习题课——数理逻辑部分

一、命题逻辑符号化：

设命题 P：这个材料很有趣；Q：这些习题很难；R：这门课程使人喜欢。请将下列句子符号化。

（1）这个材料很有趣，并且这些习题很难。

（2）这个材料无趣，习题也不难，那么，这门课程就不会使人喜欢。

（3）这个材料无趣，习题也不难，而且这门课程也不使人喜欢。

（4）这个材料很有趣意味着这些习题很难，反之亦然；

解:

（1）$P \wedge Q$

（2）$(\neg P \wedge \neg Q) \rightarrow \neg R$

（3）$\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R$

（4）$P \leftrightarrow Q$

二、谓词逻辑符号化（使用全总个体域）：

（1）没有人可以永生不死。

（2）天下乌鸦一般黑。

（3）金子一定闪光，但闪光的不一定是金子。

（4）所有的大学生都会说英语，有一些大学生会说法语。

解:

（1）设 $P(x)$表示“x 是人”，$Q(x)$表示“x 会死”，则命题符号化为：

$\neg(\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$ 或 $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$

（2）设 $F(x)$表示“x 是乌鸦”，$G(x, y)$表示“x 与 y 一般黑”，则命题符号化为：

$(\forall x)(\forall y)(F(x) \wedge F(y) \rightarrow G(x, y))$ 或 $\neg(\exists x)(\exists y)(F(x) \wedge F(y) \wedge \neg G(x, y))$

（3）设 $G(x)$表示“x 是金子”，$L(x)$表示“x 会闪光”，则命题符号化为：

$(\forall x)(G(x) \rightarrow L(x)) \wedge (\exists x)(L(x) \wedge \neg G(x))$

（4）设 $S(x)$表示“x 是大学生”，$E(x)$表示“x 会说英语”，$F(x)$表示“x 会说法语”，则命题符号化为：$(\forall x)(S(x) \rightarrow E(x)) \wedge (\exists x)(S(x) \wedge F(x))$

或引入二元谓词 $C(x, y)$表示“x 可以说 y 这种语言”，a 表示英语，b 表示法语，那么命题符号化为：$(\forall x)(S(x) \rightarrow C(x, a)) \wedge (\exists x)(S(x) \wedge C(x, b))$。

三、为了迎接五一劳动节，某中学决定举办黑板报比赛。比赛要求初中、高中各个班级制作一期以“劳动最光荣”为主题的黑板报。初一（3）班的宣传委员在组织出黑板报的过程中，发现缺少了以下四种文具用品：颜料、画笔、直尺和美工刀，而且了解到这四种文具用品在学校里的四个文具供应点 A，B，C 和

D 的供应情况，如下表所示。请问如何选择个数最少的文具供应点购买文具用品，而所购买的文具用品种类齐全（要求使用命题逻辑析取范式法求解）。

文具用品 / 供应点	颜料	画笔	直尺	美工刀
A	有	有		
B	有		有	有
C		有		有
D	有		有	

解：

设 A：选择供应点 A；　B：选择供应点 B；

C：选择供应点 C；　D：选择供应点 D

希望所购买的文具用品种类齐全，则：

（A∨B∨D）∧（A∨C）∧（B∨D）∧（B∨C）

⇔（（A∨C）∧（B∨C））∧（（A∨（B∨D））∧（B∨D））

⇔（（A∧B）∨C）∧（B∨D）

⇔（（A∧B）∧（B∨D））∨（C∧（B∨D））

⇔（A∧B∧B）∨（A∧B∧D）∨（C∧B）∨（C∧D）

⇔（A∧B）∨（A∧B∧D）∨（B∧C）∨（C∧D）

需要选择个数最少的文具供应点，故可得到三种选择方案：

第一种方案：选择供应点 A 和 B

第二种方案：选择供应点 B 和 C

第三种方案：选择供应点 C 和 D

四、符号化下列命题，用命题逻辑的构造证明法加以证明。

如果小张上课认真听讲，并且课后及时复习，那么她就能掌握基本知识点。而她或者未掌握基本知识点，或者已经能够完成作业了。事实上小张课后及时复习了但并没有完成作业。因此，她没有好好听课。

