PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 4

§ 5 Chuỗi luỹ thừa

• Định nghĩa • Các tính chất • Khai triển thành chuỗi luỹ thừa

• Đặt vấn đề

1. Định nghĩa. $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$ (1)

Ký hiệu là $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$, ở đó a_n là các số thực, x là biến số.

Ta bảo chuỗi luỹ thừa hội tụ (phân kỳ) tại x_0 $\Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n$ hội tụ (phân kỳ),

chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ hội tụ trên khoảng $(a\,;\,b)$ $\Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx_0^n$ hội tụ, x_0 tuỳ ý $\in (a; b)$.

Ví dụ 1. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$

Đã biết hội tụ khi $|x| < 1$, có $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$

Phân kỳ khi $|x| \geq 1$

Định lí 1 (*Abel*). $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ hội tụ tại $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ hội tụ tuyệt đối tại x: $|x| < |x_0|$

Chứng minh. +) $\sum_{n=1}^{\infty} a_nx_0^n$ hội tụ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_nx_0^n = 0 \Rightarrow \left|a_nx_0^n\right| \leq M, \forall n \geq N_0$

+) $\left|a_nx^n\right| = \left|a_nx_0^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n\right| \leq M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$

+) $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ hội tụ (Định lí so sánh 1) $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ hội tụ tuyệt đối

Nhận xét. Từ định lí Abel suy ra:

• Nếu $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ phân kỳ tại $x_0 \Rightarrow$ phân kỳ tại x: $|x| > |x_0|$

• Tập hội tụ khác rỗng

Định lý 2. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$ (hoặc $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$) thì bán kính hội tụ R của chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ được xác định bởi $R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<\infty\\ 0, & \rho=+\infty\\ \infty, & \rho=0\end{cases}$

Nhận xét. • Quy ước viết $R=0$ ở khẳng định 2), $R=+\infty$ ở khẳng định 3), từ đó có thể phát biểu gọn định lý này như sau: *Mọi chuỗi luỹ thừa* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ *đều có một bán kính hội tụ* R *với* $0\le R\le+\infty$*, khi đó chuỗi hội tụ tuyệt đối với* $|x|<R$ *và phân kỳ với* $|x|>R$*.*

• Cách tìm bán kính hội tụ R: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ hoặc $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$

Ví dụ 1. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{1}{n^2}:\frac{1}{(n+1)^2}=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$$

$R=1$, chuỗi hội tụ với $|x|<1$, phân kỳ với $|x|>1$.

Tại $|x|=1$ có $\left|\dfrac{x^2}{n^2}\right|=\dfrac{1}{n^2}$, mặt khác $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ, do đó chuỗi luỹ thừa hội tụ tại $|x|=1$.

Khoảng hội tụ là $[-1;\ 1]$.

Ví dụ 2. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+2}{3^n}x^n$

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{n+2}{3^n}:\frac{n+3}{3^{n+1}}=3\frac{n+2}{n+3}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=3$$

$R=3$, chuỗi hội tụ khi $|x|<3$, phân kỳ khi $|x|>3$.

Tại $x=3$ có $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+2)$ phân kỳ.

Tại $x=-3$ có $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)$ phân kỳ

Khoảng hội tụ: $(-3;\ 3)$.

Ví dụ 3. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$

$$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n+2} = \frac{n+2}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = 1$$

$R = 1$, chuỗi hội tụ với $|x| < 1$, phân kỳ với $|x| > 1$

Khi $x = 1$ có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ phân kỳ

Khi $x = -1$ có $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ là chuỗi đan dấu hội tụ

Khoảng hội tụ là $[-1;\ 1)$.

