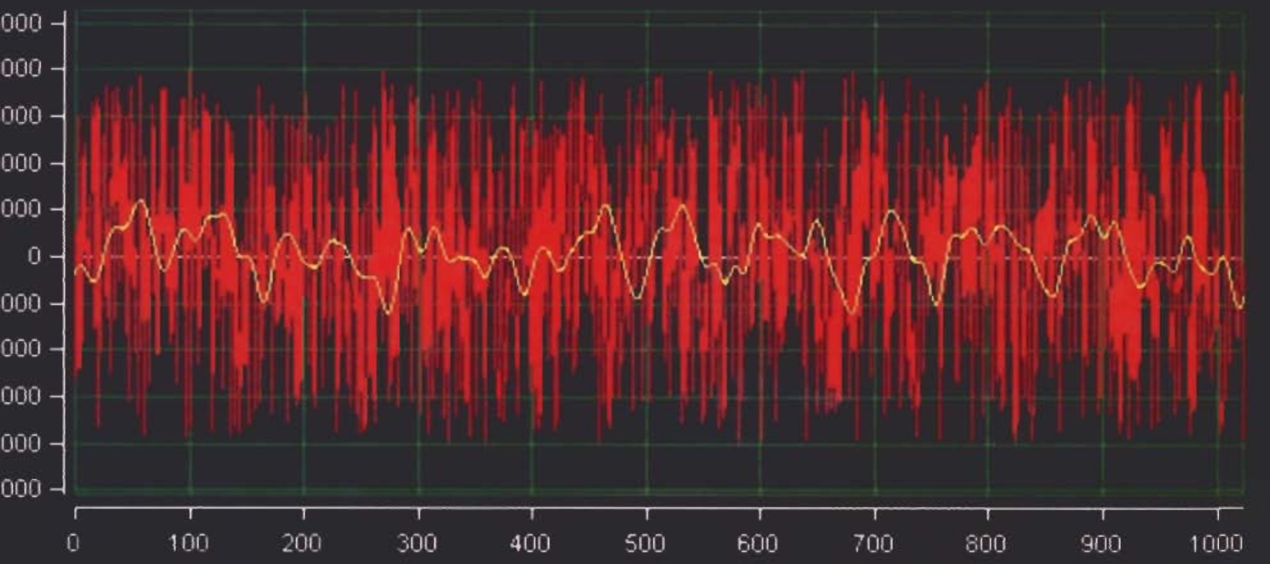
ThS. TRẦN THỊ THỤC LINH
TS. ĐẶNG HOÀI BẮC



Giải bài tập
Xử lý tín hiệu số và Matlab

NHÀ XUẤT BẢN BƯU ĐIỆN

ThS. TRẦN THỊ THỤC LINH
ThS. ĐẶNG HOÀI BẮC

Giải bài tập
Xử lý tín hiệu số và Matlab

NHÀ XUẤT BẢN BƯU ĐIỆN

LỜI NÓI ĐẦU

Xử lý tín hiệu số là ngành khoa học đã được nghiên cứu và ứng dụng trên 40 năm qua. Những năm gần đây việc số hóa các thiết bị điện tử - viễn thông đã và đang được thực hiện rất mạnh mẽ trên toàn thế giới cũng như ở Việt Nam. Các thiết bị được số hoá có mặt khắp nơi từ các thiết bị điện tử gia dụng như máy giặt, lò vi sóng, điều hoà nhiệt độ, các thiết bị xử lý thông tin và truyền thông như máy tính cá nhân, điện thoại di động, máy nghe nhạc MP3, MP4, PDA,... đến các thiết bị xử lý tín hiệu trong các lĩnh vực hàng không và vũ trụ.

*Xử lý tín hiệu số là môn học bắt buộc ở bậc đại học và cao học đối với các sinh viên ngành điện tử, viễn thông và tự động hóa. Để giúp các sinh viên đại học và học viên cao học có thể tiếp cận được một số lượng bài tập phong phú, đồng thời có thể tham khảo lời giải hoặc đáp án của các bài tập một cách nhanh chóng, thuận tiện cũng như tiếp cận với kỹ thuật mô phỏng hệ thống trên phần mềm Matlab, Nhà xuất bản Bưu điện xuất bản cuốn sách "**Giải bài tập xử lý tín hiệu số và Matlab**". Cuốn sách do ThS. Trần Thị Thục Linh, ThS. Đặng Hoài Bắc - giảng viên Khoa Viễn thông, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông biên soạn.*

Nội dung cuốn sách được chia làm 04 chương:

***Chương 1**: Tín hiệu và hệ thống rời rạc*

***Chương 2**: Biểu diễn hệ thống và tín hiệu rời rạc trong miền z*

***Chương 3**: Biểu diễn hệ thống và tín hiệu rời rạc trong miền tần số liên tục (biến đổi Fourier)*

***Chương 4**: Biểu diễn hệ thống và tín hiệu rời rạc trong miền tần số rời rạc (DFT)*

Trong mỗi chương đều có phần tóm tắt lý thuyết, các bài tập cơ bản, các bài tập nâng cao cùng với lời giải cụ thể. Ngoài ra, cuốn sách còn cung cấp một số bài tập mô phỏng hệ thống xử lý tín hiệu số trên phần mềm Matlab cùng với lời giải chi tiết. Các bài tập mô phỏng này sẽ giúp bạn đọc mô phỏng hệ thống tín hiệu số trên máy tính, thông qua đó có thể hiểu lý thuyết dễ dàng và sâu sắc hơn.

Cuốn sách thực sự là tài liệu hữu ích cho việc học tập và nghiên cứu của sinh viên, học viên cao học chuyên ngành Điện tử, Viễn thông và Tự động hóa; là tài liệu tham khảo tốt cho các giảng viên bộ môn xử lý tín hiệu số và tự động hóa trong các trường đại học có chuyên ngành Điện tử - Viễn thông và Tự động hóa.

Nhà xuất bản Bưu điện mong nhận được các ý kiến góp ý của bạn đọc để cuốn sách được hoàn thiện hơn trong lần xuất bản tiếp theo. Mọi ý kiến đóng góp của bạn đọc xin gửi về Nhà xuất bản Bưu điện - 18 Nguyễn Du, Hà Nội. Điện thoại: 04.5772142, Fax: 04.5772037.

Trân trọng cảm ơn./.

NHÀ XUẤT BẢN BƯU ĐIỆN

Chương 1

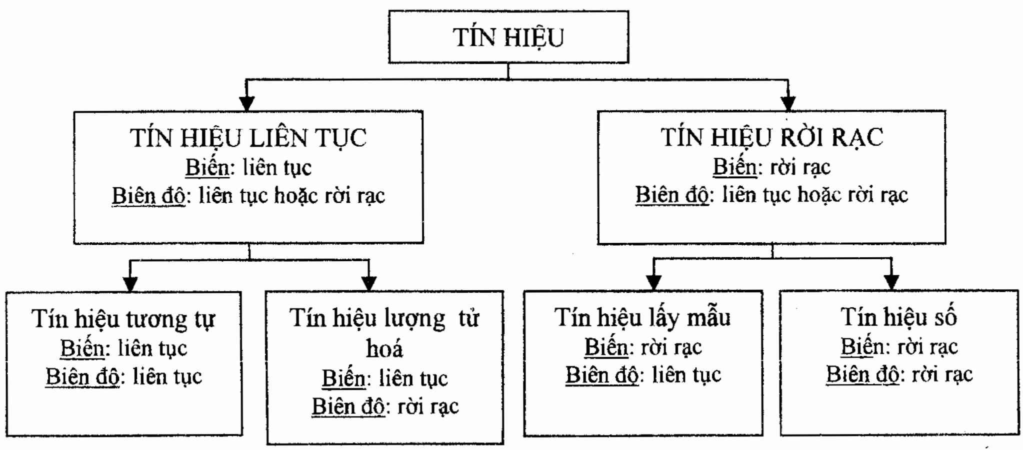
TÍN HIỆU VÀ HỆ THỐNG RỜI RẠC

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

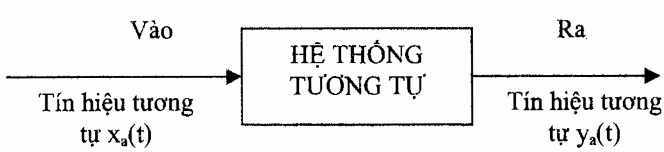
1.1. Định lý lấy mẫu

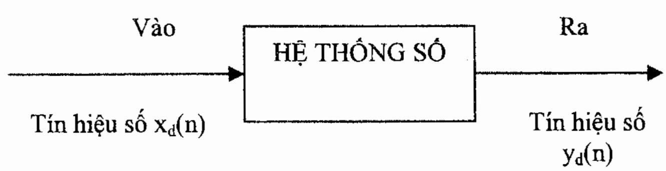
Ta chú ý rằng một tín hiệu sẽ được khôi phục khi tần số lấy mẫu phải lớn hơn hoặc bằng hai lần bề rộng phổ của tín hiệu. $F_s \geq 2B$ $(B = F_{max})$

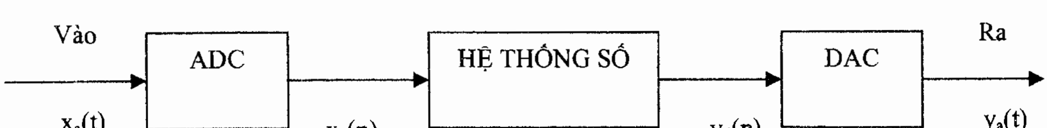
1.2. Phân loại tín hiệu



1.3. Các hệ thống xử lý tín hiệu







1.4. Tín hiệu rời rạc

1.4.1. Biểu diễn tín hiệu rời rạc

- Biểu diễn bằng hàm số
- Biểu diễn bằng bảng
- Biểu diễn bằng dãy số
- Biểu diễn bằng đồ thị

Chú ý: một tín hiệu bất kỳ x(n) đều được biểu diễn thông qua đáp ứng xung dạng tổng quát như sau:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).\delta(n-k)$$

1.4.2 Một số dãy cơ bản

a) Dãy xung đơn vị:

Trong miền n, dãy xung đơn vị được định nghĩa như sau:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

b) Dãy nhảy đơn vị:

Trong miền n, dãy nhảy đơn vị được định nghĩa như sau:

$$u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

c) Dãy chữ nhật:

Trong miền n, dãy chữ nhật được định nghĩa như sau: $\text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

d) Dãy dốc đơn vị:

Trong miền n, dãy dốc đơn vị được định nghĩa như sau: $r(n) = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

e) Dãy hàm mũ:

Trong miền n, dãy hàm mũ được định nghĩa như sau:

$$e(n) = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

1.4.3. Một số định nghĩa

a. Dãy tuần hoàn:

Ta nói rằng một dãy x(n) là tuần hoàn với chu kỳ N nếu thỏa mãn điều kiện sau đây:

$$x(n) = x(n + N) = x(n + \ell N)$$

Ký hiệu: $\tilde{x}(n)_N$.

b. Dãy có chiều dài hữu hạn:

Một dãy được xác định với số hữu hạn N mẫu ta gọi là dãy có chiều dài hữu hạn với N là chiều dài của dãy.

c. Năng lượng của dãy:

Năng lượng của một dãy x(n) được định nghĩa như sau: $E_x = \sum_{n=0}^{N-1} [x(n)]^2$ (*) | nếu dãy vô lấy $\lim_{n \to \infty}$ (*)

d. Công suất trung bình của một tín hiệu

Công suất trung bình của một tín hiệu $x(n)$ được định nghĩa như sau:

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2$$

1.4.4. Các phép toán cơ bản

- Phép cộng, phép nhân hai tín hiệu.
- Phép nhân một tín hiệu với hằng số.
- Phép trễ tín hiệu.

1.4.5. Hệ thống tuyến tính bất biến (TTBB). Đáp ứng xung h(n)

- Cần lưu ý hệ thống tuyến tính bắt buộc phải thoả mãn nguyên lý xếp chồng:

$$T[a.x_1(n) + b.x_2(n)] = a.T[x_1(n)] + b.T[x_2(n)].$$

- Hệ thống tuyến tính bất biến: ứng với kích thích đầu vào x(n) ta có đáp ứng ra là y(n) thì tương tự ứng với kích thích đầu vào x(n-k) ta có đáp ứng ra là y(n-k).

- Khi ta có đầu vào hệ thống tuyến tính bất biến là xung đơn vị $\delta(n)$ thì đầu ra là đáp ứng xung h(n). Đáp ứng xung h(n) là đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống tuyến tính bất biến.

1.4.6. Phép chập:

Đây là phép toán quan trọng nhất trong xử lý tín hiệu để xác định đầu ra y(n) hệ thống khi biết đầu vào x(n) và đáp ứng xung h(n).

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k).h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k).x(n-k)$$

Phép chập có tính chất: giao hoán, phân phối, kết hợp.

1.4.7. Hệ thống TTBB nhân quả, tín hiệu nhân quả

Hệ thống TTBB được gọi là hệ thống nhân quả khi đáp ứng xung h(n) của nó thoả mãn:

$$h(n) = 0 \text{ với } \forall n<0.$$

Tín hiệu x(n) được gọi tín hiệu nhân quả khi nó thoả mãn x(n) = 0 với $\forall n < 0$.

Lưu ý: Các hệ thống nhân quả và tín hiệu nhân quả mới tồn tại trong thực tế

Hệ thống TTBB ổn định

Hệ thống ổn định là hệ thống BIBO, đáp ứng xung h(n) của nó phải thoả mãn điều kiện sau:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

1.4.8. Phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng (PTSPTTHSH)

Quan hệ vào ra của hệ thống tuyến tính bất biến sẽ được mô tả bởi phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng có dạng như sau:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k(n)y(n-k) = \sum_{r=0}^{M} b_r(n)x(n-r)$$

Trong đó: - x đầu vào.

- y đầu ra.

Các hệ số a_k, b_r đặc trưng hoàn toàn cho hệ thống có vai trò tương tự như đáp ứng xung h(n).

Việc giải PTSPTTHSH để tìm ra đầu ra y(n) có hai phương pháp chính:

- Phương pháp thế.

- Phương pháp tìm nghiệm riêng ($y_p(n)$) và nghiệm thuần nhất ($y_0(n)$), suy ra nghiệm tổng quát $y(n) = y_0(n) + y_p(n)$.

Từ PTSPTTHSH trên ta sẽ có một số khái niệm về:

- ***Hệ thống không đệ quy*** khi N = 0. Bản chất của hệ thống này là không có thành phần hồi tiếp.

- ***Hệ thống đệ quy*** khi N ≠ 0. Bản chất của hệ thống này là có thành phần hồi tiếp.

- ***Hệ thống đệ quy thuần tuý*** khi N ≠ 0. M = 0. Hệ thống này chỉ gồm duy nhất các thành phần đệ quy.

Lưu ý: Như vậy đến đây ta có hai cách biểu diễn quan hệ vào ra hệ thống rời rạc.

- Biểu diễn theo phép chập: y(n) = x(n)*h(n)

- Biểu diễn theo phương trình SPTTHSH: $y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$ *(thường phải chuẩn hoá $a_0 = 1$)*

1.4.9. Thực hiện hệ thống

Các phần tử thực hiện hệ thống bao gồm: phần tử cộng, phần tử nhân, nhân với hằng số, phần tử trễ D.

Khi thực hiện hệ thống phải dựa vào PTSPTTHSH, luôn nhớ phải chuẩn hoá hệ số $a_0 = 1$ để có $y(n) = \sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)$ rồi mới vẽ sơ đồ hệ thống. Trên thực tế người ta sẽ dùng các bộ xử lý toán học ALU, các thanh ghi dịch... để thực hiện hệ thống xử lý tín hiệu số theo sơ đồ.

1.4.10. Tương quan tín hiệu

Phép tương quan thường dùng để nhận biết các tín hiệu, phân biệt tín hiệu với nhiễu, phát hiện vật thể... Có hai loại tương quan:

- Tự tương quan: Tương quan tín hiệu x(n) với chính nó: $R_{xx}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).x(m-n)$.

- Tương quan chéo: Tương quan tín hiệu x(n) với y(n): $R_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m).y(m-n)$.

B. BÀI TẬP CƠ BẢN

1.1. Cho tín hiệu $x_a(t) = 3\cos 100\pi t$

a) Xác định tốc độ lấy mẫu nhỏ nhất cần thiết để tránh sự chồng mẫu.

b) Giả sử tín hiệu được lấy mẫu tại tốc độ $F_s = 200\,\text{Hz}$. Tín hiệu rời rạc nào sẽ có được sau lấy mẫu?

c) Giả sử tín hiệu được lấy mẫu tại tốc độ $F_s = 75$ Hz. Tín hiệu rời rạc nào đạt được sau lấy mẫu?

d) Tần số $F < F_s/2$ của một hình sin có các mẫu đồng nhất với các mẫu trong phần c) là bao nhiêu ?

Lời giải:

a) Tần số của tín hiệu tương tự là $F = 50\,\text{Hz}$. Vì thế, tốc độ lấy mẫu tối thiểu cần thiết để tránh hiện tượng chồng mẫu là $F_s = 100\,\text{Hz}$.

b) Nếu tín hiệu được lấy mẫu tại $F_s = 200\,\text{Hz}$ thì tín hiệu rời rạc có dạng:

$$x(n) = 3\cos(100\pi/200)n = 3\cos(\pi/2)n$$

c) Nếu $F_s = 75$ Hz, tín hiệu rời rạc có dạng

$$x(n) = 3\cos(100\pi/75)n = 3\cos(4\pi/3)n = 3\cos(2\pi - 2\pi/3)n = 3\cos(2\pi/3)n$$

d) Đối với tốc độ lấy mẫu $F_s = 75$ Hz, ta có: $F = fF_s = 75f$.

Tần số của tín hiệu sin trong phần c) là $f = 1/3$. Do đó: $F = 25$ Hz

Tín hiệu sin là: $y_a(t) = 3\cos 2\pi Ft = 3\cos 50\pi t$ được lấy mẫu tại $F_s = 75$ mẫu/s sinh ra các mẫu đồng nhất. Vì thế $F = 50\,\text{Hz}$ là bí danh (alias) của $F = 25\,\text{Hz}$ ứng với tốc độ lấy mẫu $F_s = 75\,\text{Hz}$.

1.2. Xét tín hiệu tương tự

$$x_a(t) = 3\cos 50\pi t + 10\sin 300\pi t - \cos 100\pi t$$

Hãy xác định tốc độ Nyquist đối với tín hiệu này?

Lời giải: Tín hiệu trên có các tần số thành phần sau:

$$F_1 = 25\ \text{Hz}, \qquad F_2 = 150\ \text{Hz}, \qquad F_3 = 50\ \text{Hz}$$

Như vậy, $F_{max} = 150$ Hz và theo định lý lấy mẫu ta có: $F_s > 2F_{max} = 300$ Hz

Tốc độ Nyquist là $F_N = 2F_{max}$. Do đó, $F_N = 300$ Hz.

Nhận xét: Ta nhận thấy rằng, khi lấy mẫu thành phần tín hiệu $10\sin 300\pi t$ với tốc độ Nyquist $F_N = 300\,\text{Hz}$ sẽ tạo được các mẫu $10\sin \pi n$ có giá trị luôn luôn bằng không. Nói khác đi, ta đã lấy mẫu tín hiệu hình sin tại các điểm nó cắt trục hoành, vì thế thành phần của tín hiệu này bị mất hoàn toàn. Hiện tượng này sẽ không xuất hiện, nếu dao động sin có một sự lệch pha θ nào đó. Khi đó, ta có $10\sin(300\pi t + \theta)$ và nếu lấy mẫu tại tốc độ Nyquist ta có:

$$10\sin(\pi n + \theta) = 10(\sin \pi n\cos\theta + \cos \pi n\sin\theta) = 10\sin\theta\cos \pi n = (-1)^n 10\sin\theta$$

Nếu $\theta \neq 0$ hoặc π thì các mẫu sin, lấy tại tốc độ Nyquist sẽ khác không. Tuy nhiên, biên độ của các mẫu vẫn chưa xác định được một cách chính xác vì pha θ vẫn chưa biết. Biện pháp đơn giản để tránh hiện tượng này là nên lấy mẫu tín hiệu tương tự ở tần số lớn hơn tần số Nyquist.

1.3. Cho tín hiệu tương tự

$$x_a(t) = 3\cos 2000\pi t + 5\sin 6000\pi t + 10\cos 12000\pi t$$

a) Xác định tốc độ Nyquist của tín hiệu?

b) Giả sử rằng, tín hiệu được lấy mẫu tại tốc độ $F_s = 5000$ mẫu/s. Hãy xác định tín hiệu rời rạc thu được sau khi lấy mẫu?

c) Hãy xác định tín hiệu tương tự $y_a(t)$, được phục hồi từ các mẫu khi sử dụng công thức nội suy lí tưởng?

Lời giải: a) Các tần số của tín hiệu tương tự này là:

$F_1 = 1$ kHz, $F_2 = 3$ kHz, $F_3 = 6$ kHz

Như vậy, $F_{max} = 6$ kHz và theo định lí lấy mẫu, có: $F_s > 2F_{max} = 12\,\text{kHz}$

Tốc độ Nyquist là: $F_N = 12\,\text{kHz}$.

b) Vì ta chọn $F_s = 5\,\text{kHz}$, nên tần số gập sẽ là: $F_s/2 = 2.5\,\text{kHz}$

đây là tần số cực đại được tín hiệu đã lấy mẫu thể hiện một cách duy nhất. Ta có:

$$\begin{aligned} x(n) = x_a(nT) = x_a(n/F_s) &= 3\cos 2\pi(1/5)n + 5\sin 2\pi(3/5)n + 10\cos 2\pi(6/5)n \\ &= 3\cos 2\pi(1/5)n + 5\sin 2\pi(1-2/5)n + 10\cos 2\pi(1+1/5)n \\ &= 3\cos 2\pi(1/5)n + 5\sin 2\pi(-2/5)n + 10\cos 2\pi(1/5)n \end{aligned}$$

Cuối cùng, ta có: $x(n) = 13\cos 2\pi(1/5)n - 5\sin 2\pi(2/5)n$

c) Vì chỉ có các thành phần tần số 1 kHz và 2 kHz là hiện diện trong tín hiệu đã lấy mẫu, nên tín hiệu tương tự có thể phục hồi được là

$$y_a(t) = 13\cos 2000\pi t - 5\sin 4000\pi t$$

Đây là kết quả khác đáng kể so với tín hiệu gốc $x_a(t)$. Việc méo tín hiệu tương tự gốc như thế này là do ảnh hưởng của hiện tượng chồng mẫu mà nguyên nhân chính là vì tần số lấy mẫu thấp.

1.4. Phân loại các tín hiệu sau theo các tiêu chí (1) tín hiệu một chiều hay nhiều chiều, (2) tín hiệu đơn kênh hay đa kênh, (3) tín hiệu liên tục hay rời rạc theo thời gian, và (4) tín hiệu tương tự hay số (theo biên độ). Hãy đưa ra giải thích ngắn gọn.

a) Giá gần đúng của các chứng khoán trên thị trường chứng khoán Việt Nam.

b) Một bộ phim màu

c) Vị trí của bánh lái của một xe hơi khi chuyển động đối với vật tham chiếu là thân xe.

d) Vị trí của bánh lái của một xe hơi khi chuyển động đối với vật tham chiếu là mặt đất.

e) Các số đo trọng lượng và chiều cao của một đứa trẻ hàng tháng.

Lời giải:

Gợi ý:

- Là tín hiệu một chiều, đa kênh, rời rạc theo thời gian, và là tín hiệu số.
- Là tín hiệu đa chiều, đơn kênh, liên tục theo thời gian, và là tín hiệu tương tự.
- Là tín hiệu một chiều, đơn kênh, liên tục theo thời gian, và là tín hiệu tương tự.
- Là tín hiệu một chiều, đơn kênh, liên tục theo thời gian, và là tín hiệu tương tự.
- Là tín hiệu một chiều, đa kênh, rời rạc theo thời gian, và là tín hiệu số.

1.5. Hãy xác định xem liệu các tín hiệu sau đây có phải là các tín hiệu tuần hoàn không. Trong trường hợp là tín hiệu tuần hoàn, hãy xác định chu kì cơ bản của tín hiệu đó.

a) $x_a(t) = \cos\left(5t + \frac{\pi}{3}\right)$

b) $x(n) = 2\cos\left(5n + \frac{\pi}{3}\right)$

c) $x(n) = 3\exp\left[j\left(\frac{n}{6} - \pi\right)\right]$

d) $x(n) = 2\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{n}{4}\right)$

e) $x(n) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{n\pi}{8}\right) + 2\cos\left(\frac{n\pi}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$

Lời giải:

Tín hiệu tuần hoàn với chu kì $T_p = \frac{2\pi}{5}$.

$f = \frac{5}{2\pi} \Rightarrow$ tín hiệu không tuần hoàn.

$f = \frac{1}{12\pi} \Rightarrow$ tín hiệu không tuần hoàn.

Tương tự ta có: $\cos\left(\frac{n}{4}\right)$ là tín hiệu không tuần hoàn; $\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ là tín hiệu tuần hoàn, suy ra tích của chúng là tín hiệu không tuần hoàn.

$\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$ là tín hiệu tuần hoàn với chu kì $T_{p1} = 4$

$\cos\left(\frac{\pi n}{8}\right)$ là tín hiệu tuần hoàn với chu kì $T_{p2} = 16$

$\cos\left(\frac{\pi n}{4} - \frac{\pi}{3}\right)$ là tín hiệu tuần hoàn với chu kì $T_{p3} = 8$

Do đó x(n) tuần hoàn với chu kì $T_p = 16$ (vì 16 là bội số chung nhỏ nhất của 4,8,16).

1.6. a) Chứng minh rằng tần số cơ bản Np của các tín hiệu:

$$s_k(n) = e^{j2\pi kn/N} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

có dạng $N_p = N/ƯSCLN(k,N)$

(ƯSCLN(k,N) là ước số chung lớn nhất của k và N)

b) Xác định chu kì cơ bản của tập hợp này đối với N =7

c) Câu hỏi như b) đối với N = 16

Lời giải: a) $\omega = \frac{2\pi k}{N}$ có nghĩa là $f = \frac{k}{N}$.

Đặt α = ƯSCLN(k,N), có nghĩa là $k = k'\alpha$, $N = N'\alpha$

Do đó, $f = \frac{k'}{N'}$, có nghĩa là $N' = N_p = \frac{N}{\alpha}$ (đpcm)

b)
$$N = 7$$
$$k = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \ 7$$
$$\text{ƯSCLN}(k,N) = 7\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 7$$
$$N_p = 1\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 1$$

c)
$$N = 16$$
$$k = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ \ 12\ldots16$$
$$\text{ƯSCLN}(k,N) = 16\ 1\ 2\ 1\ 4\ 1\ 2\ 1\ 8\ 1\ 2\ 1\ 4\ldots16$$
$$N_p = 1\ 6\ 8\ 16\ 4\ 16\ 8\ 16\ 2\ 16\ 8\ 16\ 4\ldots1$$

1.7. Xét tín hiệu tương tự hình sin như sau:

$$x_a(t) = 3\sin(100\pi t)$$

a) Vẽ tín hiệu $x_a(t)$ với $0 \le t \le 30\text{ms}$.

b) Tín hiệu $x_a(t)$ được lấy mẫu với tốc độ lấy mẫu $F_s = 400$ mẫu/s. Hãy xác định tần số của tín hiệu rời rạc $x(n) = x_a(nT), T = \frac{1}{F_s}$ và chứng minh rằng x(n) là tuần hoàn.

c) Tính giá trị của các mẫu trong một chu kì của x(n). Vẽ x(n) trong cùng một hình vẽ với $x_a(t)$. Xác định chu kì của tín hiệu rời rạc theo ms.

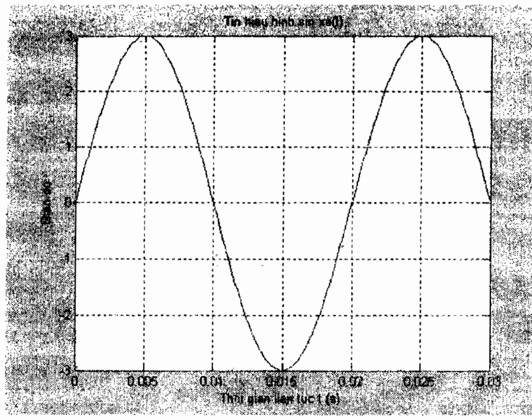
d) Có thể tìm thấy một tốc độ lấy mẫu F_s sao cho tín hiệu x(n) đạt tới giá trị đỉnh của nó là 3? Giá trị F_s nhỏ nhất thoả mãn điều kiện đó là bao nhiêu?

Lời giải: a) Hình 1.1

b) $x(n) = x_a(nT), T = \frac{1}{F_s}$

$$x(n) = x_a(n/F_s) = 3\sin(100\pi n/F_s) = 3\sin(\pi n/4)$$

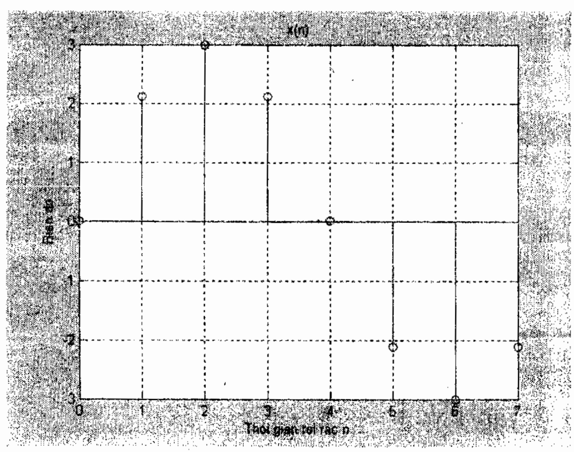
$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{8}; T_p = 8$$



Hình 1.1

c) Hình 1.2

$$x(n)=\left\{0,\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2},-1,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right\},\ T_p=8.$$



Hình 1.2

d) Có.

$$x(1)=3=3\sin\left(\frac{100\pi}{F_s}\right)\Rightarrow F_s=200\ \text{mẫu/s}$$

1.8. Một tín hiệu hình sin liên tục theo thời gian $x_a(t)$ có tần số cơ bản $T_p=1/F_0$ được lấy mẫu ở tốc độ lấy mẫu $F_s=1/T$ để tạo ra một tín hiệu hình sin rời rạc $x(n)=x_a(nT)$.

a) Chứng minh rằng x(n) là tuần hoàn nếu $T/T_p=k/N$, (nghĩa là T/T_p là một số hữu tỷ)

b) Nếu x(n) là tuần hoàn, xác định chu kì cơ bản T_p của nó theo giây?

c) Giải thích phát biểu sau đây: x(n) là tuần hoàn nếu chu kì cơ bản T_p (s) của nó bằng một số nguyên lần chu kì của $x_a(t)$.

Lời giải: a) $x(n)=A\cos(2\pi F_0 n/F_s+\theta)=A\cos\left(2\pi\left(T/T_p\right)n+\theta\right)$

Mà $T / T_p = f = \frac{k}{N}$ là một số hữu tỷ, suy ra x(n) là tuần hoàn.

b) Nếu x(n) là tuần hoàn thì f = k/N, trong đó N là chu kì. Do đó,

$$T_d = \frac{k}{f} T = k\left(\frac{T_p}{T}\right) T = kT_p$$

nghĩa là cần k chu kì T_p của tín hiệu tương tự để tạo nên một chu kì T_d của tín hiệu rời rạc.

c) $T_d = kT_p \Rightarrow NT = kT_p \Rightarrow f = \frac{k}{N} = \frac{T}{T_p} \Rightarrow$ f là số hữu tỷ $\Rightarrow x(n)$ là tuần hoàn.

1.9. Một tín hiệu tương tự có các tần số lên đến 20 kHz.

a) Xác định phạm vi của tần số lấy mẫu để có thể khôi phục chính xác tín hiệu này từ các mẫu của nó.

b) Giả thiết rằng chúng ta lấy mẫu tín hiệu này với tần số lấy mẫu $F_s = 16\text{kHz}$. Hãy xác định điều gì sẽ xảy ra đối với tần số $F_1 = 10\text{kHz}$

c) Lặp lại câu b) với $F_2 = 18\text{kHz}$

Lời giải:

a) $F_{max} = 20\text{kHz} \Rightarrow F_s \geq 2F_{max} = 40\text{kHz}$

b) Đối với $F_s = 16\text{kHz}$, $F_{gấp\ (fold)} = F_s / 2 = 8$ kHz, suy ra 10 kHz sẽ là ảnh (alias) của 6kHz.

c) F = 18 kHz sẽ là ảnh (alias) của 2 kHz

1.10. Một tín hiệu điện tâm đồ gồm các tần số hữu dụng lên đến 100 Hz.

a) Tần số Nyquist cho tín hiệu này là bằng bao nhiêu?

b) Giả thiết là ta lấy mẫu tín hiệu này ở tốc độ 200 mẫu/s. Hãy xác định tần số lớn nhất mà tín hiệu có thể được biểu diễn duy nhất tại tốc độ lấy mẫu này.

Lời giải:

a) $F_{max} = 100\text{kHz}, F_s \geq 2F_{max} = 200\text{kHz} \Rightarrow F_{Nyquist} = 200\text{kHz}$

b) $F_{gấp(fold)} = F_s /2 = 100$ Hz

1.11. Một tín hiệu tương tự $x_a(t) = 2\sin(240\pi t) + 3\sin(720\pi t)$ được lấy mẫu 600 lần /s.

a) Xác định tốc độ lấy mẫu Nyquist cho $x_a(t)$?

b) Xác định tần số gấp (folding frequency)?

c) Xác định các tần số theo radian trong tín hiệu rời rạc x(n) thu được?

d) Nếu x(n) được cho qua một bộ biến đổi số/ tương tự, hãy xác định tín hiệu $y_a(t)$ khôi phục được.

Lời giải:

a) $F_{max} = 360\text{Hz}, F_{Ny} = 2F_{max} = 720\text{Hz}$

b) $F_{gấp} = F_s /2 = 600/2 = 300$ Hz

c) $x(n) = x_a(nT) = x_a(n/F_s)$

$$= 2\sin(240\pi n/600) + 3\sin(720\pi n/600) = 2\sin(2\pi n/5) + 3\sin(6\pi n/5)$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{5}, \omega_2 = \frac{7\pi}{5}$$

d) $y_a(t) = x(F_s t) = 2\sin(240\pi t) + 3\sin(720\pi t)$

1.12. Một đường truyền thông tin số mang các từ mã nhị phân biểu diễn các mẫu của một tín hiệu vào:

$$x_a(t) = 3\cos(600\pi t) + 2\cos(1800\pi t)$$

Đường truyền hoạt động tại 10000 bit/s và mỗi mẫu đầu vào được lượng tử hoá thành 1024 mức điện áp khác nhau.

a) Hãy xác định tần số lấy mẫu và tần số gấp.

b) Hãy xác định tần số Nyquist đối với tín hiệu $x_a(t)$

c) Hãy xác định các tần số trong tín hiệu rời rạc x(n) thu được.

d) Hãy xác định độ phân giải Δ ?

Lời giải:

Số bit/mẫu = $\log_2(1024) = 10$

$$F_S = \frac{10000\text{bit}/\text{s}}{10\text{bit}/\text{mau}} = 1000\text{mau}/\text{s}$$

Suy ra: $F_{gấp} = F_s / 2 = 500$ Hz

a) $F_{max} = \dfrac{1800\pi}{2\pi} = 900\text{Hz}$

$$F_{Ny} = 2F_{max} = 1800\text{Hz}$$

Các tần số trong tín hiệu rời rạc x(n) thu được:

$$f_1 = \frac{600\pi}{2\pi}\left(\frac{1}{F_s}\right) = 0{,}3$$

$$f_2 = \frac{1800\pi}{2\pi}\left(\frac{1}{F_s}\right) = 0{,}9$$

Xét thấy $f_2 = 0{,}9 > 0{,}5$ $(F_{gấp}/F_s = 0{,}5) \Rightarrow f_2 = 0{,}1$ (tần số của ảnh_aliasing)

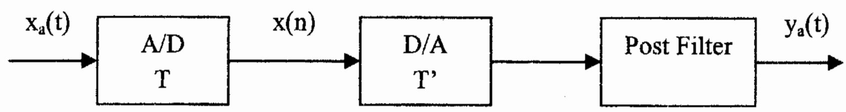
Suy ra: $x(n) = 3\cos[2\pi(0{,}3)n] + 2\cos[2\pi(0{,}1)n]$

b) $\Delta = \dfrac{x_{max} - x_{min}}{m-1} = \dfrac{5-(-5)}{1023} = \dfrac{10}{1023}$

1.13. Xét một hệ thống xử lý tín hiệu đơn giản như trên hình vẽ sau đây. Các chu kỳ lấy mẫu của bộ biến đổi A/D và D/A tương ứng là T = 5 ms và T' = 1 ms. Hãy xác định đầu ra y_a (t) của hệ thống, nếu đầu vào là:

$$x_a(t) = 2\cos(100\pi t) + 3\sin(250\pi t) \qquad \text{t: tính theo giây}$$

Bộ lọc phía sau (post filter) lọc bỏ bất cứ thành phần tần số nào lớn hơn $F_s'/2$.



Hình 1.3

Lời giải: $x(n) = x_a(nT) = 2\cos\left(100\pi n.5.10^{-3}\right) + 3\sin\left(250\pi n.5.10^{-3}\right)$

$$x(n) = x_a(nT) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) + 3\sin\left(\frac{5\pi n}{4}\right) = 2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) - 3\sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right)$$

$$T' = \frac{1}{1000} \Rightarrow y_a(t) = x\left(t/T'\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi 1000t}{2}\right) - 3\sin\left(\frac{3\pi 1000t}{4}\right) = 2\cos(500\pi t) - 3\sin(750\pi t)$$

$y_a(t)$ có các tần số $f_1 = \frac{500\pi}{2\pi} = 250\text{Hz}, f_2 = \frac{750\pi}{2\pi} = 375\text{Hz}$. Cả 2 tần số này đều nhỏ hơn $F_s'/2 = \frac{1000}{2} = 500\text{Hz}$ nên đầu ra của hệ thống là: $y_a(t) = 2\cos\left(\frac{\pi 1000t}{2}\right) - 3\sin\left(\frac{3\pi 1000t}{4}\right)$

1.14. Xác định năng lượng của chuỗi

$$x(n) = \begin{cases} (1/4)^2 & n \ge 0 \\ 3^n & n < 0 \end{cases}$$

Lời giải: Theo định nghĩa ta có:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{2n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} 3^{2n}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{16}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{16}{15} + \frac{9}{8} - 1 = \frac{143}{120} < +\infty$$

Vì năng lượng E là hữu hạn nên tín hiệu đang xét là tín hiệu năng lượng.

1.15. Xác định năng lượng của tín hiệu nhảy bậc đơn vị u (n)? Tín hiệu u(n) có phải là một tín hiệu công suất không?

Lời giải: Theo định nghĩa ta có: $E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} 1$

Năng lượng của chuỗi là vô hạn. Do đó, tín hiệu nhảy bậc đơn vị không phải là tín hiệu năng lượng.

Công suất trung bình của tín hiệu là:

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} u^2(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \lim_{N\to\infty} \frac{1+1/N}{2+1/N} = \frac{1}{2}$$

Do đó, tín hiệu nhảy bậc đơn vị là một tín hiệu công suất.

1.16. Xác định năng lượng của dãy:

$$x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$$

Trong đó, ω_0 và A là các hằng số.

Dãy x(n) có phải là dãy công suất ?

Lời giải: Từ định nghĩa ta có:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|Ae^{j\omega_0 n}\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A^2$$

Năng lượng của dãy là vô hạn. Bởi vậy, tín hiệu hàm mũ phức, biên độ là hằng số không phải là tín hiệu năng lượng.

Công suất trung bình của tín hiệu này là

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left|Ae^{j\omega_0 n}\right|^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} A^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}(2N+1)A^2 = A^2$$

Bởi vậy, dãy $x(n) = Ae^{j\omega_0 n}$ là tín hiệu công suất.

1.17. Hãy xác định công suất trung bình và năng lượng của dãy dốc đơn vị

$$x(n) = \begin{cases} n & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Lời giải:

Trên khoảng $-N \le n \le N$, tín hiệu này có năng lượng.

$$E_N = \sum_{n=0}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Rõ ràng $E = \infty$. Công suất trung bình là:

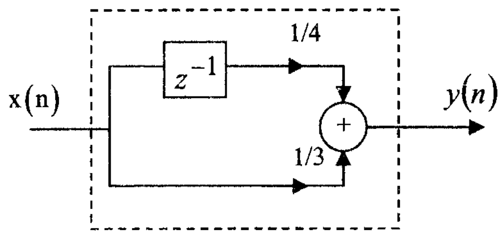
$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} E_N = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N+1)}{6}$$

cũng là vô hạn. Dãy dốc đơn vị có năng lượng vô hạn và công suất trung bình vô hạn. Do đó, nó vừa không phải là tín hiệu năng lượng cũng không phải là tín hiệu công suất.

1.18. Hãy dùng các loại sơ đồ khối phù hợp để biểu diễn hệ thống rời rạc theo thời gian có quan hệ vào ra: $y(n) = \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{4}x(n-1)$

ở đây, $x(n)$ là tác động vào, $y(n)$ là đáp ứng ra của hệ.

Lời giải:

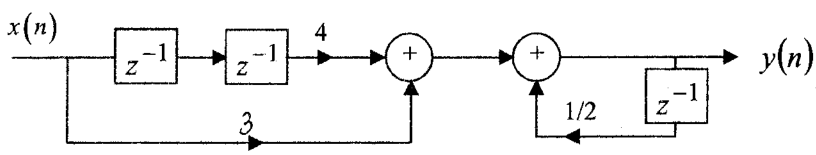


Hình 1.4

1.19. Hãy vẽ sơ đồ khối của hệ thống rời rạc được mô tả bởi phương trình vào - ra sau:

$$y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+3x(n)+4x(n-2)$$

Lời giải:



Hình 1.5: Sơ đồ khối của hệ $y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+3x(n)+4x(n-2)$

1.20. Hãy xác định xem các hệ thống có phương trình vào - ra dưới đây có tuyến tính hay không:

a) $y(n)=nx(n)$

b) $y(n)=x(n^2)$

c) $y(n)=x^2(n)$

d) $y(n)=Ax(n)+B$

e) $y(n)=e^{x(n)}$

Lời giải:

a) Đối với các chuỗi xung vào $x_1(n)$ và $x_2(n)$, tín hiệu ra tương ứng là:

$$y_1(n)=nx_1(n)$$
$$y_2(n)=nx_2(n) \quad (1)$$

Sự kết hợp tuyến tính hai tín hiệu vào sẽ sinh ra một tín hiệu ra là:

$$\begin{aligned}y_3(n)&=H[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]=n[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)]\\&=a_1nx_1(n)+a_2nx_2(n)\end{aligned} \quad (2)$$

Trong khi đó sự kết hợp hai tín hiệu ra $y_1(n)$ và $y_2(n)$ tạo nên tín hiệu ra:

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1nx_1(n)+a_2nx_2(n) \tag{3}$$

So sánh (2) và (3), ta suy ra hệ thống là tuyến tính.

b) Tương tự như ở phần a), ta tìm đáp ứng của hệ đối với hai tín hiệu riêng rẽ $x_1(n)$ và $x_2(n)$. Kết quả là:

$$\begin{aligned} y_1(n)&=x_1\left(n^2\right)\\ y_2(n)&=x_2\left(n^2\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Đầu ra của hệ khi tác động liên hợp tuyến tính $x_1(n)$ và $x_2(n)$ là:

$$y_3(n)=H\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]=a_1x_1\left(n^2\right)+a_2x_2\left(n^2\right) \tag{5}$$

T $X_3(n)$

Liên hợp tuyến tính của hai lối ra trong (2.2.36) có dạng:

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1x_1\left(n^2\right)+a_2x_2\left(n^2\right) \tag{6}$$

So sánh (5) với (6), ta suy ra hệ thống là tuyến tính.

c) Đầu ra của hệ là bình phương của đầu vào, (Các thiết bị điện thường có qui luật như thế và gọi là thiết bị bậc 2). Từ thảo luận trước đây, ta thấy rõ rằng hệ là không nhớ. Bây giờ ta chỉ rõ hệ là tuyến tính hay không?

Đáp ứng của hệ đối với hai tín hiệu vào riêng rẽ là:

$$\begin{aligned} y_1(n)&=x_1^2(n)\\ y_2(n)&=x_2^2(n) \end{aligned} \tag{7}$$

Đáp ứng của hệ với liên hợp tuyến tính hai tín hiệu là:

$$\begin{aligned} y_3(n)&=H\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]=\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]^2\\ &=a_1^2x_1^2(n)++2a_1a_2x_1(n)x_2(n)+a_2^2x_2^2(n) \end{aligned} \tag{8}$$

Ngược lại, nếu hệ tuyến tính, nó sẽ tạo ra liên hợp tuyến tính từ hai tín hiệu đã cho, tức là:

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1x_1^2(n)+a_2x_2^2(n) \tag{9}$$

Vì tín hiệu ra của hệ như đã cho trong (8) không bằng (9), nên hệ là không tuyến tính.

d) Giả thiết là hệ thống được kích thích riêng rẽ bởi $x_1(n)$ và $x_2(n)$ ta có:

$$\begin{aligned} y_1(n)&=Ax_1(n)+B\\ y_2(n)&=Ax_2(n)+B \end{aligned} \tag{10}$$

Liên hợp tuyến tính của $x_1(n)$ và $x_2(n)$ cho tín hiệu ra là:

$$\begin{aligned} y_3(n)&=H\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]=A\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]+B\\ &=Aa_1x_1(n)+a_2Ax_2(n)+B \end{aligned} \tag{11}$$

Nếu hệ tuyến tính, thì tín hiệu ra đối với liên hợp tuyến tính $x_1(n)$, $x_2(n)$ sẽ là:

$$a_1y_1(n)+a_2y_2(n)=a_1Ax_1(n)+a_2Ax_2(n)+B \tag{12}$$

Rõ ràng (11) và (12) khác nhau nên hệ không thoả mãn điều kiện tuyến tính. Trên thực tế, hệ được mô tả bằng phương trình tuyến tính, tuy nhiên có mặt tham số B đã làm cho điều kiện tuyến tính của hệ mất đi. Đáp ứng ra của hệ phụ thuộc cả tác động vào và hệ số $B \neq 0$. Vì thế, nếu $B \neq 0$, hệ là không triệt tiêu. Ngược lại, nếu $B = 0$ hệ là triệt tiêu và thoả mãn điều kiện tuyến tính.

e) Chú ý rằng, hệ được mô tả bằng biểu thức vào ra: $y(n) = e^{x(n)}$ là hệ giảm dần. Nếu $x(n) = 0$, ta có $y(n) = 1$. Điều này nói lên rằng hệ là không tuyến tính.

1.21. Xác định xem các hệ được mô tả bằng những phương trình dưới đây là nhân quả hay không:

a) $y(n) = x(n) - x(n-1)$;

b) $y(n) = \sum\limits_{x=-\infty}^{n} x(k)$;

c) $y(n) = ax(n)$;

d) $y(n) = x(n) + 3x(n+4)$;

e) $y(n) = x(n^2)$;

f) $y(n) = x(2n)$;

g) $y(n) = x(-n)$;

Lời giải: Các hệ thuộc phần a), b) và c) rõ ràng là nhân quả vì đầu ra chỉ phụ thuộc hiện tại và quá khứ của đầu vào. Ngược lại các hệ ở phần d), e) và f) là không nhân quả vì đầu ra phụ thuộc cả vào giá trị tương lai của đầu vào. Hệ g) cũng không nhân quả vì nếu lựa chọn $n = -1$ thì $y(-1) = x(1)$. Như vậy đầu ra tại $n = -1$ phụ thuộc vào đầu vào tại $n = 1$ cách nó hai đơn vị thời gian về phía tương lai.

1.22. Hãy xác định đầu ra $y(n)$ đối với hệ LTI giảm dần, có đáp ứng xung:

$h(n) = a^n.u(n)$ $\quad |a| < 1$ khi tín hiệu vào là chuỗi nhẩy bậc đơn vị

$x(n) = u(n)$

Lời giải: Trong trường hợp này cả $h(n)$ và $x(n)$ là các chuỗi vô hạn. Ta dùng công thức chập dạng: $y(n) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)h(k)$

Các chuỗi $h(k), x(k)$ và $x(-k)$ có dạng như ở hình 1.6. Chuỗi tích $v_0(k), v_1(k)$ và $v_2(k)$ tương ứng $x(-k).h(k)$, $x(1-k).h(k)$, $x(2-k).h(k)$ được mô tả ở hình 1.6c,d và e. Như vậy ta có các giá trị ra:

$y(0) = 1$

$y(1) = 1 + a$

$y(2) = 1 + a + a^2$

Rõ ràng, với $n > 0$, tín hiệu ra là:

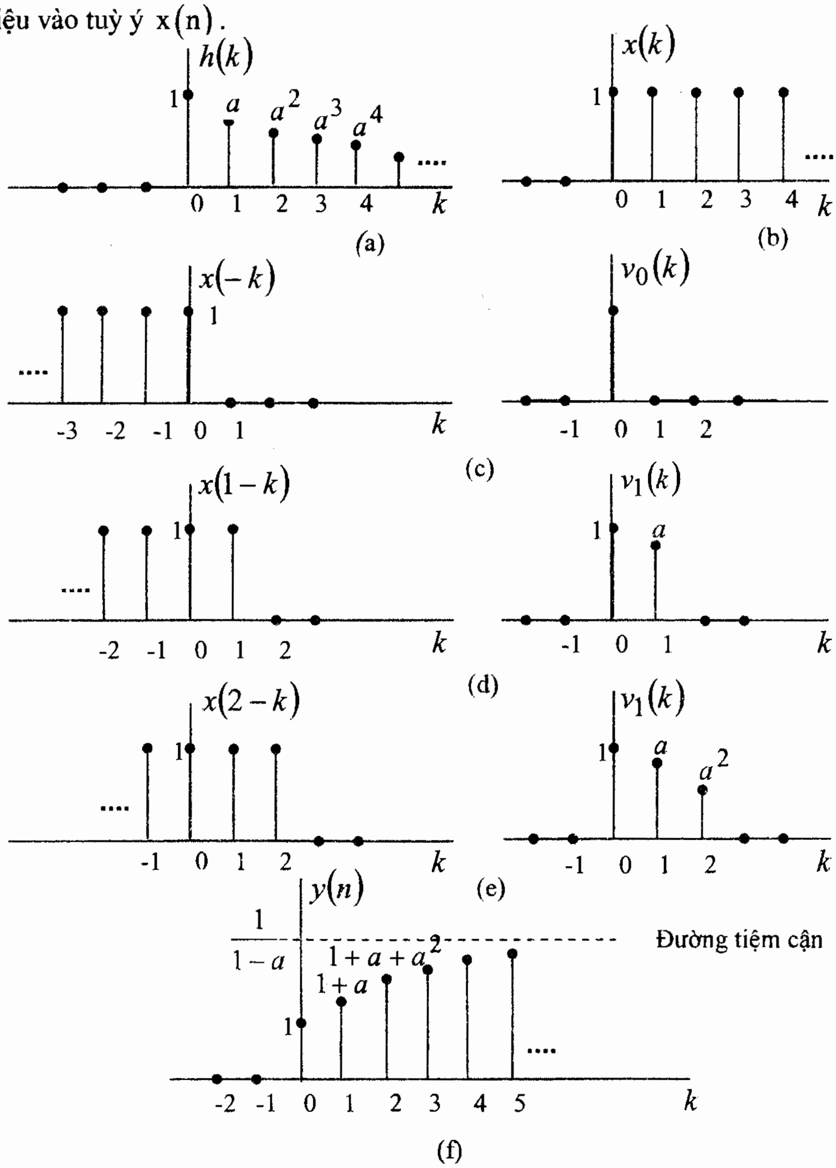
$$y(n) = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n \qquad (1)$$

Ngược lại, với $n < 0$, chuỗi luôn bằng zero. Vì thế:

$$y(n) = 0 \qquad n < 0$$

Đồ thị của tín hiệu ra $y(n)$ được minh hoạ ở hình 1.6f, với $0 < a < 1$. Chú ý rằng, hàm ra tăng theo quy luật hàm mũ của n. Vì $|a| < 1$, nên giá trị cuối cùng của tín hiệu ra khi n xấp xỉ vô cùng là: $y(\infty) = \lim\limits_{n\to\infty} y(n) = \dfrac{1}{1-a}$ (2)

Tóm lại, công thức chập cho chúng ta phương tiện để tính đáp ứng của một hệ LTI giảm dần đối với tín hiệu vào tuỳ ý $x(n)$.



Hình 1.6: Tính toán hình học của phép chập trong bài tập 1.22

1.23. Xác định đáp ứng xung của hệ thống gồm 2 hệ thống tuyến tính bất biến (TTBB) nối tiếp nhau, biết đáp ứng xung của 2 hệ thống TTBB này là:

$$h_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad\qquad h_2(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Lời giải:

Đáp ứng xung của hệt thống tổng quát:

Ta định nghĩa chuỗi tích:

$$v_n(k)=h_1(k)h_2(n-k)=\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

Chuỗi này khác 0 đối với $k\geq 0$ và $n-k\geq 0$ hay $n\geq k\geq 0$. Nói cách khác, n < 0 chúng ta có $v_n(k)=0$ đối với mọi k, suy ra:

$$h(n)=0 \qquad\qquad n<0$$

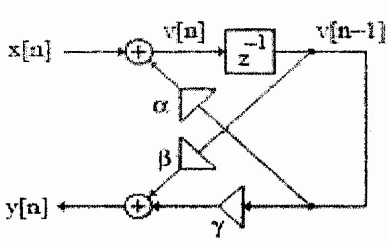
Đối với $n\geq k\geq 0$, tổng của các giá trị của chuỗi tích $v_n(k)$ đối với mọi k là:

$$h(n)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

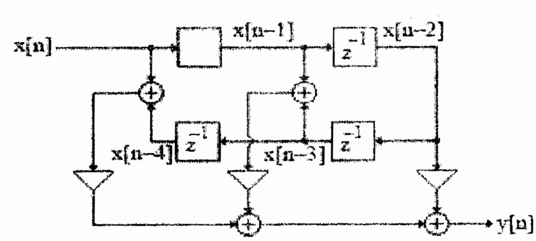
$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k 3^k=\left(\frac{1}{3}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^n\frac{1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right],n\geq 0$$

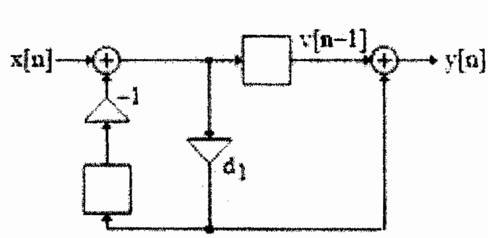
1.24. Phân tích sơ đồ khối của hình 1.7 và xác định mối quan hệ giữa y(n) và x(n)



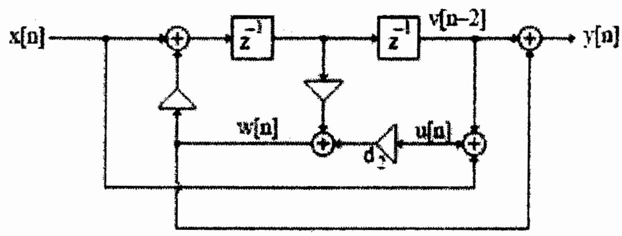
(a)



(b)



(c)



(d)

Hình 1.7

Lời giải:

a) Từ hình 1.7a ta có:

$$v(n)=x(n)+\alpha v(n-1)$$
$$y(n)=\beta v(n-1)+\gamma v(n-1)=(\beta+\gamma)v(n-1)$$

Suy ra:

$$v(n-1)=x(n-1)+\alpha v(n-2)$$
$$y(n-1)=(\beta+\gamma)v(n-2)$$

Do đó, $y(n)=(\beta+\gamma)v(n-1)=(\beta+\gamma)x(n-1)+\alpha(\beta+\gamma)v(n-2)$

$$=(\beta+\gamma)x(n-1)+\alpha(\beta+\gamma)\frac{y(n-1)}{(\beta+\gamma)}=(\beta+\gamma)x(n-1)+\alpha y(n-1)$$

b) Từ hình 1.7b ta có:

$$y(n)=\gamma x(n-2)+\beta[x(n-1)+x(n-3)]+\alpha[x(n)+x(n-4)]$$

c) Từ hình 1.7c ta có:

$$v(n)=x(n)-d_1v(n-1)$$
$$y(n)=d_1v(n)+v(n-1)$$

Do đó ta có thể viết lại phương trình thứ 2 như sau:

$$y(n)=d_1[x(n)-d_1v(n-1)]+v(n-1)=d_1x(n)+(1-d_1^2)v(n-1) \qquad (1)$$
$$=d_1x(n)+(1-d_1^2)[x(n-1)-d_1v(n-2)]$$
$$=d_1x(n)+(1-d_1^2)x(n-1)-d_1(1-d_1^2)v(n-2)$$

Từ phương trình (1) $y(n-1)=d_1x(n-1)+(1-d_1^2)v(n-2)$, hay tương đương với

$d_1y(n-1)=d_1^2x(n-1)+d_1(1-d_1^2)v(n-2)$. Do đó:

$$y(n)+d_1y(n-1)=d_1x(n)+(1-d_1^2)x(n-1)-d_1(1-d_1^2)v(n-2)+d_1^2x(n-1)+$$
$$+d_1(1-d_1^2)v(n-2)$$

$=d_1x(n)+x(n-1)$, hay $y(n)=d_1x(n)+x(n-1)-d_1y(n-1)$

d) $v(n)=x(n)-w(n), w(n)=d_1v(n-1)+d_2u(n), u(n)=v(n-2)+x(n)$

Từ các phương trình trên ta có:

$$w(n)=d_2x(n)+d_1x(n-1)+d_2x(n-2)-d_1w(n-1)-d_2w(n-2)$$

Từ hình 1.7d ta có:

$$y(n)=v(n-2)+w(n)=x(n-2)+w(n)-w(n\text{-}2),\text{ suy ra:}$$

$$d_1y(n-1)=d_1x(n-3)+d_1w(n\text{-}1)-d_1w(n\text{-}3)$$

$$d_2y(n-2)=d_2x(n-4)+d_2w(n\text{-}2)-d_2w(n\text{-}4)$$

Do đó:

$$y(n)+d_1y(n-1)+d_2y(n-2)=x(n-2)+d_1x(n-3)+d_2x(n-4)$$
$$+\left[w(n)+d_1w(n\text{-}1)+d_2w(n\text{-}2)\right]-\left[w(n\text{-}2)+d_1w(n\text{-}3)+d_2w(n\text{-}4)\right]$$
$$=x(n-2)+d_2x(n)+d_1x(n-1)$$

Hay tương đương với:

$$y(n)=d_2x(n)+d_1x(n-1)+x(n-2)-d_1y(n-1)-d_2y(n-2)$$

1.25. Cho tín hiệu rời rạc xác định bởi:

$$x(n)=\begin{cases}1+\dfrac{n}{3} & -3\le n\le -1\\ 1 & 0\le n\le 3\\ 0 & n\ne\end{cases}$$

Xác định các giá trị và vẽ x(n)

a) Vẽ các tín hiệu nếu:

Đầu tiên ta đảo x(n) sau đó cho tín hiệu này trễ đi 4 đơn vị.

Đầu tiên ta cho x(n) trễ đi 4 đơn vị sau đó đảo lại tín hiệu đó.

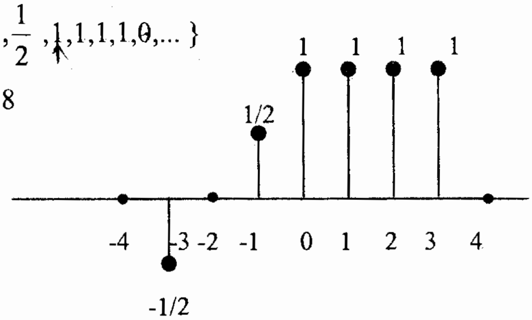
b) Vẽ tín hiệu x(-n + 4)

c) So sánh kết quả ở phần (b) và (c) và rút ra quy tắc để có được tín hiệu x(-n + k) từ tín hiệu x(n)

d) Có thể biểu diễn tín hiệu x(n) dướl dạng tín hiệu δ(n) và u(n) được không?

Lời giải: (a) $x(n)=\{\ldots 0,-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\underset{\uparrow}{1},1,1,1,0,\ldots\}$

Đồ thị cho trên hình 1.8



Hình 1.8

(b) Sau khi đảo x(n) ta có:

$$x(-n) = \{\ldots.0,1,1,1,\underset{\uparrow}{1},\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0\ldots\}$$

Thực hiện trễ tín hiệu này đi 4 đơn vị, ta được:

$$x(-n+4) = \{\ldots.\underset{\uparrow}{0},1,1,1,1,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0\ldots\}$$

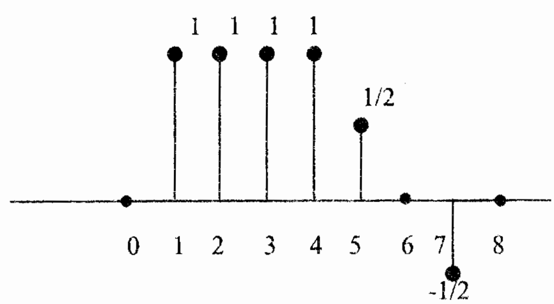
Mặt khác, nếu ta thực hiện trễ x(n) đi 4 đơn vị ta được:

$$x(n-4) = \{\ldots.0,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1,1,1,1,\underset{\uparrow}{0}\ldots\}$$

Bây giờ ta đảo lại tín hiệu x(n - 4), được:

$$x(-n-4) = \{\ldots.0,1,1,1,1,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},\underset{\uparrow}{0}\ldots\}$$

(c) $$x(-n+4) = \{\ldots.\underset{\uparrow}{0},1,1,1,1,\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},0\ldots\}$$



Hình 1.9

(d) Để có được x(-n + k), đầu tiên ta đảo x(n) sẽ nhận được dãy x(-n). Sau đó ta thực hiện dịch dãy x(-n) đi k đơn vị về bên phải nếu k>0, hoặc k đơn vị về bên trái với k<0.

(e) Ta được: $x(n) = -\frac{1}{2}\delta(n+3) + \frac{1}{2}\delta(n+1) + u(n) - u(n-4)$

1.26. Một tín hiệu rời rạc $x(n) = \left\{\ldots,0,1,\underset{\uparrow}{1},1,1,\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,\ldots\right\}$. Hãy biểu diễn dưới dạng tập hợp những tín hiệu sau:

(a) $x(n-2)$ (b) $x(4-n)$ (c) $x(n+2)$ (d) $x(n)u(2-n)$

(e) $x(n-1)\delta(n-3)$ (f) $x(n^2)$ (g) phần chẵn của x(n)

(h) phần lẻ của x(n)

Lời giải: a)

$$x(n-2) = \left\{\ldots,0,1,1,1,\underset{\uparrow}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,\ldots\right\}$$

b)

$$x(-n)=\left\{\ldots,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,1,\underset{\uparrow}{1},1,0,\ldots\right\}$$

$$x(4-n)=\left\{\ldots,0,\underset{\uparrow}{\frac{1}{3}},\frac{1}{3},1,1,1,1,0,\ldots\right\}$$

c) $x(n+2)=\left\{\ldots,\underset{\uparrow}{0},1,1,1,1,\frac{1}{3},\frac{1}{3},0,\ldots\right\}$

d) $x(n)\,u(2-n)=\left\{\ldots,0,1,\underset{\uparrow}{1},1,1,0,\ldots\right\}$

e) $x(n-1)\delta(n-3)=\left\{\ldots,0,\underset{\uparrow}{0},0,0,1,0,\ldots\right\}$

f)

$$x(n^2)=\{\ldots,0,x(4),x(1),x(0),x(1),x(4),0,\ldots\}$$
$$=\left\{\ldots,0,\frac{1}{3},1,\underset{\uparrow}{1},1,\frac{1}{3},0,\ldots\right\}$$

g) $$x_e(n)=\frac{[x(n)+x(-n)]}{2}$$

$$x(-n)=\left\{\ldots,0,\frac{1}{3},\frac{1}{3},1,1,\underset{\uparrow}{1},1,0,\ldots\right\}$$

$$x_e(n)=\left\{\ldots,0,\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{2},1,\underset{\uparrow}{1},1,\frac{1}{2},0,\frac{1}{6},\frac{1}{6},0,\ldots\right\}$$

h) $$x_o(n)=\frac{[x(n)-x(-n)]}{2}$$

$$x_0(n)=\left\{\ldots,0,-\frac{1}{6},-\frac{1}{6},-\frac{1}{2},0,\underset{\uparrow}{0},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{6},\frac{1}{6},0,\ldots\right\}$$

1.27. Hãy biểu diễn dãy xung đơn vị theo dãy nhảy đơn vị và ngược lại.

Lời giải:

$$u(n)=\begin{cases}1 & n\ge 0\\ 0 & n<0\end{cases} \qquad \delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n\ne 0\end{cases}$$

$$u(n-1)=\begin{cases}1 & n\ge 1\\ 0 & n<1\end{cases}$$

Suy ra: $\delta(n)=u(n)-u(n-1)$

Mặt khác ta thấy rằng: $u(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\delta(n-k)$

1.28. Chứng minh rằng bất cứ tín hiệu nào cũng có thể được phân tích thành một thành phần chẵn và một thành phần lẻ. Việc phân tích này có phải là duy nhất không? Minh hoạ phát biểu trên bằng tín hiệu: $x(n) = \{2,3,\underset{\uparrow}{4},5,6\}$

Lời giải:

Đặt: $$x_e(n) = \frac{[x(n)+x(-n)]}{2}$$

$$x_o(n) = \frac{[x(n)-x(-n)]}{2}$$

Vì: $x_e(-n) = x_e(n)$

$x_o(-n) = -x_o(n)$

Do đó: $x(n) = x_o(n) + x_e(n)$

Cách phân tích này là duy nhất.

Đối với: $x(n) = \{1,3,\underset{\uparrow}{4},5,7\}$

Ta có: $x_e(n) = \{4,4,\underset{\uparrow}{4},4,4\}$ và $x_o(n) = \{-3,-1,0,1,3\}$

1.29. Chứng minh rằng năng lượng của một tín hiệu năng lượng giá trị thực bằng tổng của các năng lượng của các thành phần chẵn và lẻ của tín hiệu.

Lời giải:

Đầu tiên ta chứng minh rằng: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = 0$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_e(-m)x_o(-m) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} x_e(m)x_o(m)$$

$$= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e(n)x_o(n) = 0$$

Do đó: $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_e(n)+x_o(n)]^2$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_e^{\,2}(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_o^{\,2}(n) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2x_e(n)x_o(n) = E_e + E_o$$

1.30. Một hệ thống rời rạc có thể là:

(1) Tĩnh hoặc động.

(2) Tuyến tính hay không tuyến tính.

(3) Bất biến hoặc không bất biến.

(4) Nhân quả hay không nhân quả.

(5) Ổn định hoặc không ổn định.

Kiểm tra những hệ thống sau theo các đặc điểm trên.

(a) $y(n) = \cos[x(n)]$

(b) $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} x(k)$

(c) $y(n) = x(n)\cos(\omega_0 n)$.

(d) $y(n) = x(-n+2)$.

(e) $y(n) = \text{Trun}[x(n)]$, với Trun[x(n)] biểu thị cho phần nguyên của x(n), có được bằng cách cắt bớt.

(f) $y(n) = \text{Round}[x(n)]$, với Round[x(n)] biểu thị cho phần nguyên của x(n), có được bằng cách làm tròn.

Chú ý: Các hệ thống trong phần (e) và (f) được lượng tử hoá bằng cách cắt bớt hoặc làm tròn.

(g) $y(n) = |x(n)|$.

(h) $y(n) = x(n)u(n)$.

(i) $y(n) = x(n) + nx(n+1)$.

(j) $y(n) = x(2n)$.

(k) $y(n) = \begin{cases} x(n) & \text{nếu } x(n) \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x(n) < 0 \end{cases}$

(l) $y(n) = x(-n)$.

(m) $y(n) = \text{sign}[x(n)]$.

(n) Hệ thống lấy mẫu lí tưởng với đầu vào $x_a(t)$ và đầu ra $x(n) = x_a(nT)$, $-\infty < n < \infty$

Lời giải:

(a) Hệ thống tĩnh, không tuyến tính, bất biến, nhân quả và ổn định.

(b) Hệ thống động, tuyến tính, bất biến, không nhân quả và không ổn định. Tính không ổn định có thể dễ dàng chứng minh:

Giả sử đầu vào x(k) = u(k), khi đó đầu ra trở thành:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n+1} u(k) \quad = 0 \qquad , n < -1$$

$$= n + 2 \quad , n \geq -1$$

Vì $y(n) \to \infty$ khi $n \to \infty$ nên hệ thống không ổn định

(c) Hệ thống tĩnh, tuyến tính, không bất biến, nhân quả và ổn định.

(d) Hệ thống động, tuyến tính, bất biến, không nhân quả và ổn định.

(e) Hệ thống tĩnh, không tuyến tính, bất biến, nhân quả và ổn định.

(f) Hệ thống tĩnh, không tuyến tính, bất biến, nhân quả và ổn định.

(g) Hệ thống tĩnh, không tuyến tính, bất biến, nhân quả và ổn định.

(h) Hệ thống tĩnh, tuyến tính, bất biến, nhân quả và ổn định.

(i) Hệ thống động, tuyến tính, không bất biến, không nhân quả và không ổn định. Chú ý rằng với đầu vào xác định x(n) = u(n) ta được đầu ra không xác định.

(j) Hệ thống động, tuyến tính, không bất biến, không nhân quả và ổn định.

(k) Hệ thống tĩnh, không tuyến tính, bất biến, nhân quả và ổn định.

(l) Hệ thống tĩnh, tuyến tính, bất biến, không nhân quả và ổn định.

(m) Hệ thống tĩnh, không tuyến tính, bất biến, nhân quả và ổn định

(n) Hệ thống tĩnh, tuyến tính, bất biến, nhân quả và ổn định.

1.31. Hãy tính tích chập $y(n)=x(n)*h(n)$ của các tín hiệu và kiểm tra sự chính xác của kết quả bằng việc kiểm tra biểu thức: $\sum x(n)\sum h(n)=\sum y(n)$

1) $x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},2,4\}$, $\quad h(n)=\{\underset{\uparrow}{1},1,1,1,1\}$

2) $x(n)=\{1,2,-1\}$, $\quad h(n)=x(n)$;

3) $x(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},-2,3\right\}$, $\quad h(n)=\left\{\underset{\uparrow}{0},0,1,1,1,1\right\}$

4) $x(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},1,2\right\}$, $\quad h(n)=u(n)$

5) $x(n)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n u(n)$, $\quad h(n)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^n u(n)$

Lời giải:

$$y(n)=\sum_k h(k)x(n-k)$$

$$\sum_n y(n)=\sum_n\sum_k h(k)x(n-k)=\sum_k h(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-k)=\pm(1-a)$$

(1) $\quad y(n)=h(n)*x(n)=\{1,3,7,7,7,6,4\}\ \omega$

$$\theta(\omega),\quad \sum_n(-1)^n x(n)z^{-n},$$

(2) $\quad y(n)=\{1,4,2,-4,1\}$

$$\sum_n y(n)=4,\quad \sum_k h(k)=2,\quad \sum_k x(k)=2$$

(3) $\quad y(n)=\{0,0,1,-1,2,2,1,3\}$.

$$\sum_n y(n)=8,\quad \sum_n h(n)=4,\quad \sum_n x(n)=2$$

(4) $\quad y(n)=u(n)+u(n-1)+2u(n-2)$

$$\sum_n y(n)=\infty,\quad \sum_n h(n)=\infty,\quad \sum_n x(n)=4$$

(5) $\quad y(n)=\left[2(\frac{1}{2})^n-(\frac{1}{4})^n\right]u(n)$

$$\sum_n y(n)=\frac{8}{3},\quad \sum_n h(n)=\frac{4}{3},\quad \sum_n x(n)=2$$

1.32. Xác định và biểu diễn phép chập tín hiệu sau:

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{3}n & 0\le n\le 6\\ 0 & \text{n khác}\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}1 & -2\le n\le 2\\ 0 & \text{n khác}\end{cases}$$

Theo phương pháp số.

Theo phương pháp phân tích.

Lời giải:

(a) $$x(n)=\left\{\underset{\uparrow}{0},\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{4}{3},\frac{5}{3},2\right\}$$

$$h(n)=\left\{1,1,\underset{\uparrow}{1},1,1\right\}$$

$$y(n)=x(n)*h(n)=\left\{\frac{1}{3},\underset{\uparrow}{1},2,\frac{10}{3},5,\frac{20}{3},6,5,\frac{11}{3},2\right\}$$

(b) $$x(n)=\frac{1}{3}n\left[u(n)-u(n-7)\right]$$

$$h(n)=u(n+2)-u(n-3)$$

$$y(n)=x(n)*h(n)$$

$$=\frac{1}{3}n\left[u(n)-u(n-7)\right]*\left[u(n+2)-u(n-3)\right]$$

$$=\left[u(n)*u(n+2)-u(n)*u(n-3)-u(n-7)*u(n+2)+u(n-7)*u(n-3)\right]$$

$$y(n)=\frac{1}{3}\delta(n+1)+\delta(n)+2\delta(n-1)+\frac{10}{3}\delta(n-2)+5\delta(n-3)+\frac{20}{3}\delta(n-4)+$$

$$6\delta(n-5)+5\delta(n-6)+\frac{11}{3}\delta(n-7)+\delta(n-8).$$

1.33. Thực hiện tích chập y(n) của tín hiệu:

$$x(n)=\begin{cases}\alpha^n & -3\le n\le 5\\ 0 & \text{n khác}\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & \text{n khác}\end{cases}$$

Lời giải:

$$y(n)=\sum_{k=0}^{4}h(k)x(n-k)$$

$$x(n)=\left\{\alpha^{-3},\alpha^{-2},\alpha^{-1},1,\alpha\ \ldots..,\alpha^{5}\right\}$$

$$h(n) = \left\{\underset{\uparrow}{1}, 1, 1, 1, 1\right\}$$

Do đó:

$$y(-3) = \alpha^{-3}$$

$$y(-2) = \alpha^{-3} + \alpha^{-2}$$

$$y(-1) = \alpha^{-3} + \alpha^{-2} + \alpha^{-1}$$

$$y(0) = \alpha^{-3} + \alpha^{-2} + \alpha^{-1} + 1$$

$$y(1) = \alpha^{-3} + \alpha^{-2} + \alpha^{-1} + 1 + \alpha$$

$$y(2) = \alpha^{-3} + \alpha^{-2} + \alpha^{-1} + 1 + \alpha \ \ + \alpha^{2}$$

$$y(3) = \alpha^{-1} + 1 + \alpha \ \ + \alpha^{2} + \alpha^{3}$$

$$y(4) = \alpha^{4} + \alpha^{3} + \alpha^{2} + \alpha \ \ + 1$$

$$y(5) = \alpha^{5} + \alpha^{4} + \alpha^{3} + \alpha^{2} + \alpha$$

$$y(6) = \alpha^{5} + \alpha^{4} + \alpha^{3} + \alpha^{2}$$

$$y(7) = \alpha^{5} + \alpha^{4} + \alpha^{3}$$

$$y(8) = \alpha^{5} + \alpha^{4}$$

$$y(9) = \alpha^{5}$$

1.34. Hãy tìm đáp ứng xung của hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng ra là:

$$y(n) = x(n) + \frac{1}{5}x(n-1) + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^{m} x(n-m) + \ldots \qquad m \ge 0$$

Nhận xét tính nhân quả và tính ổn định của hệ thống.

Lời giải:

$$x(n) = \delta(n) \Rightarrow y(n) = h(n)$$

Suy ra: $h(n) = \delta(n) + \frac{1}{5}\delta(n-1) + \ldots + \left(\frac{1}{5}\right)^{m} \delta(n-m) + \ldots = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{m} \delta(n-m) = \left(\frac{1}{5}\right)^{n}.\ \delta(n)$

Xét tính nhân quả của hệ thống:

* $m \ge 0$ thì $h(n) = 0$ với $n < 0$: hệ thống là nhân quả

Xét tính ổn định của hệ thống:

* $m \ge 0$: hệ thống là nhân quả, ta có: $h(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^{n} u(n)$

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{+\infty}\left|\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\right| = \frac{1}{1-\frac{1}{5}} = \frac{5}{4} < \infty$$

Suy ra: hệ thống là ổn định.

1.35. Cho hệ thống: $y(n) = ny(n-1) + x(n)$

Xét tính tuyến tính, bất biến và ổn định của hệ thống.

Lời giải:

Nếu: $y_1(n) = ny_1(n-1) + x_1(n)$

$y_2(n) = ny_2(n-1) + x_2(n)$

Do $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$ đưa vào hệ thống, ta có đầu ra:

$y(n) = ny(n-1) + x(n)$

với $y(n) = a\,y_1(n) + by_2(n)$

Vậy, hệ thống là tuyến tính. Nếu đầu vào là $x(n-1)$ ta có:

$y(n-1) = (n-1)y(n-2) + x(n-1)$

Mà $y(n-1) = n\,y(n-2) + x(n-1)$

Vậy hệ thống là không bất biến. Nếu $x(n) = u(n)$, do đó $|x(n)| \le 1$. Nhưng do đầu vào bị giới hạn nên đầu ra là:

$y(0) = 1;\ y(1) = 1 + 1 = 2;\ y(2) = 5\ldots$

Nghĩa là đầu ra không bị giới hạn. Vậy hệ thống không ổn định.

1.36. Giải phương trình sai phân sau với đáp ứng đầu vào bằng không ($x(n) = 0$)

$$y(n-1) + \frac{4}{3}y(n-1) = x(n)$$

Lời giải:

Với $x(n) = 0$, ta có:

$$y(n-1) + \frac{4}{3}y(n-1) = 0$$

$$y(-1) = -\frac{4}{3}y(-2)$$

$$y(0) = (-\frac{4}{3})^2 y(-2)$$

$$y(1) = (-\frac{4}{3})^3 y(-2)$$

$$\vdots$$

$$y(k) = (-\frac{4}{3})^{k+2} y(-2)$$

1.37. Giải phương trình sai phân:

$$y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = x(n)$$

với $x(n) = 2^n u(n)$ và các điều kiện đầu: $y(-2) = y(-1) = 0$.

Lời giải:

Xét phương trình thuần nhất:

$$y(n) - \frac{5}{6}y(n-1) + \frac{1}{6}y(n-2) = 0$$

Phương trình đặc trưng là: $\lambda^2 - \frac{5}{6}\lambda + \frac{1}{6} = 0$

nghiệm là: $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$.

Nghiệm riêng của phương trình ứng với đầu vào $x(n) = 2^n u(n)$ là:

$$y_p(n) = k\,(2^n)u(n)$$

Thay nghiệm này vào phương trình ban đầu ta được:

$$k(2)^n u(n) - k(\frac{5}{6})(2)^{n-1} u(n-1) + k(\frac{1}{6})(2)^{n-2} u(n-2) = 2^n u(n)$$

Với n = 2:

$$4k - \frac{5}{3}k + \frac{k}{6} = 4 \Rightarrow k = \frac{8}{5}$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình là:

$$y(n) = y_p(n) + y_h(n) = \frac{8}{5}(2)^n u(n) + c_1(\frac{1}{2})^n u(n) + c_2(\frac{1}{3})^n u(n)$$

Để tìm giá trị c_1 và c_2 ta giả sử y(-2) = y(-1) = 0. Khi đó:

$$y(0) = 1 \quad \text{và} \quad y(1) = \frac{17}{6}$$

Do đó:

$$c_1 + c_2 = -\frac{3}{5} \quad \text{và} \quad 3c_1 + 2c_2 = -\frac{11}{5}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = -1,\ c_2 = \frac{2}{5}$$

Vậy nghiệm tổng quát là:

$$y(n) = \left[\frac{8}{5}(2)^n - (\frac{1}{2})^n + \frac{2}{5}(\frac{1}{3})^n\right]u(n)$$

1.38. Giải phương trình sai phân:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

với $x(n) = 4^n u(n)$

Lời giải:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$

Có nghiệm : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 4$ và $y_h(n) = c_1 4^n + c_2(-1)^n$

Vì 4 vừa là nghiệm của phương trình đặc trưng vừa là xung kích thích đầu vào.

$$x(n) = 4^n u(n)$$

Ta thay nghiệm riêng dưới dạng:

$$y_p(n) = k.n.4^n u(n)$$

Ta được:

$$kn4^n u(n) - 3k(n-1)4^{n-1}u(n-1) - 4k(n-2)4^{n-2}u(n-2) = 4^n u(n) + 2(4)^{n-1}u(n-1)$$

Với $n = 2,\ k(32-12) = 4^2 + 8 = 24 \rightarrow k = \frac{6}{5}$

Nghiệm tổng quát là: $y(n) = y_o(n) + y_h(n) = \left[\frac{6}{5}n(4)^n + c_1(4)^n + c_2(-1)^n\right]u(n)$

Để tìm c_1 và c_2 ta giả sử $y(-2) = y(-1) = 0$. Khi đó:

$y(0) = 1$ và $y(1) = 3y(0) + 4 + 2 = 9$

Ta có: $c_1 + c_2 = 1$

và $4c_2 - c_1 = 21/5$

Nên:

$$c_1 = \frac{26}{25} \quad \text{và} \quad c_2 = -\frac{1}{25}$$

Nghiệm tổng quát là:

$$y(n) = \left[\frac{6}{5}n(4)^n + \frac{26}{25}(4)^n - \frac{1}{25}(-1)^n\right]u(n)$$

1.39. Tìm đáp ứng xung của hệ thống cho bởi phương trình sai phân:

$$y(n) - 3y(n-1) - 4y(n-2) = x(n) + 2x(n-1)$$

Lời giải:

Theo bài **1.38**, nghiệm đặc trưng là: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 4$

Do đó: $y_h(n) = c_1 4^n + c_2 (-1)^n$

Khi $x(n) = \delta(n)$ ta tìm được $y(0) = 1$ và $y(1) = 5$

Ta có: $c_1 + c_2 = 1$ và $4c_1 - c_2 = 5$.

Tìm được: $c_1 = 6/5$; $c_2 = -1/5$

Vậy đáp ứng xung: $h(n) = \left[\frac{6}{5}(4)^n - \frac{1}{5}(-1)^n\right]u(n)$

1.40. Tìm đáp ứng xung và đáp ứng nhảy đơn vị của các hệ thống được mô tả dưới đây:

a) $y(n) - 0{,}4y(n-1) + 0{,}03y(n-2) = x(n)$

b) $y(n) - 0{,}7y(n-1) + 0{,}1y(n-2) = 2x(n) - x(n-2)$

Lời giải:

a) $y(n) - 0{,}4y(n-1) + 0{,}03y(n-2) = x(n)$

Phương trình đặc trưng là: $\lambda^2 - 0{,}4\lambda + 0{,}03 = 0$

$\lambda = 0{,}1,\ 0{,}3.$

Vậy: $y_h(n) = c_1\left(\frac{1}{10}\right)^n + c_2\left(\frac{3}{10}\right)^n$

Với $x(n) = \delta(n)$, điều kiện ban đầu là:

$y(0) = 1;\ y(1) = 0.4y(0) = 0.4$

Vậy: $c_1 + c_2 = 1$

Và $0{,}1c_1 + 0{,}3c_2 = 0{,}4$

Suy ra: $c_1 = -1/2,\ c_2 = 3/2$

Do đó $h(n) = [-\frac{1}{2}(\frac{1}{10})^n + \frac{3}{2}(\frac{3}{10})^n]\,u(n)$

Đáp ứng nhảy đơn vị:

$$s(n) = \sum_{k=0}^{n} h(n-k)\,,\ n \geq 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left[\frac{3}{2}(\frac{3}{10})^{n-k} - \frac{1}{2}(\frac{1}{10})^{n-k}\right] = \left\{\frac{5}{9}\left[(\frac{1}{10})^{n+1} - 1\right] - \frac{15}{7}\left[(\frac{3}{10})^{n+1} - 1\right]\right\}u(n)$$

b) $y(n) - 0{,}8y(n-1) + 0{,}15y(n-2) = 2x(n) - x(n-2)$

Phương trình đặc trưng:

$\lambda^2 - 0{,}8\lambda + 0{,}15 = 0$

$\lambda_1 = 0{,}3,\ \lambda_2 = 0{,}5.$

Do đó: $y_h(n) = c_1\ (\frac{1}{2})^n + c_2\ (\frac{3}{10})^n$

Với $x(n) = \delta(n)$, ta có:

$y(0) = 2;\ y(1) = 0.8y(0) = 1.6$

Do đó: $c_1 + c_2 = 2$ và $\frac{1}{2}c_1 + \frac{3}{10}c_2 = 1.6$

$\rightarrow c_1 = 5\ ,\ c_2 = -3$

$$h(n) = \left[5(\frac{1}{2})^n - 3(\frac{3}{10})^n\right]u(n)$$

Đáp ứng nhảy đơn vị: $s(n) = \sum_{k=0}^{n} h(n-k)$

$$= 5\sum_{k=0}^{n}(\frac{1}{2})^{n-k} - 3\sum_{k=0}^{n}(\frac{3}{10})^{n-k} = 5(\frac{1}{2})^n\sum_{k=0}^{n}(2)^k - 3(\frac{3}{10})^n\sum_{k=0}^{n}(\frac{10}{3})^k$$

$$= 5\left[(\frac{1}{2})^n(2^{n+1} - 1)\right]u(n) - \frac{9}{7}\left[\left(\frac{3}{10}\right)^n\left(\left(\frac{10}{3}\right)^{n+1} - 1\right)\right]u(n)$$

$$= \left\{10\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] - \frac{90}{21}\left[1 - \left(\frac{3}{10}\right)^{n+1}\right]\right\}u(n)$$

1.41. Cho hệ thống với đáp ứng xung:

$$h(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 \leq n \leq 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$$

Xác định đầu vào x(n) với $0 \le n \le 8$ ứng với đầu ra là:

$$y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 2, 5, 3, 3, 2, 1, 0\}$$

Lời giải: $h(n) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\}$

$$y(n) = \{1,2,2.5,3,3,3,2,1,0\}$$

$$x(0)h(0) = y(0) \Rightarrow x(0) = 1$$

$$\frac{1}{2}x(0) + x(1) = y(1) \Rightarrow x(1) = \frac{3}{2}$$

Thực hiện tiếp quá trình này ta được:

$$x(n) = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{3}{2}, \ldots\right\}$$

1.42. Xem kết nối hệ thống LTI như ở hình vẽ.

(a) Biểu diễn đáp ứng xung theo $h_1(n)$, $h_2(n)$, $h_3(n)$ và $h_4(n)$

(b) Xác định h(n) khi:

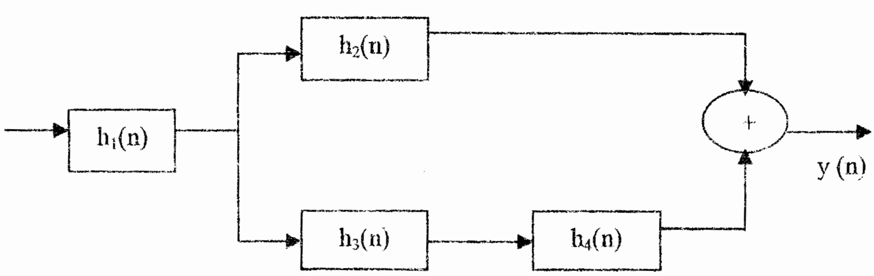
$$h_1(n) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$$

$$h_2(n) = h_3(n) = (n+1)u(n)$$

$$h_4(n) = \delta(n-2)$$

(c) Xác định đáp ứng hệ thống trong câu (b) nếu

$$x(n) = \delta(n+2) + 3\delta(n-1) - 4\delta(n-3)$$



Hình 1.10

Lời giải: (a) $h(n) = h_1(n) * [h_2(n) - h_3(n)*h_4(n)]$

(b) $h_3(n) * h_4(n) = (n-1)u(n-2)$

$$h_2(n) - h_3(n)*h_4(n) = 2u(n) - \delta(n)$$

$$h_1(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)$$

Do đó: $h(n) = [\frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1) + \frac{1}{2}\delta(n-2)] * [2u(n) - \delta(n)]$

$$= \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{5}{4}\delta(n-1) + 2\delta(n-2) + \frac{5}{2}u(n-3)$$

(c) $x(n)=\{1,0,\underset{\uparrow}{0},3,0,-4\}$

$$y(n)=\left\{\frac{1}{2},\frac{5}{4},\underset{\uparrow}{2},\frac{25}{4},\frac{13}{2},5,2,0,0....\right\}$$

1.43. Các hệ thống sau đây có phải là tuyến tính hay không?

a) $y(n)=T\{x(n)\}=x^2(n)$

b) $y(n)=T\{x(n)\}=nx(n)$

Lời giải:

a)

$$\begin{aligned}T\{a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\}&=\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]^2\\&=a_1^2x_1^2(n)+a_1a_2x_1(n)x_2(n)+a_2^2x_2^2(n)\\&=a_1^2y_1(n)+a_1a_2x_1(n)x_2(n)+a_2^2y_2(n)\\&\neq a_1y_1(n)+a_2y_2(n)\end{aligned}$$

Suy ra hệ thống không tuyến tính.

b)

$$\begin{aligned}T\{a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\}&=n\left[a_1x_1(n)+a_2x_2(n)\right]\\&=a_1nx_1(n)+a_2nx_2(n)\\&=a_1y_1(n)+a_2y_2(n)\end{aligned}$$

Suy ra hệ thống là tuyến tính.