解：命题符号化：

p：小张上课认真听讲；q：小张课后及时复习；

r：小张掌握基本知识点；s：小张能够完成作业。

推理形式：

前提：$(p\wedge q)\to r$，$\neg r\vee s$，$q\wedge\neg s$

结论：$\neg p$

推理如下：

(1) $q\wedge\neg s$　　前提引入

(2) $\neg s$　　(1)化简式

(3) $\neg r\vee s$　　前提引入

(4) $\neg r$　　(2)(3)析取三段论

(5) $(p\wedge q)\rightarrow r$	前提引入
(6) $\neg(p\wedge q)$	(4)(5)拒取式
(7) $\neg p\vee\neg q$	(6)等值置换
(8) q	(1)化简式
(9) $\neg p$	(7)(8)析取三段论

五、请将下面的一段程序化简（要求利用命题逻辑中的相关知识，给出具体求解步骤，并写出化简后的程序）：

```
IF   A∧B   THEN
     IF   B∨C   THEN
          X
     ELSE
          Y
     END
ELSE
     IF   A∧C   THEN
          Y
     ELSE
          X
     END
END
```

解：从程序可知，该程序最终是在什么情况下执行 X 和在什么情况下执行 Y，根据命题联结词的定义，可得：

执行 X 的条件：$((A\wedge B)\wedge(B\vee C))\vee(\neg(A\wedge B)\wedge\neg(A\wedge C))$

执行 Y 的条件：$((A\wedge B)\wedge\neg(B\vee C))\vee(\neg(A\wedge B)\wedge(A\wedge C))$

则程序语言的化简即为以上命题公式是否有与之逻辑等价的形式更简单的命题公式。

执行 X 的条件可化简为：

$$
\begin{aligned}
&((A\wedge B)\wedge(B\vee C))\vee(\neg(A\wedge B)\wedge\neg(A\wedge C))\\
&\Leftrightarrow ((A\wedge B)\vee\neg(A\wedge B))\wedge((B\vee C)\vee\neg(A\wedge B))\\
&\quad\wedge((A\wedge B)\vee\neg(A\wedge C))\wedge((B\vee C)\vee\neg(A\wedge C))\\
&\Leftrightarrow (B\vee C\vee\neg A\vee\neg B)\wedge((A\wedge B)\vee\neg A\vee\neg C)\wedge(B\vee C\vee\neg A\vee\neg C)\\
&\Leftrightarrow (A\wedge B)\vee\neg A\vee\neg C\\
&\Leftrightarrow \neg(A\wedge\neg B\wedge C)
\end{aligned}
$$

执行 Y 的条件可化简为：

$$
\begin{aligned}
&((A\wedge B)\wedge\neg(B\vee C))\vee(\neg(A\wedge B)\wedge(A\wedge C))\\
&\Leftrightarrow (A\wedge B\wedge\neg B\wedge\neg C)\vee((\neg A\vee\neg B)\wedge A\wedge C)\\
&\Leftrightarrow (\neg A\vee\neg B)\wedge A\wedge C
\end{aligned}
$$

$\Leftrightarrow (\neg A \wedge A \wedge C) \vee (\neg B \wedge A \wedge C)$

$\Leftrightarrow A \wedge \neg B \wedge C$

因此，原程序可化简为：

```
IF   A∧¬B∧C   THEN
        Y
ELSE
        X
END
```

六、给定解释 *I*：

(1) 个体域 D={1, 2}；

(2) 个体常元 *a*=2；

(3) 函词 $f(x)$：$f(1)=2$，$f(2)=1$；

(4) 谓词 $A(x, y)$：$A(1, 1) = A(1, 2) = A(2, 2) = 1$，$A(2, 1) = 0$；

$B(x, y)$：$B(1, 1) = B(1, 2) = 1$，$B(2, 1) = B(2, 2) = 0$。

请求出谓词公式 $(\exists x)(\forall y)A(x, y)\rightarrow (\forall x)B(x, f(a))$ 在解释 *I* 下的真值，以及该谓词公式的前束范式。

