习题课——集合论部分

一、 某校有120名学生参加数学竞赛，竞赛试题共有甲、乙、丙三题。竞赛结果为：12名学生三题全对；20名学生只做对了甲题和乙题；16名学生做对了甲题和丙题；28名学生做对了乙题和丙题；48名学生做对了甲题；56名学生做对了乙题；16名学生三题都做错了。试求出做对了丙题的人数。

解：设 X，Y 和 Z 分别为做对了甲、乙和丙题的学生的集合，U 为全体学生集合。则由题意可知：$|X\cap Y\cap Z|=12$，$|X\cap Y\cap\sim Z|=20$，$|X\cap Z|=16$，$|Y\cap Z|=28$，$|X|=48$，$|Y|=56$，$|\sim X\cap\sim Y\cap\sim Z|=16$，$|U|=120$。

因 $|X\cap Y\cap\sim Z|=|X\cap Y|-|X\cap Y\cap Z|=|X\cap Y|-12=20$，所以，$|X\cap Y|=32$。

又因为 $\sim X\cap\sim Y\cap\sim Z=\sim(X\cup Y\cup Z)$

所以，$|\sim X\cap\sim Y\cap\sim Z|=|U|-|X\cup Y\cup Z|=120-|X\cup Y\cup Z|=16$

所以，$|X\cup Y\cup Z|=104$。

由容斥原理，可知

$$|X\cup Y\cup Z|=|X|+|Y|+|Z|-|X\cap Y|-|X\cap Z|-|Y\cap Z|+|X\cap Y\cap Z|$$
$$=48+56+|Z|-32-16-28+12=104$$

得 $|Z|=64$，即做对丙题得人数为64。

二、 假定 A、B、C 和 D 为集合，证明或推翻下面论断。

1、$(A-B)-(C-D)=(A-C)-(B-D)$。

2、若 $A\cup B\subseteq C\cup D$，则有 $P(A\cup B)\subseteq P(C\cup D)$。

解：1、此论断不成立。

例如，$A=B=D=\{1,2\}$, $C=\{2,3\}$。则

$(A-B)-(C-D)=\varnothing-\{3\}=\varnothing$，

$(A-C)-(B-D)=\{1\}-\varnothing=\{1\}$，

即 $(A-B)-(C-D)\neq(A-C)-(B-D)$。

（注：反例不唯一）

2、此论断正确。

证明：$\forall x\in P(A\cup B)$，则由幂集的定义可知 $x\subseteq A\cup B$，

1）若 $x=\varnothing$，因 $\varnothing\subseteq C\cup D$，所以 $x\in P(A\cup B)$，即 $P(A\cup B)\subseteq P(C\cup D)$。

2）若 $x\neq\varnothing$，则 $\forall a\in x$，则由子集的定义可知 $a\in A\cup B$。由前提 $A\cup B\subseteq C\cup D$，可得 $a\in C\cup D$。故 $x\subseteq C\cup D$，即 $x\in P(C\cup D)$，故 $P(A\cup B)\subseteq P(C\cup D)$。

综上所述，若 $A\cup B\subseteq C\cup D$，则有 $P(A\cup B)\subseteq P(C\cup D)$。

三、已知集合 A、B 和 C，用**集合的等值演算法**证明 $(A-C)\oplus(B-C)=(A\oplus B)-C$。

证明：$(A-C)\oplus(B-C)=((A-C)-(B-C))\cup((B-C)-(A-C))$ （对称差定义）

$=((A\cap\sim C)\cap\sim(B\cap\sim C))\cup((B\cap\sim C)\cap\sim(A\cap\sim C))$ （补交转换律）

$=((A\cap\sim C)\cap(\sim B\cup C))\cup((B\cap\sim C)\cap(\sim A\cup C))$ （德·摩根律，双重否定律）

$=((A\cap\sim C\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C\cap C))\cup((B\cap\sim C\cap\sim A)\cup(B\cap\sim C\cap C))$ （分配律，结合律）

$=((A\cap\sim B\cap\sim C)\cup\varnothing)\cup((\sim A\cap B\cap\sim C)\cup\varnothing)$ （结合律，矛盾律）

$=(A\cap\sim B\cap\sim C)\cup(\sim A\cap B\cap\sim C)$ （同一律）

$= ((A\cap\sim B)\cup(\sim A\cap B))\cap\sim C$　　（结合律，分配律）

$= ((A-B)\cup(B-A))-C$　　（补交转换律）

$= (A\oplus B)-C$　　（对称差定义）

四、R 是整数集 $\mathbf{Z}$ 上的关系，mRn 定义为 $m^2=n^2$。判断关系 R 的性质并进行证明。

证明：

1）自反性：$\forall x\in\mathbf{Z}$，有 $x^2=x^2$，即有 xRx，所以 R 是自反的。

2）反自反性：因为 R 是自反的非空关系，所以 R 不是反自反的。

3）对称性：$\forall x, y\in\mathbf{Z}$，如果 $<x,y>\in R$，则 $x^2=y^2$，即 $y^2=x^2$，所以 $<y,x>\in R$，即 yRx，所以 R 是对称的。

4) 反对称性：$\forall x, y\in\mathbf{Z}$，如果 $<x,y>\in R$，且 $<y,x>\in R$，即 $x^2=y^2$，$y^2=x^2$，但不一定有 $x=y$，如 $x=1$，$y=-1$。所以 R 不是反对称的。

5) 传递性：$\forall x, y, z\in\mathbf{Z}$，如果 $<x,y>\in R$，且 $<y,z>\in R$，即 $x^2=y^2$，$y^2=z^2$，可得 $x^2=z^2$，即有 xRz，所以 R 是传递的。

