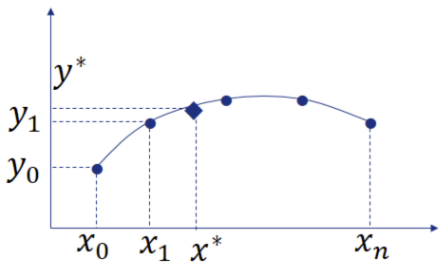
插值

一维插值

➢ 构造一个（相对简单的）函数 $y=f(x)$，通过全部节点，即 $f(x_j)=y_j$（$j=0, 1, \dots, n$）再用 $f(x)$ 计算插值，即 $y^*=f(x^*)$。



➢ 已知函数 $f(x)$ 在n+1个点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 处的函数值为$y_0, y_1, \dots, y_n$。求一 n次多项式函数$P_n(x)$，使其满足：

$$P_n(x_i)=y_i, \quad i=0, 1, \dots, n$$

➢ 拉格朗日插值多项式公式

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} l_i(x)\cdot y_i$$

$l_i(x)$ 为n次多项式，称为拉格朗日插值基函数。

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

➢ 两点一次(线性)插值多项式

$$L_1(x)=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1$$

➢ 三点二次(抛物)插值多项式

$$L_2(x)=\frac{(x-x_1)\cdot(x-x_2)}{(x_0-x_1)\cdot(x_0-x_2)}y_0+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_2)}{(x_1-x_0)\cdot(x_1-x_2)}y_1+\frac{(x-x_0)\cdot(x-x_1)}{(x_2-x_0)\cdot(x_2-x_1)}y_2$$

➤ **例**：给出平方根值，计算 $\sqrt{5}$ 近似值。

x	1	4	9	16
$\sqrt{x}$	1	2	3	4

➤ 用线性插值计算

$$\sqrt{x}=\frac{x-9}{4-9}\times 2+\frac{x-4}{9-4}\times 3$$

$$\sqrt{5}\approx 2.2$$

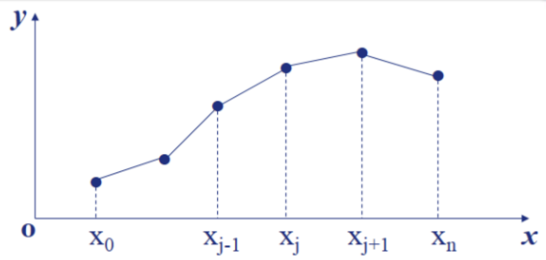
➤ 用抛物线法计算

$$\sqrt{x}=\frac{(x-4)\cdot(x-9)}{(1-4)\cdot(1-9)}\times 1+\frac{(x-1)\cdot(x-9)}{(4-1)\cdot(4-9)}\times 2+\frac{(x-1)\cdot(x-4)}{(9-1)\cdot(9-4)}\times 3$$

$$\sqrt{5}\approx 2.27$$

➤ **例**： $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$， $-5\le x\le 5$

拉格朗日多项式插值：选取不同插值节点个数$n+1$，其中n为插值多项式的次数，当n分别取2, 4, 6, 8, 10时，绘出插值结果图形。



$$L_n(x)=\sum_{j=0}^{n} y_j l_j(x)$$

$$l_j(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}, & x_{j-1}\le x\le x_j\\ \dfrac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}, & x_j\le x\le x_{j+1}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

计算量与n无关；

n越大，误差越小。

$$\lim_{n\to\infty} L_n(x)=g(x),\ x_0\le x\le x_n$$

分段线性插值

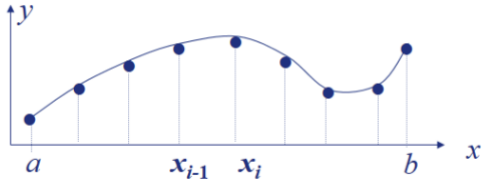
➤ **例**： $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$， $-6\le x\le 6$

➤ 用分段线性插值法求插值,并观察插值误差

1. 在[-6,6]中平均选取5个点作插值
2. 在[-6,6]中平均选取11个点作插值
3. 在[-6,6]中平均选取21个点作插值
4. 在[-6,6]中平均选取41个点作插值

三次样条插值

- 比分段线性插值更光滑



- 在数学上，光滑程度的定量描述是：函数（曲线）的k阶导数存在且连续，则称该曲线具有k阶光滑性。
- 光滑性的阶次越高，则越光滑。
- 三次样条插值：存在较低次的分段多项式达到较高阶光滑性的方法。