1.44. Các hệ thống sau đây có phải là bất biến theo n hay không?

a) $y(n)=T\{x(n)\}=x^2(n)$

b) $y(n)=T\{x(n)\}=nx(n)$

Lời giải:

a) $y(n-k)=T\{x(n-k)\}=x^2(n-k)\Rightarrow$ hệ thống bất biến.

b) $$\begin{aligned}&T\{x(n-k)\}=nx(n-k)\\&y(n-k)=(n-k)x(n-k)\neq T\{x(n-k)\}\end{aligned}$$

Suy ra hệ thống là không bất biến.

1.45. Cho 2 hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung tương ứng là $h_1(n)=2^n\quad\forall n$ và $h_2(n)=\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$ ghép nối tiếp nhau.

a) Hãy tìm đáp ứng xung h(n) của hệ thống tổng quát.

b) Hãy nhận xét tính nhân quả của hệ thống $h_1(n), h_2(n)$ và h(n) .

Lời giải:

a) $h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_1(k)h_2(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_2(k)h_1(n-k)$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k 2^{n-k} = 2^n \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^k = 2^n \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}2^n$$

b) $n<0, h_1(n) \neq 0 \Rightarrow$ hệ thống có đáp ứng xung $h_1(n)$ là hệ thống không nhân quả.

$n<0, h_2(n) = 0 \Rightarrow$ hệ thống có đáp ứng xung $h_2(n)$ là hệ thống nhân quả.

$h(n) = \frac{10}{9}2^n, \forall n$, do đó với n<0 ta có $h(n) \neq 0 \Rightarrow$ hệ thống tổng quát có đáp ứng xung $h(n)$ là hệ thống không nhân quả.

1.46. Giả sử e(n) là tín hiệu rời rạc có dạng hàm mũ: $e(n) = \alpha^n$ **với** $\forall n, \alpha$: hằng số.

x(n) và y(n) là các tín hiệu bất kì.

Chứng minh rằng: $[e(n)x(n)]*[e(n)y(n)] = e(n)[x(n)*y(n)]$

Lời giải: Đặt:

$$x_1(n) = \alpha^n x(n)$$
$$y_1(n) = \alpha^n y(n)$$

$$VT = [e(n)x(n)]*[e(n)y(n)] = x_1(n)*y_1(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1(k)y_1(n-k)$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \alpha^k x(k)\alpha^{n-k}y(n-k) = \alpha^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y(n-k)$$
$$= \alpha^n[x(n)*y(n)] = e(n)[x(n)*y(n)] = VP$$

1.47. Cho 2 hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung tương ứng là $h_1(n)$ và $h_2(n)$ ghép nối tiếp nhau.

$$h_1(n) = h_2(n) = u(n) - u(n-5)$$

a) Hãy tìm đáp ứng xung h(n) của hệ thống tổng quát.

b) Hãy nhận xét tính ổn định và nhân quả của hệ thống $h_1(n), h_2(n)$ và h(n) .

Lời giải:

a) $h_1(n) = h_2(n) = u(n) - u(n-5) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \neq \end{cases}$

$$h(n) = h_1(n)*h_2(n)$$

Với n < 0, hoặc n > 9: h(n) = 0

$$h(0) = h(8) = 1$$
$$h(1) = h(7) = 2$$
$$h(2) = h(6) = 3$$
$$h(3) = h(5) = 4$$
$$h(4) = 5$$

Hệ thống là nhân quả.

$$S = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h(k)| = \sum_{k=0}^{8} |h(k)| = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 25 < \infty$$

Suy ra hệ thống là ổn định.

1.48. Cho $\tilde{x}_1(n)$, $\tilde{x}_2(n)$, $\tilde{x}_3(n)$ là 3 chuỗi tuần hoàn với chu kì cơ sở tương ứng là T_1, T_2, T_3 . Một chuỗi là kết quả kết hợp tuyến tính của 3 chuỗi tuần hoàn này có phải là một chuỗi tuần hoàn không? Nếu là một chuỗi tuần hoàn thì chu kì cơ sở của nó là bao nhiêu?

Lời giải: Một chuỗi là kết quả kết hợp tuyến tính của 3 chuỗi tuần hoàn này cũng là một chuỗi tuần hoàn. Chu kì của chuỗi mới bằng BSCNN của tất cả các chu kì.

Chu kì của chuỗi mới = BSCNN(T_1, T_2, T_3).

Ví dụ: nếu $T_1 = 5$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$ thì T = BSCNN(5,3,6) = 30

1.49. Hãy tính năng lượng của chuỗi có chiều dài N

$$x(n) = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \quad 0 \le n \le N-1$$

Lời giải: $x(n) = \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right), \quad 0 \le n \le N-1$, suy ra:

$$E_x = \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2(2\pi kn / N) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\left[1 + \cos(4\pi kn / N)\right] = \frac{N}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}\cos(4\pi kn / N)$$

Đặt: $C = \sum_{n=0}^{N-1}\cos(4\pi kn / N)$, $S = \sum_{n=0}^{N-1}\sin(4\pi kn / N)$, ta có:

$$C + jS = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j4\pi kn/N} = \frac{e^{j4\pi k} - 1}{e^{j4\pi k/N} - 1} = 0$$

Do đó: $C = \mathrm{Re}\{C + jS\} = 0 \Rightarrow E_x = \dfrac{N}{2}$

1.50. Hãy xác định năng lượng và công suất trung bình của các chuỗi sau:

a) $x_1(n) = nu(n)$

b) $x_2(n) = A_0 e^{j\omega_0 n}$

c) $x_3(n) = A\sin\left(\frac{2\pi n}{M} + \varphi\right)$

Lời giải: a) $x_1(n) = nu(n)$.

$$E_{x1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[nu(n)\right]^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 = \infty$$

$$P_{x1} = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{+K}\left[nu(n)\right]^2 = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=0}^{K}n^2 = \infty$$

b) $x_2(n) = A_0e^{j\omega_0 n}$

$$E_{x2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|A_0e^{j\omega_0 n}\right|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left|A_0\right|^2 = \infty$$

$$P_{x2} = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{+K}\left|A_0e^{j\omega_0 n}\right|^2 = \lim_{K\to\infty}\frac{1}{2K+1}\sum_{n=-K}^{K}\left|A_0\right|^2 = \lim_{K\to\infty}\frac{2KA_0^2}{2K+1}$$

$$P_{x2} = A_0^2$$

c) $x_3(n) = A\sin\left(\frac{2\pi n}{M}+\varphi\right) = A_0e^{j\omega_0 n} + A_1e^{-j\omega_0 n}$, trong đó: $\omega_0 = \frac{2\pi}{M}, A_0 = -\frac{A}{2}e^{j\varphi}, A_1 = \frac{A}{2}e^{-j\varphi}$

Áp dụng công thức tính năng lượng và công suất trung bình của một chuỗi như phần a) và b) ta có:

$$E_{x3} = \infty$$

$$P_{x3} = A_0^2 + A_1^2 + 4A_0^2A_1^2 = \frac{3}{4}A^2$$

1.51. Một chuỗi tín hiệu sin liên tục theo thời gian $x_a(t) = \cos(\omega_0 nT)$ được lấy mẫu tại $t = nT, -\infty < n < \infty$ tạo thành chuỗi rời rạc theo thời gian $x(n) = x_a(nT) = \cos(\omega_0 nT)$. Với giá trị nào của T thì x(n) là một chuỗi tuần hoàn? Chu kì cơ sở của chuỗi x(n) là bao nhiêu nếu $\omega_0 = 16, T = \pi/6$

Lời giải:

Chuỗi $x(n) = x_a(nT) = \cos(\omega_0 nT)$ là chuỗi tuần hoàn với tất cả các giá trị T thoả mãn điều kiện $\omega_0 TN = 2\pi r$, với r và N là các số nguyên. Do $\omega_0 T = 2\pi r/N$ và r/N là một số hữu tỷ nên $\omega_0 T$ phải là một số hữu tỷ. Với $\omega_0 = 16, T = \pi/6$, ta có N=2r/3, suy ra giá trị nhỏ nhất của N = 3, xảy ra khi r = 3.

1.52. Xét các chuỗi sau:

i) $x_1(n) = 2\delta(n-1) - 0.5\delta(n-3)$

ii) $x_2(n) = -3\delta(n-1) + \delta(n+2)$

iii) $h_1(n) = 2\delta(n) + \delta(n-1) - 3\delta(n-3)$

iv) $h_2(n) = -\delta(n-2) - 0,5\delta(n-1) + 3\delta(n-3)$

Xác định các chuỗi là kết quả của việc nhân một cặp chuỗi trên.

a) $y_1(n) = x_1(n) * h_1(n)$

b) $y_2(n) = x_2(n) * h_2(n)$

c) $y_3(n) = x_1(n) * h_2(n)$

d) $y_4(n) = x_2(n) * h_1(n)$

Lời giải: Ta có: $\delta(n-r)*\delta(n-s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(m-r)\delta(n-s-m) = \delta(n-r-s)$

a) $y_1(n) = x_1(n) * h_1(n) = \big(2\delta(n-1) - 0.5\delta(n-3)\big) * \big(2\delta(n) + \delta(n-1) - 3\delta(n-3)\big)$

$= 4\delta(n-1)*\delta(n) - \delta(n-3)*\delta(n) + 2\delta(n-1)*\delta(n-1) - 0{,}5\delta(n-3)*\delta(n-1)$

$-6\delta(n-1)*\delta(n-3) + 1{,}5\delta(n-3)*\delta(n-3)$

$= 4\delta(n-1) - \delta(n-3) + 2\delta(n-1) - 0{,}5\delta(n-4) - 6\delta(n-4) + 1{,}5\delta(n-6)$

$= 6\delta(n-1) - \delta(n-3) - 6{,}5\delta(n-4) + 1{,}5\delta(n-6)$

b) $y_2(n) = x_2(n) * h_2(n) = \big(-3\delta(n-1) + \delta(n+2)\big) * \big(-\delta(n-2) - 0{,}5\delta(n-1) + 3\delta(n-3)\big)$

$= -0{,}5\delta(n+1) - \delta(n) + 3\delta(n-1) + 1{,}5\delta(n-2) + 3\delta(n-3) - 9\delta(n-4)$

c) $y_3(n) = x_1(n) * h_2(n) = \big(2\delta(n-1) - 0.5\delta(n-3)\big) * \big(-\delta(n-2) - 0{,}5\delta(n-1) + 3\delta(n-3)\big)$

$= -\delta(n-2) - 2\delta(n-3) - 6{,}25\delta(n-4) + 0{,}5\delta(n-5) - 1{,}5\delta(n-6)$

d) $y_4(n) = x_2(n) * h_1(n) = \big(-3\delta(n-1) + \delta(n+2)\big) * \big(2\delta(n) + \delta(n-1) - 3\delta(n-3)\big)$

$= 2\delta(n+2) + \delta(n+1) - \delta(n-1) - 3\delta(n-2) - 9\delta(n-4)$

1.53. Một thuật toán để tính căn bình phương của một số α được cho bởi:

$$y(n) = x(n) - y^2(n-1) + y(n-1)$$

Trong đó $x(n) = \alpha\mu(n)$ với $0 < \alpha < 1$. Nếu $x(n)$ và $y(n)$ là đầu vào và đầu ra của một hệ thống rời rạc theo thời gian thì hệ thống trên là hệ thống tuyến tính hay phi tuyến? Khi $n \to \infty$, chứng minh rằng $y(n) \to \sqrt{\alpha}$. Chú ý rằng: $y(n-1)$ là một xấp xỉ ban đầu phù hợp cho $\sqrt{\alpha}$.

Lời giải: Đối với một đầu vào $x_i(n)$, $i = 1, 2$, ta thu được đầu ra như sau:

$y_i(n) = x_i(n) - y_i^2(n-1) + y_i(n-1)$. Do đó, đối với một đầu vào $Ax_1(n) + Bx_2(n)$, nếu đầu ra là $Ay_1(n) + By_2(n)$, ta có mối quan hệ giữa đầu vào - đầu ra như sau:

$$Ay_1(n) + By_2(n) = Ax_1(n) + Bx_2(n) - \big(Ay_1(n-1) + By_2(n-1)\big)^2 + Ay_1(n-1) + By_2(n-1)$$

$$= Ax_1(n) + Bx_2(n) - A^2y_1^2(n-1) - 2ABy_1(n-1)y_2(n-1) - B^2y_2^2(n-1) + Ay_1(n-1) + By_2(n-1)$$

$$\neq Ax_1(n) - A^2y_1^2(n-1) + Ay_1(n-1) + Bx_2(n) - B^2y_2^2(n-1) + By_2(n-1)$$

Suy ra hệ thống là phi tuyến.

Cho $y(n)$ là đầu ra của đầu vào $x(n)$, ta có:

$y(n)=x(n)-y^2(n-1)+y(n-1)$.Do đó, đối với một đầu vào $x(n-n_0)$, nếu đầu ra là $y(n-n_0)$, ta có mối quan hệ giữa đầu vào - đầu ra như sau:

$y(n-n_0)=x(n-n_0)-y^2(n-n_0-1)+y(n-n_0-1) \Rightarrow$ hệ thống là bất biến theo thời gian

Vậy đối với đầu vào $x(n)=\alpha\mu(n)$, đầu ra $y(n)$ hội tụ tới một hằng số K khi $n\to\infty$. Phương trình sai phân trên khi $n\to\infty$, trở thành $K=\alpha-K^2+K$ hay $K^2=\alpha$, nghĩa là $K=\sqrt{\alpha}$.

1.54. Cho $x(n)$ là chuỗi có chiều dài hữu hạn được xác định đối với $N_1\le n\le N_2$, với $N_2>N_1$. Tương tự, cho $h(n)$ là chuỗi có chiều dài hữu hạn được xác định đối với $M_1\le n\le M_2$, với $M_2>M_1$. Ta định nghĩa: $y(n)=x(n)*h(n)$

(a) Xác định chiều dài của $y(n)$,

(b) Phạm vi của hệ số n mà $y(n)$ được định nghĩa.

Lời giải:

$y(n)=\sum_{m=N_1}^{N_2}x(m)h(n-m)$. Ở đây, $h(n-m)$ được định nghĩa đối với $M_1\le n-m\le M_2$. Do đó, đối với $m=N_1$, $h(n-m)$ được định nghĩa đối với $M_1\le n-N_1\le M_2$, hoặc tương đương đối với $M_1+N_1\le n\le M_2+N_2$.

(a) Chiều dài của $y(n)$ là $M_2+N_2-M_1-N_1+1$

(b) Phạm vi của hệ số n mà $y(n)\ne 0$ là:

$\min(M_1+N_1,M_2+N_2)\le n\le \max(M_1+N_1,M_2+N_2)$, nghĩa là: $M_1+N_1\le n\le M_2+N_2$

1.55. Cho $y(n)=x_1(n)*x_2(n)$ và $v(n)=x_1(n-N_1)*x_2(n-N_2)$. Biểu diễn $v(n)$ dưới dạng $y(n)$.

Lời giải: $y(n)=x_1(n)*x_2(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1(n-k)x_2(n)$

Mà $v(n)=x_1(n-N_1)*x_2(n-N_2)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x_1(n-N_1-k)x_2(k-N_2)$.

Đặt $k-N_2=m$, khi đó $v(n)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}x_1(n-N_1-N_2-m)x_2(m)=y(n-N_1-N_2)$

1.56. Cho $g(n)=x_1(n)*x_2(n)*x_3(n)$ và $h(n)=x_1(n-N_1)*x_2(n-N_2)*x_3(n-N_3)$. Biểu diễn $h(n)$ dưới dạng $g(n)$.

Lời giải:

$g(n) = x_1(n) * x_2(n) * x_3(n)$, trong đó $y(n) = x_1(n) * x_2(n)$. Ta có:

$v(n) = x_1(n - N_1) * x_2(n - N_2)$, do đó $h(n) = v(n) * x_3(n - N_3)$. Từ kết quả bài 1.55, ta có $v(n) = y(n - N_1 - N_2)$. Do đó, $h(n) = y(n - N_1 - N_2) * x_3(n - N_3)$. Sử dụng kết quả bài 1.55 lần nữa ta được: $h(n) = g(n - N_1 - N_2 - N_3)$

1.57. Chứng minh rằng tích chập của một chuỗi có chiều dài M với một chuỗi có chiều dài N là một chuỗi có chiều dài bằng (M+N-1)

Lời giải: Giả sử chuỗi x(n) có chiều dài N, chuỗi h(n) có chiều dài M.

$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)h(k)$. Do h(k) có chiều dài là M và được xác định trong khoảng $0 \le k \le M-1$, tổng tích chập trên trở thành $y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} x(n-k)h(k)$.

y(n) là khác không đối với tất cả các giá trị của n và k mà n-k thoả mãn điều kiện $0 \le n-k \le N-1$.

Giá trị nhỏ nhất là n - k = 0 và xảy ra với n nhỏ nhất tại n = 0 và k = 0. Giá trị lớn nhất là n - k = N - 1 và xảy ra khi k đạt cực đại tại M-1. Do đó n - k = M - 1, $\Rightarrow$ n = N + M - 2. Suy ra tổng số các mẫu khác không bằng (N + M - 1).

1.58. x(n) và h(n) là hai chuỗi có chiều dài N, được cho như sau:

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} N+1, & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \ne \end{cases}$$

Hãy xác định vị trí và giá trị của mẫu dương lớn nhất của $y(n) = x(n) * h(n)$ mà không cần phải tính tích chập.

Lời giải: $y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(n-k)h(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(n-k)h(k)$. Giá trị cực đại của y(n) xảy ra tại n = N-1 khi tất cả các số hạng trong tổng chập là khác không. Giá trị đó bằng*:*

$$y(N-1) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) = \sum_{k=1}^{N} k = \frac{N(N+1)}{2}$$

1.59. Xét 2 chuỗi số thực là h(n) và g(n) được biểu diễn dưới dạng phần chẵn và phần lẻ, nghĩa là $h(n) = h_e(n) + h_o(n)$ và $g(n) = g_e(n) + g_o(n)$. Đối với các chuỗi sau, hãy xác định xem chúng là chẵn hay lẻ.

a) $h_e(n) * g_e(n)$

b) $h_o(n) * g_e(n)$

c) $h_o(n) * g_o(n)$

Lời giải: a) $y(n)=h_e(n)*g_e(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_e(n-k)g_e(k)$. Suy ra $y(-n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_e(-n-k)g_e(k)$.

Thay k bằng –k thì tổng trên trở thành:

$$y(-n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_e(-n+k)g_e(-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_e(-(n-k))g_e(-k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_e(n-k)g_e(k)=y(n)$$

Suy ra $h_e(n)*g_e(n)$ là chẵn.

b) $y(n)=h_o(n)*g_e(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_o(n-k)g_e(k)$. Suy ra:

$$y(-n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_0(-n-k)g_e(k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_0(-(n-k))g_e(-k)=-\sum_{k=-\infty}^{+\infty}h_o(n-k)g_e(k)=-y(n).$$

Suy ra $h_o(n)*g_e(n)$ là lẻ.

c) Làm tương tự ta có $h_o(n)*g_o(n)$ là chẵn.

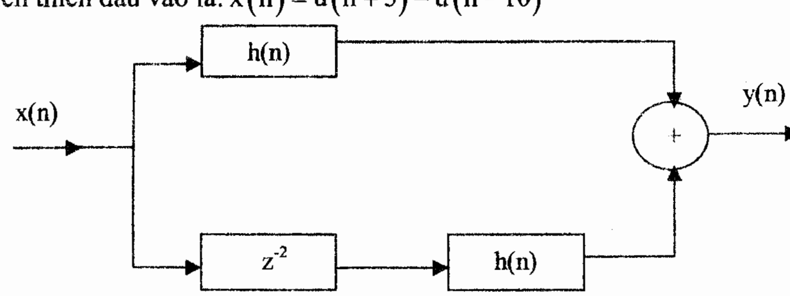
1.60. Cho hệ thống tuyến tính bất biến (LTI) nhân quả được mô tả bởi phương trình sai phân sau: $y(n)=p_0x(n)+p_1x(n-1)-d_1y(n-1)$, trong đó x(n) và y(n) tương ứng là đầu vào và đầu ra của hệ thống. Tìm phương trình sai phân hệ thống đảo của nó.

Lời giải: $y(n)=p_0x(n)+p_1x(n-1)-d_1y(n-1)$, dẫn

đến $x(n)=\frac{1}{p_0}y(n)+\frac{d_1}{p_0}y(n-1)-\frac{p_1}{p_0}x(n-1)$. Suy ra hệ thống đảo có phương trình sai phân như

sau: $y_1(n)=\frac{1}{p_0}x_1(n)+\frac{d_1}{p_0}x_1(n-1)-\frac{p_1}{p_0}y_1(n-1)$

1.61. Cho hệ thống như hình vẽ, $h(n)=a^n u(n)$, $-1<a<1$. Hãy xác định đáp ứng ra y(n) của hệ thống khi có kích thích đầu vào là: $x(n)=u(n+5)-u(n-10)$



Hình 1.11

Lời giải: Trước tiên ta xác định $z(n)=u(n)*h(n)$

$$z(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}u(k)h(n-k)=\sum_{k=0}^{+\infty}h(n-k)=\sum_{k=0}^{+\infty}a^{n-k}=\frac{a^{n+1}-1}{a-1},\quad n\geq 0$$

Đối với $x(n)=u(n+5)-u(n-10)$ ta có đáp ứng là:

$$s(n+5)-s(n-10)=\frac{a^{n+6}-1}{a-1}u(n+5)-\frac{a^{n-9}-1}{a-1}u(n-10)$$

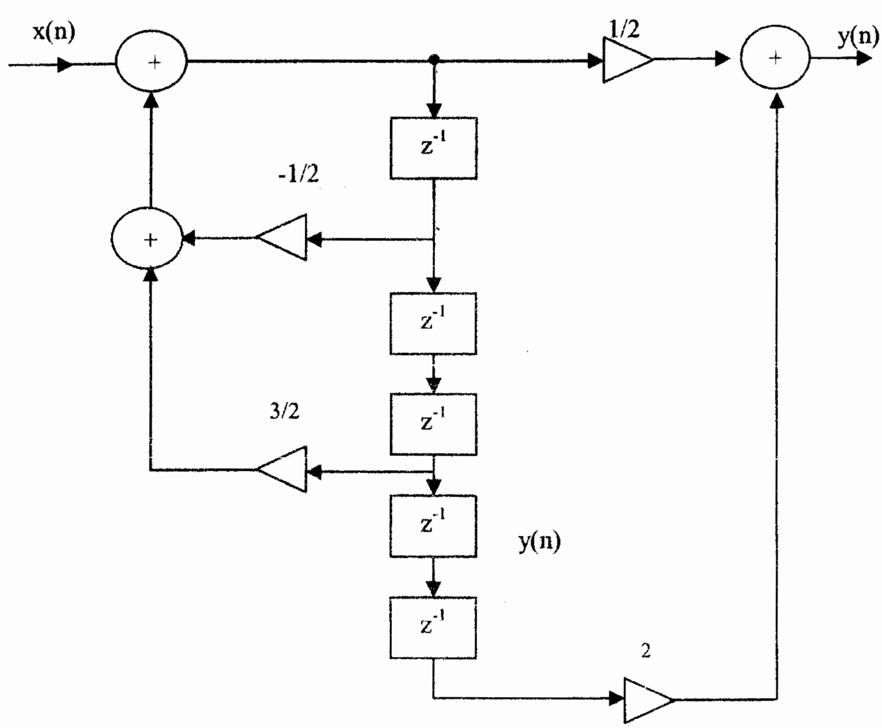
Từ hình vẽ trên ta có: $y(n)=x(n)*h(n)-x(n)*h(n-2)$

Suy ra: $y(n)=\frac{a^{n+6}-1}{a-1}u(n+5)-\frac{a^{n-9}-1}{a-1}u(n-10)-\frac{a^{n+4}-1}{a-1}u(n+3)+\frac{a^{n-11}-1}{a-1}u(n-12)$

1.62. Hãy xác định mô hình loại II trực tiếp cho mỗi hệ thống LTI sau:

$$2y(n)+y(n-1)-3y(n-3)=x(n)+4x(n-5)$$

Lời giải:



Hình 1.12

1.63. Một hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau:

$$y(n)=ay(n-1)+bx(n)$$

a) Hãy xác định b theo a sao cho $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)=1$

b) Hãy tính đáp ứng bước trạng thái không (zero-state step response) s(n) của hệ thống và chọn b sao cho $s(\infty)=1$

c) So sánh các giá trị của b thu được từ a) và b) .

Lời giải:

a) $y(n)=ay(n-1)+bx(n)$

$\Rightarrow h(n)=ba^n u(n)$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} h(n) = \frac{b}{1-a} = 1$$

$$\Rightarrow b = 1 - a$$

b) $s(n) = \sum_{k=0}^{n} h(n-k) = b\left[\frac{1-a^{n+1}}{1-a}\right]u(n)$

$$s(\infty) = \frac{b}{1-a} = 1 \Rightarrow b = 1 - a$$

c) b = 1 - a trong cả hai trường hợp a) và b)

1.64. Hãy xác định đáp ứng y(n) , $n \geq 0$ của hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân bậc 2 như sau:

$y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) - x(n-1)$ với đầu vào là:

$x(n) = (-1)^n u(n)$ và điều kiện đầu là: $y(-1) = y(-2) = 0$

Lời giải: $y(n) - 4y(n-1) + 4y(n-2) = x(n) - x(n-1)$

Phương trình đặc trưng là: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$

Suy ra: $y_0(n) = c_1 2^n + c_2 n 2^n$

Nghiệm riêng là: $y_p(n) = k(-1)^n u(n)$

Thay nghiệm riêng này vào phương trình sai phân, ta được:

$$k(-1)^n u(n) - 4k(-1)^{n-1} u(n-1) + 4k(-1)^{n-2} u(n-2) = (-1)^n u(n) - (-1)^{n-1} u(n-1)$$

Khi n = 2, k(1 + 4 + 4) = 2 $\Rightarrow k = \frac{2}{9}$.

Phương trình tổng quát:

$$y(n) = \left[c_1 2^n + c_2 n 2^n + \frac{2}{9}(-1)^n\right]u(n)$$

Từ điều kiện ban đầu, ta có $y(0) = 1$, $y(1) = 2$. Do đó:

$$c_1 + \frac{2}{9} = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{7}{9}$$

$$2c_1 + 2c_2 - \frac{2}{9} = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{1}{3}$$

1.65. Chứng minh rằng bất cứ tín hiệu x(n) nào cũng có thể biểu diễn dưới dạng:

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[x(k) - x(k-1)\right]u(n-k)$$

Lời giải:

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n) * \delta(n) \\ &= x(n) * [u(n) - u(n-1)] \\ &= [x(n) - x(n-1)] * u(n) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} [x(k) - x(k-1)] u(n-k) \end{aligned}$$

1.66. Hãy xác định phương trình tổng quát cho $n \geq 0$ của phương trình vi phân sau:

$$y(n) + 0{,}1y(n-1) - 0{,}06y(n-2) = 2^n u(n)$$

với điều kiện đầu $y(-1) = 1,\ y(-2) = 0$

Lời giải:

$y(n) + 0{,}1y(n-1) - 0{,}06y(n-2) = 2^n u(n)$ với $y(-1) = 1,\ y(-2) = 0$. Ta có phương trình đặc trưng là: $\lambda^2 + 0{,}1\lambda - 0{,}06 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -0{,}3\,; \lambda_2 = 0{,}2$.

Suy ra $y_0(n) = c_1(-0{,}3)^n + c_2(0{,}2)^n$

Nghiệm riêng là: $y_p(n) = \beta 2^n$

Thay nghiệm riêng này vào phương trình vi phân đã cho, ta được:

$\beta 2^n + \beta(0{,}1)2^{n-1} - \beta(0{,}06)2^{n-2} = 2^n u(n)$. Đối với n = 0, ta có:

$\beta + \beta(0{,}1)2^{-1} - \beta(0{,}06)2^{-2} = 1$ hay $\beta = \dfrac{200}{207} = 0{,}9662$.

Phương trình tổng quát: $y(n) = y_0(n) + y_p(n) = c_1(-0{,}3)^n + c_2(0{,}2)^n + \dfrac{200}{207}2^n$

Mà $y(-1) = c_1(-0{,}3)^{-1} + c_2(0{,}2)^{-1} + \dfrac{200}{207}2^{-1} = 1$ và

$y(-2) = c_1(-0{,}3)^{-2} + c_2(0{,}2)^{-2} + \dfrac{200}{207}2^{-2} = 0$ hay tương đương với:

$-\dfrac{10}{3}c_1 + 5c_2 = \dfrac{107}{207}$ và $\dfrac{100}{9}c_1 + 25c_2 = -\dfrac{50}{207}$

Giải hệ phương trình ta thu được nghiệm là $c_1 = -0{,}1017$ và $c_2 = 0{,}0356$. Suy ra phương trình tổng quát có dạng như sau:

$$y(n) = -0{,}1017(-0{,}3)^n + 0{,}0356(0{,}2)^n + 0{,}9662(2)^n$$

1.67. Hãy xác định các chuỗi tự tương quan của các tín hiệu sau đây:

a) $x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 1, 1\}$

b) $y(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 1, 2, 1\}$

Nêu kết luận của bạn?

Lời giải:

$$R_{xx}(1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)x(n-1)$$

$$R_{xx}(-3)=x(0)x(3)=1$$

$$R_{xx}(-2)=x(0)x(2)+x(1)x(3)=3$$

$$R_{xx}(-1)=x(0)x(1)+x(1)x(2)+x(2)x(3)=5$$

$$R_{xx}(0)=\sum_{n=0}^{3}x^2(n)=7$$

Mặt khác: $R_{xx}(-1)=R_{xx}(1)$. Do đó: $R_{xx}(1)=\{1,3,5,\underset{\uparrow}{7},5,3,1\}$

b) $R_{yy}(1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y(n)y(n-1)$

Ta có: $R_{yy}(1)=\{1,3,5,7,5,3,1\}$

Ta thấy rằng $y(n)=x(-n+3)$, điều này tương đương với việc lưu giữ chuỗi x(n). Điều này không làm thay đổi chuỗi tự tương quan.

C. BÀI TẬP NÂNG CAO

1.68. Tìm chuỗi tự tương quan đã chuẩn hoá của tín hiệu x(n) sau đây:

$$x(n)=\begin{cases}1 & -N\le n\le N\\ 0 & n\ne\end{cases}$$

1.69. Hãy xác định chuỗi tự tương quan của mỗi tín hiệu sau đây và chứng minh rằng nó là chuỗi chẵn trong mỗi trường hợp. Tìm vị trí của giá trị cực đại của chuỗi tự tương quan trong mỗi trường hợp:

a) $x_1(n)=a^n u(n)$

b) $x_2(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le N-1\\ 0 & n\ne\end{cases}$

1.70. Hãy xác định chuỗi tự tương quan và chu kì của mỗi chuỗi sau đây:

a) $\tilde{x}_1(n)=\cos(\pi n/M)$, trong đó M là số nguyên dương

b) $\tilde{x}_2(n)=n$ modulo 6

1.71. Xác định phạm vi các giá trị của tham số a sao cho hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung $h(n)=\begin{cases}a^n & n\ge 0,\ n\text{ chẵn}\\ 0 & n\text{ khác}\end{cases}$ là ổn định.

1.72. Hãy xác định đáp ứng của một hệ thống có đáp ứng xung $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$ với các tín hiệu đầu vào lần lượt là:

a) $x(n)=2^n u(n)$

b) $x(n)=u(-n)$

1.73. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ cho một hệ thống tuyến tính bất biến (LTI) trở thành một hệ thống ổn định BIBO là:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h(n)| \le M_h < \infty \qquad M_h \text{ là hằng số}$$

1.74. Cho hệ thống rời rạc được mô tả bằng quan hệ vào-ra như sau:

$$y(n)=\frac{1}{2}\left[y(n-1)+\frac{x(n)}{y(n-1)}\right]$$

Trong đó $x(n)$ và $y(n)$ tương ứng là các chuỗi đầu vào và đầu ra. Chứng minh rằng đầu ra $y(n)$ của hệ thống trên đối với đầu vào $x(n)=\alpha u(n)$ với $y(-1)=1$ hội tụ tới $\sqrt{\alpha}$ khi $n\to\infty$ (α là một số dương). Hệ thống trên là tuyến tính hay phi tuyến? Là hệ thống bất biến? Giải thích câu trả lời của bạn.

1.75. Chuỗi các số Fibonacci f(n) là một chuỗi nhân quả được định nghĩa bởi:

$$f(n)=f(n-1)+f(n-2),\quad n\ge 2$$

với $f(0)=0,\ f(1)=1$.

a) Xây dựng một công thức chính xác để tính $f(n)$ trực tiếp cho bất cứ n nào.

b) Chứng minh rằng $f(n)$ là đáp ứng xung của một hệ thống tuyến tính bất biến nhân quả được mô tả bởi phương trình sai phân sau:

$$y(n)=y(n-1)+y(n-2)+x(n-1)$$

1.76. Xét một bộ lọc số phức bậc 1 được cho bởi một phương trình sai phân như sau:

$$y(n)=\alpha y(n-1)+x(n)$$

Trong đó x(n) là chuỗi đầu vào có giá trị thực, $y(n)=y_{re}(n)+jy_{im}(n)$ là chuỗi đầu ra có giá trị phức, với $y_{re}(n)$ và $y_{im}(n)$ tương ứng là phần thực và phần ảo và $\alpha=a+jb$ là hằng số phức. Xây dựng một biểu diễn của phương trình sai phân thực tương đương có một lối vào và 2 lối ra của bộ lọc số phức trên. CMR bộ lọc số có một lối vào và 1 lối ra trên có mối liên hệ giữa $y_{re}(n)$ và x(n) là theo một phương trình vi phân bậc 2.

1.77. Chứng minh rằng một chuỗi mà hoàn toàn có thể tính tổng được thì có năng lượng hữu hạn, nhưng một chuỗi có năng lượng hữu hạn thì có thể không hàn toàn tính tổng được.

1.78. Cho một bộ lọc số IIR nhân quả được mô tả bởi phương trình vi phân sau đây:

$$\sum_{k=0}^{N} d_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} p_k x(n-k)$$

Trong đó $y(n), x(n)$ tương ứng là các chuỗi đầu vào và đầu ra. Nếu $h(n)$ là đáp ứng xung của nó, hãy chứng minh rằng $p_k = \sum_{n=0}^{k} h(n) d_{k-n}$, $k = 0,1,...,M$

Từ kết quả trên, chứng minh rằng $p(n) = h(n)(*)d_n$

LỜI GIẢI BÀI TẬP NÂNG CAO

1.68.

$$R_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x(n-l)$$

$$= \begin{cases} 2N+1-|\ell|, & -2N \le \ell \le 2N \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases}$$

$$R_{xx}(0) = 2N+1$$

Do đó, chuỗi tự tương quan đã chuẩn hoá của tín hiệu x(n) là:

$$\rho_{xx}(l) = \begin{cases} \dfrac{1}{2N+1}(2N+1-|\ell|), & -2N \le \ell \le 2N \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases}$$

1.69 a) $x_1(n) = a^n u(n)$

$$R_{xx}(l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)x_1(n-l) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha^n u(n)\alpha^{n-l}u(n-\ell)$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{2n-l}u(n-l) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^{2n-l} = \dfrac{\alpha^{-l}}{1-\alpha^2} & \ell < 0 \\ \sum_{n=l}^{+\infty} \alpha^{2n-l} = \dfrac{\alpha^{l}}{1-\alpha^2} & \ell \ge 0 \end{cases}$$

Chú ý, đối với $\ell \ge 0$, $R_{xx}(\ell) = \dfrac{\alpha^l}{1-\alpha^2}$ và $R_{xx}(\ell) = \dfrac{\alpha^{-l}}{1-\alpha^2}$ $\ell < 0$. Thay ℓ bằng $-\ell$ trong biểu thức thứ 2, ta có $R_{xx}(-\ell) = \dfrac{\alpha^l}{1-\alpha^2} = R_{xx}(\ell)$ nên $R_{xx}(\ell)$ là hàm chẵn đối với ℓ.

Giá trị cực đại của $R_{xx}(\ell)$ xảy ra tại $\ell = 0$ bởi vì α^l là hàm suy giảm dần khi ℓ tăng, với $|\alpha| < 1$

b) $x_2(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases}$

$$R_{xx}(1)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_2(n)x_2(n-1)=\sum_{n=0}^{N-1}x_2(n-1)$$, trong đó:

$$x_2(n-1)=\begin{cases}1 & 1\le n\le N-1+1\\ 0 & \text{n khác}\end{cases}$$

Do đó, $$R_{xx}(\ell)=\begin{cases}0 & \ell<-(N-1)\\ N+1 & -(N-1)\le\ell<0\\ N & 1=0\\ N-1 & 0<\ell\le N-1\\ 0 & \ell>N-1\end{cases}$$

$R_{xx}(\ell)$ là hàm của một tam giác theo biến số ℓ, do đó $R_{xx}(\ell)$ là hàm chẵn với giá trị cực đại của N tại $\ell=0$.

1.70. a) $\tilde{x}_1(n)=\cos(\pi n/M)$, trong đó M là số nguyên dương. Chu kỳ của $x_1(n)$ là 2M, do đó

$$R_{xx}(\ell)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1(n)x_1(n-\ell)=\frac{1}{2M}\sum_{n=0}^{2M-1}x_1(n)x_1(n+1)=\frac{1}{2M}\sum_{n=0}^{2M-1}\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{M}\right)$$

$$=\frac{1}{2M}\sum_{n=0}^{2M-1}\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)\left\{\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)\cos\left(\frac{\pi\ell}{M}\right)-\sin\left(\frac{\pi n}{M}\right)\sin\left(\frac{\pi\ell}{M}\right)\right\}=\frac{1}{2M}\cos\left(\frac{\pi\ell}{M}\right)\sum_{n=0}^{2M-1}\cos^2\left(\frac{\pi n}{M}\right)$$

Mặt khác ta có: $\sum_{n=0}^{2M-1}\cos^2\left(\frac{\pi n}{M}\right)=\frac{2M}{2}=M$. Do đó $R_{xx}(1)=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi n}{M}\right)$

b) $\tilde{x}_2(n)=n\ \text{modulo}\,6=\{0,1,2,3,4,5\}$, $0\le n\le 5$. Nó là một chuỗi tuần hoàn với chu kỳ bằng 6. Do đó, $R_{xx}(\ell)=\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}x_2(n)x_2(n+\ell),\ 0\le\ell\le 5$, cũng là chuỗi tuần hoàn với chu kì là 6.

$$R_{xx}(0)=\frac{1}{6}\left[x_2(0)x_2(0)+x_2(\ell)x_2(\ell)+x_2(2)x_2(2)+x_2(3)x_2(3)+x_2(4)x_2(4)+x_2(5)x_2(5)\right]=\frac{55}{6}$$

$$R_{xx}(\ell)=\frac{1}{6}\left[x_2(0)x_2(\ell)+x_2(\ell)x_2(2)+x_2(2)x_2(3)+x_2(3)x_2(4)+x_2(4)x_2(5)+x_2(5)x_2(0)\right]=\frac{40}{6}$$

Tính tương tự ta có:

$$R_{xx}(2)=\frac{32}{6}$$

$$R_{xx}(3)=\frac{28}{6}$$

$$R_{xx}(4)=\frac{31}{6}$$

$$R_{xx}(5)=\frac{40}{6}$$

1.71. $$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)| = \sum_{n=0,n\text{ chẵn}}^{+\infty}|a|^n = \sum_{n=0}^{+\infty}|a|^{2n} = \frac{1}{1-|a|^2}$$

Hệ thống ổn định nếu $|a|<1$.

1.72

a) $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k 2^{n-k} = 2^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$= 2^n\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{2}{3}\left[2^{n+1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]u(n)$$

b) $$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{\infty}h(k) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2,\ n<0$$

$$y(n) = \sum_{k=n}^{\infty}h(k) = \sum_{k=n}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2-\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ n\geq 0$$

1.73. Một hệ thống là ổn định BIBO nếu và chỉ nếu một lối vào có giới hạn (Bounded Input) tạo ra một lối ra cũng có giới hạn (Bounded Output).

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)x(n-k)$$

$$|y(n)| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h(k)||x(n-k)|$$

$$\leq M_x\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|h(k)|$$

Trong đó $|x(n-k)|\leq M_x$. Do đó, $|y(n)|<\infty$ cho tất cả mọi n, nếu và chỉ nếu

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)| \leq M_h < \infty.$$

1.74. $$y(n) = \frac{1}{2}\left[y(n-1)+\frac{x(n)}{y(n-1)}\right]$$

Đối với đầu vào $x(n)=\alpha u(n)$, đầu ra $y(n)$ hội tụ tới một hằng số K khi $n\to\infty$. Phương trình vi phân trên khi $n\to\infty$, trở thành $K=\frac{1}{2}\left(K+\frac{\alpha}{K}\right)\Leftrightarrow K^2=\alpha\Leftrightarrow K=\sqrt{\alpha}$.

Dễ dàng thấy rằng hệ thống là phi tuyến. Giả thiết $y_1(n)$ là đầu ra của đầu vào $x_1(n)$. Ta có:

$y_1(n)=\frac{1}{2}\left[y_1(n-1)+\frac{x_1(n)}{y_1(n-1)}\right]$.

Nếu $x_1(n)=x(n-n_0)$ thì $y_1(n)=\frac{1}{2}\left[y_1(n-1)+\frac{x_1(n-n_0)}{y_1(n-1)}\right]$

Suy ra $y_1(n)=y(n-n_0)\Rightarrow$ hệ thống trên là bất biến.

1.75. a) $f(n)=f(n-1)+f(n-2)$, $n\ge 2$. Đặt $f(n)=\alpha r^n$, phương trình sai phân trở thành $\alpha r^n-\alpha r^{n-1}-\alpha r^{n-2}=0\Leftrightarrow r^2-r-1=0$, có nghiệm là $r=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Do đó,

$$f(n)=\alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Bởi vì $f(0)=0$ nên $\alpha_1+\alpha_2=0$. Tương tự, $f(1)=1$, suy ra $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+\sqrt{5}\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}=1$. Giải hệ phương trình trên ta thu được $\alpha_1=-\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Do đó, $f(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

b) $y(n)=y(n-1)+y(n-2)+x(n-1)$

Khi hệ thống là tuyến tính bất biến, các điều kiện đầu là bằng không.

Đặt $x(n)=\delta(n)$, ta có $y(n)=y(n-1)+y(n-2)+\delta(n-1)$. Suy ra:

$y(0)=y(-1)+y(-2)=0$ và $y(1)=1$. Đối với n>1 phương trình sai phân tương ứng là $y(n)=y(n-1)+y(n-2)$ với các điều kiện đầu $y(0)=0$ và $y(1)=1$, giống với các điều kiện đầu cho lời giải chuỗi Fibonacci. Do đó lời giải khi n >1 được cho bởi $y(n)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

$f(n)$ là đáp ứng xung của một hệ thống LTI nhân quả được mô tả bởi phương trình sai phân: $y(n)=y(n-1)+y(n-2)+x(n-1)$

1.76. $y(n)=\alpha y(n-1)+x(n)$. Với $y(n)=y_{Re}(n)+jy_{Im}(n)$ và $\alpha=a+jb$ ta có:

$$y_{Re}(n)+jy_{Im}(n)=(a+jb)\left[y_{Re}(n-1)+jy_{Im}(n-1)\right]+x(n)$$

Thực hiện cân bằng phần thực và phần ảo riêng rẽ và chú ý rằng x(n) là thực ta có:

$$y_{Re}(n) = ay_{Re}(n-1) - by_{Im}(n-1) + x(n) \quad (1)$$

$$y_{Im}(n) = by_{Re}(n-1) + ay_{Im}(n-1)$$

Do đó, $y_{Im}(n-1) = \frac{1}{a}y_{Im}(n) - \frac{b}{a}y_{Re}(n-1)$

Suy ra phương trình sai phân một đầu vào, hai đầu ra có dạng:

$$y_{Re}(n) = ay_{Re}(n-1) - \frac{b}{a}y_{Im}(n) + \frac{b^2}{a}y_{Re}(n-1) + x(n)$$

Do đó, $by_{Im}(n-1) = -ay_{Re}(n-1) + \left(a^2 + b^2\right)y_{Re}(n-2)y_{Im}(n) + ax(n-1)$

Thay thế phương trình trên vào phương trình (1) ta có:

$$y_{Re}(n) = 2ay_{Re}(n-1) - \left(a^2 + b^2\right)y_{Re}(n-2) - ax(n-1) + x(n)$$

Phương trình này là phương trình vi phân bậc 2 biểu diễn $y_{Re}(n)$ theo hàm của $x(n)$.

1.77. a) Cho $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)| < \infty$. Áp dụng bất đẳng thức Schwartz, ta có

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|^2 \le \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|\right)\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)|\right) < \infty$$

b) Xét $x(n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \ge 1 \\ 0, & n < 1 \end{cases}$

Miền hội tụ của một chuỗi có chiều dài vô hạn có thể kiểm tra thông qua biểu thức tích phân. Đặt $a_n = f(x)$, trong đó $f(x)$ là hàm liên tục, dương và giảm dần đối với mọi $x \ge 1$. Do đó cả chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ và tích phân $\int_1^{\infty}f(x)dx$ đều hội tụ hoặc đều phân kỳ. Với $a_n = \frac{1}{n}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ta có: $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \ln(x)\Big|_1^{\infty} = \infty - 0 = \infty$. Suy ra $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|x(n)| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ là không hội tụ, và kết quả là $x(n)$ không hoàn toàn tính tổng được. Để chứng minh chuỗi $x(n)$ có tổng bình phương, ta áp dụng cho $a_n = \frac{1}{n^2}$, và do đó $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Ta có $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^{\infty} = -\frac{1}{\infty} + 1 = 1$. Suy ra $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ là hội tụ, hay $x(n) = \frac{1}{n}$ có tổng bình phương.

1.78. $\sum_{k=0}^{N}d_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M}p_k x(n-k)$

Đặt đầu vào của hệ thống là $x(n)=\delta(n)$. Khi đó $\sum_{k=0}^{M} p_k\delta(n-k)=\sum_{k=0}^{N} d_k h(n-k)$. Do đó $p_r=\sum_{k=0}^{N} d_k h(r-k)$. Vì hệ thống này được giả thiết là nhân quả, $h(r-k)=0, \quad \forall k>r$.

$$p_r=\sum_{k=0}^{r} d_k h(r-k)=\sum_{k=0}^{r} h(k)d_{r-k}$$

Từ kết quả trên, ta suy ra $p(n)=h(n)(*)d_n$

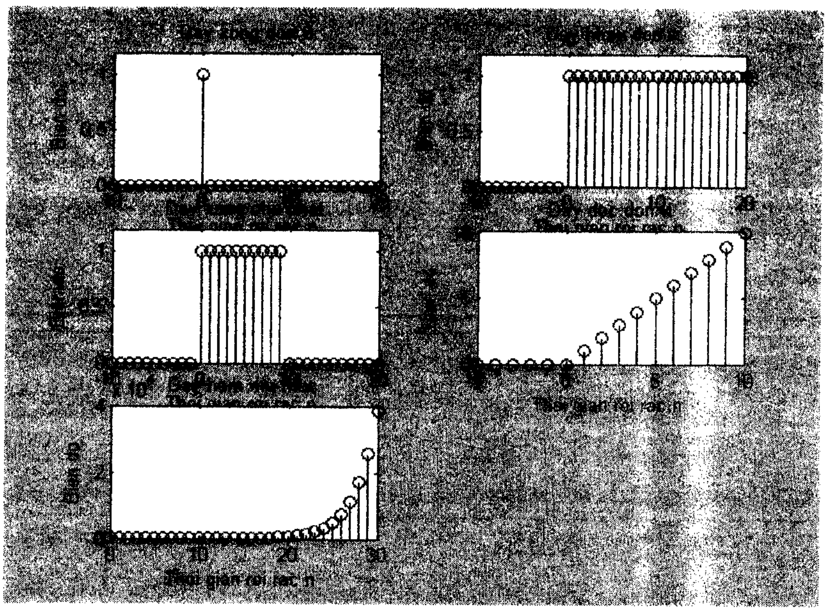
D. BÀI TẬP MATLAB

M1_1. Hãy viết một chương trình MATLAB để tạo ra các dãy sau đây và vẽ các dãy này sử dụng hàm *stem*: a) dãy xung đơn vị, b) dãy nhảy đơn vị, c) dãy chữ nhật, d) dãy dốc đơn vị, e) dãy hàm mũ thực $x=0,2(1,5)^n$ và f) dãy hàm mũ phức $y=2e^{\left(-\frac{1}{12}+j\pi/6\right)n}$, $\quad 0\le n\le 40$.

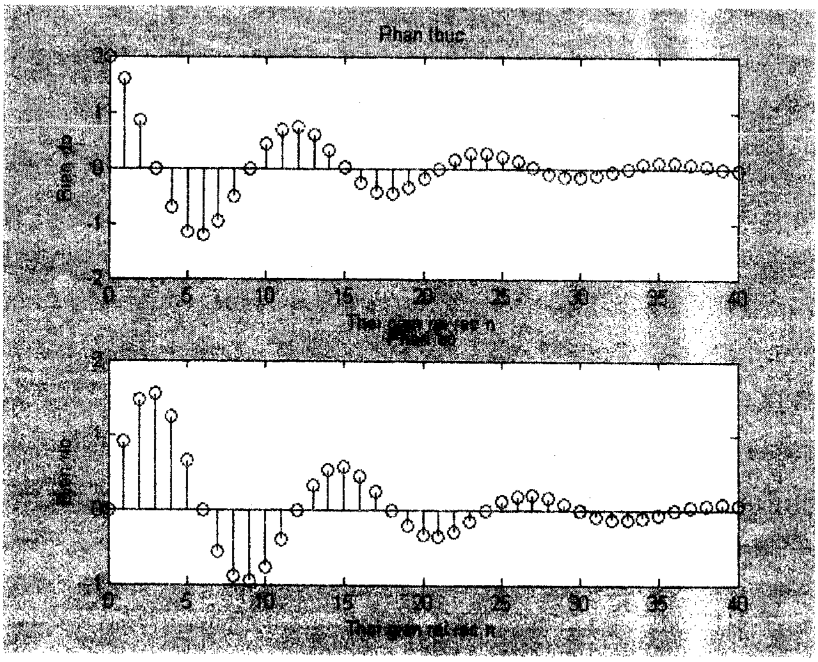
Lời giải:

```
% Chuong trinh M1_1
% a) Tao day xung don vi
clf;
% Tao mot vecto tu -10 den 20
n = -10:20;
% Tao day xung don vi
delta = [zeros(1,10) 1 zeros(1,20)];
% Ve day xung don vi
subplot(321);
stem(n,delta);
xlabel('Thoi gian roi rac n');ylabel('Bien do');
title('Day xung don vi');
axis([-10 20 0 1.2]);
% b) Tao day nhay don vi
u=[zeros(1,10) ones(1,21)];
subplot(322);
stem(n,u);
xlabel('Thoi gian roi rac n');ylabel('Bien do');
title('Day nhay don vi');
axis([-10 20 0 1.2]);
% c) Tao day xung chu nhat co chieu dai L
L=10;
rec=[zeros(1,10) ones(1,L) zeros(1,20-L+1)];
subplot(323);
stem(n,rec);
```

```
xlabel('Thoi gian roi rac n');ylabel('Bien do');
title('Day xung chu nhat');
axis([-10 20 0 1.2]);
% d) Tao day doc don vi
n=-5:10;
m=[zeros(1,5) 0:10];
u=[zeros(1,5) ones(1,11)];
r=m.*u;
subplot(324);
stem(n,r);
xlabel('Thoi gian roi rac n');ylabel('Bien do');
title('Day doc don vi');
axis([-5 10 0 10.2]);
% e) Tao day ham mu thuc
n = 0:30; a = 1.5; K = 0.2;
x = K*a.^n;
subplot(325);
stem(n,x);
xlabel('Thoi gian roi rac n');ylabel('Bien do');
title('Day ham mu thuc');
figure;
% f) Tao day ham mu phuc
s = -(1/12)+(pi/6)*i;
K = 2;
n = 0:40;
x = K*exp(s*n);
subplot(2,1,1);
stem(n,real(x));
xlabel('Thoi gian roi rac n');ylabel('Bien do');
title('Phan thuc');
subplot(2,1,2);
stem(n,imag(x));
xlabel('Thoi gian roi rac n');ylabel('Bien do');
title('Phan ao');
```



Dãy hàm mũ phức:



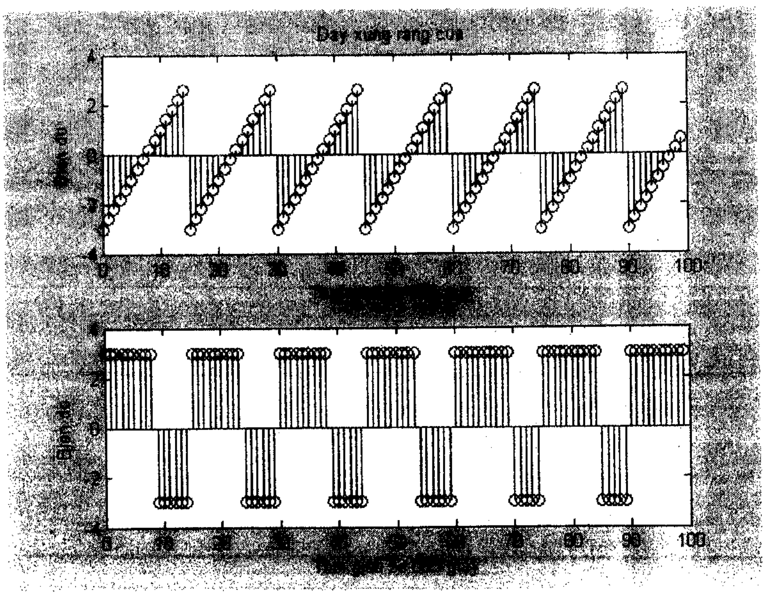
M1_2. Hãy viết một chương trình MATLAB dùng các hàm *sawtooth* và *square* để tạo ra các dãy xung vuông và dãy xung răng cưa sau đây và vẽ các dãy này sử dụng hàm *stem*. Các thông số sau đây có thể thay đổi bởi người lập trình: chiều dài dãy (L), biên độ (A), chu kỳ (N). Ngoài ra đối với dãy xung vuông ta cần quan tâm đến độ rộng xung – là phần trăm chu kỳ mà tín hiệu có giá trị dương. Hãy dùng chương trình này để tạo ra 100 mẫu đầu tiên của mỗi loại dãy xung trên với tần số lấy mẫu 20kHz, biên độ đỉnh A = 3; một chu kỳ là 15 và độ rộng xung vuông là 60%.

Lời giải:

```
% Chuong trinh M1_2
```

```
% a) Tao day xung vuong va day xung rang cua tuan hoan co chieu dai
L,
% bien do dinh A, chu ky N
clf;
% Nhap cac thong so cua day xung tu ban phim
A=input('Bien do dinh =');
L=input('Chieu dai day =');
N=input('Chu ky cua day =');
Fs=input('Tan so lay mau mong muon =');
DRX=input('Do rong cua xung vuong =');

% Tao cac day xung
Ts=1/Fs;
t=0:L-1;
x=A*sawtooth(2*pi*t/N);
y=A*square(2*pi*t/N, DRX);
subplot(211);
stem(t,x);
xlabel(['Thoi gian ',num2str(Ts),' giay']);ylabel('Bien do');
title('Day xung rang cua');
subplot(212);
stem(t,y);
xlabel(['Thoi gian ',num2str(Ts),' giay']);ylabel('Bien do');
title('Day xung vuong');
```



M1_3. a) Hãy viết một chương trình MATLAB để tạo dãy tín hiệu hình sin $y(n) = A\cos(\omega_0 n + \varphi)$ và vẽ dãy này sử dụng hàm *stem*. Các thông số của dãy sau đây có thể nhập từ bàn phím: chiều dài dãy (L), biên độ (A), tần số góc (ω_0) và góc pha (φ) với $0 < \omega_0 < \pi$ và $0 \le \varphi \le 2\pi$.

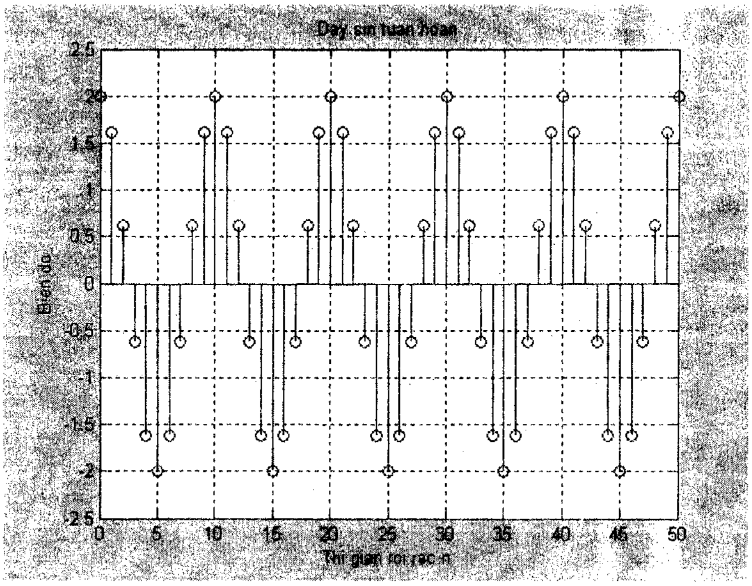
b) Hãy viết một chương trình MATLAB để tạo dãy tín hiệu điều biên với hệ số điều biên m, tần số sóng mang fc, tần số của tín hiệu f, chiều dài dãy L có thể thay đổi được từ bàn phím.

Lời giải:

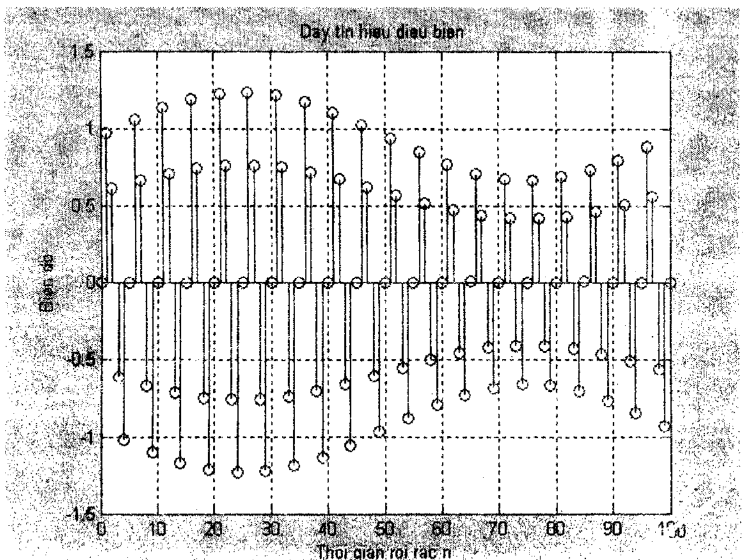
```
% Chuong trinh M1_3_1
% Tao day tin hieu hinh sin tuan hoan co chieu dai L,
% bien do dinh A, tan so goc omega, pha
clf;
% Nhap cac thong so cua day xung tu ban phim
A=input('Bien do dinh =');
L=input('Chieu dai day =');
omeg=input('Tan so goc =');
if ((omeg<=0) | (omeg>=pi)), error('Tan so goc khong hop le'); end;
pha=input('Goc pha =');
if ((pha<0) | (pha>(2*pi))), error('Pha khong hop le'); end;
% Tao day tin hieu hinh sin
n = 0:L-1;
arg = omeg*n - phase;
x = A*cos(arg);
stem(n,x);            % Plot the generated sequence
% axis([0 50 -2.5 2.5]);
grid;
title('Day sin tuan hoan');
xlabel('Thoi gian roi rac n');
ylabel('Bien do');
% Chuong trinh M1_3_2
% b) Tao day tin hieu dieu bien
% Nhap cac thong so cua tin hieu tu ban phim
m=input('He so dieu bien =');
fc=input('Tan so song mang =');
f=input('Tan so tin hieu =');
L=input('Chieu dai day tin hieu =');
n = 0:L;
xC = sin(2*pi*fc*n);
x = sin(2*pi*f*n);
y = (1+m*x).*xC;
stem(n,y);grid;
xlabel('Thoi gian roi rac n');
```

```
ylabel('Bien do');
title('Day tin hieu dieu bien');
```

a) Ví dụ A = 2; L = 50; $\omega_0 = 0,2pi$; $\varphi = 0$ ta có kết quả như sau:



b) Ví dụ dãy tín hiệu điều biên với hệ số điều biên m = 0,3; tần số sóng mang fc = 0,2 Hz ; tần số của tín hiệu f =0,01 Hz; chiều dài dãy L = 100.



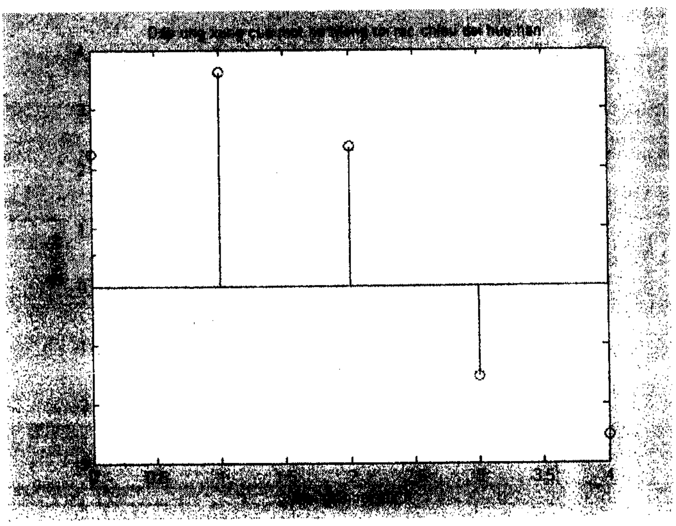
M1_4. Hãy viết một chương trình MATLAB dùng hàm *impz* để tính toán và vẽ đáp ứng xung của một hệ thống rời rạc theo thời gian có chiều dài hữu hạn có dạng tổng quát như sau: $\sum_{k=0}^{N-1} a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^{M-1} b_r x(n-r)$. Các thông số đầu vào của chương trình là chiều dài của đáp ứng xung (L), các hằng số $\{a_k\}$ và $\{b_r\}$ của phương trình sai phân. Hãy kiểm tra tính ổn định của một hệ thống đó.

Lời giải:

```
% Chuong trinh M1_4
% Tinh toan va ve dap ung xung cua mot he thong roi rac theo thoi gian co
% chieu dai huu han va xet tinh on dinh cua he thong
% Nhap cac thong so cua tin hieu tu ban phim
N=input('Chieu dai dap ung xung mong muon =');
p=input('Nhap cac gia tri cua vecto p =');
d=input('Nhap cac gia tri cua vecto d =');
[h,t]=impz(p,d,N);
disp(h)
n=0:N-1;
stem(n,h);
xlabel('Thoi gian roi rac n');
ylabel('Bien do');
title('Dap ung xung cua mot he thong roi rac chieu dai huu han');
% Xet tinh on dinh cua he thong
sum=0;
for k=1:N+1;
    sum=sum+abs(h(k));
    if abs(h(k))<10(-6), break,
    end
end
disp('Gia tri tong =');disp(abs(h(k)));
```

Nhập các giá trị: L = 5; b_r = [2.25 2.5 2.25]; a_k = [1 -0.5 0.75], ta được kết quả là đáp ứng xung h = [2.2500 3.6250 2.3750 -1.5313 -2.5469]. Biểu diễn trên đồ thị như sau:

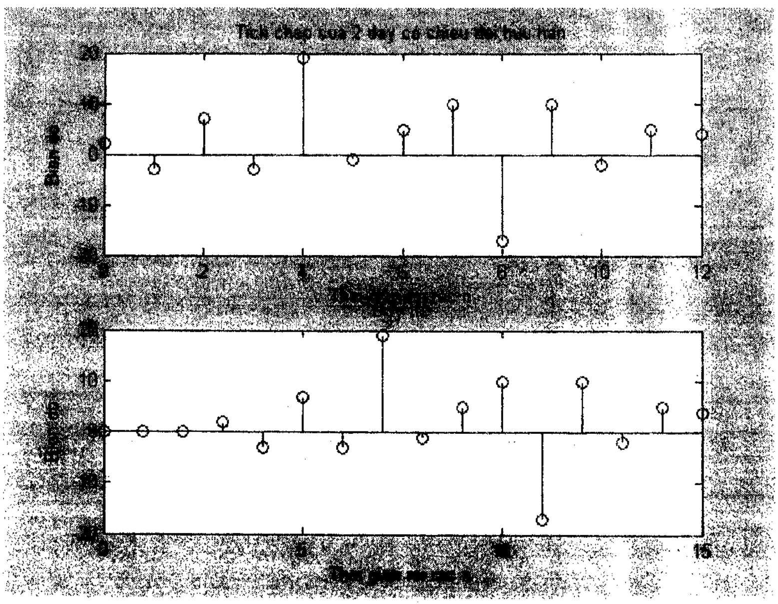
Gia tri tong = 2.2500. Suy ra hệ thống ổn định.



M1_5. Hãy viết một chương trình MATLAB để tính tích chập của 2 dãy có chiều dài hữu hạn. Giá trị của các dãy được nhập từ bàn phím. Kết quả của tích chập sau đó được trễ đi d mẫu (giá trị của d được nhập từ bàn phím). Vẽ y(n)=x(n)*h(n) và y(n-d).

Lời giải:

```
% Chuong trinh M1_5
% Tinh toan va ve tich chap cua 2 day co chieu dai huu han
% Nhap cac cac day tin hieu tu ban phim
x=input('Nhap day tin hieu x =');
h=input('Nhap dap ung xung h =');
d=input('Nhap gia tri tre d =');
y=conv(x,h);
nx=length(x);   % chieu dai cua day x
nh=length(h);   % chieu dai cua day h
ny=nx+nh-1;     % chieu dai cua day y
disp(y)
n=0:ny-1;
subplot(211);
stem(n,y);
xlabel('Thoi gian roi rac n');
ylabel('Bien do');
title('Tich chap cua 2 day co chieu dai huu han');
subplot(212);
yd=[zeros(1,d) y];
md=ny+d;
m=0:md-1;
stem(m,yd);
xlabel('Thoi gian roi rac n');
ylabel('Bien do');
title('Day tre');
```



Nhập các dãy tín hiệu x =[2 1 3 -2 1 0 -3 4]; dãy đáp ứng xung h =[1 -2 3 1 2 1]; giá trị trễ d =3 ta được tích chập y(n) = x(n)*h(n) như sau:

y = [2 -3 7 -3 19 -1 5 10 -17 10 -2 5 4]

M1_6. Cho hai hệ thống có phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng như sau:

Hệ thống 1:

$$y(n)=0,5x(n)+0,25x(n-1)+0,82x(n-2)$$

Hệ thống 2:

$$y(n)=0,45x(n)+0,5x(n-1)+0,4x(n-2)+0,52y(n-1)-0,45y(n-2)$$

Hãy viết một chương trình MATLAB để tính các đầu ra của hai hệ thống trên với đầu vào:

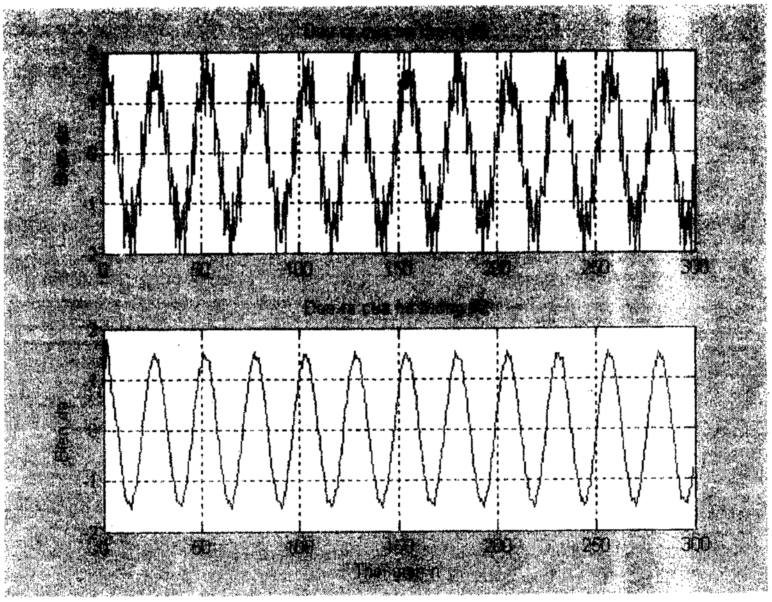
$$x(n)=\cos\left(\frac{2\pi*10n}{256}\right)+\cos\left(\frac{2\pi*100n}{256}\right)$$

Lời giải:

```
% Chuong trinh M1_6
% Tinh va bieu dien dau ra cua mot he thong khi biet dau vao va phuong
% trinh SPTT cua he thong
clf;
n = 0:299;
x1 = cos(2*pi*10*n/256);
x2 = cos(2*pi*100*n/256);
x = x1+x2;

% Tinh cac chuoi dau ra
num1 = [0.5 0.25 0.82];
y1 = filter(num1,1,x);        % Dau ra cua he thong #1
den2 = [1 -0.52 0.45];
num2 = [0.45 0.5 0.4];
y2 = filter(num2,den2,x);     % Dau ra cua he thong #2

% Plot the output sequences
subplot(211);
plot(n,y1);axis([0 300 -2 2]);
ylabel('Bien do');
title('Dau ra cua he thong #1'); grid;
subplot(212);
plot(n,y2);axis([0 300 -2 2]);
xlabel('Thoi gian n'); ylabel('Bien do');
title('Dau ra cua he thong #2'); grid;
```



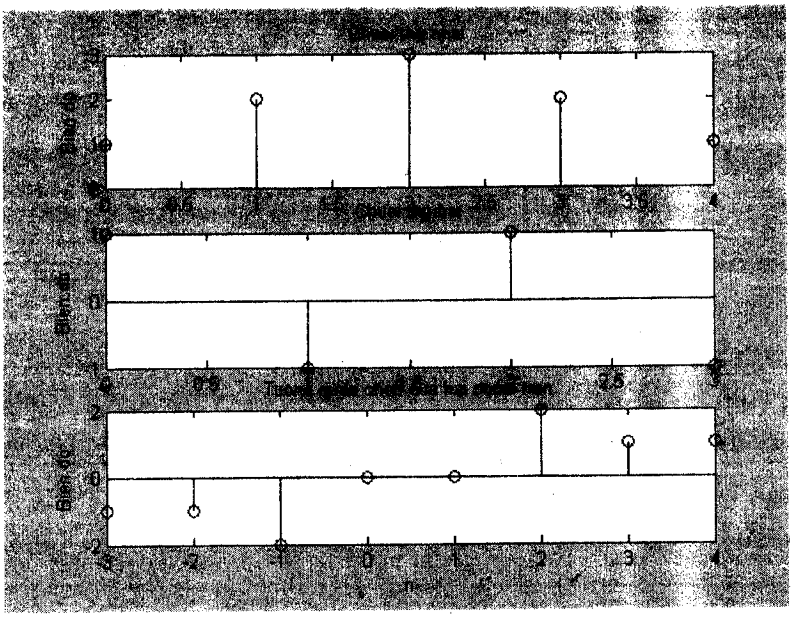
M1_7. Tính tương quan chéo của hai chuỗi bất kỳ nhập từ bàn phím

Lời giải:

```
% Chuong trinh M1_7
% Tinh chuoi tuong quan cheo
%
x = input('Nhap chuoi thu nhat = ');
y = input('Nhap chuoi thu hai = ');
% Tinh tuong quan cheo cua hai chuoi
N1 = length(y)-1; N2 = length(x)-1;
rxy = conv(x,fliplr(y));
k = (-N1):N2';
n1=0:N1; n2=0:N2;
subplot(311);
stem(n2,x);
title('Chuoi thu nhat');ylabel('Bien do');
subplot(312);
stem(n1,y);
title('Chuoi thu hai');ylabel('Bien do');
subplot(313);
stem(k,rxy);
title('Tuong quan cheo cua hai chuoi tren');
xlabel('n'); ylabel('Bien do');
v = axis;
axis([-N1 N2 v(3:end)]);
```

Nhap chuoi thu nhat = [1 2 3 2 1]

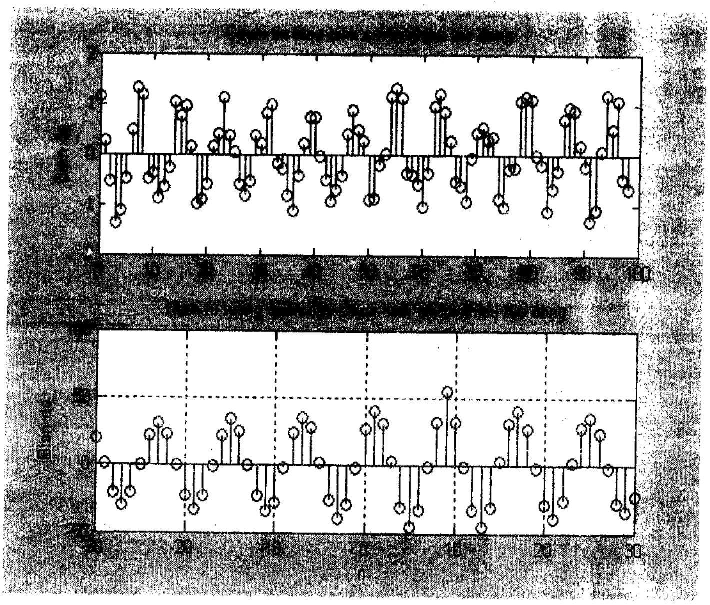
Nhap chuoi thu hai = [1 -1 1 -1]



M1_8. Tính hàm tự tương quan của một chuỗi tín hiệu hình sin $x(n) = \cos(0{,}25\pi n)$ bị nhiễu ngẫu nhiên tác động

Lời giải:

```
% Chuong trinh M1_8
% Tinh tu tuong quan cua mot chuoi tin hieu hinh sin bi nhieu tac
dong
%
N = 99;
n = 1:N;
x = cos(pi*0.25*n); % Tao chuoi tin hieu sin
d = rand(1,N) - 0.5; % Tao chuoi nhieu
y = x + d; % Tao chuoi tin hieu hinh sin bi nhieu tac dong
rxx = conv(y, fliplr(y)); % Tinh chuoi tu tuong quan
k = -30:30;
n1=0:length(y)-1;
subplot(211);
stem(n1,y);
title('Chuoi tin hieu hinh sin bi nhieu tac dong');ylabel('Bien
do');
subplot(212);
stem(k, rxx(60:120));grid
title('Ham tu tuong quan cua chuoi hinh sin bi nhieu tac dong');
xlabel('n'); ylabel('Bien do');
```



Chương 2

BIỂU DIỄN HỆ THỐNG VÀ TÍN HIỆU RỜI RẠC TRONG MIỀN Z

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

2.1. Biến đổi z

Định nghĩa biến đổi z hai phía:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Định nghĩa biến đổi z một phía:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

2.2. Miền hội tụ của biến đổi z

Tập hợp tất cả các giá trị của z mà tại đó chuỗi $X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$ hội tụ được gọi là miền hội tụ của biến đổi z.

Ký hiệu miền hội tụ là RC (hoặc ROC). Ta phải chú ý đến miền hội tụ khi thực hiện biến đổi z.

Chú ý:

Tiêu chuẩn Cauchy: một chuỗi có dạng $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = x_0 + x_1 + x_2 + \ldots$ hội tụ nếu điều kiện sau đây được thoả mãn: $\lim_{n\to\infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} < 1$

2.3. Điểm cực, điểm không

Cần phân biệt điểm cực, điểm không của tín hiệu và điểm cực, điểm không của hệ thống.

Nếu tín hiệu X(z) có dạng phân thức $X(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$ thì:

- Điểm cực z_{pk} của tín hiệu X(z) là tập các điểm làm cho X(z) không xác định: $X(z)\big|_{z=z_{pk}} = \infty$. Nghĩa là z_{pk} là nghiệm của D(z)

- Điểm không z_{0r} của tín hiệu X(z) là tập các điểm làm cho X(z) triệt tiêu: $X(z)\big|_{z=z_{0r}} = 0$.

Nghĩa là z_{0r} là nghiệm của N(z)

Lưu ý rằng điểm cực điểm không của hệ thống được xác định theo hàm truyền đạt H(z).

- Điểm cực của hệ thống là tập các điểm z_{pk} làm cho H(z) không xác định $H(z)\big|_{z=z_{pk}} = \infty$

- Điểm không của hệ thống là tập các điểm z_{0r} làm cho H(z) triệt tiêu $H(z)\big|_{z=z_{0r}} = 0$

Do vậy hàm truyền đạt H(z) còn được biểu diễn theo dạng điểm cực và điểm không:

$$H(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=\frac{b_M}{a_N}\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_{0r})}{\prod_{k=1}^{N}(z-z_{pk})} \quad \text{hay:}$$

$$H(z)=G.\frac{\prod_{r=1}^{M}(z-z_{0r})}{\prod_{k=1}^{N}(z-z_{pk})}$$ trong đó $G=\frac{b_M}{a_N}$ là hệ số truyền đạt.

2.4. Biến đổi z ngược

Định nghĩa biến đổi z ngược:

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z).z^{n-1}dz$$

Trong đó $\oint_C$ - Đường cong kín đi qua gốc tọa độ đi ngược chiều kim đồng hồ.

Chúng ta phải nhớ 3 phương pháp để tìm tích phân đường này:

1. Phương pháp thặng dư:

$$x(n)=\sum_k \mathrm{Res}\left[X(z).z^{n-1}\Big|_{z=z_{pk}}\right]$$

với z_{pk} : cực của X(z). z^{n-1} nằm trong đường cong khép kín *C*

Viết dưới dạng: $X(z).z^{n-1}=\frac{\psi(z)}{(z-z_{pk})^{s_k}}$

z_{pk} : cực bội bậc s_k

$$\psi(z)=(z-z_{pk})^{s_k}X(z).z^{n-1}$$

Thặng dư tìm được bằng công thức sau đây:

$$\mathrm{Res}\left[X(z).z^{n-1}\Big|_{z=z_{pk}}\right]=\frac{1}{(s_k-1)!}\frac{d^{s_k-1}\psi(z)}{dz^{s_k-1}}\Bigg|_{z=z_{pk}}$$

2. Phương pháp khai triển thành chuỗi luỹ thừa

Khai triển biến đổi z thành một chuỗi lũy thừa có dạng:

$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n z^{-n}$, trong đó α_n là hệ số của chuỗi lũy thừa.

$$\Rightarrow x(n)\equiv\alpha_n$$

3. Phương pháp khai triển thành phân thức tối giản

$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}$; Bậc của N(z) là M, bậc của D(z) là N.

$M \geq N$:

$$X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}=S(z)+\frac{P(z)}{Q(z)},$$ với S(z) là phần nguyên.

$D(z)\equiv Q(z)$

Bậc của S(z): M – N

$$S(z)=B_{M-N}z^{M-N}+B_{M-N-1}z^{M-N-1}+\ldots+B_1z^1+B_0$$

$$s(x)=B_{M-N}\delta\left[n+(M-N)\right]+B_{M-N-1}\delta\left[n+(M-N-1)\right]+\ldots+B_1\delta[n+1]+B_0$$

$$M<N:\qquad X(z)=\frac{N(z)}{D(z)}\equiv\frac{P(z)}{Q(z)}$$

Xét $X(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}, M<N$

- ***Trường hợp 1:*** X(z) chỉ có các cực đơn

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{z-z_{pk}}$$

z_{pk} : điểm cực của Q(z), có N cực

$$A_k=(z-z_{pk})\frac{P(z)}{Q(z)}\bigg|_{z=z_{pk}}$$

- ***Trường hợp 2:*** X(z) có một cực bội bậc s là z_{pl}, còn lại là cực đơn z_{pk}

$$X(z)=\sum_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N-s}\frac{A_k}{(z-z_{pk})}+\sum_{j=1}^{s}\frac{C_j}{(z-z_{pl})^j}$$

Ta tính được: $$A_k=(z-z_{pk})\frac{P(z)}{Q(z)}\bigg|_{z=z_{pk}}$$

$$C_j=\frac{1}{(s-j)!}\frac{d^{s-j}}{dz^{s-j}}\left[(z-z_{pl})^s\frac{P(z)}{Q(z)}\right]\bigg|_{z=z_{pl}}$$

- ***Trường hợp 3:*** X(z) có L cực bội

Giả sử X(z) có L cực bội bậc $s_1,s_2,\ldots,s_L$. Các cực còn lại là cực đơn.

$$X(z)=\sum_{k=1}^{N'}\frac{A_k}{(z-z_{pk})}+\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{s_i}\frac{C_{js_i}}{(z-z_{pl_i})^j}$$

$$N'=N-\sum_{i=1}^{L}s_i$$

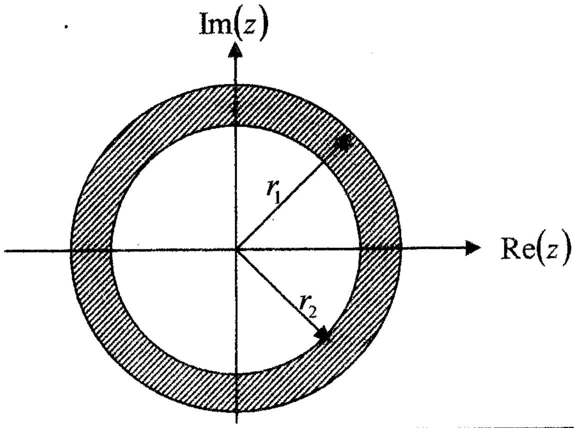
z_{pli} : Cực bội bậc s_i

z_{pk} : Cực đơn

$$A_k = \left(z - z_{pk}\right)\frac{P(z)}{Q(z)}\bigg|_{z=z_{pk}}$$

$$C_{js_i} = \frac{1}{(s_i - j)!}\frac{d^{s_i - j}}{dz^{s_i - j}}\left[\left(z - z_{pl_i}\right)^{s_i}\frac{P(z)}{Q(z)}\right]\bigg|_{z=z_{pli}}$$

2.5. Các tính chất biến đổi z



Miền n	Miền z	ROC
$x(n) = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}dz$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$	$r_2 < \|z\| < r_1$
$ax_1(n) + bx_2(n)$ a,b là hằng số	$aX_1(z) + bX_2(z)$	$ROC[X_1(z)] \cap ROC[X_2(z)]$
$x(n - n_0)$	$z^{-n_0}X(z)$	$r_2 < \|z\| < r_1$
$a^n x(n)$	$X(a^{-1}z)$	$\|a\|r_2 < \|z\| < \|a\|r_1$
$nx(n)$	$-z\frac{dX(z)}{dz}$	$r_2 < \|z\| < r_1$
$x^*(n)$ (*: liên hợp phức)	$X^*(z^*)$	$r_2 < \|z\| < r_1$
$x(-n)$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$	$\frac{1}{r_1} < \|z\| < \frac{1}{r_2}$
$x_1(n) * x_2(n)$	$X_1(z).X_2(z)$	
$x_1(n).x_2(n)$	$\frac{1}{2\pi j}\oint_C X_1(v)X_2\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv$	
nếu $x(n)$ là nhân quả	$x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z)$	
$r_{x_1x_2} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m).x_2(m-n)$	$R_{x_1x_2}(z) = X_1(z).X_2\left(\frac{1}{z}\right)$	$ROC[X_1(z)] \cap ROC\left[X_2\left(\frac{1}{z}\right)\right]$

2.6. Một số biến đổi z thông dụng

Miền n	Miền z	ROC
$\delta(n)$	1	Toàn bộ mặt phẳng z
$\delta(n-n_0)$	z^{-n_0}	Toàn bộ mặt phẳng z, trừ tại 0 nếu $n_0 > 0$, trừ tại ∞ nếu $n_0 < 0$
$u(n)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$u(-n-1)$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
$n\,u(n)$	$\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$	$\|z\| > 1$
$a^n u(n)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u(n)$	$\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u(-n-1)$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$-na^n u(-n-1)$	$\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2}$	$\|z\| < \|a\|$
$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
$a^n\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
$a^n\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0+a^2z^{-2}}$	$\|z\| > \|a\|$
$\left(z_{pk}\right)^n u(n)$	$\frac{1}{1-z_{pk}z^{-1}}$	$\|z\| > \|z_{pk}\|$
$\left(z_{pk}\right)^{n-1} u(n-1)$	$\frac{1}{1-z_{pk}z^{-1}}$	$\|z\| < \|z_{pk}\|$
$\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}\left(z_{pk}\right)^{n-m} u(n)$	$\frac{z}{\left(z-z_{pk}\right)^{m+1}}$	$\|z\| > \|z_{pk}\|$

$\frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}(z_{pk})^{n-m}u(-n-1)$	$\frac{z}{(z-z_{pk})^{m+1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert z_{pk}\rvert$

2.7. Biểu diễn hệ thống trong miền z

Đặc trưng cho hệ thống trong miền z là hàm truyền đạt H(z). Hàm truyền đạt có vai trò như đáp ứng xung h(n) của hệ thống trong miền thời gian rời rạc.