五、设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，在 $A\times A$ 上定义的二元关系 R，

$$\forall <u,v>, <x, y>\in A\times A，<u,v>R<x, y>\Leftrightarrow u+y=x+v$$

1、证明 R 是 $A\times A$ 上的等价关系；

2、求由 R 导出的对 $A\times A$ 的划分。

1、证明：

1）自反性：对于任意的 $<x, y>\in A\times A$，则有 $x+y= x+y$。由二元关系 R 的定义知，有 $<<x, y>,<x, y>>\in R$，即 R 具有自反性。

2）对称性：对于任意的 $<u,v>, <x, y>\in A\times A$，若 $<<u,v>,<x, y>>\in R$，则 $u+y=x+v$，即 $x+v=u+y$。由 R 的定义可知 $<<x, y>,<u,v>>\in R$，即 R 具有对称性。

3)传递性：对于任意的 $<u,v>, <x, y>, <z, w>\in A\times A$，若 $<<u,v>,<x, y>>\in R$，$<<x,y>,<z, w>>\in R$，则 $u+y=x+v$，$x+w=z+y$。故有 $u+y+x+w=x+v+z+y$，即 $u+w=v+z$。亦即 $u+w=z+v$。由 R 的定义可知 $<<u,v>,<z, w>>\in R$，即 R 具有传递性。

综上可知，R 是 $A\times A$ 上的等价关系。

2、　通过观察 $<u,v>R<x, y>\Leftrightarrow u+y=x+v$，即等价于 $u-v=x-y$。根据 $u-v$ 的值对集合 $A\times A$ 进行划分，即由 R 导出的对 $A\times A$ 的划分为：

$\{\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>\}$，$\{<1,2>,<2,3>,<3,4>\}$，$\{<1,3>,<2,4>\}$，$\{<1,4>\}$，$\{<2,1>,<3,2>,<4,3>\}$，$\{<3,1>,<4,2>\}$，$\{<4,1>\}\}$

六、在安装由 4 个模块构成的某工业软件过程中，在安装模块 b 之前要求先安装 a 和 d，安装 a 之前要求先安装模块 c。设模块集 $P=\{a, b, c, d\}$，在 P 上定义关系 R 如下：对于任意的 $i, j\in P$，$< i, j >\in R$ 当且仅当 $i = j$ 或者模块 i 必须在模块 j 之前安装。

1、证明关系 R 是偏序关系。

2、画出关系 R 的哈斯图。

3、对模块集 $P=\{a, b, c, d\}$，找出它的最大元，最小元，极大元，极小元，上界、下界、上确界和下确界，

并说明最大元对集合 P 来说具有什么含义。

1、证明：

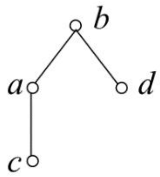
1） 自反性：对于任意的 $i\in P$，有 $i=i$。根据关系 R 的定义知，$<i,i>\in R$。故 R 具有自反性。（3 分）

2） 反对称性：对于任意的 $i, j\in P$，若 $i\neq j$，且 $<i,j>\in R$，则由 R 的定义知，模块 i 必须在模块 j 之前安装，即模块 j 不在模块 i 之前安装，所以 $<i,j>\notin R$。所以，R 具有反对称性。（3 分）

3） 传递性：对于任意的 $i, j,k\in P$，若 $<i,j>\in R$，$<j,k>\in R$，则由 R 的定义可知，$i=j$ 或者模块 i 必须在模块 j 之前安装，$j=k$ 或者模块 j 必须在模块 k 之前安装，即 $i=k$ 或者模块 i 必须在模块 k 之前安装。由 R 的定义可知，$<i,k>\in R$。所以，R 具有传递性。

综述可见，关系 R 是偏序关系。

2、关系 R 的哈斯图为：



3、

最大元	最小元	极大元	极小元	上界	下界	上确界	下确界
b	无	b	c, d	b	无	b	无

最大元对于集合 P 来说是最后安装的模块。

七、对于函数 f：$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，$f(<x, y>)=<x-1, x+y>$，试问：

1、函数 f 是单射函数、满射函数还是双射函数，并给出你的理由。

2、求复合函数 $f^{-1}\circ f$。

解 1、$f(x)$是双射。

理由：1）证 f 是单射函数

$\forall<x, y>, <u, v>\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，若 $f(<x, y>)=f(<u, v>)$，则由 $f(<x, y>)=<x-1, x+y>$， $f(<u, v>)=<u-1, u+v>$知 $<x-1, x+y>=<u-1, u+v>$。所以，$x-1=u-1$ 且 $x+y=u+v$，即 $x=u$ 且 $y= v$，所以，$<x, y>=<u, v>$。即函数 f 是单射函数。

2） 证 f 是满射函数

对于$\forall<x, y>\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，存在 $u=x+1\in\mathbf{Z}$，$v=y-x-1\in\mathbf{Z}$，使得 $f(<u, v>)= <x, y>$，所以，f 是满射函数。

综上，f 是双射函数。

2、由 1 知 f 是双射函数，所以 f 存在逆函数，且 f^{-1}：$\mathbf{Z}\times\mathbf{Z} \to\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$。

对于任意$\forall<x, y>\in \mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$，有 $f(<x, y>)=<x-1, x+y>$，可知 $f^{-1}(<x-1, x+y>)=<x, y>$。令 $u=x-1$，$v=x+y$，则 $x=u+1$，$y=v-u-1$，即 $f^{-1}(<x, y>)=<x+1, y-x-1>$。

则 $f^{-1}\circ f(<x, y>)= f(f^{-1}(<x, y>))=f(<x+1, y-x-1>)=<x, y>$。