Ví dụ 4. Tìm khoảng hội tụ của chuỗi luỹ thừa: $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Không thể dùng ngay công thức vì một nửa các hệ số của chuỗi bằng 0: $a_{2n+1} = 0$

Đặt $y = x^2$ có chuỗi luỹ thừa: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^n$

Có $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{(-1)^n}{(2n)!} : \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1))!}\right| = \frac{(2(n+1))!}{(2n)!} = (2n+1)(2n+2)$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \infty$$

Khoảng hội tụ: $(-\infty, \infty)$

Ví dụ 5. Tìm miền hội tụ của chuỗi luỹ thừa

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{2n+1} x^{2n}$ $(-1 < x < 1)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$ $(|x| < 1)$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$ $(-3 \le x \le -1)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$ $(-4 < x < 4)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$ $(2 < x < 4)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} (x-1)^n$ $(1-\frac{1}{e} < x < 1+\frac{1}{e})$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^{n!}$ $(-1 < x < 1)$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+3}{3n^2+4n+1} x^{2n-1}$ $(|x| \le 1)$

i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+3}{3n^2+4n+5} x^{2n}$ $(|x| \le 1)$

k) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{3^n}{n^2+1}(x+1)^{2n}$ $\left(\left[-1-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]\right)$

l) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$ $(0<x<2)$

m) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}(x+2)^n$ $\left(-2-\dfrac{1}{e}<x<-2+\dfrac{1}{e}\right)$

n) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^{4n}}{(n+2)\ln(n+1)}$ $(2<x<4)$ o) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-4)^{2n}}{(n+1)\ln(n+2)}$ $(3<x<5)$

p 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n-1}$ $(-1<x<3)$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}(x+1)^{2n-1}$ $(-3<x<1)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}(x-3)^{2n}$ $(3-\sqrt{e},3+\sqrt{e})$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{n^n}(x-3)^{2n}$ $(-3-\sqrt{e},-3+\sqrt{e})$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}(x-1)^n$ $(0\le x<2)$

q) 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{2n-1}}{7^n\ln(n+1)}(x-1)^n$ $\left(\dfrac{2}{9}\le x<\dfrac{16}{9}\right)$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n^2+3n+1}{(n^3+5)3^n}(x-3)^n$ $(0<x\le 6)$

r) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{2^n}(x+1)^n$ $(-3\le x<1)$

Nhận xét

$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ (1) được gọi là chuỗi luỹ thừa tại $x=a$,

Đặt $z=x-a$ có $\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ (2), tìm bán kính hội tụ R của chuỗi (2), thì có tập hội tụ của chuỗi (1), cụ thể hội tụ với: $-R<x-a<R$ hay $a-R<x<a+R$ và phân kỳ với $x<a-R$, hoặc $x>a+R$; để nhận được khoảng hội tụ ta cần xét tại $x=a-R$ và $x=a+R$.

2. Các tính chất của chuỗi luỹ thừa

a) Chuỗi luỹ thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ hội tụ đều trên mọi đoạn $[a;\ b]$ nằm trong khoảng hội tụ của nó.

b) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x),\ |x|<R\ne 0\ \Rightarrow\ S(x)$ liên tục trên khoảng $(-R;\ R)$.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),\ |x| < R \neq 0 \Rightarrow S(x)$ khả tích trên mọi đoạn $[a\,;\ b] \subset (-R\,;\ R)$ và có

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b a_n x^n \, dx \right)$$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = S(x),\ |x| < R \neq 0 \Rightarrow S(x)$ khả vi trên khoảng $(-R\,;\ R)$ và có:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n x^n\right)$$

Nhận xét. Thực chất từ a) ta có: $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim\limits_{x \to x_0} \left(a_n x^n\right)$

Ví dụ 1. Tìm biểu thức chuỗi luỹ thừa của $\ln(1 + x)$

Miền xác định: $|x| < 1$.

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$, ở đó đặt $f(x) = \ln(1 + x)$

$$f'(x)\frac{1}{x+1} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt$$

$$f(x) - f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \left[(-1)^n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Do $f(0) = 0$ nên có $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots,\quad |x| < 1$

Ví dụ 2. Tìm biểu diễn chuỗi luỹ thừa của hàm $\tan^{-1} x$

Đặt $f(x) = \tan^{-1} x, \quad -\dfrac{\pi}{2} < f(x) < \dfrac{\pi}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-\left(-x^2\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . x^{2n}, \quad |x| < 1$$

$$\int_0^x f'(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\tan^{-1}x - \tan^{-1}0 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| < 1$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots, \quad |x| < 1$$