Hàm truyền đạt H(z) được hiểu theo hai khái niệm:

- Hàm truyền đạt H(z) là tỷ số của biến đổi z tín hiệu ra trên biến đổi z tín hiệu vào.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}$$

- Hàm truyền đạt H(z) là biến đổi z của đáp ứng xung h(n).

2.8. Liên hệ giữa biến đổi z và phương trình sai phân

Biến đổi z hai vế của phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng:

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M}b_r x(n-r)$$

ta thu được:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M}b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k z^{-k}}$$ nên nhớ luôn chuẩn hoá $a_0 = 1$ để dễ vẽ sơ đồ thực hiện.

Các phần tử thực hiện hệ thống trong miền z cũng giống như trong miền thời gian rời rạc n: phần tử cộng, nhân, nhân với hằng số. Phần tử trễ D trong miền n khi sang miền z trở thành phần tử z^{-1}.

Có 3 dạng cấu trúc thông thường của hệ thống: song song, nối tiếp, hồi tiếp. Cách xác đinh hàm truyền đạt hệ thống tổng quát tương ứng như sau:

- Nếu N hệ thống mắc song song với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát là:

$$H(z)=\sum_{i=1}^{N}H_i(z)$$

- Nếu có N hệ thống mắc nối tiếp với nhau thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát là:

$$H(z)=\prod_{i=1}^{N}H_i(z)$$

- Nếu $H_2(z)$ mắc hồi tiếp với $H_1(z)$ thì hàm truyền đạt của hệ thống tổng quát sẽ bằng:

$$H(z)=\frac{H_1(z)}{1-H_1(z).H_2(z)}$$

2.9. Sự ổn định của hệ thống trong miền z

Một hệ thống TTBB nhân quả trong miền z muốn ổn định phải thoả mãn:

Tất cả các điểm cực z_{pk} của hàm truyền đạt H(z) phải nằm bên trong vòng tròn đơn vị tức là:

$$\forall\lvert z_{pk}\rvert<1 .$$

Ta có $H(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$. Khi bậc N của hệ thống, tức là bậc của đa thức đặc trưng D(z) lớn hơn 2 thì ta phải dùng tiêu chuẩn Jury để xét tính ổn định.

Một số phép toán cần nắm vững để làm bài tập trong chương này:

- Các khái niệm về chuỗi, chuỗi hội tụ.
- Các phép toán về số phức.
- Tổng cấp số nhân.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{Nếu } |a|<1$$

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a} \quad \text{Nếu } |a|>1$$

B. BÀI TẬP CƠ BẢN

2.1. Xác định biến đổi z của các tín hiệu hữu hạn sau:

(a) $x_1(n)=\{1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 0 \quad 2\}$

(b) $x_2(n)=\{1 \quad 3 \quad \underset{\uparrow}{5} \quad 7 \quad 0 \quad 2\}$

(c) $x_3(n)=\{0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 0 \quad 2\}$

(d) $x_4(n)=\{2 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 5 \quad 6 \quad 0 \quad 1\}$

(e) $x_5(n)=\{-2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad \underset{\uparrow}{7} \quad 1\}$

Lời giải: Theo định nghĩa ta có:

(a) $X_1(z)=1+3z^{-1}+5z^{-2}+7z^{-3}+2z^{-5}$, ROC: cả mặt phẳng z, trừ $z=0$.

(b) $X_2(z)=z^2+3z+5+7z^{-1}+2z^{-3}$, ROC: cả mặt phẳng z, trừ $z=0$ và $z=\infty$

(c) $X_3(z)=z^{-2}+3z^{-3}+5z^{-4}+7z^{-5}+2z^{-7}$, ROC: cả mặt phẳng z, trừ $z=0$.

(d) $X_4(z)=2z+1+5z^{-1}+6z^{-2}+z^{-4}$, ROC: cả mặt phẳng z, trừ $z=0$ và $z=\infty$

(e) $X_5(z)=-2z^4+z^1+7+z^{-1}$, ROC: cả mặt phẳng z, trừ $z=0$ và $z=\infty$

2.2. Xác định biến đổi z của các tín hiệu hữu hạn sau:

(a) $x_1(n)=\delta(n)$

(b) $x_2(n)=\delta(n-k), \qquad k>0$

(c) $x_3(n)=\delta(n+k), \qquad k>0$

Lời giải: Theo định nghĩa ta có:

(a) $X_1(z)=1$ [nghĩa là, $\delta(n)\overset{z}{\leftrightarrow}1$], ROC: cả mặt phẳng z. (2.1)

(b) $X_2(z) = z^{-k}$ [nghĩa là, $\delta(n-k) \overset{z}{\leftrightarrow} z^{-k}$], $k > 0$, ROC: cả mặt phẳng z, trừ $z = 0$. (2.2)

(c) $X_3(z) = z^{k}$ [nghĩa là, $\delta(n+k) \overset{z}{\leftrightarrow} z^{k}$], $k > 0$, ROC: cả mặt phẳng z, trừ $z = \infty$. (2.3)

Từ ví dụ ta dễ thấy rằng ROC của một tín hiệu có chiều dài hữu hạn là cả mặt phẳng z, ngoại trừ $z = 0$ và hoặc $z = \infty$ vì $z^k\,(k > 0)$ sẽ trở thành vô hạn khi $z = \infty$ và $z^{-k}\,(k > 0)$ sẽ trở nên vô hạn khi $z = 0$.

Theo quan niệm toán học, biến đổi z là một biểu diễn của tín hiệu. Điều này được minh hoạ ở bài tập 2.1. Ở đây ta nhận thấy rằng hệ số z^{-n}, trong biến đổi đã cho, là giá trị của tín hiệu tại thời điểm n. Nói khác đi, số mũ của z chứa đựng thông tin về thời gian mà chúng ta cần để nhận dạng các mẫu của tín hiệu.

Trong nhiều trường hợp, ta có thể biểu diễn tổng của các chuỗi hữu hạn hoặc vô hạn đối với biến đổi z theo một biểu thức dạng gần đúng. Trong các trường hợp ấy biến đổi z được xem như một biểu diễn thay thế rút gọn của tín hiệu.

2.3. Xác định biến đổi z của tín hiệu:

$$x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

Lời giải: Tín hiệu $x(n)$ bao gồm một số vô hạn các mẫu khác 0:

$$x(n) = \left\{1,\ \left(\frac{1}{3}\right),\ \left(\frac{1}{3}\right)^2,\ \left(\frac{1}{3}\right)^3,\ \ldots\ \left(\frac{1}{3}\right)^n,\ \ldots\ldots\right\}$$

Biến đổi z của $x(n)$ là chuỗi công suất vô hạn:

$$X(z) = 1 + \frac{1}{3}z^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 z^{-2} + \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}z^{-1}\right)^n$$

Đây là một chuỗi hình học vô hạn. Ta có thể viết lại:

$$1 + A + A^2 + A^3 + \ldots = \frac{1}{1-A} \text{ nếu } |A| < 1$$

Bởi vậy, đối với $\left|\frac{1}{3}z^{-1}\right| < 1$ hoặc tương đương, với $|z| > \frac{1}{3}$, $X(z)$ hội tụ đến:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} \quad \text{ROC}: |z| > \frac{1}{3}$$

Ta thấy rằng trong trường hợp này, biến đổi z cho ta một biểu diễn thay thế ngắn gọn của tín hiệu $x(n)$.

2.4. Xác định biến đổi z của tín hiệu:

$$x(n) = \alpha^n u(n) = \begin{cases} \alpha^n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

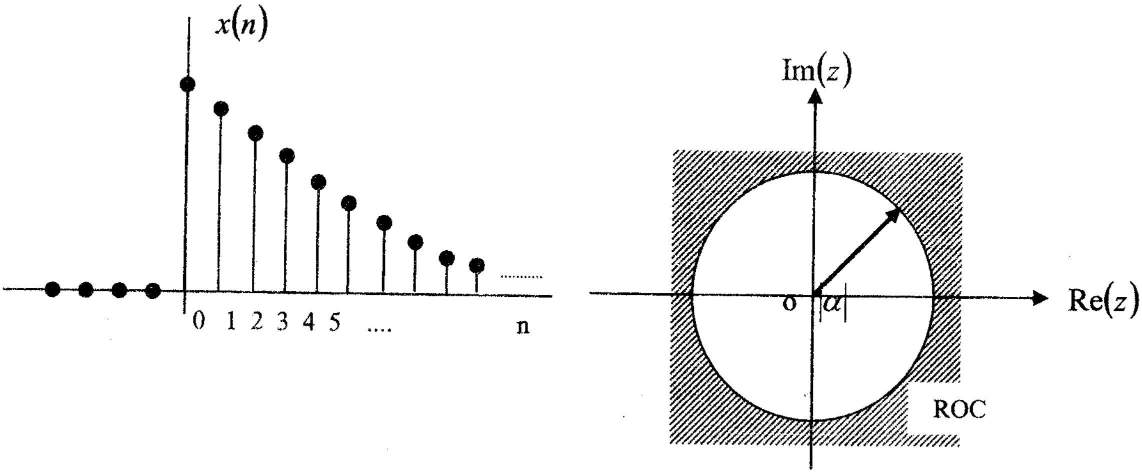
Lời giải: Theo định nghĩa ta có:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha z^{-1}\right)^n \tag{2.4}$$

Nếu $|\alpha z^{-1}|<1$ hoặc tương ứng $|z|>|\alpha|$, thì chuỗi công suất này hội tụ đến $1/\left(1-\alpha z^{-1}\right)$.

Như vậy, ta sẽ có cặp biến đổi z.

$$x(n)=\alpha^n u(n)\overset{z}{\leftrightarrow}X(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad \text{ROC}:|z|>|\alpha| \tag{2.5}$$



(a) (b)

Hình 2.1: Tín hiệu luỹ thừa nhân quả $x(n)=\alpha^n u(n)$ (a)

ROC là miền nằm ngoài đường tròn có bán kính $|\alpha|$. Hình 2.1 là đồ thị của tín hiệu $x(n)$ và ROC tương ứng của nó. Lưu ý rằng, nói chung, α cần không phải là số thực.

Nếu ta thay $\alpha=1$ vào (2.4), ta sẽ có biến đổi z của tín hiệu nhảy bậc đơn vị.

$$x(n)=u(n)\overset{z}{\leftrightarrow}X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}} \qquad \text{ROC}:|z|>1$$

2.5. Tìm biến đổi z của tín hiệu:

$$x(n)=-\alpha^n u(-n-1)=\begin{cases}0 & n\ge 0\\ -\alpha^n & n\le -1\end{cases}$$

Lời giải: Theo định nghĩa ta có:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}\left(-\alpha^n\right)z^{-n}=-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\alpha^{-1}z\right)^m$$

ở đây $m=-n$. Dùng công thức:

$$A+A^2+A^3+....=A\left(1+A+A^2+....\right)=\frac{A}{1-A}$$

Khi $|A|<1$ ta có: $X(z)=-\dfrac{\alpha^{-1}z}{1-\alpha^{-1}z}=\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$

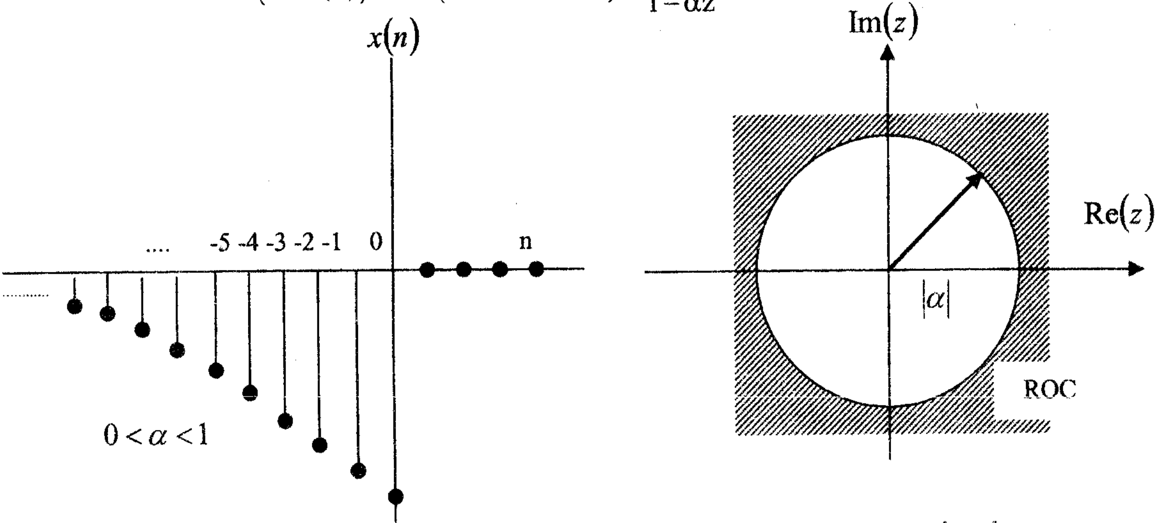
Với $|\alpha^{-1}z| < 1$ hoặc tương ứng $|z| < |\alpha|$. Như vậy:

$$x(n) = -\alpha^n u(-n-1) \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}} \qquad \text{ROC}: |z| < |\alpha| \qquad (2.6)$$

ROC bây giờ là miền trong đường tròn bán kính $|\alpha|$. Điều này được chỉ ra ở hình 2.2.

Các bài tập 2.4 và 2.5 trình bày hai chuỗi rất quan trọng. Chuỗi thứ nhất liên quan đến tính duy nhất của biến đổi z. Từ (2.5) và (2.6) ta nhận thấy rằng tín hiệu nhân quả $\alpha^n u(n)$ và tín hiệu không nhân quả $x(n) = -\alpha^n u(-n-1)$ có dạng biểu diễn gần đúng giống nhau, nghĩa là:

$$ZT\{\alpha^n u(n)\} = ZT\{-\alpha^n u(-n-1)\} = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$



Hình 2.2: Tín hiệu không nhân quả $x(n) = -\alpha^n u(-n-1)$ *(a) và ROC của biến đổi* z *của nó (b)*

Điều này nói lên rằng dạng biểu diễn gần đúng của biến đổi z không chỉ ra được một cách duy nhất tín hiệu trong miền thời gian. Sự không rõ ràng này có thể được giải quyết nếu bổ sung thêm miền hội tụ (ROC) vào biểu thức biểu diễn gần đúng. Tóm lại, một tín hiệu rời rạc theo thời gian $x(n)$ được xác định duy nhất bằng biến đổi z của nó $X(z)$, và miền hội tụ của $X(z)$. Trong tài liệu này từ "biến đổi z" sẽ được dùng cho cả biểu thức biểu diễn gần đúng và ROC tương ứng. Bài tập 2.3 cũng chỉ rõ rằng ROC của một tín hiệu nhân quả là nằm ngoài vòng tròn bán kính r_2 nào đấy. Trong khi đó ROC của tín hiệu không nhân quả lại ở trong đường tròn bán kính r_1.

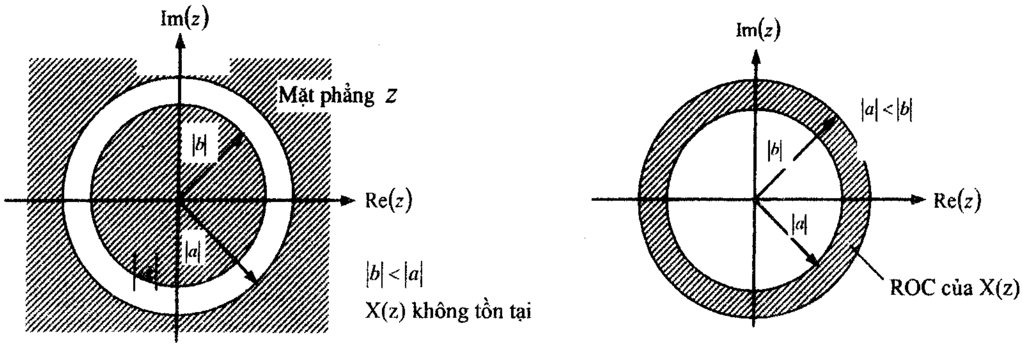
2.6. Tìm biến đổi z của tín hiệu:

$$x(n) = a^n u(n) + b^n u(-n-1)$$

Lời giải: Theo định nghĩa ta có:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n + \sum_{l=0}^{\infty} (b^{-1}z)^l$$

Chuỗi công thức thứ nhất sẽ hội tụ nếu $|az^{-1}| < 1$ hoặc $|z| > |a|$. Chuỗi công thức thứ hai cũng hội tụ nếu $|bz^{-1}| < 1$ hoặc $|z| < |b|$.



Hình 2.3 ROC cho biến đổi z

Để xác định sự hội tụ của $X(z)$, ta xét hai trường hợp khác nhau:

Trường hợp 1: $|b| < |a|$: Trong trường hợp này hai ROC ở trên không trùng nhau như chỉ ở hình 2.3.a. Bởi vậy, ta không thể tìm được các giá trị của z mà đối với chúng cả hai chuỗi công suất đồng thời hội tụ. Rõ ràng trong trường hợp này, $X(z)$ không tồn tại.

Trường hợp 2: $|b| > |a|$: Đối với trường hợp này có một vùng khuyên trên mặt phẳng z, ở đấy cả hai chuỗi công suất đồng thời hội tụ, như chỉ trong hình 2.3.b. Khi đó ta có:

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} - \frac{1}{1 - bz^{-1}} = \frac{b - a}{a + b - z - abz^{-1}}$$

ROC của X(z) là $|a| < |z| < |b|$

2.7. a) Tìm biến đổi z và miền hội tụ của các chuỗi sau đây:

i) $x_1(n) = (-0.7)^n u(n)$

ii) $x_2(n) = (0.2)^n u(n-3)$

iii) $x_3(n) = 0.6^n u(-n-2)$

b) Từ ROC của các chuỗi ở phần a), hãy xác định ROC của các chuỗi sau đây:

i) $y_1(n) = x_1(n) + x_2(n)$

ii) $y_2(n) = x_1(n) + x_3(n)$

iii) $y_3(n) = x_2(n) + x_3(n)$

Lời giải: a) Theo định nghĩa biến đổi z, ta có:

i) $X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-0,7)^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-0,7z^{-1})^n = \frac{1}{1 + 0,7z^{-1}}$, $|z| > 0,7$

ROC của $X_1(z)$ là $R_1 : |z| > 0,7$

ii) $X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (0,2)^n u(n-3) z^{-n} = \sum_{n=3}^{\infty} (0,2z^{-1})^n$

Đặt m = n - 3, ta có: $X_2(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(0,2z^{-1})^{m+3}=(0,2z^{-1})^3\sum_{m=0}^{\infty}(0,2z^{-1})^m$

$$=\frac{(0,2z^{-1})^3}{1-0,2z^{-1}}=\frac{0,2^3z^{-3}}{1-0,2z^{-1}}\quad,\qquad |z|>0,2$$

ROC của $X_2(z)$ là $R_2:|z|>0,2$

iii) $X_3(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}0,6^n u(-n-2)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-2}(0,6z^{-1})^n$

Đặt m= -n - 2, ta có: $X_3(z)=\sum_{m=0}^{\infty}(0,6z^{-1})^{-m-2}=(0,6z^{-1})^{-2}\sum_{m=0}^{\infty}(0,6^{-1}z)^m$

$$=\frac{(0,6z^{-1})^{-2}}{1-0,6^{-1}z}=\frac{0,6^{-2}z^2}{1-0,6^{-1}z}\quad,\qquad |z|<0,6$$

ROC của $X_3(z)$ là $R_3:|z|<0,6$

b) i) Vì ROC của $X_1(z)$ là $R_1:|z|>0,7$ và ROC của $X_2(z)$ là $R_2:|z|>0,2$. Suy ra ROC của $Y_1(z)$ là $R_1\cap R_2:|z|>0,7$

ii) Vì ROC của $X_1(z)$ là $R_1:|z|>0,7$ và ROC của $X_3(z)$ là $R_3:|z|<0,6$. Suy ra ROC của $Y_2(z)$ là $R_1\cap R_3=\varnothing$. Suy ra biến đổi z của $Y_2(z)$ không hội tụ tại bất cứ đâu trên miền z.

iii) Vì ROC của $X_2(z)$ là $R_2:|z|>0,2$ và ROC của $X_3(z)$ là $R_3:|z|<0,6$. Suy ra ROC của $Y_3(z)$ là $R_1\cap R_3:0,2<|z|<0,6$

2.8. Tìm biến đổi z và miền hội tụ của các chuỗi sau đây:

a) $x_1(n)=5\left[(0,6)^n-(0,3)^n\right]u(n)$

b) $x_2(n)=-5(0,3)^n u(n)-5(0,6)^n u(-n-1)$

c) $x_3(n)=5(0,3)^n u(-n-1)-5(0,6)^n u(-n-1)$

Lời giải:

a) $x_1(n)=5\left[(0,6)^n-(0,3)^n\right]u(n)=5(0,6)^n u(n)-5(0,3)^n u(n)$

Ta có:

$$X_1(z)=\frac{5}{1-0,6z^{-1}}-\frac{5}{1-0,3z^{-1}}=\frac{5(1-0,3z^{-1}-1+0,6z^{-1})}{(1-0,6z^{-1})(1-0,3z^{-1})}=\frac{1,5z^{-1}}{(1-0,6z^{-1})(1-0,3z^{-1})},|z|>0,6$$

ROC của $X_1(z)$ là $|z|>0,6$

b) $x_2(n)=-5(0,3)^n u(n)-5(0,6)^n u(-n-1)$

Ta có: $ZT\left[-5(0,3)^n u(n)\right] = \dfrac{-5}{1-0,3z^{-1}}$, $|z| > 0,3$

$ZT\left[-5(0,6)^n u(-n-1)\right] = \dfrac{5}{1-0,6z^{-1}}$, $|z| < 0,6$

Do đó:

$$X_2(z) = \frac{5}{1-0,6z^{-1}} - \frac{5}{1-0,3z^{-1}} = \frac{5\left(1-0,3z^{-1}-1+0,6z^{-1}\right)}{\left(1-0,6z^{-1}\right)\left(1-0,3z^{-1}\right)} = \frac{1,5z^{-1}}{\left(1-0,6z^{-1}\right)\left(1-0,3z^{-1}\right)},$$

với $0,3 < |z| < 0,6$

ROC của $X_2(z)$ là $0,3 < |z| < 0,6$

c) $x_3(n) = 5(0,3)^n u(-n-1) - 5(0,6)^n u(-n-1)$

Ta có: $ZT\left[5(0,3)^n u(-n-1)\right] = \dfrac{-5}{1-0,3z^{-1}}$, $|z| < 0,3$

$ZT\left[-5(0,6)^n u(-n-1)\right] = \dfrac{5}{1-0,6z^{-1}}$, $|z| < 0,6$

Do đó:

$$X_3(z) = \frac{5}{1-0,6z^{-1}} - \frac{5}{1-0,3z^{-1}} = \frac{5\left(1-0,3z^{-1}-1+0,6z^{-1}\right)}{\left(1-0,6z^{-1}\right)\left(1-0,3z^{-1}\right)} = \frac{1,5z^{-1}}{\left(1-0,6z^{-1}\right)\left(1-0,3z^{-1}\right)},$$

với $|z| < 0,3$

ROC của $X_3(z)$ là $|z| < 0,3$

Nhận xét: $X_1(z) = X_2(z) = X_3(z)$, nhưng ROC của chúng khác nhau.

2.9. Tìm biến đổi z và miền hội tụ của các chuỗi sau đây: (với $|\beta| > |\alpha|$)

a) $x_1(n) = \alpha^n u(n) + \beta^n u(n)$

b) $x_2(n) = \alpha^n u(-n-1) + \beta^n u(n)$

c) $x_3(n) = \alpha^n u(n) - \beta^n u(-n-1)$

Lời giải:

a) $x_1(n) = \alpha^n u(n) + \beta^n u(n)$

Ta có: $ZT\left[\alpha^n u(n)\right] = \dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}$, $|z| > |\alpha|$

$ZT\left[\beta^n u(n)\right] = \dfrac{1}{1-\beta z^{-1}}$, $|z| > |\beta|$

Do đó:

$$X_1(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}+\frac{1}{1-\beta z^{-1}}=\frac{1-\beta z^{-1}+1-\alpha z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)\left(1-\beta z^{-1}\right)}=\frac{2-(\alpha+\beta)z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)\left(1-\beta z^{-1}\right)},\ |z|>|\beta|$$

b) $x_2(n)=\alpha^n u(-n-1)+\beta^n u(n)$

Ta có: $ZT\left[\alpha^n u(-n-1)\right]=-\frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\ |z|<|\alpha|$

$$ZT\left[\beta^n u(n)\right]=\frac{1}{1-\beta z^{-1}},\ |z|>|\beta|$$

Do các miền $|z|<|\alpha|$ và $|z|>|\beta|$ không giao nhau nên biến đổi z của $x_2(n)$ không hội tụ (không tồn tại).

c) $x_3(n)=\alpha^n u(n)-\beta^n u(-n-1)$

Ta có: $ZT\left[\alpha^n u(n)\right]=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\ |z|>|\alpha|$

$$ZT\left[\beta^n u(-n-1)\right]=-\frac{1}{1-\beta z^{-1}},\ |z|<|\beta|$$

$$X_3(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}+\frac{1}{1-\beta z^{-1}}=\frac{1-\beta z^{-1}+\left(1-\alpha z^{-1}\right)}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)\left(1-\beta z^{-1}\right)}=\frac{2-(\alpha+\beta)z^{-1}}{\left(1-\alpha z^{-1}\right)\left(1-\beta z^{-1}\right)},\ |\alpha|<|z|<|\beta|$$

2.10. Cho dãy x(n) nhân quả. Chứng minh rằng: $x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$

Lời giải: Vì x(n) là dãy nhân quả (x(n) = 0 khi n < 0) nên:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n).z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}x(n).z^{-n}=x(0)+\frac{x(1)}{z}+\frac{x(2)}{z^2}+\ldots+\frac{x(n)}{z^n}+\ldots$$

Nếu ta tìm giới hạn của X(z) khi z tiến ra vô cùng, thì tất cả các thành phần của chuỗi trên tiến về 0, trừ thành phần đầu tiên, do đó ta có:

$$\lim_{z\to\infty}X(z)=\lim_{z\to\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}x(n).z^{-n}=\lim_{z\to\infty}x(0)+\lim_{z\to\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}x(n).z^{-n}=x(0)$$

2.11. Xác định biến đổi z của các tín hiệu:

a) $x_1(n)=(\cos\omega_0 n)\,u(n)$

b) $x_2(n)=(\sin\omega_0 n)\,u(n)$

Lời giải:

a) Bằng cách dùng đồng nhất thức Euler (Ơ-le), ta có thể biểu diễn $x_1(n)$ dưới dạng:

$$x_1(n)=(\cos\omega_0 n)\,u(n)=\frac{1}{2}e^{j\omega_0 n}u(n)+\frac{1}{2}e^{-j\omega_0 n}u(n)$$

$$X_1(z)=\frac{1}{2}ZT\left\{e^{j\omega_0 n}u(n)\right\}+\frac{1}{2}ZT\left\{e^{-j\omega_0 n}u(n)\right\}$$

Nếu thay $\alpha = e^{\pm j\omega_0}$ $\left(|\alpha| = \left|e^{\pm j\omega_0}\right| = 1\right)$ vào (2.5), ta có:

$$e^{j\omega_0 n}u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} \quad ROC: |z| > 1$$

và $$e^{-j\omega_0 n}u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}} \quad ROC: |z| > 1$$

Vậy $$X_1(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}} \qquad ROC: |z| > 1$$

Sau một vài biến đổi đại số đơn giản, ta có kết quả mong muốn là:

$$(\cos\omega_0 n)u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{1 - z^{-1}\cos\omega_0 n}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}} \qquad ROC: |z| > 1 \qquad (2.7)$$

b) Theo công thức Euler

$$x_2(n) = (\sin\omega_0 n)u(n) = \frac{1}{2j}\left[e^{j\omega_0 n}u(n) - e^{-j\omega_0 n}u(n)\right]$$

Như vậy: $$X_2(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1-e^{j\omega_0}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-j\omega_0}z^{-1}}\right) \quad ROC: |z| > 1$$

Hay: $$(\sin\omega_0 n)u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z^{-1}\sin\omega_0 n}{1 - 2z^{-1}\cos\omega_0 + z^{-2}} \qquad ROC: |z| > 1 \qquad (2.8)$$

2.12. Tìm biến đổi z của các tín hiệu:

a) $x_1(n) = a^n(\cos\omega_0 n)\,u(n)$

b) $x_2(n) = a^n(\sin\omega_0 n)\,u(n)$

Lời giải: Từ (2.5) và (2.7) ta có:

$$a^n(\cos\omega_0 n)u(n) \leftrightarrow \frac{1 - az^{-1}\cos\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}} \qquad |z| > |a| \qquad (2.9)$$

Tương tự, theo (2.5) và (2.8) ta có

$$a^n(\sin\omega_0 n)u(n) \leftrightarrow \frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1 - 2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}} \qquad |z| > |a| \qquad (2.10)$$

2.13. (a) Tìm biến đổi z của tín hiệu:

$$x(n) = a^{|n|} \qquad |a| < 1$$

(b) Tìm biến đổi z của tín hiệu hằng số x(n) = 1, $-\infty < n < +\infty$

Lời giải:

(a) $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|}z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = X_1(z) + X_2(z)$$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}z^{-n} = \sum_{m=0}^{+\infty} a^m z^m - 1 = \sum_{m=0}^{+\infty}(az)^m - 1$$

$$=\frac{1}{1-az}-1=\frac{az}{1-az},\quad |z|<1/|a|$$

$$X_2(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}a^n z^{-n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(az^{-1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1-az^{-1}},\quad |z|>|a|$$

Với điều kiện đầu bài đã cho $|a|<1$, ta có: $X(z)=X_1(z)+X_2(z)=\frac{az}{1-az}+\frac{1}{1-az^{-1}}$,

ROC: $|a|<|z|<\frac{1}{|a|}$

(b) x(n) = 1, $-\infty<n<+\infty$, áp dụng kết quả của phần (a) với a = 1, ta thấy rằng biến đổi z này không tồn tại vì miền hội tụ của nó là rỗng.

2.14. Xác định biến đổi z của tín hiệu

$$x(n)=3\delta(n+2)+\delta(n)+5\delta(n-3)-2\delta(n-4)$$

Lời giải: Theo tính chất tuyến tính ta có:

$$X(z)=3z\{\delta(n+2)\}+z\{\delta(n)\}+5z\{\delta(n-3)\}-2z\{\delta(n-4)\}$$

Do đó: $X(z)=3z^2+1+5z^{-3}-2z^{-4}$

ROC là cả mặt phẳng z, trừ $z=0$ và $z=\infty$.

Có thể đạt được kết quả tương tự khi dùng định nghĩa của biến đổi z và thực tế là:

$$x(n)=\{3\quad 0\quad \underset{\uparrow}{1}\quad 0\quad 0\quad 5\quad -2\}$$

2.15. Tìm biến đổi z của tín hiệu

$$x(n)=\left[2(3^n)-3(5^n)\right]u(n)$$

Lời giải: Nếu đặt các tín hiệu:

$$x_1(n)=3^n u(n)$$

và $\quad x_2(n)=5^n u(n)$

Khi đó có thể viết lại $x(n)$ dưới dạng:

$$x(n)=2x_1(n)-3x_2(n)$$

Theo tính chất tuyến tính của biến đổi z ta có:

$$X(z)=2X_1(z)-3X_2(z)$$

Mặt khác, từ (2.5) ta có:

$$\alpha^n u(n)\overset{z}{\leftrightarrow}\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}\qquad \text{ROC}:|z|>|\alpha|$$

Thay $\alpha=3$ và $\alpha=5$ vào biểu thức trên, ta được:

$$x_1(n) = 3^n u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X_1(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}} \qquad \text{ROC}: |z| > 3$$

$$x_2(n) = 5^n u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X_2(z) = \frac{1}{1-5z^{-1}} \qquad \text{ROC}: |z| > 5$$

Phần ROC chung của $X_1(z)$ và $X_2(z)$ là $|z| > 5$. Như vậy biến đổi z tổng $X(z)$ sẽ là:

$$X(z) = X_1(z) + X_2(z) = \frac{2}{1-3z^{-1}} - \frac{3}{1-5z^{-1}} \qquad \text{ROC}: |z| > 5$$

2.16. Cho x(n) như bài tập 2.14, áp dụng tính chất dịch theo thời gian để tìm biến đổi z của tín hiệu $x_1(n) = x(n+3)$, $x_2(n) = x(n-2)$

Lời giải: Áp dụng tính chất dịch theo thời gian của biến đổi z ta có:

$$X_1(z) = z^3 X(z) = 3z^5 + z^3 + 5 - 2z^{-1}$$

$$X_2(z) = z^{-2} X(z) = 3 + z^{-2} + 5z^{-5} - 2z^{-6}$$

Chú ý rằng do việc nhân với z^{-2} nên ROC của $X_2(z)$ chứa điểm $z = \infty$, trong khi đó điểm này lại không nằm trong ROC của $X(z)$.

Ví dụ trên làm cho ta hiểu hơn ý nghĩa của tính chất dịch. Quả vậy, nếu ta nhớ lại rằng hệ số z^{-n} là giá trị mẫu tại thời điểm n, sẽ thấy ngay rằng việc trễ một tín hiệu đi $k(k>0)$ mẫu [nghĩa là $x(n) \to x(n-k)$] là tương ứng với việc nhân tất cả các số hạng của biến đổi z với z^{-k}. Hệ số z^{-n} trở thành hệ số $z^{-(n+k)}$.

2.17. Xác định biến đổi z của tín hiệu:

$$x(n) = \text{rect}_N(n) \tag{2.11}$$

Lời giải: $x(n) = \text{rect}_N(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} 1.z^{-n} = 1 + z^{-1} + \ldots + z^{-(N-1)} = \begin{cases} N & z = 1 \\ \dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} & z \ne 1 \end{cases} \tag{2.12}$$

vì $x(n)$ là hữu hạn, nên ROC của nó là cả mặt phẳng z, trừ $z = 0$.

Ta hãy thực hiện biến đổi này bằng cách dùng tính chất tuyến tính và dịch. Chú ý rằng $x(n)$ có thể được biểu diễn theo các số hạng của hai tín hiệu nhảy bậc đơn vị:

$$x(n) = u(n) - u(n-N)$$

Do đó:

$$X(z) = z\{u(n)\} - z\{u(n-N)\} = (1-z^{-N})z\{u(n)\} \qquad (2.13).$$

Mà: $ZT\{u(n)\} = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$ $\quad$ ROC: $|z| > 1$, kết hợp với (2.13) suy ra (2.12)

2.18. Tính tích chập x(n) của các tín hiệu:

$$x_1(n) = \delta(n) - 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

$$x_2(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 4 \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

Lời giải:

$$X_1(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$X_2(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}$$

$$X(z) = X_1(z)X_2(z) = 1 - z^{-1} - z^{-5} + z^{-6}$$

Suy ra: $x(n) = \delta(n) - \delta(n-1) - \delta(n-5) + \delta(n-6)$

2.19. Tính tích chập x(n) của các tín hiệu:

$$x_1(n) = \{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5\}$$
$$x_2(n) = \{5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1\}$$

Lời giải:

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + 4z^{-3} + 5z^{-4}$$
$$X_2(z) = 5 + 4z^{-1} + 3z^{-2} + 2z^{-3} + z^{-4}$$

$X(z) = X_1(z)X_2(z) = 5 + 14z^{-1} + 26z^{-2} + 40z^{-3} + 55z^{-4} + 40z^{-5} + 26z^{-6} + 14z^{-7} + 5z^{-8}$. Suy ra: $x(n) = \{5 \quad 14 \quad 26 \quad 40 \quad 55 \quad 40 \quad 26 \quad 14 \quad 5\}$

2.20. Tìm biến đổi z và miền hội tụ của tín hiệu:

$$x(n) = \begin{cases} e^{j\omega n} & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}, \quad \omega\text{: tham số}$$

Lời giải:

$$x(n) = \begin{cases} e^{j\omega n} & n \ge 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}, \quad \omega\text{: tham số}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{j\omega n} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(e^{j\omega} z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - e^{j\omega} z^{-1}}, \quad \text{ROC: } |z| > |e^{j\omega}|$$

2.21. Xác định biến đổi z một phía của tín hiệu hằng số x(n) = 1, $-\infty < n < +\infty$

Lời giải:

$$X^1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad |z| > 1$$

2.22. Tính tích chập x(n) của các tín hiệu:

$$x_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n), \qquad x_2(n) = \left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$$

Lời giải:

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_1(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_2(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{5}$$

$$X(z) = X_1(z).X_2(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)}, \qquad |z| > \frac{1}{2}$$

2.23. Tính tích chập x(n) của các tín hiệu sau bằng cách sử dụng biến đổi z:

(a) $x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n-1)$, $x_2(n) = \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$

(b) $x_1(n) = u(n)$, $x_2(n) = \delta(n) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

Lời giải:

(a) $x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n-1)$

$$X_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}z^{-1}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} - 1 = \frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}, \qquad |z| > \frac{1}{4}$$

$$x_2(n) = \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

$$X_2(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

$$X(z) = X_1(z).X_2(z)$$

$$= \frac{-\frac{4}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{3}}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Suy ra: $x(n) = \left[-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$

(b) $x_1(n) = u(n)$

$$X_1(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

$$x_2(n)=\delta(n)+\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$X_2(z)=1+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}, \quad |z|>\frac{1}{3}$$

$$X(z)=X_1(z).X_2(z)$$

$$=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)}.\left(1+\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\right)=\frac{2-\frac{1}{3}z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}=\frac{\frac{5}{2}}{1-z^{-1}}-\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Suy ra: $x(n)=\left[\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$

2.24. Tính tích chập x(n) của các tín hiệu sau bằng cách sử dụng biến đổi z:

(a) $x_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $x_2(n)=\cos(\pi n)u(n)$

(b) $x_1(n)=\frac{1}{2}nu(n)$, $x_2(n)=2^n u(n-1)$

Lời giải:

(a) $x_1(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$\Rightarrow X_1(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$x_2(n)=\cos(\pi n)u(n)$

$$\Rightarrow X_2(z)=\frac{1+z^{-1}}{1+2z^{-1}+z^{-2}}$$

$$X(z)=X_1(z).X_2(z)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}.\frac{1+z^{-1}}{1+2z^{-1}+z^{-2}}=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)}$$

$$=\frac{A\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1+2z^{-1}+z^{-2}\right)}+\frac{B}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Giải ra ta được: A = 2/3, B = 1/3, do đó:

$$x(n)=\left[\frac{2}{3}\cos(\pi n)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$$

(b) $x_1(n)=\frac{1}{2}nu(n)$

$$\Rightarrow X_1(z)=-\frac{1}{2}z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right)=-\frac{1}{2}z\frac{(-z^{-2})}{(1-z^{-1})^2}=\frac{1}{2}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2},\qquad |z|>1$$

$$x_2(n)=2^n u(n-1)$$

$$\Rightarrow X_2(z)=\frac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$X(z)=X_1(z).X_2(z)=\frac{z^{-2}}{(1-z^{-1})^2(1-2z^{-1})}=\frac{-1}{1-z^{-1}}-\frac{-z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}+\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$x(n)=\left[(n-1)+2^n\right]u(n)$$

2.25. Biến đổi z của một tín hiệu thực x(n) gồm 1 cặp điểm không liên hợp phức và một cặp điểm cực liên hợp phức. Điều gì xảy ra đối với các cặp này nếu ta nhân x(n) với $e^{j\omega_0 n}$?

Lời giải:

$$\Rightarrow Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{j\omega_0 n}z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)\left(e^{-j\omega_0}z\right)^{-n}$$
$$=X\left(e^{-j\omega_0}z\right)$$

Do đó các điểm cực và các điểm không sẽ quay pha đi một góc ω_0.

2.26. Sử dụng phương pháp khai triển thành chuỗi luỹ thừa, xác định biến đổi z ngược của dãy sau:

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$$

nếu **(a)** x(n) là dãy nhân quả và **(b)** x(n) là dãy không nhân quả

Lời giải:

(a) Chia tử số $1+2z^{-1}$ cho mẫu số $1-2z^{-1}+z^{-2}$ ta được $X(z)=1+4z^{-1}+7z^{-2}+10z^{-3}+...$

Từ đó suy ra: $x(n)=\{1,4,7,10,...,3n+1,...\}$

(b) Chia tử số $2z^{-1}+1$ cho mẫu số $z^{-2}-2z^{-1}+1$ ta được $X(z)=2z+5z^2+8z^3+...$

Từ đó suy ra: $x(n)=\left\{...,-(3n+1),...,11,8,5,2,\underset{\uparrow}{0}\right\}$

2.27. Tìm dãy nhân quả x(n) có biến đổi z như sau:

$$X(z)=\frac{2}{(1-2z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

Lời giải:

$$X(z)=\frac{2}{\left(1-2z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)^2}=\frac{A}{\left(1-2z^{-1}\right)}+\frac{B}{\left(1-z^{-1}\right)}+\frac{Cz^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

Giải ra ta thu được A = 8, B = -6, C = -2

$$X(z)=\frac{8}{\left(1-2z^{-1}\right)}+\frac{-6}{\left(1-z^{-1}\right)}+\frac{-2z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}$$

Suy ra: $x(n)=\left[8(2)^n-6-2n\right]u(n)$

2.28. Tìm X(z), miền hội tụ, các điểm cực và các điểm không của tín hiệu sau:

$$x(n)=2^n\,\mathrm{rect}_3(n)$$

Lời giải:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=0}^{2}2^nz^{-n}=1+2z^{-1}+4z^{-2}$$

$$=\frac{z^2+2z+4}{z^2}=\frac{(z+2)^2}{z^2}$$

ROC: cả mặt phẳng z, trừ z = 0

Các điểm cực $z_{p1}=z_{p2}=0$; các điểm không $z_{01}=z_{02}=-2$

2.29. Cho $X(z)=\dfrac{z^{2008}}{z-1}$

Hãy tìm x(n) dùng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản

Lời giải:

$$X(z)=\frac{z^{2008}}{z-1}$$

$$\frac{X(z)}{z^{2007}}=\frac{z}{z-1}$$

$$\mathrm{IZT}\left[\frac{z}{z-1}\right]=u(n) \qquad \text{ROC: } |z|>1$$

$$\Rightarrow x(n)=u(n+2007)$$

2.30. Hãy tìm biến đổi z ngược ứng với dãy nhân quả của X(z) như sau:

$$X(z)=\frac{6}{z^5(2z-1)} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

Lời giải:

$$X(z)=\frac{6}{z^5(2z-1)}$$

$$X(z)=3z^{-6}.\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

$$IZT\left[\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n) \qquad\qquad ROC: |z|>\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x(n)=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}u(n-6)$$

2.31. Dùng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản, hãy tìm biến đổi z ngược nhân quả với X(z) như sau:

$$X(z)=\frac{4z^2+8z}{4z^2-5z+1}$$

Lời giải:

$$X(z)=\frac{4z^2+8z}{4z^2-5z+1}=\frac{4z(z+2)}{4(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{(z+2)}{(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A}{(z-1)}+\frac{B}{\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$A=(z-1)\frac{X(z)}{z}\Big|_{z=1}=(z-1)\frac{z+2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\Big|_{z=1}=\frac{z+2}{\left(z-\frac{1}{4}\right)}\Big|_{z=1}=4$$

$$B=\left(z-\frac{1}{4}\right)\frac{X(z)}{z}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}}=\left(z-\frac{1}{4}\right)\frac{z+2}{(z-1)\left(z-\frac{1}{4}\right)}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}}=\frac{z+2}{(z-1)}\Bigg|_{z=\frac{1}{4}}=-3$$

$$\Rightarrow\frac{X(z)}{z}=\frac{4}{(z-1)}+\frac{-3}{\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

$$X(z)=\frac{4z}{(z-1)}+\frac{-3z}{\left(z-\frac{1}{4}\right)}$$

Suy ra: $x(n)=\left[4-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]u(n) \qquad\qquad |z|>1$

Dãy x(n) = 0 với n < 0 do đó x(n) là dãy nhân quả.

2.32. Cho biến đổi z: $X(z)=\dfrac{2z}{(z-1)^2(z-2)}$, tìm tín hiệu nhân quả x(n)?

Lời giải:

$$X(z)=\frac{2z}{(z-1)^2(z-2)}$$

$$X(z)=\frac{A}{(z-2)}+\frac{B}{(z-1)}+\frac{Cz}{(z-1)^2}$$

Giải ra ta được: A = 4, B = C = -2

$$X(z)=\frac{4}{(z-2)}+\frac{-2}{(z-1)}+\frac{-2z}{(z-1)^2} \qquad |z|>2$$

Suy ra: $x(n)=\left[4(2)^{n-1}-2\right]u(n-1)-2nu(n)$

$$x(n)=2\left[2^n-1-n\right]u(n-1)$$

2.33. Cho biến đổi z:

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}$$

Hãy tìm tín hiệu nhân quả x(n) của biến đổi z trên.

Lời giải:

$$X(z)=\frac{1-2z^{-1}}{1+3z^{-1}+2z^{-2}}=\frac{A}{\left(1+z^{-1}\right)}+\frac{B}{\left(1+2z^{-1}\right)}$$

Giải ra ta được: A = - 3, B = 4

$$X(z)=\frac{-3}{\left(1+z^{-1}\right)}+\frac{4}{\left(1+2z^{-1}\right)}$$

Suy ra: $x(n)=\left[-3(-1)^n+4(-2)^n\right]u(n)$

2.34. Cho biến đổi z:

$$X(z)=\frac{2-1.5z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

Hãy tìm tín hiệu nhân quả x(n) của biến đổi z trên.

Lời giải:

$$X(z)=\frac{2-1.5z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{1}{1-z^{-1}}$$

Suy ra: $x(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\right]u(n)$

2.35. Cho biến đổi z:

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+4z^{-1}+4z^{-2}}$$

Hãy tìm tín hiệu nhân quả x(n) của biến đổi z trên.

Lời giải:

$$X(z)=\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+4z^{-1}+4z^{-2}}=1-\frac{2z^{-1}+3z^{-2}}{\left(1+2z^{-1}\right)^2}=1-\frac{2z^{-1}}{\left(1+2z^{-1}\right)}+\frac{z^{-2}}{\left(1+2z^{-1}\right)^2}$$

Suy ra: $x(n)=\delta(n)-2(-2)^{n-1}u(n-1)+(n-1)(-2)^{n-1}u(n-1)$

$$=\delta(n)+(n-3)(-2)^{n-1}u(n-1)$$

2.36. Cho biến đổi z:

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Hãy tìm tín hiệu nhân quả x(n) của biến đổi z trên.

Lời giải:

$$X(z)=\frac{2-\frac{1}{3}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{2}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}-\frac{1}{3}\frac{z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad |z|>\frac{1}{2}$$

Suy ra: $x(n)=2\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)$

2.37. Cho biến đổi z:

$$X(z)=\frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}$$

Hãy tìm tín hiệu nhân quả x(n) của biến đổi z trên.

Lời giải:

$$X(z)=\frac{1-az^{-1}}{z^{-1}-a}=-\frac{1}{a}\left(\frac{1-az^{-1}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}\right)=-\frac{1}{a}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}-\frac{az^{-1}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}\right]$$

$$=-\frac{1}{a}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}-\frac{az^{-1}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}\right]=-\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{1}{a}z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{a}z^{-1}},\qquad |z|>\left|\frac{1}{a}\right|$$

Suy ra: $x(n)=-\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{a}\right)^{n-1}u(n-1)$

$$= -\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} u(n) + \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} u(n-1)$$

2.38. Tính tích chập x(n) của các tín hiệu sau bằng cách sử dụng biến đổi z:

$$x_1(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} & n < 0 \end{cases}$$

$$x_2(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Lời giải:

$$X_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} z^{-n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^n - 1$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}z} - 1 = \frac{\frac{5}{6}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z\right)}, \qquad \frac{1}{3} < |z| < 2$$

$$X_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}, \qquad \frac{1}{2} < |z|$$

$$X(z) = X_1(z) \times X_2(z)$$

$$= \frac{\frac{5}{6}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z\right)} \times \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{-2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{-4}{3}}{1-2z^{-1}}, \qquad \frac{1}{2} < |z| < 2$$

Suy ra: $x(n) = \begin{cases} -2\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ \frac{4}{3}(2)^n, & n < 0 \end{cases}$

2.39. Cho biến đổi z:

$$X(z) = \frac{2z^{-1}}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

Hãy tìm biến đổi z ngược bằng phương pháp khai triển thành chuỗi luỹ thừa.

Lời giải:

$$X(z) = \frac{2z^{-1}}{1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

Chia tử số $\left(2z^{-1}\right)$ cho mẫu số $\left(1 - \sqrt{2}z^{-1} + z^{-2}\right)$ ta được:

$$X(z) = 2z^{-1} + 2\sqrt{2}z^{-2} + 2z^{-3} - 2z^{-5} - 2\sqrt{2}z^{-6} + \ldots$$

Suy ra: $x(n) = \left\{0, 2, 2\sqrt{2}, 2, 0, -2, -2\sqrt{2}, \ldots\right\}$

2.40. Cho biến đổi z:

$$X(z) = \frac{z^{-3} + z^{-5}}{1 - z^{-1}}$$

Hãy tìm tín hiệu nhân quả x(n) của biến đổi z trên.

Lời giải:

$$X(z) = \frac{z^{-3} + z^{-5}}{1 - z^{-1}} = \frac{z^{-3}}{1 - z^{-1}} + \frac{z^{-5}}{1 - z^{-1}}, \qquad |z| > 1$$

Suy ra: $x(n) = u(n-3) + u(n-5)$

2.41. Cho biến đổi z:

$$X(z) = \frac{4z^{-1}}{\left(1 - 2z^{-1}\right)\left(3 - z^{-1}\right)}$$

Hãy tìm tất cả các tín hiệu x(n) có biến đổi z như trên.

Lời giải:

$$X(z) = \frac{4z^{-1}}{\left(1 - 2z^{-1}\right)\left(3 - z^{-1}\right)} = \frac{4z^{-1}}{3\left(1 - 2z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{3}z^{-1}\right)} = \frac{A}{1 - 2z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Giải ra ta được A = 4/5; B = -4/5

$$X(z) = \frac{\frac{4}{5}}{1 - 2z^{-1}} + \frac{-\frac{4}{5}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

Biện luận:

Nếu $|z| > 2$, thì $x(n) = \frac{4}{5}\left[2^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right]u(n)$

Nếu $\frac{1}{3} < |z| < 2$, thì $x(n) = \frac{4}{5}\left[-2^n u(-n-1) - \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\right]$

Nếu $|z| < \frac{1}{3}$, thì $x(n) = \frac{4}{5}\left[-2^n u(-n-1) + \left(\frac{1}{3}\right)^n u(-n-1)\right]$

$$= \frac{4}{5}\left[-2^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right] u(-n-1)$$

2.42. Cho biến đổi z: $X(z) = \dfrac{1-z^{-1}}{1-z^{-1}+0{,}5z^{-2}}$

Hãy tìm biến đổi z ngược x(n) bằng phương pháp khai triển thành phân thức tối giản.

Lời giải: Để khử lũy thừa âm của z trong biểu thức X(z), ta nhân cả tử và mẫu với z^2 và có:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{z^2 - z + 0{,}5}$$

Các cực của $X(z)$ là liên hợp phức:

$$p_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \text{ và } p_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$$

Vì $p_1 \neq p_2$, ta sẽ khai triển X(z) dưới dạng:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z+1}{(z-p_1)(z-p_2)} = \frac{A_1}{z-p_1} + \frac{A_2}{z-p_2}$$

$$A_1 = \left.\frac{(z-p_1)X(z)}{z}\right|_{z=p_1} = \left.\frac{z+1}{z-p_2}\right|_{z=p_1} = \frac{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2}$$

$$A_2 = \left.\frac{(z-p_2)X(z)}{z}\right|_{z=p_2} = \left.\frac{z+1}{z-p_1}\right|_{z=p_2} = \frac{\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-j\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + j\frac{3}{2}$$

Giải ra ta được: $A_1 = A_2^* = \frac{1}{2} - j\frac{3}{2}$.

$$A_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{-j71{,}565}$$

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4}$$

Suy ra: $x(n) = \sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(\frac{\pi n}{4} - 71{,}565^0\right) u(n)$

2.43. Hãy tìm đáp ứng xung và đáp ứng ra đối với dãy nhảy đơn vị của các hệ thống nhân quả sau. Xác định các mô hình cực-không và xác định hệ thống có ổn định không?

a) $H(z) = \dfrac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$

b) $y(n) = 0,6y(n-1) - 0,08y(n-2) + 2x(n)$

c) $y(n) = 0,7y(n-1) - 0,1y(n-2) + x(n) - \frac{1}{2}x(n-2)$

Lời giải:

a) $H(z) = \dfrac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$

$\Rightarrow h(n) = n^2u(n)$

Hệ thống này có 3 điểm cực trùng nhau nằm trên vòng tròn đơn vị, suy ra hệ thống là không ổn định.

Với dãy nhảy đơn vị ở lối vào: $x(n) = u(n) \Rightarrow X(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$

Suy ra: $Y(z) = X(z)H(z)$

$$Y(z) = \frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^4} + \frac{1}{2}\frac{z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3} + \frac{1}{6}\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$$

Đáp ứng ra:

$$y(n) = \left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right)u(n)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)u(n)$$

b) $y(n) = 0,6y(n-1) - 0,08y(n-2) + 2x(n)$

$$Y(z) = \frac{2}{1-0,6z^{-1}+0,08z^{-2}}X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{2}{1-0,6z^{-1}+0,08z^{-2}}$$

$$= \frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)}$$

Hệ thống có các điểm không tại $z=0$ và các điểm cực tại $z_{p1} = \frac{1}{5}; z_{p2} = \frac{2}{5}$. Xét thấy các điểm cực của hệ thống đều nằm trong vòng tròn đơn vị nên hệ thống là ổn định.

$$H(z) = \frac{-2}{1-\frac{1}{5}z^{-1}} + \frac{4}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow h(n)=\left[-2\left(\frac{1}{5}\right)^{n}+4\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]u(n)$$

Mà $x(n)=u(n)\Rightarrow X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$

Suy ra: $Y(z)=X(z)H(z)$

$$Y(z)=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1-\frac{2}{5}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{\frac{25}{6}}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}+\frac{-\frac{8}{3}}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}$$

Đáp ứng ra:

$$y(n)=\left[\frac{25}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}-\frac{8}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]u(n)$$

c) $y(n)=0,7y(n-1)-0,1y(n-2)+x(n)-\dfrac{1}{2}x(n-2)$

$$Y(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-2}}{1-0,7z^{-1}+0,1z^{-2}}X(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-2}}{1-0,7z^{-1}+0,1z^{-2}}=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

Hệ thống có các điểm không tại $z_{01}=0; z_{02}=2$ và các điểm cực tại $z_{p1}=\dfrac{1}{5}; z_{p2}=\dfrac{1}{2}$. Xét thấy các điểm cực của hệ thống đều nằm trong vòng tròn đơn vị nên hệ thống là ổn định.

$$H(z)=1+\left(\frac{-\frac{5}{6}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{23}{15}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}\right)z^{-1}$$

$$\Rightarrow h(n)=\delta(n)-\frac{5}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u(n-1)+\frac{23}{15}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}u(n-1)$$

Mà $x(n)=u(n)\Rightarrow X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$

Suy ra: $Y(z)=X(z)H(z)$

$$Y(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-2}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}=\frac{\frac{5}{4}}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{5}{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-\frac{23}{12}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}$$

Đáp ứng ra:

$$y(n)=\left[\frac{5}{4}+\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{23}{12}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]u(n)$$

2.44. Tìm biến đổi z một phía của các tín hiệu sau:

a) $x_1(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},2,4,5,7,0,3\right\}$

b) $x_2(n)=\left\{1,2,\underset{\uparrow}{4},5,7,0,3\right\}$

c) $x_3(n)=\left\{0,0,1,2,4,5,7,0,3\right\}$

d) $x_4(n)=\left\{3,2,\underset{\uparrow}{4},5,7,0,3\right\}$

Lời giải: Từ định nghĩa của biến đổi z một phía ta có:

a) $x_1(n)=\left\{\underset{\uparrow}{1},2,4,5,7,0,3\right\}\xleftrightarrow{z^1}X_1^1(z)=1+2z^{-1}+4z^{-2}+5z^{-3}+7z^{-4}+3z^{-6}$

b) $x_2(n)=\left\{1,2,\underset{\uparrow}{4},5,7,0,3\right\}\xleftrightarrow{z^1}X_2^1(z)=4+5z^{-1}+7z^{-2}+3z^{-4}$

c) $x_3(n)=\left\{0,0,1,2,4,5,7,0,3\right\}\xleftrightarrow{z^1}X_3^1(z)=z^{-2}+2z^{-3}+4z^{-4}+5z^{-5}+7z^{-6}+3z^{-8}$

d) $x_4(n)=\left\{3,2,\underset{\uparrow}{4},5,7,0,3\right\}\xleftrightarrow{z^1}X_4^1(z)=4+5z^{-1}+7z^{-2}+3z^{-4}$

Chú ý: đối với một tín hiệu không nhân quả, biến đổi z một phía không cho kết quả duy nhất. Ta thấy $X_2^1(z)=X_4^1(z)$ *nhưng* $x_2(n)\neq x_4(n)$.

2.45. Tìm biến đổi z một phía của các tín hiệu sau:

a) $x_1(n)=\delta(n)$

b) $x_2(n)=\delta(n-k)$

c) $x_3(n)=\delta(n+k)$

Lời giải: Từ định nghĩa của biến đổi z một phía ta có:

a) $x_1(n)=\delta(n)\xleftrightarrow{z^1}X_1^1(z)=1$

b) $x_2(n)=\delta(n-k)\qquad k>0\quad\xleftrightarrow{z^1}X_2^1(z)=z^{-k}$

c) $x_3(n) = \delta(n+k)$ $\quad k > 0 \quad \xleftrightarrow{z^1} X_3^1(z) = 0$

Chú ý: đối với các tín hiệu phản nhân quả, biến đổi z một phía $X^1(z)$ luôn bằng 0.

2.46. Xác định biến đổi z một phía của tín hiệu sau: $x(n) = a^n u(n)$

Lời giải: Từ định nghĩa của biến đổi z một phía ta có:

$$X^1(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad \text{ROC: } |z| > |a|$$

2.47. Xác định biến đổi z một phía của tín hiệu sau:

a) $x_1(n) = x(n-3), x(n) = a^n$

b) $x_2(n) = x(n+3)$

Lời giải:

Áp dụng tính chất dịch đối với k = 3. Ta có:

a) $$ZT^1\{x(n-3)\} = z^{-3}\left[X^1(z) + x(-1)z + x(-2)z^2 + x(-3)z^3\right]$$
$$= z^{-3}X^1(z) + x(-1)z^{-2} + x(-2)z^{-1} + x(-3)$$

Do $x(-1) = a^{-1}, x(-2) = a^{-2}, x(-3) = a^{-3}$, thay vào biểu thức trên ta có:

$$X_1^1(z) = \frac{z^{-3}}{1-az^{-1}} + a^{-1}z^{-2} + a^{-2}z^{-1} + a^{-3}$$

b) $$ZT^1\{x(n+3)\} = z^3\left[X^1(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2}\right]$$
$$= z^3X^1(z) - x(0)z^3 - x(1)z^2 - x(2)z$$

Do $x(0) = 1, x(1) = a, x(2) = a^2$, thay vào biểu thức trên ta có:

$$X_2^1(z) = \frac{z^3}{1-az^{-1}} - z^3 - az^2 - a^2z$$

2.48. a) Tìm mô hình cực-không cho tín hiệu sau:

$$x_1(n) = (r^n \sin\omega_0 n)u(n) \qquad 0 < r < 1$$

b) Tìm biến đổi z, $X_2(z)$ tương ứng với mô hình cực – không trong phần a)

c) So sánh $X_1(z)$ và $X_2(z)$ xem chúng có giống nhau không? Nếu không giống nhau, hãy chỉ ra cách để tìm được $X_1(z)$ từ mô hình cực – không.

Lời giải:

a) $x_1(n) = (r^n \sin\omega_0 n)u(n) \qquad 0 < r < 1$

$$\Rightarrow X_1(z) = \frac{r\sin\omega_0 z^{-1}}{1 - 2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2z^{-2}}$$

Điểm không ở z = 0 và các điểm cực ở $z = e^{\pm j\omega_0} = r(\cos\omega_0 \pm j\sin\omega_0)$

b) Vì $X_2(z)$ có cùng mô hình cực không với $X_1(z)$, nên ta suy ra:

$$X_2(z)=\frac{z}{\left(1-re^{j\omega_0}z^{-1}\right)\left(1-re^{-j\omega_0}z^{-1}\right)}=\frac{z}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1}+r^2z^{-2}}$$

c) $X_1(z)$ khác $X_2(z)$ bởi một hệ số, có thể xác định hệ số này bằng cách cho giá trị của $X_1(z)$ tại $z = 1$.

2.49. Xác định tín hiệu nhân quả x(n) có biến đổi z như sau:

$$X(z)=\frac{1}{1+1,5z^{-1}-0,5z^{-2}}$$

Lời giải:

$$X(z)=\frac{1}{1+1,5z^{-1}-0,5z^{-2}}$$

Khai triển biểu thức thành dạng:

$$X(z)=\frac{0,136}{1-0,28z^{-1}}+\frac{0,864}{1+1,78z^{-1}}$$

Suy ra: $x(n)=\left[0,136(0,28)^n+0,864(-1,78)^n\right]u(n)$

2.50. Cho biến đổi z sau:

$$X(z)=\frac{1}{1-1,5z^{-1}+0,5z^{-2}}$$

Xác định tất cả các tín hiệu x(n) có thể là biến đổi z ngược của X(z)

Lời giải:

$$X(z)=\frac{1}{1-1,5z^{-1}+0,5z^{-2}}=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-0,5z^{-1}}$$

Biện luận:

Đối với $|z|<0,5, x(n)=\left[(0,5)^n-2\right]u(-n-1)$

Đối với $0,5<|z|<1, x(n)=-(0,5)^n u(n)-2u(-n-1)$

Đối với $|z|>1, x(n)=\left[2-(0,5)^n\right]u(n)$

2.51. Cho biến đổi z sau:

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-0,4z^{-1}\right)^2}$$

Xác định tất cả các tín hiệu x(n) có thể là biến đổi z ngược của X(z)

Lời giải:

$$X(z)=\frac{1}{\left(1-0,4z^{-1}\right)^2}=\left[\frac{0,4z^{-1}}{\left(1-0,4z^{-1}\right)^2}\right]2,5z$$

Biện luận:

Đối với $|z| > 0,4, x(n) = 2(n+1)(0,4)^{n+1} u(n+1)$

Đối với $|z| < 0,4, x(n) = -2(n+1)(0,4)^{n+1} u(-n-2)$

2.52. Tìm tất cả các tín hiệu x(n) có biến đổi z như sau:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{10}{3}z^{-1} + z^{-2}}$$

Lời giải:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{10}{3}z^{-1} + z^{-2}} = \frac{-\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}} + \frac{\frac{9}{8}}{1 - 3z^{-1}}$$

Biện luận:

Đối với $|z| > 3, x(n) = \left[-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{9}{8} \times 3^n\right] u(n)$

Đối với $|z| < \frac{1}{3}, x(n) = \left[\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{9}{8} \times 3^n\right] u(-n-1)$

Đối với $\frac{1}{3} < |z| < 3, x(n) = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) - \frac{9}{8} \times 3^n u(-n-1)$

2.53. Tìm đáp ứng của hệ thống đối với dãy nhảy đơn vị:

$$y(n) = \alpha y(n-1) + x(n) \qquad -1 < \alpha < 1 \qquad (*)$$

với điều kiện đầu $y(-1) = 1$

Lời giải: lấy biến đổi z một phía của cả 2 vế của biểu thức (*), ta có:

$$Y^1(z) = \alpha\left[z^{-1}Y^1(z) + y(-1)\right] + X^1(z)$$

Thay $y(-1) = 1$, $X^+(z) = ZT^1\{u(n)\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$ (với $|z| > 1$) vào biểu thức trên và giải theo $Y^+(z)$ ta được:

$$Y^1(z) = \frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{(1-\alpha z^{-1})(1-z^{-1})}$$

Biểu diễn $Y^1(z)$ dưới dạng phân thức tối giản:

$$Y^1(z) = \frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}} + \frac{1}{1-\alpha} \times \left[\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{\alpha}{1-\alpha z^{-1}}\right]$$

$$\Rightarrow y(n) = \alpha^{n+1}u(n) + \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n) = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\alpha^{n+2}\right)u(n)$$

2.54. Tìm đáp ứng của hệ thống đối với dãy nhảy đơn vị:

$$y(n) = 0{,}9y(n-1) - 0{,}81y(n-2) + x(n)$$

với các điều kiện đầu:

$$y(-1) = y(-2) = 0$$

$$y(-1) = y(-2) = 1$$

Lời giải: Hàm hệ thống có dạng:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0{,}9z^{-1} + 0{,}81z^{-2}}$$

Hệ thống này có 2 cực phức liên hợp tại:

$$p_1 = 0{,}9e^{j\pi/3} \qquad p_2 = 0{,}9e^{-j\pi/3}$$

Biến đổi z của dãy nhảy đơn vị là:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

Do đó:

$$Y_{zs}(z) = \frac{1}{\left(1 - 0{,}9e^{j\pi/3}z^{-1}\right)\left(1 - 0{,}9e^{-j\pi/3}z^{-1}\right)\left(1 - z^{-1}\right)}$$
$$= \frac{0{,}542 - j0{,}049}{1 - 0{,}9e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{0{,}542 + j0{,}049}{1 - 0{,}9e^{-j\pi/3}z^{-1}} + \frac{1{,}099}{1 - z^{-1}}$$

Suy ra, đáp ứng trạng thái không là:

$$y_{zs}(n) = \left[1{,}099 + 1{,}088(0{,}9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n - 5{,}2^0\right)\right]u(n)$$

(a) Trong trường hợp này các điều kiện đầu đều bằng không nên $y(n) = y_{zs}(n)$.

(b) Với điều kiện đầu $y(-1) = y(-2) = 1$, thành phần bổ sung trong biến đổi z là:

$$Y_{zi}(z) = \frac{N_0(z)}{A(z)} = \frac{0{,}09 - 0{,}81z^{-1}}{1 - 0{,}9z^{-1} + 0{,}81z^{-2}}$$
$$= \frac{0{,}026 + j0{,}4936}{1 - 0{,}9e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{0{,}026 - j0{,}4936}{1 - 0{,}9e^{-j\pi/3}z^{-1}}$$

Do đó đáp ứng đầu vào không là:

$$y_{zi}(n) = 0{,}988(0{,}9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 87^0\right)u(n)$$

Trong trường hợp này đáp ứng tổng quát có biến đổi z là:

$$Y(z) = Y_{zs}(z) + Y_{zi}(z)$$
$$= \frac{1{,}099}{1 - z^{-1}} + \frac{0{,}568 + j0{,}445}{1 - 0{,}9e^{j\pi/3}z^{-1}} + \frac{0{,}568 - j0{,}4445}{1 - 0{,}9e^{-j\pi/3}z^{-1}}$$

Biến đổi z dạng tổng quát sẽ là:

$$y(n) = 1{,}099u(n) + 1{,}44(0{,}9)^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n + 38^0\right)u(n)$$

2.55. Tìm đáp ứng quá độ và đáp ứng trạng thái ổn định của hệ thống được đặc trưng bằng phương trình sai phân: $y(n)=0,5y(n-1)+x(n)$ khi tín hiệu vào là $x(n)=10\cos(\pi n/4)u(n)$. Hệ thống khởi đầu ở trạng thái nghỉ.

Lời giải: Hàm hệ thống của hệ này là:

$$H(z)=\frac{1}{1-0,5z^{-1}}$$

và do đó, hệ có một cực tại $z=0,5$. Biến đổi z của tín hiệu vào là:

$$X(z)=\frac{10\left[1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z^{-1}\right]}{1-\sqrt{2}z^{-1}+z^{-2}}$$ (xem bảng ở phần tóm tắt)

Bởi vậy:

$$\begin{aligned}Y(z)&=H(z)X(z)\\&=\frac{10\left[1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)z^{-1}\right]}{\left(1-0,5z^{-1}\right)\left(1-e^{j\pi/4}z^{-1}\right)\left(1-e^{-j\pi/4}z^{-1}\right)}\\&=\frac{6,3}{1-0,5z^{-1}}+\frac{6,78e^{-j28,7^0}}{1-e^{j\pi/4}z^{-1}}+\frac{6,78e^{j28,7^0}}{1-e^{-j\pi/4}z^{-1}}\end{aligned}$$

Đáp ứng tự nhiên hay đáp ứng quá độ là: $y_{nr}(n)=6,3(0,5)^n u(n)$

và đáp ứng cưỡng bức hay đáp ứng trạng thái ổn định là:

$$\begin{aligned}y_{fr}(n)&=\left[6,78e^{-j28,7^0}\left(e^{j\pi n/4}\right)+6,78e^{-j28,7^0}e^{-j\pi n/4}\right]u(n)\\&=13,56\cos\left(\frac{\pi}{4}n-28,7^0\right)u(n)\end{aligned}$$

Như vậy ta đã thấy rằng đáp ứng trạng thái ổn định tồn tại với mọi $n\geq 0$ giống như tín hiệu vào tồn tại với mọi $n\geq 0$.

2.56. Tìm đáp ứng mẫu đơn vị của hệ được đặc trưng bằng phương trình sai phân:

$$y(n)=2,5y(n-1)-y(n-2)+x(n)-5x(n-1)+6x(n-2)$$

Lời giải: Hàm hệ thống là:

$$\begin{aligned}H(z)&=\frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{1-2,5z^{-1}+z^{-2}}\\&=\frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}\end{aligned}$$

Hệ này có các cực tại $p_1=2$ và $p_2=1/2$. Bởi vậy, trước hết đáp ứng mẫu đơn vị là:

$$Y(z)=H(z)X(z)=\frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}=z\left(\frac{A}{z-\frac{1}{2}}+\frac{B}{z-2}\right)$$

Bằng cách tính các hằng số tại $z = 1/2$ và $z = 2$, ta có:

$$A = 5/2, \qquad B = 0$$

Việc $B = 0$ chứng tỏ rằng tồn tại một điểm không tại $z = 2$ và nó đã khử điểm cực tại $z = 2$. Thực tế, các điểm không xuất hiện tại $z = 2$ và $z = 3$. Bởi vậy, có thể rút gọn $H(z)$ thành:

$$Y(z) = \frac{1-3z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z-3}{z-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{2{,}5z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Và vì thế:

$$h(n) = \delta(n) - 2{,}5\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Hệ thống giảm cấp bằng cách khử cực và không trùng nhau được đặc trưng bởi phương trình sai phân:

$$y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n) - 3x(n-1)$$

Mặc dù hệ ban đầu cũng là ổn định BIBO do có khử cực - không, nhưng trong thực tế khi thực hiện hệ bậc 2 này ta có thể gặp phải sự không ổn định do sự khử cực không không hoàn chỉnh gây ra.

2.57. Xác định đáp ứng của hệ:

$$y(n) = \frac{5}{6}y(n-1) - \frac{1}{6}y(n-2) + x(n)$$

với tín hiệu vào $x(n) = \delta(n) - \frac{1}{3}\delta(n-1)$

Lời giải: Hàm hệ thống là

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{5}{6}z^{-1}+\frac{1}{6}z^{-2}} = \frac{1-5z^{-1}+6z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

Hệ này có hai cực, một cực tại $z = \frac{1}{2}$ và cực kia tại $z = \frac{1}{3}$. Biến đổi z của tín hiệu vào là:

$$X(z) = 1 - \frac{1}{3}z^{-1}$$

Trong trường hợp này tín hiệu vào chứa một điểm không tại $z = \frac{1}{3}$, nó sẽ xoá điểm cực tại $z = \frac{1}{3}$.

Do đó:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

và đáp ứng của hệ là:

$$y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Rõ ràng, thành phần $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ đã bị loại khỏi kết quả ở đầu ra do sự khử cực - không.

2.58. Hãy dùng biến đổi z một phía để giải các phương trình sai phân sau đây:

a) $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$ với điều kiện đầu: $y(-1) = y(-2) = 1$

b) $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + x(n)$, $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

điều kiện đầu: $y(-1) = 1$

Lời giải:

a) $y(n) = \frac{1}{2}y(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$

Lấy biến đổi z một phía của 2 vế biểu thức trên, ta có:

$$Y^1(z) = -\frac{1}{2}\left[z^{-1}Y^1(z) + y(-1)\right] + \frac{1}{4}\left[z^{-2}Y^1(z) + z^{-1}y(-1) + y(-2)\right]$$

$$Y^1(z) = \frac{\left(\frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{2}\right)y(-1) + \frac{1}{4}y(-2)}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

Thay $y(-1) = y(-2) = 1$ vào biểu thức tính $Y^1(z)$ ta được:

$$Y^1(z) = \frac{\frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} - \frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{\left(1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{1-\sqrt{5}}z^{-1}\right)}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \left[\frac{A}{1 - \frac{\sqrt{5}-1}{4}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{1-\sqrt{5}}z^{-1}}\right]$$

Giải ra ta được $A = \dfrac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1}$, $B = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$

$$\Rightarrow y(n) = -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^n + \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)\left(\frac{1}{1-\sqrt{5}}\right)^n\right]u(n) \qquad \text{với} \qquad |z| > \frac{1}{\sqrt{5}-1}$$

b) $y(n) = \dfrac{1}{2}y(n-1) + x(n)$

Lấy biến đổi z một phía của 2 vế biểu thức trên, ta có:

$$Y^1(z) = 0,5\left[z^{-1}Y^1(z) + y(-1)\right] + X(z)$$

$$X(z) = ZT\left\{\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)\right\} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow Y^1(z) = \frac{1,5 - \frac{1}{8}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-0,5z^{-1}\right)} = \frac{\frac{5}{2}}{1-0,5z^{-1}} + \frac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow y(n) = \left[\frac{5}{2}(0,5)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

2.59. Cho 2 hệ thống được mô tả bởi 2 phương trình sai phân sau đây:

a) $y(n) = y(n-1) + x(n) - 3x(n-1) - x(n-2)$

b) $y(n) = x(n) - 2x(n-1)$

Hãy so sánh 2 hệ thống trên và rút ra nhận xét.

Lời giải:

a) $y(n) = y(n-1) + x(n) - 3x(n-1) - x(n-2)$

Lấy biến đổi z cho 2 vế biểu thức trên, ta có:

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + X(z) - 3z^{-1}X(z) + 2z^{-2}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-3z^{-1}+2z^{-2}}{1-z^{-1}} = \frac{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}{1-z^{-1}} = 1-2z^{-1}, \text{ ROC: } |z| \neq 0, \neq 1$$

b) $y(n) = x(n) - 2x(n-1)$

Lấy biến đổi z cho 2 vế biểu thức trên, ta có:

$$Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1-2z^{-1} \qquad \text{ROC: } |z| \neq 0$$

Nhận xét: hai hệ thống trên là tương đương, hệ thống a) có ROC: $|z| \neq 0, \neq 1$ còn hệ thống b) có ROC: $|z| \neq 0$. Hệ thống a) có một điểm cực và một điểm không bù nhau.

2.60. Hãy dùng biến đổi z một phía để giải các phương trình sai phân sau đây:

a) $y(n)=\frac{1}{4}y(n-2)+x(n)$, $x(n)=u(n)$

điều kiện đầu: $y(-1)=0, y(-2)=1$

b) $y(n)-1,5y(n-1)+0,5y(n-2)=0$

điều kiện đầu: $y(-1)=1, y(-2)=0$

Lời giải:

a) Lấy biến đổi z một phía của 2 vế biểu thức trên, ta có:

$$Y^1(z)=\frac{1}{4}\left[z^{-2}Y^1(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)\right]+X(z)$$

$$X(z)=ZT\{u(n)\}=\frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$\Rightarrow Y^1(z)=\frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{4}{3}}{1-z^{-1}}+\frac{\frac{-3}{8}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{7}{24}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Suy ra: $y(n)=\left[\frac{4}{3}-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{7}{24}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$

b) $y(n)-\frac{7}{8}y(n-1)+\frac{1}{8}y(n-2)=0$ // ?

Lấy biến đổi z một phía của 2 vế biểu thức trên, ta có:

$$Y^1(z)-\frac{7}{8}\left[z^{-1}Y^1(z)+y(-1)\right]+\frac{1}{8}\left[z^{-2}Y^1(z)+z^{-1}y(-1)+y(-2)\right]=0$$

Thay $y(-1)=1, y(-2)=0$ vào biểu thức trên:

$$\Rightarrow Y^1(z)=\frac{\frac{7}{8}-\frac{1}{8}z^{-1}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{\frac{5}{12}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-\frac{3}{8}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Suy ra: $y(n)=\left[\frac{5}{12}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

2.61. Chứng minh rằng các hệ thống sau là tương đương:

(a) $y(n)=0,2y(n-1)+x(n)-0,3x(n-1)+0,02x(n-2)$

(b) $y(n) = x(n) - 0{,}1x(n-1)$

Lời giải:

(a) $y(n) = 0{,}2y(n-1) + x(n) - 0{,}3x(n-1) + 0{,}02x(n-2)$

Lấy biến đổi z hai vế của biểu thức trên:

$$Y(z) = 0{,}2Y(z) + X(z) - 0{,}3X(z) + 0{,}02X(z)$$

$$Y(z)\left[1 - 0{,}2z^{-1}\right] = X(z)\left[1 - 0{,}3z^{-1} + 0{,}02z^{-2}\right]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 0{,}3z^{-1} + 0{,}02z^{-2}}{1 - 0{,}2z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{\left(1 - 0{,}1z^{-1}\right)\left(1 - 0{,}2z^{-1}\right)}{1 - 0{,}2z^{-1}} = 1 - 0{,}1z^{-1}$$

(b) $y(n) = x(n) - 0{,}1x(n-1)$

Lấy biến đổi z hai vế của biểu thức trên:

$$Y(z) = X(z)\left(1 - 0{,}1z^{-1}\right)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 1 - 0{,}1z^{-1}$$

Nhận xét: hệ thống (a) và (b) là tương đương. Hệ thống (a) có một điểm cực và một điểm không bù nhau.

2.62. Tính đáp ứng của hệ thống có đầu vào là dãy nhảy đơn vị và có đáp ứng xung:

$$h(n) = \begin{cases} 3^n & n < 0 \\ \left(\dfrac{3}{5}\right)^n & n \ge 0 \end{cases}$$

$$H(z) = \sum_{n=-1}^{-\infty} 3^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right) z^{-n}$$

$$= \frac{-1}{1 - 3z^{-1}} + \frac{1}{1 - \dfrac{3}{5}z^{-1}} \qquad \text{ROC: } \frac{3}{5} < |z| < 3$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{-\dfrac{12}{5}z^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 3z^{-1}\right)\left(1 - \dfrac{3}{5}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{3}{\left(1 - z^{-1}\right)} - \frac{\dfrac{3}{2}}{\left(1 - 3z^{-1}\right)} - \frac{\dfrac{3}{2}}{\left(1 - \dfrac{3}{5}z^{-1}\right)} \qquad \text{ROC: } 1 < |z| < 3$$

Suy ra: $y(n)=\left[3-\frac{3}{2}.3^n-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^n\right]u(n)$

2.63. Tính đáp ứng ra cho mỗi cặp hệ thống và tín hiệu vào sau đây:

a) $h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$, $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{3}n\right)u(n)$

b) $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)$

Lời giải:

a) $h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \Rightarrow H(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$

$$x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{3}n\right)u(n) \Rightarrow X(z)=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

$$=\frac{1-\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{\frac{6}{7}\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}+\frac{3\sqrt{3}}{7}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}$$

Suy ra: $y(n)=\left[\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n\cos\frac{\pi}{3}n+\frac{3\sqrt{3}}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^n\sin\frac{\pi}{3}n\right]u(n)$

b) $h(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \Rightarrow H(z)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$

$$x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)+\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n-1)$$

$$\Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

$$=\frac{-\frac{5}{3}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

$$=\frac{A}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{C}{1-2z^{-1}}$$

Giải ra ta được: $A=-\frac{20}{7}, B=\frac{1}{4}, C=\frac{-8}{7}$

$$Y(z)=-\frac{20}{7}\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{8}{7}\frac{1}{1-2z^{-1}} \qquad \text{ROC}: |z|>2$$

Suy ra: $y(n)=\left[-\frac{20}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^n+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{8}{7}.2^n\right]u(n)$

2.64. Tính đáp ứng ra cho mỗi cặp hệ thống và tín hiệu vào sau đây:

a) $h(n)=-0,1h(n-1)+0,2h(n-2)+\delta(n)+\delta(n-1)$

$$x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

b) $y(n)=\frac{1}{2}x(n)-\frac{1}{2}x(n-1)$

$$x(n)=10\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u(n)$$

Lời giải:

a) $h(n)=-0,1h(n-1)+0,2h(n-2)+\delta(n)+\delta(n-1)$

Áp dụng biến đổi z cho cả 2 vế của biểu thức (a), ta có:

$$H(z)=-0,1z^{-1}H(z)+0,2z^{-2}H(z)+1+z^{-1}$$

$$=\frac{1+z^{-1}}{1+0,1z^{-1}-0,2z^{-2}}$$

$$x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

$$=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1+0,1z^{-1}-0,2z^{-2}\right)}=\frac{-8}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{\frac{28}{3}}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}+\frac{\frac{-1}{3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

ROC: $|z| > \frac{1}{2}$

Suy ra: $y(n) = \left[-8\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{28}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$

b) $y(n) = \frac{1}{3}x(n) - \frac{1}{3}x(n-1)$

$$Y(z) = \frac{1}{3}\left(1 - z^{-1}\right)X(z)$$

$$x(n) = 9\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u(n)$$

$$X(z) = \frac{9}{1+z^{-2}}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{3\left(1-z^{-1}\right)}{1+z^{-2}}$$

Suy ra: $y(n) = 3\cos\frac{\pi n}{2}u(n) - 3\cos\frac{\pi(n-1)}{2}u(n-1)$

$$= \left[3\cos\frac{\pi n}{2} - 3\sin\frac{\pi n}{2}\right]u(n-1) + 3\delta(n)$$

$$= 3\delta(n) + \frac{6}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)u(n-1)$$

$$= \frac{6}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{\pi}{4}\right)u(n)$$

2.65. Tính đáp ứng ra cho mỗi cặp hệ thống và tín hiệu vào sau đây:

a) $y(n) = -y(n-2) + 10x(n)$

$$x(n) = 10\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u(n)$$

b) $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$, $x(n) = (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$

Lời giải:

a) $y(n) = -y(n-2) + 5x(n)$

$$Y(z) = -z^{-2}Y(z) + 5X(z) = \frac{5}{1+z^{-2}}X(z)$$

$$x(n) = 5\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u(n)$$

$$X(z) = \frac{5}{1+z^{-2}}$$

$$\Rightarrow Y(z)=\frac{25}{\left(1+z^{-2}\right)^2}=\frac{\frac{25}{2}}{1+jz^{-1}}+\frac{\frac{25}{2}}{1-jz^{-1}}+\frac{\frac{-25}{4}jz^{-1}}{\left(1+jz^{-1}\right)^2}+\frac{\frac{25}{4}jz^{-1}}{\left(1-jz^{-1}\right)^2}$$

Suy ra: $y(n)=\left\{\frac{25}{2}\left[j^n+(-j)^n\right]-\frac{25}{4}n\left[j^n+(-j)^n\right]\right\}u(n)$

$$=\left(\frac{25}{2}-\frac{25}{4}n\right)\left(j^n+(-j)^n\right)u(n)$$

$$=\left(\frac{25}{2}-\frac{25}{4}n\right)2\cos\frac{\pi n}{2}u(n)$$

$$=\left(25-\frac{25}{2}n\right)\cos\frac{\pi n}{2}u(n)$$

b) $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$x(n)=(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

$$X(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$$

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

$$=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}=\frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{-1}{4}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}+\frac{-3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Suy ra: $y(n)=\left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{4}\right)^n-3\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$

2.66. Hãy dùng tiêu chuẩn ổn định Jury để xét sự ổn định của các hệ thống có hàm truyền đạt như sau:

a) $H_1(z)=\dfrac{z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-2}+\frac{1}{4}z^{-3}}$

b) $H_2(z)=\dfrac{1}{3+z^{-1}+z^{-2}+\frac{1}{2}z^{-3}+\frac{1}{3}z^{-4}+z^{-5}}$

Lời giải:

a) $H_1(z) = \dfrac{z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}}$

$D(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{4}z^{-3}$

$\left.\begin{array}{l} D(z)_{|z=-1} = \dfrac{7}{12} > 0 \\ N = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$ không thoả mãn tiêu chuẩn ổn định Jury (đối với N lẻ)

Suy ra hệ thống này không ổn định.

b) $H_2(z) = \dfrac{1}{3 + z^{-1} + z^{-2} + \frac{1}{2}z^{-3} + \frac{1}{3}z^{-4} + z^{-5}}$

$= \dfrac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-3} + \frac{1}{9}z^{-4} + \frac{1}{3}z^{-5}}$

$D(z) = 1 + \frac{1}{3}z^{-1} + \frac{1}{3}z^{-2} + \frac{1}{6}z^{-3} + \frac{1}{9}z^{-4} + \frac{1}{3}z^{-5}$

$\left.\begin{array}{l} D(z)_{|z=-1} = \dfrac{11}{18} > 0 \\ N = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ không thoả mãn tiêu chuẩn ổn định Jury (đối với N lẻ)

Suy ra hệ thống này không ổn định.

