

《高等数学 AII》 (A) 卷 参考答案及评分标准 (共 4 页)

一、填空题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. -1 2. 平行 3. $2xdx + 2ydy$
4. 收敛 5. 连续 6. 3π

二、单项选择题 (每小题 4 分, 共 16 分)

- 1、B 2、C 3、D 4、C

三、计算题一 (每小题 8 分, 共 24 分)

1. 因为所求直线与已知的两平面平行, 所以所求直线的方向向量可取为

$$s = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = (3, 2, 6). \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

于是, 所求的直线方程为

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{6}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

2. $\frac{\partial z}{\partial x} = y + \frac{1}{y}, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x - \frac{x}{y^2}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1 - \frac{1}{y^2}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

3. 令 $z = z(x, y)$, 方程两边求导, 可得

$$\begin{cases} 2x + 2z \frac{\partial z}{\partial x} - 3 \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ -2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} - 3 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

解得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{3-2z} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{2z-3} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

四、计算题二（每小题 7 分，共 14 分）

1. 视 D 为 X 型区域，即 $D: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x$.

$$\iint_D (x+y) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^x (x+y) dy \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2} x^2 dx \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

2. 曲线 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x, \\ y = x^3, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1$$

从而

$$\int_L y ds = \int_0^1 x^3 \sqrt{1+9x^4} dx \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$= \frac{1}{54} (1+9x^4)^{\frac{3}{2}} \bigg|_0^1 = \frac{1}{54} (10\sqrt{10} - 1). \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

五、计算题三（每小题 6 分，共 12 分）

1. Σ 在 xOy 坐标平面上的投影区域为 $D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$.

由平面方程可得 $z = 1-x-y$ ，于是 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{3}$.

$$\iint_{\Sigma} xy dS = \sqrt{3} \iint_{D_{xy}} xy dx dy \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$= \sqrt{3} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy dy$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 x(1-x)^2 dx \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{24}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

2. 由高斯公式，

$$\oiint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx = 3 \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

其中 Ω 由曲面 Σ 所围成.

空间区域可写成 $\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_{xy}, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$ ，其中 $D_{xy}: x^2 + y^2 \leq 1$. 从

而

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy \int_{x^2+y^2}^1 dz \\
&= \iint_{D_{xy}} (x^2 + y^2) [1 - (x^2 + y^2)] dx dy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^3 - r^5) dr = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$

综上,

$$\oiint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx = \frac{\pi}{2}. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

六、解答题 (每小题 6 分, 共 12 分)

1. 该积分与路径无关. \dots\dots\dots 1 分

理由如下: 令 $P = 3x^2y$, $Q = x^3 + 1$, 显然它们在整个 xOy 平面上具有一阶连续偏导数, 且 $P_y = Q_x = 3x^2$. 从而, 该积分与路径无关. \dots\dots\dots 4 分

令点 $C = (1, 0)$, AC 为从点 A 沿 x 轴到点 C 的直线段, CB 为从点 C 沿 y 轴正方向到点 B 的直线段. 因为该积分与路径无关, 所以

$$\begin{aligned}
\int_L 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy &= \int_{AC} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy + \int_{CB} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy \\
&= \int_0^1 [3x^2 \cdot 0 + (x^3 + 1) \cdot 0] dx + \int_0^1 [3y \cdot 0 + (1 + 1)] dy \\
&= 2 \int_0^1 dy = 2. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}
\end{aligned}$$

2. 利用间接法, 可得

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x-1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}. \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

令 $a_n = (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}$, $t = x - 1$, 级数改写成 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$.

$$\text{因 } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \text{ 故收敛半径 } R = \frac{1}{\rho} = 2. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

收敛区间为 $|t| < 2$ 即 $-1 < x < 3$. 当 $x = -1$ 时, 级数成为 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}$, 该级数发散; 当 $x = 3$

时, 级数成为 $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$, 该级数也发散. 综上, 收敛域为 $(-1, 3)$. \dots\dots\dots 6 分

七、证明题 (4 分)

显然, 有 $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$, 对一切 n 都成立. 因 $\sum |u_n|$ 收敛, 依比较判别法, $\sum (u_n + |u_n|)$ 也收敛. 注意到 $u_n = (u_n + |u_n|) - |u_n|$, 结合收敛级数的运算性质, 可得 $\sum u_n$ 也收敛. 2 分

下证 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 收敛.

由 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ 以及 f 在 $x=0$ 的某邻域内具有连续的二阶导数, 可得

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

从而 f 在 $x=0$ 处的一阶泰勒展开式为 $f(x) = \frac{1}{2} f''(\xi_x) x^2$, 其中 ξ_x 介于 0 与 x 之间. 显然, 一定存在 N , 当 $n \geq N$ 时, $\frac{1}{n}$ 属于该邻域. 又 $f''(x)$ 在该邻域内连续, 当然在 $[0, \frac{1}{N}]$ 上也连续, 从而存在 $M > 0$, 使得

$$|f''(x)| \leq M, \forall x \in [0, \frac{1}{N}]$$

当 $n \geq N$ 时, 我们有

$$|f(\frac{1}{n})| = \frac{1}{2n^2} |f''(\xi_{1/n})| \leq \frac{M}{2n^2}$$

最后, 由 $\sum \frac{M}{2n^2}$ 的收敛性, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 收敛. 4 分