2024年数学建模模拟题-答案

一、简答题

1. 答：此方法用于处理可线性化的一元非线性回归问题。若根据数据绘制的散点图确定配曲线类型为指数函数 $y = ae^{bx}$，对方程两边取常用对数，得

$$\ln y = \ln a + bx$$

再作变量代换 $u = \ln y, A = \ln a$,则指数曲线方程变成直线方程

$$u = A + bx$$

由实验值（xi,yi）算出（xi,ui），用线性回归方法计算参数估计值 $\hat{A}, \hat{b}$，又由 $\hat{a} = e^{\hat{A}}$ 得 $\hat{a}$ 的值，则有 $y = \hat{a}e^{\hat{b}x}$。

2. 解：微分方程： $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$

初始条件：T(0)=26，T(10)=30，T(20)=32

3. 解： $a_n = C_1 2^n + C_2(-1)^n$

4. 解：差分方差：f(n)=2f(n-1)+2f(n-2)

初始条件： f(1)=3，f(2)=8

二、MATLAB 编程

1. 解：（答案不唯一）

（解法一）输入如下代码：

```
x=linspace(-1,1);
y1=x.^2;
y2=x.^3;
y3=x.^4;
y4=x.^5;
plot(x,y1,x,y2,x,y3,x,y4);
```

（解法二）输入代码：

```
fplot('[x.^2,x.^3,x.^4,x.^5]',[-1,1])
```

2. 解：先定义函数 M 文件

```
function f=fun(x)
  if x>=0
     f=x^2+1
```

```
else
    f=x^3-1
end
```

命令：fun(2)

fun(-2)

3. 解：输入代码

[x,y,z]=dsolve('Dx=4*x-3*y+6*z','Dy=5*x-7*y+6*z','Dz=3*x-4*y+5*z','t')

三、模型表示

1. **解**：（确定决策变元）设 x1 和 x2 分别是 a 和 b 的每周产量。

（确定目标函数）本问题的目标是利润最大化，总收益为

F=x1*(1000-90-160-125)+x2*(800-80-250-175)

（确定约束条件）

原材料 c: $3*x1\le300$

原材料 d：$4*x1+2*x2\le400$

原材料 e: $5*x2\le350$

加工工时：$5*x1+7*x2\le600$

综上，原问题可表示为一个线性规划问题：

max F= x1*625+x2*295

s.t. $x1\le100$

$2*x1+x2\le200$

$x2\le70$

$5*x1+7*x2\le600$

$x1\ge,x2\ge0$

2. 解：设 X_i 表示第 i 季度的产量， i=1,2,3

建立非线性规划模型：

$$\text{Min } f = aX_1+bX_1^2+aX_2+bX_2^2+aX_3+bX_3^2+c(X_1-40)+c(X_1+X_2-100)$$

$X_1\ge40;$

$X_1+X_2\ge100;$

$X_1+ X_2+X_3=180;$

$X_1\le100;$

$X_2\le100;$

$X_3\le100;$

$X_i\ge0$, i=1,2,3

3. 解：设 Xij 表示第 i 种货物装入第 j 个货舱的质量，货舱 j=1,2,3，分别表示前仓、中仓、

后仓。

建立线性规划模型：

Max f = 3100*(X11+X12+X13)+3800* (X21+X22+X23)+3500* (X31+X32+X33)
+2850* (X41+X42+X43)

约束：

（货物的总质量约束） X11+X12+X13≤18
X21+X22+X23≤15
X31+X32+X33≤23
X41+X42+X43≤12

（货舱的质量限制） X11+X21+X31+X41≤10
X12+X22+X32+X42≤16
X13+X23+X33+X43≤8

（货舱的空间限制） 480*X11+650*X21+580*X31+390*X41≤6800
480*X12+650*X22+580*X32+390*X42≤8700
480*X13+650*X23+580*X33+390*X43≤5300

（货舱装入质量的平衡约束）

(X11+X21+X31+X41)/10 = (X12+X22+X32+X42)/16
(X12+X22+X32+X42)/16 = (X13+X23+X33+X43)/8

4. 解：（决策变量）设 xi=0 表示不选择第 i 个菜，xi=1 表示选择第 i 个菜。(i=1,2,3,4,5,6)

（目标函数）本问题的目标是总费用 z 最小，

z=28*x1+32*x2+18*x3+48*x4+20*x5+68*x6

(约束条件)约束是所点菜品需包含所有营养成份：

x1+x4+x6≥1
x2+x5≥1;
x1+x3≥1;
x1+x2+x6≥1;
xi=0 或 1

综上，原问题表示为一个整数线性规划问题：

Min z=28*x1+32*x2+18*x3+48*x4+20*x5+68*x6

s.t. x1+x4+x6≥1
x2+x5≥1;
x1+x3≥1;
x1+x2+x6≥1;
xi=0 或 1 （i=1,2,3,4,5,6）

5. 解：（1）因为总体服从正态分布，总体方差未知，现为检验总体均值，则使用 t-检验法，Matlab 命令：[h,sig,ci]=ttest(x,m,alpha,tail)。