2.67. Hãy dùng tiêu chuẩn ổn định Jury để xét sự ổn định của các hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân sau đây:

a) $y(n) = 0{,}02y(n-1) + 0{,}1y(n-2) + 0{,}03y(n-3) + 0{,}25y(n-4) + 0{,}5x(n) + 0{,}3x(n-1)$

b) $y(n) = 0{,}15y(n-3) + 0{,}3y(n-4) + 0{,}2y(n-5) + 0{,}01y(n-6) + 0{,}1x(n) + 0{,}2x(n-1)$

Lời giải:

a) $y(n) = 0{,}02y(n-1) + 0{,}1y(n-2) + 0{,}03y(n-3) + 0{,}25y(n-4) + 0{,}5x(n) + 0{,}3x(n-1)$

Biến đổi z cho hai vế của biểu thức, ta có:

$$Y(z) = 0{,}02z^{-1}Y(z) + 0{,}1z^{-2}Y(z) + 0{,}03z^{-3}Y(z) + 0{,}25z^{-4}Y(z) + 0{,}5X(z) + 0{,}3z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{0{,}5 + 0{,}3z^{-1}}{1 - 0{,}02z^{-1} - 0{,}1z^{-2} - 0{,}03z^{-3} - 0{,}25z^{-4}}$$

$$D(z) = 1 - 0{,}02z^{-1} - 0{,}1z^{-2} - 0{,}03z^{-3} - 0{,}25z^{-4}$$

. $D(z)_{|z=1} = 0{,}6 > 0 \Rightarrow$ thoả mãn

$$\left.\begin{array}{l} D(z)_{|z=-1} = 0,7 > 0 \\ N = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{thoả mãn tiêu chuẩn ổn định Jury (đối với N chẵn)}$$

$N = 4 \Rightarrow 2N - 3 = 5$ hàng

Hàng					
1	1	a_1	a_2	a_3	a_4
2	a_4	a_3	a_2	a_1	1
3	c_0	c_1	c_2	c_3	
4	c_3	c_2	c_1	c_0	
5	d_0	d_1	d_2		

$a_0 = 1; a_1 = -0,02; a_2 = -0,1; a_3 = -0,03; a_4 = -0,25$

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & a_{4-i} \\ a_4 & a_i \end{vmatrix} = a_i - a_4 a_{4-i}$$

$$\Rightarrow c_0 = \frac{15}{16}; c_1 = -\frac{11}{400}; c_2 = -\frac{5}{40}; c_3 = -\frac{14}{400}$$

$$d_i = \begin{vmatrix} c_0 & c_{3-i} \\ c_3 & c_i \end{vmatrix} = c_0 c_i - c_3 c_{3-i}$$

$$\Rightarrow d_0 = c_0^2 - c_3^2 = 0,877; d_2 = c_0 c_2 - c_3 c_1 = -0,118$$

Xét thấy:

$$\left.\begin{array}{l} 1 > |a_4| \\ |c_0| > |c_3| \\ |d_0| > |d_2| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{thoả mãn tiêu chuẩn ổn định Jury}$$

Kết luận: hệ thống trên là hệ thống ổn định (thoả mãn tiêu chuẩn ổn định Jury).

b) $y(n) = 0,15y(n-3) + 0,3y(n-4) + 0,2y(n-5) + 0,01y(n-6) + 0,1x(n) + 0,2x(n-1)$

$$Y(z) = 0,15z^{-3}Y(z) + 0,3z^{-4}Y(z) + 0,2z^{-5}Y(z) + 0,01z^{-6}Y(z) + 0,1X(z) + 0,2z^{-1}X(z)$$

$$H(z) = \frac{0,1 + 0,2z^{-1}}{1 - 0,15z^{-3} - 0,3z^{-4} - 0,2z^{-5} - 0,01z^{-6}}$$

$$D(z) = 1 - 0,15z^{-3} - 0,3z^{-4} - 0,2z^{-5} - 0,01z^{-6}$$

$D(z)_{|z=1} = 0,34 > 0 \Rightarrow$ thoả mãn tiêu chuẩn ổn định Jury

$$\left.\begin{array}{l} D(z)_{|z=-1} = 1,04 > 0 \\ N = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{thoả mãn tiêu chuẩn ổn định Jury (đối với N chẵn)}$$

$N = 6 \Rightarrow 2N - 3 = 9$ hàng

Hàng							
1	1	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
2	a_6	a_5	a_4	a_3	a_2	a_1	1
3	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	
4	c_5	c_4	c_3	c_2	c_1	c_0	
5	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4		
6	d_4	d_3	d_2	d_1	d_0		
7	e_0	e_1	e_2	e_3			
8	e_3	e_2	e_1	e_0			
9	r_0	r_1	r_2				

$$a_0 = 1; a_1 = a_2 = 0; a_3 = -0,15; a_4 = -0,3; a_5 = -0,2; a_6 = -0,01$$

$$c_i = \begin{vmatrix} 1 & a_{6-i} \\ a_6 & a_i \end{vmatrix} = a_i - a_6 a_{6-i}$$

$$\Rightarrow c_0 = 0,998; c_1 = -0,003; c_2 = -0,0015; c_3 = -0,15; c_4 = -0,3; c_5 = -0,19$$

$$d_i = \begin{vmatrix} c_0 & c_{5-i} \\ c_5 & c_i \end{vmatrix} = c_0 c_i - c_5 c_{5-i}$$

$$\Rightarrow d_0 = c_0^2 - c_5^2 = 0,939; d_1 = c_0c_1 - c_5c_4 = -0,0315; d_2 = c_0c_2 - c_5c_3 = -0,0018;$$
$$d_3 = c_0c_3 - c_5c_2 = -0,1503; d_4 = c_0c_4 - c_5c_1 = -0,1098$$

$$e_i = \begin{vmatrix} d_0 & d_{4-i} \\ d_4 & d_i \end{vmatrix} = d_0 d_i - d_4 d_{4-i}$$

$$\Rightarrow e_0 = d_0^2 - d_4^2 = 0,8652; e_1 = d_0d_1 - d_5d_3 = -0,0298;$$
$$e_2 = d_0d_2 - d_4d_2 = -0,0051; e_3 = d_0d_3 - d_4d_1 = -0,0380$$

$$r_i = \begin{vmatrix} e_0 & e_{3-i} \\ e_3 & e_i \end{vmatrix} = e_0 e_i - e_3 e_{3-i}$$

$$\Rightarrow r_0 = e_0^2 - e_3^2 = 0,7484;\ r_1 = e_0e_1 - e_3e_2 = -0,0269; r_2 = e_0e_2 - e_3e_1 = 0,0285$$

Xét thấy:

$$\left.\begin{array}{l} 1 > |a_6| \\ |c_0| > |c_5| \\ |d_0| > |d_4| \\ |e_0| > |e_3| \\ |r_0| > |r_2| \end{array}\right\} \Rightarrow \text{thoả mãn tiêu chuẩn ổn định Jury}$$

Kết luận: hệ thống trên là hệ thống ổn định (thoả mãn tiêu chuẩn ổn định Jury).

2.68. Cho hệ thống có hàm truyền đạt như sau:

$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1} + 2z^{-2} - z^{-3}}{\left(1 - z^{-1}\right)\left(1 - 0,5z^{-1}\right)\left(1 - 0,2z^{-1}\right)} \qquad \text{ROC}: 0,5 < |z| < 1$$

a) Xác định các điểm cực và điểm không

b) Hệ thống có ổn định không?

c) Tìm đáp ứng xung của hệ thống.

Lời giải:

$$H(z)=\frac{1-2z^{-1}+2z^{-2}-z^{-3}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-0,5z^{-1}\right)\left(1-0,2z^{-1}\right)} \qquad ROC: 0,5<|z|<1$$

$$=\frac{1-z^{-1}+z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)}$$

a) Các điểm cực: $z_{p1}=\frac{1}{2}; z_{p2}=\frac{1}{5}$

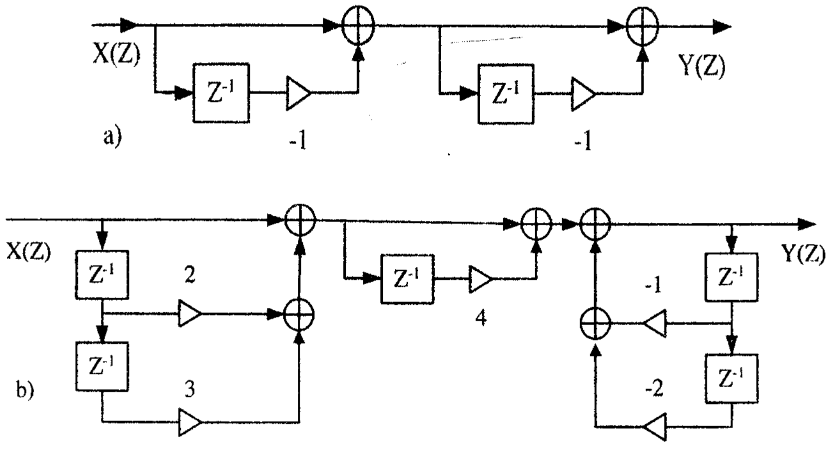
Các điểm không: $z_{01,02}=\frac{1\pm j\sqrt{3}}{2}$

b) Hệ thống này có các điểm cực nằm trong vòng tròn đơn vị nên hệ thống là ổn định

c) $H(z)=1+\left[\frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{-2,8}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}\right]z^{-1}$

Suy ra: $h(n)=\delta(n)+\left[5\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-14\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\right]u(n)$

2.69. Tìm hàm truyền đạt H(z) và xét độ ổn định của hệ thống có sơ đồ sau:



Hình 2.4(a),(b)

Lời giải:

a) $D(z)=X(z)\left(1-z^{-1}\right)$

$Y(z)=D(z)\left(1-z^{-1}\right)=X(z)\left(1-z^{-1}\right)^{2}$

$$H(z)=\frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^{2}}$$

Hệ thống có điểm cực kép $z_{p1}=z_{p2}=1$

Các điểm cực này không nằm trong vòng tròn đơn vị nên hệ thống này không ổn định.

b) $P(z)=X(z)\left(1+2z^{-1}+3z^{-2}\right)$

$$Q(z)=P(z)\left(1+4z^{-1}\right)$$

$$Y(z)=\frac{1}{1+z^{-1}+2z^{-2}}Q(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{\left(1+4z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}+3z^{-2}\right)}{1+z^{-1}+2z^{-2}}$$

Áp dụng tiêu chuẩn ổn định Jury để xét sự ổn định của hệ thống trên, ta có:

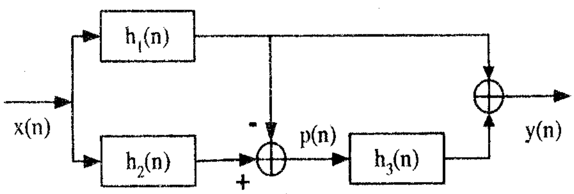
$$D(z)=1+z^{-1}+2z^{-2} \qquad (N=2)$$

$$a_1=1;\ a_2=2$$

Xét thấy: $1<|a_N|$, suy ra hệ thống này không ổn định.

2.70. Xác định đáp ứng xung h(n) của hệ thống cho bởi hình vẽ sau đây, biết

$$h_1(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n);h_2(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n);h_3(n)=\left(\frac{1}{5}\right)^{n}u(n)$$



Hình 2.5

$$P(z)=X(z)\left[H_2(z)-H_1(z)\right]$$

$$Y(z)=X(z)H_1(z)+P(z)H_3(z)=X(z)\left[H_1(z)+H_3(z)H_2(z)-H_3(z)H_1(z)\right]$$

$$h_1(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$$

$$H_1(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{3}$$

$$h_2(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$$

$$H_2(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{2}$$

$$h_3(n)=\left(\frac{1}{5}\right)^n u(n)$$

$$H_3(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{5}z^{-1}} \qquad |z|>\frac{1}{5}$$

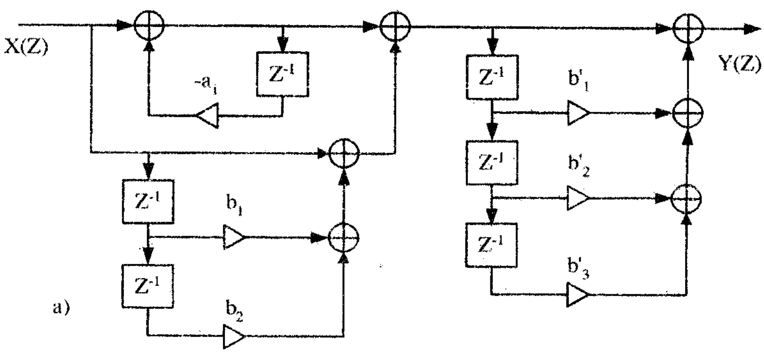
$$\Rightarrow H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-\frac{8}{15}z^{-1}+\frac{1}{10}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)} \qquad \text{ROC: } |z|>\frac{1}{2}$$

$$=\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{C}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}$$

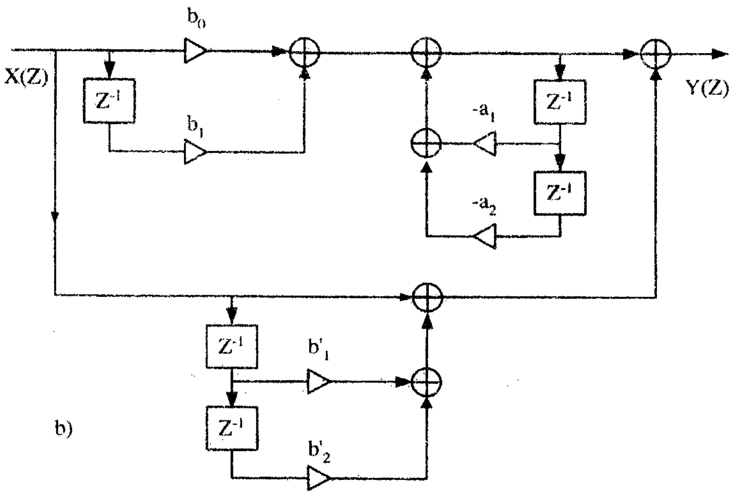
Giải ra ta được: $A=\frac{5}{3};B=\frac{-3}{2};C=-\frac{7}{6}$

Suy ra: $h(n)=\left[\frac{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{7}{6}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right]u(n)$

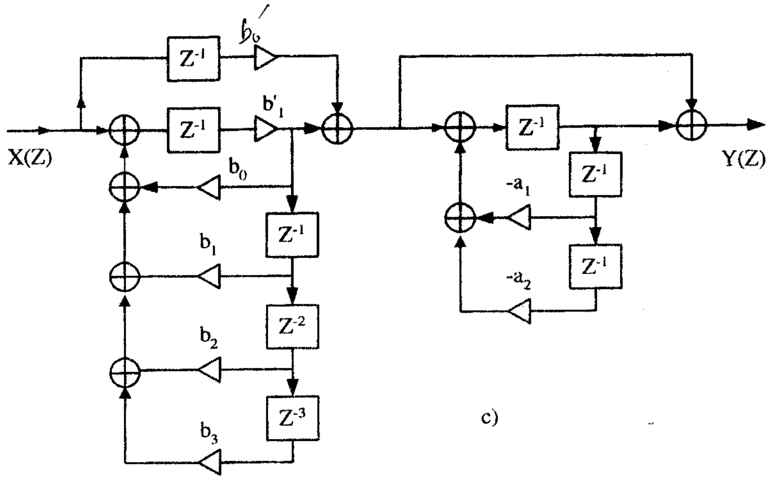
2.71. Hãy tìm hàm truyền đạt của các hệ thống sau đây:



a)

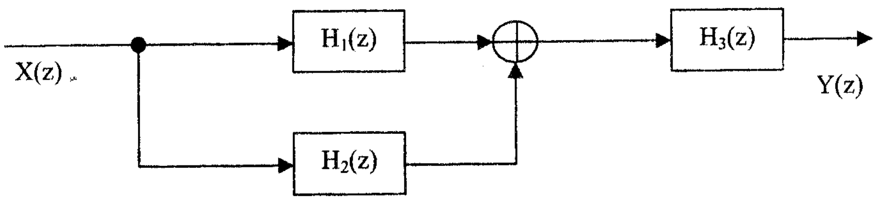


b)



Hình 2.6(a),(b),(c)

Lời giải: Hệ thống trên tương đương với:



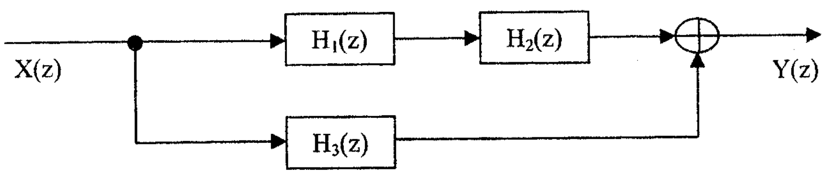
Với:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1}}$$
$$H_2(z) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}$$
$$H_3(z) = 1 + b_1' z^{-1} + b_2' z^{-2} + b_3' z^{-3}$$

Suy ra hệ thống trên tương đương với:

$$H(z) = [H_1(z) + H_2(z)]H_3(z)$$
$$= \left[\frac{1}{1 + a_1 z^{-1}} + (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})\right](1 + b_1' z^{-1} + b_2' z^{-2} + b_3' z^{-3})$$
$$= \frac{1 + b_1' z^{-1} + b_2' z^{-2} + b_3' z^{-3}}{1 + a_1 z^{-1}} + (1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})(1 + b_1' z^{-1} + b_2' z^{-2} + b_3' z^{-3})$$

Hệ thống trên tương đương với:



Với:

$$H_1(z) = b_0 + b_1 z^{-1}$$

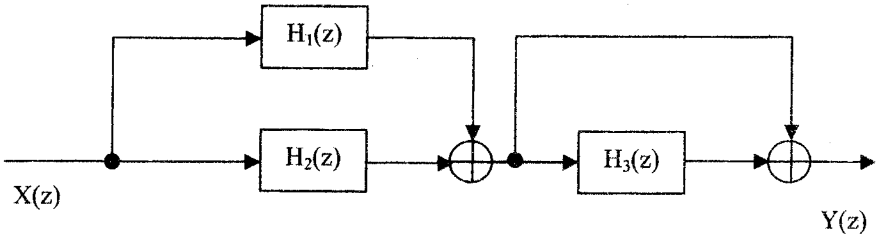
$$H_2(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

$$H_3(z) = 1 + b_1' z^{-1} + b_2' z^{-2}$$

Suy ra hệ thống trên tương đương với:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) + H_3(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} + 1 + b_1' z^{-1} + b_2' z^{-2}$$

Hệ thống trên tương đương với:



Với: $H_1(z) = b_0' z^{-1}$; $H_2(z) = \frac{b_1' z^{-1}}{1 - b_1' z^{-1}\left(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}\right)}$

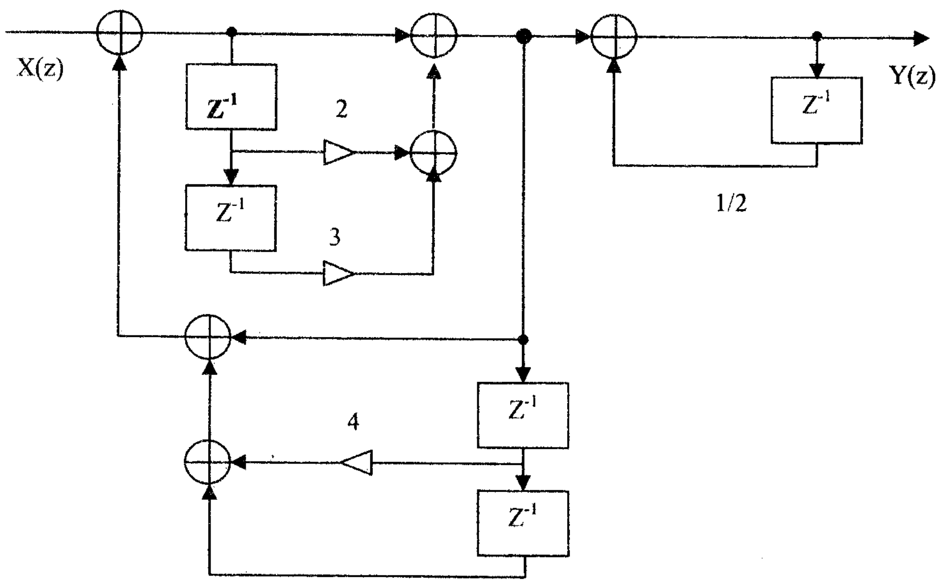
$$H_3(z) = \frac{z^{-1}}{1 + z^{-1}\left(a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\right)}$$

Suy ra hệ thống trên tương đương với: $H(z) = \left[H_1(z) + H_2(z)\right]\left[1 + H_3(z)\right]$

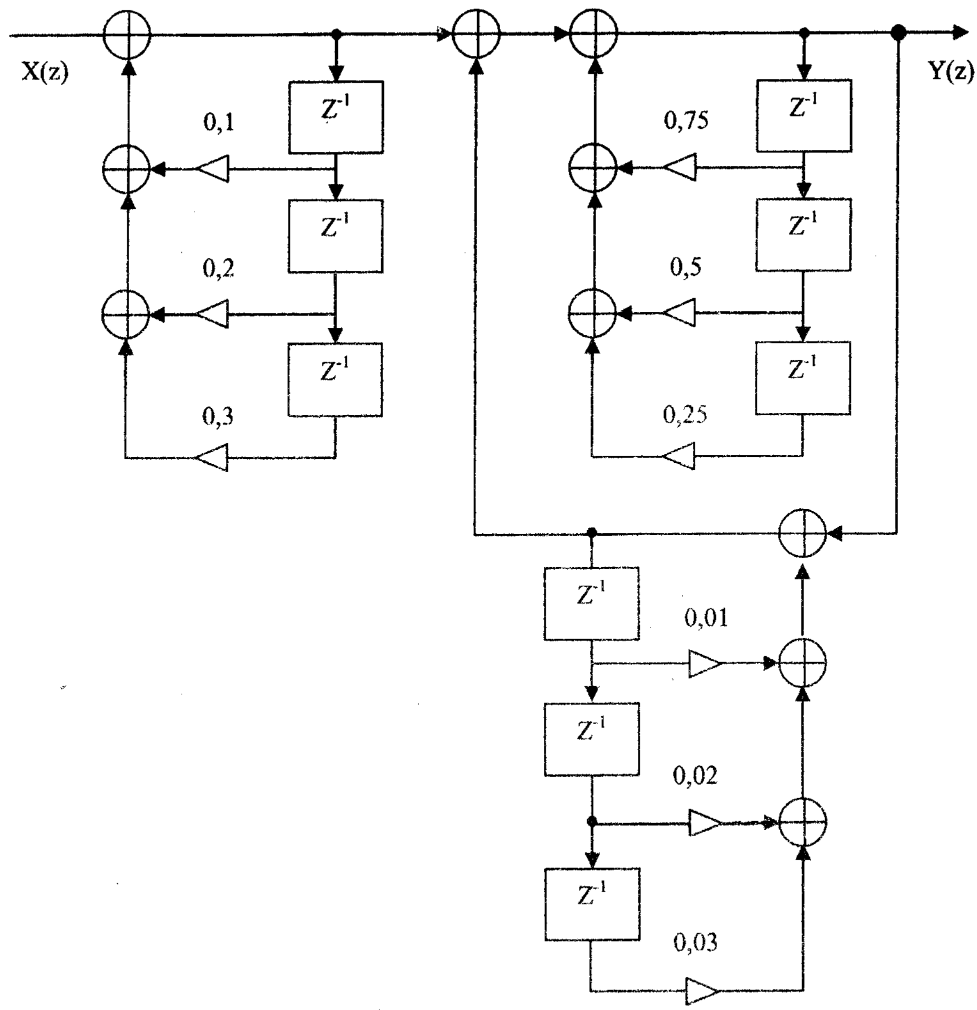
Thay các biểu thức của $H_1(z), H_2(z), H_3(z)$ ở trên vào biểu thức tính $H(z)$, ta tính được hàm truyền đạt của hệ thống.

2.72. Hãy tìm hàm truyền đạt H(z) của các hệ thống rời rạc sau đây:

a)

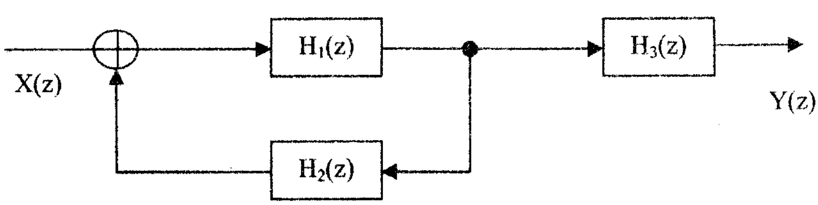


b)



Hình 2.7(a),(b)

Lời giải: Hệ thống trên tương đương với:



Với:

$$H_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 3z^{-2}$$

$$H_2(z) = 1 + 4z^{-1} + z^{-2}$$

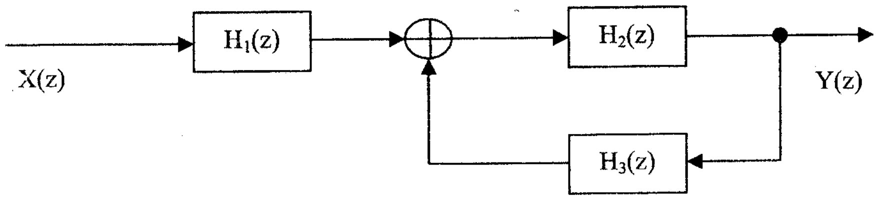
$$H_3(z) = \frac{1}{1 - 0,5z^{-1}}$$

Suy ra hệ thống trên tương đương với:

$$H(z) = \frac{H_1(z)}{1 - H_1(z)H_2(z)} H_3(z)$$

Thay các biểu thức của $H_1(z), H_2(z), H_3(z)$ ở trên vào biểu thức tính $H(z)$, ta tính được hàm truyền đạt của hệ thống.

b) Hệ thống trên tương đương với:



Với: $$H_1(z) = \frac{1}{1 - 0,1z^{-1} - 0,2z^{-2} - 0,3z^{-3}}$$

$$H_2(z) = \frac{1}{1 - 0,75z^{-1} - 0,5z^{-2} - 0,25z^{-3}}$$

$$H_3(z) = \frac{1}{1 - 0,01z^{-1} - 0,02z^{-2} - 0,03z^{-3}}$$

Suy ra hệ thống trên tương đương với:

$$H(z) = H_1(z)\frac{H_2(z)}{1 - H_2(z)H_3(z)}$$

Thay các biểu thức của $H_1(z), H_2(z), H_3(z)$ ở trên vào biểu thức tính $H(z)$, ta tính được hàm truyền đạt của hệ thống.

2.73. Hãy thiết kế một hệ thống LTI rời rạc và nhân quả sao cho với tín hiệu vào $x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$ thì tín hiệu ở đầu ra là: $y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

a) Hãy xác định đáp ứng xung h(n) và hàm hệ thống H(z) của một hệ thống thoả mãn các điều kiện đã cho ở trên.

b) Tìm phương trình sai phân minh hoạ cho hệ thống đó.

c) Xác định một biểu diễn thực của hệ thống đó sao cho số lượng bộ nhớ là nhỏ nhất.

d) Xác định tính ổn định của hệ thống.

Lời giải:

a) $$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{1}{5}\frac{z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1 - \frac{1}{5}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$y(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) \Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}z^{-1}}$$

mà $H(z)=\dfrac{Y(z)}{X(z)}=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{5}z^{-1}\right)}=\dfrac{-\frac{5}{4}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\dfrac{\frac{9}{4}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}}$

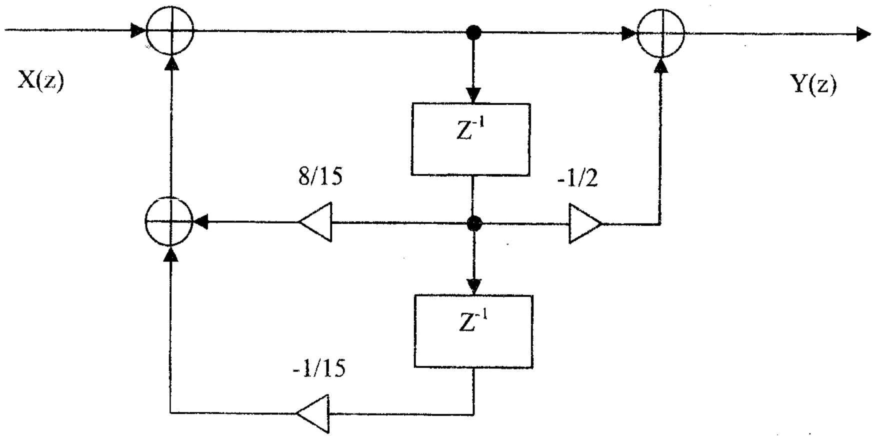
Suy ra: $h(n)=\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n}\right]u(n)$

b) $H(z)=\dfrac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{8}{15}z^{-1}+\frac{1}{15}z^{-2}}$

Suy ra phương trình sai phân của hệ thống:

$$y(n)=\frac{8}{15}y(n-1)-\frac{1}{15}y(n-2)+x(n)-\frac{1}{2}x(n-1)$$

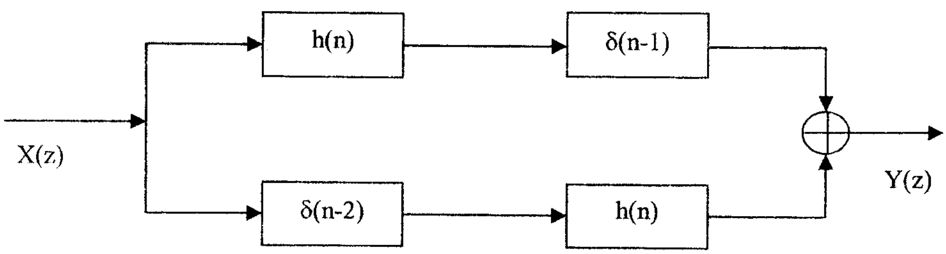
c) Hình vẽ sau:



Hình 2.8

d) H(z) có 2 điểm cực là $z_{p1}=\frac{1}{3};z_{p2}=\frac{1}{5}$ đều nằm trong vòng tròn đơn vị. Suy ra hệ thống này ổn định.

2.74. Cho hệ thống như hình sau, trong đó $h(n)=a^{n}u(n)$, $-1<a<1$



Hình 2.9

a) Xác định đáp ứng xung tổng quát của hệ thống và xác định xem hệ thống này có nhân quả và ổn định không?

b) Vẽ sơ đồ thực hiện hệ thống sử dụng số lượng nhỏ nhất các bộ cộng, bộ nhân, và các phần tử trễ.

Lời giải: a) Từ hình vẽ ta có: $H(z)_{TQ} = H(z)z^{-1} + z^{-2}H(z) = H(z)\left(z^{-1} + z^{-2}\right)$

$$h(n) = a^n u(n), \quad -1 < a < 1$$

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad \text{ROC}: |z| > |a|$$

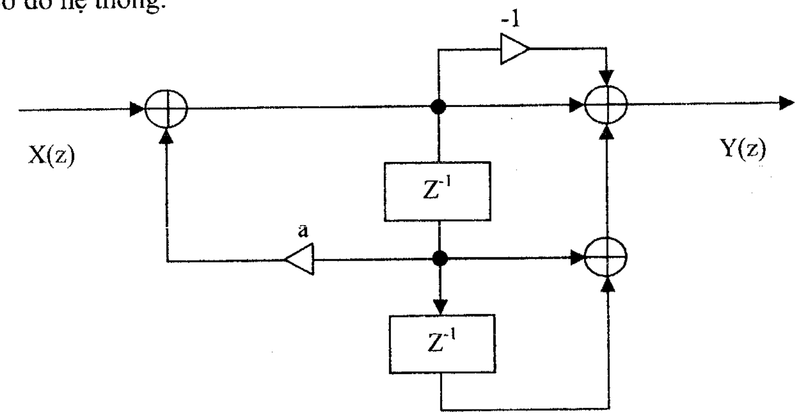
$$\Rightarrow H(z)_{TQ} = \frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-az^{-1}} = z^{-1}\frac{1}{1-az^{-1}} + z^{-2}\frac{1}{1-az^{-1}}$$

$$h(n)_{TQ} = a^{n-1}u(n-1) + a^{n-2}u(n-2)$$

Xét thấy $h(n) = 0$ khi $n<0$, suy ra $h(n)$ nhân quả.

$H(z)_{TQ}$ có một điểm cực là $z_p = a$ nằm trong vòng tròn đơn vị vì $-1 < a < 1$, do đó hệ thống là ổn định.

b) Sơ đồ hệ thống:



Hình 2.10

2.75. Cho hệ thống:

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{2}{25}z^{-2}}$$

Hãy xác định:

a) Đáp ứng xung

b) Đáp ứng ra của hệ thống khi tín hiệu vào là dãy nhảy đơn vị

Lời giải:

a) $$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{5}z^{-1} + \frac{2}{25}z^{-2}}$$

$$= z^{-1}\left(-\frac{11}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{5}z^{-1}} + \frac{6}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}\right)$$

$$h(n) = \left[-\frac{11}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + 6\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right]u(n-1)$$

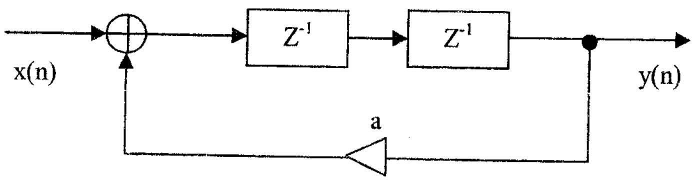
b) $\quad Y(z) = X(z)H(z)$

$$X(z) = ZT\{u(n)\} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{\frac{25}{8}}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{55}{8}}{1-\frac{1}{5}z^{-1}} + \frac{-10}{1-\frac{2}{5}z^{-1}}$$

$$y(n) = \left[\frac{25}{8} + \frac{55}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^{n} - 10\left(\frac{2}{5}\right)^{n}\right]u(n)$$

2.76. Cho hệ thống sau:



Hình 2.11

Xác định hàm hệ thống, đáp ứng xung và đáp ứng ra của hệ thống đối với dãy nhảy đơn vị (với a >0).

Lời giải:

Từ sơ đồ hệ thống ta có:

$$\left[X(z) + aY(z)\right]z^{-2} = Y(z) \qquad\qquad a > 0$$

Suy ra hàm hệ thống:

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt{a}z^{-1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{a}z^{-1}} \qquad\qquad \text{ROC: } |z| > \sqrt{a}$$

Đáp ứng xung:

$$h(n) = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{a}\right)^{n} + \left(-\sqrt{a}\right)^{n}\right]u(n)$$

$$x(n) = u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Đáp ứng ra của hệ thống đối với dãy nhảy đơn vị:

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$= \frac{1}{\left(1-z^{-1}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1-\sqrt{a}z^{-1}\right)\left(1+\sqrt{a}z^{-1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{1-a^2}}{1-z^{-1}} + \frac{\frac{\sqrt{a}}{2\left(\sqrt{a}-1\right)}}{1-\sqrt{a}z^{-1}} + \frac{\frac{\sqrt{a}}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}}{1+\sqrt{a}z^{-1}} \qquad \text{ROC: } |z| > \max\left\{\sqrt{a}, 1\right\}$$

$$y(n) = \left[\frac{1}{1-a^2} + \frac{\sqrt{a}}{2\left(\sqrt{a}-1\right)}\left(\sqrt{a}\right)^n + \frac{\sqrt{a}}{2\left(\sqrt{a}+1\right)}\left(-\sqrt{a}\right)^n\right]u(n)$$

2.77. Hãy tìm đáp ứng xung và đáp ứng ra đối với dãy nhảy đơn vị của các hệ thống nhân quả sau. Xác định các mô hình cực-không và xác định hệ thống có ổn định không?

a) $y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + 2x(n)$

b) $y(n) = y(n-1) - \frac{1}{2}y(n-2) + x(n) + x(n-1)$

Lời giải:

a) $y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) - \frac{1}{8}y(n-2) + 2x(n)$

$$Y(z) = \frac{2}{1-\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{1}{8}z^{-2}}X(z)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - \frac{2}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

Đáp ứng xung:

$$h(n) = \left[4\left(\frac{1}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u(n)$$

Hệ thống có 2 điểm cực là: $z_{p1} = \frac{1}{2}; z_{p2} = \frac{1}{4}$ đều nằm trong vòng tròn đơn vị nên hệ thống là ổn định.

Mà $x(n) = u(n) \Rightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$

Suy ra: $Y(z) = X(z)H(z)$

$$= \frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)} = \frac{-4}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{16}{3}}{1-z^{-1}}$$

Đáp ứng ra:

$$y(n)=\left[-4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}+\frac{16}{3}\right]u(n)$$

b) $y(n)=y(n-1)-\frac{1}{2}y(n-2)+x(n)+x(n-1)$

$$Y(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}X(z)$$

$$\Rightarrow H(z)=\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

Hệ thống có các điểm không tại $z=0;-1$ và có các điểm cực tại $z=\frac{1\pm j}{2}$. Tất cả các điểm cực của hệ thống đều nằm trong vòng tròn đơn vị nên hệ thống là ổn định.

$$H(z)=\frac{1-\left(\sqrt{2}\right)^{-1}\cos\frac{\pi}{4}z^{-1}}{1-2\left(\sqrt{2}\right)^{-1}\cos\frac{\pi}{4}z^{-1}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}z^{-2}}+\frac{\frac{3}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

Đáp ứng xung:

$$h(n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}\left[\cos\frac{\pi}{4}n+\sin\frac{\pi}{4}n\right]u(n)$$

Mà $x(n)=u(n)\Rightarrow X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}$

Suy ra: $Y(z)=X(z)H(z)$

$$Y(z)=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right)}$$

$$=\frac{-\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{2}{1-z^{-1}}$$

Đáp ứng ra: $y(n)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n}\left[\sin\frac{\pi}{4}n-\cos\frac{\pi}{4}n\right]u(n)+2u(n)$

C. BÀI TẬP NÂNG CAO

2.78. Tìm biến đổi z ngược của:

$$X(z)=e^{z}+e^{\frac{1}{z}}$$

2.79. Tìm biến đổi z và miền hội tụ của các chuỗi sau:

a) $x_1(n) = na^n\ u(n)$

b) $x_2(n) = na^n(\cos\omega_0 n)\,u(n)$

c) $x_3(n) = na^n(\sin\omega_0 n)\,u(n)$

d) $x_4(n) = Ar^n\cos(\omega_0 n + \varphi)\,u(n)\ ,\ 0 < r < 1$

2.80. Tìm biến đổi z, miền hội tụ của các chuỗi sau đây:

a) $x(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u(n-1)$

b) $x(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[u(n-2) - u(n-5)\right]$

c) $x(n) = n^2 u(n)$

d) $x(n) = -na^n u(-n-1)$

2.81. Tìm biến đổi z, miền hội tụ, các cực và các không của các chuỗi sau đây:

a) $x(n) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^n & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{4}\right)^{-n} & n < 0 \end{cases}$

b) $x(n) = \begin{cases} ne^{-an} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$, a: hằng số

2.82. Cho biến đổi z:

$$X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}$$

Hãy tìm tín hiệu nhân quả x(n) của biến đổi z trên.

2.83. Tính đáp ứng ra cho cặp hệ thống và tín hiệu vào sau đây:

$$h(n) = \left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)\ ,\ x(n) = (-1)^n,\ -\infty < n < +\infty$$

2.84. Tìm biến đổi z của các tín hiệu sau đây:

a) $x(n) = n(-1)^n u(n)$

b) $x(n) = (-1)^n \left(\cos\frac{\pi}{3}n\right) u(n)$

2.85. Biểu diễn biến đổi z của:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \text{ theo } X(z)$$

Gợi ý: tìm hiệu $y(n)-y(n-1)$

2.86. Sử dụng tính chất của tích chập để:

a) Biểu diễn biến đổi z của:

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k) \text{ theo } X(z)$$

b) Xác định biến đổi z của $x(n)=(n+1)u(n)$

Gợi ý: Trước hết chứng minh rằng $x(n)=u(n)*u(n)$

2.87. Cho X(z) là biến đổi z của dãy x(n). Hãy xác định biến đổi z của các tín hiệu sau đây theo X(z).

a) $x_1(n)=\begin{cases}x\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{n lẻ}\\ 0 & \text{n chẵn}\end{cases}$

b) $x_2(n)=x(2n)$

2.88. Cho X(z) là biến đổi z của x(n), chứng minh rằng:

a) $ZT\{x^*(n)\}=X^*(z^*)$

b) $\mathrm{Re}[x(n)]=\dfrac{1}{2}\left[X(z)+X^*(z^*)\right]$

c) $\mathrm{Im}[x(n)]=\dfrac{1}{2j}\left[X(z)-X^*(z^*)\right]$

2.89. Cho X(z) là biến đổi z của x(n), chứng minh rằng:

a) Nếu $x_k(n)=\begin{cases}x\left(\dfrac{n}{k}\right) & \text{n/k nguyồn}\\ 0 & \end{cases}$

thì $X_k(z)=X(z^k)$

b) $ZT\{e^{j\omega_0 n}x(n)\}=X(ze^{-j\omega_0})$

2.90. Nếu ta có: $ZT\{x_1(n)\}=X_1(z)$, $ZT\{x_2(n)\}=X_2(z)$, $X_2(z)=X_1(z^M)$

a) Hãy tìm $x_2(n)$ theo hàm của $x_1(n)$

b) Tìm $x_2(n)$ nếu ta có: $X_2(z)=\dfrac{z^M}{z^M-1}$

2.91. Nếu ta có: $x(n)=\begin{cases}0 & n<0\\ x(n+N) & n\geq 0\end{cases}$

thì ta có: $X(z)=F(z)\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n}$

Hãy tìm $F(z)$.

2.92. Hàm truyền đạt của một hệ thống số được cho bởi biểu thức sau:

$$H(z)=\frac{G(z^2)+z^{-\frac{N-1}{2}}}{2}$$

Hãy tìm $h(n)$ theo hàm của $g(n)$

2.93. Dùng vi phân bậc nhất và các tính chất phù hợp của biến đổi z để tìm $x(n)$ của các biến đổi sau đây:

a) $X(z)=\ln(1-2z),\ |z|<\dfrac{1}{2}$

b) $X(z)=\ln\left(1-\dfrac{1}{2}z^{-1}\right),\ |z|>\dfrac{1}{2}$

2.94. Chứng minh rằng các nghiệm của một đa thức với các hệ số thực là thực hoặc tạo thành các cặp liên hợp phức. Phát biểu ngược lại trong trường hợp tổng quát là sai.

2.95. Chứng minh các tính chất tương quan và chập của biến đổi z bằng cách chỉ sử dụng định nghĩa của chúng.

2.96. Cho biến đổi z sau đây:

$$X(z)=\frac{(z-0,4)(z-0,91)(z^2+0,3z+0,4)}{(z^2-0,6z+0,6)(z^2+3z+5)}$$

Có 3 miền hội tụ không chồng nhau của biến đổi z này. Hãy cho biết loại biến đổi z ngược nào (một phía bên phải, một phía bên trái, hay hai phía) là phù hợp với một trong 3 miền hội tụ đó. (Chú ý: không cần thiết phải tính toán chính xác biến đổi z ngược).

2.97. Cho biến đổi z sau đây:

$$X(z)=\frac{1}{1-0,5z^{-1}+0,6z^{-2}}$$

Hãy xác định $x(n)$.

2.98. Cho biểu thức: $G(z)=\dfrac{P(z)}{D(z)}$, trong đó $P(z)$ và $D(z)$ là các đa thức theo z^{-1}. Gọi p_1 là thặng dư của $G(z)$ tại một cực đơn $z=\lambda_1$. Chứng minh rằng:

$$p_1=-\lambda_1\left.\frac{P(z)}{D'(z)}\right|_{z=\lambda_1}$$

trong đó $D'(z)=\dfrac{dD(z)}{dz^{-1}}$

2.99. Chứng minh rằng dãy Fibonacci có thể được coi là đáp ứng xung của hệ thống được mô tả bởi phương trình vi phân $y(n)=y(n-1)+y(n-2)+x(n)$. Sau đó xác định $h(n)$ bằng các kỹ thuật biến đổi z.

2.100. Chứng minh rằng biến đổi z ngược h(n) của biến đổi z sau đây:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2\gamma(\cos\theta)z^{-1} + \gamma^2 z^{-2}}, \qquad |z| > \gamma > 0$$

là biểu thức:

$$h(n) = \frac{\gamma^n \sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} u(n)$$

2.101. Xác định biến đổi z ngược của các biến đổi z sau:

a) $X_1(z) = \log(1 - \alpha z^{-1}),\ |z| > |\alpha|$

b) $X_2(z) = \log\left(\dfrac{\alpha - \alpha z^{-1}}{\alpha}\right), \qquad |z| > 1/|\alpha|$

c) $X_3(z) = \log\left(\dfrac{1}{1 - \alpha z^{-1}}\right), \qquad |z| > |\alpha|$

d) $X_4(z) = \log\left(\dfrac{\alpha}{\alpha - z^{-1}}\right), |z| > 1/|\alpha|$

LỜI GIẢI BÀI TẬP NÂNG CAO

2.78. Khai triển hàm e^z và $e^{\frac{1}{z}}$ dưới dạng:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$
$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{-3}}{3!} + \dots$$

Thay vào biểu thức ở đầu bài ta được:

$$X(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + $$
$$+ 1 + z^{-1} + \frac{z^{-2}}{2!} + \frac{z^{-3}}{3!} + \dots$$

Suy ra: $x(n) = \text{IZT}\{X(z)\} = \delta(n) + \dfrac{1}{n!}$

2.79. a) Có thể biểu diễn tín hiệu $x_1(n)$ dưới dạng $nx(n)$, với $x(n) = a^n u(n)$. Từ (2.5), ta đã có: $x(n) = a^n u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X(z) = \dfrac{1}{1 - az^{-1}}$ ROC: $|z| > |a|$ (2.11)

Mặt khác, áp dụng biểu thức $n\,x(n) \overset{z}{\leftrightarrow} -z\dfrac{dX(z)}{dz}$ (2.12) vào (2.11), ta có:

$$x_1(n) = n\,a^n u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X_1(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \qquad \text{ROC}: |z| > |a| \qquad (2.13)$$

Thay $a = 1$ vào (2.13), ta tìm được biến đổi z của tín hiệu dốc đơn vị

$$n\,u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} \frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2} \qquad \text{ROC}: |z| > 1 \qquad (2.14)$$

b) $x_2(n) = na^n(\cos\omega_0 n)\,u(n)$

Có thể biểu diễn tín hiệu $x_2(n)$ dưới dạng $nx(n)$, với $x(n) = a^n(\cos\omega_0 n)\,u(n)$. Từ (2.9), ta đã có:

$$x(n) = a^n(\cos\omega_0 n)u(n) \leftrightarrow X(z) = \frac{1-az^{-1}\cos\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}}, \qquad |z| > |a|$$

Áp dụng biểu thức (2.12) cho $x_2(n)$ ta có:

$$x_2(n) = n\,a^n\cos(\omega_0 n)u(n) \xleftrightarrow{z} X_2(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad \text{ROC}: |z| > |a|$$

$$= \frac{\left[az^{-1} + \left(az^{-1}\right)^3\right]\cos\omega_0 - 2a^2z^{-2}}{\left(1\text{-}2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}\right)^2}, \qquad \text{ROC}: |z| > |a| \quad (2.15)$$

c) $x_3(n) = na^n(\sin\omega_0 n)\,u(n)$

Có thể biểu diễn tín hiệu $x_3(n)$ dưới dạng $nx(n)$, với $x(n) = a^n(\sin\omega_0 n)\,u(n)$. Từ (2.10), ta đã có:

$$x(n) = a^n(\sin\omega_0 n)u(n) \xleftrightarrow{z} X(z) = \frac{az^{-1}\sin\omega_0}{1-2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}}, \qquad |z| > |a|$$

Áp dụng biểu thức (2.12) cho $x_3(n)$ ta có:

$$x_3(n) = n\,a^n\sin(\omega_0 n)u(n) \overset{z}{\leftrightarrow} X_3(z) = -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad \text{ROC}: |z| > |a|$$

$$= \frac{\left[az^{-1} + \left(az^{-1}\right)^3\right]\sin\omega_0}{\left(1\text{-}2az^{-1}\cos\omega_0 + a^2z^{-2}\right)^2}, \qquad \text{ROC}: |z| > |a| \quad (2.16)$$

d) $x_4(n) = Ar^n\cos(\omega_0 n + \varphi)\,u(n)$, $0 < r < 1$

$$X_4(z) = A\sum_{n=0}^{\infty} r^n\cos(\omega_0 n + \varphi)z^{-n}$$

$$= A\sum_{n=0}^{\infty} r^n\left[\frac{e^{j\omega_0 n}e^{j\varphi} + e^{-j\omega_0 n}e^{-j\varphi}}{2}\right]z^{-n} = \frac{A}{2}\left[\frac{e^{j\varphi}}{1-re^{j\omega_0}z^{-1}} + \frac{e^{-j\varphi}}{1-re^{-j\omega_0}z^{-1}}\right]$$

$$= A\left[\frac{\cos\varphi - r\cos(\omega_0 - \varphi)z^{-1}}{1-2r\cos\omega_0 z^{-1} + r^2z^{-2}}\right], \qquad |z| > r$$

2.80.

a) $x(n) = \dfrac{1}{2}\left(n^2+n\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1) = x_1(n) + x_2(n)$

với $x_1(n)=\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)$ và $x_2(n)=\frac{1}{2}n^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}u(n-1)$

$$X_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}z^{-n}=\frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)4z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}=\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}$$

$$X_2(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}n^2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}z^{-n}=\frac{1}{2}\frac{z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^3}$$

Do đó: $X(z)=X_1(z)+X_2(z)=\frac{1}{2}\left[\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^2}+\frac{z^{-1}+\frac{1}{4}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)^3}\right]$

$$=\frac{z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)^3}\quad,\quad |z|>\frac{1}{3}$$

b) $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n\left[u(n-2)-u(n-5)\right]$

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}-\sum_{n=5}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n}$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2z^{-2}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}-\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5z^{-5}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2z^{-2}-\left(\frac{1}{3}\right)^5z^{-5}}{1-\frac{1}{3}z^{-1}},\qquad |z|>\frac{1}{3}$$

c) $x(n)=n^2u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}n^2z^{-n}=z^2\frac{d^2}{dz^2}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}=z^2\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{1}{1-z^{-1}}\right]=-\frac{z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^2}+\frac{2z^{-1}}{\left(1-z^{-1}\right)^3}$$

$$=\frac{z^{-1}\left(1+z^{-1}\right)}{\left(1-z^{-1}\right)^3}\quad,\quad |z|>1$$

d) $x(n)=-na^nu(-n-1)$

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{-1}-na^nz^{-n}=-z\frac{d}{dz}\sum_{n=-\infty}^{-1}a^nz^{-n}=-z\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1-az^{-1}}\right]=\frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2},\quad |z|<|a|$$

2.81.

a) $x(n)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n} & n\geq 0\\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-n} & n<0\end{cases}$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}z^{-n}+\sum_{n=-\infty}^{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{-n}z^{-n}-1$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}z^{n}-1=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}z}-1$$

$$=-\frac{11}{3}\frac{z}{\left(z-\frac{1}{3}\right)(z-4)}$$

ROC là $\frac{1}{3}<|z|<4$

Có 2 điểm cực là $z_{p1}=1/3$, $z_{p2}=4$ và một điểm không là $z_{01}=0$

b) $x(n)=\begin{cases}ne^{-an} & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$, a: hằng số

đặt $x_1(n)=\begin{cases}e^{-an} & n\geq 0\\ 0 & n<0\end{cases}$, a: hằng số

ta có: $X_1(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}x_1(n)z^{-n}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}e^{-an}z^{-n}$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-a}z^{-1}\right)^{n}=\frac{1}{1-e^{-a}z^{-1}}\qquad ,|z|>\left|e^{-a}\right|$$

$$ZT\{x(n)\}=ZT\{nx_1(n)\}=-z\frac{dX_1(z)}{dz}$$

$$=\frac{e^{-a}z^{-1}}{\left(1-e^{-a}z^{-1}\right)^{-2}}=\frac{e^{-a}\left(z-e^{-a}\right)^{2}}{z^{3}},\qquad \text{ROC: } |z|>\left|e^{-a}\right|$$

Có 3 điểm cực là $z_{p1}=z_{p2}=z_{p3}=0$ và 2 điểm không là $z_{01}=z_{02}=e^{-a}$

2.82. $X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)+\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$=\frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}+\frac{\left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)}{1-z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)z^{-1}}{1-2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)z^{-1}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}z^{-2}}+\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)z^{-1}}{1-2\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)z^{-1}+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}z^{-2}}$$

Suy ra: $x(n)=\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}\cos\frac{\pi}{4}n+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2}\sin\frac{\pi}{4}n\right]u(n)$

2.83. $h(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}u(n)$

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$x(n)=(-1)^{n}, \qquad -\infty<n<+\infty$$
$$=\cos\pi n \qquad -\infty<n<+\infty$$

$x(n)$ là dãy tuần hoàn và biến đổi z của nó không tồn tại.

$y(n)=\left|H(\omega_0)\cos\left[\pi n+\Theta(\omega_0)\right]\right|, \omega_0=\pi$

$$H(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

$$H(\pi)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}, \qquad \Theta=0$$

Suy ra $y(n)=\frac{3}{4}\cos(\pi n)$, $-\infty<n<+\infty$

2.84. a) $x(n)=n(-1)^{n}u(n)$

$$X(z)=-z\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}z^{-n}=-z\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{1+z^{-1}}\right]=-\frac{z^{-1}}{\left(1+z^{-1}\right)^{2}},\ |z|>1$$

b) $x(n)=(-1)^{n}\left(\cos\frac{\pi}{3}n\right)u(n)$

$$X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\cos\frac{\pi}{3}nz^{-n}$$

Áp dụng công thức trong bảng ở phần tóm tắt với a =1, ta có:

$$X(z)=\frac{1+z^{-1}\cos\frac{\pi}{3}}{1+2z^{-1}\cos\frac{\pi}{3}+z^{-2}}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1+z^{-1}+z^{-2}} \qquad \text{ROC: } |z|>1$$

2.85. $$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)$$

$$\Rightarrow y(n)-y(n-1)=x(n)$$

Suy ra: $Y(z)-z^{-1}Y(z)=X(z)$

$$Y(z)=\frac{1}{1-z^{-1}}X(z)$$

2.86. a) $$y(n)=\sum_{n=-\infty}^{n}x(k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)u(n-k)$$
$$=x(n)*u(n)$$

$$Y(z)=X(z)U(z)=\frac{X(z)}{1-z^{-1}}$$

b) $$u(n)*u(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}u(k)u(n-k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{n}u(k)$$
$$=(n+1)u(n)$$

Suy ra: $x(n)=(n+1)u(n)=u(n)*u(n)$

Vậy $X(z)=\dfrac{1}{\left(1-z^{-1}\right)^2}, \qquad |z|>1$

2.87.

a) $$x_1(n)=\begin{cases}x\left(\frac{n}{2}\right) & \text{n chẵn}\\ 0 & \text{n lẻ}\end{cases}$$

$$X_1(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1(n)z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(\frac{n}{2}\right) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-2k} = X(z^2)$$

b) $x_2(n) = x(2n)$

$$X_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n) z^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(2n) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-\frac{k}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{x(k) + (-1)^k x(k)}{2}\right] z^{-\frac{k}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) z^{-\frac{k}{2}} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) \left(-z^{\frac{1}{2}}\right)^{-k} = \frac{1}{2}\left[X(\sqrt{z}) + X(-\sqrt{z})\right]$$

2.88. a) $ZT\{x^*(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[x(n)(z^*)^{-n}\right]^* = X^*(z^*)$

b) $\frac{1}{2}\left[X(z) + X^*(z^*)\right] = \frac{1}{2}\left[ZT\{x(n)\} + ZT\{x^*(n)\}\right]$

$$= ZT\left\{\frac{x(n) + x^*(n)}{2}\right\} = ZT\{\mathrm{Re}[x(n)]\}$$

c) $\frac{1}{2j}\left[X(z) - X^*(z^*)\right] = \frac{1}{2}\left[ZT\{x(n)\} - ZT\{x^*(n)\}\right]$

$$= ZT\left\{\frac{x(n) - x^*(n)}{2}\right\} = ZT\{\mathrm{Im}[x(n)]\}$$

2.89. a) $X_k(z) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ \frac{n}{k}\text{nguyen}}}^{+\infty} x\left(\frac{n}{k}\right) z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x(m) z^{-mk} = X(z^k)$

b) $ZT\{e^{j\omega_0 n} x(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 n} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)\left(e^{-j\omega_0} z\right)^{-n} = X\left(ze^{-j\omega_0}\right)$

2.90. a) $ZT\{x_1(n)\} = X_1(z)$, $ZT\{x_2(n)\} = X_2(z)$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n) z^{-n}$$

$$X_2(z) = X_1(z^M) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)(z^M)^{-n}$$

Đặt m=Mn, ta có: $X_2(z) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1\left(\frac{m}{M}\right) z^{-m}$

Suy ra: $x_2(n) = x_1\left(\frac{n}{M}\right)$

b) $X_2(z) = \frac{z^M}{z^M - 1}$ mà $X_2(z) = X_1(z^M)$

Suy ra: $X_1(z) = \frac{z}{z-1}$ ROC: $|z| > 1$

$$x_1(n) = u(n)$$

$$x_2(n) = x_1\left(\frac{n}{M}\right) = u\left(\frac{n}{M}\right) \qquad \frac{n}{M} \text{ nguyên}$$

2.91. $x(n) = \begin{cases} 0 & n < 0 \\ x(n+N) & n \geq 0 \end{cases}$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} x(n+N) z^{-n}$$

$$= \sum_{m=N}^{+\infty} x(m) z^{-(m-N)} \qquad \text{với } m = n + N$$

$$= z^N \sum_{m=N}^{+\infty} x(m) z^{-m} = z^N \left[\sum_{m=0}^{+\infty} x(m) z^{-m} - \sum_{m=0}^{N-1} x(m) z^{-m} \right]$$

$$= z^N \left[X(z) - \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \right]$$

$$\Rightarrow (z^N - 1) X(z) = z^N \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

$$X(z) = \frac{z^N}{z^N - 1} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n} \qquad \text{điều kiện: } z^N \neq 1$$

mà $$X(z) = F(z) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}$$

Suy ra: $F(z) = \frac{z^N}{z^N - 1}$.

2.92.

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) z^{-n}$$

$$G(z^2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) z^{-2n}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{m}{2}\right) z^{-m}$$

$$\Rightarrow \text{IZT}\left\{G\left(z^2\right)\right\} = g\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$\text{IZT}\left\{z^{-\frac{N-1}{2}}\right\} = \delta\left(n - \frac{N-1}{2}\right)$$

Theo đầu bài ta có: $H(z) = \dfrac{G\left(z^2\right) + z^{-\frac{N-1}{2}}}{2}$

Suy ra: $h(n) = \dfrac{1}{2}\text{IZT}\left\{G\left(z^2\right)\right\} + \dfrac{1}{2}\text{IZT}\left\{z^{-\frac{N-1}{2}}\right\}$

$$= \frac{1}{2}\left[g\left(\frac{n}{2}\right) + \delta\left(n - \frac{N-1}{2}\right)\right]$$

2.93. a) $X(z) = \ln(1 - 2z), |z| < \dfrac{1}{2}$

$$Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$= -\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n, n < 0$$

Suy ra $x(n) = \dfrac{1}{n}y(n)$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(-n-1)$$

b) $X(z) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{2}z^{-1}\right), |z| > \dfrac{1}{2}$

$$Y(z) = -z\frac{dX(z)}{dz}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}, |z| > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y(n) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u(n-1)$$

Suy ra $x(n) = \dfrac{1}{n}y(n)$

$$=-\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n-1)$$

2.94. Giả thiết rằng đa thức có các hệ số thực và một nghiệm phức. Chứng minh rằng liên hợp phức của nghiệm cũng sẽ là một nghiệm. Suy ra, để $p(z)$ là một đa thức và z_1 là một nghiệm phức thì:

$$a_n z_1^n + a_{n-1}z_1^{n-1} + \ldots + a_1 z_1 + a_0 = 0 \qquad (1)$$

Liên hợp phức của (1) là:

$$a_n\left(z_1^*\right)^n + a_{n-1}\left(z_1^*\right)^{n-1} + \ldots + a_1\left(z_1^*\right) + a_0 = 0$$

Suy ra z_1^* cũng là một nghiệm.

2.95. Tính chất chập:

$$z\{x_1(n)*x_2(n)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)\right]z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)z^{-k}X_2(z)$$

$$= X_1(z)X_2(z)$$

2.96. $X(z) = \dfrac{(z+0,4)(z-0,91)(z^2+0,3z+0,4)}{(z^2-0,6z+0,6)(z^2+3z+5)}$

X(z) có các điểm cực tại $z = 0,3 \pm j\dfrac{\sqrt{2,04}}{2}$ và $z = \dfrac{3}{2} \pm j\dfrac{\sqrt{11}}{2}$

Suy ra có thể có các miền hội tụ sau:

a) $R_1 : |z| \le 0,6$. $IZT\{X(z)\}$ trong trường hợp này là chuỗi phía bên trái.

b) $R_2 : 0,6 \le |z| \le \sqrt{5}$. $IZT\{X(z)\}$ trong trường hợp này là chuỗi 2 phía.

c) $R_3 : |z| \ge \sqrt{5}$. $IZT\{X(z)\}$ trong trường hợp này là chuỗi phía bên phải.

2.97. $$X(z) = \frac{1}{1-0,5z^{-1}+0,6z^{-2}} = \frac{1-0,25z^{-1}}{1-0,5z^{-1}+0,6z^{-2}} + 0,3412\frac{0,7326z^{-1}}{1-0,5z^{-1}+0,6z^{-2}}$$

Suy ra: $x(n) = (0,7746)^n\left[\cos(1,24n) + 0,3412\sin(1,24n)\right]u(n)$

2.98. $G(z) = \dfrac{P(z)}{D(z)} = \dfrac{P(z)}{(1-\lambda_1 z^{-1})R(z)}$. Theo định nghĩa thặng dư p_1 tại cực đơn $z = \lambda_1$

là $p_1 = \left.\dfrac{P(z)}{R(z)}\right|_{z=\lambda_1}$.

Mặt khác: $D'(z) = \dfrac{dD(z)}{dz^{-1}} = \dfrac{d\left[(1-\lambda_1 z^{-1})R(z)\right]}{dz^{-1}} = -\lambda_1 R(z) + (1-\lambda_1 z^{-1})\dfrac{dR(z)}{dz}$.

Suy ra: $D'(z)\big|_{z=\lambda_1} = -\lambda_1 R(z)\big|_{z=\lambda_1}$. Do đó: $p_1 = -\lambda_1 \dfrac{P(z)}{D'(z)}\bigg|_{z=\lambda_1}$

2.99. Từ định nghĩa của dãy Fibonacci, $y(n) = y(n-1) + y(n-2), y(0) = 1$. Nó tương đương với một hệ thống được mô tả bởi phương trình sai phân: $y(n) = y(n-1) + y(n-2) + x(n)$, trong đó: $x(n) = \delta(n)$ và $y(n) = 0,\ n < 0$. Biến đổi z của phương trình sai phân này là:

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) + z^{-2}Y(z) + X(z)$$

Suy ra đối với $X(z) = 1$, ta có:

$$Y(z) = \frac{1}{1 - z^{-1} - z^{-2}}$$

$$Y(z) = \frac{A}{1 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}z^{-1}}$$

Giải ra ta được $A = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, B = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = -\dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

Suy ra: $y(n) = \left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]u(n)$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]u(n)$

2.100. $$H(z) = \frac{1}{1 - 2\gamma(\cos\theta)z^{-1} + \gamma^2 z^{-2}}, \qquad |z| > \gamma > 0.$$

Bằng cách khai triển thành phân số tối giản, ta có:

$$H(z) = \frac{1}{\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right)}\left\{\frac{e^{j\theta}}{1-\gamma e^{j\theta}z^{-1}} - \frac{e^{-j\theta}}{1-\gamma e^{-j\theta}z^{-1}}\right\} = \frac{1}{2j\sin\theta}\left\{\frac{e^{j\theta}}{1-\gamma e^{j\theta}z^{-1}} - \frac{e^{-j\theta}}{1-\gamma e^{-j\theta}z^{-1}}\right\}$$

Suy ra: $h(n) = \dfrac{1}{2j\sin\theta}\left\{e^{j\theta}\gamma^n e^{jn\theta}u(n) - e^{-j\theta}\gamma^n e^{-jn\theta}u(n)\right\} = \dfrac{\gamma^n}{\sin\theta}\dfrac{e^{j\theta(n+1)} - e^{-j\theta(n+1)}}{2j}u(n)$

$= \dfrac{\gamma^n \sin\left[(n+1)\theta\right]}{\sin\theta}u(n)$

2.101. a) $X_1(z) = \log\left(1 - \alpha z^{-1}\right)$, $|z| > |\alpha|$. Khai triển $\log\left(1-\alpha z^{-1}\right)$ thành một chuỗi công suất, ta có:

$$X_1(z) = -\alpha z^{-1} - \frac{\alpha^2 z^{-2}}{2} - \frac{\alpha^3 z^{-3}}{3} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}z^{-n}$$

Do đó, $x_1(n) = -\dfrac{\alpha^n}{n}u(n-1)$

b) $X_2(z)=\log\left(\dfrac{\alpha-\alpha z^{-1}}{\alpha}\right)=\log\left(1-(\alpha z)^{-1}\right)$, $|z|>1/|\alpha|$. Khai triển $\log\left(1-(\alpha z)^{-1}\right)$ thành một chuỗi công suất, ta có:

$$X_2(z)=-(\alpha z)^{-1}-\frac{(\alpha z)^{-2}}{2}-\frac{(\alpha z)^{-3}}{3}-...=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha z)^{-n}}{n}$$

Do đó, $x_1(n)=-\dfrac{\alpha^{-n}}{n}u(n-1)$

c) $X_3(z)=\log\left(\dfrac{1}{1-\alpha z^{-1}}\right)=-\log\left(1-\alpha z^{-1}\right)$, $|z|>|\alpha|$. Khai triển $X_3(z)$ thành một chuỗi công suất, ta có:

$$X_3(z)=\alpha z^{-1}+\frac{\alpha^2 z^{-2}}{2}+\frac{\alpha^3 z^{-3}}{3}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n}z^{-n}$$

Do đó, $x_3(n)=\dfrac{\alpha^n}{n}u(n-1)$

d) $X_4(z)=\log\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-z^{-1}}\right)=-\log\left(1-(\alpha z)^{-1}\right)$, $|z|>1/|\alpha|$. Khai triển $X_4(z)$ thành một chuỗi công suất, ta có:

$$X_2(z)=(\alpha z)^{-1}+\frac{(\alpha z)^{-2}}{2}+\frac{(\alpha z)^{-3}}{3}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\alpha z)^{-n}}{n}$$

Do đó, $x_4(n)=\dfrac{\alpha^{-n}}{n}u(n-1)$

D. BÀI TẬP MATLAB

M2_1. Viết một chương trình MATLAB tính toán và hiển thị các điểm cực, điểm không, tăng ích; tính toán và hiển thị dạng phân số của biến đổi z sau:

$$H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+...+b_mz^{-M}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+...+a_nz^{-N}}$$

dưới dạng tích của các phân số có tử số và mẫu số đều là các hàm bậc 2 (second-order sections). Nghĩa là: $H(z)=\prod_{l=1}^{L}H_l(z)$ với $H_l(z)=\dfrac{b_{0l}+b_{1l}z^{-1}+b_{2l}z^{-2}}{1+a_{1l}z^{-1}+a_{2l}z^{-2}}$ (*)

Gợi ý: sử dụng các hàm *tf2zp* để tìm các điểm cực, điểm không, và tăng ích; hàm *zp2sos* để cho kết quả là một ma trận Lx6 trong đó các hệ số của ma trận là các hệ số của các thành phần hàm bậc 2 của công thức (*).

$$\begin{bmatrix} b_{01} & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} & 1 & a_{12} & a_{22} \\ ... & & & & & \\ b_{01} & b_{11} & b_{21} & 1 & a_{11} & a_{21} \end{bmatrix}$$

Để biết thêm chi tiết về các lệnh này: tại dấu nhắc của MATLAB gõ: *help câu lệnh (ví dụ: help zp2sos).*

Lời giải:

```
% Chuong trinh M2_1
% Tinh cac diem cuc, diem khong, tang ich
% Bieu dien bien doi z duoi dang tich cua cac phan so bac hai
clf;
num = input('Nhap cac he so o tu so = ');
den = input('Nhap cac he so o mau so = ');
[z,p,k] = tf2zp(num,den);
m = abs(p);
disp('Cac diem cuc tai: ');disp(z);
disp('Cac diem khong tai: ');disp(p);
disp('He so tang ich G= ');disp(k);
disp('Ban kinh cua cac diem cuc:');disp(m);
sos = zp2sos(z,p,k);
disp('Cac thanh phan bac 2:');disp(real(sos));
zplane(num,den)
```

Nhap cac he so o tu so = [2 5 7 4 3]

Nhap cac he so o mau so = [5 35 2 1 1]

Cac diem cuc tai:

-1.1341 + 1.0220i

-1.1341 - 1.0220i

-0.1159 + 0.7938i

-0.1159 - 0.7938i

Cac diem khong tai:

-6.9460

-0.2972

0.1216 + 0.2866i

0.1216 - 0.2866i

He so tang ich G=

0.4000

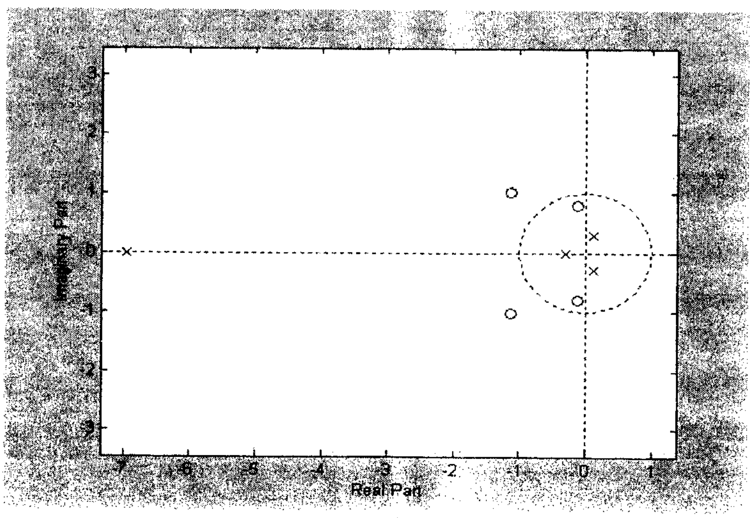
Ban kinh cua cac diem cuc:

6.9460

0.2972

0.3113

0.3113



Cac thanh phan bac 2:

0.4000 0.9073 0.9323 1.0000 7.2431 2.0641

1.0000 0.2318 0.6436 1.0000 -0.2431 0.0969

M2_2. Hãy viết chương trình MATLAB để tính và hiển thị biến đổi z dưới dạng phân số hữu tỷ từ các điểm không, điểm cực và tăng ích của nó. Sử dụng chương trình này hãy xác định dạng phân số hữu tỷ của biến đổi z có các điểm không tại

$z_{01} = 0,5, z_{02} = 2,2, z_{03} = -0,2 + j0,3, z_{04} = -0,2 - j0,3$; các điểm cực tại: $z_{p1} = 0,4; z_{p2} = -0,75; z_{p3} = 0,5 + j0,6; z_{p4} = 0,5 - j0,6$ và tăng ích $k = 3.7$.

Lời giải:

```
% Chuong trinh M2_2
% Xac dinh phan thuc huu ty z tu cac diem khong,
% diem cuc cua no
%
format long
zr = input('Nhap cac diem khong duoi dang mot vecto hang = ');
pr = input('Nhap cac diem cuc duoi dang mot vecto hang = ');
% Thuc hien chuyen vi cac vecto chua diem khong va diem cuc
z = zr'; p = pr';
k = input('Nhap he so tang ich k = ');
[num, den] = zp2tf(z, p, k);
disp('Cac he so cua da thuc tu so: '); disp(num);
disp('Cac he so cua da thuc mau so: '); disp(den);
```

Nhap cac diem khong duoi dang mot vecto hang = [0.5 2.2 -0.2+0.3i -0.2-0.3i]

Nhap cac diem cuc duoi dang mot vecto hang = [0.4 -0.75 0.5+0.6i 0.5-0.6i]

Nhap he so tang ich k = 3.7

Cac he so cua da thuc tu so: 3.700 -8.5100 0.5550 0.3293 0.5291

Cac he so cua da thuc mau so:

1.000 -0.6500 -0.0400 0.5135 -0.1830

M2_3. a) Tìm biến đổi z ngược bằng phương pháp thặng dư. Dùng hàm *residuez*

[R,P,K] = RESIDUEZ(B,A): tìm thặng dư, các cực, các thành phần trực tiếp của việc khai triển biến đổi z có dạng $H(z) = \dfrac{B(z)}{A(z)}$.

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{r_1}{1-p_1z^{-1}} + \frac{r_2}{1-p_2z^{-1}} + \ldots + \frac{r_n}{1-p_nz^{-1}} + k(1) + k(2)z^{-1} + \ldots$$

B và A tương ứng là các đa thức ở tử số và mẫu số được viết theo chiều hàm mũ của z^{-1} tăng dần. R và P tương ứng là các vectơ cột chứa các giá trị thặng dư và các điểm cực. K cũng là một vectơ cột chứa các thành phần trực tiếp. Số lượng các điểm cực là n = chiều dài(A)-1 = chiều dài(R) = chiều dài(P). Vectơ chứa các thành phần trực tiếp K là rỗng nếu chiều dài(B) < chiều dài(A); nếu không thì chiều dài(K) = chiều dài(B) - chiều dài(A) +1

b) Hàm *[B,A] = RESIDUEZ(R,P,K)* chuyển các phân số thu được từ phương pháp thặng dư thành dạng phân thức hữu tỷ B/A ban đầu.

Lời giải:

```
 Chuong trinh M2_3
% Tim cac gia tri thang du vac cuc cua bien doi z
%
num = input('Nhap cac he so o tu so = ');
den = input('Nhap cac he so o mau so = ');
[r,p,k] = residuez(num,den);
disp('Cac thang du: ');disp(r')
disp('Caciem cuc: ');disp(p')
disp('Cac thanh phan truc tiep: ');disp(k)
```

a) Nhap cac he so o tu so = [1 -1.2 1 2]

Nhap cac he so o mau so = [1 -1.1 1.34 -0.22]

Kết quả thu được:

Cac thang du:

-0.4921 - 0.8861i -0.4921 + 0.8861i 11.0750

Cac diem cuc:

0.4558 - 0.9801i 0.4558 + 0.9801i 0.1883

Cac thanh phan truc tiep:

-9.0909

b) Nhap cac gia tri thang du = [-0.4921 - 0.8861i -0.4921 + 0.8861i 11.075]

Nhap cac diem cuc = [0.4558 - 0.9801i 0.4558 + 0.9801i 0.1883]

Nhap cac thanh phan truc tiep = [-9.0909]

Kết quả thu được:

Cac he so cua da thuc tu so:

0.9999 -1.1999 1.0002 2.0000

Cac he so cua da thuc mau so:

1.0000 -1.0999 1.3400 -0.2200

M2_4. Hãy dùng hàm impz để tính đáp ứng xung của một bộ lọc số có dạng $H(z)=\dfrac{B(z)}{A(z)}$.

Cú pháp: *[H,T] = IMPZ(B,A)* ; đáp ứng xung được tính và trả vào vectơ cột H và một vectơ thời gian T (T = [0 1 2 ...]').

[H,T] = IMPZ(B,A,N): tính N mẫu của đáp ứng xung. Nếu N là một vectơ các số nguyên dương, đáp ứng xung chỉ được tính tại các giá trị nguyên này (0 là giá trị gốc). Áp dụng để tính 5 mẫu của đáp ứng xung của biến đổi z sau:

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{2+5z^{-1}+7z^{-2}+4z^{-3}}{1+12z^{-1}+6z^{-2}+3z^{-3}}$$

Vẽ đáp ứng xung tính được.

Lời giải:

```
% Chuong trinh M2_4
% Tinh dap ung xung tu mot ham cua bien doi z
clf;
N = input('Nhap chieu dai cua dap ung xung can tinh = ');
% Nhap cac he so o tu so va mau so cua ham bien doi z dang B(z)/A(z)
num = input('Nhap he so o tu so = ');
den = input('Nhap cac he so o mau so = ');
% Tinh cac he so cua bien doi z nguoc (dap ung xung)
[h,t] = impz(num,den,N);
disp('Cac he so cua dap ung xung:');
disp(h)
stem(t,h);
title('Dap ung xung h(n)');grid
xlabel('Thoi gian roi rac n');
ylabel('Bien do');
```

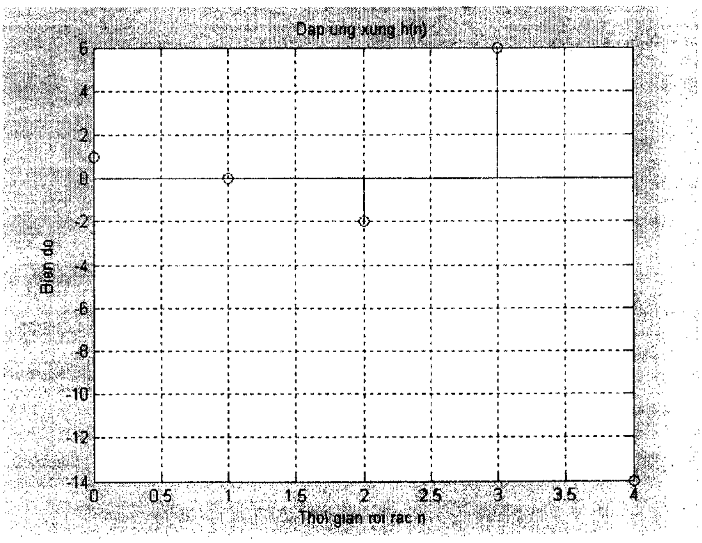
Nhap chieu dai cua dap ung xung can tinh = 5

Nhap he so o tu so = [1 3]

Nhap cac he so o mau so = [1 3 2]

Kết quả thu được:

Cac he so cua dap ung xung: 1 0 -2 6 -14



Chương 3

BIỂU DIỄN HỆ THỐNG VÀ TÍN HIỆU RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ LIÊN TỤC (BIẾN ĐỔI FOURIER)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

3.1. Biến đổi Fourier - FT

Định nghĩa: $X(e^{j\omega}) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

Quan hệ giữa biến đổi Fourier và biến đổi Z:

- Biến đổi Fourier chính là biến đổi Z được thực hiện trên vòng tròn đơn vị, do đó biến đổi Fourier chỉ là trường hợp riêng của biến đổi Z.
- Ta có thể tìm biến đổi Fourier từ biến đổi Z bằng cách đánh giá ZT trên vòng tròn đơn vị với điều kiện vòng tròn đơn vị phải nằm trong miền hội tụ của biến đổi Z.

3.2. Điều kiện để tồn tại biến đổi Fourier

Một dãy x(n) thực hiện được biến đổi Fourier nếu và chỉ nếu: $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$

3.3. Các khái niệm, ký hiệu về tín hiệu trong miền tần số liên tục

$X(e^{j\omega})$: Phổ của tín hiệu x(n).

$|X(e^{j\omega})|$: Phổ biên độ của tín hiệu x(n).

$\arg[X(e^{j\omega})] = \varphi(\omega)$: Phổ pha của tín hiệu x(n).

$A(e^{j\omega})$: Độ lớn của tín hiệu x(n).

$\theta(\omega)$: Pha của tín hiệu x(n).

$S_{xx}(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|^2$: phổ mật độ năng lượng của x(n), thể hiện sự phân bố năng lượng theo hàm của tần số.

Các quan hệ cần nhớ:

+ $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|.e^{j\varphi(\omega)}$

+ $X(e^{j\omega}) = A(e^{j\omega}).e^{j\theta(\omega)}$

+ $A(e^{j\omega})$ có thể dương (>0) âm (<0) hoặc bằng 0

+ $|X(e^{j\omega})| = |A(e^{j\omega})|$

$+\ \varphi(\omega)=\theta(\omega) \quad \text{khi} \quad A\left(e^{j\omega}\right)\geq 0$

$+\ \varphi(\omega)=\theta(\omega)+\pi \quad \text{khi} \quad A\left(e^{j\omega}\right)<0$

3.4. Biến đổi Fourier ngược - IFT

Định nghĩa: $x(n)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$

3.5. Tính chất của biến đổi Fourier

Tính chất	Miền n	Miền ω
Cặp biến đổi Fourier	$x(n)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega$	$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$
Tuyến tính	$ax_1(n)+bx_2(n)$ (a, b: hằng số)	$aX_1\left(e^{j\omega}\right)+bX_2\left(e^{j\omega}\right)$
Trễ	$x(n-n_0)$	$e^{-j\omega n_0}X\left(e^{j\omega}\right)$
Đối xứng	x(n) là thực	$X^*\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{-j\omega}\right)$
		$\mathrm{Re}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=\mathrm{Re}\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]$
		$\mathrm{Im}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=-\mathrm{Im}\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]$
		$\left\lvert X\left(e^{j\omega}\right)\right\rvert=\left\lvert X\left(e^{-j\omega}\right)\right\rvert$
		$\arg\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right]=-\arg\left[X\left(e^{-j\omega}\right)\right]$
		$S_{xx}\left(e^{j\omega}\right)=S_{xx}\left(e^{-j\omega}\right)$
Liên hợp phức	x*(n)	$X^*\left(e^{-j\omega}\right)$
Biến số đảo	x(-n)	$X\left(e^{-j\omega}\right)$
Tích chập	$x_1(n)*x_2(n)$	$X_1\left(e^{j\omega}\right).X_2\left(e^{j\omega}\right)$
Tích	$x_1(n).x_2(n)$	$\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_1\left(e^{j(\omega-\omega')}\right).X_2\left(e^{j\omega'}\right)d\omega'$
Vi phân	nx(n)	$j\dfrac{dX\left(e^{j\omega}\right)}{d\omega}$
Trễ tần số	$e^{j\omega_0 n}x(n)$	$X\left[e^{j(\omega-\omega_0)}\right]$

Điều chế	$x(n)\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X\left[e^{j(\omega-\omega_0)}\right]+\frac{1}{2}X\left[e^{j(\omega-\omega_0)}\right]$
Quan hệ Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n).x_2^*(n)$	$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} X_1\left(e^{j\omega}\right).X_2^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega$
	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lvert x(n)\rvert^2$	$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left\lvert X\left(e^{j\omega}\right)\right\rvert^2 d\omega$
Tương quan	$r_{x_1x_2}=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1(m).x_2(m-n)$	$X_1\left(e^{j\omega}\right).X_2\left(e^{j\omega}\right)$
Định lý Weiner-Khintchine	$r_{xx}(n)$	$R_{xx}\left(e^{j\omega}\right)=S_{xx}\left(e^{j\omega}\right)=\left\lvert X\left(e^{j\omega}\right)\right\rvert^2$

Quan hệ Parseval: thể hiện sự bảo toàn về mặt năng lượng khi chuyển từ miền thời gian sang miền tần số.

3.6. Đáp ứng tần số

Đáp ứng tần số $H\left(e^{j\omega}\right)$ của hệ thống trong miền tần số liên tục được xây dựng theo 2 cách:

- Đáp ứng tần số $H\left(e^{j\omega}\right)$ của hệ thống là tỷ số giữa biến đổi Fourier của tín hiệu ra trên biến đổi Fourier của tín hiệu vào.
- Đáp ứng tần số $H\left(e^{j\omega}\right)$ là biến đổi Fourier của đáp ứng xung h(n).

