2021-2022 学年第 2 学期高等数学 AII（A 卷）

参 考 答 案 与 评 分 标 准

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $x^2+2z^2+2y^2=1$；　2. $2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$；　3. $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\mathrm{d}x$；　4. 4π；　5. 0.

二、单项选择（每小题 3 分，共 15 分）：B　C　D　D　C

三、计算题一（每小题 8 分，共 24 分）

1. 解：记 $\overrightarrow{n_1}=(1,2,0),\overrightarrow{n_2}=(2,0,1)$, 则所求平面的法向量为

$$\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-4\vec{k},$$ ……………………………………（4 分）

从而所求平面方程为 $2(x-1)-(y-2)-4(z-3)=0$，即 $2x-y-4z+12=0$.（8 分）

2. 解：记 $F(x,y,z)=e^z+xyz-y^2$，则

$$F_x=yz,\ F_y=xz-2y,\ F_z=e^z+xy,$$ ……………………………………（4 分）

从而当 $e^z+xy\neq 0$ 时有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{yz}{e^z+xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{xz-2y}{e^z+xy}.$$ ………………（4 分）

3. 解：由 $\begin{cases} f_x=2+2x=0\\ f_y=-4+2y=0\end{cases}$ 解得 $x=-1,y=2$，即函数有唯一驻点 $(-1,2)$. …………（2 分）

又 $f_{xx}=2,\ f_{xy}=0,\ f_{yy}=2$，从而 ……………………………………………………（4 分）

$$A=f_{xx}(-1,2)=2,\ B=f_{xy}(-1,2)=0,\ C=f_{yy}(-1,2)=2,$$

于是 $AC-B^2=4>0$，且 $A>0$，所以 $f(x,y)$ 有极小值 $f(-1,2)=-5$. ………（8 分）

四、计算题二（每小题 7 分，共 21 分）

1. 解：原式 $=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{x}}y\mathrm{d}y$ ……………………………………………………（2 分）

$=\frac{1}{2}\int_0^1(x-x^2)\mathrm{d}x$ ……………………………………………………（4 分）

$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$ ……………………………………………………（6 分）

$=\frac{1}{12}$. ……………………………………………………………………（7 分）

2. 解：原式$=\int_0^{\pi}4t\cdot\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2+4^2}\mathrm{d}t$ ……………………………（2 分）

$$=20\int_0^{\pi}t\mathrm{d}t \quad \text{……………………………（4 分）}$$

$$=10t^2\Big|_0^{\pi}=10\pi^2. \quad \text{……………………………（7 分）}$$

3. 解：由公式$\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}x^n$，$x\in(-1,1)$ 可知……………………………（2 分）

原式$=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x-2}{3}}=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{x-2}{3}\right)^n=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{1}{3^{n+1}}(x-2)^n$，……………………………（5 分）

并由$-1<\dfrac{x-2}{3}<1$得收敛区间为$x\in(-1,5)$. ……………………………（7 分）

五、计算题三（每小题 7 分，共 14 分）

1. 解：记D为xOy平面上的区域$\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则

原式$=\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\dfrac{x^2}{x^2+y^2}+\dfrac{y^2}{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ……………………………（2 分）

$$=\sqrt{2}\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r \quad \text{……………………………（5 分）}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi. \quad \text{……………………………（7 分）}$$

2. 解：记$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,z\le\sqrt{1-x^2-y^2}\}$，由高斯公式，

原式$=\iiint\limits_{\Omega}(0+2z+0)\underline{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}\mathrm{d}z$ ……………………………（2 分）

$\rho d\rho d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{1-r^2}}2z\mathrm{d}z \quad \text{……………………………（4 分）}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r(1-r^2)\mathrm{d}r \quad \text{……………………………（5 分）}$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}. \quad \text{……………………………（7 分）}$$

六、解答题（7 分）

解：记$P(x,y)=\dfrac{1+y^2f(xy)}{y}$，$Q(x,y)=\dfrac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$，则在$G$上

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial P}{\partial y},$$

且连续，从而积分$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关. ……………………（4 分）

原积分$=\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{3}{y^2}[y^2 f(3y)-1]\mathrm{d}y+\int_{3}^{1}\frac{1+4f(2x)}{2}\mathrm{d}x$ ……………………………………（5 分）

$$=3\int_{\frac{2}{3}}^{2} f(3y)\mathrm{d}y-\int_{\frac{2}{3}}^{2}\frac{3}{y^2}\mathrm{d}y+\int_{3}^{1}\frac{1}{2}\mathrm{d}x+2\int_{3}^{1} f(2x)\mathrm{d}x$$

$=-4+3\int_{\frac{2}{3}}^{2} f(3y)\mathrm{d}y+2\int_{3}^{1} f(2x)\mathrm{d}x\triangleq -4+I+J,$ ……………………………………（6 分）

由于

$$I=3\int_{\frac{2}{3}}^{2} f(3y)\mathrm{d}y\overset{令3y=t}{=}\int_{2}^{6} f(t)\mathrm{d}t,\quad J=2\int_{3}^{1} f(2x)\mathrm{d}x\overset{令2x=t}{=}\int_{6}^{2} f(t)\mathrm{d}t=-I,$$

所以原积分$=-4+I-I=-4.$ ……………………………………………………………（7 分）

七、证明题（4 分）

证明：因为$\forall x\in[0,\frac{\pi}{n}](n=1,2,3,\cdots)$，都有 $0\le\frac{\sin x}{1+x}\le\frac{x}{1+x}\le x,$ ………………（2 分）

从而$0\le\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin x}{1+x}\mathrm{d}x\le\int_0^{\frac{\pi}{n}}x\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2n^2}$， ……………………………………………（3 分）

而$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}$收敛，所以由比较判别法知原级数收敛. …………………………………（4 分）