其中 x=[54 67 65 68 78 70 66 70 69 67]，m=72， alpha=0.05，tail 为 0 或缺省。

（2）h = 1，表示拒绝原假设，即认为患者与正常人的脉搏有显著差异；

sig =0.0366，sig 为显著性概率，小于显著性水平 0.05，结论也是拒绝原假设；

ci = [63.1585,71.6415]，表示患者脉搏的 95%的置信区间，它不包括 72，所以也不能接受原假设，即认为患者平均脉搏不是 72。

四、综合题

1. 解：（1）选择与 x=6 最接近的三点 $x_0=4,x_1=5,x_2=7$ 为插值结点，根据抛物线插值公式计算：

$$f(6) \approx L_2(6) = y_0 \times \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \times \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \times \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$= 2.9 \times \frac{(6-5)(6-7)}{(4-5)(4-7)} + 3.3 \times \frac{(6-4)(6-7)}{(5-4)(5-7)} + 3.6 \times \frac{(6-4)(6-5)}{(7-4)(7-5)}$$

$$= 3.5$$

（2）

（一）先用 lsqnonlin 指令

[1] 编写 M 文件 curve1.m

```
function f=curve1(x)
xdata=[1, 2, 4, 5, 7, 9, 10];
ydata=[1.8, 2.4, 2.9, 3.3, 3.6, 3.9, 4.2];
f= ydata-log(x(1)*xdata.^2+x(2)*xdata+x(3));
```

[2] 主程序 dianya1.m 如下：

```
x0=[1, 2, 3];
```

(注意，这里的 x0 是用户猜测的各参数初始值，取什么值无所谓)

```
xishu=lsqnonlin('curve1',x0)
```

（二）使用 polyfit 指令。由于 y 是关于 x 的非线性函数，所以我们先将其关系公式两边取自然指数得到：

$$e^y=a*x^2+b*x+c$$

令 $u= e^y$。

[1] 主程序 dianya3.m 如下：

```
xdata=[1, 2, 4, 5, 7, 9, 10];
ydata=[1.8, 2.4, 2.9, 3.3, 3.6, 3.9, 4.2];
u=exp(ydata);
xishu=polyfit(xdata, u,2);
```

2. 解：设一至四季度的饮料产量分别为 x1,x2,x3,x4 吨，而一至四季度的销售供货量分别为 y1,y2,y3,y4 吨。接着确定约束条件：

每季度的产量大于等于 0：xi≥0,(i=1,2,3,4)

每季度销量介于 0 和弹性需求量之间：

0≤y1≤200, 0≤y2≤500, 0≤y3≤300, 0≤y4≤100

每季度的生产成本不得超过当时的资金量：

第一季度： (1+1/(1+x1))*x1≤500

第二季度： (1+1/(1+x1))*x1+(1+1/(1+x2))*x2≤500

第三季度： (1+1/(1+x1))*x1+(1+1/(1+x2))*x2+(1+1/(1+x3))*x3≤500+2*y1

第四季度：(1+1/(1+x1))*x1+(1+1/(1+x2))*x2+(1+1/(1+x3))*x3

+(1+1/(1+x4))*x4 ≤ 500+2*y1+(3 -1/(y2)^2)*y2

历史销量不超过历史产量：

第一季度：y1≤x1

第二季度：y1+y2≤x1+x2

第三季度：y1+y2+y3≤x1+x2+x3

第四季度：y1+y2+y3+y4≤x1+x2+x3+x4

最后确定目标函数：本问题的目标是年末资金最多即

Max Z=500-(1+1/(1+x1))*x1-(1+1/(1+x2))*x2-(1+1/(1+x3))*x3

-(1+1/(1+x4))*x4+2*y1+(3-1/(y2)^2)*y2+2.5*y3+0.5*y4*ln(y4)

以下是相应的 matlab 求解代码：

(1)先建立 M 文件 fun.m 定义目标函数：（这里 x(1)至 x(4)对应上面的 x1 至 x4，x(5)至 x(8)对应上面的 y1 至 y4）

```
function f=fun(x)
f=-500+(1+1/(1+x(1)))*x(1)+(1+1/(1+x(2)))*x(2)+(1+1/(1+x(3)))*x(3)
    +(1+1/(1+x(4)))*x(4)-2*x(5)-(3-1/(x(6))^2)*x(6)-2.5*x(7)-0.5*x(8)*ln(x(8));
```