Đáp ứng tần số của hệ thống được thể hiện như sau:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|e^{j\varphi(\omega)}$$

Trong đó:

$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$: Đáp ứng tần số của biên độ (đáp ứng biên độ).

$\varphi(\omega)=\arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]$: Đáp ứng tần số của pha (đáp ứng pha).

Hay

Độ lớn và pha:

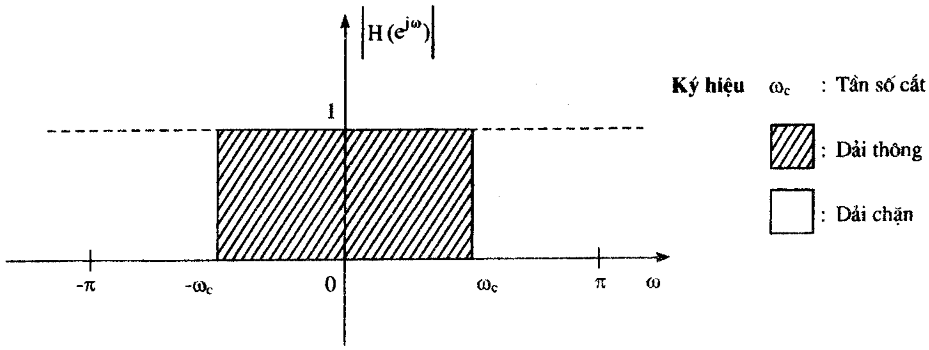
$$H\left(e^{j\omega}\right)=A\left(e^{j\omega}\right)e^{j\theta(\omega)}$$

3.7. Các bộ lọc số lý tưởng

Trong phần này, chúng ta phải nắm được bốn bộ lọc số lý tưởng thông qua các đáp ứng biên độ của chúng.

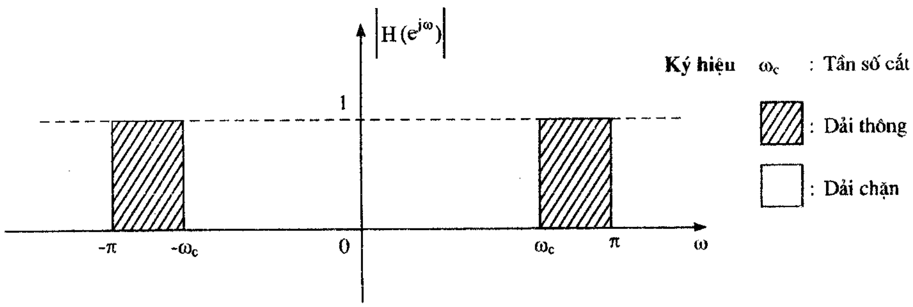
Bộ lọc thông thấp:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\begin{cases}1 & -\omega_c\le\omega\le\omega_c \\ 0 & \omega \text{ còn lại}\end{cases},\quad (-\pi\le\omega_c\le\pi)$$



Bộ lọc thông cao:

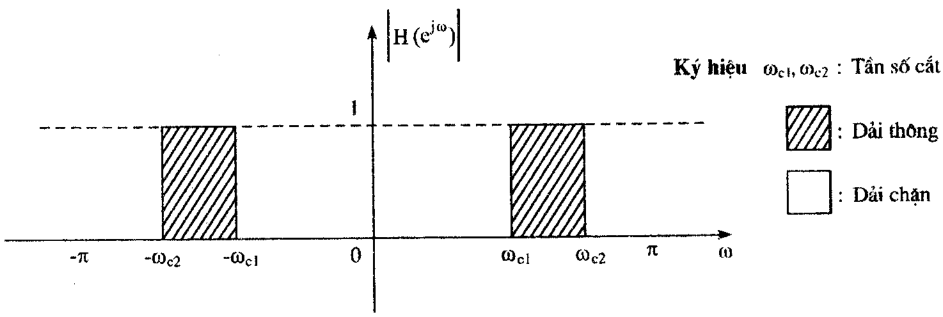
$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\begin{cases}1 & -\pi\le\omega\le-\omega_c \\ & \omega_c\le\omega\le\pi \quad,\quad (-\pi\le\omega_c\le\pi) \\ 0 & \omega \text{ còn lai}\end{cases}$$



Chú ý: Bộ lọc thông cao = Bộ lọc thông tất – Bộ lọc thông thấp

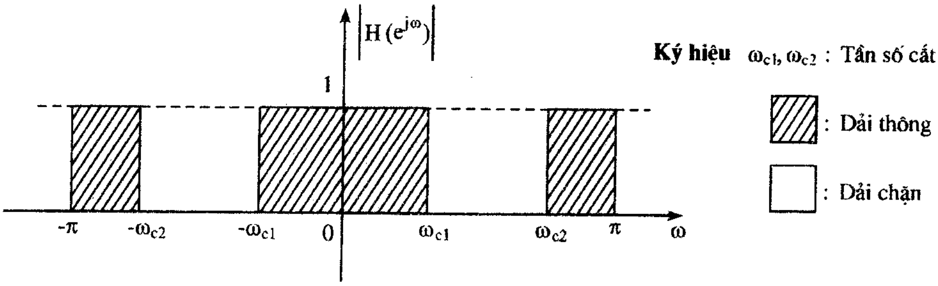
Bộ lọc thông dải:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\begin{cases}1 & -\omega_{c2}\le\omega\le-\omega_{c1} \\ & \omega_{c1}\le\omega\le\omega_{c2} \quad,\quad (-\pi\le\omega_c\le\pi) \\ 0 & \omega\ne\end{cases}$$



Bộ lọc chắn dải:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\begin{cases} & -\pi\le\omega\le-\omega_{c2} \\ 1 & -\omega_{c1}\le\omega\le\omega_{c1} \quad,\quad (-\pi\le\omega_c\le\pi) \\ & \omega_{c2}\le\omega\le\pi \\ 0 & \omega\ne\end{cases}$$



Một số vấn đề của bộ lọc số lý tưởng cần lưu ý:

- Đáp ứng xung h(n) của bộ lọc số lý tưởng có chiều dài vô hạn, và đáp ứng xung này là không nhân quả. Do vậy các bộ lọc số lý tưởng này không thực hiện được trong thực tế.
- Đối với bộ lọc số lý tưởng pha 0 ta có đáp ứng biên độ trùng với đáp ứng tần số:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|$$

- Đáp ứng xung h(n) của bộ lọc số lý tưởng pha 0 đối xứng qua trục tung, đối xứng Hermitte.
- Các đáp ứng xung h(n) của các bộ lọc số lý tưởng pha 0 có quan hệ như sau:

+ $h_{HP}(n) = h_{AP}(n) - h_{LP}(n)$

+ $h_{BP}(n) = h_{AP}(n) - h_{LP}(n) - h_{HP}(n)$

+ $h_{BS}(n) = h_{LP}(n) + h_{HP}(n)$

3.8. Các chỉ tiêu kỹ thuật của bộ lọc số

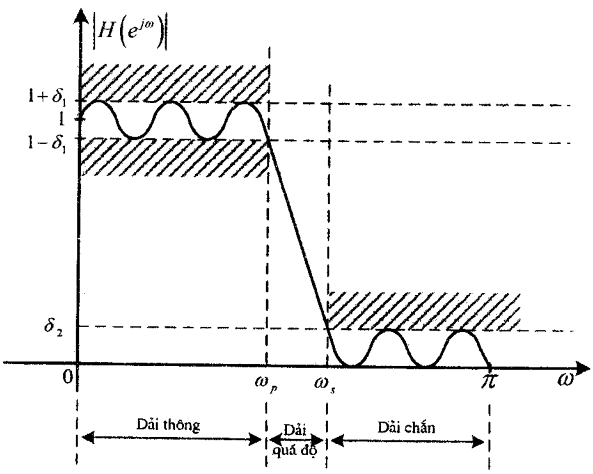
Chúng ta phải nắm vững các thông số chỉ tiêu của bộ lọc số thực tế:

+ Tần số giới hạn dải thông ω_P

+ Tần số giới hạn dải chắn ω_S

+ Độ gợn sóng dải thông δ_1

+ Độ gợn sóng dải chắn δ_2



Đáp ứng biên độ của bộ lọc số thực tế thông thấp và các tham số

Về mặt lý tưởng các độ gợn sóng dải thông, dải chắn càng nhỏ càng tốt, tần số giới hạn dải thông và dải chắn càng gần nhau để cho dải quá độ càng nhỏ càng tốt. Tuy nhiên trên thực tế đây là các tham số nghịch nhau (độ gợn sóng nhỏ thì dải quá độ phải lớn và ngược lại) nên việc giải quyết bài toán cho các tham số cùng nhỏ gặp nhiều khó khăn, ta phải áp dụng tính tối ưu với từng yêu cầu cụ thể của bài toán thiết kế bộ lọc.

3.9. Bộ vi phân

Hệ thống dùng để vi phân tín hiệu được gọi là bộ vi phân. Đáp ứng tần số của một bộ vi phân lý tưởng trong miền tần số liên tục được định nghĩa như sau:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = j\omega$$

$$H\left(e^{j\omega}\right) = j\omega \xleftrightarrow{\text{IFT}} h(n) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\pi n)}{n} & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

$$\left(0 \leq |\omega| \leq \pi\right)$$

Nhận xét: đáp ứng xung h(n) của bộ vi phân lý tưởng là phản đối xứng,

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h(n) = -h(-n) \end{cases}$$

3.10. Bộ biến đổi Hilbert

Đáp ứng tần số của bộ biến đổi Hilbert lý tưởng:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} -j & 0 \leq |\omega| \leq \pi \\ j & -\pi \leq |\omega| \leq 0 \end{cases}$$

Thực chất bộ biến đổi Hilbert lý tưởng chính là bộ lọc thông tất di pha một góc 90^0.

Biểu diễn bộ biến đổi Hilbert lý tưởng dưới dạng đáp ứng biên độ và đáp ứng pha:

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| e^{j\varphi(\omega)}$$

Trong đó:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = 1 \qquad -\pi \leq |\omega| \leq \pi$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & 0 \leq \omega \leq \pi \\ \dfrac{\pi}{2} & -\pi \leq \omega \leq 0 \end{cases}$$

Đáp ứng xung h(n) của bộ biến đổi Hilbert lý tưởng:

$$h(n) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2} n\right)}{n}, & n \neq 0 \\ 0, & n = 0 \end{cases}$$

Nhận xét: đáp ứng xung h(n) của bộ biến đổi Hilbert lý tưởng có chiều dài vô hạn, không nhân quả và phản đối xứng.

3.11. Lấy mẫu tín hiệu

Xét một tín hiệu tương tự $x_a(t)$ có năng lượng hữu hạn, nghĩa là: $\int_{-\infty}^{+\infty}|x_a(t)|^2 dt < \infty$.

Ngoài ra, một tín hiệu tương tự có năng lượng hữu hạn là tín hiệu có bề rộng phổ hữu hạn, nghĩa là: $X_a(\omega_a) = \begin{cases} \neq 0, & |\omega_a| < \Omega_a \\ 0\ , & |\omega_a| > \Omega_a \end{cases}$ (Ω_a: một mốc tần số hữu hạn)

Phổ của $X_a(\omega_a)$ viết dưới dạng chuỗi Fourier:

$$X_a(\omega_a) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{j\omega_a n\frac{\pi}{\Omega_a}} \quad (1) \quad \textit{với} \quad a_n = \frac{1}{2\Omega_a}\int_{-\Omega_a}^{+\Omega_a} X_a(\omega_a) e^{j\omega_a n\frac{\pi}{\Omega_a}} d\omega_a.$$

Mặt khác $x_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_a}^{+\Omega_a} X_a(\omega_a) e^{j\omega_a t} d\omega_a$.

Tính $x_a(t)$ tại các thời điểm rời rạc $t = n\frac{\pi}{\Omega_a}$, ta có:

$$x_a\left(n\frac{\pi}{\Omega_a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_a}^{+\Omega_a} X_a(\omega_a) e^{j\omega_a n\frac{\pi}{\Omega_a}} d\omega_a \tag{2}$$

Đồng nhất (1) và (2) suy ra: $\boxed{a_n = \frac{\pi}{\Omega_a} x_a\left(n\frac{\pi}{\Omega_a}\right) = \frac{\pi}{\Omega_a} x\left(n\frac{\pi}{\Omega_a}\right)}$

Tìm lại tín hiệu tương tự $x_a(t)$ từ các giá trị rời rạc $x\left(n\frac{\pi}{\Omega_a}\right)$:

$$\boxed{\begin{aligned} x_a(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(n\frac{\pi}{\Omega_a}\right) \frac{\sin\left[\Omega_a\left(t - n\frac{\pi}{\Omega_a}\right)\right]}{\Omega_a\left(t - n\frac{\pi}{\Omega_a}\right)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x\left(n\frac{\pi}{\Omega_a}\right) \operatorname{sinc}\left[\Omega_a\left(t - n\frac{\pi}{\Omega_a}\right)\right] \end{aligned}}$$

(Nội dung của định lý lấy mẫu)

Định lý lấy mẫu trong miền tần số:

$T_s = \frac{\pi}{\Omega_a}$: chu kỳ lấy mẫu; $\quad F_s = \frac{1}{T_s}$: tần số lấy mẫu

Ta có các quan hệ sau đây:

$$\Omega_s = 2\pi F_s = 2\pi \frac{\Omega_a}{\pi} = 2\Omega_a, \qquad \Omega_a = 2\pi F_a$$

Phát biểu định lý: "*Một tín hiệu tương tự có bề rộng phổ hữu hạn trong khoảng* $\left[-F_a = -\frac{\Omega_a}{2\pi}, F_a = +\frac{\Omega_a}{2\pi}\right]$ *được xác định một cách hoàn toàn chính xác bởi tập hợp các mẫu* $x(nT_s)$ *của nó nếu tần số lấy mẫu thoả mã`n điều kiện* $F_s \geq 2F_a$".

Tần số Nyquist: tần số lấy mẫu lấy giá trị $2F_a$ được gọi là tần số Nyquist.

$$F_{sNy} = 2F_a$$

Chú ý:

Việc nắm vững những kiến thức trong chương này rất cần thiết để tiếp cận các nội dung kiến thức tiếp theo như:

- Biến đổi Fourier rời rạc DFT. Đây là một trong những biến đổi quan trọng nhất của xử lý tín hiệu số.
- Tổng hợp các bộ lọc số FIR, IIR.

Một số các biến đổi toán học cần thiết để làm bài tập và nghiên cứu học tập trong chương này:

+ Tích phân thông dụng để tính IFT:

$$\int e^{\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha t}$$

+ Tổng cấp số nhân:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \text{ Nếu } |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$$

+ Khai triển Ơle:

$$e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$$

$$e^{-j\omega} = \cos\omega - j\sin\omega$$

+ Một số khai triển thông thường:

$$1 - e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2}.(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}) = 2j.\sin(\omega/2).e^{-j\omega/2}$$

$$1 + e^{-j\omega} = e^{-j\omega/2}.(e^{j\omega/2} + e^{-j\omega/2}) = 2\cos(\omega/2).e^{-j\omega/2}$$

B. BÀI TẬP CƠ BẢN

3.1. Xét phương trình sai phân tuyến tính hệ số hằng sau đây:

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = 2x(n-1)$$

Hãy xác định y(n) đối với $n \geq 0$ khi $x(n) = \delta(n)$ và $y(n) = 0$, $n < 0$

Lời giải:

Thực hiện biến đổi Fourier cho cả hai phía, ta có:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)-\frac{3}{4}Y\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega}+\frac{1}{8}Y\left(e^{j\omega}\right)e^{-j2\omega}=2X\left(e^{j\omega}\right)e^{-j\omega}$$

Suy ra hàm hệ thống có dạng:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{2e^{-j\omega}}{1-\frac{3}{4}e^{-j\omega}+\frac{1}{8}e^{-j2\omega}}$$

Đáp ứng xung (đối với $x(n)=\delta(n)$) chính là biến đổi Fourier ngược của $H\left(e^{j\omega}\right)$.

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{-8}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}}+\frac{8}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Suy ra: $h(n)=-8\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)+8\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$

Khi $x(n)=\delta(n)$ thì $y(n)=h(n)$. Do đó $y(n)=-8\left(-\frac{1}{4}\right)^{n}u(n)+8\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u(n)$.

3.2. a) Tìm đáp ứng tần số $H\left(e^{j\omega}\right)$ của một hệ thống tuyến tính bất biến có đầu vào và đầu ra thoả mãn phương trình sai phân sau:

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+2x(n-1)+x(n-2).$$

b) Hãy viết phương trình sai phân của hệ thống có đáp ứng xung như sau:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+e^{-j3\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{3}{4}e^{-j2\omega}}$$

Lời giải:

a) Phương trình sai phân:

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+2x(n-1)+x(n-2)$$

Thực hiện biến đổi Fourier cả hai phía:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)\left[1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right]=X\left(e^{j\omega}\right)\left[1+2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}\right]$$

Suy ra đáp ứng tần số:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}=\frac{1+2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

b) Một hệ thống với đáp ứng tần số:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+e^{-j3\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{3}{4}e^{-j2\omega}}=\frac{Y\left(e^{j\omega}\right)}{X\left(e^{j\omega}\right)}$$

Suy ra, $Y\left(e^{j\omega}\right)\left[1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}+\frac{3}{4}e^{-j2\omega}\right]=X\left(e^{j\omega}\right)\left[1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}+e^{-j3\omega}\right]$

Thực hiện biến đổi Fourier ngược ta có:

$$y(n)+\frac{1}{2}y(n-1)+\frac{3}{4}y(n-2)=x(n)-\frac{1}{2}x(n-1)+x(n-3)$$

3.3. Một hệ thống tuyến tính bất biến (LTI) có đáp ứng xung $h(n)=5\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)$. Dùng biến đổi Fourier để tìm đầu ra của hệ thống khi đầu vào của hệ thống là $x(n)=\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

Lời giải:

Thực hiện biến đổi Fourier của cả $h(n)$ và $x(n)$:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{5}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \text{ và } X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}.$$

Ta có:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right).H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{5}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}.\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}=\frac{3}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{2}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Suy ra: $y(n)=3\left(-\frac{1}{2}\right)^n u(n)+2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n)$

3.4. Xét phương trình sai phân:

$$y(n)-\frac{5}{6}y(n-1)+\frac{1}{6}y(n-2)=\frac{1}{3}x(n-1)$$

a) Hãy tìm đáp ứng xung, đáp ứng tần số, đáp ứng bước của hệ thống LTI nhân quả thoả mãn phương trình sai phân đó.

b) Hãy tìm dạng tổng quát của nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân.

c) Xét một hệ thống thoả mãn phương trình sai phân trên thoả mãn đk $y(0)=y(1)=1$ nhưng hệ thống này không nhân quả cũng không LTI. Hãy tìm đáp ứng của hệ thống khi $x(n)=\delta(n)$.

Lời giải:

a) Đáp ứng tần số

$$Y\left(e^{j\omega}\right)-\frac{5}{6}e^{-j\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)+\frac{1}{6}e^{-j2\omega}Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{3}e^{-j\omega}X\left(e^{j\omega}\right)$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\frac{1}{3}e^{-j2\omega}}{1 - \frac{5}{6}e^{-j\omega} + \frac{1}{6}e^{-j2\omega}}$$

Thực hiện biến đổi Fourier ngược cho $H(e^{j\omega})$:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{-2}{1 - \frac{1}{3}e^{-j\omega}} + \frac{2}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

Ta có đáp ứng xung của hệ thống: $h(n) = -2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$

Đối với đáp ứng bước của hệ thống s(n):

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k)u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} h(k) = -2\frac{1-(1/3)^{n+1}}{1-1/3}u(n) + 2\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2}u(n)$$

$$= \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)u(n)$$

b) $y_h(n)$ là nghiệm thuần nhất của phương trình sai phân khi x(n) = 0, có dạng: $y_h(n) = \sum Ac^n$, trong đó c là nghiệm của phương trình: $c^2 - \frac{5}{6}c + \frac{1}{6} = 0$. Phương trình này có nghiệm là $c = 1/2$ và $c = 1/3$, do đó:

$$y_h(n) = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

c) Nghiệm tổng quát là tổng của nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng, với nghiệm riêng là đáp ứng xung tìm được ở phần (a):

$$y(n) = y_h(n) + y_p(n) = A_1\left(\frac{1}{2}\right)^n + A_2\left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

Dùng các điều kiện đầu bài $y(0) = y(1) = 1$, ta tìm được A_1 và A_2:

$$\begin{aligned} y(0) &= A_1 + A_2 - 2 + 2 = 1 \\ y(1) &= A_1/2 + A_2/3 - 2/3 + 1 = 1 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 + A_2 = 1 \\ A_1/2 + A_2/3 = 2/3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_1 = 2 \\ A_2 = -1 \end{cases}$$

Suy ra đáp ứng của hệ thống khi $x(n) = \delta(n)$ là:

$$y(n) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n u(n) + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

3.5. Cho một hệ thống LTI có đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j2\omega}}{1 + \frac{1}{2}e^{-j4\omega}} \qquad -\pi < \omega \le \pi$$

Xác định đầu ra $y(n)$ nếu đầu vào $x(n)$ đối với mọi n bằng:

$$x(n)=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$$

Lời giải:

$$x(n)=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)=\frac{e^{j\frac{\pi}{4}n}-e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2j}$$

Mặt khác, đáp ứng ra của một hệ thống có tín hiệu vào $x(n)=e^{j\omega n}$ có dạng:

$y(n)=e^{j\omega n}H\left(e^{j\omega}\right)$, do đó đáp ứng ra của một hệ thống có tín hiệu vào $x(n)=\sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ $=\frac{e^{j\frac{\pi}{4}n}-e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2j}$ sẽ là: $y(n)=\frac{H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)e^{j\frac{\pi}{4}n}-H\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)e^{-j\frac{\pi}{4}n}}{2j}$

Đánh giá đáp ứng tần số tại $\omega=\pm\frac{\pi}{4}$:

$$H\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{1-e^{-j\pi/2}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\pi}}=2(1-j)=2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}$$

$$H\left(e^{-j\frac{\pi}{4}}\right)=\frac{1-e^{j\pi/2}}{1+\frac{1}{2}e^{j\pi}}=2(1+j)=2\sqrt{2}e^{j\pi/4}$$

Ta có: $$y(n)=\frac{2\sqrt{2}e^{-j\pi/4}e^{j\pi n/4}-2\sqrt{2}e^{j\pi/4}e^{-j\pi n/4}}{2j}=2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}n-\frac{\pi}{4}\right)$$

3.6. a) Xác định biến đổi Fourier của chuỗi:

$$r(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le M\\ 0 & \text{n khác}\end{cases}$$

b) Xét chuỗi

$$w(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right], & 0\le n\le M\\ 0 & \text{n khác}\end{cases}$$

Vẽ w(n) và biểu diễn biến đổi Fourier của w(n), $W\left(e^{j\omega}\right)$ theo $R\left(e^{j\omega}\right)$. (Gợi ý: biểu diễn w(n) dưới dạng r(n) và hàm mũ phức $e^{j\frac{2\pi}{M}n}$ và $e^{-j\frac{2\pi}{M}n}$).

c) Vẽ biên độ của $R\left(e^{j\omega}\right)$ và $W\left(e^{j\omega}\right)$ cho trường hợp $M=4$.

Lời giải:

a) $r(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le M\\ 0 & n \text{ khác}\end{cases}$

Thực hiện biến đổi Fourier:

$$R\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{n=0}^{M}e^{-j\omega n}=\frac{1-e^{-j\omega(M+1)}}{1-e^{-j\omega}}=e^{-j\frac{M}{2}\omega}\left(\frac{e^{j\frac{M+1}{2}\omega}-e^{-j\frac{M+1}{2}\omega}}{e^{j\omega}-e^{-j\omega}}\right)=e^{-j\frac{M}{2}\omega}\frac{\sin\left(\frac{M+1}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

b) Ta có: $w(n)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right], & 0\le n\le M\\ 0, & n \text{ khác}\end{cases}$

Xét thấy $w(n)=r(n).\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right]$

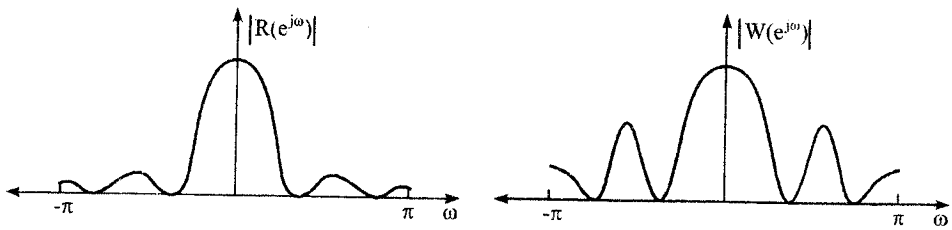
Do đó:

$$W\left(e^{j\omega}\right)=R\left(e^{j\omega}\right)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{2\pi n}{M}\right)\right]e^{-j\omega n}$$

$$=R\left(e^{j\omega}\right)*\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi n}{M}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi n}{M}}\right)e^{-j\omega n}$$

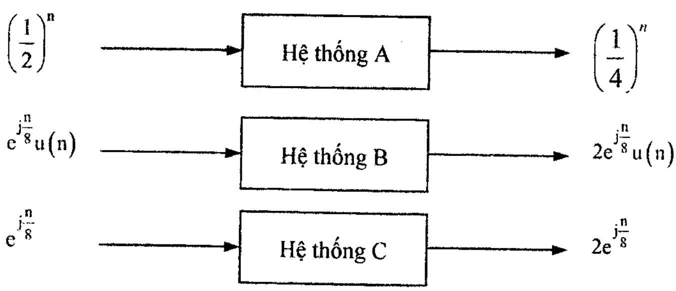
$$=R\left(e^{j\omega}\right)*\left(\frac{1}{2}\delta(\omega)+\frac{1}{4}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{M}\right)+\frac{1}{4}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{M}\right)\right)$$

c)



Hình 3.1

3.7. Cho ba hệ thống A, B, C có đầu vào và đầu ra như ở hình vẽ dưới đây:



Hình 3.2

Xác định xem mỗi hệ thống có phải là LTI hay không? Nếu câu trả lời là "có", hãy xác định xem liệu có thể có hơn một hệ thống LTI với cặp đầu vào-đầu ra đã cho không? Hãy giải thích câu trả lời của bạn?

Lời giải:

* Hệ thống A: $x(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Đầu vào là một eigenfunction của một hệ thống LTI. Nghĩa là nếu hệ thống là tuyến tính thì đầu ra sẽ là ảnh của đầu vào, nhân với một hệ số phức. Bởi vì $y(n)=\left(\frac{1}{4}\right)^n$, nên hệ thống A không phải là LTI.

* Hệ thống B: $x(n)=e^{j\frac{n}{8}}u(n)$

$$X(e^{j\omega})=FT\{x(n)\}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{j\frac{n}{8}}u(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-j\left(\omega-\frac{1}{8}\right)n}=\frac{1}{1-e^{-j\left(\omega-\frac{1}{8}\right)}}$$

Đầu ra là $y(n)=2x(n)$, do đó: $Y(e^{j\omega})=\dfrac{2}{1-e^{-j\left(\omega-\frac{1}{8}\right)}}$

Suy ra đáp ứng tần số của hệ thống là: $H(e^{j\omega})=\dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=2$

Vậy hệ thống này là khuếch đại tuyến tính.

* Hệ thống C: Vì $x(n)=e^{j\frac{n}{8}}$ là một eigenfunction của một hệ thống LTI. Ta hi vọng rằng đầu ra sẽ là: $y(n)=\alpha e^{j\frac{n}{8}}$, trong đó α là một hằng số phức, nếu hệ thống C là LTI. Theo đầu bài, đầu ra $y(n)=2e^{j\frac{n}{8}}$, do đó hệ thống C đúng là LTI. Tuy nhiên hệ thống này không phải là duy nhất, vì nó chỉ có một sự ràng buộc là: $H(e^{j\omega})_{\omega=\frac{1}{8}}=2$.

3.8. Xét một hệ thống LTI với đáp ứng tần số:

$$H(e^{j\omega})=e^{-j\left(\omega-\frac{\pi}{4}\right)}\frac{1+e^{-j2\omega}+4e^{-j4\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j2\omega}}\qquad -\pi<\omega\le\pi$$

Hãy xác định đầu ra y(n) cho tất cả n, biết đầu vào x(n) bằng:

$$x(n)=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$$

Lời giải:

Viết lại đáp ứng tần số của hệ thống:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=e^{j\frac{\pi}{4}}.e^{-j\omega}\frac{1+e^{-j2\omega}+4e^{-j4\omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j2\omega}}\qquad -\pi<\omega\le\pi$$

$$=e^{j\frac{\pi}{4}}.G\left(e^{j\omega}\right)$$

Đặt $y_1(n)=x(n)*g(n)$, ta có:

$$x(n)=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\frac{e^{j\frac{\pi n}{2}}+e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{2};\ y_1(n)=\frac{G\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)e^{j\frac{\pi n}{2}}+G\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)e^{-j\frac{\pi n}{2}}}{2}$$

Đánh giá đáp ứng tần số tại $\omega=\pm\frac{\pi}{2}$:

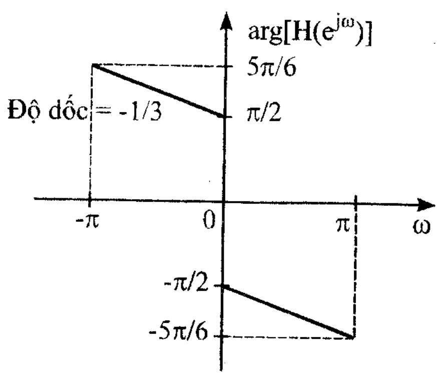
$$G\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)=e^{-j\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+e^{-j\pi}+4e^{-j2\pi}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\pi}}\right)=8e^{-j\frac{\pi}{2}};\ G\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)=8e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Do đó, $$y_1(n)=\frac{8e^{j\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)}+8e^{j\left(-\frac{\pi}{2}n+\frac{\pi}{2}\right)}}{2}=8\cos\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)$$

và $$y(n)=e^{j\frac{\pi}{4}}y_1(n)=8e^{j\frac{\pi}{4}}\cos\left(\frac{\pi}{2}n-\frac{\pi}{2}\right)$$

3.9. Xét một hệ thống LTI có $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=1$ và $\arg\left[H\left(e^{j\omega}\right)\right]$ như hình vẽ dưới đây. Nếu đầu vào là $x(n)=\cos\left(\frac{3\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, hãy xác định đầu ra.

Lời giải:



Hình 3.3

Vì $H\left(e^{-j\omega}\right)=H^*\left(e^{j\omega}\right)$, ta có:

$$y(n)=\left|H\left(e^{j\frac{3\pi}{2}\omega}\right)\right|\cos\left(\frac{3\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}+\angle H\left(e^{j\frac{3\pi}{2}\omega}\right)\right)$$

$H\left(e^{j\omega}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ 2π, nên

$$H\left(e^{j\frac{3\pi}{2}}\right)=H\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)=e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

Do đó, $$y(n)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}n+\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}n+\frac{11\pi}{12}\right)$$

3.10. Xét một hệ thống LTI có đáp ứng tần số $H\left(e^{j\omega}\right)=e^{-j\omega/2}\qquad |\omega|<\pi$

Hãy xác định xem hệ thống có nhân quả không? Chứng minh kết luận của bạn.

Lời giải:

Đặt vào đầu vào hệ thống tín hiệu $x(n)=\delta(n-1)$, nếu hệ thống là nhân quả thì đầu ra $y(n)$ sẽ bằng 0 đối với $n<1$. Chúng ta sẽ đánh giá $y(0)$:

$$y(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}Y\left(e^{j\omega}\right)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-j\omega}e^{-j\omega/2}d\omega=-\frac{2}{3\pi}\neq 0$$

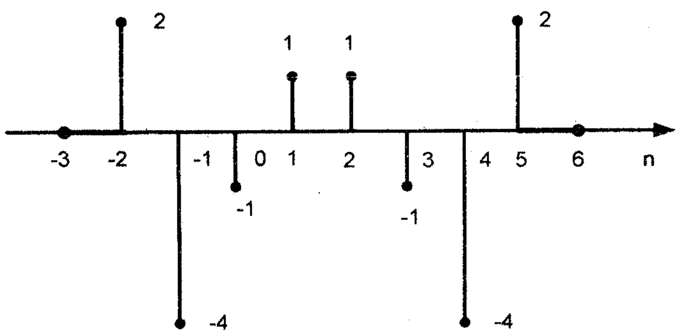
Điều này chứng minh rằng hệ thống này không nhân quả.

3.11. Hai chuỗi $x_1(n)$ và $x_2(n)$ được cho như ở hình vẽ dưới đây. Cả 2 chuỗi đều bằng không đối với tất cả các n nằm ngoài vùng đã hiển thị. $X_1\left(e^{j\omega}\right), X_2\left(e^{j\omega}\right)$ là các biến đổi Fourier của các chuỗi đã cho, và nói chung chúng là các giá trị phức và được viết dưới dạng:

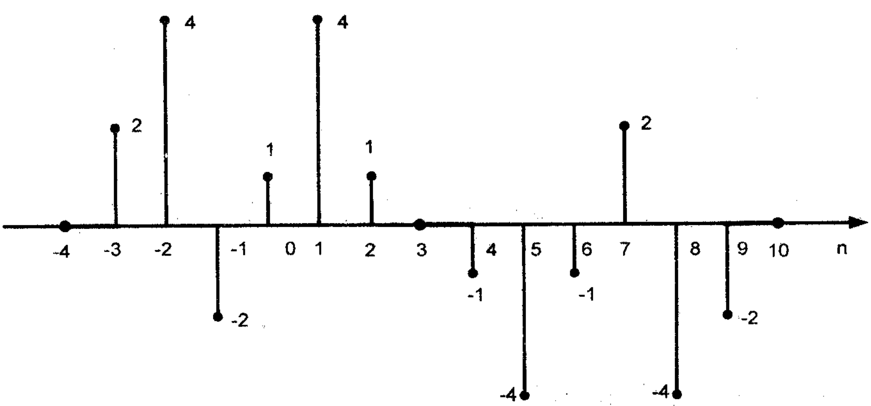
$$X_1\left(e^{j\omega}\right)=A_1(\omega)e^{j\theta_1(\omega)}$$

$$X_2\left(e^{j\omega}\right)=A_2(\omega)e^{j\theta_2(\omega)}$$

Trong đó $A_1(\omega)$, $\theta_1(\omega)$, $A_2(\omega)$, $\theta_2(\omega)$ đều là các hàm giá trị thực, và được chọn sao cho cả $A_1(\omega), A_2(\omega)$ đều không âm khi $\omega=0$, nhưng với $\omega\neq 0$ thì có thể mang giá trị âm hoặc dương. Hãy xác định các lựa chọn phù hợp cho $\theta_1(\omega)$, $\theta_2(\omega)$ và vẽ hai hàm pha này trong khoảng $0<\omega<2\pi$.



Hình 3.4

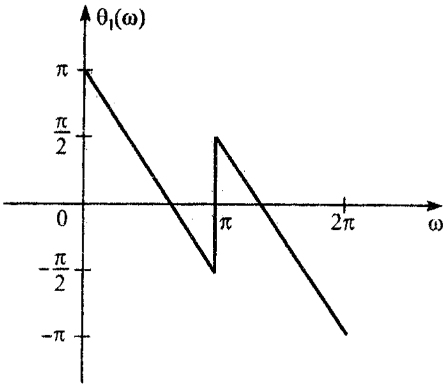


Hình 3.5

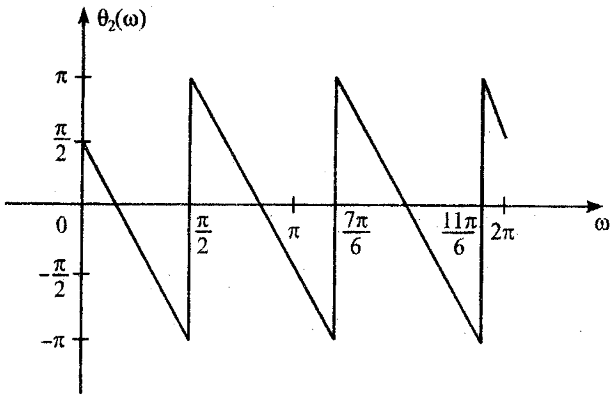
Lời giải:

$x_1(n)$ là đối xứng chẵn xung quanh n = 1,5. Ngoài ra, bởi vì $\sum x_1(n) < 0$ và ta muốn $A_1(0) \geq 0$, ta cần phải cộng thêm π vào pha. Do đó một lựa chọn phù hợp cho $\theta_1(\omega)$ sẽ là:

$$\theta_1(\omega) = -\frac{3}{2}\omega + \pi \qquad |\omega| < \pi$$



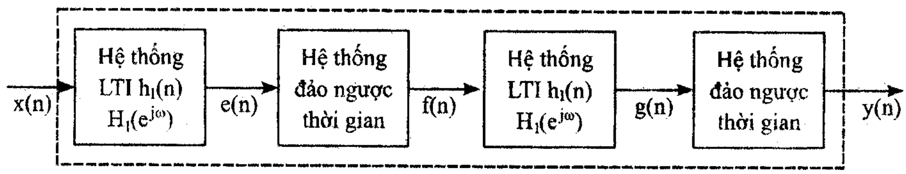
Hình 3.6



Hình 3.7

$x_2(n)$ là đối xứng lẻ xung quanh n =3. Do đó $\theta_2(\omega) = -3\omega + \frac{\pi}{2} \qquad |\omega| < \pi$

3.12. Xét các hệ thống rời rạc theo thời gian được mắc nối tiếp nhau như hình vẽ. Các hệ thống đảo ngược thời gian được định nghĩa bởi các phương trình $f(n) = e(-n), y(n) = g(-n)$. Giả thiết trong bài tập này $x(n), h_1(n)$ là các chuỗi thực.



Hình 3.8

a) Hãy biểu diễn $E(e^{j\omega})$, $F(e^{j\omega})$, $G(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$ theo $X(e^{j\omega})$, $H_1(e^{j\omega})$.

b) Kết quả ở câu a) sẽ cho bạn thấy hệ thống tổng quát là LTI. Hãy xác định đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của hệ thống tổng quát.

c) Tìm đáp ứng xung $h(n)$ của hệ thống tổng quát theo $h_1(n)$.

Lời giải:

a) $E(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

$$F(e^{j\omega}) = E(e^{-j\omega}) = H_1(e^{-j\omega})X(e^{-j\omega})$$

$$G(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})F(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})H_1(e^{-j\omega})X(e^{-j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = G(e^{-j\omega}) = H_1(e^{-j\omega})H_1(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

b) Do $Y(e^{j\omega}) = G(e^{-j\omega}) = H_1(e^{-j\omega})H_1(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$, ta có:

$$H(e^{j\omega}) = H_1(e^{-j\omega})H_1(e^{j\omega})$$

c) Thực hiện biến đổi Fourier ngược của $H(e^{j\omega})$, ta có:

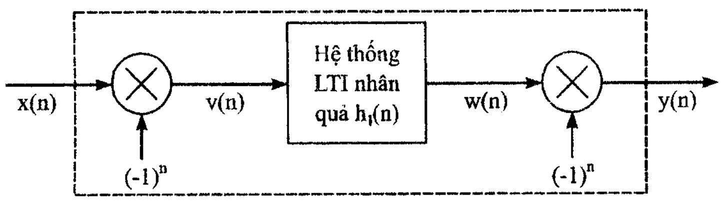
$$h(n) = h_1(-n) * h_1(n).$$

3.13. Hệ thống tổng quát nằm trong hình chữ nhật được bao bởi đường đứt nét dưới đây có thể thấy là tuyến tính và bất biến.

a) Hãy tìm biểu diễn của $H(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của hệ thống tổng quát với đầu vào $x(n)$ và đầu ra $y(n)$ theo $H_1(e^{j\omega})$. $H_1(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của hệ thống LTI bên trong. Chú ý rằng $(-1)^n = e^{j\pi n}$.

b) Vẽ $H(e^{j\omega})$ cho trường hợp đáp ứng tần số của hệ thống LTI bên trong bằng:

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$



Hình 3.9

Lời giải:

a) Sử dụng các đặc điểm của biến đổi Fourier và thực tế là $(-1)^n = e^{j\pi n}$, ta có:

$$V(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega+\pi)})$$

$$W(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})V(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})X(e^{j(\omega+\pi)})$$

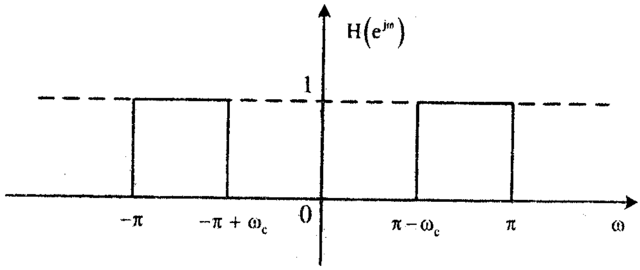
$$Y(e^{j\omega}) = W(e^{j(\omega-\pi)}) = H_1(e^{j(\omega-\pi)})X(e^{j\omega})$$

Do đó $H(e^{j\omega}) = \dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = H_1(e^{j(\omega-\pi)})$

b) $H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j(\omega-\pi)})$

Với $H_1(e^{j\omega})$ đã cho ở đầu bài, ta có:

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \pi - \omega_c < |\omega| \le \pi \\ 0 & |\omega| < \pi - \omega_c \end{cases}$$



Hình 3.10

3.14. Xét hệ thống như hình vẽ, trong đó các hệ thống con S_1, S_2 là LTI.

a) Hệ thống tổng quát nằm trong hình chữ nhật được bao bởi đường đứt nét có phải là hệ thống LTI không? Chứng minh. Nếu nó không phải là LTI thì hãy đưa ra một phản ví dụ.

b) Giả sử S_1, S_2 có đáp ứng tần số là $H_1(e^{j\omega}), H_2(e^{j\omega})$ như sau:

$$H_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & |\omega| \le 0,2\pi \\ \text{không xác định} & 0,2\pi < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

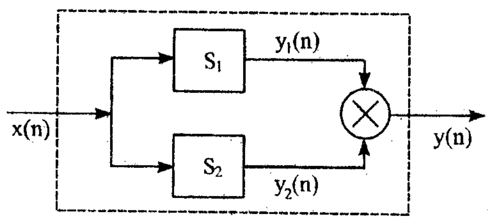
$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} \text{không xác định} & |\omega| \le 0,4\pi \\ 0 & 0,4\pi < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

Đầu vào x(n) có đáp ứng tần số như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} \text{không xác định} & |\omega| < 0,3\pi \\ 0 & 0,3\pi \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

$$Y(e^{j\omega}) = DFT\{y(n)\}$$

Trong khoảng nào của $-\pi \le \omega < \pi$ thì $Y(e^{j\omega}) = 0$?



Hình 3.11

Lời giải:

a) Hệ thống tổng quát không đảm bảo là một hệ thống LTI. Một phản ví dụ là:

$$y_1(n) = x(n)$$
$$y_2(n) = x(n)$$
$$y(n) = y_1(n)y_2(n) = x^2(n)$$

Đây không phải là một hệ thống tuyến tính, do đó không phải là LTI.

b) $Y_1(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

$$Y_2(e^{j\omega}) = H_2(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$
$$Y(e^{j\omega}) = Y_1(e^{j\omega}) * Y_2(e^{j\omega})$$

Sử dụng các mối quan hệ nêu trên ta có:

$$Y(e^{j\omega}) = \begin{cases} \text{không xác dinh} & |\omega| < 0,6\pi \\ 0 & 0,6\pi \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

3.15. Biểu thức $y(n) = \nabla[x(n)] = x(n) - x(n-1)$ được gọi là độ lệch lùi đầu tiên (first backward difference). Trong đó x(n) là đầu vào còn y(n) là đầu ra của hệ thống.

a) Chứng minh rằng hệ thống là LTI

b) Tìm đáp ứng xung của hệ thống

c) Tìm và vẽ đáp ứng tần số (biên độ và pha)

d) Chứng minh rằng nếu $x(n) = f(n) * g(n)$ thì:

$$\nabla[x(n)] = \nabla[f(n)] * g(n) = f(n) * \nabla[g(n)]$$

e) Tìm đáp ứng xung của hệ thống mà có thể mắc nối tiếp theo sau hệ thống này để có thể khôi phục lại đầu vào, nghĩa là tìm $h_1(n)$ sao cho $h_1(n) * \nabla[x(n)] = x(n)$.

Lời giải:

a) Để xác định liệu hệ thống là tuyến tính hay không, ta xét:

$$\begin{aligned}\nabla[ax_1(n) + bx_2(n)] &= ax_1(n) + bx_2(n) - ax_1(n-1) - bx_2(n-1) \\ &= a[x_1(n) - x_1(n-1)] + b[x_2(n) - x_2(n-1)] \\ &= a\nabla[x_1(n)] + b\nabla[x_2(n)]\end{aligned}$$

Vậy hệ thống là tuyến tính.

Để xác định hệ thống này có bất biến hay không, ta xét:

$$\nabla[x_1(n)] = x(n-1) - x(n-2) = y(n-1)$$

Vậy hệ thống là bất biến.

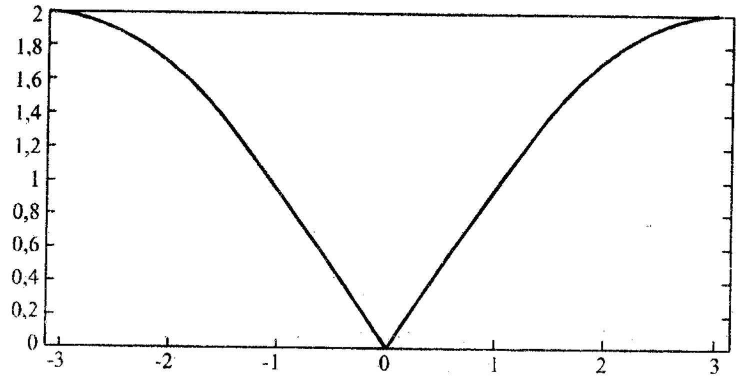
b) Khi đặt đầu vào $x(n) = \delta(n)$, ta có: $y(n) = h(n) = \delta(n) - \delta(n-1)$

c) Thực hiện biến đổi Fourier của kết quả ở phần b), ta có:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=1-e^{-j\omega}$$

Do đó phổ biên độ của tần số là:

$$\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|=\sqrt{\left(1-e^{-j\omega}\right)\left(1-e^{j\omega}\right)}=\sqrt{2-2\cos\omega}$$

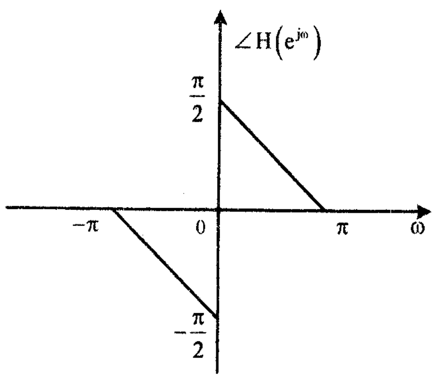


Hình 3.12

Phổ pha của đáp ứng tần số:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=1-e^{-j\omega}=\left(1-\cos\omega\right)+j\sin\omega$$

Do đó $\arg\left\{H\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\arctan\left[\dfrac{\sin\omega}{1-\cos\omega}\right]$



Hình 3.13

d) Nói chung:

$$\nabla\left[x(n)\right]=x(n)*\left[\delta(n)-\delta(n-1)\right]=x(n)-x(n-1)$$

Do đó, đối với $x(n)=f(n)*g(n)$ thì:

$$\begin{aligned}\nabla\left[x(n)\right]&=f(n)*g(n)*\left[\delta(n)-\delta(n-1)\right]\\&=f(n)*\nabla\left[g(n)\right] \qquad \text{(tính chất giao hoán của tích chập)}\\&=\nabla\left[f(n)\right]*g(n)\end{aligned}$$

e) Tìm $h_1(n)$ sao cho $h_1(n)*\nabla[x(n)]=x(n)$:

Hệ thống nghịch đảo phải thoả mãn $h_1(n)*h(n)=\delta(n)$

Hay trong miền tần số: $H_1(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=1$

Mà từ phần c) ta có $H(e^{j\omega})=1-e^{-j\omega}$, do đó:

$$H_1(e^{j\omega})=\frac{1}{1-e^{-j\omega}}$$

Suy ra: $h_1(n)=u(n)$

3.16. Cho $H(e^{j\omega})$ là đáp ứng tần số của một hệ thống LTI với đáp ứng xung $h(n)$. Nói chung $h(n)$ là số phức.

a) Chứng minh rằng $H^*(e^{-j\omega})$ là đáp ứng tần số của một hệ thống có đáp ứng xung $h^*(n)$, với * nghĩa là liên hợp phức.

b) Chứng minh rằng nếu h(n) là số thực thì đáp ứng tần số sẽ là đối xứng liên hợp, nghĩa là $H(e^{-j\omega})=H^*(e^{j\omega})$.

Lời giải:

Đáp ứng tần số của một hệ thống LTI được cho bởi:

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-j\omega n}$$

a) Giả thiết đáp ứng xung là $h^*(n)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h^*(n)e^{-j\omega n}=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{j\omega n}\right]^*=H^*(e^{-j\omega})$$

b) Ta có: $H^*(e^{j\omega})=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-j\omega n}\right]^*=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h^*(n)e^{j\omega n}$

Nếu h(n) là thực: $H^*(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h^*(n)e^{j\omega n}=H(e^{-j\omega})$

Suy ra đáp ứng tần số là đối xứng liên hợp.

3.17. $X(e^{j\omega})=FT[x(n)]$. Chứng minh rằng:

a) $FT[x^*(n)]=X^*(e^{-j\omega})$

b) $FT[x^*(-n)]=X^*(e^{j\omega})$

Lời giải:

$$X(e^{j\omega})=FT[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

a) Biến đổi Fourier của $x^*(n)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(n)e^{-j\omega n} = \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{j\omega n}\right)^* = X^*\left(e^{-j\omega n}\right)$$

b) Biến đổi Fourier của $x^*(-n)$:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x^*(-n)e^{-j\omega n} = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} x^*(l)e^{j\omega l} = \left(\sum_{l=-\infty}^{+\infty} x(l)e^{-j\omega l}\right)^* = X^*\left(e^{j\omega}\right)$$

3.18. Cho $x(n)$, $y(n)$ là các chuỗi phức và $X\left(e^{j\omega}\right)$, $Y\left(e^{j\omega}\right)$ tương ứng là các biến đổi Fourier của các chuỗi đó.

a) Hãy sử dụng lý thuyết tích chập và các tính chất phù hợp để xác định một chuỗi theo (x(n), $y(n)$, biết chuỗi này có biến đổi Fourier là $X\left(e^{j\omega}\right)Y^*\left(e^{j\omega}\right)$.

b) Sử dụng kết quả ở phần a) chứng minh rằng:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)x^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)Y^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega \qquad (*)$$

Phương trình này là dạng tổng quát hơn của lý thuyết Parseval đã nêu trong phần lý thuyết.

c) Sử dụng phương trình (*) để xác định giá trị của tổng sau:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n}\frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}$$

Lời giải:

a) Biến đổi Fourier của $y^*(-n)$ là $Y^*\left(e^{j\omega}\right)$ và $X\left(e^{j\omega}\right)Y\left(e^{j\omega}\right)$ tạo thành cặp biến đổi với $x(n)*y(n)$. Do đó $G\left(e^{j\omega}\right) = X\left(e^{j\omega}\right)Y^*\left(e^{j\omega}\right)$ và $g(n) = x(n)*y^*(-n)$ tạo thành một cặp biến đổi.

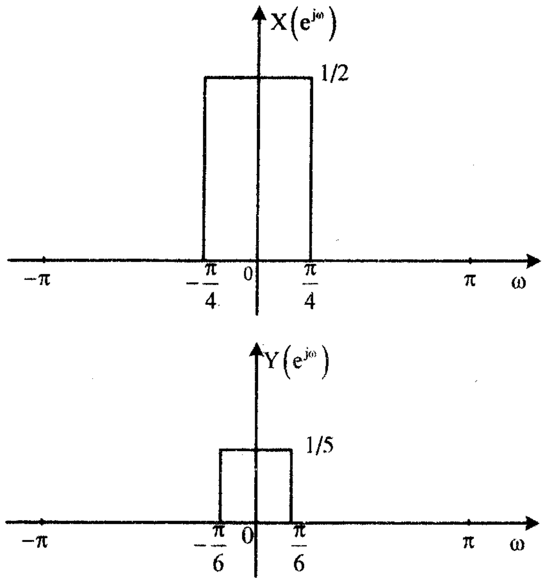
b) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)Y^*\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[x(n)*y^*(-n)\right]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y^*(k-n)e^{-j\omega n}$

Đối với n = 0: $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)Y^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)y^*(k)$

c) Dùng kết quả từ phần b): $x(n) = \dfrac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n}$; $y^*(n) = \dfrac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}$

Chúng ta nhận ra mỗi chuỗi là một xung trong miền tần số:

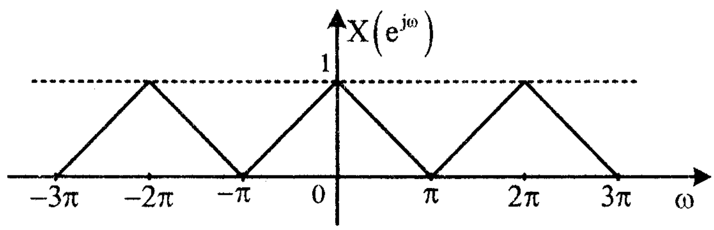
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)y^*(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right)Y^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega = \frac{1}{2\pi}\left[\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{2\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{60}$$



Hình 3.14

3.19. $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$. Hãy xác định biến đổi Fourier của $y_s(n), y_d(n), y_e(n)$ theo $X(e^{j\omega})$.

Trong mỗi trường hợp vẽ $Y(e^{j\omega})$ cho $X(e^{j\omega})$ như hình vẽ sau:



Hình 3.15

a) Bộ lấy mẫu: $y_s(n) = \begin{cases} x(n) & n \text{ chẵn} \\ 0 & n \text{ lẻ} \end{cases}$

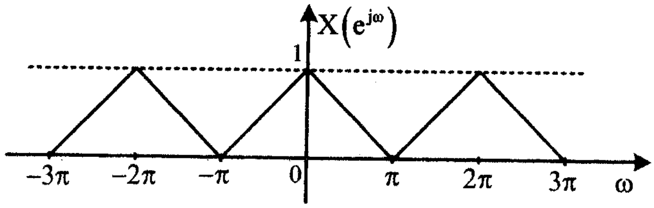
Chú ý: $y_s(n) = \frac{1}{2}\left[x(n) + (-1)^n x(n)\right]$ và $-1 = e^{j\pi}$

b) Bộ nén tín hiệu: $y_d(n) = x(2n)$

c) Bộ dãn tín hiệu: $y_e(n) = \begin{cases} x(n/2) & n \text{ chẵn} \\ 0 & n \text{ lẻ} \end{cases}$

Lời giải:

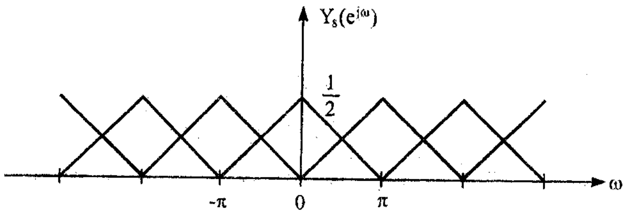
$X(e^{j\omega})$ được cho bởi:



a) $y_s(n)=\begin{cases}x(n) & n \text{ chan}\\ 0 & n \text{ le}\end{cases}=\frac{1}{2}\left(1+e^{j\pi n}\right)x(n)$

Thực hiện biến đổi Fourier của chuỗi này ta có:

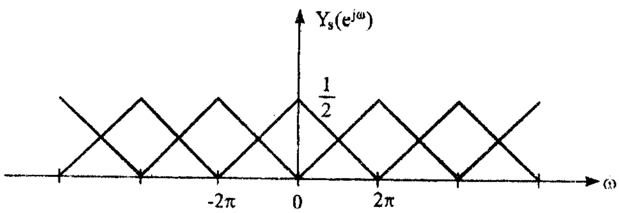
$$Y_s\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X\left(e^{j(\omega+\pi)}\right)\right]$$



Hình 3.16

b) Bộ nén tín hiệu: $y_d(n)=x(2n)$:

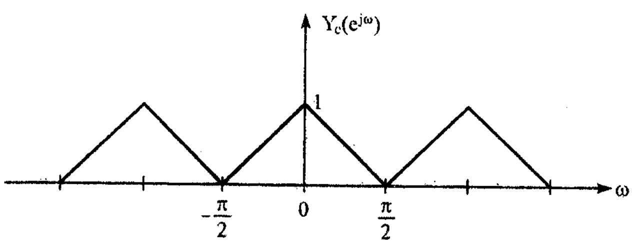
$$Y_d\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}\left[X\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right)+X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{2}+\pi\right)}\right)\right]=Y_s\left(e^{j\frac{\omega}{2}}\right)$$



Hình 3.17

c) Bộ dãn tín hiệu: $y_e(n)=\begin{cases}x(n/2) & n \text{ chan}\\ 0 & n \text{ le}\end{cases}$

$$Y_e\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j2\omega}\right)$$



Hình 3.18

3.20. Cho một hệ thống LTI có đáp ứng xung $h(n) = a^n u(n)$, $|a| < 1$.

a) Hãy tính hàm tự tương quan $\phi_{hh}(m)$ cho đáp ứng xung này.

b) Hãy xác định hàm mật độ năng lượng $\left|H(e^{j\omega})\right|^2$ của hệ thống.

c) Dùng lý thuyết Parseval để đánh giá tích phân sau:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H(e^{j\omega})\right|^2 d\omega$$

cho hệ thống.

Lời giải:

Trong bài tập này, chúng ta giả thuyết $|a| < 1$:

a) $\phi_{hh}(m) = h(m) * h(-m)$

Thực hiện biến đổi Fourier của chuỗi này ta có:

$$\Phi_{hh}(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\cdot\frac{1}{1-ae^{j\omega}} = \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-ae^{j\omega}}\right)$$

Thực hiện biến đổi Fourier, ta có:

$$\phi_{hh}(m) = \frac{a^{|n|}}{1-a^2}$$

b) Từ phần a) ta có:

$$\begin{aligned}
\left|H(e^{j\omega})\right|^2 &= H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\
&= H(e^{j\omega})H(e^{-j\omega}) \text{ bởi vì h(n) là thực} \\
&= \Phi_{hh}(e^{j\omega}) \\
&= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\cdot\frac{1}{1-ae^{j\omega}} \\
&= \frac{1}{1-a^2}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{1}{1-ae^{j\omega}}\right)
\end{aligned}$$

c) Dùng lý thuyết Parseval:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H(e^{j\omega})\right|^2 d\omega = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|h(n)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}|a|^{2n}u(n) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(|a|^2\right)^n = \frac{1}{1-|a|^2}$$

3.21. Đầu vào của một hệ thống lệch lùi đầu tiên (first backward difference - bài tập **3.15.** là một tín hiệu nhiễu trắng có giá trị trung bình bằng 0 và hàm tự tương quan là $\phi_{xx}(m) = \sigma_x^2\delta(m)$.

a) Hãy xác định và vẽ hàm tự tương quan và phổ công suất của lối ra tương ứng của hệ thống.

b) Hãy xác định công suất trung bình của đầu ra hệ thống.

c) Bài tập này cho bạn biết điều gì về hệ thống lệch lùi đầu tiên của một tín hiệu nhiễu (noisy signal)?

Lời giải:

Hệ thống lệch lùi đầu tiên (first backward difference) được cho bởi:

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

a) $\phi_{yy}(m) = E\{y(n)y(n+m)\}$

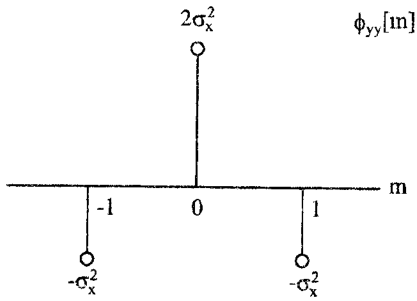
$$= E\{[x(n) - x(n-1)][x(n+m) - x(n+m-1)]\}$$

$$= E\{x(n)x(n+m)\} - E\{x(n)x(n+m-1)\} - E\{x(n-1)x(n+m)\} +$$
$$+ E\{x(n-1)x(n+m-1)\}$$

$$= \phi_{xx}(m) - \phi_{xx}(m-1) - \phi_{xx}(m+1) + \phi_{xx}(m)$$

$$= 2\phi_{xx}(m) - \phi_{xx}(m-1) - \phi_{xx}(m+1)$$

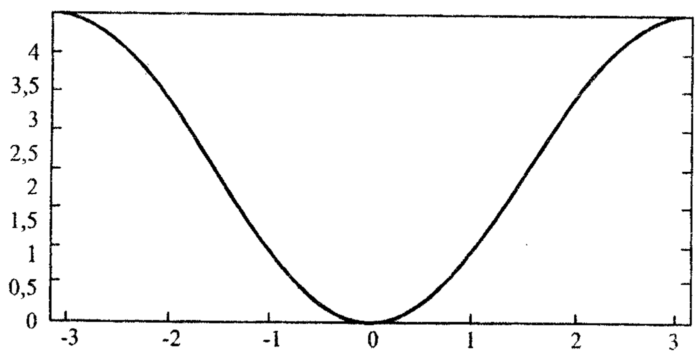
$$= 2\sigma_x^2\delta(m) - \sigma_x^2\delta(m-1) - \sigma_x^2\delta(m+1)$$



Hình 3.19

Để có phổ công suất, thực hiện biến đổi Fourier của hàm tự tương quan, ta có:

$$\Phi_{yy}(e^{j\omega}) = 2\sigma_x^2 - \sigma_x^2 e^{-j\omega} - \sigma_x^2 e^{j\omega} = 2\sigma_x^2 - 2\sigma_x^2\cos\omega = 2\sigma_x^2(1 - \cos\omega)$$



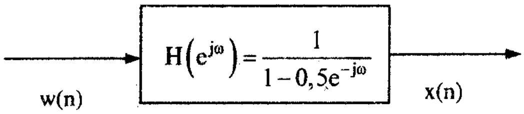
Hình 3.20

b) Công suất trung bình của đầu ra hệ thống được cho bởi $\phi_{yy}(0)$:

$$\phi_{yy}(0) = 2\sigma_x^2$$

c) Công suất nhiễu tăng lên khi đi qua hệ thống lệch lùi đầu tiên (first backward difference). Điều này cho chúng ta thấy rằng hệ thống lệch lùi đầu tiên khuếch đại nhiễu của một tín hiệu.

3.22. Xét một quá trình ngẫu nhiên $x(n)$ là đáp ứng ra của một hệ thống LTI cho trên hình vẽ. $w(n)$ là quá trình nhiễu trắng, dừng, trung bình bằng 0 và thực (real zero-mean stationary white- noise process) với $E\left[w^2(n)\right] = \sigma_w^2$.



Hình 3.21

a) Hãy biểu diễn $E\left[x^2(n)\right]$ theo $\phi_{xx}(n)$ và $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$.

b) Hãy xác định phổ mật độ công suất $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$ của x(n).

c) Hãy xác định hàm tương quan $\phi_{xx}(n)$ của x(n).

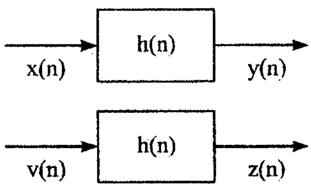
Lời giải:

a) $E\{x(n)x(n)\} = \phi_{xx}(0)$

b)
$$\begin{aligned}\Phi_{xx}(e^{j\omega}) &= X(e^{j\omega})X^*(e^{j\omega}) \\ &= W(e^{j\omega})H(e^{j\omega})W^*(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) \\ &= \Phi_{ww}(e^{j\omega})\left|H(e^{j\omega})\right|^2 \\ &= \sigma_w^2 \frac{1}{1-\cos\omega+\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}\phi_{xx}(n) &= \phi_{ww}(n)*h(n)*h(-n) \\ &= \sigma_w^2\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)\right]*\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} u(-n)\right]\right\} = \sigma_w^2\phi_{hh}(n)\end{aligned}$$

3.23. Xét một hệ thống LTI có đáp ứng xung h(n) mang giá trị thực. Giả sử các đáp ứng của hệ thống đối với hai đầu vào x(n) và v(n) lần lượt là y(n) và z(n) như trong hình vẽ. Các đầu vào x(n) và v(n) trên hình vẽ là các quá trình ngẫu nhiên, dừng, trung bình bằng 0 và thực (real zero-mean stationary random process) với các hàm tự tương quan $\phi_{xx}(n)$, $\phi_{vv}(n)$ và phổ công suất chéo $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$.



Hình 3.22

a) Cho $\phi_{xx}(n)$, $\phi_{vv}(n)$, $\phi_{xv}(n)$, $\Phi_{xx}(e^{j\omega})$, $\Phi_{vv}(e^{j\omega})$, $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$ hãy xác định $\Phi_{yz}(e^{j\omega})$ là phổ công suất chéo của y(n) và z(n), trong đó $\Phi_{yz}(e^{j\omega})$ được xác định bởi: $\phi_{xv}(n) \xleftrightarrow{FT} \Phi_{yz}(e^{j\omega})$, với $\phi_{yz}(n) = E\{y(k)z(k-n)\}$

b) Liệu phổ công suất chéo $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$ luôn không âm với mọi ω, nghĩa là $\Phi_{xv}(e^{j\omega}) \geq 0$?. Chứng minh.

Lời giải:

a) $\phi_{yz}(n) = E\{y(k)z(k-n)\}$

$$= E\left\{\sum_{r=-\infty}^{+\infty} h(r)x(k-r)\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(m)v(k-n-m)\right\}$$

Mà $\phi_{xv}(n) = E\{x(p)v(p-n)\}$, do đó:

$$\phi_{yx}(n) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} h(r)h(m)E\{x(p)v[p-(n+1-s)]\}$$

$$= h(-n) * h(n) * \phi_{xv}(n)$$

$$\Rightarrow \Phi_{yz}(e^{j\omega}) = \left|H(e^{j\omega})\right|^2 \Phi_{xv}(e^{j\omega})$$

b) Phổ công suất chéo $\Phi_{xv}(e^{j\omega})$ không luôn âm với mọi ω.

Xét đầu vào x(n) là một quá trình trắng (white process) và

$$v(n) = -x(n)$$

$$\phi_{xv}(n) = -\sigma_x^2\delta(n)$$

$$\Phi_{xv}(e^{j\omega}) = -\sigma_x^2$$

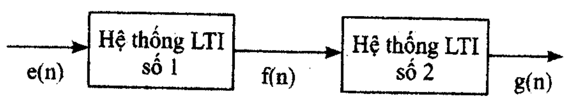
Chú ý rằng $\left|H(e^{j\omega})\right|^2$ là số dương. Mặt khác:

$$\Phi_{yz}(e^{j\omega}) = -\sigma_x^2\left|H(e^{j\omega})\right|^2$$

Do đó phổ công suất chéo có thể mang giá trị âm.

3.24. Xét hệ thống LTI trên hình vẽ dưới đây. Đầu vào hệ thống e(n) là một tín hiệu nhiễu trắng, dừng, trung bình bằng 0 với công suất trung bình σ_e^2. Hệ thống đầu tiên là một hệ thống lệch lùi với $f(n) = e(n) - e(n-1)$. Hệ thống thứ hai là hệ thống thông thấp lý tưởng với đáp ứng tần số:

$$H_2(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$



Hình 3.23

a) Xác định biểu diễn $\Phi_{ff}\left(e^{j\omega}\right)$ là phổ công suất của f(n) và vẽ cho $-2\pi < \omega < 2\pi$.

b) Xác định biểu diễn của hàm tự tương quan $\phi_{ff}(m)$ của f(n).

c) Xác định biểu diễn $\Phi_{gg}\left(e^{j\omega}\right)$ là phổ công suất của g(n) và vẽ cho $-2\pi < \omega < 2\pi$.

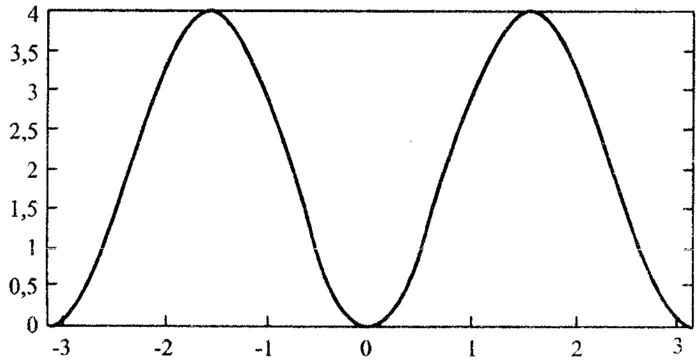
d) Xác định biểu diễn công suất trung bình của lối ra σ_g^2.

Lời giải:

a) Vì $f(n) = e(n) - e(n-1)$, nên $H_1\left(e^{j\omega}\right) = 1 - e^{-j\omega}$.

$\Phi_{ff}\left(e^{j\omega}\right)$ được cho bởi:

$$\Phi_{ff}\left(e^{j\omega}\right) = H_1\left(e^{j\omega}\right)H_1\left(e^{-j\omega}\right)\Phi_{ee}\left(e^{j\omega}\right) = \left(1-e^{-j\omega}\right)\left(1-e^{j\omega}\right)\sigma_e^2$$
$$= \sigma_e^2\left(2 - e^{j\omega} - e^{-j\omega}\right) = \sigma_e^2\left(2 - 2\cos\omega\right)$$

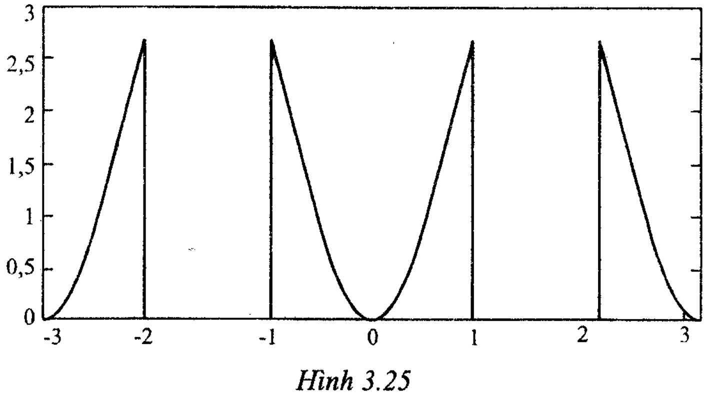


Hình 3.24

b) $\phi_{ff}(m)$ là biến đổi Fourier ngược của $\Phi_{ff}\left(e^{j\omega}\right)$. Dùng kết quả ở phần a) ta có:

$$\phi_{ff}(m) = \sigma_e^2\left(2\delta(m) - \delta(m+1) - \delta(m-1)\right)$$

c) $$\Phi_{gg}\left(e^{j\omega}\right) = H_2\left(e^{j\omega}\right)H_2\left(e^{-j\omega}\right)\Phi_{ff}\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} \sigma_e^2\left(2-2\cos\omega\right), & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \le \pi \end{cases}$$

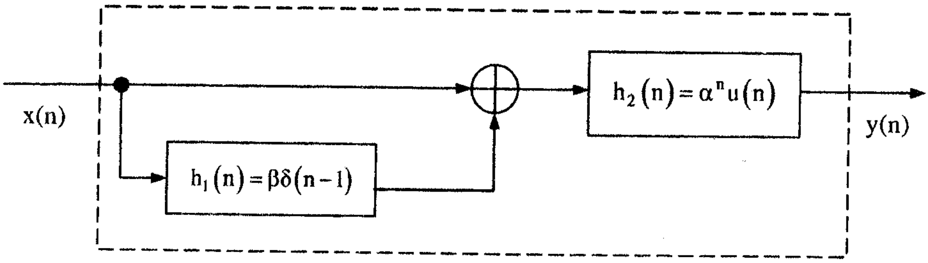


Hình 3.25

d) $\sigma_g^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi_{gg}\left(e^{j\omega}\right)d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c}\sigma_e^2\left(2-2\cos\omega\right)d\omega = \frac{2\sigma_e^2}{\pi}\left(\omega_c - \sin\omega_c\right)$

C. BÀI TẬP NÂNG CAO

3.25. Xét hệ thống như hình vẽ sau đây:



Hình 3.26

a) Tìm đáp ứng xung h(n) của hệ thống tổng quát.

b) Tìm đáp ứng tần số của hệ thống tổng quát.

c) Tìm phương trình vi phân biểu diễn mối quan hệ giữa đầu vào x(n) và đầu ra y(n) của hệ thống.

d) Hệ thống có nhân quả không? Với điều kiện nào thì hệ thống sẽ ổn định?

3.26. Một hệ thống tuyến tính bất biến có đáp ứng xung

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} e^{-j\omega 3}, & |\omega| < \frac{2\pi}{16}\left(\frac{3}{2}\right) \\ 0, & \frac{2\pi}{16}\left(\frac{3}{2}\right) \le |\omega| \le \pi \end{cases}$$

Đầu vào của hệ thống là một xung đơn vị tuần hoàn với chu kỳ N = 16. Tìm đầu ra của hệ thống.

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n+16k)$$

3.27. Cho $X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$, $-1 < a < 0$. Hãy xác định và vẽ các hàm sau đây:

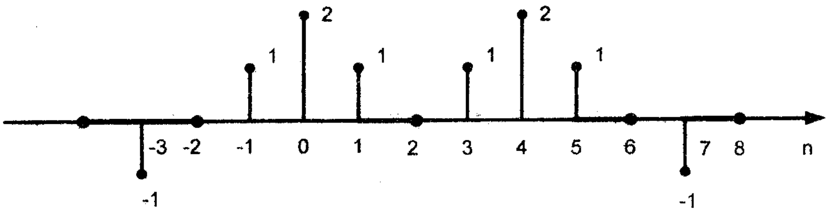
a) $\mathrm{Re}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$

b) $\mathrm{Im}\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$

c) $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|$

d) $\arg\left\{X\left(e^{j\omega}\right)\right\}$

3.28. $X(e^{j\omega})$ là biến đổi Fourier của chuỗi x(n) cho trên hình vẽ sau đây. Thực hiện các tính toán sau đây mà không đánh giá $X(e^{j\omega})$ một cách rõ ràng.



Hình 3.27

a) Đánh giá $X(e^{j\omega})\big|_{\omega=0}$

b) Đánh giá $X(e^{j\omega})\big|_{\omega=\pi}$

c) Tìm $\arg\{X(e^{j\omega})\}$

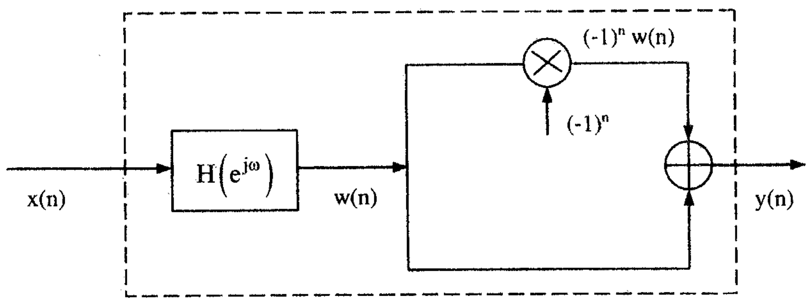
d) Đánh giá $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega$

e) Hãy xác định và vẽ tín hiệu có biến đổi Fourier là $X(e^{-j\omega})$

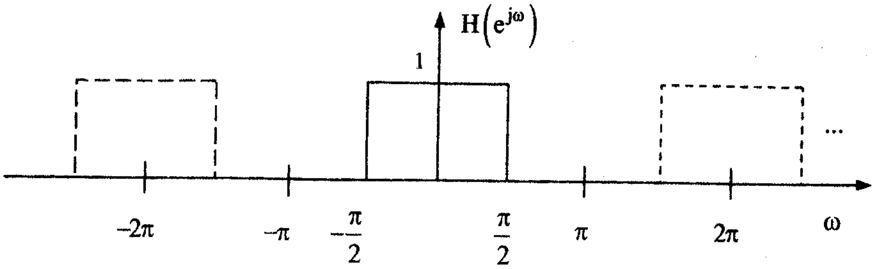
f) Hãy xác định và vẽ tín hiệu có biến đổi Fourier là $\mathrm{Re}\{X(e^{j\omega})\}$

3.29. Cho hệ thống như hình vẽ, hãy xác định đầu ra y(n) khi đầu vào là $x(n) = \delta(n)$ với $H(e^{j\omega})$ là một bộ lọc thông thấp lý tưởng.

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| \le \pi/2 \\ 0 & \pi/2 < |\omega| \le \pi \end{cases}$$



Hình 3.28



Hình 3.29

3.30. Cho một chuỗi có biến đổi Fourier như sau:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1-a^2}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})}, \qquad |a|<1$$

a) Tìm chuỗi x(n)

b) Tính $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})\cos\omega d\omega$

3.31. Một hệ thống LTI có mối quan hệ đầu vào - đầu ra như sau:

$$y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$$

a) Tìm đáp ứng xung h(n) của hệ thống.

b) Hệ thống có ổn định không?

c) Tìm đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ của hệ thống. Sử dụng các đồng nhất thức lượng giác để rút ra một biểu diễn đơn giản của $H(e^{j\omega})$.

d) Vẽ biên độ và pha của đáp ứng tần số.

e) Xét một hệ thống mới có đáp ứng tần số tổng quát $H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j(\omega+\pi)})$. Hãy xác định đáp ứng xung $h_1(n)$ của hệ thống mới.

3.32. Cho tín hiệu rời rạc thực x(n) với biến đổi Fourier $X(e^{j\omega})$ là đầu vào của một hệ thống có đầu ra như sau:

$$y(n) = \begin{cases} x(n), & n \text{ chẵn} \\ 0 & n \text{ còn lại} \end{cases}$$

a) Hãy vẽ tín hiệu rời rạc $s(n) = 1 + \cos(\pi n)$ và biến đổi Fourier $S(e^{j\omega})$ của nó.

b) Biểu diễn biến đổi Fourier $Y(e^{j\omega})$ của đầu ra theo $X(e^{j\omega})$, $S(e^{j\omega})$.

c) Bạn muốn xấp xỉ x(n) bằng tín hiệu nội suy $w(n) = y(n) + \frac{1}{2}[y(n+1) + y(n-1)]$. Xác định biến đổi Fourier $W(e^{j\omega})$ theo $Y(e^{j\omega})$.

d) Hãy vẽ $X(e^{j\omega})$, $Y(e^{j\omega})$, $W(e^{j\omega})$ cho trường hợp $x(n) = \frac{\sin(\pi n/a)}{\pi n/a}$, $a > 1$. Tìn điều kiện để tín hiệu nội suy đã nêu là một xấp xỉ gần đúng của tín hiệu gốc.

3.32. Xét một hệ thống LTI rời rạc với đáp ứng tần số $H(e^{j\omega})$ và đáp ứng xung h(n).

a) Đầu tiên ta cho 3 giả thiết sau về hệ thống:

(i) Hệ thống là nhân quả.

(ii) $H(e^{j\omega}) = H^*(e^{-j\omega})$

(iii) FT của chuỗi h(n+1) là thực.

Sử dụng 3 giả thiết trên chứng minh rằng hệ thống này có một đáp ứng xung chiều dài hữu hạn.

b) Thêm vào 3 giả thiết trên, ta cho thêm 3 giả thiết sau đây:

(iv) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega})d\omega = 2$

(v) $H(e^{j\pi}) = 0$

Những thông tin này đã đủ để xác định hệ thống là duy nhất chưa? Nếu đã đủ, hãy xác định đáp ứng xung h(n). Hãy nêu càng rõ về chuỗi x(n) càng tốt?

3.34. Một hệ thống LTI có đáp ứng xung như sau: $h(n) = a^n u(n)$.

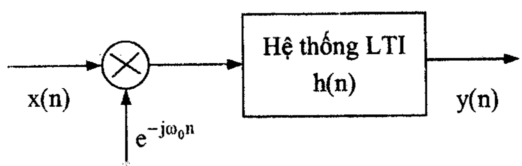
a) Hãy xác định $y_1(n)$ là đáp ứng ra của đầu vào $x_1(n) = e^{j(\pi/2)n}$

b) Sử dụng kết quả của câu a) để xác định đáp ứng ra $y_2(n)$ của đầu vào $x_2(n) = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$.

c) Hãy xác định $y_3(n)$ là đáp ứng ra của đầu vào $x_3(n) = e^{j(\pi/2)n}u(n)$

d) Hãy so sánh $y_3(n)$ với $y_1(n)$ khi n lớn.

3.35. Xét một hệ thống S có đầu vào x(n) và đầu ra y(n) như hình vẽ sau:



Hình 3.30

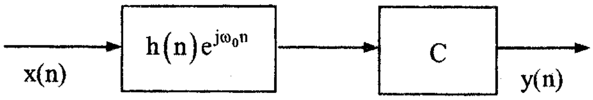
Đầu vào x(n) được nhân với $e^{-j\omega_0 n}$ và tích này được cho qua một hệ thống LTI ổn định với đáp ứng xung h(n).

a) Hệ thống S có tuyến tính không? chứng minh câu trả lời của bạn.

b) Hệ thống S có bất biến không? chứng minh câu trả lời của bạn.

c) Hệ thống S có ổn định không? chứng minh câu trả lời của bạn.

d) Xác định một hệ thống C sao cho sơ đồ khối ở hình vẽ dưới đây là một cách thay thế của biểu diễn mối quan hệ đầu vào-đầu ra của hệ thống S (Chú ý: hệ thống C không bắt buộc phải là một hệ thống LTI).



Hình 3.31

3.36. Một hệ thống thông thấp lý tưởng pha 0 có đáp ứng xung $h_{lp}(n)$ và đáp ứng tần số:

$$H_{lp}\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|<0,2\pi\\ 0, & 0,2\pi\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

a) Một bộ lọc mới được định nghĩa bởi phương trình $h_1(n)=(-1)^n h_{lp}(n)=e^{j\pi n}h_{lp}(n)$. Hãy xác định phương trình của đáp ứng tần số $H_1\left(e^{j\omega}\right)$ và vẽ phương trình đó với $|\omega|<\pi$. Bộ lọc này là loại gì?

b) Một bộ lọc thứ hai được định nghĩa bởi phương trình: $h_2(n)=2h_{lp}(n)\cos(0,5\pi n)$

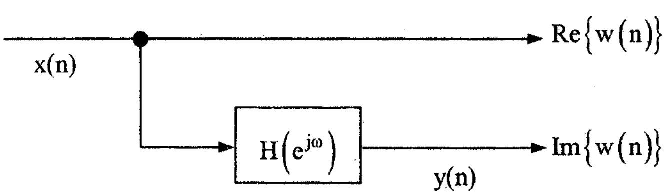
Hãy xác định phương trình của đáp ứng tần số $H_2\left(e^{j\omega}\right)$ và vẽ phương trình đó với $|\omega|<\pi$. Bộ lọc này là loại gì?

c) Một bộ lọc thứ ba được định nghĩa bởi phương trình: $h_3(n)=\dfrac{\sin(0,1\pi n)}{\pi n}h_{lp}(n)$

Hãy xác định phương trình của đáp ứng tần số $H_3\left(e^{j\omega}\right)$ và vẽ phương trình đó với $|\omega|<\pi$. Bộ lọc này là loại gì?

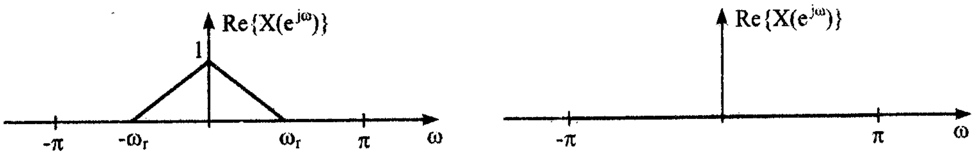
3.37. Một hệ thống LTI có: $H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}-j, & 0<\omega<\pi\\ j, & -\pi<\omega<0\end{cases}$ được xem như một bộ dịch pha 90^0 và được dùng để tạo ra cái mà được xem như là một tín hiệu phân tích w(n) như trên hình 3.32-1. Đặc biệt là tín hiệu phân tích w(n) là một tín hiệu giá trị phức có:

$$\mathrm{Re}\{w(n)\}=x(n)$$
$$\mathrm{Im}\{w(n)\}=y(n)$$



Hình 3.32-1

Nếu $X\left(e^{j\omega}\right)$ được cho như trên hình 3.32-2. Hãy xác định và vẽ biến đổi Fourier $W\left(e^{j\omega}\right)$ của tín hiệu phân tích $w(n) = x(n) + jy(n)$.



Hình 3.32-2

3.38. Chuỗi tự tương quan của một tín hiệu x(n) được xác định bởi:

$$R_x(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x^*(k)x(n+k)$$

a) Chứng minh rằng với một lựa chọn thích hợp tín hiệu g(n), $R_x(n) = x(n) * g(n)$ và hãy xác định lựa chọn phù hợp cho g(n).

b) Chứng minh rằng biến đổi Fourier của $R_x(n)$ bằng $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|^2$.