- $S(x)=\{s_i(x), x\in[x_{i-1},x_i], i=1,\cdots n\}$

  （1）$s_i(x)=a_ix^3+b_ix^2+c_ix+d_i \quad (i=1,\cdots n)$

  （2）$S(x_i)=y_i \quad (i=0,1,\cdots n)$

  （3）$S(x)\in C^2[x_0,x_n]$

  $\Rightarrow s_i(x_i)=s_{i+1}(x_i),\ s_i'(x_i)=s_{i+1}'(x_i),\ s_i''(x_i)=s_{i+1}''(x_i)$

  $(i=1,\ \cdots,n-1)$

  （4）$S''(x_0)=S''(x_n)=0$（自然边界条件）

  （2）（3）（4）$\Rightarrow \boldsymbol{a_i,b_i,c_i,d_i} \Rightarrow \boldsymbol{S(x)}$

- $\lim\limits_{n\to\infty} S(x)=g(x)$

MATLAB插值计算

- 一维插值函数

yi = interp1(x，y，xi，'method')

x_i处的插值结果

插值节点

被插值点

插值方法

'nearest'：最邻近插值
'linear'：线性插值；
'spline'：三次样条插值；
'cubic'：三次插值。
缺省时：分段线性插值。

- 注意：所有的插值方法都要求 x 是单调的，并且 x_i 不能够超过 x 的范围。

例：在1-12的12小时内，每隔1小时测量一次温度，测得的温度依次为：5, 8, 9, 15, 25, 29, 31, 30, 22, 25, 27, 24。试估计每隔1/10小时的温度值。

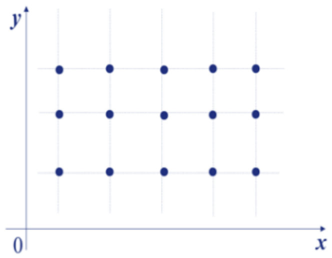
```
hours=1:12;
temps=[5 8 9 15 25 29 31 30 22 25 27 24];
h=1:0.1:12;
t=interp1(hours,temps,h,'spline');      %(直接输出数据将是很多的)
plot(hours,temps,'+',h,t,hours,temps,'r:')      %作图
xlabel('Hour'),ylabel('Degrees Celsius')
```

二维插值

- 二维插值是基于一维插值同样的思想，是对两个变量的函数$z=f(x,y)$进行插值。
- 基本思路：构造二元函数 $z=f(x,y)$，通过全部已知结点，即$f(x_i,y_j)=z_{ij}$ 或 $f(x_i,y_i)=z_i$。再利用$f(x,y)$插值，即$z^*=f(x^*,y^*)$。

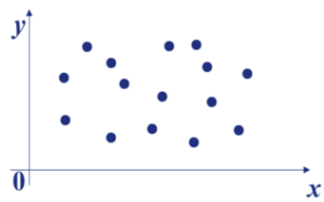
第一种（网格结点）

- 已知 $m\times n$ 个结点(x_i, y_j, z_{ij}) $(i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n)$
  $a=x_1<x_2<\ldots<x_m=b$
  $c=y_1<y_2<\ldots<y_n=d$
- 构造二元函数 $z=f(x,y)$，通过全部已知结点，即$f(x_i,y_j)=z_{ij}$，再利用$f(x,y)$插值，即$z^*=f(x^*,y^*)$。



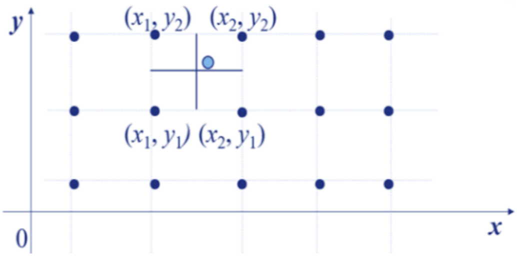
第二种（散乱结点）

- 已知 n 个结点 (x_i, y_i, z_i) $(i=1,2,\ldots,n)$
- 构造二元函数 $z=f(x,y)$，通过全部已知结点，即$f(x_i,y_i)=z_i$。再利用$f(x,y)$插值，即$z^*=f(x^*,y^*)$。



最邻近插值

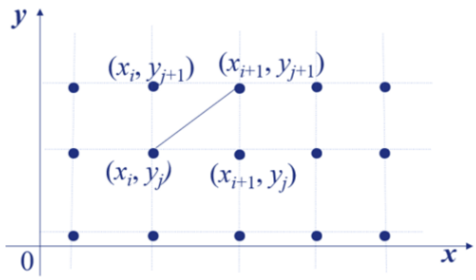
- 二维或高维情形的最邻近插值，与被插值点最邻近的节点的函数值即为所求。
- 注意：最邻近插值一般不连续。具有连续性的最简单的插值是分片线性插值。



