差分方程

概念

- 数列$\{a_n\}$

将数列中的a_n和前面的a_i（$0 \le i < n$）关联起来的方程称为差分方程，也称为递推关系。

➢ **例**

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + n a_{n-2} \\ a_1 = 1, a_2 = 2 \end{cases}$$

- **k 阶常系数线性齐次差分方程**

$$a_n + b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \ldots + b_k a_{n-k} = 0$$

（b_i 为常数，$b_k \neq 0$，$k \le n$）

- 差分方程的特征方程如下，其根称为特征根。

$$x^k + b_1 x^{k-1} + b_2 x^{k-2} + \ldots + b_k = 0$$

➢ 例：二阶常系数线性差分方程 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$，变形为 $F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0$，特征方程为 $x^2 - x - 1 = 0$

- **定理1（单根）**差分方程的特征方程有k 个相异的特征根$x_1, x_2, \ldots, x_k$，则有通解：$a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n + \ldots + c_k x_k^n$

其中$c_1, c_2, \ldots, c_k$为任意常数。

- 由初始条件 $a_0 = u_0, a_1 = u_1, , \ldots ,a_{k-1} = u_{k-1}$可确定一个特解。

- **例**：求Fibonacci数列的通解 $\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$

➢ **解**：差分方程的特征方程：$x^2 - x - 1 = 0$

特征根为：$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

➢ **解：** 通解 $F_n = c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$

由初始条件 $F_1=1$，$F_2=1$，得

$$c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) = 1 \quad , \quad c_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2 + c_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^2 = 1$$

联立解得 $c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$， $c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$，

故 $\boldsymbol{F_n} = \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$

□ **定理2（重根）** 差分方程的特征方程的相异特征根

$x_1, x_2, \ldots, x_t$ 的重数依次为 $m_1, m_2, \ldots, m_t$， 且 $m_1+m_2+\ldots+m_t=k$，
则有通解：

$$a_n = \sum_{j=1}^{m_1} c_{1j} n^{j-1} x_1^n + \sum_{j=1}^{m_2} c_{2j} n^{j-1} x_2^n + \ldots + \sum_{j=1}^{m_t} c_{tj} n^{j-1} x_t^n$$

□ **定理3（复根）** 差分方程的特征方程的特征根

出现一对共轭复根 $x_1=\delta+i\omega$， $x_2=\delta-i\omega$ 和相异的 k-2个根

$x_3, x_4, \ldots, x_k$， 则有通解：

$$a_n = c_1\rho^n\cos(n\theta) + c_2\rho^n\sin(n\theta) + c_3x_3^n + \ldots + c_kx_k^n$$

其中 $\rho = \sqrt{\delta^2 + \omega^2}$ $\quad \theta = arctan\frac{\omega}{\delta}$

□ **k 阶常系数线性非齐次差分方程**

$$a_n+b_1a_{n-1}+b_2a_{n-2}+\ldots+b_ka_{n-k}=f(n)$$

（ b_i 为常数， $b_k \neq 0$， $f(n) \neq 0$ ， $k \leq n$）

➢ **常系数线性非齐次差分方程对应的齐次差分方程**

$$a_n+b_1a_{n-1}+b_2a_{n-2}+\ldots+b_ka_{n-k}=0$$

□ **定理** 非齐次差分方程的通解等于对应齐次差分方程的通解 a_n^*
加上非齐次方程的特解 $\overline{a_n}$

$$a_n = a_n^* + \overline{a_n}$$

举例

$$\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_1 = F_2 = 1 \end{cases}$$

斐波那契数列是差分方程

> 解特征方程特征根：
>
> 对于二次方程 (ax^2 + bx + c = 0)，根的求解公式为：
>
> $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
>
> 在这个方程中，系数 (a = 1), (b = -1), (c = 1)。
>
> 1. **计算判别式**：
>   判别式

$$\Delta$$

是

$$b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$$

2. **判别式为负**:
   因为

$$Delta = -3$$

   为负数，这意味着方程没有实根，只有共轭复根。

3. **计算复根**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

所以，方程 (x^2 - x + 1 = 0) 的特征根是两个复数根:

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

- 方程 (x^2 - x + 1 = 0) 的判别式为 (-3)，因此没有实根。
- 该方程的特征根是复数，分别为

$$\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$$

  和

$$\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$$

□ **例：** 求解 $a_n = -a_{n-1} + 3a_{n-2} + 5a_{n-3} + 2a_{n-4} \quad n=4,5,\ldots$

➤ **解：** 特征方程：$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0$

特征根为：-1，-1，-1，2。

通解：$a_n = (c_1 + c_2 \cdot n + c_3 \cdot n^2)(-1)^n + c_4 2^n$

如何求解高次项方程的特征根:

1. 代入 (x = 1):

$$1^4 + 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 2 = 1 + 1 - 3 - 5 - 2 = -8 \neq 0 \text{所以} \backslash(x = 1\backslash) \text{不是根。}$$

2. 代入 (x = -1):

$$(-1)^4 + (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 2 = 1 - 1 - 3 + 5 - 2 = 0$$

所以 (x = -1) 是根。

既然 (x = -1) 是一个根，我们可以将多项式除以 (x + 1)。

使用多项式除法将 (x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2) 除以 (x + 1)。

通过多项式除法得到:

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = (x+1)(x^3 + 0x^2 - 3x - 2)$$

剩下的三次多项式为 (x^3 - 3x - 2)，继续应用有理根定理。

常数项为 (-2)，最高次项系数为 (1)，所以可能的有理根为

$$\pm 1, \pm 2$$

1. 代入 (x = 1)：

$$1^3 - 3 \cdot 1 - 2 = 1 - 3 - 2 = -4 \neq 0\text{所以}\backslash(x = 1\backslash)\text{不是根。}$$

2. 代入 (x = -1)：

$$(-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 2 = -1 + 3 - 2 = 0\text{所以}\backslash(x = -1\backslash)\text{也是根。}$$

3.