3.39. Chứng minh rằng biến đổi Fourier ngược của:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^m}, \qquad |\alpha| < 1$$

là biểu thức: $x(n) = \dfrac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}\alpha^n u(n)$

3.40. Xác định biến đổi Fourier ngược của các biểu thức sau:

a) $X_a\left(e^{j\omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega + 2\pi k)$

b) $X_b\left(e^{j\omega}\right) = \dfrac{1-e^{-j\omega(N+1)}}{1-e^{-j\omega}}$

c) $X_c\left(e^{j\omega}\right) = 1 + 2\sum_{l=0}^{N} \cos(\omega l)$

d) $X_d\left(e^{j\omega}\right) = \dfrac{-j\alpha e^{-j\omega}}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^2}, \quad |\alpha| < 1$

3.41. Cho $y(n) = x_1(n) * x_2(n) * x_3(n)$. Chứng minh rằng:

a) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} y(n) = \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1(n)\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2(n)\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_3(n)\right]$

b) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n y(n)=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x_1(n)\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x_2(n)\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x_3(n)\right]$

3.42. Cho chuỗi x(n) nhân quả, thực và có thể tính tổng được. $X(e^{j\omega})$ là biến đổi Fourier của x(n). $X_{re}(e^{j\omega}), X_{im}(e^{j\omega})$ là phần thực và phần ảo của $X(e^{j\omega})$, Chứng minh rằng:

a) $X_{im}(e^{j\omega})=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_{re}(e^{j\theta})\cot g\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta$

b) $X_{re}(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_{im}(e^{j\theta})\cot g\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta+x(0)$

Các phương trình trên được gọi là các quan hệ biến đổi Hilbert rời rạc.

3.43. Xét hàm truyền đạt của bộ lọc thông tất bậc 2:

$$A_2(z)=\frac{d_2+d_1z^{-1}+z^{-2}}{1+d_1z^{-1}+d_2z^{-2}}$$

Nếu δ là giá trị xấp xỉ tần số thấp mong muốn của trễ pha $\tau_p(\omega)=-\theta(\omega)/\omega$. Chứng minh rằng: $d_1=2\left(\frac{2-\delta}{1+\delta}\right)$, $d_2=\frac{(2-\delta)(1-\delta)}{(2+\delta)(1+\delta)}$

3.44. Cho H(.) là biến đổi Hilbert lý tưởng, nghĩa là:

$$H\{x(n)\}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x(k)h(n-k)$$

với
$$h(n)=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2(\pi n/2)}{\pi n}, & n\neq 0\\ 0, & n=0\end{cases}$$

Chứng minh các tính chất sau đây của biến đổi Hilbert lý tưởng:

a) $H\{H\{x(n)\}\}=-x(n)$

b) $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)H\{x(n)\}=0$ (gợi ý: áp dụng lý thuyết Parseval)

c) $H\{x(n)*y(n)\}=H\{x(n)\}*y(n)=x(n)*H\{y(n)\}$, với $x(n)$ và $y(n)$ là chuỗi bất kỳ.

LỜI GIẢI BÀI TẬP NÂNG CAO

3.25. a) Từ hình vẽ:

$$\begin{aligned}y(n)&=[x(n)+x(n)*h_1(n)]*h_2(n)\\&=\{x(n)*[\delta(n)+h_1(n)]\}*h_2(n)\end{aligned}\qquad(*)$$

Gọi h(n) là đáp ứng xung của toàn hệ thống ta có:

$$y(n)=h(n)*x(n)$$

So sánh với biểu thức (*), suy ra:

$$h(n)=[\delta(n)+h_1(n)]*h_2(n)=h_2(n)+h_1(n)*h_2(n)=\alpha^n u(n)+\beta^{n-1}u(n-1)$$

b) Thực hiện biến đổi Fourier của h(n) từ phần a), ta được:

$$H(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}h(n)e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha^n u(n)e^{-j\omega n}+\beta\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\alpha^{n-1}u(n-1)e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{n=0}^{+\infty}\alpha^n u(n)e^{-j\omega n}+\beta\sum_{l=0}^{+\infty}\alpha^{l-1}e^{-j\omega l}$$

với $l=n-1$.

$$H(e^{j\omega})=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}}+\frac{\beta e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}}=\frac{1+\beta e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}},\quad |\alpha|<1$$

c) Ta có $H(e^{j\omega})=\dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\dfrac{1+\beta e^{-j\omega}}{1-\alpha e^{-j\omega}},\quad |\alpha|<1$

Nhân chéo ta được: $Y(e^{j\omega})(1-\alpha e^{-j\omega})=X(e^{j\omega})(1+\beta e^{-j\omega})$

Thực hiện biến đổi Fourier ngược của $Y(e^{j\omega})$: $y(n)-\alpha y(n-1)=x(n)+\beta x(n-1)$

d) Từ phần a): $h(n)=0,\ n<0\Rightarrow$ hệ thống này là nhân quả.

Nếu hệ thống là ổn định, tồn tại biến đổi Fourier. Do đó điều kiện ổn định cũng giống như điều kiện đã được giả thiết ở đáp ứng tần số như trong phần b); nghĩa là hệ thống sẽ ổn định nếu $|\alpha|<1$.

3.26. Chuỗi đầu vào:

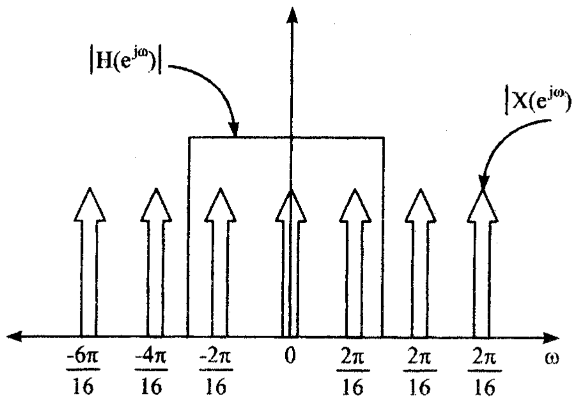
$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n+16k)$$

Có biến đổi Fourier:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(n+16k)e^{-j\omega n}=\frac{1}{16}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(\omega+\frac{2\pi k}{16}\right)$$

Do đó, biểu diễn tần số của đầu vào cũng là một chuỗi xung có chu kỳ. Có 16 xung tần số trong phạm vi $-\pi\le\omega\le\pi$.

Chúng ta vẽ biên độ của $X(e^{j\omega})$ và $H(e^{j\omega})$:



Hình 3.33

Từ hình vẽ ta quan sát thấy rằng hệ thống LTI này là một hệ thống thông thấp. Hệ thống này sẽ loại bỏ tất cả trừ 3 xung tần số. Nhân các xung này với một hệ số pha $e^{-j3\omega}$.

Biến đổi Fourier của đầu ra:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{16}\delta(\omega)+\frac{1}{16}e^{-j\frac{4\pi}{16}}\delta\left(\omega-\frac{2\pi}{16}\right)+\frac{1}{16}e^{j\frac{4\pi}{16}}\delta\left(\omega+\frac{2\pi}{16}\right)$$

Chuỗi đầu ra: $y(n)=\frac{1}{16}+\frac{1}{8}\cos\left(\frac{2\pi n}{16}+\frac{3\pi}{8}\right)$

3.27. Với $-1<a<0$, ta có:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

a) Phần thực của $X\left(e^{j\omega}\right)$:

$$X_R\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2}\left(X\left(e^{j\omega}\right)+X^*\left(e^{j\omega}\right)\right)=\frac{1-a\cos\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}$$

b) Phần ảo:

$$X_I\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2j}\left[X\left(e^{j\omega}\right)-X^*\left(e^{j\omega}\right)\right]=\frac{-a\sin\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}$$

c) Biên độ:

$$\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left[X\left(e^{j\omega}\right)X^*\left(e^{j\omega}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{1-2a\cos\omega+a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

d) Pha:

$$\angle X\left(e^{j\omega}\right)=\arctan\left(\frac{-a\sin\omega}{1-2a\cos\omega}\right)$$

3.28. a)

$$X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=0}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=0}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)=6$$

b)

$$X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\pi n} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)(-1)^n = 2$$

c) Vì x(n) đối xứng qua n = 2, tín hiệu này có pha tuyến tính.

$$X(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j2\omega}$$

$A(\omega)$ là hàm (thực) pha 0 của ω. Do đó:

$$\angle X(e^{j\omega}) = -2\omega, \qquad -\pi \le \omega \le \pi$$

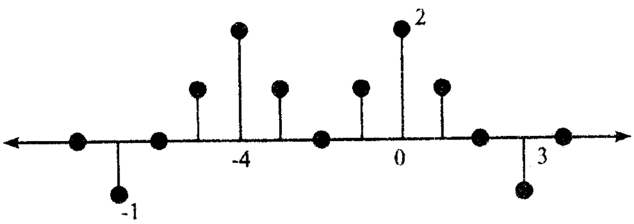
d) $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{-j\omega n}d\omega = 2\pi x(n)$

Khi n = 0: $\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})d\omega = 2\pi x(0) = 4\pi$

e) Gọi y(n) là chuỗi chưa biết. Ta có:

$$X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega}) = \sum_n x(n)e^{j\omega n} = \sum_n x(-n)e^{-j\omega n} = \sum_n y(n)e^{-j\omega n}$$

Suy ra: $y(n) = x(-n)$



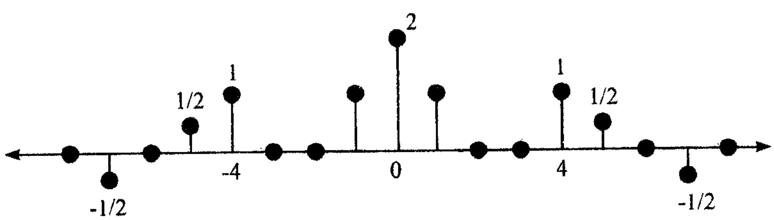
Hình 3.34

f) Ta đã xác định được rằng: $X(e^{j\omega}) = A(\omega)e^{-j2\omega}$

$$X_R(e^{j\omega}) = \text{Re}\{X(e^{j\omega})\} = A(\omega)\cos(2\omega) = \frac{1}{2}A(\omega)\left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right)$$

Thực hiện biến đổi Fourier ngược, ta có:

$$FT\{X_R(e^{j\omega})\} = \frac{1}{2}a(n+2) + \frac{1}{2}a(n-2) = \frac{1}{2}x(n+4) + \frac{1}{2}x(n)$$



Hình 3.35

3.29. Đặt $x(n)=\delta(n)$ thì: $X(e^{j\omega})=1$.

Lối ra của bộ lọc thông thấp lý tưởng: $W(e^{j\omega})=X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})=H(e^{j\omega})$

Bộ nhân $(-1)^n w(n)=e^{-j\pi n}w(n)$ gây ra việc dịch tần số $W(e^{j(\omega-\pi)})=H(e^{j(\omega-\pi)})$

Đầu ra tổng quát: $y(n)=e^{-j\pi n}w(n)+w(n)$

Do đó: $Y(e^{j\omega})=H(e^{j(\omega-\pi)})+H(e^{j\omega})$

Mà: $H(e^{j(\omega-\pi)})=\begin{cases}1, & \frac{\pi}{2}\le|\omega|\le\pi\\ 0, & |\omega|<\frac{\pi}{2}\end{cases}$

$Y(e^{j\omega})=1$, suy ra $y(n)=\delta(n)$.

3.30. a) Khai triển $X(e^{j\omega})$:

$$X(e^{j\omega})=\frac{1-a^2}{(1-ae^{-j\omega})(1-ae^{j\omega})},\quad |a|<1$$

$$=\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}}$$

$$x(n)=a^n u(n)+a^{-n}u(-n-1)=a^{|n|}$$

b) $$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\cos\omega d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})\frac{e^{j\omega}+e^{-j\omega}}{2}d\omega$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{-j\omega}d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x(n-1)x(n+1)\right]=\frac{1}{2}\left(a^{|n-1|}+a^{|n+1|}\right)$$

3.31. a) $y(n)=x(n)+2x(n-1)+x(n-2)=x(n)*h(n)$

$$=x(n)*\left[\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)\right]$$

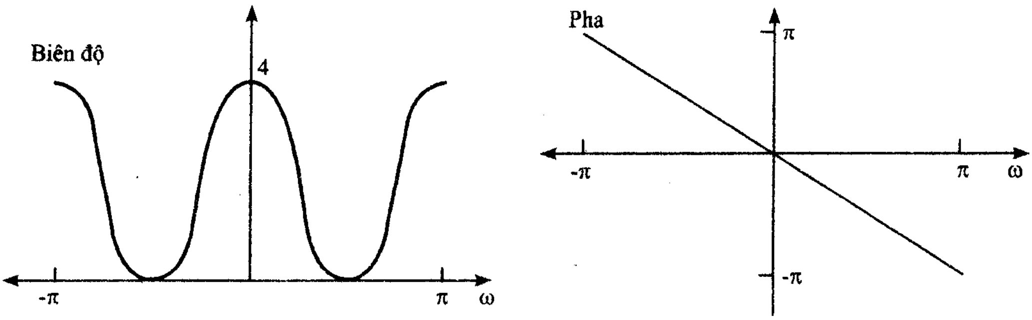
$$h(n)=\delta(n)+2\delta(n-1)+\delta(n-2)$$

b) Hệ thống là ổn định vì h(n) là chuỗi có chiều dài hữu hạn và hoàn toàn tính tổng được.

c) $H(e^{j\omega})=1+2e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}=2e^{-j\omega}\left(\frac{1}{2}e^{j\omega}+1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)=2e^{-j\omega}(\cos\omega+1)$

d) $|H(e^{j\omega})|=2(\cos\omega+1)$

$\angle H(e^{j\omega})=-\omega$



Hình 3.36

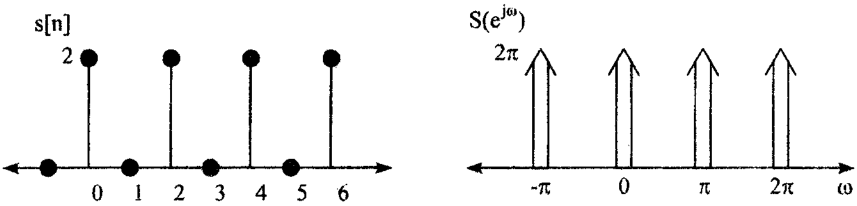
e) $h_1(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} H_1\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} H\left(e^{j(\omega+\pi)}\right) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} H\left(e^{j\omega}\right) e^{j(\omega-\pi)n} d\omega$$

$$= e^{-j\pi n} \frac{1}{2\pi} \int_{<2\pi>} H\left(e^{j\omega}\right) e^{j\omega n} d\omega = (-1)^n h(n) = \delta(n) - 2\delta(n-1) + \delta(n-2)$$

3.32. a) Chú ý rằng: $s(n) = 1 + \cos(\pi n) = 1 + (-1)^n$

$$S\left(e^{j\omega}\right) = 2\pi \sum_k \delta(\omega - k\pi)$$



Hình 3.37

b) Bởi vì $y(n) = x(n)s(n)$,

$$Y\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S\left(e^{j\theta}\right) X\left(e^{j(\omega-\theta)}\right) d\omega = X\left(e^{j\theta}\right) + X\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$$

$Y\left(e^{j\omega}\right)$ chứa bản sao của $X\left(e^{j\omega}\right)$ lặp lại tại các khoảng của π.

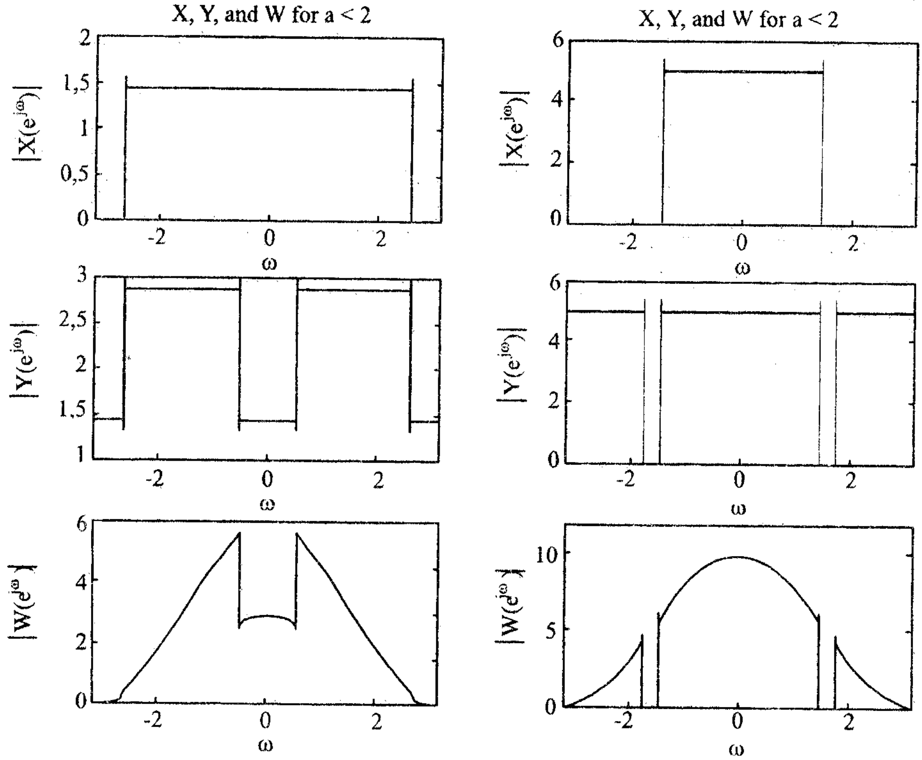
c) Bởi vì $w(n) = y(n) + \frac{1}{2}\left[y(n+1) + y(n-1)\right]$

$$W\left(e^{j\omega}\right) = Y\left(e^{j\omega}\right) + \frac{1}{2}\left[e^{j\omega} Y\left(e^{j\omega}\right) + e^{-j\omega} Y\left(e^{j\omega}\right)\right] = Y\left(e^{j\omega}\right)(1 + \cos\omega)$$

d) Hình vẽ dưới đây biểu diễn $X\left(e^{j\omega}\right)$, $Y\left(e^{j\omega}\right)$, và $W\left(e^{j\omega}\right)$ cho a < 2 và a > 2. Chú ý rằng:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|\le\dfrac{\pi}{a}\\ 0, & \dfrac{\pi}{a}\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

Đối với a > 2, $Y\left(e^{j\omega}\right)$ chứa 2 ảnh không chồng nhau của $X\left(e^{j\omega}\right)$, trong khi đó với a < 2 thì có sự chồng phổ. Khi có chồng phổ, $W\left(e^{j\omega}\right)$ không xấp xỉ gần đúng với $X\left(e^{j\omega}\right)$. Do đó, a phải lớn hơn 2 để w(n) gần đúng với x(n).



Hình 3.38

3.33. a) Từ các gợi ý của đầu bài ta thấy:

(i) Hệ thống là nhân quả nghĩa là: $h(n)=0$, khi $n\le 0$.

(ii) FT là đối xứng liên hợp, ngụ ý h(n) là thực.

(iii) DTFT của chuỗi h(n+1) là thực, ngụ ý h(n+1) là chẵn.

Từ các quan sát trên, ta suy ra h(n) có chiều dài bằng 3, do đó nó có chiều dài hữu hạn.

b) Từ phần a) ta thấy rằng h(n) có chiều dài bằng 3 với đối xứng chẵn quanh h(1). Đặt h(0) = h(2) = a và h(1) = b, từ (iv) và sử dụng lý thuyết Parseval ta có: $2a^2+b^2=2$

Từ (v) ta cũng có: $2a-b=0$

Giải hệ phương trình, ta được:

$$h(0)=\frac{1}{\sqrt{3}};\quad h(1)=\frac{2}{\sqrt{3}};\quad h(2)=\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ hoặc:}$$

$$h(0)=\frac{-1}{\sqrt{3}};\quad h(1)=\frac{-2}{\sqrt{3}};\quad h(2)=\frac{-1}{\sqrt{3}}$$

3.34. Đối với $-1<a<0$, ta có: $X\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$.

a) Phần thực của $X\left(e^{j\omega}\right)$: $X_R\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1}{2}\left[X\left(e^{j\omega}\right)+X^*\left(e^{j\omega}\right)\right]=\dfrac{1-a\cos\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}$

b) Phần ảo của $X\left(e^{j\omega}\right)$: $X_I\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{1}{2j}\left[X\left(e^{j\omega}\right)-X^*\left(e^{j\omega}\right)\right]=\dfrac{-a\sin\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}$

c) Biên độ: $\left|X\left(e^{j\omega}\right)\right|=\left[X\left(e^{j\omega}\right)X^*\left(e^{j\omega}\right)\right]^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{1}{1-2a\cos\omega+a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

d) Pha: $\angle X\left(e^{j\omega}\right)=\arctan\left(\dfrac{-a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right)$

3.35. a) $y(n)=h(n)*\left[e^{-j\omega_0 n}x(n)\right]=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 n}x(k)h(n-k)$

Đặt $x(n)=a\,x_1(n)+b\,x_2(n)$ thì:

$$\begin{aligned}y(n)&=h(n)*\left[e^{-j\omega_0 n}x(n)\right]=h(n)*\left\{e^{-j\omega_0 n}\left[a\,x_1(n)+b\,x_2(n)\right]\right\}\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 k}\left[a\,x_1(k)+b\,x_2(k)\right]h(n-k)\\&=a\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 k}x_1(k)h(n-k)+b\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 k}x_2(k)h(n-k)=ay_1(n)+by_2(n)\end{aligned}$$

Trong đó $y_1(n), y_2(n)$ tương ứng là đáp ứng ra của $x_1(n), x_2(n)$. Do đó ta kết luận rằng hệ thống S là tuyến tính.

b) Đặt $x_2(n)=x(n-n_0)$ thì:

$$\begin{aligned}y_2(n)&=h(n)*\left[e^{-j\omega_0 n}x_2(n)\right]\\&=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0(n-k)}x_2(n-k)h(k)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0(n-k)}x(n-n_0-k)h(k)\\&\neq y(n-n_0)\end{aligned}$$

Ta có thể kết luận rằng hệ thống S không phải là bất biến theo thời gian.

c) Vì biên độ của $e^{-j\omega_0 n}$ luôn luôn bằng 1 và h(n) là ổn định, một đầu vào x(n) bị giới hạn (bounded x(n)) sẽ luôn tạo ra một đầu ra bị giới hạn (bounded y(n)) đối với hệ thống LTI ổn định và do đó đầu ra y(n) sẽ bị giới hạn. Do đó ta kết luận rằng hệ thống S là ổn định.

d) Ta có thể viết lại y(n) như sau:

$$y(n)=h(n)*\left[e^{-j\omega_0 n}x(n)\right]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0(n-k)}x(n-k)h(k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 n}e^{j\omega_0 k}x(n-k)h(k)=e^{-j\omega_0 n}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 k}x(n-k)h(k)$$

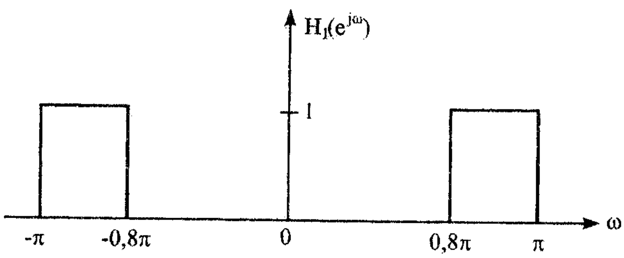
Do đó hệ thống C phải là một phép nhân với $e^{-j\omega_0 n}$.

3.36. a) $H_1\left(e^{j\omega}\right)$ tương ứng là một phiên bản dịch tần số của $H\left(e^{j\omega}\right)$, đặc biệt là:

$H_1\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j(\omega-\pi)}\right)$. Do đó ta có:

$$H_1\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}0, & |\omega|<0,8\pi \\ 1, & 0,8\pi\le|\omega|\le\pi\end{cases}$$

Đó là một bộ lọc thông cao.



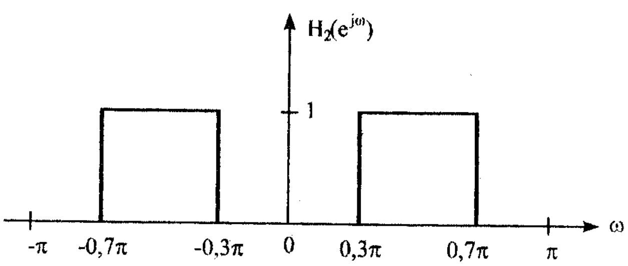
Hình 3.39

b) $H_2\left(e^{j\omega}\right)$ tương ứng là một phiên bản điều chế tần số của $H\left(e^{j\omega}\right)$, đặc biệt là:

$H_2\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)*\left[\delta(\omega-0,5\pi)+\delta(\omega+0,5\pi)\right]$ trong đó $|\omega|\le\pi$. Do đó ta có:

$$H_2\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}0, & |\omega|<0,3\pi \\ 1, & 0,3\pi\le|\omega|\le0,7\pi \\ 0, & 0,7\pi<|\omega|\le\pi\end{cases}$$

Đó là một bộ lọc thông dải.



Hình 3.40

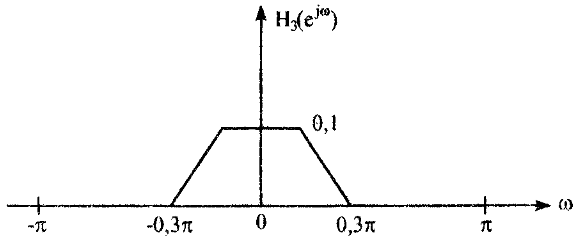
c) $H_3\left(e^{j\omega}\right)$ tương ứng là một tích chập có chu kỳ của $H_{lp}\left(e^{j\omega}\right)$ với một bộ lọc thông thấp khác, đặc biệt là:

$$H_3\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H\left(e^{j\theta}\right)H_{lp}\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta \text{ trong đó } H\left(e^{j\omega}\right) \text{ được cho bởi:}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}1, & |\omega|<0,1\pi\\ 0, & 0,1\pi\le|\omega|\le 0,7\pi\end{cases}$$

Thực hiện tích chập, ta có:

$$H_3\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}0,1 & |\omega|<0,1\pi\\ -\dfrac{|\omega|}{2\pi}+0,15 & 0,1\pi\le|\omega|\le 0,3\pi\\ 0, & 0,3\pi<|\omega|\le\pi\end{cases}$$



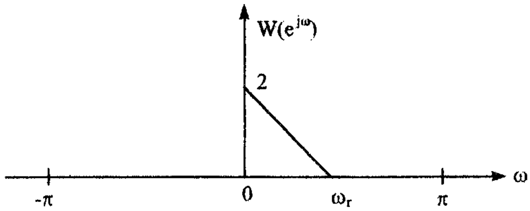
Hình 3.41

3.37. Chú ý rằng $X\left(e^{j\omega}\right)$ là thực và $Y\left(e^{j\omega}\right)$ được cho bởi:

$$Y\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}-jX\left(e^{j\omega}\right), & 0<\omega<\pi\\ jX\left(e^{j\omega}\right), & -\pi<\omega<0\end{cases}\Rightarrow jY\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}X\left(e^{j\omega}\right), & 0<\omega<\pi\\ -X\left(e^{j\omega}\right), & -\pi<\omega<0\end{cases}$$

$w(n)=x(n)+jy(n)$, do đó: $W\left(e^{j\omega}\right)=X\left(e^{j\omega}\right)+jY\left(e^{j\omega}\right)$

Kết luận: $W\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}2X\left(e^{j\omega}\right), & 0<\omega<\pi\\ 0, & -\pi<\omega<0\end{cases}$



Hình 3.42

3.38. a) Đổi biến $r=-k$, ta có thể viết lại $R_x(n)$ như sau:

$$R_x(n)=\sum_{r=-\infty}^{+\infty}x^*(-r)x(n-r)=x^*(-n)*x(n)$$

Do đó ta có: $g(n) = x^*(-n)$

b) Biến đổi Fourier của $x^*(-n)$ là $X^*(e^{j\omega})$, do đó:

$$R_x(e^{j\omega}) = X^*(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right|^2$$

3.39. Đặt $x_m(n) = \dfrac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}\alpha^n u(n), \quad |\alpha| < 1$. Ta sẽ chứng minh bằng phương pháp quy nạp rằng $FT\{x_m(n)\} = X_m(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^m}$.

Với m = 1: $x_1(n) = \alpha^n u(n), \quad |\alpha| < 1$, do đó: $FT\{x_1(n)\} = X_1(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})}$ (như đã nêu trong phần tóm tắt lý thuyết).

Với m = 2: $x_2(n) = \dfrac{(n+1)!}{n!}\alpha^n u(n) = (n+1)x_1(n) = nx_1(n) + x_1(n), \quad |\alpha| < 1$

Do đó: $FT\{x_2(n)\} = X_2(e^{j\omega}) = \dfrac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2} + \dfrac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}} = \dfrac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^2}$ (sử dụng tính chất vi phân trong miền tần số).

Bây giờ giả thiết rằng biểu thức đó đúng với m. Xét giá trị tiếp theo:

$$x_{m+1}(n) = \frac{(n+m)!}{n!(m)!}\alpha^n u(n), \qquad |\alpha| < 1$$

$$= \left(\frac{n+m}{m}\right)\frac{(n+m-1)!}{n!(m-1)!}\alpha^n u(n) = \left(\frac{n+m}{m}\right)x_m(n) = \frac{1}{m}.n.x_m(n) + x_m(n)$$

Suy ra: $X_{m+1}(e^{j\omega}) = \dfrac{1}{m}j\dfrac{d}{d\omega}\left\{\dfrac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^m}\right\} + \dfrac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^m} = \dfrac{\alpha e^{-j\omega}}{(1-\alpha e^{-j\omega})^{m+1}} + \dfrac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^m}$

$$= \frac{1}{(1-\alpha e^{-j\omega})^{m+1}}$$

Suy ra điều phải chứng minh.

3.40. a) $X_a(e^{j\omega}) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega + 2\pi k)$. Suy ra: $x(n) = \dfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\delta(\omega)e^{j\omega n}d\omega = 1$

b) $X_b(e^{j\omega}) = \dfrac{1-e^{-j\omega(N+1)}}{1-e^{-j\omega}} = \sum\limits_{n=0}^{N}e^{-j\omega n}$. Suy ra: $x(n) = \begin{cases}1, & 0 \le n \le N\\ 0, & \text{n còn lại}\end{cases}$

c) $X_c\left(e^{j\omega}\right)=1+2\sum_{l=0}^{N}\cos(\omega l)=\sum_{l=-N}^{N}e^{-j\omega l}$. Suy ra: $x(n)=\begin{cases}1, & -N\le n\le N\\ 0, & \text{n còn lại}\end{cases}$

d) $X_d\left(e^{j\omega}\right)=\dfrac{-j\alpha e^{-j\omega}}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)^2}$, $|\alpha|<1$. Ta có thể viết lại $X_d\left(e^{j\omega}\right)$ như sau:

$$X_d\left(e^{j\omega}\right)=\frac{d}{d\omega}\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)}=\frac{d}{d\omega}\left\{X_0\left(e^{j\omega}\right)\right\},\text{ với } X_0\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-\alpha e^{-j\omega}\right)}$$

$$x_0(n)=FT\left\{X_0\left(e^{j\omega}\right)\right\}=\alpha^n u(n).$$

Suy ra $x_d(n)=FT\left\{X_d\left(e^{j\omega}\right)\right\}=-jn\alpha^n u(n)$

3.41. $Y\left(e^{j\omega}\right)=X_1\left(e^{j\omega}\right)X_2\left(e^{j\omega}\right)X_3\left(e^{j\omega}\right)$, nghĩa là:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y(n)e^{-j\omega n}=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1(n)e^{-j\omega n}\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_2(n)e^{-j\omega n}\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_3(n)e^{-j\omega n}\right]$$

a) Do đó, cho $\omega=0$ ta có: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}y(n)=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_1(n)\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_2(n)\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_3(n)\right]$

b) Cho $\omega=\pi$ ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n y(n)=\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x_1(n)\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x_2(n)\right]\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n x_3(n)\right]$$

3.42. a) $x(n)=x_{chan}(n)+x_{le}(n)$. Đối với x(n) nhân quả, ta có:

$$x(n)=2x_{chan}(n)u(n)-x(0)\delta(n)=h(n)-x(0)\delta(n). \quad (1)$$

$$x(n)=2x_{le}(n)u(n)+x(0)\delta(n) \quad (2)$$

Thực hiện biến đổi Fourier cả 2 vế của phương trình (2):

$$X\left(e^{j\omega}\right)=H\left(e^{j\omega}\right)-x(0) \quad (3)$$

Trong đó $H\left(e^{j\omega}\right)=FT\left\{2x_{chan}(n)u(n)\right\}=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}X_{re}\left(e^{j\theta}\right)m\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$ (4)

Chú ý: $FT\left\{x_{chan}(n)\right\}=X_{re}\left(e^{j\omega}\right)$, $FT\left\{u(n)\right\}=m\left(e^{j\omega}\right)$.

Mà ta có:

$$m\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\left(1-e^{-j\omega}\right)}+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+2\pi k)=\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\cot g\left(\frac{\omega}{2}\right)+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\omega+2\pi k)$$

Thay vào (4) ta có:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X_{re}\left(e^{j\theta}\right)\left[\frac{1}{2}-\frac{j}{2}\cot g\left(\frac{\theta}{2}\right)+\pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\theta+2\pi k)\right]d\theta$$

$$= X_{re}\left(e^{j\theta}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{re}\left(e^{j\theta}\right)d\theta - \frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{re}\left(e^{j\theta}\right)\cot g\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta$$

Thay vào (3) ta có:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_{re}\left(e^{j\omega}\right) + jX_{im}\left(e^{j\omega}\right) = H\left(e^{j\omega}\right) - x(0)$$

$$= X_{re}\left(e^{j\omega}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{re}\left(e^{j\theta}\right)d\theta - j\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{re}\left(e^{j\theta}\right)\cot g\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta - x(0) \quad (5)$$

$$= X_{re}\left(e^{j\omega}\right) - j\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{re}\left(e^{j\theta}\right)\cot g\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta$$

Bởi vì $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{re}\left(e^{j\theta}\right)d\theta = x(0)$ khi x(n) là thực. So sánh phần ảo ở 2 vế của phương trình (5) ta rút ra được: $X_{im}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{re}\left(e^{j\theta}\right)\cot g\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta$

b) Thực hiện FT cả hai phía của phương trình (2), ta có:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = G\left(e^{j\omega}\right) - x(0) \quad (6)$$

Trong đó $G\left(e^{j\omega}\right) = FT\left\{2x_{le}(n)u(n)\right\} = \frac{j}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{im}\left(e^{j\theta}\right)m\left(e^{j(\omega-\theta)}\right)d\theta$ (7)

$jX_{im}\left(e^{j\omega}\right) = FT\left\{x_{le}(n)\right\}$. Thay thế biểu diễn của $m\left(e^{j\omega}\right)$ như đã cho ở phần a) vào phương trình (7), ta được:

$$G\left(e^{j\omega}\right) = \frac{j}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{im}\left(e^{j\theta}\right)\left[\frac{1}{2} - \frac{j}{2}\cot g\left(\frac{\theta}{2}\right) + \pi\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\theta + 2\pi k)\right]d\theta$$

$$= jX_{im}\left(e^{j\theta}\right) + \frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{im}\left(e^{j\theta}\right)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{im}\left(e^{j\theta}\right)\cot g\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta$$

Thay thế phương trình này vào phương trình (6) ta được:

$$X\left(e^{j\omega}\right) = X_{re}\left(e^{j\omega}\right) + jX_{im}\left(e^{j\omega}\right) = G\left(e^{j\omega}\right) + x(0)$$

$$= jX_{im}\left(e^{j\omega}\right) + \frac{j}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{im}\left(e^{j\omega}\right)d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{im}\left(e^{j\omega}\right)\cot g\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta + x(0) \quad (8)$$

$$= jX_{im}\left(e^{j\omega}\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{re}\left(e^{j\theta}\right)\cot g\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta + x(0)$$

Với $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{im}\left(e^{j\theta}\right)d\theta = 0$ vì $X_{im}\left(e^{j\omega}\right)$ là hàm lẻ của ω. So sánh các phần thực ở cả hai vế của phương trình (8) ta được:

$$X_{re}\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_{im}\left(e^{j\theta}\right)\cot g\left(\frac{\omega-\theta}{2}\right)d\theta + x(0)$$

3.43.

$$A_2\left(e^{j\omega}\right)=\frac{d_2+d_1e^{-j\omega}+e^{-j2\omega}}{1+d_1e^{-j\omega}+d_2e^{-j2\omega}}=\frac{d_2e^{j\omega}+d_1+e^{-j\omega}}{e^{j\omega}+d_1+d_2e^{-j\omega}}$$

$$=\frac{\left(d_1+d_2\cos\omega+\cos\omega\right)+j\left(d_2\sin\omega-\sin\omega\right)}{\left(d_1+d_2\cos\omega+\cos\omega\right)+j\left(\sin\omega-d_2\sin\omega\right)}$$

$$=\frac{\left[d_1+\left(d_2+1\right)\cos\omega\right]+j\left(d_2-1\right)\sin\omega}{\left[d_1+\left(d_2+1\right)\cos\omega\right]-j\left(d_2-1\right)\sin\omega}$$

Do đó: $\theta(\omega)=2tg^{-1}\left[\dfrac{\left(d_2\text{-}1\right)\sin\omega}{d_1+\left(d_2+1\right)\cos\omega}\right]$.

$$\tau_p(\omega)=-\theta(\omega)/\omega=-\frac{2}{\omega}tg^{-1}\left[\frac{\left(d_2\text{-}1\right)\sin\omega}{d_1+\left(d_2+1\right)\cos\omega}\right]$$

Đối với $\omega\cong 0$: $\sin\omega=\omega$, $\cos\omega=1$. Do đó:

$$\tau_p(\omega)=-\frac{2}{\omega}tg^{-1}\left[\frac{\left(d_2\text{-}1\right)\omega}{d_1+\left(d_2+1\right)}\right]$$

Đối với $x\cong 0$: $tg^{-1}x\cong x$. Do đó: $\tau_p(\omega)=-\dfrac{2}{\omega}\left[\dfrac{\left(d_2\text{-}1\right)\omega}{d_1+\left(d_2+1\right)}\right]=-\dfrac{2\left(d_2\text{-}1\right)}{d_1+d_2+1}=\delta$

Bây giờ thay thế $d_1=2\left(\dfrac{2-\delta}{1+\delta}\right)$, $d_2=\dfrac{(2-\delta)(1-\delta)}{(2+\delta)(1+\delta)}$ ta dễ dàng thấy rằng: $-\dfrac{2\left(d_2\text{-}1\right)}{d_1+d_2+1}=\delta$

3.44. a) Ta có:

$$H\{x(n)\}=x(n)*h(n)$$
$$H\{H\{x(n)\}\}=x(n)*h(n)*h(n)$$

Do đó ta cần phải chứng minh rằng: $h(n)*h(n)=-\delta(n)$. Ngoài ra ta cần phải chứng minh rằng: $H\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)=-1$, điều này dễ dàng nhận thấy từ:

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}-j, & 0<\omega<\pi\\ j, & -\pi<\omega<0\end{cases}$$

b) Trong lý thuyết Parseval:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n)g^*(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F\left(e^{j\omega}\right)G^*\left(e^{j\omega}\right)d\omega.$$

Đặt $f(n)=H\{x(n)\}$; $g^*(n)=x(n)$, ta có:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n)H\{x(n)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}H\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{j\omega}\right)X\left(e^{-j\omega}\right)d\omega\text{, trong đó:}$$

$$H\left(e^{j\omega}\right)=\begin{cases}-j, & 0<\omega<\pi \\ j, & -\pi<\omega<0\end{cases}.$$

Tuy nhiên biểu thức tích phân là bằng 0, vì hàm dưới dấu tích phân là hàm lẻ trong khoảng đối xứng $(-\pi,\pi)$.

c) Vì $H\{x(n)\}=x(n)*h(n)$, do đó:

$$H\{x(n)*y(n)\}=[x(n)*y(n)]*h(n)=[x(n)*h(n)]*y(n)=x(n)*[y(n)*h(n)]$$

(Sử dụng tính chất giao hoán và kết hợp của tích chập)

Suy ra: $H\{x(n)*y(n)\}=H\{x(n)\}*y(n)=x(n)*H\{y(n)\}$

D. BÀI TẬP MATLAB

M3_1. $X\left(e^{j\omega}\right)$ là FT trong miền tần số liên tục của chuỗi $x(n)$. $X\left(e^{j\omega}\right)$ có dạng tổng quát như sau:

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\frac{b_0+b_1e^{-j\omega}+\ldots+b_Me^{-j\omega M}}{a_0+a_1e^{-j\omega}+\ldots+a_Ne^{-j\omega N}}$$. Hãy đánh giá và vẽ FT của x(n).

Lời giải:

```
% Chuong trinh M3_1
% Tinh toan va bieu dien bien doi Fourier trong mien tan so lien tuc
clf;
% Chieu dai mong muon cua FT
k = input('Nhap so luong cac diem tan so = ');
% Cac he so o tu so va mau so
num = input('Nhap cac he so o tu so = ');
den = input('Nhap cac he so o mau so = ');
% Tinh dap ung xung
w = 0:pi/(k-1):pi;
X = freqz(num, den, w);
% Ve dap ung tan so
subplot(221);
plot(w/pi,real(X));grid
title('Phan thuc');ylabel('Bien do');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
subplot(222);
plot(w/pi,imag(X));grid
title('Phan ao');ylabel('Bien do');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
subplot(223)
```

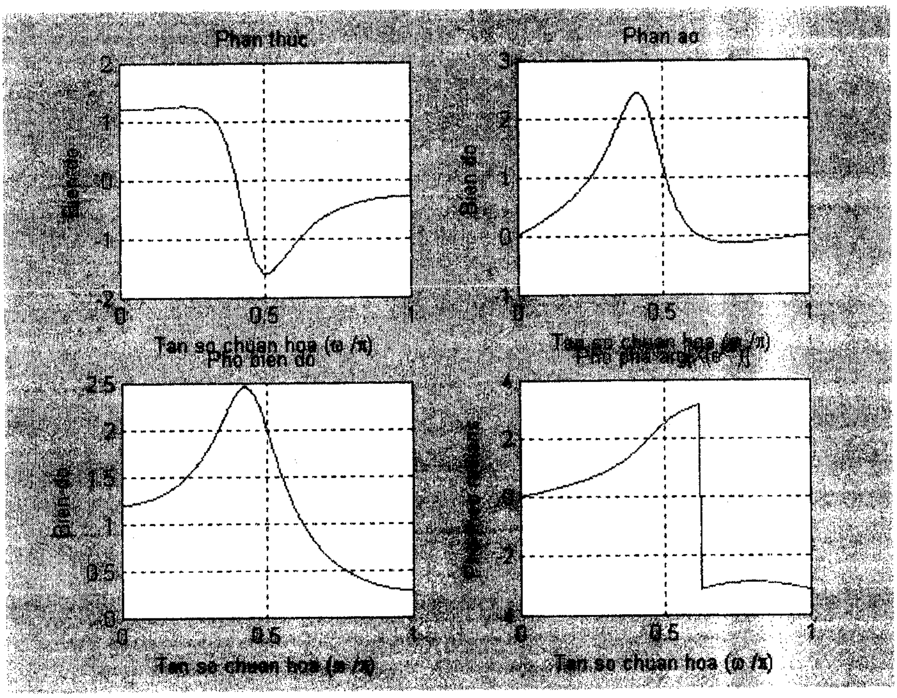
```
plot(w/pi,abs(X));grid
title('Pho bien do ');ylabel('Bien do');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
subplot(224)
plot(w/pi,angle(X));grid
title('Pho pha arg[X(e^{j\omega})]');ylabel('Pha theo radians');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
```

Hình vẽ sau đây biểu diễn phần thực, phần ảo của $X(e^{j\omega})$, đồng thời biểu diễn phổ biên độ $|X(e^{j\omega})|$ và phổ pha $\arg\{X(e^{j\omega})\}$ của tín hiệu x(n) với:

Nhap so luong cac diem tan so = 512

Nhap cac he so o tu so = [1 2]

Nhap cac he so o mau so = [1 -0.5 2]



M3_2. Tính chất dịch thời gian và dịch tần số của FT

a) Dịch thời gian: chương trình M3_2a biểu diễn phổ biên độ và phổ pha của một đáp ứng tần số có dạng như sau:

$$H(e^{j\omega}) = b_0 + b_1 e^{-j\omega} + \ldots + b_M e^{-j\omega M}$$

Đồng thời biểu diễn phổ biên độ và phổ pha của dãy tín hiệu trên với dịch thời gian D nhập từ bàn phím.

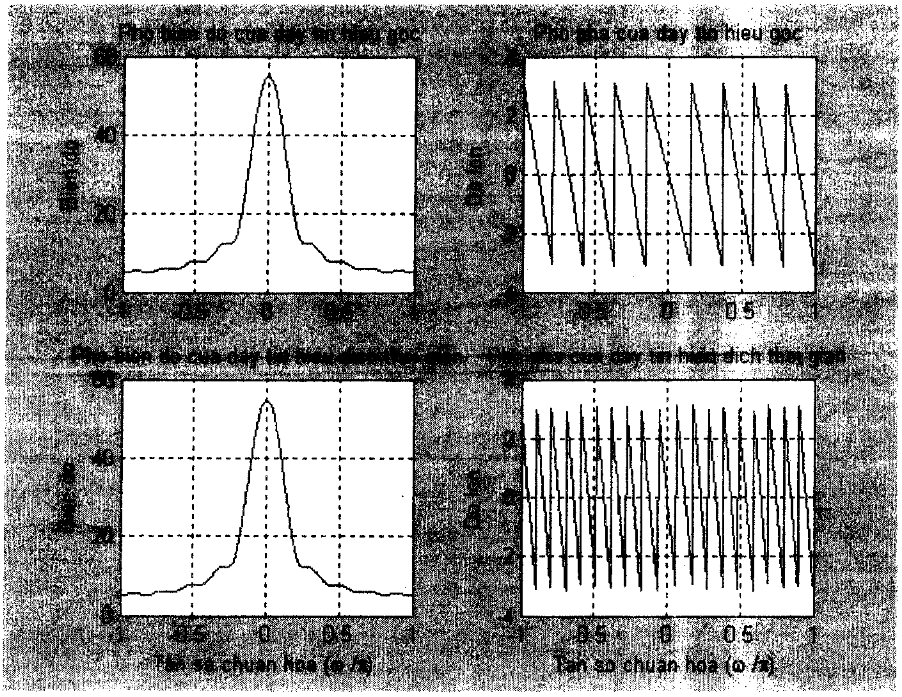
b) Dịch tần số: chương trình M3_2b biểu diễn phổ biên độ và phổ pha của một đáp ứng tần số có dạng $H(e^{j\omega}) = b_0 + b_1e^{-j\omega} + ... + b_Me^{-j\omega M}$. Chương trình đồng thời biểu diễn phổ biên độ và phổ pha của dãy tín hiệu trên với dịch tần số ω_0 nhập từ bàn phím.

Lời giải:

a)

```
% Chuong trinh M3_2a
% Tinh chat dich thoi gian cua FT
clf;
w = -pi:2*pi/512:pi; wo = 0.4*pi;
D = input('Nhap thoi gian tre = ');
num = input('Nhap vecto tu so = ');
h1 = freqz(num, 1, w);
h2 = freqz([zeros(1,D) num], 1, w);
subplot(221);
plot(w/pi,abs(h1));grid
title('Pho bien do cua day tin hieu goc');
ylabel('Bien do');
subplot(222);
plot(w/pi,angle(h1));grid
title('Pho pha cua day tin hieu goc');
ylabel('Do lon');
subplot(223);
plot(w/pi,abs(h2));grid
title('Pho bien do cua day tin hieu dich thoi gian');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
ylabel('Bien do');
subplot(224);
plot(w/pi,angle(h2));grid
title('Pho pha cua day tin hieu dich thoi gian');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');ylabel('Do lon');
```

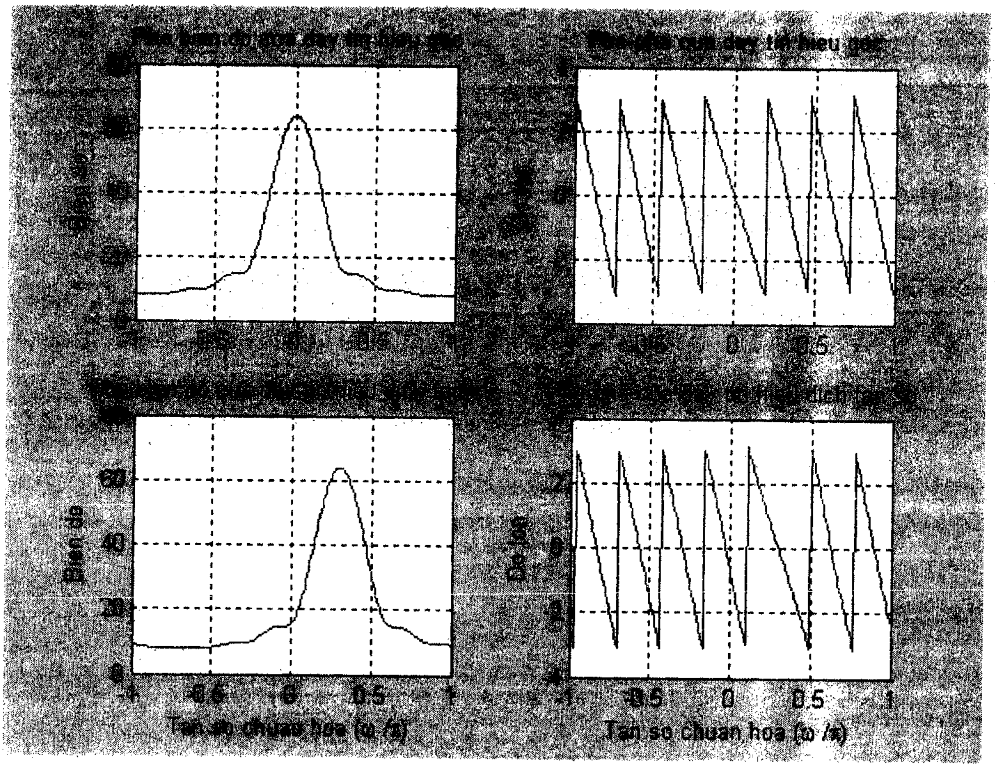
Hình vẽ sau đây minh họa cho trường hợp $\{b_k\} = num = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10]$; trễ thời gian $D = 8$.



b)

```
% Chuong trinh M3_2b
% Tinh chat dich tan so cua FT
clf;
w = -pi:2*pi/255:pi;
wo = input('Nhap do dich tan so = ');
num1 = input('Nhap vecto tu so = ');
L = length(num1);
h1 = freqz(num1, 1, w);
n = 0:L-1;
num2 = exp(wo*i*n).*num1;
h2 = freqz(num2, 1, w);
subplot(221);
plot(w/pi,abs(h1));grid
title('Pho bien do cua day tin hieu goc');
ylabel('Bien do');
subplot(222);
plot(w/pi,angle(h1));grid
title('Pho pha cua day tin hieu goc');
ylabel('Do lon');
subplot(223);
plot(w/pi,abs(h2));grid
title('Pho bien do cua day tin hieu dich tan so');
```

```
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
ylabel('Bien do');
subplot(224);
plot(w/pi,angle(h2));grid
title('Pho pha cua day tin hieu dich tan so');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');ylabel('Do lon');
```



Hình vẽ minh họa cho trường hợp $\{b_k\} = \text{num} = [1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11\ 13\ 15]$; trễ tần số $\omega_0 = 0{,}3\pi$.

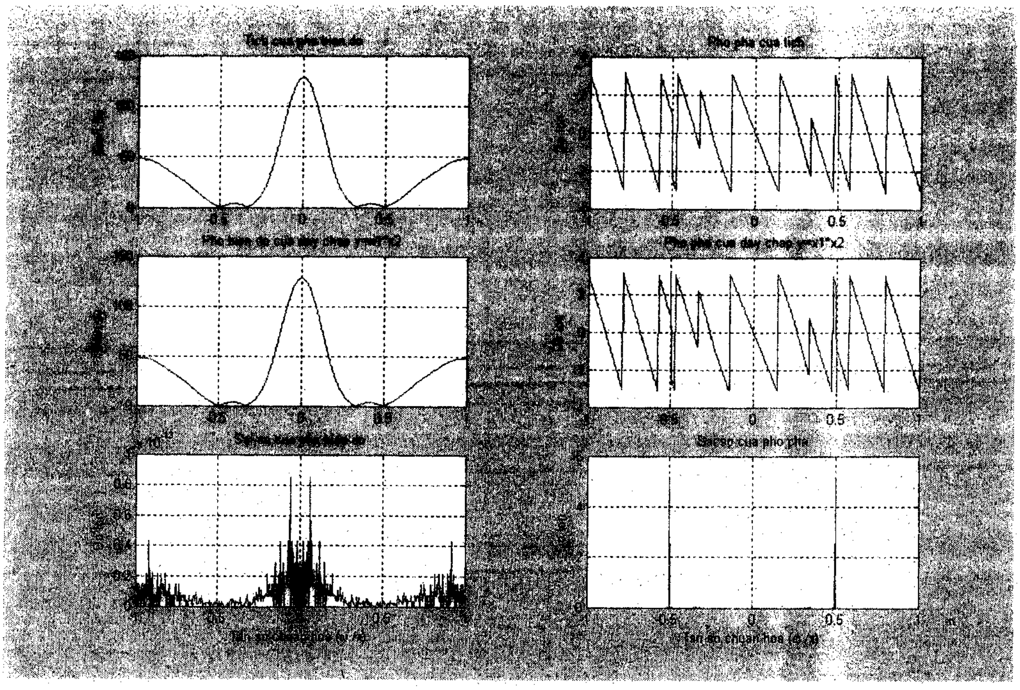
M3_3. Tính chất chập của FT:

Tính tích chập của hai dãy có giá trị được nhập từ bàn phím. Hình vẽ sau đây minh họa cho phổ biên độ và phổ pha của tích chập $y = x_1 * x_2$ của hai dãy $x_1 = [1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11\ 13\ 15]$ và $x_2 = [1\ -1\ 2\ -1\ 1]$.

Lời giải:

```
% Chuong trinh M3_3
% Tinh chat tich chap cua FT
clf;
w = -pi:2*pi/512:pi;
x1 = input('Nhap day thu nhat = ');
x2 = input('Nhap day thu hai = ');;
y = conv(x1,x2);                    % Tich chap cua 2 day
h1 = freqz(x1, 1, w);  % Bieu dien day 1 trong mien tan so
```

```
h2 = freqz(x2, 1, w);  % Bieu dien day 2 trong mien tan so
ht = h1.*h2;           % Tich cua 2 day trong mien tan so
h3 = freqz(y,1,w);     % Bieu dien day tich chap y trong mien tan so
e_a=abs(ht)-abs(h3);            % Sai so cua pho bien do
e_p=angle(ht)-angle(h3);        % Sai so cua pho pha
subplot(321);
plot(w/pi,abs(ht));grid
title('Tich cua pho bien do');ylabel('Bien do');
subplot(322);
plot(w/pi,angle(ht));grid
title('Pho pha cua tich');ylabel('Do lon');
subplot(323);
plot(w/pi,abs(h3));grid
title( 'Pho bien do cua day chap y=x1*x2');
% xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
ylabel('Bien do');
subplot(324);
plot(w/pi,angle(h3));grid
title('Pho pha cua day chap y=x1*x2');
% xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
ylabel('Do lon');
% Bieu dien sai so
subplot(325);
plot(w/pi,abs(e_a));grid
title('Sai so cua pho bien do');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
ylabel('Do lon');
subplot(326);
plot(w/pi,abs(e_p));grid
title('Sai so cua pho pha');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
ylabel('Do lon');
```



M3_4. Tính chất biến số đảo của FT:

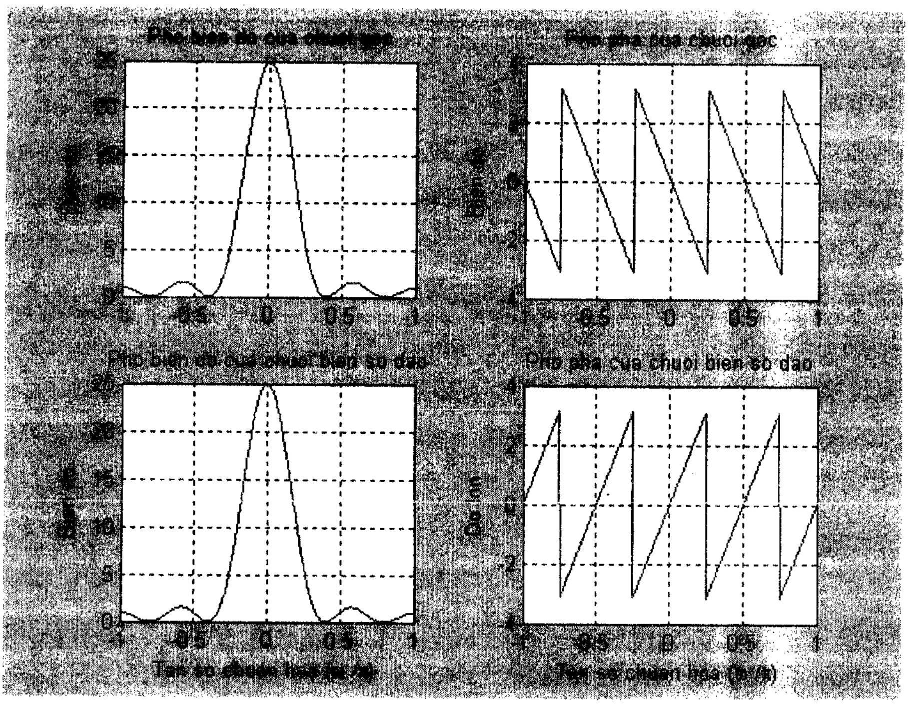
Cho một dãy bất kỳ x(n), giá trị của dãy được nhập từ bàn phím. Vẽ phổ biên độ và phổ pha của dãy đó và phổ biên độ và phổ pha của dãy biến số đảo của nó x(-n).

Lời giải:

```
% Chuong trinh M3_4
% Tinh chat bien so dao  cua FT
clf;
w = -pi:2*pi/512:pi;
x = input('Nhap chuoi tin hieu goc = ');
L = length(x)-1;
h1 = freqz(x, 1, w);          % FT cua chuoi tin hieu goc
h2 = freqz(fliplr(x), 1, w);
h3 = exp(w*L*i).*h2;          % FT cua chuoi bien so dao
subplot(221);
plot(w/pi,abs(h1));grid
title('Pho bien do cua chuoi goc');ylabel('Bien do');
subplot(222);
plot(w/pi,angle(h1));grid
title('Pho pha cua chuoi goc');ylabel('Bien do');
subplot(223);
plot(w/pi,abs(h3));grid
title('Pho bien do cua chuoi bien so dao');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
```

```
ylabel('Bien do');
subplot(224);
plot(w/pi,angle(h3));grid
title('Pho pha cua chuoi bien so dao');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
ylabel('Do lon');
```

Hình vẽ sau minh họa cho phổ biên độ và phổ pha của dãy x(n) = [1 2 3 4 5 4 3 2 1] và phổ biên độ và phổ pha của dãy biến số đảo x(-n).



M3_5. Tính chất điều chế của FT

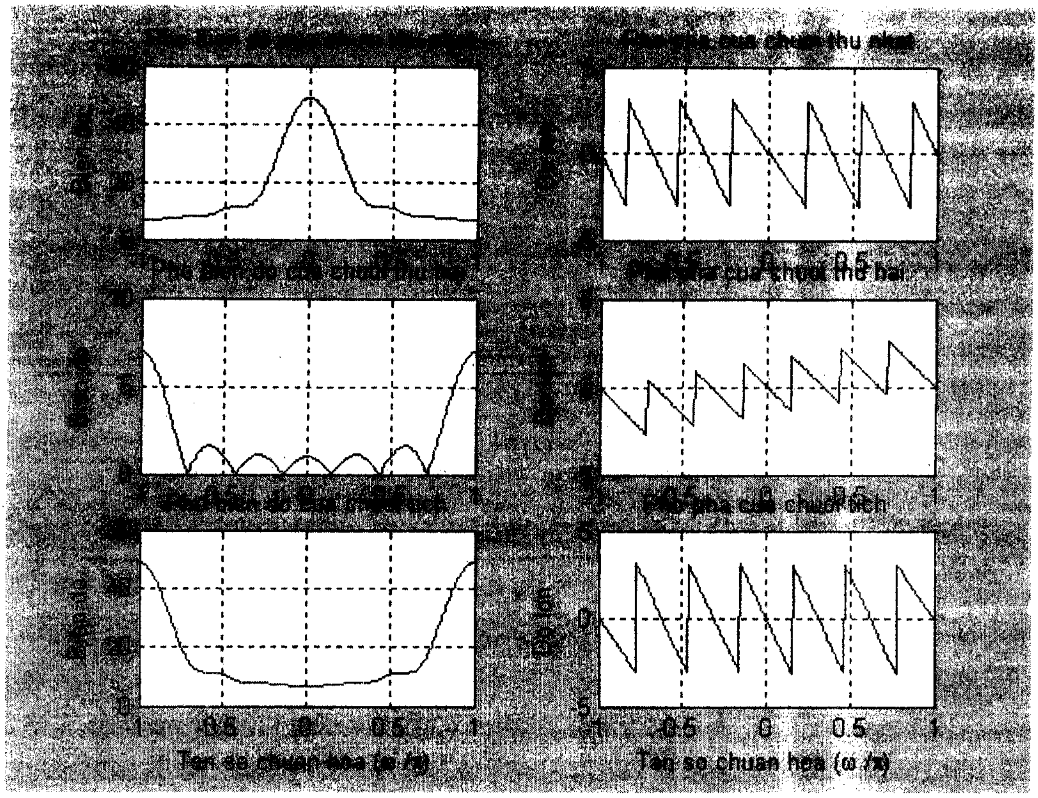
Cho hai chuỗi $x_1 = \{a_0, a_1, ..., a_n\}$ và $x_2 = \{b_0, b_1, ..., b_m\}$ với các hệ số $\{a_k\}, \{b_j\}$ nhập từ bàn phím. Vẽ phổ biên độ và phổ pha của x_1, x_2 và của chuỗi tích $y = x_1 x_2$.

Lời giải:

```
% Chuong trinh M3_5
% Tinh chat dieu che cua FT
clf;
w = -pi:2*pi/255:pi;
x1 = input('Nhap chuoi thu nhat = ');
x2 = input('Nhap chuoi thu hai = ');
y = x1.*x2;           % Tich cua chuoi thu nhat va chuoi thu hai
h1 = freqz(x1, 1, w);
h2 = freqz(x2, 1, w);
```

```
h3 = freqz(y,1,w);
subplot(321);
plot(w/pi,abs(h1));grid
title('Pho bien do cua chuoi thu nhat');
ylabel('Bien do');
subplot(322);
plot(w/pi,angle(h1));grid
title('Pho pha cua chuoi thu nhat');
ylabel('Do lon');
subplot(323);
plot(w/pi,abs(h2));grid
title('Pho bien do cua chuoi thu hai');
ylabel('Bien do');
subplot(324);
plot(w/pi,angle(h2));grid
title('Pho pha cua chuoi thu hai');
ylabel('Do lon');
subplot(325);
plot(w/pi,abs(h3));grid
title('Pho bien do cua chuoi tich');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
ylabel('Bien do');
subplot(326);
plot(w/pi,angle(h3));grid
title('Pho pha cua chuoi tich');
xlabel('Tan so chuan hoa (\omega /\pi)');
ylabel('Do lon');
```

Hình vẽ dưới đây là phổ biên độ và phổ pha của x_1, x_2 và của chuỗi tích $y = x_1 x_2$ trong trường hợp $x_1 = [1\ 3\ 5\ 7\ 9\ 11\ 13]$; $x_2 = [1\ -1\ \ 1\ -1\ 1\ -1\ \ 1]$.


Pha của chuỗi thứ hai
-0.5
0
0.5
1
-1
-5
5
Tần số chuẩn hóa (ω /π)
Tần số chuẩn hóa (ω /π)

Chương 4

BIỂU DIỄN HỆ THỐNG VÀ TÍN HIỆU RỜI RẠC TRONG MIỀN TẦN SỐ RỜI RẠC (DFT)

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Trong chương này, chúng ta đã làm quen với phép biến đổi Fourier rời rạc DFT, đây là một trong những nội dung quan trọng của xử lý tín hiệu số vì nó là nền tảng cho các thuật toán tính toán nhanh như biến đổi Fourier nhanh FFT giúp cho tốc độ tính toán của các chíp DSP cải thiện đáng kể.

Các kiến thức trong chương này cần lưu ý bao gồm:

4.1. Cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N

Biến đổi DFT

$$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n).e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W^{kn}\qquad(k=0\div N-1)$$

$$\omega_k=\frac{2\pi}{N}k;\ W^{kn}=e^{-j\frac{2\pi}{N}k}$$

Biến đổi ngược IDFT

$$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k).W_N^{-kn}\qquad(n=0\div N-1)$$

Lưu ý:

- $\tilde{X}(k)$ cũng tuần hoàn với chu kỳ N.

- Đặc điểm nổi bật của DFT là biến đổi xuôi và ngược tương đương như nhau, chỉ khác nhau về hệ số 1/N và dấu ở số mũ, hay nói cách khác biến đổi xuôi và ngược là cùng thuật toán.

4.2. Cặp biến đổi Fourier rời rạc đối với dãy có chiều dài hữu hạn N

Đối với các dãy có chiều dài hữu hạn N (ký hiệu là $x(n)_N$), để biến đổi được DFT người coi nó là 1 chu kỳ của 1 dãy tuần hoàn, do vậy thực hiện được biến đổi DFT và sau đó lấy kết quả trong một chu kỳ. Cụ thể biến đổi DFT đối với dãy có chu kỳ N được định nghĩa như sau:

Biến đổi DFT:

$$X(k)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn} & 0\le k\le N-1\\ 0 & k\neq\end{cases}$$

Biến đổi IDFT:

$$x(n)=\begin{cases}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-kn} & 0\le n\le N-1\\ 0 & n\neq\end{cases}$$

Biểu diễn $X(k)$ dưới dạng modul và argument: $X(k)=|X(k)|e^{j\varphi(k)}$

$|X(k)|$: phổ rời rạc biên độ

$\varphi(k)$: phổ rời rạc pha.

4.3. Các tính chất của biến đổi Fourier rời rạc DFT

Các ký hiệu:

- $x(n)_N$: tín hiệu x(n) có chiều dài hữu hạn N.
- $\tilde{x}(n)_N$: tín hiệu tuần hoàn có chu kỳ N.
- Phân biệt rõ $x(n)_N \neq x(n)$.
- $x(n-n_0)$: trễ tuyến tính
- $\tilde{x}(n-n_0)_N$: trễ tuần hoàn chu kỳ N
- $x(n-n_0)_N$: trễ vòng với chiều dài N.

Các tính chất:

Chú ý: cần phân biệt các phép toán sau đây:

- Phép chập tuyến tính $x_1(n)*x_2(n)$
- Phép chập tuần hoàn $\tilde{x}_1(n)_N (\tilde{*})_N \tilde{x}_2(n)_N$
- Phép chập vòng $x_1(n)_N (*)_N x_2(n)_N$

Từ đây ta thấy, kết quả của phép chập tuyến tính giữa hai tín hiệu có chiều dài hữu hạn $x_1(n)$ có chiều dài N_1, $x_2(n)$ có chiều dài N_2 đã học trong chương 1 có thể tính được thông qua biến đổi DFT nếu chiều dài thực hiện DFT $N \geq N_1 + N_2 - 1$. Như vậy việc thực hiện phép chập sẽ dễ dàng hơn vì biến đổi DFT và IDFT được thực hiện cùng một thuật toán.

Bảng tổng kết các tính chất của DFT đối với dãy tuần hoàn có chu kỳ N

Miền n	**Miền k**
$\tilde{x}(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)W_N^{-kn}, \quad (0\leq n\leq N-1)$	$\tilde{X}(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)W_N^{kn}, \quad (0\leq k\leq N-1)$
$a\tilde{x}_1(n)_N+b\tilde{x}_2(n)_N$	$a\tilde{X}_1(k)_N+b\tilde{X}_2(k)_N$
$\tilde{x}(n-n_0)_N$	$W_N^{kn_0}\tilde{X}(k)$
$W_N^{ln}\tilde{x}(n)$	$\tilde{X}(k+l)$
$\tilde{x}_1(n)_N(\tilde{*})_N\tilde{x}_2(n)_N=\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{x}_1(l)\tilde{x}_2(n-l)$	$\tilde{X}_1(k)_N\tilde{X}_2(k)_N$

$\tilde{x}_1(n)_N \tilde{x}_2(n)_N$	$\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}_1(l)_N \tilde{X}_1(k-l)_N = \tilde{X}_1(k)_N (\circledast) \tilde{X}_2(k)_N$
$\tilde{x}(n)$ thực	$\tilde{X}(k) = \tilde{X}^*(-k)$
	$\text{Re}\left[\tilde{X}(k)\right] = \text{Re}\left[\tilde{X}(-k)\right]$
	$\text{Im}\left[\tilde{X}(k)\right] = \text{Im}\left[\tilde{X}(-k)\right]$
	$\left\|\tilde{X}(k)\right\| = \left\|\tilde{X}(-k)\right\|$
	$\arg\left[\tilde{X}(k)\right] = -\arg\left[\tilde{X}(-k)\right]$
$\tilde{r}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(n) = \sum_{l=0}^{N-1}\tilde{x}_1(l)\tilde{x}_2(l-n)$	$\tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2(-k)$
$\tilde{r}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(n) = \sum_{l=0}^{N-1}\tilde{x}_1(l)\tilde{x}_2(l-n)$ $\tilde{x}_1(n), \tilde{x}_2(n)$ là các dãy phức	$\tilde{R}_{\tilde{x}_1\tilde{x}_2}(k) = \tilde{X}_1(k)\tilde{X}_2^*(k)$
$\tilde{x}^*(n)$	$\tilde{X}^*(-k)$
$\tilde{x}^*(-n)$	$\tilde{X}^*(k)$
$\text{Re}\{\tilde{x}(n)\}$	$\frac{1}{2}\left[\tilde{X}(k) + \tilde{X}^*(-k)\right]$
$\text{Im}\{\tilde{x}(n)\}$	$\frac{1}{2j}\left[\tilde{X}(k) - \tilde{X}^*(-k)\right]$

4.4. Thực hiện phép chập nhanh

Chúng ta lưu ý rằng, trên thực tế các dãy tín hiệu đầu vào bao giờ cũng có chiều dài lớn hơn nhiều so với chiều dài của đáp ứng xung h(n) cho nên để tính toán xác định đầu ra của hệ thống với hiệu năng tính toán cao ta có thể chia tín hiệu vào x(n) thành các dãy con $x_i(n)$ có chiều dài phù hợp với đáp ứng xung của hệ thống.

$$x(n) = \sum_i x_i(n)$$

Tiếp theo, ta thực hiện phép chập $x_i(n)*h(n)$ thông qua biến đổi DFT thu được kết quả $y_i(n)$, ở đây, thông thường ta chọn chiều dài thực hiện DFT có dạng cơ số 2, 2^γ để tính toán nhanh. Sau đó, đầu ra của hệ thống y(n) sẽ là hợp của các $y_i(n)$

$$y(n) = \sum_i y_i(n)$$

Nhìn chung, các kiến thức của chương này sẽ làm nền tảng quan trọng cho các thuật toán biến đổi Fourier nhanh FFT sẽ được trình bày trong chương 5.

4.5. Khôi phục biến đổi z và biến đổi Fourier từ DFT

a) Khôi phục biến đổi z

Cho dãy $x(n)_N$, ta có:

$$X(z)=\frac{1-z^{-N}}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{X(k)_N}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$$

Nhận xét:

- Có thể suy ra biến đổi z của một dãy có chiều dài hữu hạn N từ N giá trị của $X(k)_N$.
- N giá trị của $X(k)_N$ chính là các mẫu của $X(z)$ được đánh giá trên vòng tròn đơn vị tại các điểm rời rạc $\frac{2\pi}{N}k$, do đó trên vòng tròn đơn vị ta lấy mẫu $X(z)$ tại các điểm $z=e^{j\omega k}=e^{j\frac{2\pi}{N}k}=W_N^{-k}$. Và ta có: $X(z)\big|_{z=W_N^{-k}}=X(k)_N$.

b) Khôi phục FT

Có thể suy ra biến đổi Fourier từ biến đổi z nếu vòng tròn đơn vị nằm trong miền hội tụ của biến đổi z.

$$X(e^{j\omega})=X(z)\big|_{z=e^{j\omega}}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)_N\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega\right)}{\sin\left(\frac{\omega}{2}-\frac{\pi}{N}k\right)}e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\omega+\frac{\pi}{N}k\right)}$$

B. BÀI TẬP CƠ BẢN

4.1. Cho tín hiệu $x_c(t)$ liên tục tuần hoàn có chu kỳ 1 ms và có phân tích theo chuỗi Fourier là:

$$x_c(t)=\sum_{k=-9}^{9}a_k e^{j(2\pi kt/10^{-3})}$$

Các hệ số a_k của chuỗi Fourier bằng 0 nếu $|k|>9$. $x_c(t)$ được lấy mẫu với khoảng cách mẫu là $T=\frac{1}{6}.10^{-3}$ s để tạo thành tín hiệu rời rạc $x[n]$: $x[n]=x_c\left(\frac{n10^{-3}}{6}\right)$

a) Hỏi $x[n]$ có phải là tín hiệu tuần hoàn không? Nếu có thì với chu kỳ là bao nhiêu?

b) Tốc độ lấy mẫu có lớn hơn tốc độ Nyquist không? Có nghĩa là T có đủ nhỏ để tránh hiện tượng chồng phổ không?

c) Tìm hệ số chuỗi Fourier rời rạc của $x[n]$ theo a_k

Lời giải:

Ta lấy mẫu tín hiệu tuần hoàn liên tục trong miền thời gian với tốc độ lấy mẫu:

$$F_s = \frac{\Omega s}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{6}{10^{-3}}\text{Hz}$$

a) Tín hiệu được lấy mẫu: $x[n] = x_c(nT)$

Nếu biểu diễn theo chuỗi Fourier: $x[n] = \sum_{k=-9}^{9} a_k e^{j\frac{2\pi}{6}kn}$

Chú ý rằng, tín hiệu lấy mẫu được biểu diễn bằng tổng các hàm mũ phức của các hài. Tần số cơ sở của tập các hàm mũ này là 2π/N, ở đó N= 6.

Vì vậy dãy $x[n]$ tuần hoàn với chu kỳ N = 6.

b) Với bất kỳ một tín hiệu liên tục trong miền thời gian với dải tần hữu hạn, tiêu chuẩn Nyquist có thể phát biểu như sau:

$$F_s \geq 2F_N$$

Ở đây F_s là tốc độ lấy mẫu (Hz), F_N tương ứng là thành phần tần số cao nhất của tín hiệu (Hz).

Từ biểu diễn chuỗi Fourier hữu hạn của $x_c(t)$ rõ ràng tín hiệu liên tục trong miền thời gian này có dải tần bị hạn chế với tần số cao nhất là $F_N = \frac{9}{10^{-3}}\text{Hz}$

Do đó khi lấy mẫu tại tốc độ $F_s = \frac{6}{10^{-3}}\text{Hz}$, tiêu chuẩn Nyquist bị vi phạm, do đó xảy ra hiện tượng chồng phổ.

c) Áp dụng công thức: $\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Từ câu a) ta thấy $\tilde{x}[n]$ tuần hoàn với chu kỳ N = 6.

Thay vào ta có:

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{5}\left(\sum_{m=-9}^{9} a_m e^{j\frac{2\pi}{6}mn}\right)e^{-j\frac{2\pi}{6}kn} = \sum_{n=0}^{5}\sum_{m=-9}^{9} a_m e^{j\frac{2\pi}{6}(m-k)n}$$

Đổi thứ tự của tổng và sử dụng mối quan hệ có tính trực giao ta có:

$$\tilde{X}[k] = 6\sum_{m=-9}^{9} a_m \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[m-k+rN]$$

Đưa tổng vô hạn ra ngoài ta được tích chập giữa a_m và các xung đơn vị đã bị dịch đi một số mẫu (nhắc lại $a_m = 0, |m| > 9$). Do đó:

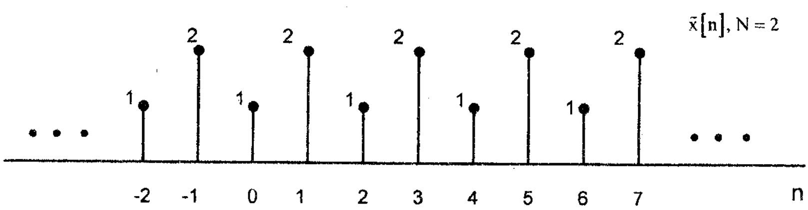
$$\tilde{X}[k] = 6\sum_{r=-\infty}^{\infty} a_{k-6r}$$

Chú ý rằng từ $\tilde{X}[k]$ rõ ràng sẽ xảy ra hiện tượng chồng phổ.

4.2. Cho $\tilde{x}[n]$ là dãy tuần hoàn với chu kỳ N. $\tilde{x}[n]$ cũng tuần hoàn với chu kỳ 3N. Gọi $\tilde{X}(k)$ là hệ số DFS (Discrete Fourier Sequence) của $\tilde{x}[n]$ tuần hoàn với chu kỳ N. $\tilde{X}_3(k)$ là hệ số DFS của $\tilde{x}[n]$ tuần hoàn với chu kỳ 3N.

a) Biểu diễn $\tilde{X}_3(k)$ theo $\tilde{X}(k)$

b) Bằng cách tính tường minh $\tilde{X}_3(k)$ và $\tilde{X}(k)$, kiểm chứng kết quả trong phần a với $\tilde{x}[n]$ được cho trong hình 4.1 sau:



Hình 4.1

Lời giải:

a) Sử dụng công thức khai triển Fourier ta có:

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn}$$

Vì $\tilde{x}[n]$ cũng tuần hoàn với chu kỳ 3N,

$$\tilde{X}_3[k]=\sum_{n=0}^{3N-1}\tilde{x}[n]W_{3N}^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_{3N}^{kn}+\sum_{n=N}^{2N-1}\tilde{x}[n]W_{3N}^{kn}+\sum_{n=2N}^{3N-1}\tilde{x}[n]W_{3N}^{kn}$$

Thực hiện đổi biến ở tổng thứ 2 và thứ 3 của $\tilde{X}_3(k)$ ta được:

$$\tilde{X}_3[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_{3N}^{kn}+W_{3N}^{kN}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n+N]W_{3N}^{kn}+W_{3N}^{2kN}\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n+2N]W_{3N}^{kn}$$

Do $\tilde{x}[n]$ tuần hoàn với chu kỳ N và $W_{3N}^{kn}=W_N^{(k/3)n}$:

$$\tilde{X}_3[k]=\left(1+e^{-j2\pi\left(\frac{k}{3}\right)}+e^{-j2\pi\left(\frac{2k}{3}\right)}\right)\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{(k/3)n}=\left(1+e^{-j2\pi\left(\frac{k}{3}\right)}+e^{-j2\pi\left(\frac{2k}{3}\right)}\right)\tilde{X}[k/3]$$

$$=\begin{cases}3\tilde{X}[k/3], & k=3\ell\\ 0, & k\neq 3\ell\end{cases}$$

b) Sử dụng N = 2 và $\tilde{x}[n]$ như trong hình 4.1 ta được:

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{1}\tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{2}kn}=\tilde{x}[0]+\tilde{x}[1]e^{-j\pi k}$$

$$=1+2(-1)^k=\begin{cases}3, & k=0\\ -1, & k=1\end{cases}$$

Từ hình 4.1 ta thấy $\tilde{x}[n]$ cũng tuần hoàn với chu kỳ $3N = 6$:

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{n=0}^{3N-1} \tilde{x}[n] W_{3N}^{kn} = \sum_{n=0}^{5} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{\pi}{3}kn}$$

$$= \left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\frac{4\pi}{3}k}\right)\left(1 + 2(-1)^{\frac{k}{3}}\right) = \left(1 + e^{-j\frac{2\pi}{3}k} + e^{-j\frac{4\pi}{3}k}\right)\tilde{X}[k/3]$$

$$= \begin{cases} 9, & k = 0 \\ -3, & k = 3 \\ 0, & k = 1,2,4,5 \end{cases}$$

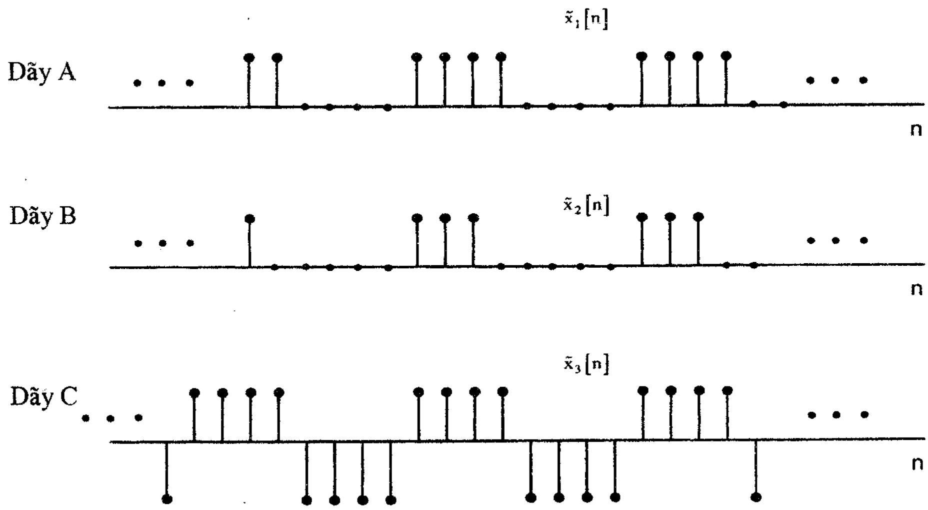
4.3. Hình 4.2 mô tả 3 dãy $\tilde{x}_1[n]$ đến $\tilde{x}_3[n]$. Các dãy này có thể biểu diễn bằng chuỗi Fourier như sau:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k].e^{j(2\pi/N).kn}$$

a) Dãy nào có thể chọn gốc thời gian để tất cả các $\tilde{X}(k)$ đều là thực?

b) Dãy nào có thể chọn gốc thời gian để tất cả các $\tilde{X}(k)$ (ngoại trừ các giá trị k bằng một số nguyên lần của N) đều là ảo?

c) Dãy nào thỏa mãn $\tilde{X}(k) = 0$ với $k = \pm 2, \pm 4, \pm 6...$



Hình 4.2

Lời giải:

a) Hệ số DFS sẽ là thực nếu $\tilde{x}[n]$ là dãy chẵn. Chỉ có tín hiệu B là chẵn (nghĩa là $\tilde{x}_B[n] = \tilde{x}_B[-n]$) nếu chọn gốc là điểm giữa của khối khác không hoặc khối toàn không.

b) Hệ số DFS sẽ là ảo nếu $\tilde{x}[n]$ là dãy lẻ. Không có dãy nào trong hình 4.2 là lẻ.

c) Sử dụng công thức khai triển Fourier và biểu diễn dạng đóng của các dãy hình học. Giả sử biên độ có độ lớn đơn vị và loại bỏ các điểm DFS bằng không:

$$\tilde{X}_A[k]=\sum_{n=0}^{3}e^{j\frac{2\pi}{4}kn}=\frac{1-e^{j\frac{\pi}{4}4k}}{1-e^{j\frac{\pi}{4}k}}=\frac{1-(-1)^k}{1-e^{j\frac{\pi}{4}k}}=0,\quad k=\pm2,\pm4,...$$

$$\tilde{X}_B[k]=\sum_{n=0}^{2}e^{j\frac{2\pi}{4}kn}=\frac{1-e^{j\frac{\pi}{4}3k}}{1-e^{j\frac{\pi}{4}k}}$$

$$\tilde{X}_C[k]=\sum_{n=0}^{3}e^{j\frac{2\pi}{4}kn}-\sum_{n=4}^{7}7e^{j\frac{2\pi}{4}kn}=\sum_{n=0}^{3}\left(e^{j\frac{\pi}{4}kn}-e^{j\frac{\pi}{4}k(n+4)}\right)$$

$$=\left(1-e^{j\pi k}\right)\frac{1-e^{j\pi k}}{1-e^{j\frac{\pi}{4}k}}=0,\quad k=\pm2,\pm4,...$$

4.4. Giả sử dãy $x[n]$ được cho bởi $x[n]=\alpha^n.u[n]$. Dãy tuần hoàn $\tilde{x}[n]$ được tạo ra từ $x[n]$ theo công thức sau:

$$\tilde{x}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n+rN]$$

a) Tìm biến đổi Fourier $X(e^{j\omega})$ của $x[n]$

b) Tìm chuỗi Fourier rời rạc $\tilde{X}(k)$ của $\tilde{x}[n]$

c) Tìm quan hệ giữa $X(e^{j\omega})$ và $\tilde{X}(k)$

Lời giải:

Dãy tuần hoàn được xây dựng từ dãy: $x[n]=\alpha^n u[n], |\alpha|<1$ như sau:

$$\tilde{x}[n]=\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n+rN],\quad |\alpha|<1$$

a) Biến đổi Fourier của $x[n]$:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j\omega}},\ |\alpha|<1$$

b) DFS của $\tilde{x}[n]$:

$$\tilde{X}[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{r=-\infty}^{\infty}x[n+rN]W_N^{kn}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\alpha^{n+rN}u[n+rN]W_N^{kn}=\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{\infty}\alpha^{n+rN}W_N^{kn}$$

Đổi thứ tự các tổng ta được:

$$\tilde{X}[k]=\sum_{r=0}^{\infty}\alpha^{rN}\sum_{n=0}^{N-1}\alpha^{n}W_N^{kn}=\sum_{r=0}^{\infty}\alpha^{rN}\left(\frac{1-\alpha^{N}e^{-j2\pi k}}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}\right),\qquad |\alpha|<1$$

$$=\frac{1}{1-\alpha^{N}}\left(\frac{1-\alpha^{N}e^{-j2\pi k}}{1-\alpha e^{-j\frac{2\pi k}{N}}}\right),\qquad |\alpha|<1$$

$$\tilde{X}[k]=\frac{1}{1-\alpha e^{-j(2\pi k/N)}},\qquad |\alpha|<1$$

c) So sánh kết quả câu a) và b) ta có:

$$\tilde{X}[k]=X\left(e^{j\omega}\right)\Big|_{\omega=2\pi k/N}$$

4.5. Tính DFT của các dãy có chiều dài hữu hạn N sau đây (N chẵn):

a) $x[n]=\delta[n]$

b) $x[n]=\delta[n-n_0],\quad 0\le n\le N-1$

c) $x[n]=\begin{cases}1, & n=2k\\ 0, & n=2k+1\end{cases}, k\in Z, 0\le n\le N-1$

d) $x[n]=\begin{cases}1, & 0\le n\le N/2\\ 0, & N/2\le n\le N-1\end{cases}$

e) $x[n]=\begin{cases}a^{n}, 0\le n\le N-1\\ 0, n\notin[0,N-1]\end{cases}$

Lời giải:

a) $x[n]=\delta[n]$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\delta[n]W_N^{kn},\quad 0\le k\le N-1$$
$$=1$$

b) $x[n]=\delta[n-n_0], 0\le n\le N-1$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}\delta[n-n_0]W_N^{kn}, 0\le n\le N-1$$
$$=W_N^{kn_0}$$

c) $x[n]=\begin{cases}1, & n=2m\\ 0, & n=2m+1\end{cases}$

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn},\quad 0\le k\le N-1$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^{2kn} = \frac{1-e^{-j2\pi k}}{1-e^{-j(4\pi k/N)}}$$

$$X[k] = \begin{cases} N/2, & k = 0, N/2 \\ 0, & k \neq 0, N/2 \end{cases}$$

d) $x[n] = \begin{cases} 1, 0 \le n \le ((N/2)-1) \\ 0, N/2 \le n \le (N-1) \end{cases}$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{kn}, 0 \le k \le N-1$$

$$= \sum_{n=0}^{(N/2)-1} W_N^{kn} = \frac{1-e^{-j\pi k}}{1-e^{-j(2\pi k)/N}}$$

$$X[k] = \begin{cases} N/2 & k = 0 \\ \dfrac{2}{1-e^{-j(2\pi k/N)}} & k = 2m+1 \\ 0 & k = 2m, 0 \le k \le N-1 \end{cases}$$

e) $x[n] = \begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & n \notin [0, N-1] \end{cases}$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} a^n W_N^{kn}, \quad 0 \le k \le N-1$$

$$= \frac{1-a^N e^{-j2\pi k}}{1-ae^{-j(2\pi k)/N}}$$

$$X[k] = \frac{1-a^N}{1-ae^{-j(2\pi k)/N}}$$

4.6. Năm điểm đầu tiên của một DFT – 8 điểm của một chuỗi giá trị thực x(n) là $\{0,15; 0,225 - j0,32; 0; 0,41 - j0,083; 0\}$. Hãy xác định 3 điểm còn lại.

