的一半.

本题中给出 $f(x)=x(-\pi\le x\le\pi)$，是一个周期上的函数表达式，将其进行周期延拓后，

易见 π 是间断点，其左极限为 π，右极限为-π，所以 $S(\pi)$=0.

二、选择题

1. C

*考点分析：*沿梯度方向，方向导数取得最大值。本题实际是求 $M_1(1,0,1)$ 处的梯度.

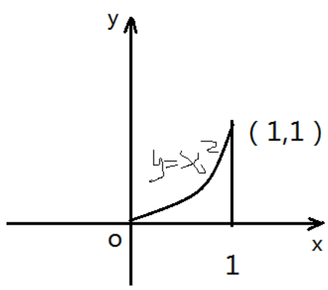
梯度 $\overrightarrow{grad}\,f=(f_x,f_y,f_z)=(2x,-2y,2z)\big|_{(1,0,1)}=(2,0,2)$

答案中没有（2,0,2)，选一个和它平行的就可以了..

2. D

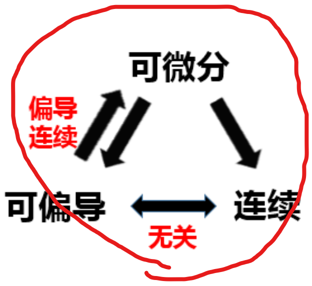
*考点分析：*交换二次积分的次序，首先画出积分区域，见右图。

再把区域改写成 Y 型.



4. B

*考点分析：*多元函数可偏导、可微分和连续的关系如图所示



5. D

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ p 级数，p=2 >1，收敛

B. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 交错级数，莱布尼茨审敛法，$u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\Rightarrow u_n>u_{n+1},\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0\Rightarrow$ 收敛

C. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 等比级数，公比 $q=\frac{1}{2}$ 收敛

D. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$ 发散

三．计算题一

1．解：$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times 2+(-3)\times 2+(-2)\times(-1)=-2$；$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -3 & -2\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=(7,-3,8)$.

2．解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin y+y^2\cos x$；$\frac{\partial z}{\partial y}=x^2\cos y+2y\sin x$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\cos y+2y\cos x.$$

3．解：原式$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(2x+5y)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{5}{2}\right)dx=\frac{7}{6}$.

4．解：（本题考查条件极值，约束条件为 $x+y+z=12$，目标函数是 $u=x^2yz$）

根据拉格朗日乘数法，构造函数

$L(x,y,z,\lambda)=x^2yz+\lambda(x+y+z-12)$，令

$$\begin{cases}L_x=2xyz+\lambda=0,\\ L_y=x^2z+\lambda=0,\\ L_x=x^2y+\lambda=0,\\ L_x=x+y+z-12=0,\end{cases}$$

，由前三个式子解得 $y=z,x=2y$，

代入最后一个方程可解得唯一驻点为 $x=6,y=z=3$，即为所求.

四．解答下列各题

1．解：$f(x)=\frac{1}{x}=\frac{1}{2+x-2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{2}}$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(x-2)^n,$$

由 $\frac{x-2}{2}\in(-1,1)$ 得收敛域为 $(0,4)$.

2．解：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=1$ ，故收敛半径 R=1，收敛区间为（-3,-1）.

当 $x=-3$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+2)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，收敛；

当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1+2)^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散；　　　故收敛域为 $[-3,-1)$

五．解答题

1、解：（有 2 个积分号，积分元素是 dS，所以是第一类曲面积分）

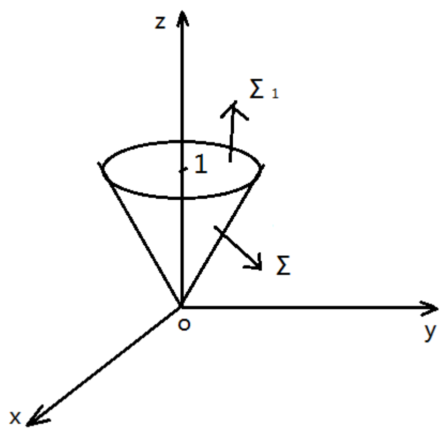
$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

曲面 Σ 在 xoy 面的投影区域 $D_{xy}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le a^2\}$，则

$$\text{原式}=\iint_D\sqrt{a^2-x^2-y^2}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy=a\iint_D dxdy=\pi a^3.$$

2．解：（有 2 个积分号，积分元素是 dxdy，dydz，dzdx，是第二类曲面积分）

注意题中的积分区域并非封闭曲面，不可以直接用高斯公式!!!



补一个面 $\Sigma_1: z=1$，方向向上，则 $\Sigma_1+\Sigma$ 形成封闭曲面，

由高斯公式

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(y+z^2)dydz+(z+x^2)dzdx+(z+y^2)dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}\left((y+z^2)_x+(z+x^2)_y+(z+y^2)_z\right)dv$$

$$=\iiint_{\Omega}1dv=V_{\Omega}=\frac{1}{3}\pi$$

（注意是补面用高斯公式，所以还要减去 Σ_1 的积分）

下面计算$\sum_1$上的积分，由于$\sum_1$垂直于 yoz 面和 zox 面，所以

$$\iint_{\Sigma_1}\left(y+z^2\right)dydz=\iint_{\Sigma_1}\left(z+x^2\right)dzdx=0,$$

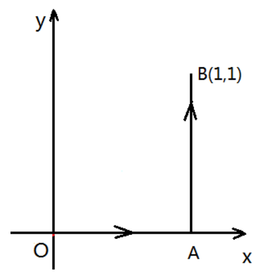
$$\iint_{\Sigma_1}\left(z+y^2\right)dxdy=\iint_{D_{xy}}\left(1+y^2\right)dxdy=\iint_{D_{xy}}1dxdy+\iint_{D_{xy}}y^2dxdy$$

$$=\pi+\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\sin^2\theta\rho d\rho=\frac{5\pi}{4}$$

于是$\iint_{\Sigma}\left(y+z^2\right)dydz+\left(z+x^2\right)dzdx+\left(z+y^2\right)dxdy=\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{4}=-\frac{11\pi}{12}$

3．解：记$P(x,y)=2x+y$，$Q(x,y)=x-2y$，则在xOy面内$\frac{\partial Q}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial y}$，从而积分

与路径无关，取积分路径为有向折线如图 OAB



$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(2x+y)dx+(x-2y)dy=\int_0^1 2xdx+\int_0^1(1-2y)dy=1.$$

六．证明题

证明：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+3\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+3\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=-2\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+3\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+3\left(-2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-12\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

方程右边

$$=6\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+12\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+6\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\ -2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+3\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\ \ -4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+12\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-9\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

$$=25\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$$

从而方程化为$25\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$=0，即$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.