继续将 (x^3 - 3x - 2) 除以 (x + 1)，得到：

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)(x^2 - x - 2)$$

剩下的二次多项式为 (x^2 - x - 2)。

使用因式分解法求解：

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

综合上述步骤得到所有根：

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = (x+1)^3(x-2)$$

因此，特征根为：

$$x = -1, -1, -1, 2$$

其中 (-1) 是三重根，2 是单根。

□ **例：** 计算n阶行列式

$$a_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

➢ **解：** 将a_n按第一列展开得

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} \qquad (n \geq 3)$$

其中 $a_1=1$，$a_2=0$，由特征方程 $x^2 - x + 1 = 0$ 解得

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

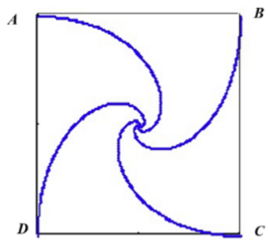
➢ **解：** $\rho=1 \quad \theta = arctan\frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \frac{\pi}{3}$

通解：$a_n = c_1\cos(n\pi/3) + c_2\sin(n\pi/3)$

将$a_1=1$，$a_2=0$代入解出$c_1=1$，$c_2 = 1/\sqrt{3}$

所以 $$a_n = cos\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} sin\frac{n\pi}{3}$$

例： 如图正方形ABCD的四个顶点各有一人。在某一时刻，四人同时出发以匀速v=1米/秒按顺时针方向追逐下一人，如果他们始终保持对准目标，则最终按螺旋状曲线交于中心点O。试求出这种情况下每个人的行进轨迹。



解

- 建立平面直角坐标系： A(x1,y1), B(x2,y2), C(x3,y3), D(x4,y4)。
- 取时间间隔为Δt，计算每一点在各个时刻的坐标：

  设某点在t时刻的坐标 (xi, yi)

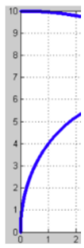
  则在t+Δt时刻的坐标为(xi+vΔtcosα , yi+vΔtsinα)

$$\cos\alpha=\frac{x_{i+1}-x_i}{d}\quad \sin\alpha=\frac{y_{i+1}-y_i}{d}\quad d=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2}$$

- 取足够小的ε，d < ε时结束算法。
- 对每一个点，连接它在各时刻的位置，即得所求运动轨迹。

MATLAB程序(track.m)：

```
v=1;
dt=0.05;
x=[0 0 10 10];
y=[0 10 10 0];
for i=1:4
        plot(x(i),y(i),'.');hold on
    end
d=20;
while(d>0.1)
        x(5)=x(1);y(5)=y(1);
        for i=1:4
            d=sqrt((x(i+1)-x(i))^2+(y(i+1)-y(i))^2);
            x(i)=x(i)+v*dt*(x(i+1)-x(i))/d;
            y(i)=y(i)+v*dt*(y(i+1)-y(i))/d;
            plot(x(i),y(i),'.');hold on
        end
end
```



某保险公司的一份资料指出：在每月交费200元到59岁年底，60岁开始领取养老金的约定下，男子若25岁起投保届时月养老金2282元。假定人的寿命为75岁，试求出保险公司为了兑现保险责任，每月至少应有多少投资收益率（也就是投保人的实际收益率）？

分析： 设**r** 表示保险金的投资收益率，缴费期间月缴费额为**p**元，领养老金期间领取额为**q**元，缴费的月数为**N**，到75岁时领取养老金的月数为**M**，投保人在投保后第k个月所交保险费及利息的累计总额为F_k，那么得到的数学模型为分段表示的差分方程

$$F_{k+1}=F_k(1+r)+p\,,\quad k=0, 1, \dots , N-1$$

$$F_{k+1}=F_k(1+r)-q,\quad k=N+1, N+2, \dots , M-1$$

- 差分方程 $F_{k+1}=F_k(1+r)+p$， $k=0, 1, \ldots, N-1$

  $F_{k+1}=F_k(1+r)-q$， $k=N+1, N+2, \ldots, M-1$

  其中 p=200，q=2282， N=420，M=600，

- 推出差分方程的解（$F_0=F_M=0$）

$$F_k=[(1+r)^k-1]\frac{p}{r} \qquad k=0,1,\ldots,N$$

$$F_k=\frac{q}{r}[1-(1+r)^{k-M}] \qquad k=N+1,N+2,\ldots,M-1$$

- 由以上两式得第N个月和第N+1个月的累计总额分别为

$$F_N=[(1+r)^N-1]\frac{p}{r} \qquad F_{N+1}=\frac{q}{r}[1-(1+r)^{N+1-M}]$$

- 因为$F_{N+1}=F_N(1+r)-q$，推得如下方程

$$\frac{q}{r}[1-(1+r)^{N+1-M}]=[(1+r)^N-1]\frac{p}{r}(1+r)-q$$

化简得 $(1+r)^M-(1+\frac{q}{p})(1+r)^{M-N}+\frac{q}{p}=0$

- 记 $x=1+r$，代入数据得

$$x^{600}-12.41x^{180}+11.41=0$$

- 利用MATLAB编程解方程，求得 $r=0.0049$，即投保人的实际投资收益率为0.49%。