分片线性插值

- 将四个插值点（矩形的四个顶点）处的函数值依次简记为：

$f(x_i, y_j)=f_1$，$f(x_{i+1}, y_j)=f_2$，$f(x_{i+1}, y_{j+1})=f_3$，$f(x_i, y_{j+1})=f_4$



分片线性插值

- 分两片的函数表达式如下：
- 第一片(下三角形区域)：(x, y)满足 $y \leq \frac{y_{j+1}-y_j}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)+y_j$

  插值函数为 $f(x, y)=f_1+(f_2-f_1)(x-x_i)+(f_3-f_2)(y-y_j)$
- 第二片(上三角形区域)：(x, y)满足 $y > \frac{y_{j+1}-y_j}{x_{i+1}-x_i}(x-x_i)+y_j$

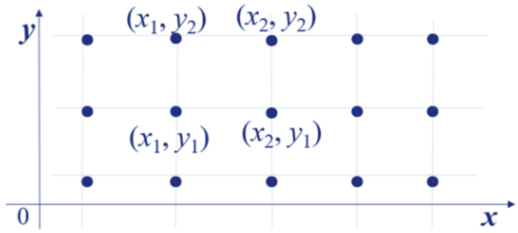
  插值函数为 $f(x, y)=f_1+(f_4-f_1)(y-y_j)+(f_3-f_4)(x-x_i)$
- 注意：(x, y) 在插值节点所形成的矩形区域内；
- 分片线性插值函数是连续的。

双线性插值

- 双线性插值是一片一片的空间二次曲面构成。

双线性插值函数的形式：$f(x, y) = (ax+b)(cy+d)$

其中有四个待定系数，利用该函数在矩形的四个顶点（插值结点）的函数值，得到四个代数方程，正好确定四个系数。



MATLAB作网格结点数据的插值

z = interp2(x0,y0,z0,x,y,'method')

- z：被插值点的函数值
- x0,y0,z0：插值节点
- x,y：被插值点
- 'method'：插值方法
  - 'nearest'：最邻近插值
  - 'linear'：双线性插值
  - 'cubic'：双三次插值
  - 缺省：双线性插值

- 要求x0, y0单调；x, y可取为矩阵，或 x 取行向量，y 取为列向量， x, y 的值分别不能超出x0, y0的范围。

- **例：** 测得平板表面3*5网格点处的温度分别为：

82 81 80 82 84

79 63 61 65 81

84 84 82 85 86

试作出平板表面的温度分布曲面z=f(x,y)的图形。

- 先在三维坐标画出原始数据，画出粗糙的温度分布曲图。

输入以下命令：

```
x=1:5;
y=1:3;
temps=[82 81 80 82 84;79 63 61 65 81;84 84 82 85 86];
mesh(x,y,temps)
```

- 以平滑数据，在x、y方向上每隔0.2个单位的地方进行插值。

➢ 以平滑数据，在x、y方向上每隔0.2个单位的地方进行插值。

输入以下命令:

```
xi=1:0.2:5;
yi=1:0.2:3;
zi=interp2(x,y,temps,xi,yi,'cubic');
mesh(xi,yi,zi)
```

画出插值后的温度分布曲面图。

□ 插值函数griddata

cz =griddata(x, y, z, cx, cy, ‘method’)

- cz：被插值点的函数值
- x, y, z：插值节点
- cx, cy：被插值点
- ‘method’：插值方法

‘nearest’ 最邻近插值

‘linear’ 双线性插值

‘cubic’ 双三次插值

'v4'- Matlab提供的插值方法

缺省时，双线性插值

➢ 注意

cx取行向量，cy取列向量。

➢ **例**：在某海域测得一些点(x,y)处的水深z由下表给出，船的吃水深度为5英尺，在矩形区域(75, 200)×(-50, 150)里的哪些地方船要避免进入。

x	**129**	**140**	**103.5**	**88**	**185.5**	**195**	**105**
y	**7.5**	**141.5**	**23**	**147**	**22.5**	**137.5**	**85.5**
z	**4**	**8**	**6**	**8**	**6**	**8**	**8**
x	**157.5**	**107.5**	**77**	**81**	**162**	**162**	**117.5**
y	**-6.5**	**-81**	**3**	**56.5**	**-66.5**	**84**	**-33.5**
z	**9**	**9**	**8**	**8**	**9**	**4**	**9**

➢输入插值基点数据；

➢在矩形区域(75,200) ×(-50,150)作二维插值（三次插值法）；

➢作海底曲面图；

➢作出水深小于5的海域范围，即z=5的等高线。