Lời giải:

Vì chuỗi x(n) là thực nên phần thực của DFT của nó là chẵn, còn phần ảo sẽ là lẻ. Do đó các điểm còn lại sẽ là: $\{0,41 + j0,083; 0; 0,225 + j0,32\}$

4.7. Hãy tính tích chập vòng 8- điểm cho các dãy sau đây:

a) $x_1(n) = \{1,1,1,1,1,0,0,0\}$

$$x_2(n) = \sin\left(\frac{3\pi}{8} n\right), \quad 0 \le n \le 7$$

b) $x_1(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n, \qquad 0 \le n \le 7$

$$x_2(n) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}n\right), \quad 0 \le n \le 7$$

Lời giải:

$$\text{a)}\,\tilde{x}_2(l) = x_2(l), \qquad 0 \le l \le N-1$$
$$= x_2(l+N), \qquad -(N-1) \le l \le -1$$

$$\tilde{x}_2(l) = \sin\left(\frac{3\pi}{8}l\right), \qquad 0 \le l \le 7$$
$$= \sin\left(\frac{3\pi}{8}(l+8)\right), \qquad -7 \le l \le -1$$
$$= \sin\left(\frac{3\pi}{8}|l|\right), \qquad |l| \le 7$$

Do đó,

$$x_1(n)(*)_8 x_2(n) = \sum_{m=0}^{4} \tilde{x}_2(n-m)$$
$$= \sin\left(\frac{3\pi}{8}|n|\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{8}|n-1|\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{8}|n-2|\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{8}|n-3|\right) +$$
$$+ \sin\left(\frac{3\pi}{8}|n-4|\right), \qquad 0 \le n \le 7$$
$$= \{0,25;\ 2,543;\ 3,257;\ 2,25;\ 0,25;\ -0,06;\ -0,353;\ 0,643\}$$

$$\text{b)}\ \tilde{x}_2(n) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}n\right), \qquad 0 \le n \le 7$$
$$= -\cos\left(\frac{3\pi}{8}n\right), \qquad -7 \le n \le -1$$
$$= [2u(n)-1]\cos\left(\frac{3\pi}{8}n\right), \qquad |n| \le 7$$

Do đó,

$$x_1(n)(*)_8 x_2(n) = \sum_{m=0}^{3}\left(\frac{1}{4}\right)^m \tilde{x}_2(n-m)$$
$$= \{0,96;\ 0,62;\ -0,55;\ -1,06;\ -0,26;\ -0,86;\ 0,92;\ -0,15\}$$

4.8. Cho $X(k)$, $0 \le k \le N-1$ là DFT N điểm của chuỗi $x(n)$, $0 \le n \le N-1$. Ta định nghĩa chuỗi $\hat{X}(k) = \begin{cases} X(k) & 0 \le k \le k_c, N-k_c \le k \le N-1 \\ 0 & k_c < k < N-k_c \end{cases}$ và ta tính $\hat{x}(n)$, $0 \le n \le N-1$ là IDFT N điểm của $\hat{X}(k)$. Hãy tìm ảnh hưởng của quá trình này lên chuỗi x(n) và giải thích.

Lời giải:

$\hat{X}(k)$, $0 \le k \le N-1$ được xem như tích của $X(k)$ với $F(k)$,

$$F(k)=\begin{cases}1 & 0\le k\le k_c, N-k_c\le k\le N-1\\ 0 & k_c<k<N-k_c\end{cases}$$

$F(k)$ là biểu diễn của một bộ lọc thông thấp lý tưởng, loại bỏ các thành phần tần số trong dải từ $(k_c+1)\frac{2\pi}{N}$ đến π. Suy ra $\hat{x}(n)$, $0\le n\le N-1$ chính là bộ lọc thông thấp của $x(n)$.

4.9. Cho dãy phức sau:

$$x[n]=\begin{cases}e^{j\omega_0 n}, 0\le n\le N-1\\ 0, n\notin[0,N-1]\end{cases}$$

a) Tìm biến đổi Fourier $X(e^{j\omega})$ của $x[n]$

b) Tìm DFT N điểm $X[k]$ của dãy chiều dài hữu hạn $x[n]$

c) Tìm DFT của $x[n]$ trong trường hợp $\omega_0=2\pi k_0/N$ với k_0 là số nguyên.

Lời giải:

Xét dãy có chiều dài hữu hạn:

$$x[n]=\begin{cases}e^{j\omega_0 n}, & 0\le n\le N-1\\ 0, & n\notin[0,N-1]\end{cases}$$

a) Biến đổi Fourier của $x[n]$:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n}$$

$$X(e^{j\omega})=\frac{1-e^{-j(\omega-\omega_0)N}}{1-e^{-j(\omega-\omega_0)}}=\frac{e^{-j(\omega-\omega_0)(N/2)}}{e^{-j(\omega-\omega_0)/2}}\left(\frac{\sin[(\omega-\omega_0)(N/2)]}{\sin[(\omega-\omega_0)/2]}\right)$$

$$X(e^{j\omega})=e^{-j(\omega-\omega_0)((N-1)/2)}\left(\frac{\sin[(\omega-\omega_0)(N/2)]}{\sin[(\omega-\omega_0)/2]}\right)$$

b) DFT N điểm:

$$X[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]W_N^{kn},\quad 0\le k\le N-1$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\omega_0 n}W_N^{kn}=\frac{1-e^{-j((2\pi k/N)-\omega_0)N}}{1-e^{-j((2\pi k/N)-\omega_0)}}=e^{-j\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega_0\right)\left(\frac{N-1}{2}\right)}\frac{\sin\left[\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega_0\right)\frac{N}{2}\right]}{\sin\left[\left(\frac{2\pi k}{N}-\omega_0\right)/2\right]}$$

Chú ý rằng $X[k]=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(2\pi k)/N}$

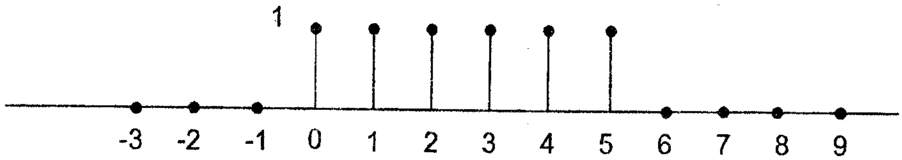
c) Đặt $\omega_0 = (2\pi k_0)/N$ ở đó k_0 là số nguyên

$$X[k] = \frac{1 - e^{-j(k-k_0)2\pi}}{1 - e^{-j(k-k_0)2\pi/N}} = e^{-j(2\pi/N)(k-k_0)((N-1)/2)} \frac{\sin\pi(k-k_0)}{\sin(\pi(k-k_0)/N)}$$

4.10. Cho dãy có chiều dài hữu hạn $x[n]$ trong hình 4.3. Gọi $X[z]$ là biến đổi z của $x[n]$. Nếu ta lấy mẫu $X[z]$ tại $z = e^{j(2\pi/4)k}$, $k = 0,1,2,3$ ta có:

$$X_1(k) = X(z)\big|_{z=e^{j(2\pi/4)k}}, k = 0,1,2,3$$

Tìm $x_1[n]$ là biến đổi DFT ngược của $X_1(k)$.



Hình 4.3

Lời giải:

Ta có dãy đồng nhất gồm 6 điểm $x[n]$, dãy này có giá trị khác không với $0 \le n \le 5$. Lấy mẫu biến đổi Z của $x[n]$ tại 4 điểm cách đều nhau trên vòng tròn đơn vị:

$$X[k] = X(z)\big|_{z=e^{j(2\pi k/4)}}$$

Ta cần tìm dãy $x_1[n]$ là DFT ngược của $X[k]$.

Mặt khác, theo định nghĩa về biến đổi Z ta có:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$x[n] = 0$ với n nằm ngòai khoảng $0 \le n \le 5$, do đó ta có thể thay thế tổng vô hạn bằng tổng hữu hạn. Sau đó thay thế tiếp $z = e^{j(2\pi k/4)}$ ta được:

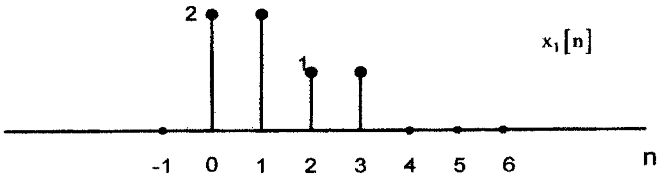
$$X[k] = \sum_{n=0}^{5} x[n] W_4^{kn}, \quad 0 \le k \le 4$$

Chú ý rằng ta đã lấy DFT 4 điểm thông qua việc lấy mẫu biến đổi Z, tuy nhiên dãy ban đầu của chúng ta gồm 6 điểm. Do đó có thể xảy ra hiện tượng chồng phổ khi chúng ta chuyển về miền thời gian thông qua DFT ngược:

$$X[k] = W_4^{0k} + W_4^{k} + W_4^{2k} + W_4^{3k} + W_4^{4k} + W_4^{5k}, \quad 0 \le k \le 4$$

Thực hiện DFT ngược và ta chú ý rằng có 6 xung đơn vị (mỗi xung tương ứng với một giá trị n ở trên). Tuy nhiên: $W_4^{4k} = W_4^{0k}$, $W_4^{5k} = W_4^{k}$

Do đó 2 điểm bị chồng phổ. Tín hiệu thu được trong miền thời gian là:



Hình 4.4

4.11. $X(e^{j\omega})$ là biến đổi Fourier của dãy $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n.u[n]$. Giả sử $y[n]$ là dãy có chiều dài hữu hạn bằng 10; nghĩa là $y[n]=0; n<0, n\geq 10$. Gọi $Y[k]$ là biến đổi Fourier 10 điểm của $y[n]$ tương ứng với 10 mẫu cách đều nhau của $X(e^{j\omega})$ nghĩa là $Y[k]=X\left(e^{j2\pi k/10}\right)$. Tìm $y[n]$

Lời giải:

Ta tìm biến đổi Fourier của $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n.u[n]$:

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n e^{-j\omega n}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j\omega}}$$

Lấy mẫu phổ tần số của $x[n]$:

$$Y[k]=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/10}, 0\leq k\leq 9$$

Mặt khác ta có DFT 10 điểm:

$$Y[k]=\frac{1}{1-\frac{1}{3}e^{-j(2\pi k/10)}},\quad 0\leq k\leq 9$$

$$=\sum_{n=0}^{9}y[n]W_{10}^{kn}$$

Ta đã có DFT N điểm của $x[n]$: $X(k)=\dfrac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^N}{1-\frac{1}{3}e^{-j(2\pi k/N)}},\quad 0\leq k\leq N-1$

Suy ra: $y[n]=\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}},\quad 0\leq n\leq 9$

4.12. Cho $x[n]$ là dãy hữu hạn gồm 25 điểm nghĩa là $x[n]=0$ với n ngoài khoảng $[0,24]$. Gọi $X(e^{j\omega})$ là biến đổi Fourier của $x[n]$

a) Giả sử cần tính $X(e^{j\omega})$ tại $\omega=4\pi/5$ bằng cách tính DFT M-mẫu thì giá trị M tối thiểu phải bằng bao nhiêu? Tính $X(e^{j\omega})$ tại $\omega=4\pi/5$ với giá trị M nhỏ nhất đó.

b) Giả sử cần tính $X(e^{j\omega})$ tại $\omega = 10\pi/32$ bằng cách tính DFT L-mẫu thì giá trị L tối thiểu phải bằng bao nhiêu? Tính $X(e^{j\omega})$ tại $\omega = 10\pi/32$ với giá trị L nhỏ nhất đó.

Lời giải:

$x[n]$ là dãy hữu hạn gồm 25 điểm:

a) Ta muốn tính $X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=4\pi/5}$ sử dụng DFT có kích thước nhỏ nhất có thể. Kích thước này rõ ràng phụ thuộc tính tuần hòan của $e^{j\omega}\Big|_{\omega=4\pi/5}$. Ta chọn kích thước của DFT là M = 5. Dãy dữ liệu gồm 25 điểm. Sử dụng kỹ thuật chồng phổ trong miền thời gian, cụ thể là chồng phổ $x[n]$ như sau:

$$x_1[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n+5r]$$

Phiên bản bị chồng phổ của $x[n]$ tuần hoàn với chu kỳ bằng 5. Tính DFT 5 điểm. Để tính $X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=4\pi/5}$ ta lấy: $\dfrac{2\pi k}{N} = \dfrac{4\pi}{5}$

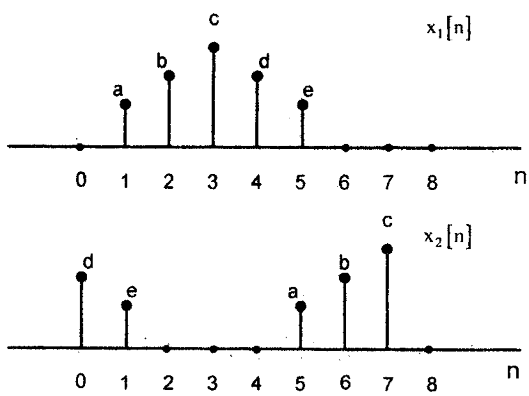
Với N = 5, k = 2, giá trị $X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=4\pi/5}$ tương ứng với $X[k]\Big|_{k=2}$

b) Tiếp theo, ta muốn tính $X(e^{j\omega})$ tại $\omega = 10\pi/32$. Khi đó, kích thước nhỏ nhất của DFT bằng 32. Do kích thước của DFT lớn hơn kích thước của khối dữ liệu, ta thêm vào $x[n]$ 7 giá trị 0 như sau:

$$x_2[n] = \begin{cases} x[n], 0 \le n \le 24 \\ 0, \quad 25 \le n \le 31 \end{cases}$$

Tính DFT 32 điểm. Khi đó $X(e^{j\omega})$ tại $\omega = 10\pi/32$ tương ứng với $X[k]\Big|_{k=5}$

4.13. Cho 2 dãy 8 điểm $x_1[n]$ và $x_2[n]$ như trong hình 4.5 có các DFT tương ứng là $X_1[k]$ và $X_2[k]$. Xác định quan hệ giữa $X_1[k]$ và $X_2[k]$.



Hình 4.5

Lời giải:

Từ hình 4.5, 2 dãy $x_1[n]$ và $x_2[n]$ có quan hệ dịch vòng với nhau. Cụ thể như sau:

$$x_2[n] = x_1\left[((n-4))_8\right]$$

Tính DFT cho chuỗi dịch vòng $x_2[n]$ ta có:

$$\text{DFT}\{x_2(n)\} = \text{DFT}\left\{x_1\left[((n-4))_8\right]\right\} = W_8^{4k}X_1[k]$$

Do đó:

$$X_2[k] = W_8^{4k}X_1[k]$$
$$= e^{-j\pi k}X_1[k]$$
$$X_2[k] = (-1)^k X_1[k]$$

4.14. Cho các chuỗi $x_1(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$; $x_2(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$ $\quad 0 \le n \le N-1$

Hãy xác định N-điểm:

a) Tích chập vòng $x_1(n)(*)_N x_2(n)$

b) Tương quan vòng của $x_1(n)$ và $x_2(n)$.

c) Tự tương quan vòng của $x_1(n)$

d) Tự tương quan vòng của $x_2(n)$

Lời giải:

a) $x_1(n) = \sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right)$; $\quad 0 \le n \le N-1$

$$= \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)$$

$$\Rightarrow X_1(k) = \frac{N}{2j}\left[\delta(k-1) - \delta(k+1)\right]$$

$$x_2(n) = \cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right); \quad 0 \le n \le N-1$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{N}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N}n}\right)$$

$$\Rightarrow X_2(k) = \frac{N}{2}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right]$$

Do đó, $X_3(k) = X_1(k)X_2(k)$

$$= \frac{N^2}{4j}\left[\delta(k-1) - \delta(k+1)\right]$$

$$\Rightarrow x_3(n) = \frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right); \qquad 0 \le n \le N-1$$

b) $\tilde{R}_{x_1x_2}(k) = X_1(k)X_2^*(k)$

$$= \frac{N^2}{4j}\left[\delta(k-1) - \delta(k+1)\right]$$

$$\Rightarrow \tilde{r}_{x_1x_2}(n) = -\frac{N}{2}\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right);$$

c) $\tilde{R}_{x_1x_1}(k) = X_1(k)X_1^*(k)$

$$= \frac{N^2}{4}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right]$$

$$\Rightarrow \tilde{r}_{x_1x_1}(n) = \frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right);$$

d) $\tilde{R}_{x_2x_2}(k) = X_2(k)X_2^*(k)$

$$= \frac{N^2}{4}\left[\delta(k-1) + \delta(k+1)\right]$$

$$\Rightarrow \tilde{r}_{x_2x_2}(n) = \frac{N}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{N}n\right).$$

4.15. Hãy tính DFT N-điểm của cửa sổ Blackman có phương trình như sau:

$$w(n) = \begin{cases} 0,42 - 0,5\cos\left(\dfrac{2\pi n}{N-1}\right) + 0,08\cos\left(\dfrac{4\pi n}{N-1}\right); & 0 \le n \le N-1 \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases}$$

Lời giải:

$$w(n) = 0,42 - 0,25\left(e^{j\frac{2\pi}{N-1}n} + e^{-j\frac{2\pi}{N-1}n}\right) + 0,04\left(e^{j\frac{4\pi}{N-1}n} + e^{-j\frac{4\pi}{N-1}n}\right)$$

Suy ra, DFT N-điểm của cửa sổ Blackman có dạng:

$$W(k) = 0,42\sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} - 0,25\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N-1}n} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N-1}n} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right) +$$

$$+ 0,04\left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{4\pi}{N-1}n} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} + \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{4\pi}{N-1}n} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}\right)$$

$$=0,42N\delta(k)-0,25\left(\frac{1-e^{j2\pi\left[\frac{N}{N-1}-k\right]}}{1-e^{j2\pi\left[\frac{1}{N-1}-\frac{k}{N}\right]}}+\frac{1-e^{-j2\pi\left[\frac{N}{N-1}+k\right]}}{1-e^{-j2\pi\left[\frac{1}{N-1}+\frac{k}{N}\right]}}\right)+$$

$$+0,04\left(\frac{1-e^{j2\pi\left[\frac{2N}{N-1}-k\right]}}{1-e^{j2\pi\left[\frac{2}{N-1}-\frac{k}{N}\right]}}+\frac{1-e^{-j2\pi\left[\frac{2N}{N-1}+k\right]}}{1-e^{-j2\pi\left[\frac{2}{N-1}+\frac{k}{N}\right]}}\right)$$

$$=0,42N\delta(k)-0,25\left(\frac{1-\cos\left(\frac{2\pi N}{N-1}\right)-\cos\left[2\pi\left(\frac{1}{N-1}+\frac{k}{N}\right)\right]+\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{1-\cos\left[2\pi\left(\frac{1}{N-1}+\frac{k}{N}\right)\right]}\right)+$$

$$+0,04\left(\frac{1-\cos\left(\frac{4\pi N}{N-1}\right)-\cos\left[2\pi\left(\frac{2}{N-1}+\frac{k}{N}\right)\right]+\cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}{1-\cos\left[2\pi\left(\frac{2}{N-1}+\frac{k}{N}\right)\right]}\right)$$

4.16. Cho $X(k)$ là DFT của chuỗi $x(n)$, hãy xác định DFT N-điểm của các chuỗi sau:

$$x_c(n)=x(n)\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right),\qquad 0\le n\le N-1$$

Và $$x_s(n)=x(n)\sin\left(\frac{2\pi kn}{N}\right),\qquad 0\le n\le N-1$$

theo hàm của X(k).

Lời giải:

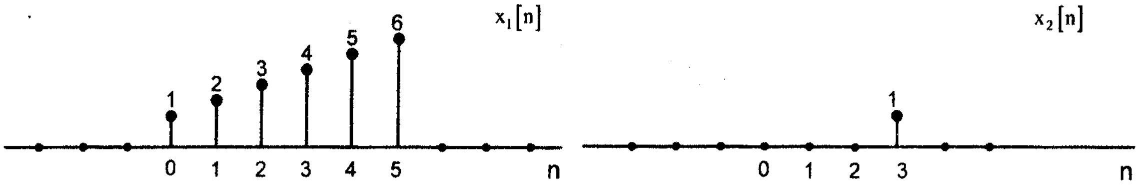
$$X_c(k)=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{2}x(n)\left(e^{j\frac{2\pi}{N}nk_0}+e^{-j\frac{2\pi}{N}nk_0}\right)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k-k_0)}+\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}n(k+k_0)}\right)$$

$$=\frac{1}{2}X(k-k_0)_{\text{mod}\,N}+\frac{1}{2}X(k+k_0)_{\text{mod}\,N}$$

Làm tương tự ta có: $X_s(k)=\frac{1}{2j}X(k-k_0)_{\text{mod}\,N}-\frac{1}{2j}X(k+k_0)_{\text{mod}\,N}$

4.17. Cho 2 dãy có chiều dài hữu hạn $x_1[n]$ và $x_2[n]$ như trong hình 4.6. Tính tích chập vòng chiều dài N = 6 của chúng.

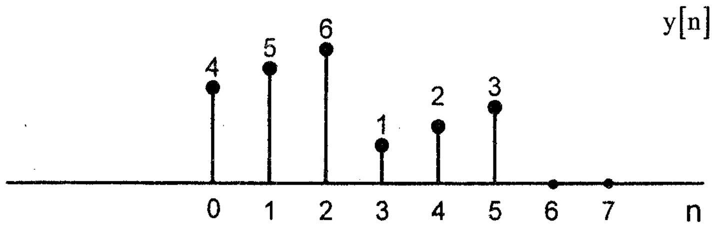


Hình 4.6

Lời giải:

Ta muốn tính tích chập vòng giữa 2 dãy có chiều dài 6. Do $x_2[n]$ là một xung đơn vị được dịch vòng nên tích chập vòng chính là dãy $x_1[n]$ dịch vòng đi 2 mẫu:

$$y[n] = x_1[n](*)_6 x_2[n] = x_1[n](*)_6\delta[n-2] = x_1\left[((n-2))_6\right]$$



Hình 4.7

4.18. Cho 2 dãy $x[n]$ và $h[n]$ có chiều dài N = 4 như sau:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

$$h[n] = 2^n, n = 0,1,2,3$$

a) Tìm DFT 4 điểm $X[k]$

b) Tìm DFT 4 điểm $H[k]$

c) Tính $y[n] = x[n](*)_4 h[n]$ bằng cách tính trực tiếp tích chập vòng

d) Tính $y[n]$ của phần c) bằng cách nhân các DFT của $x[n]$ và $h[n]$, sau đó thực hiện biến đổi DFT ngược.

Lời giải:

a) $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, 3$

Ta có DFT 4 điểm:

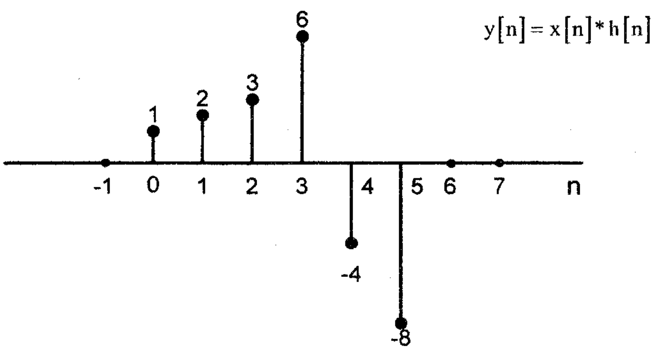
$$X[k] = \sum_{n=0}^{3}\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)W_4^{kn},\quad 0 \le k \le 3$$

$$X[k] = 1 - e^{-j\pi k}, \qquad 0 \le k \le 3$$
$$= 1 - W_4^{2k}$$

b) $h[n] = 2^n, n = 0, 1, 2, 3$

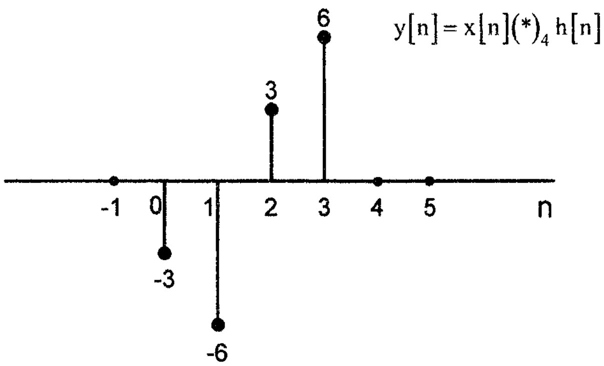
$$H[k] = \sum_{n=0}^{3} 2^n W_4^{kn}, \quad 0 \le k \le 3$$
$$= 1 + 2W_4^k + 4W_4^{2k} + 8W_4^{3k}$$

c) Ta nhớ lại rằng, tích chập vòng bằng tích chập tuyến tính cộng với chồng phổ. Ta cần $N \ge 3 + 4 - 1 = 6$ để tránh chồng phổ. Do N = 4 nên sẽ có chồng phổ. Trước hết, tìm $y[n] = x[n] * h[n]$.



Hình 4.8

Trong bài này, chồng phổ nghĩa là 3 điểm cuối (n = 4, 5, 6) sẽ trùm lên đỉnh 3 điểm đầu, cho ta $y[n] = x[n](*)_4 h[n]$:



Hình 4.9

d) Sử dụng các giá trị DFT ta tính trong câu a) và b):

$$Y[k] = X[k]H[k] = 1 + 2W_4^k + 4W_4^{2k} + 8W_4^{3k} - W_4^{2k} - 2W_4^{3k} - 4W_4^{4k} - 8W_4^{5k}$$

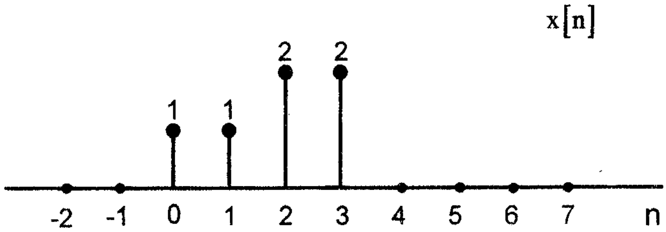
Do $W_4^{4k} = W_4^{0k}, W_4^{5k} = W_4^k$

$$Y[k] = -3 - 6W_4^k + 3W_4^{2k} + 6W_4^{3k}, \quad 0 \le k \le 3$$

Lấy DFT ngược ta có:

$$y[n] = -3\delta[n] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3], \quad 0 \le n \le 3$$

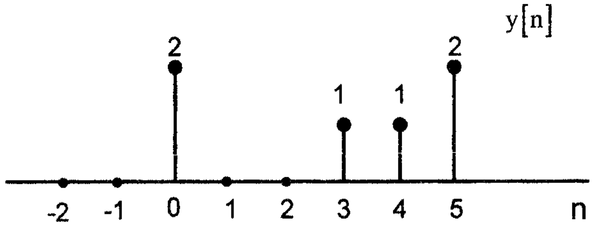
4.19. Cho dãy $x[n]$ có chiều dài hữu hạn như trong hình 4.10. $X[k]$ là DFT 5 điểm của $x[n]$. Biểu diễn dãy $y[n]$ biết biến đổi DFT của $y[n]$ là $Y[k] = W_5^{-2k}X[k]$



Hình 4.10

Lời giải:

Sử dụng tính chất của DFT ta có: $y[n] = x\left[((n-2))_5\right]$ nghĩa là $y[n]$ chính là $x[n]$ dịch vòng đi 2 điểm. Ta có:



Hình 4.11

4.20. Cho hai dãy $x_1(n) = \left\{\underset{\uparrow}{2}, 1, 3, 5\right\}$ và $x_2(n) = \left\{\underset{\uparrow}{2}, 3, 1, 2\right\}$. Dùng DFT và IDFT 4-điểm để tính chuỗi sau: $x_3(n) = x_1(n)(*)_N x_2(n)$.

Lời giải:

$$X_1(k) = \text{DFT}\{x_1(n)\} = \{11, \quad -1+4j, \quad -1, \quad -1-4j\}$$

$$X_2(k) = \text{DFT}\{x_2(n)\} = \{8, \quad 1-j, \quad -2, \quad 1+j\}$$

$$X_3(k) = X_1(k)X_2(k) = \{88, \quad 3+5j, \quad 2, \quad 3-5j\}$$

$$x_3(n) = \text{IDFT}\{X_3(k)\} = \{24 \;\; 19 \;\; 21 \;\; 24\}$$

4.21. Cho $X(k)$ là DFT 8-điểm của chuỗi: $x(n) = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 3 \\ 0 & 4 \le n \le 7 \end{cases}$

Hãy tính DFT của các chuỗi:

a) $x_1(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & 1\le n\le 4\\ 1 & 5\le n\le 7\end{cases}$

b) $x_2(n)=\begin{cases}0 & 0\le n\le 1\\ 1 & 2\le n\le 5\\ 0 & 6\le n\le 7\end{cases}$

Lời giải:

a) $x_1(n)=x(n-5)_{mod8}$

$$\Rightarrow X_1(k)=X(k)e^{-j\frac{2\pi}{8}5k}=X(k)e^{-j\frac{5\pi k}{4}}$$

b) $x_2(n)=x(n-2)_{mod8}$

$$\Rightarrow X_2(k)=X(k)e^{-j\frac{2\pi}{8}2k}=X(k)e^{-j\frac{\pi k}{2}}$$

4.22. Hãy xác định DFT 8-điểm của tín hiệu sau:

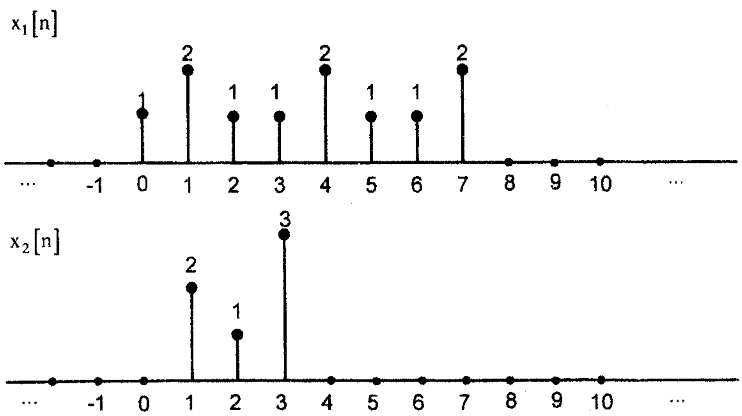
$$x(n)=\{\underset{\uparrow}{1},\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1\}$$

Lời giải:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W_8^{kn}$$

$$X(k)=\{6\quad 1{,}707+0{,}707j\quad -1\text{-}j\quad 0{,}293+0{,}707j\quad 0\quad 0{,}293-0{,}707j\quad -1+j\quad 1{,}707-0{,}707j\}$$

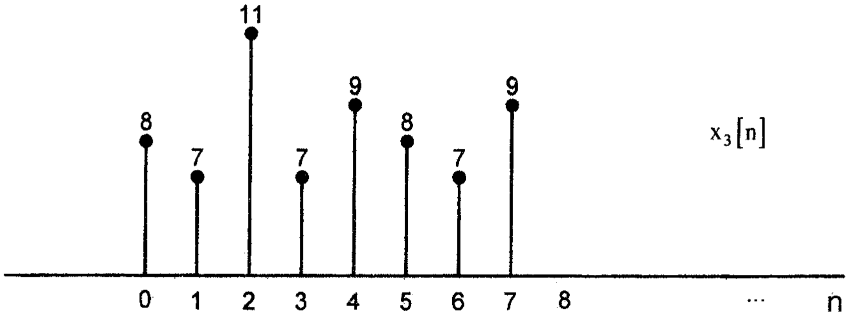
4.23. Cho 2 tín hiệu có chiều dài hữu hạn $x_1[n]$ và $x_2[n]$ như trong hình 4.12. Giả sử 2 tín hiệu này có giá trị bằng 0 ở ngoài vùng được vẽ trong hình. Tính tích chập vòng chiều dài 8 của $x_1[n]$ và $x_2[n]$: $x_3[n]=x_1[n](*)_8\,x_2[n]$. Tìm $x_3[2]$.



Hình 4.12

Lời giải:

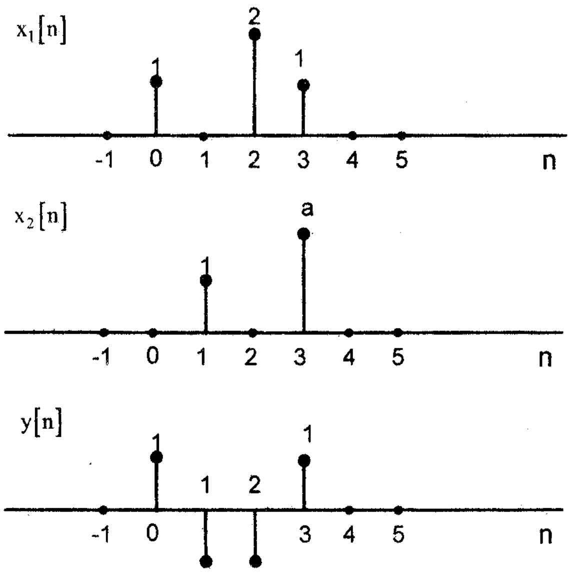
Thực hiện tích chập vòng 8 điểm ta có:



Hình 4.13

Vậy $x_3[2]=9$

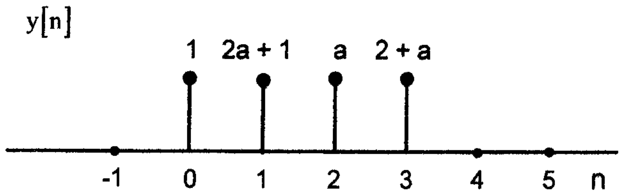
4.24. Hình 4.14(a) biểu diễn 2 dãy $x_1[n]$ và $x_2[n]$. Giá trị $x_2[n]$ tại thời điểm n =5 chưa biết và được biểu thị bằng biến a. Hình 4.14 (b) biểu diễn $y[n]$ là tích chập vòng chiều dài 4 của $x_1[n]$ và $x_2[n]$. Dựa vào đồ thị của $y[n]$ có thể xác định được duy nhất a không? Nếu có thì a bằng bao nhiêu? Nếu không, hãy tìm 2 giá trị của a có thể tạo ra đồ thị của $y[n]$ như hình vẽ.



Hình 4.14(a), (b)

Lời giải:

Thực hiện tích chập vòng 4 điểm ta có:

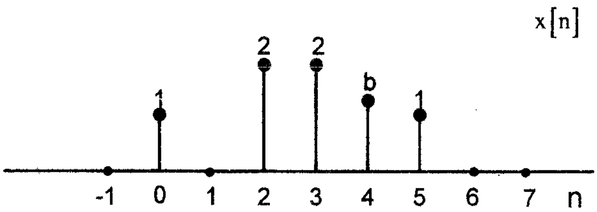


Hình 4.15

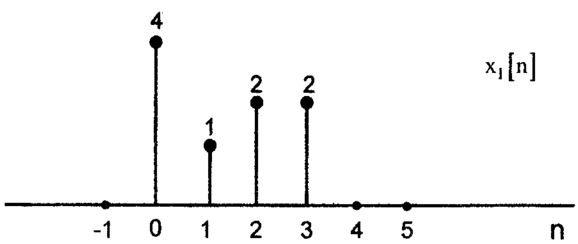
So sánh dãy $y[n]$ cho trước và dãy $y[n]$ tính được ta có a = -1 và giá trị này là duy nhất.

4.25. Hình 4.16(a) biểu diễn dãy $x[n]$ rời rạc có chiều dài bằng 6. Gỉa sử $x[n]=0$ với các giá trị bên ngoài vùng mô tả. Giá trị $x[4]$ chưa biết và ký hiệu bằng b. Chú ý rằng giá trị b vẽ trong hình không tuân theo tỷ lệ. Gọi $X(e^{j\omega})$ là DFT của $x[n]$. $X_1[k]$ là các mẫu của $X(e^{j\omega})$ với mỗi $\pi/2$ nghĩa là: $X_1[k]=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(\pi/2)k}, 0\le k\le 3$

Hình 4.16(b) biểu diễn dãy $x_1[n]$ chiều dài bằng 4 là kết quả của biến đổi DFT ngược của $X_1[k]$ chiều dài bằng 4. Dựa vào đồ thị này có thể xác định được giá trị b duy nhất không? Nếu có hãy tìm giá trị của b.



Hình 4.16(a)

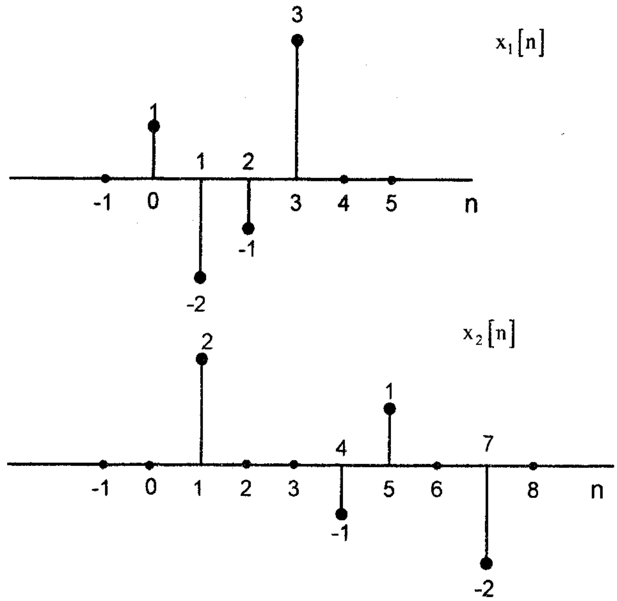


Hình 4.16(b)

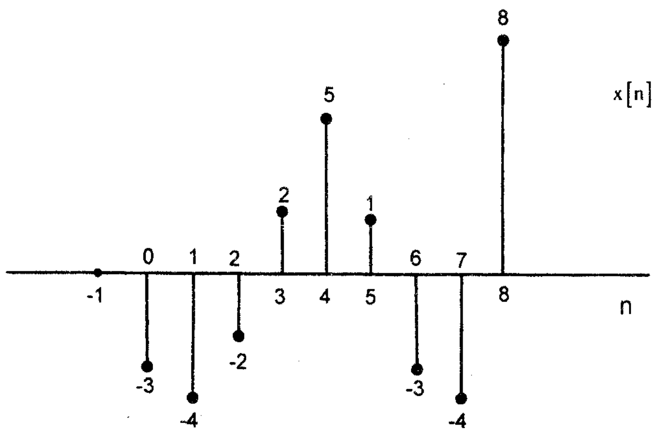
Lời giải:

$X_1[k]$ là DFT 4 điểm của $x[n]$ và $x_1[n]$ là DFT ngược 4 điểm của $X_1[k]$, vì vậy $x_1[n]$ là $x[n]$ được chồng phổ trong miền thời gian tới N = 4. Nói cách khác $x_1[n]$ là một chu kỳ của $\tilde{x}[n]=x\left[((n))_4\right]$. Vì thế ta có: 4 = b + 1. Suy ra b = 3. Giá trị này là duy nhất.

4.26. Hình 4.17(a) biểu diễn 2 dãy có chiều dài hữu hạn $x_1[n]$ và $x_2[n]$. Giá trị N nhỏ nhất bằng bao nhiêu để tích chập vòng chiều dài N của $x_1[n]$ và $x_2[n]$ bằng tích chập tuyến tính của chúng nghĩa là $x_1[n](*)_N x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$?



Hình 4.17(a)

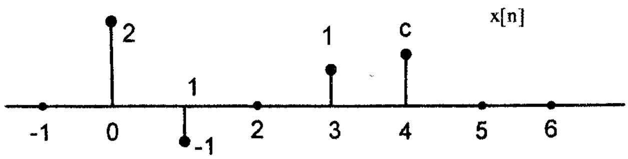


Hình 4.17(b)

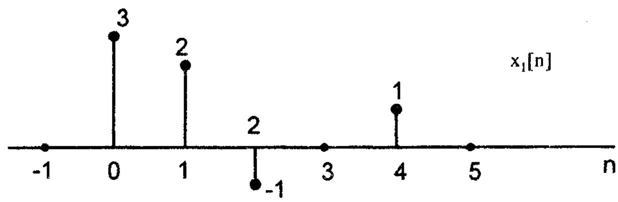
Lời giải:

Nhìn vào đồ thị hình 4.17(b) ta thấy $x(n) = x_1[n] * x_2[n]$ khác không với $1 \le n \le 8$. Vì vậy giá trị N nhỏ nhất để $x_1[n](*)_N x_2[n] = x_1[n] * x_2[n]$ là $N = 9$.

4.27. Hình 4.18(a) biểu diễn dãy $x[n]$ trong đó $x[3]$ là một hằng số c chưa biết. Mẫu có biên độ c không được vẽ theo tỷ lệ. Gọi $X_1[k]=X[k]e^{j2\pi 3k/5}$ trong đó $X[k]$ là biến đổi DFT 5 điểm của $x[n]$. Dãy $x_1[n]$ được vẽ trong hình 4.18(b) là biến đổi DFT ngược của $X_1[k]$. Tìm giá trị c?



Hình 4.18(a)



Hình 4;18(b)

Lời giải:

Tìm DFT ngược của $X_1[k]$ và sử dụng tính chất của DFT ta có:

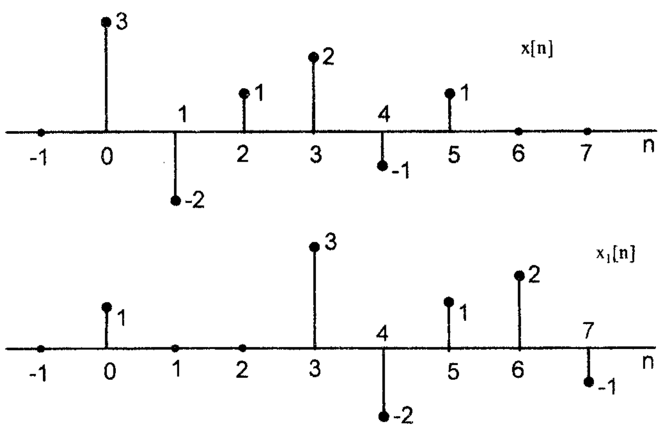
$$x_1[n]=x\left[\left((n+3)\right)_5\right]$$

Do đó: $x_1[0]=x[3]=c$

Suy ra c = 2.

4.28. Hình 4.19 biểu diễn 2 dãy có chiều dài hữu hạn $x[n]$ và $x_1[n]$. Các DFT tương ứng của chúng là $X[k]$ và $X_1[k]$ có quan hệ với nhau theo công thức sau: $X_1[k]=X[k]e^{-j(2\pi km/6)}$ trong đó m là hằng số chưa biết.

Tìm giá trị m thỏa mãn hình 4.19. Giá trị m này có phải là duy nhất không? Nếu đúng hãy chứng minh. Ngược lại, hãy nêu giá trị m khác thỏa mãn điều kiện đã cho.



Hình 4.19

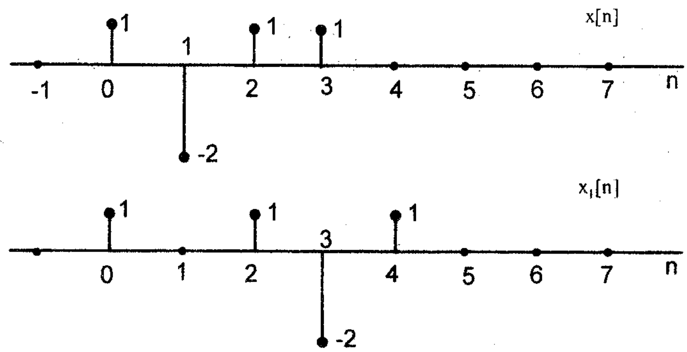
Lời giải:

Từ đồ thị ta thấy $x[n]$ và $x_1[n]$ có quan hệ dịch vòng với nhau. Sử dụng tính chất của DFT và quan hệ giữa $X[k]$ và $X_1[k]$ ta có:

$$x_1[n] = x\left[((n-m))_6\right]$$

Gía trị m = 2 thỏa mãn nhưng sự lựa chọn này không phải duy nhất. Với bất kỳ $m = 2 + 6l$ (l là số nguyên) cũng đều thỏa mãn.

4.29. Hình 4.20 biểu diễn 2 dãy có chiều dài hữu hạn $x[n]$ và $x_1[n]$. $X[k]$ và $X_1[k]$ là các DFT tương ứng có chiều dài N, giữa chúng có quan hệ theo công thức sau: $X_1[k] = X[k]e^{j2\pi k2/N}$ trong đó N là hằng số chưa biết. Tìm giá trị N thỏa mãn hình 4.20. Giá trị N này có phải là duy nhất không? Nếu đúng hãy chứng minh. Ngược lại, hãy tìm các giá trị N khác thỏa mãn điều kiện đã cho.



Hình 4.20

Lời giải:

$$X_1[k] = X[k]e^{+j(2\pi k2/N)}$$

Sử dụng tính chất của DFT ta có:

$$x_1[n] = x\left[((n+2))_N\right]$$

Từ đồ thị suy ra N = 5. Giá trị này là duy nhất.

4.30. Hãy xác định các hệ số của chuỗi Fourier rời rạc của các chuỗi có chu kỳ sau:

a) $x_1(n) = \cos\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)$

b) $\tilde{x}_2(n) = \sin\left(\dfrac{\pi n}{3}\right) + 3\cos\left(\dfrac{\pi n}{4}\right)$

Lời giải:

a) $\tilde{x}_1(n) = \cos\left(\dfrac{\pi n}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\left[e^{j\frac{\pi n}{4}} + e^{-j\frac{\pi n}{4}}\right]$. Chu kỳ của $\tilde{x}_1(n)$ là N = 8.

$$\tilde{X}_1(k)=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{7}e^{j\frac{2\pi n}{8}}e^{-j\frac{2\pi kn}{8}}+\sum_{n=0}^{7}e^{-j\frac{2\pi n}{8}}e^{-j\frac{2\pi kn}{8}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{7}e^{-j\frac{2\pi(k-1)n}{8}}+\sum_{n=0}^{7}e^{-j\frac{2\pi(k+1)n}{8}}\right]$$

Mà $\sum_{n=0}^{7}e^{-j\frac{2\pi(k-1)n}{8}}=\begin{cases}8, & k=1\\ 0, & k\neq 1\end{cases}$ và $\sum_{n=0}^{7}e^{-j\frac{2\pi(k+1)n}{8}}=\begin{cases}8, & k=7\\ 0, & k\neq 7\end{cases}$

Do đó, $\tilde{X}_1(k)=\begin{cases}4, & k=1;7\\ 0, & k\neq 1;\ k\neq 7\end{cases}$

b) $\tilde{x}_2(n)=\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)+2\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)=\frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{\pi n}{3}}-e^{-j\frac{\pi n}{3}}\right)+\left(e^{j\frac{\pi n}{4}}+e^{-j\frac{\pi n}{4}}\right)$. Chu kì của $\sin\left(\frac{\pi n}{3}\right)$ là 6 và chu kỳ của $\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)$ là 8. Do đó chu kỳ của $\tilde{x}_2(n)=$ BSCNN(6,8) = 24

$$\tilde{X}_2(k)=\frac{1}{2j}\left[\sum_{n=0}^{23}e^{j\frac{8\pi n}{24}}e^{-j\frac{2\pi kn}{24}}+\sum_{n=0}^{23}e^{-j\frac{8\pi n}{24}}e^{-j\frac{2\pi kn}{24}}\right]+$$

$$+\frac{3}{2}\left[\sum_{n=0}^{23}e^{j\frac{6\pi n}{24}}e^{-j\frac{2\pi kn}{24}}+\sum_{n=0}^{23}e^{-j\frac{6\pi n}{24}}e^{-j\frac{2\pi kn}{24}}\right]$$

$$=\frac{1}{2j}\left[\sum_{n=0}^{23}e^{-j\frac{2\pi n(k-3)}{24}}+\sum_{n=0}^{23}e^{-j\frac{2\pi n(k+3)}{24}}\right]+$$

$$+\frac{3}{2}\left[\sum_{n=0}^{23}e^{-j\frac{2\pi n(k-4)}{24}}+\sum_{n=0}^{23}e^{-j\frac{2\pi n(k+4)}{24}}\right]$$

Suy ra: $\tilde{X}_2(k)=\begin{cases}-12j & k=3\\ 12j, & k=21\\ 36, & k=4;20\\ 0, & k\ \text{khác}\end{cases}$

4.31. Cho x(n) là một chuỗi phức có chiều dài N với DFT N-điểm là X(k). Hãy xác định các DFT N-điểm của các chuỗi có chiều dài N sau đây theo X(k):

a) $x_1(n)=x^*(n)$

b) $x_2(n)=x^*\left[(-n)_N\right]$

c) $x_3(n)=\mathrm{Re}\{x(n)\}$

d) $x_4(n)=j\mathrm{Im}\{x(n)\}$

Lời giải:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}$$

a) $X^*(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{-kn}$. Đổi biến k = N - k ta có:

$X^*(N\text{-}k)=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{-(N-k)n}=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{kn}$. Do đó:

$X_1(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{kn}=X^*(N\text{-}k)=X^*(\text{-}k)_N$.

b) $X^*(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(n)W_N^{-kn}$. Đổi biến n = N - n ta có:

$X^*(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(N-n)W_N^{-(N-n)k}=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(N-n)W_N^{kn}$. Do đó:

$x_2(n)=x^*[(N-n)]=x^*[(-n)_N]$ có DFT bằng: $X_2(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x^*(N-n)W_N^{kn}=X^*(k)$.

c) $x_3(n)=\text{Re}\{x(n)\}=\frac{1}{2}\{x(n)+x^*(n)\}$. Áp dụng DFT cho cả hai vế của biểu thức và sử dụng kết quả ở câu a) ta có: $\text{DFT}\left[\text{Re}\{x(n)\}\right]=\frac{1}{2}\{X(k)+X^*(-k)_N\}$

d) $x_4(n)=j\text{Im}\{x(n)\}=\frac{1}{2}\{x(n)-x^*(n)\}$.Áp dụng DFT cho cả hai vế của biểu thức và sử dụng kết quả ở câu a) ta có: $\text{DFT}\left[j\text{Im}\{x(n)\}\right]=\frac{1}{2}\{X(k)-X^*(-k)_N\}$

4.32. Cho x(n) là chuỗi thực có chiều dài N và DFT N-điểm của nó là X(k). Hãy xác định các DFT N-điểm của các chuỗi sau đây theo X(k):

a) $x_e(n)=\begin{cases}x(n), & n \text{ chẵn}\\ 0, & n \text{ lẻ}\end{cases}$

b) $x_o(n)=\begin{cases}x(n), & n \text{ lẻ}\\ 0, & n \text{ chẵn}\end{cases}$

Lời giải:

$$X(k)=\text{Re}\{X(k)\}+j\text{Im}\{X(k)\}=\sum x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

a) $x_e(n)=\frac{1}{2}\{x(n)+x(-n)_N\}$. Từ kết quả bài 4.30 ta có: $x^*\left[(-n)_N\right]\xleftrightarrow{\text{DFT}}X^*(k)$. Vì x(n) là thực nên: $x^*\left[(-n)_N\right]=x\left[(-n)_N\right]\xleftrightarrow{\text{DFT}}X^*(k)$. Do đó:

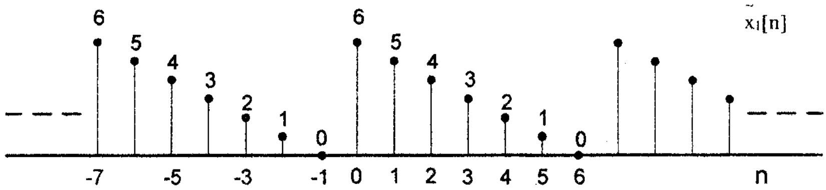
$$X_e(k)=\frac{1}{2}\left[X(k)+X^*(k)\right]=\mathrm{Re}\{X(k)\}$$

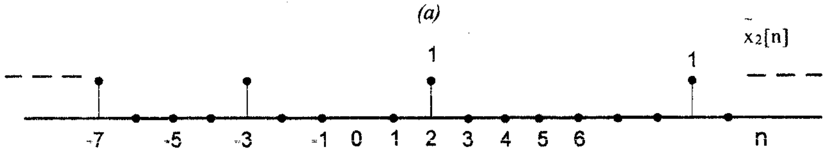
b) $x_o(n)=\frac{1}{2}\left\{x(n)-x(-n)_N\right\}$. Tương tự ta có:

$$X_o(k)=\frac{1}{2}\left[X(k)-X^*(k)\right]=j\mathrm{Im}\{X(k)\}$$

4.33.

a) Hình 4.21(a),(b) biểu diễn 2 dãy tuần hoàn $\tilde{x}_1[n]$ và $\tilde{x}_2[n]$ với chu kỳ N = 7. Tìm dãy $\tilde{y}_1[n]$ sao cho DFS của $\tilde{y}_1[n]$ bằng tích DFS của $\tilde{x}_1[n]$ và DFS của $\tilde{x}_2[n]$ hay $\tilde{Y}_1[k]=\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$





Hình 4.21(a), (b)

b) Hình 4.22 biểu diễn dãy tuần hoàn $\tilde{x}_3[n]$ với chu kỳ N = 7. Tìm dãy $\tilde{y}_2[n]$ sao cho DFS của $\tilde{y}_2[n]$ bằng tích DFS của $\tilde{x}_1[n]$ và DFS của $\tilde{x}_3[n]$ hay: $\tilde{Y}_2[k]=X_1[k]X_3[k]$

Hình 4.22

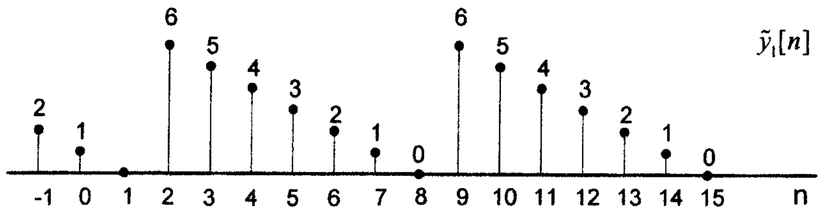
Lời giải:

a) Ta tìm dãy $\tilde{y}_1[n]$ sao cho: $\tilde{Y}_1[k]=\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$

Nhận xét: $\tilde{y}_1[n]$ là kết quả của tích chập tuần hòan giữa $\tilde{x}_1[n]$ và $\tilde{x}_2[n]$, nghĩa là:

$$\tilde{y}_1[n]=\sum_{m=0}^{N-1}\tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$$

Vì $\tilde{x}_2[n]$ là xung tuần hòan được dịch đi 2 mẫu, do đó dãy $\tilde{y}_1[n]$ chính là $\tilde{x}_1[n]$ dịch vòng đi 2 mẫu.



Hình 4.23

$$\tilde{X}_1[k] = \sum_{n=0}^{6} \tilde{x}_1[n] W_7^{kn} = 6 + 5W_7^{k} + 4W_7^{2k} + 3W_7^{3k} + 2W_7^{4k} + W_7^{5k}$$

$$\tilde{X}_2[k] = \sum_{n=0}^{6} \tilde{x}_2[n] W_7^{kn} = W_7^{2k}$$

$$\tilde{Y}_1[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k] = 6W_7^{2k} + 5W_7^{3k} + 4W_7^{4k} + 3W_7^{5k} + 2W_7^{6k} + W_7^{7k}$$

Chú ý rằng $W_7^{7k} = e^{j\frac{2\pi}{7}7k} = 1 = W_7^{0k}$. Sử dụng công thức tính IDFT ta suy ra dãy $\tilde{y}_1[n]$ như được mô tả ở hình 4.23.

b) DFS của dãy được mô tả trong hình 4.22 được tính như sau:

$$\tilde{X}_3[k] = \sum_{n=0}^{6} \tilde{x}_3[n] W_7^{kn} = 1 + W_7^{4k}$$

Do đó:

$$\tilde{Y}_2[k] = \tilde{X}_1[k]\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k] + W_7^{4k}\tilde{X}_1[k]$$

Vì DFS là tuyến tính nên DFS ngược của $\tilde{Y}_2[k]$ được tính như sau:

$$\tilde{y}_2[n] = \tilde{x}_1[n] + \tilde{x}_1[n-4]$$

4.34. Cho $x[n]$ là dãy có chiều dài hữu hạn N. Chứng minh rằng:

$$x\left[((-n))_N\right] = x\left[((N-n))_N\right]$$

Lời giải:

Đối với dãy $x[n]$ có chiều dài hữu hạn N, bản sao tuần hoàn của $x[-n]$ được biểu diễn như sau:

$$x\left[((-n))_N\right] = x\left[((-n+\ell N))_N\right]$$ với ℓ là số nguyên.

Đẳng thức này đúng với mọi ℓ, do đó với $\ell = 1$ ta có:

$$x\left[((-n))_N\right] = x\left[((-n+N))_N\right]$$

4.35. $x[n]$ là một dãy có khoảng thời gian hữu hạn chiều dài P nghĩa là $x[n] = 0$ với $n < 0$ và $n \geq P$. Ta cần tính các mẫu của biến đổi Fourier tại N tần số cách đều nhau:

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{N}, \ k = 0, 1, ..., N-1$$

Tìm và chứng minh thủ tục tính N mẫu của biến đổi Fourier chỉ sử dụng một DFT N điểm cho 2 trường hợp sau:

a) $N > P$

b) $N < P$.

Lời giải:

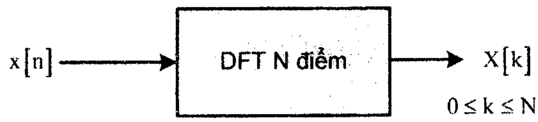
Ta có $x[n]$ khác không với $0 \le n \le P$

Ta cần tính $X(z)\big|_{z=e^{-j(2\pi k/N)}}$ sử dụng một DFT N điểm.

a) Với $N > P$ (kích thước DFT lớn hơn đoạn dữ liệu). Kỹ thuật được sử dụng trong trường hợp này thường là đệm không (zero-padding). Bằng cách thêm vào khối dữ liệu kích thước bé các giá trị 0, ta có thể có DFT có kích thước lớn hơn. Vì vậy, phổ tần số có thể được lấy mẫu tinh vi hơn. Có một quan niệm sai lầm rằng phương pháp đệm không làm tăng độ phân giải phổ. Việc cộng một khối dữ liệu lớn hơn với một DFT lớn hơn sẽ làm tăng chất lượng này.

Vì vậy, ta thêm $N_x = N - P$ số không vào cuối dãy như sau:

$$x'[n] = \begin{cases} x[n], & 0 \le n \le (P-1) \\ 0, & P \le n \le N \end{cases}$$



Hình 4.24

b) Với $N < P$, coi rằng ta lấy DFT có kích thước nhỏ hơn khối dữ liệu. Tất nhiên sẽ có chồng phổ. Ta sẽ sử dụng chồng phổ miền thời gian để bù lại các ảnh hưởng này.

Tìm DFT ngược N điểm của $X[k]$:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}, 0 \le n \le (N-1)$$

$X[k]$ được tính bằng tổng vô hạn các thành phần phức:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\sum_{m=0}^{\infty} x[m] e^{-j(2\pi k/N)m}\right) W_N^{-kn}$$

Sắp xếp lại ta có:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{-j(2\pi k/N)(m-n)k}\right)$$

Sử dụng quan hệ trực giao ta có:

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \sum_{r=-\infty}^{\infty} \delta[m-n+rN]$$

$$x[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n-rN]$$

Do đó, thực hiện chồng phổ x[n] như ở trên. Sau đó ta lấy DFT N điểm để có $X[k]$

4.36. $x[n]$ là dãy thực chiều dài hữu hạn có biến đổi Fourier $X(e^{j\omega})$ và DFT $X[k]$

Nếu $\text{Im}\{X[k]\}=0$, $k=0,1,...,N-1$, chúng ta có thể kết luận rằng $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}=0$, $-\pi\le\omega\le\pi$ được không?

Hãy đưa ra lập luận nếu câu trả lời là có. Ngược lại hãy đưa ra một ví dụ để chứng minh.

Lời giải:

Ta thấy rằng DFT thuần túy là lấy mẫu phổ tần số. Vì vậy điều kiện $\text{Im}\{X[k]\}=0$, $k=0, 1,..., N-1$ không đảm bảo rằng phần ảo của phổ tần số liên tục cũng bằng 0.

Ví dụ, xét một tín hiệu gồm một xung đơn vị có tâm tại n = 1 như sau:

$$x[n]=\delta[n-1], 0\le n\le 1$$

Biến đổi Fourier của $x[n]$ là:

$$X(e^{j\omega})=e^{-j\omega}$$

$$\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}=\cos\omega$$

$$\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}=-\sin\omega$$

Chú ý rằng cả 2 đại lượng này đều khác không với $0\le\omega\le 2$. Tiếp theo ta lấy DFT 2 điểm:

$$X[k]=W_2^k,\quad 0\le k\le 1$$

$$=\begin{cases}1, & k=0\\ -1, & k=1\end{cases}$$

Do đó $\text{Im}\{X[k]\}=0, \forall k$ nhưng $\text{Im}\{X(e^{j\omega})\}\ne 0$

Chú ý rằng kích thước của DFT đóng một vai trò quan trọng. Ví dụ, lấy DFT 3 điểm của $x[n]=\delta[n-1], 0\le n\le 2$ ta được:

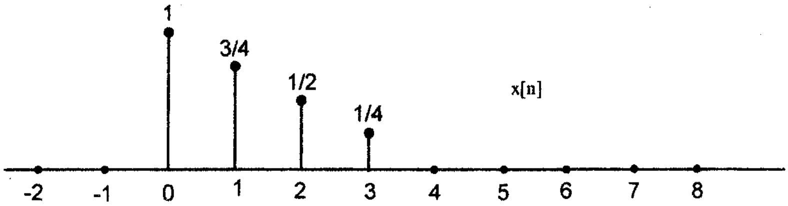
$$X[k]=W_3^k,\quad 0\le k\le 2$$

$$=\begin{cases}1, & k=0\\ e^{-j(2\pi/3)}, & k=1\\ e^{-j(4\pi/3)}, & k=2\end{cases}$$

Giờ đây $\text{Im}\{X[k]\}\ne 0, \forall k=1, k=2$

4.37. Hình 4.25 biểu diễn dãy có chiều dài hữu hạn $x[n]$. $X[k]$ là DFT tính trên 4 mẫu của $x[n]$.

Biểu diễn dãy $y[n]$ biết DFT của $y[n]$ thỏa mãn: $Y[k]=W_4^{3k}X[k]$



Hình 4.25

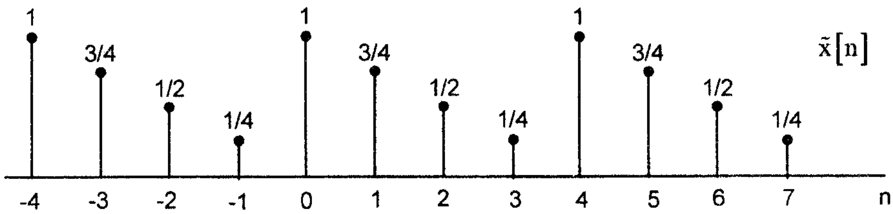
Lời giải:

Cả 2 dãy $x[n]$ và $y[n]$ đều có chiều dài hữu hạn N = 4.

Vì vậy không xảy ra hiện tượng chồng phổ. Ta biết rằng nhân DFT của một dãy với một hàm mũ phức tương ứng với phép dịch vòng dãy trong miền thời gian.

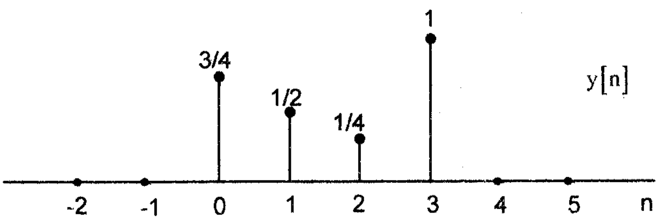
Với $Y[k]=W_4^{3k}X[k]$ cho trước ta có: $y[n]=x\left[\left((n-3)\right)_4\right]$

Ta sử dụng kỹ thuật tạm thời mở rộng dãy để có một dãy tuần hòan với chu kỳ là 4.



Hình 4.26

Sau đó, dịch vòng sang bên phải 3 điểm và cho tất cả các giá trị bên ngoài khoảng $[0,3]$ bằng không:



Hình 4.27

4.38. Dãy $x[n]$ thực có chiều dài hữu hạn được mô tả trong hình 4.28

a) Vẽ dãy có chiều dài hữu hạn $y[n]$ biết DFT 6 điểm của $y[n]$ bằng:

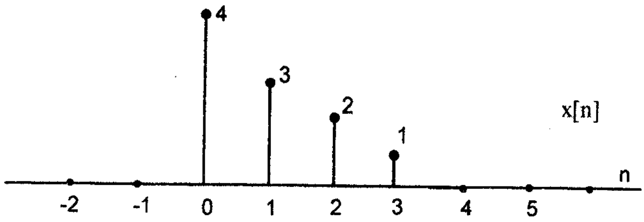
$$Y[k]=W_6^{4k}X[k] \text{ ở đó } X[k] \text{ là DFT 6 điểm của } x[n].$$

b) Vẽ dãy có chiều dài hữu hạn $w[n]$ biết DFT 6 điểm của $w[n]$ là:

$$W[k]=\mathrm{Re}\{X[k]\}$$

c) Vẽ dãy có chiều dài hữu hạn $q[n]$ biết DFT 3 điểm của $q[n]$ thỏa mãn điều kiện sau:

$$Q[k] = X[2k], \quad k = 0,1,2$$



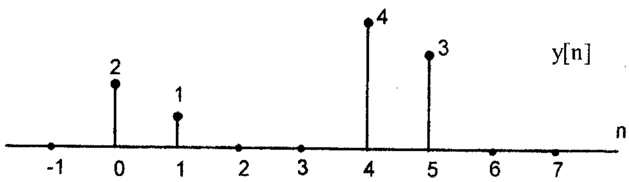
Hình 4.28

Lời giải:

a) Khi nhân DFT của một dãy với một hàm mũ phức, tín hiệu trong miền thời gian sẽ được dịch vòng.

Trong trường hợp này: $Y[k] = W_6^{4k}X[k], \quad 0 \le k \le 5$

Do đó: $y[n] = x\left[\left((n-4)\right)_6\right], \quad 0 \le n \le 5$



Hình 4.29

b) Có 2 phương pháp để giải quyết vấn đề này.

Cách 1: Sử dụng phương pháp tính toán đơn thuần:

$$X[k] = 4 + 3W_6^k + 2W_6^{2k} + W_6^{3k}, \quad W_6^k = e^{-j(2\pi k/6)}, 0 \le k \le 5$$

$$W[k] = \text{Re}\{X[k]\} = \frac{1}{2}\left(X[k] + X^*[k]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(4 + 3W_6^k + 2W_6^{2k} + W_6^{3k} + 4 + 3W_6^{-k} + 2W_6^{-2k} + W_6^{-3k}\right)$$

Chú ý rằng:

$$W_N^k = e^{-j(2\pi k/N)}$$

$$W_N^{-k} = e^{j(2\pi k/N)} = e^{-j(2\pi/N)(N-k)} = W_N^{N-k}$$

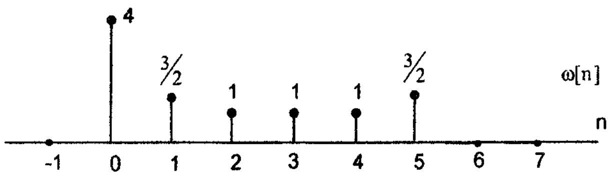
$$W[k] = 4 + \frac{3}{2}\left[W_6^k + W_6^{6-k}\right] + \left[W_6^{2k} + W_6^{6-2k}\right] + \frac{1}{2}\left[W_6^{3k} + W_6^{6-3k}\right], 0 \le k \le 5$$

Do đó:

$$w[n] = 4\delta[n] + \frac{3}{2}\left(\delta[n-1] + \delta[n-5]\right) + \delta[n-2] + \delta[n-4] + \frac{1}{2}\left(\delta[n-3] + \delta[n-3]\right)$$

$$w[n] = 4\delta[n] + \frac{3}{2}\delta[n-1] + \delta[n-2] + \delta[n-3] + \delta[n-4] + \frac{3}{2}\delta[n-5], \quad 0 \le n \le 5$$

Vẽ $w[n]$



Hình 4.30

Cách 2: Sử dụng tính chất của DFT được liệt kê trong bảng tóm tắt:

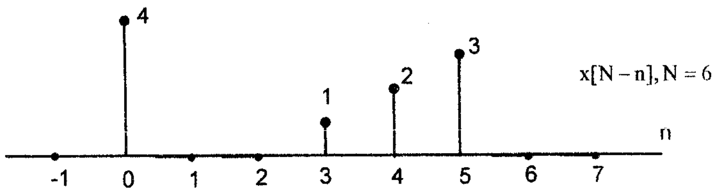
$$W[k] = \mathrm{Re}\{X[k]\} = \frac{X[k] + X^*[k]}{2}$$

$$w[n] = \frac{1}{2}\mathrm{IDFT}\{X[k]\} + \frac{1}{2}\mathrm{IDFT}\{X^*[k]\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x[n] + x^*\left[((-n))_N\right]\right)$$

Với $0 \le n \le N-1$ và $x[n]$ thực:

$$w[n] = \frac{1}{2}\left(x[n] + x[N-n]\right)$$



Hình 4.31

Quan sát ta thấy rằng $w[n]$ có kết quả giống như trên.

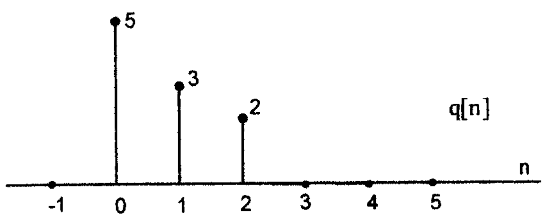
c) DFT được giảm đi 2 lần. Bằng cách lấy xen kẽ các điểm của đầu ra DFT, ta được một nửa số điểm ban đầu. Khi thực hiện thao tác này trong miền thời gian sẽ có chồng phổ. Trong trường hợp giảm đi 2 lần, ta thấy xuất hiện bản sao nữa của $x[n]$ vì bây giờ dãy tuần hòan với chu kỳ là 3.

Từ câu b): $X[k] = 4 + 3W_6^k + 2W_6^{2k} + W_6^{3k}, \quad 0 \le k \le 5$

Đặt $Q[k] = X[2k]$ ta có: $Q[k] = 4 + 3W_3^k + 2W_3^{2k} + W_3^{3k}, \quad 0 \le k \le 2$

Ta lại có: $W_3^{3k} = W_3^{0k}$ do đó:

$$q[n] = 5\delta[n] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2], \quad 0 \le n \le 2$$



Hình 4.32

4.39. Hình 4.33 biểu diễn 2 dãy:

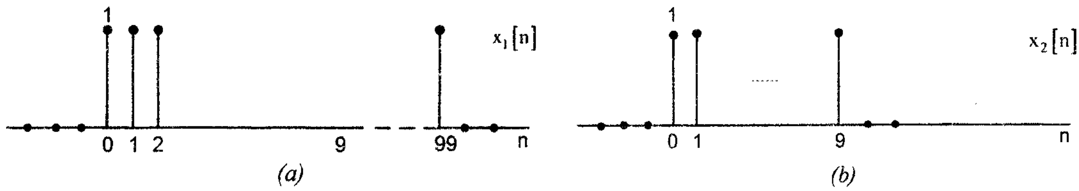
$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 99 \\ 0, & n \text{ khác} \end{cases}$$

Và $$x_2[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 9 \\ 0, & n \text{ khác} \end{cases}$$

a) Tính và vẽ tích chập tuyến tính $x_1[n] * x_2[n]$

b) Tính và vẽ tích chập vòng 100 điểm $x_1[n](*)_{100}\, x_2[n]$

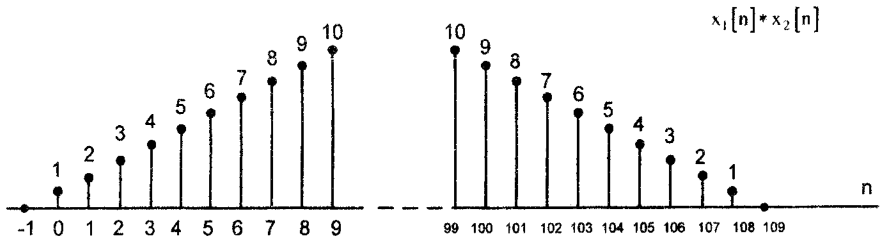
c) Tính và vẽ tích chập vòng 110 điểm $x_1[n](*)_{110}\, x_2[n]$



Hình 4.33

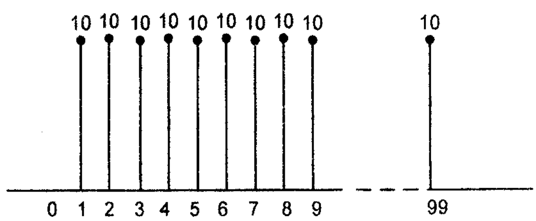
Lời giải:

a) Tích chập tuyến tính $x_1[n]*x_2[n]$ là một dãy có chiều dài 100 + 10 - 1 = 109



Hình 4.34

b) Tích chập vòng $x_1[n](*)_{100}\, x_2[n]$ có thể tính bằng cách chồng phổ 9 điểm đầu tiên của tích chập tuyến tính ở trên.



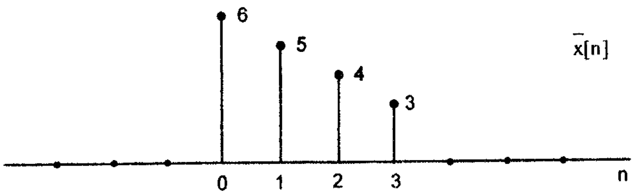
Hình 4.35

c) Do $N \ge 109$, tích chập vòng $x_1[n](*)_{110}\, x_2[n]$ sẽ bằng tích chập tuyến tính ở câu a).

4.40. Hình 4.36 mô tả dãy có chiều dài hữu hạn $x[n]$. Hãy vẽ các dãy sau:

$$x_1[n] = x\left[\left((n-2)\right)_4\right],\ 0 \le n \le 3$$

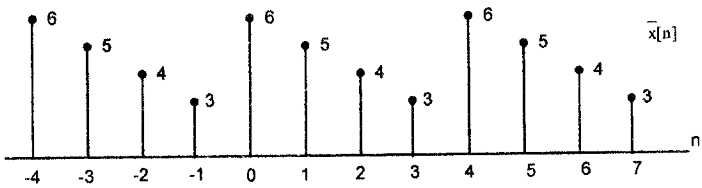
$x_2[n] = x\left[((-n))_4\right], \quad 0 \le n \le 3$



Hình 4.36

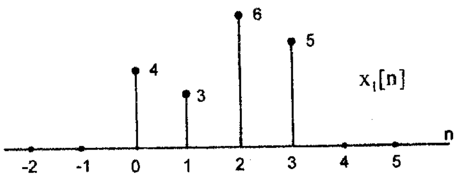
Lời giải:

Đơn giản hóa phép tính số học modulo bằng cách sử dụng phép mở rộng chu kỳ mặc định nghĩa là ta vẽ lại dãy ban đầu sao cho dãy tuần hoàn với chu kỳ N = 4. Ta chỉ cần vẽ một số chu kỳ là đủ.



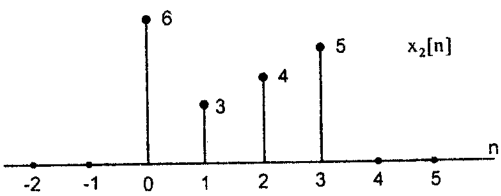
Hình 4.37

Để có $x_1[n] = x\left[((n-2))_4\right]$, $0 \le n \le 3$, ta chỉ cần dịch $x[n]$ sang bên phải 2 mẫu và giữ lại các điểm nằm trên miền thời gian của tín hiệu gốc (nghĩa là $0 \le n \le 3$).



Hình 4.38

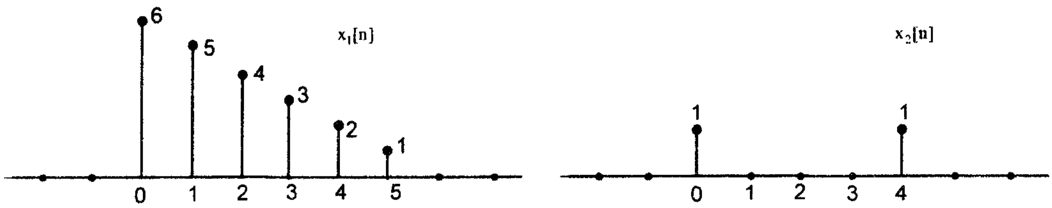
Để có $x_2[n] = x\left[((-n))_4\right]$, $0 \le n \le 3$, ta đảo ngược phiên bản giả tuần hoàn của $x[n]$ qua gốc tọa độ và cho tất cả các điểm nằm ngòai $0 \le n \le 3$ bằng không. Khi đó ta có:



Hình 4.39

Chú ý rằng $x[0] = x\left[((0))_4\right] \cdots$

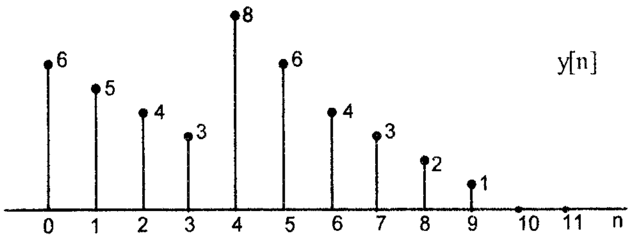
4.41. Hình 4.40 biểu diễn 2 dãy có chiều dài hữu hạn $x_1[n]$ và $x_2[n]$. Tính và vẽ tích chập vòng N điểm của chúng với $N = 6$ và $N = 10$.



Hình 4.40

Lời giải:

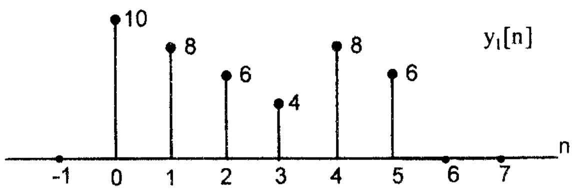
Tích chập vòng bằng tích chập tuyến tính cộng với chồng phổ. Trước hết ta tính $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$



Hình 4.41

Chú ý rằng $y[n]$ là dãy gồm 10 điểm (N = 6 + 5 - 1 = 10)

a) Với N = 6, 4 điểm khác 0 cuối cùng ($6 \le n \le 9$) sẽ chồng lên 4 điểm đầu tiên cho ta $y_1[n] = x_1[n](*)_6 x_2[n]$



Hình 4.42

b) Với N = 10, $N \ge 6 + 5 - 1$. Do đó không xảy ra chồng phổ. Lúc đó, tích chập vòng sẽ bằng tích chập tuyến tính.

C. BÀI TẬP NÂNG CAO

4.42. Cho $\tilde{x}[n]$ là chuỗi tuần hoàn với chu kỳ N ; nghĩa là $\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + lN]$, l là số nguyên. Chuỗi $\tilde{x}[n]$ có thể được biểu diễn bởi một dãy Fourier được cho bởi tổng có trọng số của các chuỗi hàm mũ phức có chu kỳ $\tilde{\Psi}_k(n) = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$. Chứng minh rằng không giống như biểu diễn dãy Fourier của một tín hiệu có chu kỳ liên tục theo thời gian, biểu diễn dãy Fourier của một tín hiệu có chu kỳ rời rạc theo thời gian chỉ cần N chuỗi hàm mũ phức tuần hoàn $\tilde{\Psi}_k(n)$, $k = 0, 1, ..., N - 1$ và có dạng:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Trong đó các hệ số Fourier $\tilde{X}(k)$ được cho bởi:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Chứng minh rằng $\tilde{X}(k)$ cũng là chuỗi tuần hoàn theo biến k với chu kỳ N.

4.43. Cho $\tilde{x}(n)$ và $\tilde{y}(n)$ là 2 chuỗi tuần hoàn với chu kỳ N. $\tilde{X}(k)$ và $\tilde{Y}(k)$ tương ứng là các DFT của 2 chuỗi đó.

a) Cho $\tilde{g}(n) = \tilde{x}(n)\tilde{y}(n)$ với $\tilde{G}(k)$ là DFT của $\tilde{g}(n)$. Chứng minh rằng:

$$\tilde{G}(k) = \sum_{l=0}^{N-1}\tilde{X}(l)\tilde{Y}(k-l)$$

b) Cho $\tilde{H}(k) = \tilde{X}(k)\tilde{Y}(k)$ là DFT của $\tilde{h}(n)$. CMR:

$$\tilde{h}(n) = \sum_{r=0}^{N-1}\tilde{x}(r)\tilde{y}(n-r)$$

4.44. $x[n]$ là dãy có chiều dài hữu hạn N nghĩa là $x[n] = 0$ bên ngoài đoạn $0 \le n \le N-1$. $X(e^{j\omega})$ là biến đổi Fourier của $x[n]$. $\tilde{X}[k]$ là dãy gồm 64 điểm cách đều nhau của $X(e^{j\omega})$ tức là $\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/64}$.

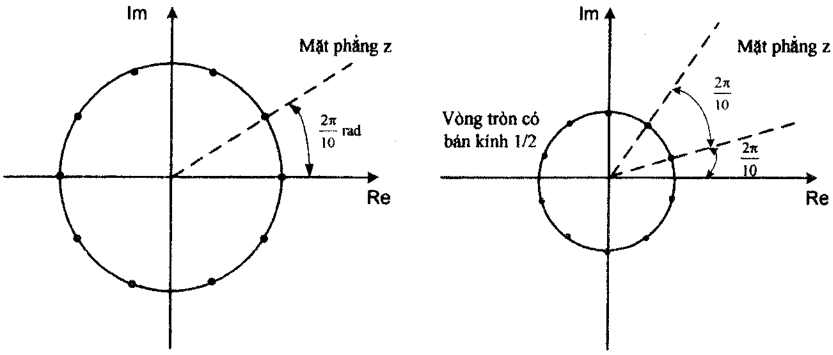
Biết rằng trong dải $0 \le k \le 63$, $\tilde{X}[32] = 1$ còn tất cả các giá trị khác của $\tilde{X}[k]$ bằng 0.

a) Nếu chiều dài của dãy N =64, hãy tìm một dãy $x[n]$ thỏa mãn các điều kiện đã cho. Kết quả này có duy nhất không? Nếu có thì giải thích tại sao. Ngược lại hãy đưa ra một kết quả khác.

b) Nếu chiều dài của dãy $N = 192 = 3\times 64$, hãy tìm một dãy $x[n]$ thỏa mãn các điều kiện đã cho. Kết quả này có duy nhất không? Nếu có thì giải thích tại sao. Ngược lại hãy đưa ra một kết quả khác.

4.45. DFT của một dãy có khoảng hữu hạn tương ứng với các mẫu của biến đổi z của nó trên vòng tròn đơn vị. Ví dụ, DFT của một dãy $x[n]$ 10 điểm tương ứng với các mẫu của $X(z)$ tại 10 điểm cách đều nhau như được vẽ trong hình 4.43(a). Giả sử ta muốn tìm các mẫu cách đều nhau của $X(z)$ trên đường cong như trong hình vẽ 4.43(b) hay nói cách khác ta muốn tính $X(z)\Big|_{z=0,5e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}}$.