Ví dụ 3. Tính tổng $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

Có $R = 1$, chuỗi hội tụ với $|x| < 1$

Đặt $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ có $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\frac{x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$

$$\int_0^x f'(t)dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} \quad |x| < 1$$

$$f(x) - f(0) = -\ln(1-x), \quad |x| < 1 \Rightarrow f(x) = -\ln(1-x), \quad |x| < 1$$

Ví dụ 4. Biểu diễn chuỗi luỹ thừa của hàm $\frac{1}{(1-x)^2}$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n, \quad |x| < 1$$

Ví dụ 5. Tính tổng của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$

$R = 1$, chuỗi hội tụ về $f(x)$ với $|x| < 1$.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \sum_{n=1}^{\infty} x.n^2 x^{n-1} = xg(x),$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{d}{dx}x^{n+1} = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1} = \frac{d}{dx}\left(x\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right)$$

Theo ví dụ 4 có $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$g(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$f(x) = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}$$

Ví dụ 6. Tính tổng

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ $\quad(\arctan x,\ |x|<1)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ $\left(\frac{x}{(x-1)^2},\ |x|>1\right)$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ $\quad(3)$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-1)^{3n+2}}{3n+1}$ $\quad\left((x-1)\left[\frac{1}{3}\ln\frac{x}{x^2-3x+3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right],\right.$ $\left.0<x\le 2\right)$

e) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^{3n+2}}{3n+1}$ $\quad\left((x+1)\left[\frac{1}{3}\ln\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right],\right.$ $\left.-2<x<0\right)$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^n$ $\quad(\ln|x+2|,\ -2<x<0)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)(x-1)^n$ $\quad\left(\frac{x^2-1}{x^2},\ 0<x<2\right)$

h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3n+2}}$ $\quad\left(\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\ln 3+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right]\right)$

k: 1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$ $\quad(4)$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}$ $\quad\left(\frac{9}{4}\right)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$ $\quad(\ln 2)$ 4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}$ $\quad\left(\ln\frac{3}{4}\right)$

l : 1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)3^{n+1}}$ $\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{3}\right)\right)$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{3^n}$ $\quad\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$

m) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$

Hướng dẫn.

a) +) $R=1$ +) $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=\frac{1}{1+x^2}$ +) $\int_0^x S'(t)\,dt=\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$

+) $S(x)-S(0)=\arctan x\Rightarrow S(x)=\arctan x$

c) +) Xét chuỗi $S(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^{2n-2}$ có $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=A$

+) $R=1$ +) $S(x)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n-1}\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1-x^2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$ +) $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=3$

3. Khai triển thành chuỗi luỹ thừa

Định nghĩa. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ được gọi là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ tại lân cận điểm x_0.

Nếu $x_0=0$ ta có $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ được gọi là chuỗi MacLaurin của hàm số $f(x)$.

Định nghĩa. Nếu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n=f(x)$ ta bảo hàm số $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm x_0

Định lí 3. $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận nào đó của x_0, $\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0$,

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, ξ ở giữa x_0 và x

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Định lí 4. $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong lân cận nào đó của điểm x_0;

$\left|f^{(n)}(\xi)\right|\le M$, $\forall\xi$ thuộc lân cận của x_0 nói trên

$$\Rightarrow f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Chú ý. • Có hàm khả vi vô hạn không được khai triển thành chuỗi Taylor, ví dụ

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$\Rightarrow f^{(n)}(0)=0$, n tự nhiên bất kỳ

Thật vậy có ngay

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^{t^2}}=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{2t\,e^{t}}=0.$$

Từ đó có đạo hàm mọi cấp tại $x=0$ cũng bằng 0.

Chuỗi Taylor của hàm $f(x)$ là $0+0+0+0+\ldots$.

Chuỗi này hội tụ, chúng hội tụ về 0. Nhưng hàm $f(x)\neq 0, \forall x\neq 0$

Nên $f(x)$ nói trên không được khai triển thành chuỗi Taylor

• Số dư $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ nhận được do sử dụng định lý Rolle

Ví dụ 7. Tìm chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x) = \begin{cases} 3^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Hàm này có được khai triển thành chuỗi Maclaurin hay không? Vì sao?

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!