解：（1）$(\exists x)(\forall y)A(x, y)\rightarrow (\forall x)B(x, f(a))$

$\Leftrightarrow \neg(\exists x)(\forall y)A(x, y) \vee (\forall x)B(x, f(2))$

$\Leftrightarrow (\forall x)(\exists y)\neg A(x, y) \vee (\forall x)B(x, f(2))$

$\Leftrightarrow (\forall x) (\neg A(x, 1) \vee \neg A(x, 2)) \vee (B(1, f(2)) \wedge B(2, f(2)))$

$\Leftrightarrow ((\neg A(1, 1) \vee \neg A(1, 2)) \wedge (\neg A(2, 1) \vee \neg A(2, 2))) \vee (B(1, 1) \wedge B(2, 1))$

$\Leftrightarrow ((\neg 1 \vee \neg 1) \wedge (\neg 0 \vee \neg 1)) \vee (1 \wedge 0)$

$\Leftrightarrow ((0 \vee 0) \wedge (1 \vee 0)) \vee 0$

$\Leftrightarrow (0 \wedge 1) \vee 0$

$\Leftrightarrow 0$

谓词公式 $(\exists x)(\forall y)A(x, y)\rightarrow (\forall x)B(x, f(a))$在解释 *I* 下的真值为 0。

注：求解过程不唯一。

（2）$(\exists x)(\forall y)A(x, y)\rightarrow (\forall x)B(x, f(a))$

$\Leftrightarrow \neg(\exists x) (\forall y)A(x, y) \vee (\forall x)B(x, f(a))$

$\Leftrightarrow (\forall x) (\exists y)\neg A(x, y) \vee (\forall x)B(x, f(a))$

$\Leftrightarrow (\forall x) (\exists y)\neg A(x, y) \vee (\forall z)B(z, f(a))$

$\Leftrightarrow (\forall x) (\exists y)(\forall z) (\neg A(x, y) \vee B(z, f(a)))$

注：求解过程不唯一，前束范式不唯一。

七、证明谓词公式 $(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ 既不是永真式，也不是矛盾式。（提示：可通过构造解释进行证明）

证明：（答案不唯一）

取解释 I_1：

个体域为实数集合 R，F(x)：x 是整数，G(x)：x 是偶数。$(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ 被解释为“有些实数既是整数，也是偶数”，这是真命题，所以，$(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ 不是矛盾式。

取解释 I_2：

个体域仍然为实数集合 R，F(x)：x 是无理数，G(x)：x 能表示成分数。$(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ 被解释为“有些实数既是无理数，也能表示成分数”，这是假命题，所以，$(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ 不是永真式。

所以，$(\exists x)(F(x)\wedge G(x))$ 既不是永真式，也不是矛盾式。

八、用谓词逻辑的构造证明法加以证明（使用全总个体域）。

所有的哺乳动物都是脊椎动物。并非所有的哺乳动物都是胎生动物。所以，有些脊椎动物不是胎生的。

解：

命题符号化：

P(x)：x 是哺乳动物；Q(x)：x 是脊柱动物；R(x)：x 是胎生动物。

推理形式：（$\neg(\forall x)(P(x)\to R(x))$ 也可写为：$(\exists x)(P(x)\wedge\neg R(x))$）

前提：$(\forall x)(P(x)\to Q(x))$，$\neg(\forall x)(P(x)\to R(x))$

结论：$(\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$

推理如下：（证明过程不唯一）

(1) $\neg(\forall x)(P(x)\to R(x))$	前提引入
(2) $(\exists x)(P(x)\wedge\neg R(x))$	(1)等值置换
(3) $P(b)\wedge\neg R(b)$	(2)ES 规则
(4) $(\forall x)(P(x)\to Q(x))$	前提引入
(5) $P(b)\to Q(b)$	(4)US 规则
(6) $P(b)$	(3)化简式
(7) $Q(b)$	(5)(6)假言推论
(8) $\neg R(b)$	(3)化简式
(9) $Q(b)\wedge\neg R(b)$	(7)(8)合取引入
(10) $(\exists x)(Q(x)\wedge\neg R(x))$	(9)EG 规则