Hãy cho biết phải thay đổi $x[n]$ như thế nào để có dãy $x_1[n]$ thỏa mãn điều kiện: DFT của $x_1[n]$ tương ứng với các mẫu cách đều nhau ở trên của $X(z)$.

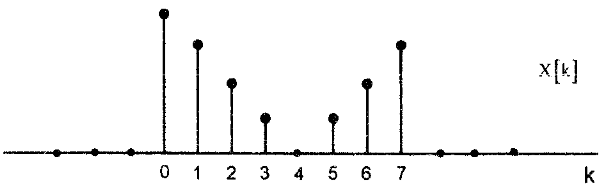


Hình 4.43(a), (b)

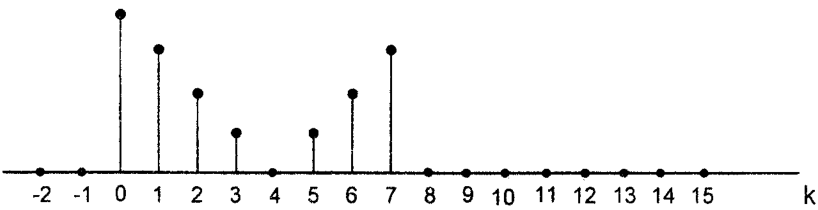
4.46. Dãy $x[n]$ có chiều dài hữu hạn N = 8 có DFT tính trên 8 mẫu $X[k]$ được vẽ trên hình 4.44. Dãy $y[n]$ có chiều dài 16 được định nghĩa như sau:

$$y[n]=\begin{cases} x[n/2], & n=2m \\ 0, & n=2m+1 \end{cases}$$

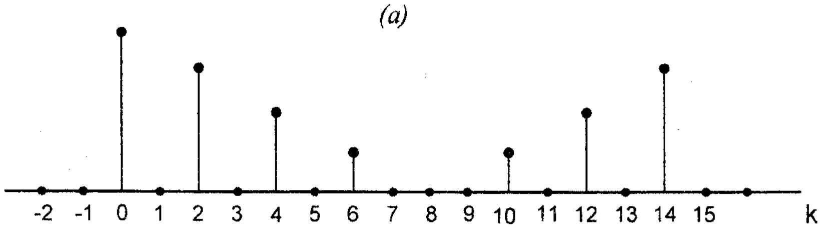
Từ tập các hình vẽ trong hình 4.45, hãy chọn ra hình tương ứng với $Y[k]$ là DFT tính trên 16 mẫu của $y[n]$.



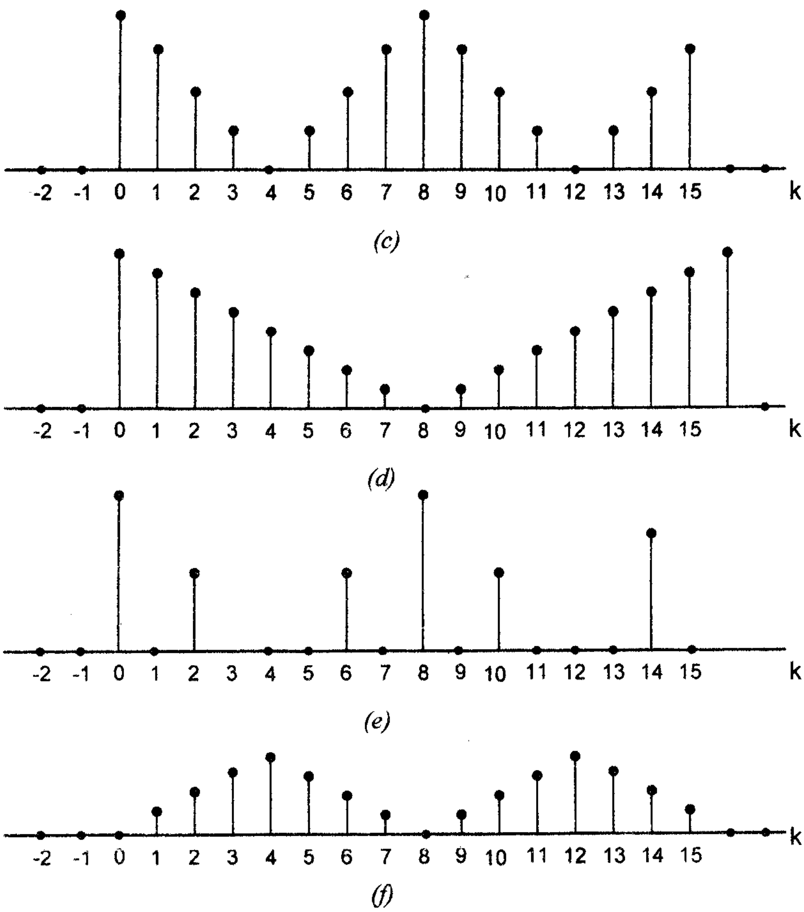
Hình 4.44



(a)



(b)



Hình 4.45

4.47. Cho các chuỗi có chiều dài bằng 8 được định nghĩa trong khoảng $0 \le n \le 7$ sau đây:

a) $x_1(n) = \{1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1\}$

b) $x_2(n) = \{1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1\}$

c) $x_3(n) = \{0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1\}$

d) $x_4(n) = \{0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1\}$

Các chuỗi nào có một DFT 8-điểm giá trị thực? Các chuỗi nào có một DFT 8-điểm giá trị ảo?

4.48. Cho $x(n), 0 \le n \le N-1$ là một chuỗi có chiều dài chẵn với DFT N điểm của nó là $X(k), 0 \le n \le N-1$. Nếu $X(2m) = 0$ đối với $0 \le m \le \frac{N}{2} - 1$.

Chứng minh rằng: $x(n) = -x\left(n + \frac{N}{2}\right)$

4.49. $x[n]$ là dãy có chiều dài hữu hạn N được cho trong hình 4.46(a) (Đường liền nét để chỉ đường bao các giá trị của dãy từ 0 đến N-1). Hai dãy $x_1[n]$ và $x_2[n]$ có chiều dài hữu hạn 2N được tạo thành từ dãy $x[n]$ được mô tả trong hình 4.46(b) và được định nghĩa như sau:

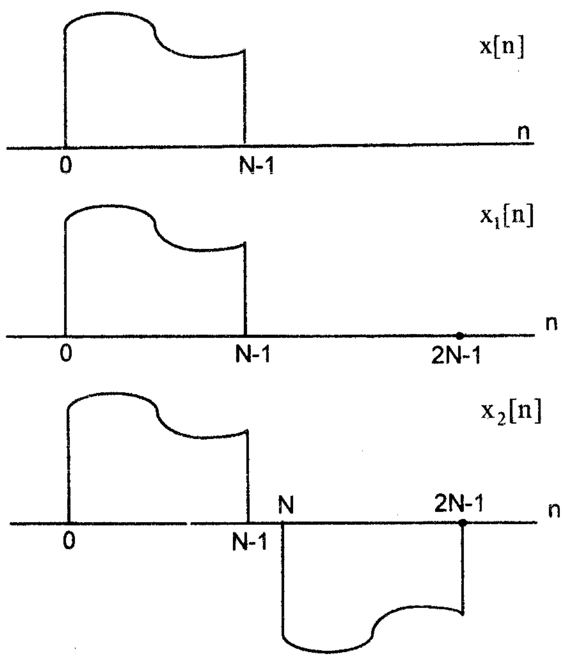
$$x_1[n]=\begin{cases} x[n], & 0\le n\le N-1 \\ 0, & n\notin[0,N-1] \end{cases}$$

$$x_2[n]=\begin{cases} x[n], & 0\le n\le N-1 \\ -x[n-N], & N\le n\le 2N-1 \\ 0, & n\notin[0,2N-1] \end{cases}$$

$X[k]$ là DFT của $x[n]$ tính trên N mẫu còn $X_1[k]$ và $X_2[k]$ là DFT tương ứng của $x_1[n]$ và $x_2[n]$ tính trên 2N mẫu.

a) Có thể tính được $X_2[k]$ nếu biết $X[k]$ không? Giải thích lý do.

b) Tìm mối quan hệ đơn giản nhất có thể có để từ đó tìm được $X[k]$ khi biết $X_1[k]$?



Hình 4.46(a),(b)

4.50. Phần chẵn của dãy thực $x[n]$ được định nghĩa như sau:

$$x_e[n]=\frac{x[n]+x[-n]}{2}$$

Ở đó $x[n]$ là dãy thực có chiều dài hữu hạn thỏa mãn: $x[n]=0$ với $n<0$ và $n\ge N$. $X[k]$ là DFT của $x[n]$ tính trên N mẫu:

a) $\mathrm{DFT}\{x_e[n]\} = \mathrm{Re}\{X[k]\}$?

b) Tìm DFT ngược của $\mathrm{Re}\{X[k]\}$ theo $x[n]$?

4.51. Tìm dãy $x[n]$ thỏa mãn 3 điều kiện sau:

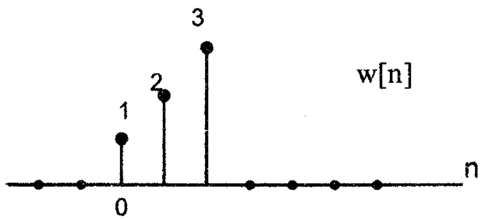
Điều kiện 1: Biến đổi Fourier của $x[n]$ có dạng:

$$X(e^{j\omega}) = 1 + A_1\cos\omega + A_2\cos 2\omega \text{ } (A_1, A_2 \text{ là các hằng số chưa biết})$$

Điều kiện 2: Dãy $x[n] * \delta[n-3]$ tại $n = 2$ bằng 5

Điều kiện 3: Với dãy $w[n]$ gồm 3 mẫu như được mô tả trong hình 4.47, kết quả của tích chập vòng trên 8 mẫu của $w[n]$ và $x[n-3]$ bằng 11 khi $n = 2$ nghĩa là:

$$\sum_{m=0}^{7} w[m]x\left[((n-3-m))_8\right]\Big|_{n=2} = 11$$



Hình 4.47

4.52. Một DFT 498 điểm $X(k)$ của một chuỗi tín hiệu thực $x(n)$ có các mẫu DFT:

$$X(0) = 2; X(11) = 7 + j3,1; X(k_1) = -2,2 - j1,5; X(112) = 3 - j0,7;$$
$$X(k_2) = -4,7 + j1,9; X(249) = 2,9; X(309) = -4,7 - j1,9;$$
$$X(k_3) = 3 + j0,7; X(412) = -2,2 + j1,5; X(k_4) = 7 - j3,1$$

Các mẫu DFT còn lại đều được giả thiết là bằng 0.

a) Hãy xác định các giá trị của các hệ số k_1, k_2, k_3 và k_4.

b) Giá trị dc của chuỗi $x(n)$

c) Hãy xác định biểu diễn của chuỗi $x(n)$ mà không cần tính IDFT

d) Năng lượng của chuỗi $x(n)$?

4.53. Xét dãy có chiều dài hữu hạn sau:

$$x[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + \delta[n-3]$$

Thực hiện các phép toán sau trên dãy:

(i) Tính DFT trên 5 mẫu $X[k]$

(ii) Tính DFT ngược trên 5 mẫu của $Y[k] = X[k]^2$ để tìm $y[n]$

a) Tìm dãy $y[n]$ với $n = 0,1,2,3,4$

b) Nếu thực hiện 2 phép toán trên với DFT trên N mẫu thì ta phải chọn N bằng bao nhiêu để $y[n] = x[n] * x[n]$ với $0 \le n \le N-1$?

4.54. Đọc kỹ mỗi phần của bài dưới đây để tìm sự khác nhau giữa các phần:

a) Cho tín hiệu

$$x[n] = \begin{cases} 1 + \cos(\pi n/4) - 0{,}5\cos(3\pi n/4), & 0 \le n \le 7 \\ 0, & n \notin [0,7] \end{cases}$$

Tín hiệu này cũng có thể biểu diễn qua công thức IDFT như sau:

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X_8[k] e^{j(2\pi k/8)n}, & 0 \le n \le 7 \\ 0, & n \notin [0,7] \end{cases}$$

Ở đó $X_8[k]$ là DFT tính trên 8 mẫu của $x[n]$. Vẽ $X_8[k], 0 \le k \le 7$

b) Tìm $V_{16}[k]$ là DFT tính trên 16 mẫu của dãy 16 mẫu sau:

$$v[n] = \begin{cases} 1 + \cos(\pi n/4) - 0{,}5\cos(3\pi n/4), & 0 \le n \le 15 \\ 0, & n \notin [0,15] \end{cases}$$

Vẽ $V_{16}[k], \quad 0 \le k \le 15$

c) Cho $|X_{16}[k]|$ là độ lớn của DFT tính trên 16 mẫu của một dãy 8 mẫu:

$$x[n] = \begin{cases} 1 + \cos(\pi n/4) - 0{,}5\cos(3\pi n/4), & 0 \le n \le 7 \\ 0, & n \notin [0,7] \end{cases}$$

Vẽ $|X_{16}[k]|, 0 \le k \le 15$ mà không cần tính tường minh DFT. Có thể không phải tìm tất cả các giá trị của $|X_{16}[k]|$ bằng cách tính lần lượt như trong phần a) và b) nhưng nên tìm một số giá trị chính xác của $|X_{16}[k]|$. Vẽ tất cả các giá trị biết chính xác với một vòng tròn đặc và vẽ gần đúng các giá trị khác với một vòng tròn rỗng.

4.55. a) Cho $x[n] = 0, n < 0, n > N-1$ là dãy N mẫu với ít nhất một mẫu khác không. Hỏi có tồn tại một dãy có DTFT thỏa mãn điều kiện $X\left(e^{j2\pi k/M}\right) = 0, \quad k = 0,1,\ldots,M-1$ với M nguyên, $M \ge N$ hay không? Nếu có, hãy cho ví dụ. Ngược lại hãy giải thích lý do.

b) Gỉa sử $M < N$, làm lại câu a)

4.56. Cho $x[n] = 0, \quad n < 0, n > 7$ là một dãy thực 8 mẫu và $X[k]$ là DFT của $x[n]$ tính trên 8 mẫu.

a) Đánh giá $\left.\left(\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X[k] e^{j(2\pi/8)kn}\right)\right|_{n=9}$ theo $x[n]$?

b) Cho $v[n]=0, \quad n<0, n>7$ là một dãy 8 mẫu và $V[k]$ là DFT tính trên 8 mẫu của $v[n]$. Nếu $V[k]=X(z)$ tại $z=2\exp(j(2\pi k+\pi)/8), k=0,...,7$ ở đó $X(z)$ là biến đổi z của $x[n]$. Biểu diễn $v[n]$ theo $x[n]$.

c) Cho $w[n]=0, \quad n<0, n>3$ là một dãy 4 mẫu và $W[k]$ là DFT của $w[n]$ tính trên 4 mẫu. Nếu $W[k]=X[k]+X[k+4]$, hãy biểu diễn $w[n]$ theo $x[n]$.

d) Cho $y[n]=0, \quad n<0, n>7$ là một dãy 8 mẫu và $Y[k]$ là DFT của $y[n]$ tính trên 8 mẫu. Nếu $Y[k]=\begin{cases}2X[k], k=0, 2, 4, 6\\ 0, \qquad k=1, 3, 5, 7\end{cases}$, hãy biểu diễn $y[n]$ theo $x[n]$

4.57. Cho một chuỗi có chiều dài bằng 8 như sau $x(n)=\{-4 \quad 5 \quad 2 \quad -3 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \quad 4\}$, $0 \le N \le 7$ với DFT 8 điểm là $X(k)$. Không cần tính IDFT, hãy xác định chuỗi $y(n)$ có DFT 8 điểm là $Y(k)=W_4^{3k}X(k)$

4.58. Cho $x_2[n]$ là một dãy thực 5 điểm và $X_2[k]$ là DFT 7 điểm của $x_2[n]$. Nếu $\mathrm{Re}\{X_2[k]\}$ là DFT 7 điểm của $g[n]$, chứng minh rằng $g[0]=x_2[0]$ và tìm mối quan hệ giữa $g[n]$ và $x_2[n]$.

4.59. Cho $x[n]=(1/4)^n u[n]$ và $x_1[n]$ là một dãy mở rộng từ $x[n]$ với hệ số 4 nghĩa là:

$$x_1[n]=\begin{cases}x[n/4], & n=0, \pm 4, \pm 8...\\ 0, & n \ne 4k\end{cases}$$

Tìm và vẽ dãy $q[n]$ có chiều dài 6 trong đó DFT $Q[k]$ tính trên 6 mẫu thỏa mãn hai điều kiện sau:

$$Q[0]=X_1(1)$$
$$Q[3]=X_1(-1)$$

$X_1(z)$ là biến đổi z của $x_1[n]$.

4.60. Giả sử muốn thực hiện một tích chập tuyến tính của một dãy 10000 mẫu với một đáp ứng xung có chiều dài 100 mẫu. Để tính tích chập này, ta sử dụng các DFT và IDFT có chiều dài 256.

a) Nếu sử dụng phương pháp cộng xếp chồng, cần tối thiểu bao nhiêu các phép biến đổi DFT và IDFT 256 mẫu để thực hiện tính tích chập cho toàn bộ dãy chiều dài 10000 mẫu? Chứng minh kết quả đó.

b) Nếu sử dụng phương pháp đặt kề nhau (overlap-save), cần tối thiểu bao nhiêu các phép biến đổi DFT và IDFT ngược 256 mẫu để thực hiện tính tích chập cho toàn bộ dãy chiều dài 10000 mẫu? Chứng minh kết quả đó.

c) Như chúng ta đã biết ở chương 4, khi N là lũy thừa của 2, một DFT hoặc IDFT trên N mẫu yêu cầu $(N/2)\log_2 N$ phép nhân phức và $N\log_2 N$ phép cộng phức. Với cùng một bộ lọc và chiều dài đáp ứng xung như ở phần a) và b), hãy so sánh số các phép toán số học (phép cộng và phép nhân) dùng trong các phương pháp cộng xếp chồng, đặt kề nhau và phương pháp tính tích chập trực tiếp.

4.61. Cho $x(n)$ là một chuỗi có chiều dài N với $X(k)$ là DFT N điểm của nó $X(k)=F\{x(n)\}$.

Hãy xác định chuỗi $y(n)$ là kết quả của việc áp dụng 6 lần DFT cho chuỗi $x(n)$, nghĩa là:

$$y(n)=F\left\{F\left\{F\left\{F\left\{F\left\{F\{x(n)\}\right\}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

4.62. $x_1[n]$ và $x_2[n]$ là hai dãy có chiều dài hữu hạn, có giá trị bằng 0 bên ngoài đoạn $0\le n\le 99$.

$y[n]$ là tích chập vòng của 2 dãy $x_1[n]$ và $x_2[n]$ nghĩa là:

$$y[n]=x_1[n](*)_{100}x_2[n]=\sum_{n=0}^{99}x_1[k]x_2\left[((n-k))_{100}\right],\quad 0\le n\le 99$$

Nếu thực tế $x_1[n]$ chỉ khác 0 với $10\le n\le 39$, tìm tập các giá trị n sao cho $y[n]$ bằng tích chập tuyến tính của $x_1[n]$ và $x_2[n]$.

4.63. Cho 2 dãy có chiều dài hữu hạn $x[n]$ và $h[n]$ thỏa mãn: $x[n]=0$ bên ngoài đoạn $0\le n\le 49$ và $h[n]=0$ bên ngoài đoạn $0\le n\le 9$.

a) Số các giá trị khác không tối đa trong tích chập tuyến tính giữa $x[n]$ và $h[n]$ là bao nhiêu?

b) Tích chập vòng của $x[n]$ và $h[n]$ tính trên 50 mẫu là:

$$x[n](*)_{50}h[n]=10,\quad 0\le n\le 49$$

Tích chập tuyến tính của $x[n]$ và $h[n]$ trên 5 mẫu đầu tiên là:

$$x[n]*h[n]=5,\quad 0\le n\le 4$$

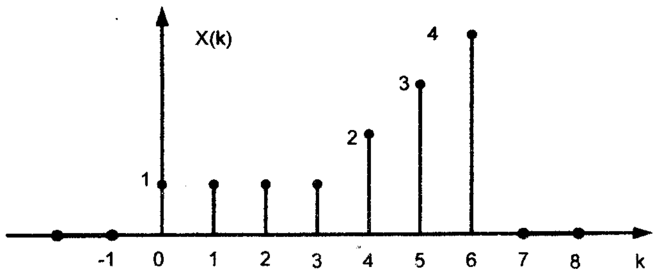
Xác định số các mẫu có thể có của tích chập tuyến tính giữa $x[n]$ và $h[n]$?

4.64. a) Xét chuỗi $x(n)$ có chiều dài N, $0\le n\le N-1$, với DFT N điểm của nó là $X(k), 0\le k\le N-1$. Ta định nghĩa chuỗi $y(n)$ có chiều dài LN, $0\le n\le LN-1$ như sau:

$$y(n)=\begin{cases}x(n/L), & n=0,\ L,\ 2L,\dots,(N-1)L\\ 0, & n \text{ khác}\end{cases}\qquad (*)$$

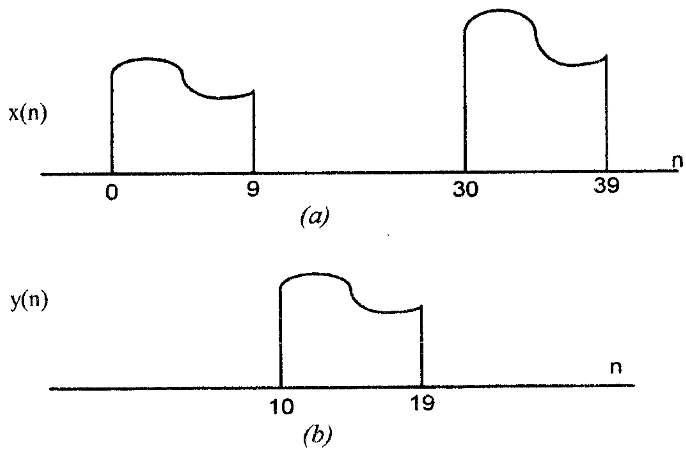
Trong đó L là một số nguyên dương. Hãy biểu diễn $Y(k)$ là DFT LN -điểm của $y(n)$ theo hàm của $X(k)$.

b) $X(k)$ là DFT 7-điểm của một chuỗi x(n) có chiều dài bằng 7 như trên hình vẽ. Hãy vẽ $Y(k)$ là DFT 21 điểm của một chuỗi $y(n)$ có chiều dài bằng 21 được tạo ra bởi công thức (*).



Hình 4.48

4.65. Xét 2 dãy có khoảng hữu hạn $x[n]$ và $y[n]$ thỏa mãn $x[n]=0$ với $n<0, n\geq 40$ và $9<n<30$. $y[n]=0$ với $n<10, n>19$ như được mô tả trong hình 4.49(a), (b).



Hình 4.49(a), (b)

Gọi $w[n]$ là tích chập tuyến tính của $x[n]$ và $y[n]$. $g[n]$ là tích chập vòng của $x[n]$ và $y[n]$ được tính trên 40 mẫu:

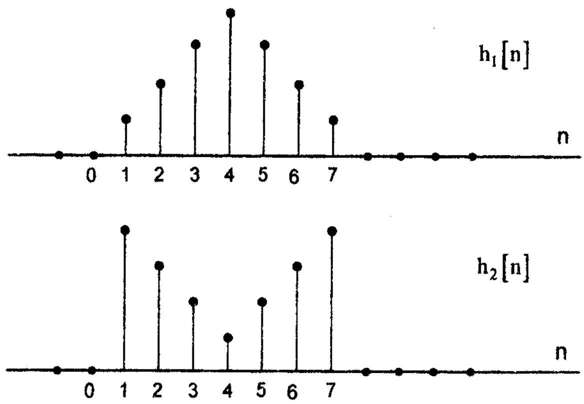
$$w[n]=x[n]*y[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$$

$$g[n]=x[n](*)_{40}\,y[n]=\sum_{k=0}^{39} x[k]y\left[((n-k))_{40}\right]$$

a) Tìm các giá trị của n để $w[n]$ khác không

b) Tìm các giá trị của n để có thể xác định $w[n]$ từ $g[n]$.

4.66. Hình 4.50 biểu diễn 2 dãy có khoảng hữu hạn $h_1[n]$ và $h_2[n]$ có chiều dài N =8. Hai dãy này có mối quan hệ dịch vòng với nhau nghĩa là $h_1[n]=h_2\left[((n-m))_8\right]$



Hình 4.50

a) Hãy cho biết độ lớn của các DFT 8 điểm có bằng nhau không?

b) Giả sử ta muốn thực hiện một bộ lọc FIR thông thấp và phải sử dụng $h_1[n]$ hoặc $h_2[n]$ để làm đáp ứng xung. Điều khẳng định nào dưới đây là đúng:

(i) Sử dụng $h_1[n]$ làm bộ lọc thông thấp tốt hơn $h_2[n]$

(ii) Sử dụng $h_2[n]$ làm bộ lọc thông thấp tốt hơn $h_1[n]$

(iii) Để làm bộ lọc thông thấp, 2 dãy này có hiệu quả như nhau.

4.67. Biến đổi Fourier rời rạc tổng quát (Generalized DFT) N điểm $X_{GDFT}(k,a,b)$ của chuỗi $x(n)$ - chiều dài N là sự tổng quát hoá của DFT thông thường. $X_{GDFT}(k,a,b)$ được biểu diễn dưới dạng:

$$X_{GDFT}(k,a,b) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi(n+a)(k+b)}{N}}$$

Chứng minh rằng: GDFT ngược có dạng:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{GDFT}(k,a,b) e^{j\frac{2\pi(n+a)(k+b)}{N}}$$

LỜI GIẢI BÀI TẬP NÂNG CAO

4.42. Vì $\tilde{\Psi}_k(n) = \tilde{\Psi}_k(n + rN)$, suy ra tất cả các hệ số không nằm trong phạm vi 0,1,..., N-1 có thể được tích luỹ trong $\tilde{\Psi}_k(n)$, trong đó $0 \le k \le N-1$. Suy ra trong trường hợp này việc biểu diễn chuỗi Fourier chỉ liên quan đến N chuỗi hàm mũ phức. Đặt $\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ thì:

$$\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)\sum_{n=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

Mà $$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \begin{cases} N, & k = r \\ 0, & k \neq r \end{cases}$$

Do đó: $$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}rn} = \tilde{X}(r)$$

$$\tilde{X}(k+lN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+lN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}e^{-j2\pi ln} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \tilde{X}(k)$$

4.43. a) $\tilde{G}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{g}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)\tilde{y}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.

Mà $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{X}(r)e^{j\frac{2\pi}{N}rn}$. Do đó:

$$\tilde{G}(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{X}(r)\tilde{y}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-r)n} = \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{X}(r)\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{X}(r)\tilde{Y}(k-r)$$

b) $$\tilde{h}(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)\tilde{Y}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}(r)\tilde{Y}(k)e^{j\frac{2\pi k}{N}(n-r)}$$
$$= \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}(r)\left(\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{Y}(k)e^{j\frac{2\pi k}{N}(n-r)}\right) = \sum_{r=0}^{N-1} \tilde{x}(r)\tilde{y}(n-r)$$

4.44. Dãy của ta là dãy có chiều dài hữu hạn với DFT 64 điểm chỉ có 1 điểm khác không (với k = 32).

a) Sử dụng công thức tính IDFT ta có:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]W_N^{-kn} \qquad 0 \le n \le (N-1)$$

Thay vào ta có:

$$x[n] = \frac{1}{64}X[32]W_{64}^{-32n} = \frac{1}{64}e^{j\frac{2\pi}{64}(32)n} = \frac{1}{64}e^{j\pi n} = \frac{1}{64}(-1)^n \qquad 0 \le n \le (N-1)$$

Câu trả lời là duy nhất vì chúng ta lấy DFT 64 điểm của dãy 64 điểm.

b) Khi chiều dài của dãy là N = 192.

$$x[n] = \frac{1}{192}\sum_{k=0}^{101} X[k]W_{192}^{-kn} \qquad 0 \le n \le 191$$

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{64}(-1)^n & 0 \le n \le 63 \\ 0 & 64 \le n \le 191 \end{cases}$$

Kết quả này không phải là duy nhất. Do chỉ lấy 64 mẫu phổ, x[n] sẽ bị chồng phổ trong miền thời gian. Ta có thể lấy một dãy thay thế như sau:

$$x'[n]=\frac{1}{64}\left(\frac{1}{3}\right)(-1)^n \qquad 0\le n\le 191$$

4.45. Ta có dãy $x[n]$ 10 điểm. Ta muốn có một dãy $x_1[n]$ gồm 10 điểm được suy ra từ $x[n]$ với DFT của $x_1[n]$:

$$X_1[k]=X(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}}$$

Nhớ lại định nghĩa biến đổi Z của x[n]:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]z^{-n}$$

Vì $x[n]$ là hữu hạn (N = 10), giả thiết rằng:

$$x(n)=\begin{cases}\neq 0 & 0\le n\le 9\\ 0 & \text{n khác}\end{cases}$$

Vì vậy:

$$X(z)=\sum_{n=0}^{9}x[n]z^{-n}$$

Thay $z=\frac{1}{2}e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}$ ta có:

$$X(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}}=\sum_{n=0}^{9}x[n]\left(\frac{1}{2}e^{j[(2\pi k/10)+(\pi/10)]}\right)^{-n}$$

Ta sẽ tìm dãy $x_1[n]$ 10 điểm sao cho DFT của $x_1[n]$ tương đương với biểu thức trên. Nhớ lại công thức DFT ta có:

$$X_1[k]=\sum_{n=0}^{9}x_1[n]W_{10}^{kn} \qquad 0\le k\le 9$$

Vì $W_{10}^{kn}=e^{-j(2\pi/10)kn}$, bằng phép so sánh ta có:

$$x_1[n]=x[n]\left(\frac{1}{2}e^{i(\pi/10)}\right)^{-n}$$

4.46. Ta có dãy $x[n]$ có độ dài hữu hạn N = 8. Giả thiết thực hiện nội suy với hệ số 2 nghĩa là tăng gấp đôi chiều dài của $x[n]$ bằng cách chèn các giá trị 0 vào các giá trị n lẻ trong khoảng $0\le n\le 15$:

$$y[n]=\begin{cases}x[n/2] & n=2m,\quad 0\le n\le 15\\ 0 & n=2m+1\end{cases}$$

DFT 16 điểm của y[n]:

$$Y[k] = \sum_{0}^{15} y[n] W_{16}^{kn} \qquad 0 \le n \le 15$$

$$= \sum_{n=0}^{7} x[n] W_{16}^{2kn}$$

Chú ý rằng $W_{16}^{2kn} = e^{-j(2\pi/16)(2k)n} = e^{-j(2\pi/8)kn} = W_8^{kn}$

$$Y[k] = \sum_{n=0}^{7} x[n] W_8^{kn} \qquad 0 \le k \le 15$$

Do đó DFT 16 điểm của tín hiệu nội suy gồm hai phiên bản của DFT 8 điểm của x[n]. Điều này là chính xác vì Y[k] tuần hoàn với chu kỳ 8 (xem bài tập 4.1). Do đó, lựa chọn đúng là C.

Ta có thể kiểm tra nhanh Y[0] = X[0]

4.47. a) $x_1(-n)_8 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1] = x_1(n)$. Do đó $x_1(n)$ là một chuỗi thực tuần hoàn, và suy ra nó có một DFT 8-điểm giá trị thực.

b) $x_2(-n)_8 = [1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]$. Do đó $x_2(n)$ không là chuỗi chuỗi chẵn tuần hoàn, cũng không là một chuỗi lẻ tuần hoàn. Suy ra, DFT của nó là một chuỗi phức.

c) $x_3(-n)_8 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 1] = -x_3(n)$. Do đó $x_3(n)$ là một chuỗi lẻ tuần hoàn, và suy ra rằng nó có một DFT 8 điểm mang giá trị ảo.

4.48. $$X(2m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{2mn} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{2mn} + \sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} x(n) W_N^{2mn}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{2mn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n + \frac{N}{2}\right) W_N^{2m\left(n+\frac{N}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x(n) W_N^{2mn} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} x\left(n+\frac{N}{2}\right) W_N^{2mn} W_N^{mN}$$

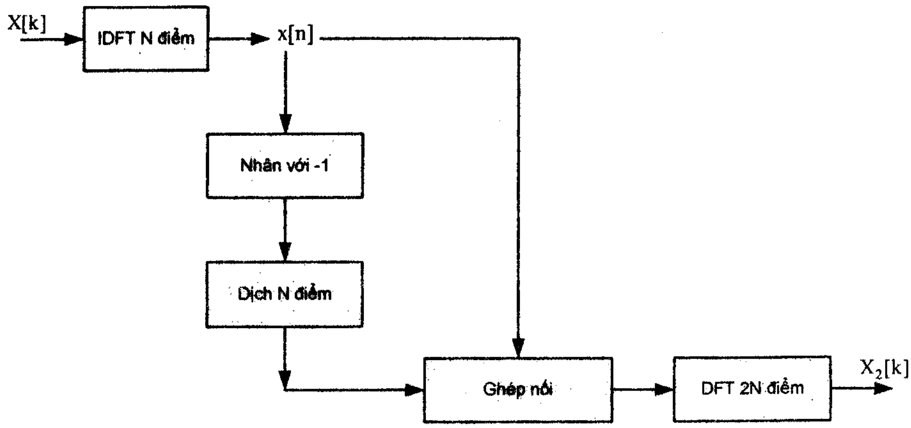
$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \left[x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right)\right] W_N^{2mn} = 0, \quad 0 \le m \le \frac{N}{2} - 1$$

Điều này ngụ ý là $x(n) + x\left(n + \frac{N}{2}\right) = 0$

4.49. a) Ta có:

$$x_2[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \le n \le N-1 \\ -x[n-N] & N \le n \le 2N-1 \\ 0 & n \text{ khác} \end{cases}$$

Do đó nếu biết được $X[k]$, $x_2[n]$ có thể tìm được bằng cách sau:



b) Để thu được $X[k]$ từ $X_1[k]$, ta có thể lấy IDFT của $X_1[k]$ tại 2N điểm sau đó lấy DFT của $x_1[n]$ tại N điểm để thu được $X[k]$.

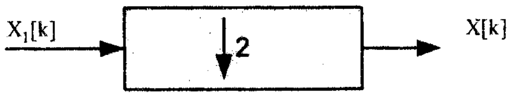
Tuy nhiên cách này không đạt hiệu quả cao. Một cách khác hiệu quả hơn là khai thác công thức khai triển DFT có liên quan. Trước hết ta có:

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{2N-1} x_1[n]W_{2N}^{kn} \qquad 0 \le k \le (2N-1)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_{2N}^{kn}$$

$$X_1[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{(k/2)n} \qquad 0 \le k \le (N-1)$$

Do đó cách dễ dàng hơn để thu được $X[k]$ từ $X_1[k]$ là giảm $X_1[k]$ đi 2.



4.50. a) DFT của phần chẵn của dãy số thực:

Nếu $x[n]$ có độ dài N thì $x_e[n]$ có độ dài 2N - 1:

$$x_e[n] = \begin{cases} \dfrac{x[n]+x[-n]}{2} & (-N+1) \le n \le (N-1) \\ 0 & n \ \text{khác} \end{cases}$$

$$X_e[k] = \sum_{n=-N+1}^{N-1} \left(\frac{x[n]+x[-n]}{2} \right) W_{2N-1}^{kn} \qquad (-N+1) \le k \le (N-1)$$

$$= \sum_{n=-N+1}^{0} \frac{x[-n]}{2} W_{2N-1}^{kn} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x[n]}{2} W_{2N-1}^{kn}$$

Đặt m = -n

$$X_e[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x[n]}{2} W_{2N-1}^{-kn} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{x[n]}{2} W_{2N-1}^{kn}$$

$$X_e[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{2N-1}\right)$$

Nhớ lại rằng:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} \qquad 0 \le k \le (N-1)$$

Và $$\mathrm{Re}\{X[k]\} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)$$

Do đó $\mathrm{DFT}\{x_e[n]\} \neq \mathrm{Re}\{X[k]\}$

b)

$$\mathrm{Re}\{X[k]\} = \frac{X[k] + X^*[k]}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{kn} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{-kn}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1} \left(x[n] + x[N\text{-}n]\right)W_N^{kn}$$

Do đó: $\mathrm{Re}\{X[k]\} = \mathrm{DFT}\left\{\frac{1}{2}\left(x[n] + x[N-n]\right)\right\}$

4.51. Từ điều kiện 1, chúng ta có thể khẳng định dãy có độ dài hữu hạn (N = 5). Ta có:

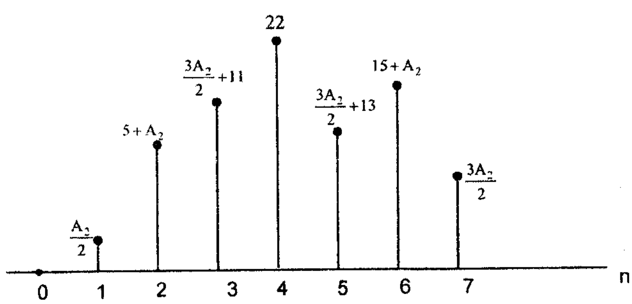
$$X(e^{j\omega}) = 1 + A_1\cos\omega + A_2\cos 2\omega = 1 + \frac{A_1}{2}(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \frac{A_2}{2}(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega})$$

Từ công thức khai triển Fourier, ta có:

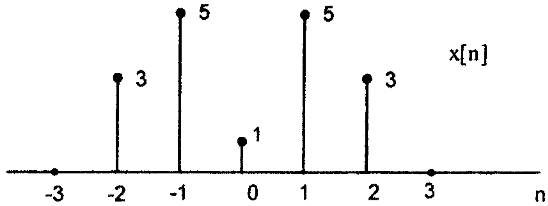
$$x[n] = \delta[n] + \frac{A_1}{2}(\delta[n-1] + \delta[n+1]) + \frac{A_2}{2}(\delta[n-2] + \delta[n+2])$$

Từ điều kiện 2 ta có thể suy ra một trong các giá trị hằng số của điều kiện 1. Vì $x[n] * \delta[n-3] = x[n-3] = 5$ với n=2 nên ta có x[-1] = 5 và x[1]=x[-1]=5. Từ hai giá trị này suy ra $A_1 = 10$

Với điều kiện 3, thực hiện tích chập vòng giữa $x[((n-3))_8]$ và dãy $\omega[n]$ 3 điểm. Trong trường hợp này, tích chập tuyến tính bằng tích chập vòng vì $N = 8 \ge 6 + 3 - 1$. Từ $x[((n-3))_8] = x[n-3]$ và tích chập của nó với $\omega[n]$ như mô tả ở hình 4.47 ta được:



Với n = 2, $w[n]*x[n-3]=11$ suy ra $A_2=6$. Do đó $x[2]=x[-2]=3$. Từ đó ta có mô tả đầy đủ về $x[n]$:



4.52. Khi $x(n)$ là một chuỗi giá trị thực có chiều dài 498 thì DFT 498 điểm $X(k)$ của nó thoả mãn $X(k)=X^*\left[(-k)_{498}\right]=X^*(498-k)$.

a) Từ các mẫu DFT đã cho, ta quan sát thấy rằng $X(k_1)=X^*(412)$, ẩn ý rằng $k_1=498-412=86$, $X(k_2)=X^*(309)$, ẩn ý rằng $k_2=498-309=189$, $X(k_3)=X^*(112)$, ẩn ý rằng $k_3=498-112=386$, $X(k_4)=X^*(11)$, ẩn ý rằng $k_4=498-11=487$.

b) Giá trị một chiều (dc) của chuỗi $x(n)$ bằng $X(0)=2$

c)

$$x(n)=\frac{1}{489}\sum_{k=0}^{497}X(k)W_{498}^{-kn}=\frac{1}{489}[X(0)+2\mathrm{Re}\left\{X(11)W_{498}^{-11n}\right\}+2\mathrm{Re}\left\{X(86)W_{498}^{-86n}\right\}+$$

$$+2\mathrm{Re}\left\{X(112)W_{498}^{-112n}\right\}+2\mathrm{Re}\left\{X(189)W_{498}^{-189n}\right\}+X(249)W_{498}^{-249n}]$$

$$=\frac{1}{249}\left\{-0,45+7\cos\left(\frac{11\pi n}{249}\right)-3,1\sin\left(\frac{11\pi n}{249}\right)-2,2\cos\left(\frac{86\pi n}{249}\right)+1,5\sin\left(\frac{86\pi n}{249}\right)+\right.$$

$$\left.+3\cos\left(\frac{112\pi n}{249}\right)+0,7\sin\left(\frac{112\pi n}{249}\right)-4,7\cos\left(\frac{189\pi n}{249}\right)-1,9\sin\left(\frac{189\pi n}{249}\right)\right\}$$

d) $\sum_{n=0}^{497}|x(n)|^2=\frac{1}{498}\sum_{n=0}^{497}|X(k)|^2=0,2275$

4.53. Ta có dãy có chiều dài hữu hạn:

$$x[n]=2\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-3]$$

(i) Thực hiện DFT trên 5 mẫu:

$$X[k]=2+W_5^k+W_5^{3k} \qquad 0\le k\le 5$$

Trong đó $W_5^k=e^{-j(\frac{2\pi}{5})k}$

(ii) Bình phương DFT của x[n]:

$$Y[k]=X^2[k]$$

$$=2+2W_5^k+2W_5^{5k}+2W_5^k+W_5^{2k}+W_5^{5k}+2W_5^{3k}+W_5^{4k}+W_5^{6k}, \quad 0\le k\le 5$$

Do $W_5^{5k} = W_5^0 = 1; W_5^{6k} = W_5^k$ suy ra:

$$Y[k] = 3 + 5W_5^k + W_5^{2k} + 4W_5^{3k} + W_5^{4k}, \quad 0 \le k \le 5$$

a) Bằng cách lấy IDFT từng thành phần ta có:

$$y[n] = 3\delta[n] + 5\delta[n-1] + \delta[n-2] + 4\delta[n-3] + \delta[n-4], \qquad 0 \le n \le 5$$

b) Thủ tục này chính là thực hiện phép tự tương quan của một dãy số thực. Sử dụng tính chất của DFT, ta có thể tính tích chập bằng một phương pháp khác:

$$y[n] = \text{IDFT}\left\{X^2[k]\right\} = x[n] * x[n]$$

IDFT và DFT cho thấy tích chập vòng . Do đó, để đảm bảo không có chồng phổ, chiều dài của DFT phải là $N \ge 2M - 1$ trong đó M là chiều dài của x[n]. Vì vậy $M = 3, N \ge 5$.

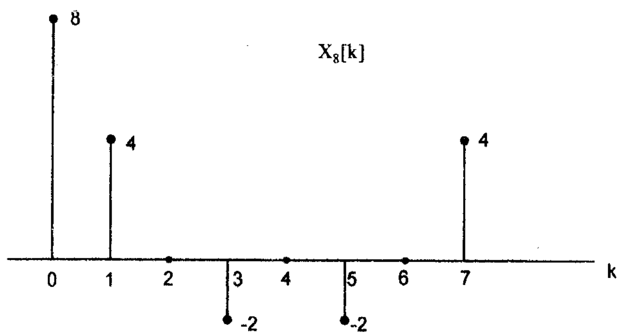
4.54. a) Với n = 0,..., 7, x[n] có dạng:

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}) - \frac{1}{4}(e^{j\frac{3\pi}{4}n} + e^{-j\frac{3\pi}{4}n})$$

$$= 1 + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{8}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{8}n7} - \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{8}n3} - \frac{1}{4}e^{-j\frac{2\pi}{8}n5}$$

$$= \frac{1}{8}(8 + 4e^{j\frac{2\pi}{8}n} + 4e^{j\frac{2\pi}{8}n7} - 2e^{j\frac{2\pi}{8}n3} - 2e^{j\frac{2\pi}{8}n5}) = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X_8[k]e^{j\frac{2\pi k}{8}n}$$

Do đó chúng ta có đồ thị của $X_8[k]$:



b) Với n = 0,…, 15, v[n] có dạng:

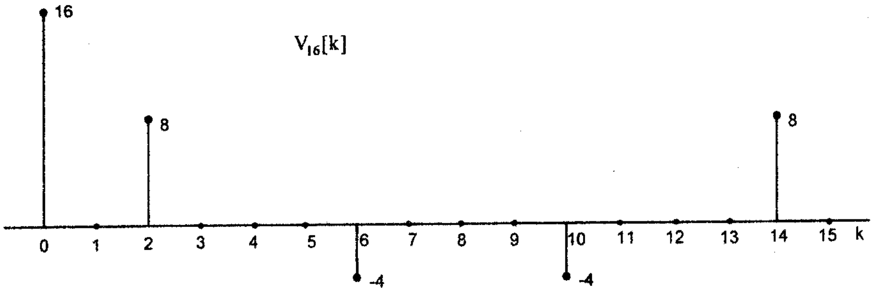
$$v[n] = 1 + \frac{1}{2}(e^{j\frac{\pi}{4}n} + e^{-j\frac{\pi}{4}n}) - \frac{1}{4}(e^{j\frac{3\pi}{4}n} + e^{-j\frac{3\pi}{4}n})$$

$$= 1 + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{16}n2} + \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{16}n14} - \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{16}n6} - \frac{1}{4}e^{j\frac{2\pi}{16}n10}$$

$$= \frac{1}{16}(16 + 8e^{j\frac{2\pi}{16}n2} + 8e^{j\frac{2\pi}{16}n14} - 4e^{j\frac{2\pi}{16}n6} - 4e^{j\frac{2\pi}{16}n10})$$

$$= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{15} V_{16}[k]e^{j\frac{2\pi k}{16}n}$$

Do đó chúng ta có đồ thị của $V_{16}[k]$:



c) $|X_{16}[k]| = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{16}k}$ $\quad 0 \le k \le 15$

Trong đó $X(e^{j\omega})$ la biến đổi Fourier của x[n].

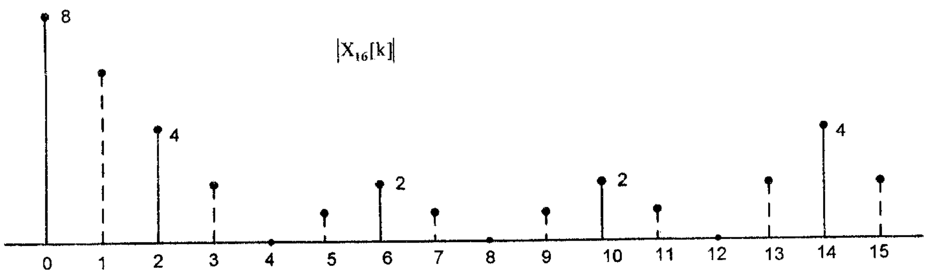
Chú ý rằng x[n] có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$x[n] = y[n]\omega[n]$$

Trong đó: $y[n] = 1 + \cos(\frac{\pi n}{4}) - \frac{1}{2}\cos(\frac{3\pi n}{4})$ và $\omega[n]$ là của sổ hình chữ nhật có độ dài 8 điểm.

Vì vậy giá trị của $|X_{16}[k]|$ sẽ tương ứng với giá trị của $|X_8[k]|$ tại các điểm chẵn. Các điểm lẻ sẽ được nội suy từ các điểm chẵn. Ta có đồ thị của $|X_{16}[k]|$:

$$|X_{16}[k]| = \left|X_8[\frac{k}{2}]\right| \quad k = 0, 2, 4, ..., 14$$



4.55. (a) Không tồn tại. x[n] chỉ có N bậc tự do và với $M \ge N$ điều kiện chỉ có thể được thỏa mãn nếu x[n] = 0. Cụ thể, ta muốn $X(e^{j\frac{2\pi k}{M}}) = DFT_M\{x[n]\} = 0$.

Vì $M \ge N$ do đó không có chồng phổ và x[n] có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$x[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1} X[k]W_M^{kn}, \qquad n = 0, ..., M-1$$

Trong đó X[k] là DFT M điểm của x[n]. Vì X[k] = 0 nên ta có thể kết luận rằng x[n] = 0 và do đó câu trả lời là không tồn tại.

(b) Ở đây ta chỉ cần đảm bảo rằng khi bị chồng phổ trong miền thời gian tới M mẫu, x[n] là dãy toàn 0. Ví dụ cho $x[n] = \delta[n] - \delta[n-2]$, khi đó:

$$X(e^{j\omega}) = 1 - e^{-2j\omega}$$

Với M = 2, ta có:

$$X(e^{j\frac{2\pi}{2}0}) = 1 - 1 = 0$$

$$X(e^{j\frac{2\pi}{2}1}) = 1 - 1 = 0$$

4.56. *Lời giải:*

a) $\frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X[k]e^{j\frac{2\pi}{8}k9} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} X[k]e^{j\frac{2\pi}{8}k} = x[1]$

b)

$$V[k] = X(z)\Big|_{z=2e^{j(\frac{2\pi k+\pi}{8})}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}\Big|_{z=2e^{j(\frac{2\pi k+\pi}{8})}} = \sum_{n=0}^{7} x[n]z^{-n}\Big|_{z=2e^{j(\frac{2\pi k+\pi}{8})}}$$

$$= \sum_{n=0}^{7} x[n](2e^{j\frac{\pi}{8}})^{-n} e^{-j\frac{2\pi k}{8}n} = \sum_{n=0}^{7} v[n]e^{-j\frac{2\pi k}{8}n}$$

Do đó ta có thể kết luận rằng: $v[n] = x[n](2e^{j\frac{\pi}{8}})^{-n}$

c)

$$w[n] = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} W[k]W_4^{-kn} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}(X[k] + X[k+4])e^{j\frac{2\pi}{4}kn}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k]e^{j\frac{2\pi}{4}kn} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k+4]e^{j\frac{2\pi}{4}kn}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} X[k]e^{j\frac{2\pi}{4}kn} + \frac{1}{4}\sum_{k=4}^{7} X[k]e^{j\frac{2\pi}{4}kn} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{7} X[k]e^{j\frac{2\pi}{8}k2n} = 2x[2n]$$

Do đó $w[n] = 2x[2n]$

d) Chú ý rằng Y[k] có thể viết dưới dạng:

$$Y[k] = X[k] + (-1)^k X[k] = X[k] + W_8^{4k}X[k]$$

Sử dụng tính chất của DFT, ta có thể kết luận rằng:

$$y[n] = x[n] + x[((n-4))_8]$$

4.57. $x(n) = \{-4 \quad 5 \quad 2 \quad -3 \quad 0 \quad -2 \quad 3 \quad 4\}, 0 \le N \le 7$.

Xét dãy DFT 8 điểm là $Y(k) = W_4^{3k}X(k) = W_8^{6k}X(k)$. Dùng tính chất dịch vòng theo thời gian của DFT ta thấy rằng $\text{IDFT}\{Y(k)\}$ được cho bởi $y(n) = x(n-6)_8$. Do đó

$y(0) = x(-6)_8 = x(2) = 2$; $y(1) = x(1-6)_8 = x(3) = -3$; $y(2) = x(2-6)_8 = x(4) = 0$;

$y(3) = x(3-6)_8 = x(5) = -2$; $y(4) = x(4-6)_8 = x(6) = 3$; $y(5) = x(5-6)_8 = x(7) = 4$;

$y(6)=x(6-6)_8=x(0)=-4$; $y(7)=x(7-6)_8=x(1)=5$. Do đó,

$y(n)=\{2\ \ -3\ \ 0\ \ -2\ \ 3\ \ 4\ \ -4\ \ 5\},0\le n\le 7$

4.58. Ta có: $DFT_7\{x_2[n]\}=X_2[k]=\sum_0^4 x_2[n]e^{-j\frac{2\pi}{7}kn}$

Do đó:

$$x_2[0]=\frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}X_2[k]=\frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}\left(\mathrm{Re}\{X_2[k]\}+j\mathrm{Im}\{X_2[k]\}\right)=\frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}\left(\mathrm{Re}\{X_2[k]\}\right)$$

(vì $x_2[0]$ là thực)

Suy ra: $x_2[0]=g[0]$

Để xác định quan hệ giữa $x_2[1]$ và $g[1]$ phải chú ý rằng vì $x_2[n]$ là thực:

$$X(e^{j\omega})=X^*(e^{-j\omega})$$

Do đó: $X[k]=X^*[N-k],\quad k=0,...,6$

Khi đó ta có:

$$g[1]=\frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}\mathrm{Re}\{X_2[k]\}W_7^{-k}=\frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}\frac{X_2[k]+X_2^*[k]}{2}W_7^{-k}$$

$$=\frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}\frac{X_2[k]}{2}W_7^{-k}+\frac{1}{7}\sum_{k=0}^{6}\frac{X_2[N-k]}{2}W_7^{-k}$$

$$=\frac{1}{2}x_2[1]+\frac{1}{14}\sum_{k=0}^{6}X_2[k]W_7^{-k}=\frac{1}{2}x_2[1]+\frac{1}{14}\sum_{k=0}^{6}X_2[k]W_7^{-6k}$$

$$=\frac{1}{2}\left(x_1[1]+x_2[6]\right)=\frac{1}{2}\left(x_1[1]+0\right)=\frac{1}{2}x_1[1]$$

4.59. Trước tiên chúng ta cần phải tính các giá trị Q[0] và Q[3]:

$$Q[0]=X_1(1)=X_1(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0}=\sum_{n=0}^{\infty}x_1[n]=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}$$

$$Q[3]=X_1(-1)=X_1(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}x_1[n](-1)^n=\frac{4}{3}$$

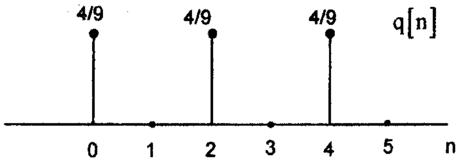
Với mỗi Q[k], DFT 6 điểm là:

$$Q[k]=\frac{4}{3}\delta[k]+\frac{4}{3}\delta[k-3]$$

Sau đó tìm q[n] với $0\le n<6$:

$$q[n]=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5}Q[k]e^{\frac{2\pi}{4}kn}=\frac{1}{6}\left(\frac{4}{3}+\frac{4}{3}(-1)^n\right)=\frac{2}{9}\left(1+(-1)^n\right)$$

Tại các giá trị khác q[n] = 0. Đồ thị của q[n]:



4.60. a) Phương pháp cộng xếp chồng (overlap add):

Nếu chia đầu vào thành các đoạn có chiều dài L, mỗi đoạn sẽ có chiều dài đầu ra:

$L + 100 - 1 = L + 99$

Do đó, độ dài yêu cầu là: $L = 256 - 99 = 157$

Nếu có 63 đoạn, 63x157 = 9891, sẽ còn dư 109 điểm. Do đó ta phải đệm thêm vào khối dữ liệu dư thừa này thành khối chiều dài 256 và sử dụng thêm một DFT khác.

Do đó, ta cần 64 DFT và 64 IDFT. Vì h[n] cũng cần một DFT nên tổng số là 65 DFT và 64 IDFT.

b) Phương pháp đặt kề nhau (overlap save):

Chèn thêm 99 điểm 0 vào dãy và loại bỏ 99 điểm đầu tiên ở đầu ra mỗi đoạn. Do đó chiều dài sau khi chèn là 10099 điểm. Chiều dài mỗi đoạn chồng là 256 – 99 = 157 = L.

Ta yêu cầu 65x157 = 10205 để có tất cả 10099 điểm. Vì h[n] cũng cần một DFT nên tổng số là 66 DFT và 65 IDFT.

c) Bỏ qua các thời điểm quá độ ở đầu và cuối của tích chập trực tiếp, mỗi điểm đầu ra yêu cầu 100 phép nhân và 99 phép cộng

Cộng xếp chồng:

Số phép nhân = 129 . 1024 = 132096

Số phép cộng = 129 . 2048 = 264192

Đặt kề nhau:

Số phép nhân = 131 . 1024 = 134144

Số phép cộng = 131 . 2048 = 268288

Tích chập trực tiếp:

Số phép nhân = 100 . 10000 = 1000000

Số phép cộng = 99 . 10000 = 990000

4.61. Vì $F^{-1} = \frac{1}{N}F$, do đó $F = NF^{-1}$. Do đó:

$$y(n) = F\left\{F\left\{F\left\{F\left\{F\left\{F\{x(n)\}\right\}\right\}\right\}\right\}\right\} = NF^{-1}\left\{F\left\{NF^{-1}\left\{F\left\{NF^{-1}\left\{F\{x(n)\}\right\}\right\}\right\}\right\}\right\} = N^3x(n)$$

4.62. Ta có hai dãy 100 điểm có giá trị khác không khi n nằm trong khoảng [0,99].

Nếu $x_1[n]$ khác 0 chỉ với $10 \le n \le 39$, tích chập tuyến tính $x_1[n] * x_2[n]$ là một dãy có độ dài 40 + 100 -1 =139 và có giá trị khác 0 trong khoảng $10 \le n \le 139$.

Tích chập vòng tính trên 100 điểm tương ứng với tích chập tuyến tính với 40 điểm đầu tiên bị chồng phổ bởi các giá trị trong khoảng $100 \le n \le 139$.

Vì vậy, tích chập vòng 100 điểm tương đương tích chập tuyến tính chỉ trong khoảng $40 \le n \le 99$.

4.63. a) Vì chiều dài của x[n] là 50 điểm và chiều dài của h[n] là 10 điểm, tích chập tuyến tính $y[n] = x[n] * h[n]$ có độ dài 50 + 10 – 1 = 59 điểm.

b) Tích chập vòng = tích chập tuyến tính + chồng phổ

Nếu $y[n] = x[n] * h[n]$, ta có:

$$x[n] * y[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} y[n + rN] \quad 0 \le n \le (N-1)$$

Với N = 50

$$x[n] * y[n] = y[n] + y[n + 50] \qquad 0 \le n \le 49$$

Vì bài toán cho $x[n] * h[n] = 10$, do đó:

$$y[n] + y[n+50] = 10 \qquad 0 \le n \le 49$$

Ta cũng có $y[n] = 5,\ 0 \le n \le 4$

Sử dụng công thức trên ta có:

$$n = 0 \qquad y[0] + y[50] = 10$$
$$y[50] = 5$$
$$\vdots$$
$$n = 4 \qquad y[4] + y[54] = 10$$
$$y[54] = 5$$
$$\vdots$$
$$n = 5 \qquad y[5] + y[55] = 10$$
$$y[55] = ?$$
$$\vdots$$
$$n = 8 \qquad y[8] + y[58] = 10$$
$$y[58] = ?$$
$$\vdots$$
$$n = 9 \qquad y[9] \qquad = 10$$
$$\vdots$$
$$n = 49 \qquad y[49] \qquad = 10$$

Tóm lại, chúng ta chỉ có thể xác định y[n] với giá trị n trong khoảng $9 \le n \le 55$ (Chú ý giá trị y[n] với $0 \le n \le 4$ được cho trước).

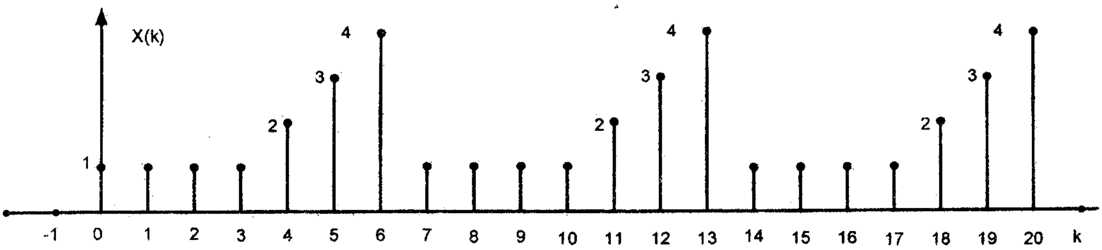
4.64. $y(n) = \begin{cases} x(n/L), & n = 0, L, 2L, ..., (N-1)L \\ 0, & n \text{ khác} \end{cases}$

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{NL-1} y(n) W_{NL}^{nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{NL}^{nLk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_{N}^{nk}$$

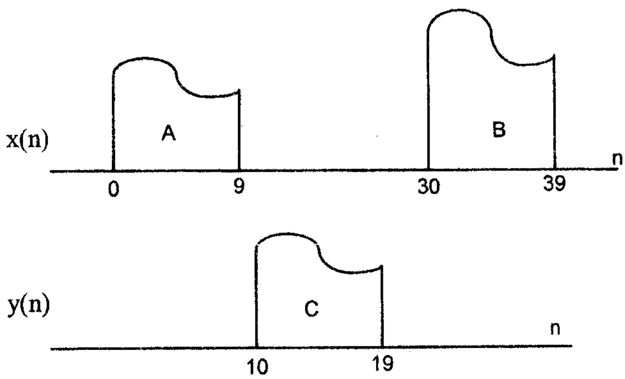
Với $k \geq N$, đặt $k = k_0 + rN$, trong đó $k_0 = (k)_N$, ta có:

$$Y(k) = Y(k_0 + rN) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{n(k_0+rN)} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = X(k_0) = X(k)_N$$

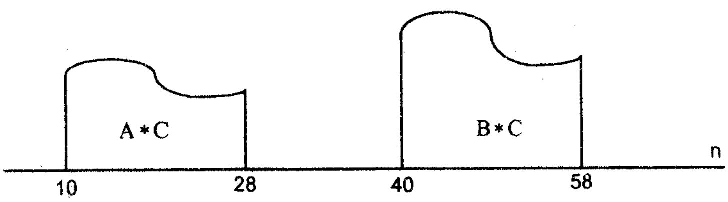
b) Bởi vì $Y(k) = X(k)_7$ đối với $k = 0, 1, 2, ..., 20$, ta vẽ được $Y(k)$ như sau:



4.65. Ta có:



a) Tích chập tuyến tính $x[n] * y[n]$ là một chuỗi gồm 40 + 20 – 1 = 59 điểm.



Do đó $x[n] * y[n] = w[n]$ khác 0 với $10 \leq n \leq 28$ và $40 \leq n \leq 58$.

b) Tích chập vòng 40 điểm có thể tính bằng cách chồng phổ tích chập tuyến tính. Cụ thể, chồng phổ các điểm trong khoảng $40 \leq n \leq 58$ với khoảng $0 \leq n \leq 18$.

Vì $w[n] = x[n] * y[n]$ bằng 0 trong khoảng $0 \leq n \leq 9$, tích chập vòng $g[n] = x[n](*)_{40} y[n]$ chỉ bao gồm các giá trị bị chồng phổ:

$$w[n] = x[n] * y[n] \qquad 40 \leq n \leq 49$$

Tương tự, các điểm g[n] với $18 \leq n \leq 39$ sẽ tương ứng với các điểm của w[n] trong khoảng này.

Tóm lại:

$$w[n] = g[n] \qquad 18 \leq n \leq 39$$

$$w[n+40]=g[n] \quad 0\le n\le 9$$

4.66. a) Hai chuỗi liên hệ với nhau bởi phép dịch vòng:

$$h_2[n]=h_1[((n+4))_8]$$

Do đó: $H_2[k]=W_8^{-4k}H_1[k]$

và $|H_2[k]|=|W_8^{-4k}H_1[k]|=|H_1[k]|$

Do đó độ lớn của các DFT 8 điểm bằng nhau.

b) $h_1[n]$ gần giống với $\frac{\sin x}{x}$.

Do $H_2[k]=e^{j\pi k}H_1[k]$ nên sử dụng $h_1[n]$ làm bộ lọc thông thấp tốt hơn.

4.67. $X_{GDFT}(k,a,b)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi(n+a)(k+b)}{N}}$

$$x(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_{GDFT}(k,a,b)e^{j\frac{2\pi(n+a)(k+b)}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1}x(r)e^{-j\frac{2\pi(r+a)(k+b)}{N}}e^{j\frac{2\pi(n+a)(k+b)}{N}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1}x(r)e^{j\frac{2\pi(n+a-r-a)(k+b)}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{N-1}x(r)e^{j\frac{2\pi(n-r)(k+b)}{N}}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{r=0}^{N-1}x(r)\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi(n-r)(k+b)}{N}}$$

Mà $\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\frac{2\pi(n-r)(k+b)}{N}}=\begin{cases}N, & n=r\\ 0, & n\neq r\end{cases}$. Suy ra:

$$x(n)=\frac{1}{N}x(n)N=x(n)$$

D. BÀI TẬP MATLAB

M4_1. Viết một hàm tính dịch vòng của một chuỗi circshift1(x,M) với x là chuỗi ban đầu và M là số mẫu cần dịch. Áp dụng hàm này để viết một chương trình MATLAB tính tích chập vòng của một chuỗi bất kì nhập từ bàn phím, số mẫu cần dịch M cũng được nhập từ bàn phím.

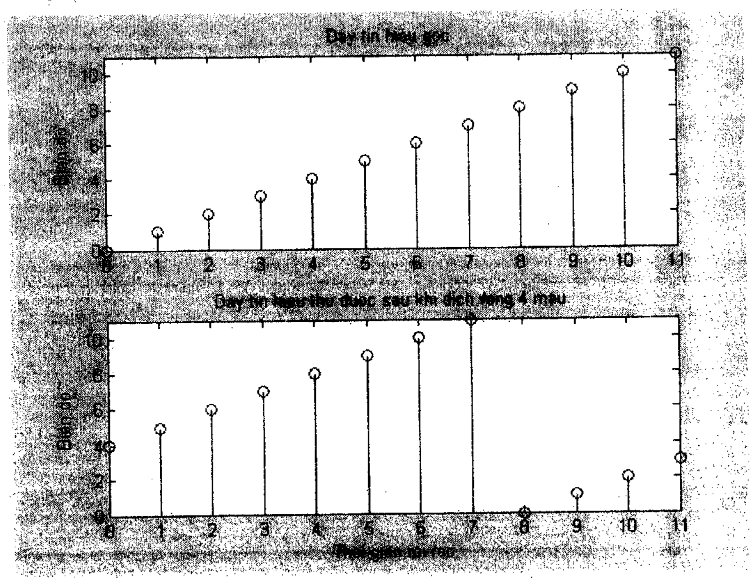
Lời giải:

```
function y = circshift(x,M)
% Xay dung mot chuoi y bang cach dich vong
% mot chuoi x co chieu dai huu han di M mau
if abs(M) > length(x)
 M = rem(M,length(x));
end
```

```
if M < 0
  M = M + length(x);
end
y = [x(M+1:length(x)) x(1:M)];

% Chuong trinh M4_1
% Bieu dien dich vong cua mot day
clf;
M = input('Nhap so mau can dich = ');
x = input('Nhap day tin hieu goc = ');
y = circshift(x,M);          % Dich day tin hieu goc di M mau
L = length(x)-1;
n = 0:L;
subplot(2,1,1);
stem(n,x);
axis([0,L,min(x),max(x)]);
title('Day tin hieu goc');
ylabel('Bien do');
subplot(2,1,2);
stem(n,y);
axis([0,L,min(x),max(x)]);
title(['Day tin hieu thu duoc sau khi dich vong ',num2str(M),' mau']);
ylabel('Bien do');
xlabel('Thoi gian roi rac');
```

Hình vẽ sau đây minh hoạ tích chập vòng của dãy x(n) = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11], M = 4.

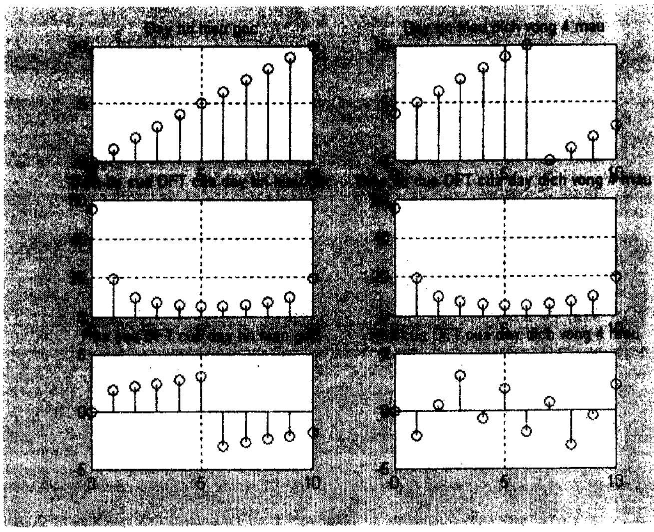


M4_2. Viết một chương trình biểu diễn một chuỗi bất kì nhập từ bàn phím cùng biến đổi Fourier rời rạc (DFT) của nó. Dịch vòng chuỗi này theo thời gian đi M mẫu. Hãy biểu diễn chuỗi sau khi dịch vòng, biên độ và pha của DFT của nó.

Lời giải:

```
% Chuong trinh M4_2
% Tinh chat dich vong theo thoi gian cua DFT
clf;
x = input('Nhap day goc tu ban phim =');
M=input('Nhap so mau can dich vong =');
N = length(x)-1;
n = 0:N;
y = circshift(x,M);disp(y)
XF = fft(x);
YF = fft(y);
subplot(321);
stem(n,x);grid
title('Day tin hieu goc');
subplot(322);
stem(n,y);grid
title(['Day tin hieu dich vong ',num2str(M),' mau']);
subplot(323);
stem(n,abs(XF));grid
title('Bien do cua DFT cua day tin hieu goc');
subplot(324);
stem(n,abs(YF));grid
title(['Bien do cua DFT cua day dich vong ',num2str(M),' mau']);
subplot(325);
stem(n,angle(XF));grid
title('Pha cua DFT cua day tin hieu goc');
subplot(326);
stem(n,angle(YF));grid
title(['Pha cua DFT cua day dich vong ',num2str(M),' mau']);
```

Hình vẽ sau đây minh họa cho trường hợp $x = [0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10]$; $M = 4$.



M4_3. Viết chương trình mô tả tính chất chập vòng của DFT: cho 2 chuỗi bất kỳ $x_1(n), x_2(n)$ có chiều dài bằng nhau. Tính và vẽ tích chập vòng của 2 chuỗi đó. Một cách khác xác định tích chập vòng của 2 chuỗi này là tính $\mathrm{IDFT}\{X_1(k).X_2(k)\}$ với $X_1(k) = \mathrm{DFT}\{x_1(n)\}$; $X_2(k) = \mathrm{DFT}\{x_2(n)\}$.

Lời giải:

```
function y = circonv1(x1,x2)
L1 = length(x1); L2 = length(x2);
if L1 ~= L2, error('Hai chuoi co chieu dai khong bang nhau'), end
y = zeros(1,L1);
x2tr = [x2(1) x2(L2:-1:2)];
for k = 1:L1
 sh = circshift(x2tr,1-k);
 h = x1.*sh;
 y(k) = sum(h);
end
% Chuong trinh M4_3
% Tinh chat chap vong cua DFT
x1 = input('Nhap day thu nhat =');
x2 = input('Nhap day thu hai =');
ycir = circonv1(x1,x2);
disp('Ket qua cua tich chap vong = ');disp(ycir)
X1 = fft(x1); X2 = fft(x2);
yc = real(ifft(X1.*X2));
disp('Ket qua cua IDFT(X1.X2) = ');disp(yc)
N=length(ycir);
```

```
n=0:N-1;
m=0:length(x1)-1;
subplot(221);
stem(m,x1);          % Ve day thu nhat
title('Day thu nhat x1');
subplot(222);
stem(m,x2);          % Ve day thu hai
title('Day thu hai x2');
subplot(223);
stem(n,ycir);        % Ve tich chap vong cua hai day x1, x2
title('Tich chap vong cua hai day x1, x2');
xlabel('n');
subplot(224);
stem(n,yc);          % Ve IDFT(X1.X2)
title('IDFT(X1.X2)');
xlabel('n');
```

Nhap day thu nhat =[1 3 5 7 9 11]

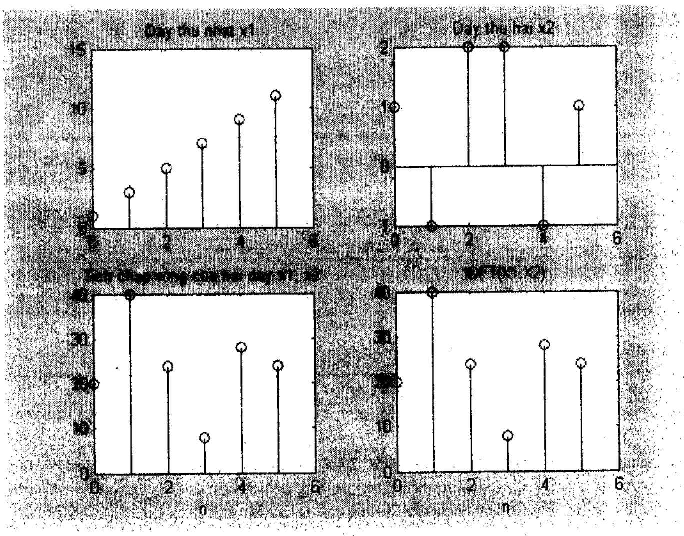
Nhap day thu hai =[1 -1 2 2 -1 1]

Ket qua cua tich chap vong =

20 40 24 8 28 24

Ket qua cua IDFT(X1.X2) =

20 40 24 8 28 24



M4_4. Viết chương trình tính tích chập tuyến tính thông qua tích chập vòng.

Lời giải:

```
% Chuong trinh M4_4
% Tinh tich chap tuyen tinh thong qua tich chap vong
```

```
x1 = input('Nhap day thu nhat =');
x2 = input('Nhap day thu hai =');
x1n = [x1 zeros(1,length(x2)-1)];
x2n = [x2 zeros(1,length(x1)-1)];
ylin = circonv1(x1n,x2n);
disp('Ket qua cua tich chap tuyen tinh thong qua tinh tich chap vong
     = ');disp(ylin);
y = conv(x1, x2);
disp('Tinh tich chap tuyen tinh truc tiep = ');disp(y)
N=length(ylin);
n=0:N-1;
m1=0:length(x1)-1;
m2=0:length(x2)-1;
subplot(221);
stem(m1,x1);          % Ve day thu nhat
title('Day thu nhat x1');
subplot(222);
stem(m2,x2);          % Ve day thu hai
title('Day thu hai x2');
subplot(223);
stem(n,ylin);
title('Tich chap tuyen tinh thong qua tich chap vong');
xlabel('n');
subplot(224);
stem(n,y);
title('Tinh tich chap tuyen tinh truc tiep');
xlabel('n');
```

Nhap day thu nhat =[0 1 2 3 4 5 6 7 8 9]

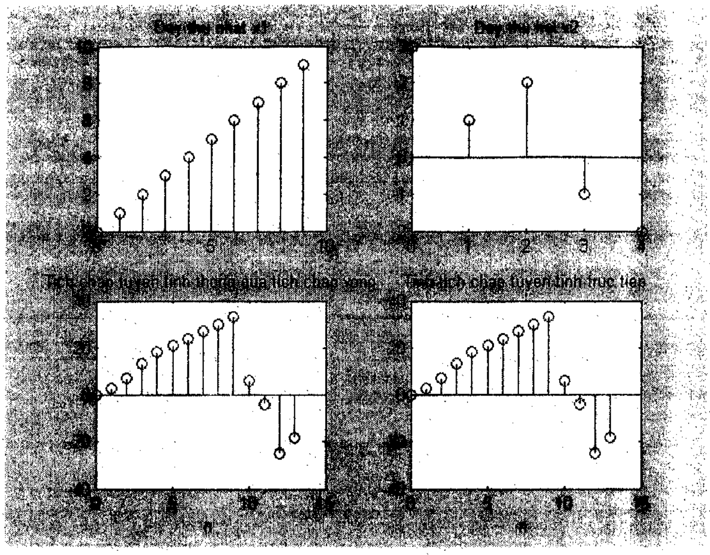
Nhap day thu hai =[3 1 2 -1 -2]

Ket qua cua tich chap tuyen tinh thong qua tinh tich chap vong =

0 3 7 13 18 21 24 27 30 33 6 -4 -25 -18

Tinh tich chap tuyen tinh truc tiep =

0 3 7 13 18 21 24 27 30 33 6 -4 -25 -18



M4_5. Viết chương trình tính DFT của một chuỗi tín hiệu nhập từ bàn phím, độ dài mong muốn của DFT cũng được nhập từ bàn phím.

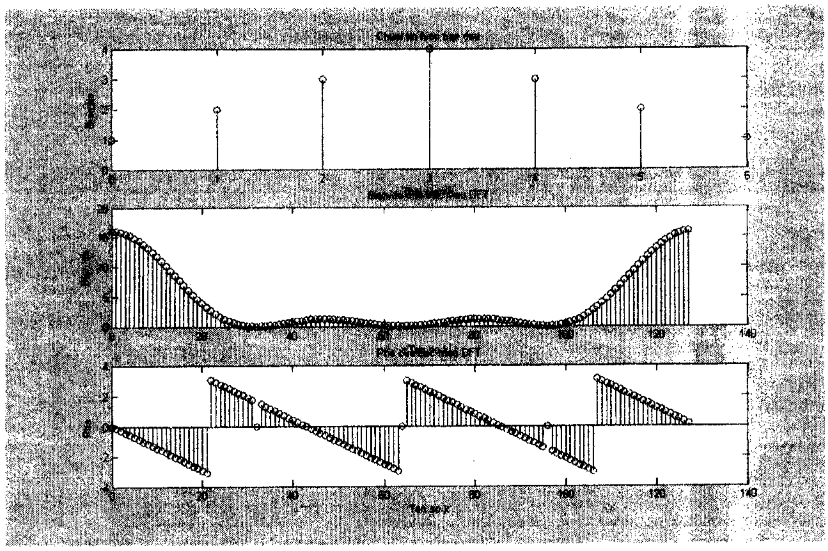
Lời giải:

```
% Chuong trinh M4_5
% Tinh DFT
%
% Read in the length N of sequence and the desired
% length M of the DFT
clf;
x=input('Nhap chuoi tin hieu goc =');
% N = input('Nhap chieu dai chuoi tin hieu = ');
N=length(x);
M = input('Nhap chieu dai mong muon cua DFT = ');
% Tinh DFT M diem cua chuoi tin hieu nhap tu ban phim
X = fft(x,M);
% Ve chuoi tin hieu trong mien thoi gian va DFT cua no
t = 0:1:N-1;
subplot(3,1,1);
stem(t,x);
title('Chuoi tin hieu ban dau');
xlabel('Thoi gian n'); ylabel('Bien do');
subplot(3,1,2);
k = 0:1:M-1;
stem(k,abs(X));
title('Bien do cua cac mau DFT');
xlabel('Tan so k'); ylabel('Bien do');
```

```
subplot(3,1,3);
stem(k,angle(X));
title('Pha cua cac mau DFT');
xlabel('Tan so k'); ylabel('Pha');
```

Nhap chuoi tin hieu goc =[1 2 3 4 3 2 1]

Nhap chieu dai mong muon cua DFT = 128



M4_6. Viết chương trình tính IDFT của chuỗi DFT có dạng $X(k)=\frac{k}{M}$ với $0 \le k \le M-1$. Biểu diễn chuỗi DFT gốc, và chuỗi IDFT của nó.

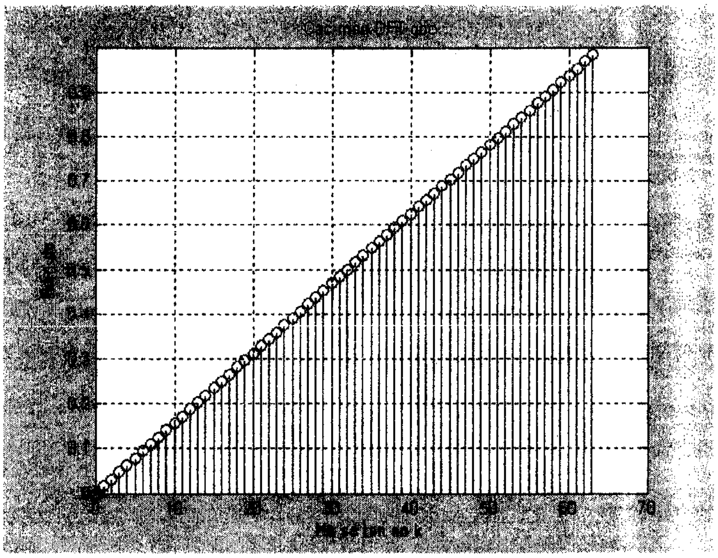
Lời giải:

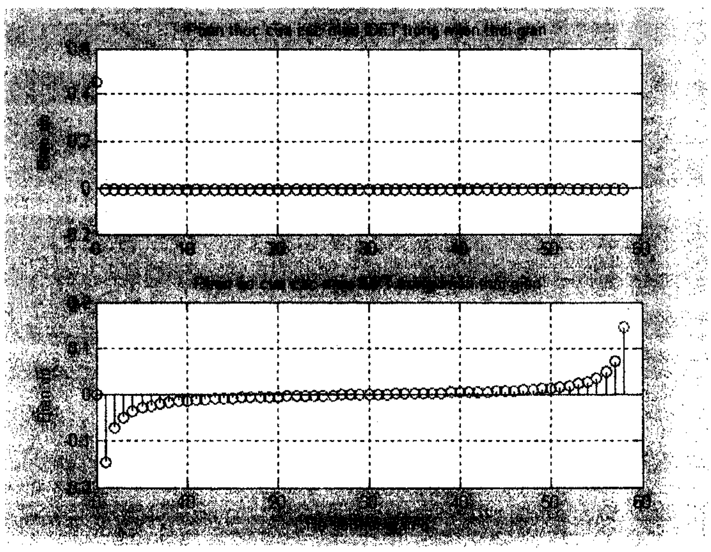
```
% Chuong trinh M4_6
% Tinh IDFT
clf;
M = input('Nhap chieu dai cua DFT = ');
N = input('Nhap chieu dai mong muon cua IDFT = ');
%  Tao chuoi DFT co chieu dai M
k = 1:M;
X = (k-1)/M;
%  Tinh IDFT N diem cua chuoi do
x = ifft(X,N);
% Ve DFT and IDFT cua chuoi
k=1:M;
stem(k-1,X);grid
xlabel('He so tan so k'); ylabel('Bien do');
title('Cac mau DFT goc');
figure
```

```
subplot(211);
n = 0:1:N-1;
stem(n,real(x));grid
title('Phan thuc cua cac mau IDFT trong mien thoi gian');
% xlabel('He so thoi gian n');
ylabel('Bien do');
subplot(212);
stem(n,imag(x));grid
title('Phan ao cua cac mau IDFT trong mien thoi gian');
xlabel('He so thoi gian n'); ylabel('Bien do');
```

Nhap chieu dai cua DFT = 64

Nhap chieu dai mong muon cua IDFT = 59



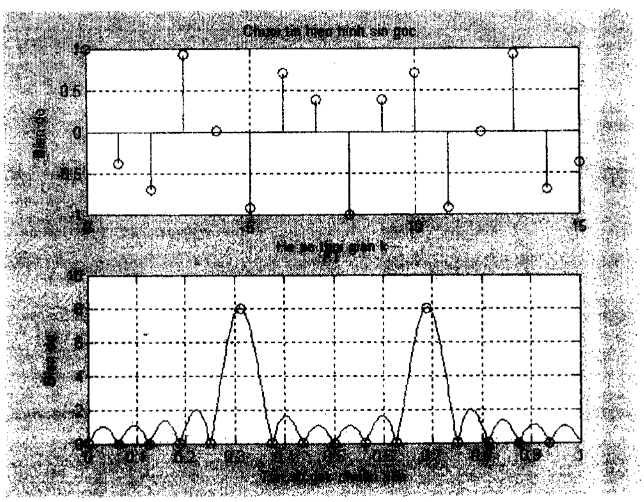


M4_7. Dùng biến đổi Fourier trong miền tần số rời rạc (DFT) để tính biến đổi Fourier trong miền tần số liên tục (FT) của một tín hiệu hình sin có chiều dài L = 16: $x(k)=\cos\left(2\pi k\frac{5}{16}\right)$, $0\le k\le 15$.

Lời giải:

```
% Chuong trinh M4_7
% Dung DFT de tinh DTFT
clf;
% Tao mot chuoi tin hieu hinh sin co chieu dai bang L=16
N=input('Nhap chieu dai DFT =');
k = 0:15;
x = cos(2*pi*k*5/16);
% Tinh DFT N diem cua chuoi
X = fft(x);
XE = fft(x,N);
% Ve dap ung tan so
L = 0:N-1;
subplot(211);
stem(k,x);grid
title('Chuoi tin hieu hinh sin goc');
xlabel('He so thoi gian k');
ylabel('Bien do');
subplot(212);
plot(L/N,abs(XE));grid
hold
plot(k/16,abs(X),'o');
title('FT');
xlabel('Tan so goc chuan hoa');
ylabel('Bien do');
```

Nhap chieu dai DFT =512



TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. J. G. Proakis, D. G. Manolakis, "Introduction to Digital Signal Processing", Macmillan Publishing Company, New York, 1989.
2. Sanjit K.Mitra, "Digital Signal Processing- A computer based approach", 2nd edition, McGraw-Hill.
3. Nguyễn Quốc Trung, "Xử lý tín hiệu và lọc số", Tập 1, NXB KHKT, Hà Nội, 2004.
4. Alan V. Oppenhiem, Ronald W. Schafer, John R. Buck, "Discrete-Time Signal Processing", 2nd Edition, Prentice-Hall, 1999.
5. Sanjit K.Mitra, "Digital Signal Processing Laboratory using Matlab", WCB/McGraw-Hill, 1999.
6. Applied Numerical Methods using Matlab, Won Y. Yang, Wenwu Cao, Tae-Sang Chung, John Morris, A John Wiley & Sons, inc., Publication, 2005.

MỤC LỤC

Giải bài tập

Xử lý tín hiệu số và Matlab

Chịu trách nhiệm xuất bản
NGUYỄN THỊ THU HÀ

Biên tập: TRẦN CHÍ ĐẠT
NGUYỄN VĂN VĨNH
Chế bản: HOÀNG VIỆT BẮC
Sửa bản in: NGUYỄN VĂN VĨNH
Trình bày bìa: PHAN THẾ VINH

In 500 bản, khổ 19 x 27 cm, tại Công ty TNHH Tô Duy
Số đăng ký kế hoạch xuất bản: 61 - 2008/CXB/55 - 01/BuĐ
Số quyết định xuất bản: 93/QĐ-NXB BĐ ngày 21/7/2008
In xong và nộp lưu chiểu tháng 7 năm 2008.