（这里必须要对应原目标函数的 Min 形式！）

(2)再建立 M 文件 mycon.m 定义非线性约束（**对应于上面每季度的生产成本不得超过当时的资金量的四条约束**）

```
function [g,ceq]=mycon(x)
g=[ (1+1/(1+x(1)))*x(1)-500;
  (1+1/(1+x(1)))*x(1)+(1+1/(1+x(2)))*x(2) -500;
 (1+1/(1+x(1)))*x(1)+(1+1/(1+x(2)))*x(2)+(1+1/(1+x(3)))*x(3) -2*x(5) -500;
 (1+1/(1+x(1)))*x(1)+(1+1/(1+x(2)))*x(2)+(1+1/(1+x(3)))*x(3)
            +(1+1/(1+x(4)))*x(4) -2*x(5)-(3 -1/(x(6))^2)*x(6) – 500];
        ceq=[];
```

(3)主程序 scap.m:

```
x0=[0,0,0,100,0,0,0,100];
A=[-1,0,0,0,1,0,0,0;
-1,-1,0,0,1,1,0,0;
-1,-1,-1,0,1,1,1,0;
```

```
        -1,-1,-1,-1,1,1,1,1];
    b=zeros(4,1);（A和b对应前面历史销量不超过历史产量的约束）
    vlb=zeros(8,1);（各变元取值下界全为0）
    vub=[inf;inf;inf;inf;200;500;300;100]; （各变元取值上界，对应弹性需求）
  [x,fval]=fmincon('fun', x0, A, b, [], [], vlb, vub, 'mycon');
  fval=-fval;
```

3. 解：确定决策变量，设x1a,x2a,x3a,x4a表示第一年到第四年每年初项目A的投资额，x3b表示第三年初项目B的投资额，x2c表示第二年初项目C的投资额，x1d,x2d,x3d,x4d,x5d表示第一年到第五年每年初项目D的投资额。

目标是到第五年末的资金总额z最大，

z=1.15*x4a+1.25*x3b+1.40*x2c+1.06*x5d

约束条件：

所有决策变量非负： xi≥0；

第一年初投资资金10万元且全部投入项目A与项目D： x1a+x1d=100000;

第二年初回收项目D，投资项目A,C,D： x2a+x2c+x2d=1.06*x1d;

第三年初回收项目A,D,投资项目A,B,D： x3a+x3b+x3d=1.15*x1a+1.06*x2d;

第四年初回收项目A,D,投资项目A,D： x4a+x4d=1.15*x2a+1.06*x3d;

第五年初回收项目A,D，投资项目D： x5d=1.15*x3a+1.06*x4d;

项目B投资限额： x3b≤40000;

项目C投资限额： x2c≤30000;

得线性规划模型：

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } z=1.15x_{4a}+1.25x_{3b}+1.40x_{2c}+1.06x_{5d}\\
\text{s.t.}\quad & x_{1a}+x_{1d}=100000\\
& x_{2a}+x_{2c}+x_{2d}-1.06x_{1d}=0\\
& x_{3a}+x_{3b}+x_{3d}-1.15x_{1a}-1.06x_{2d}=0\\
& x_{4a}+x_{4d}-1.15x_{2a}-1.06x_{3d}=0\\
& x_{5d}-1.15x_{3a}-1.06x_{4d}=0\\
& x_{3b}\le 40000\\
& x_{2c}\le 30000\\
& x_{1a}\ge 0,\ x_{2a}\ge 0,x_{3a}\ge 0,x_{4a}\ge 0,\ x_{3b}\ge 0,\ x_{2c}\ge 0,\\
& x_{1d}\ge 0,x_{2d}\ge 0,x_{3d}\ge 0,x_{4d}\ge 0,x_{5d}\ge 0
\end{aligned}
$$

LINGO求解代码：

```
MAX=1.15*x4a+1.25*x3b+1.40*x2c+1.06*x5d;
x1a+x1d=100000;
x2a+x2c+x2d=1.06*x1d;
x3a+x3b+x3d=1.15*x1a+1.06*x2d;
x4a+x4d=1.15*x2a+1.06*x3d;
x5d=1.15*x3a+1.06*x4d;
```

$x3b \le 40000$;

$x2c \le 30000$;

4. 解：设第 k 年湖中鱼的数量为 f(k)，则

$$f(k)=f(k-1)*(1+0.3)-2, \quad f(0)=10$$

$f(k)=f(k-1)*(1+0.3)-2$

$= (f(k-2)*(1+0.3)-2)*(1+0.3)-2$

$=\ldots\ldots$

$=f(0)*(1+0.3)^k-2*((1+0.3)^{k-1}+\ldots\ldots+(1+0.3)+1)$

$=10*1.3^k-2*((1.3)^k-1)/0.3$

$=10*1.3^k/3+20/3$

所以，$f(k)=10*1.3^k/3+20/3$

令 $f(k)=10*1.3^k/3+20/3=0$，求得 k 即为鱼捕捞完的年份。

显然，f(k）$=10*1.3^k/3+20/3>0$，所以湖中的鱼是永远捕捞不完的。