GIẢI TÍCH 2

BÀI 7

TÍCH PHÂN HAI LỚP (TT)

3.7. Diện tích mặt cong

a) Mặt cong tham số trơn.

• **Mặt cong tham số:** U là miền (mở và liên thông) trong $\mathbb{R}^2$, mặt cong tham số Σ:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),\ (u, v) \in U.$$

• **Mặt trơn:** Mặt cong Σ trơn $\Leftrightarrow$:

1°/ Các hàm x, y, z có các đạo hàm riêng liên tục trên U

2°/ Hai vectơ $\overrightarrow{M}'_u = (x'_u, y'_u, z'_u)$, $\overrightarrow{M}'_v = (x'_v, y'_v, z'_v)$ là độc lập tuyến tính, $\forall\ (u, v) \in U$

• **Mặt đơn.** Mặt cong Σ là đơn $\Leftrightarrow$ ánh xạ

$(u, v) \mapsto M(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big)$ là đơn ánh

b) Mặt trơn với biểu diễn tham số

Cho mặt cong với tham số Σ: $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in U$, $U \subset \mathbb{R}^2$

Pháp tuyến của mặt Σ tại điểm $M(u, v)$ là

$\overrightarrow{N}(u, v) = (A, B, C)$, ở đó $A = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}$, $B = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}$, $C = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}$

Hay $\overrightarrow{N}(u, v) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$

Hàm số sau liên tục $(u, v) \mapsto \left\|\overrightarrow{N}(u, v)\right\| \equiv \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

c) Diện tích mặt cong. Cho mặt cong tham số Σ đơn, trơn $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in U$, U là miền trong $\mathbb{R}^2$.

Định nghĩa. Số thực không âm $\iint\limits_D \left\|\overrightarrow{N}(u, v)\right\| du\, dv$ gọi là diện tích của mặt S, kí hiệu là $\mu(S)$ hoặc $|S|$.

• Ta gọi $dS = \left\|\overrightarrow{N}(u, v)\right\| du\, dv$ là yếu tố diện tích của mặt S.

d) Diện tích mặt $z = f(x, y)$. Cho f có các đạo hàm riêng liên tục trên U, tập compact $D \subset U$, khi đó ta có $\mu(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dx\,dy$, ở đó S: $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Ví dụ 1. Tính diện tích phần của mặt đinh ốc

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = h\theta$, $0 \le r \le a$, $0 \le \theta \le 2\pi$.

Ví dụ 2.

Tìm diện tích phần của mặt paraboloit $z = 1 - x^2 - y^2$ nằm trong mặt trụ $x^2 + y^2 = 1$

B. TÍCH PHÂN BA LỚP

3.8. Tích phân ba lớp trên hình chữ nhật đóng

a) Phép phân hoạch hình hộp chữ nhật.

Cho hình hộp chữ nhật đóng $P = [a\,;\,a'] \times [b\,;\,b'] \times [c\,;\,c']$. Chia P thành những hình họp chữ nhật đóng $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$, đôi một có phần trong không giao nhau gọi là phép phân hoạch π. Kí hiệu d_i là đường chéo của hình chữ nhật V_i, $d(\pi) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$ gọi là đường kính của phân hoạch π.

Dãy $\{\pi_n\}$ những phép phân hoạch hình hộp chữ nhật P gọi là chuẩn tắc nếu $\lim\limits_{n\to\infty} d(\pi_n) = 0$.

b) Tổng tích phân và các tổng Dacbu trên, dưới của hàm số xác định trên hình hợp chữ nhật được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trong trường hợp tích phân hai lớp và tích phân một lớp.

c) Định nghĩa. Cho hàm số f xác định trên hình hộp chữ nhật đóng P, dãy chuẩn tắc $\{\pi_n\}$ các phép phân hoạch P; $\pi_n = \{\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_{P_n}\}$

Lấy tuỳ ý $Q_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta V_i$, $i = 1, 2, \ldots, P_n$. Đặt $\sigma_n(f, \pi_n, Q_1, \cdots, Q_n) = \sum\limits_{i=1}^{P_n} f(Q_i)\Delta V_i$

Nếu có $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = I \in \mathbb{R}$, với mọi dãy chuẩn tắc $\{\pi_n\}$ các phân hoạch của hình hộp P và mọi cách chọn điểm $Q_i \in \Delta V_i$, thì khi đó ta nói hàm f khả tích trên P và I gọi là tích phân ba lớp của hàm số f trên hình hộp chữ nhật đóng P, kí hiệu là

$$\iiint\limits_P f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz \quad \text{hoặc} \quad \iiint\limits_P f(x, y, z)\,dV$$

Ví dụ. Tính $\iiint\limits_D 2\,dx\,dy\,dz$, $D = [1\,;\,2] \times [2\,;\,4] \times [1\,;\,4]$

d) Điều kiện khả tích được thiết lập hoàn toàn tương tự như đối với tích phân hai lớp. Ở đây ta chỉ nêu một định lí về sự tồn tại tích phân

Định lí 1. Cho hàm số f bị chặn trên hình hộp chữ nhật đóng P, $E \subset P$, E là tập hợp có thể tích 0. Nếu f liên tục trên tập hợp $D \backslash E$ thì f khả tích trên P.

3.9. Tích phân ba lớp trên một tập hợp bị chặn

a) Định nghĩa. Cho tập bị chặn $B \subset \mathbb{R}^3$, hình hộp chữ nhật đóng $P \supset B$ và hàm số

$$f_0 = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in B \\ 0, & (x, y, z) \in P \setminus B \end{cases}.$$

Nếu hàm số f_0 khả tích trên P thì ta nói f khả tích trên B và định nghĩa

$$\iiint_B f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_P f_0(x, y, z)\,dx\,dy\,dz.$$

b) Tính chất. Tích phân ba lớp có các tính chất tương tự như tích phân hai lớp, cụ thể: tuyến tính, cộng tính, bảo toàn thứ tự, định lí giá trị trung bình, ...

c) Độ đo Jordan.

1°/ Tập bị chặn $B \subset \mathbb{R}^3$, $X(x, y, z) = 1$, $\forall (x, y, z) \in B$

Tập B đo được theo nghĩa Jordan $\Leftrightarrow$ hàm số X khả tích trên B. Khi đó thể tích của B là $V(B) \equiv |B| = \iiint_B X(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_B dx\,dy\,dz$.

Hệ quả 1. B bị chặn $\subset \mathbb{R}^3$, khi đó B đo được theo nghĩa Jordan $\Leftrightarrow$ $V(\partial B) = 0$

2°/ D đo được trong $\mathbb{R}^2$, f khả tích trên D, khi đó $V(S) = 0$, ở đó

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, z = f(x, y)\right\}.$$

Hệ quả 2. D là miền chính quy trong $\mathbb{R}^2$ và hàm số f liên tục, bị chặn trên D thì có $V(S) = 0$.

Hệ quả 3. Tập B bị chặn trong $\mathbb{R}^3$, ∂B là hợp của một họ hữu hạn $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_z$, $x = x(y, z)$, $(y, z) \in D_x$, $y = y(z, x)$, $(z, x) \in D_y$, các hàm x, y, z liên tục trên các miền chính quy đóng D_z, D_x, D_y, thì tập B đo được theo nghĩa Jordan

Ví dụ. Hình cầu, elipxoit, trụ tròn xoay là những tập hợp đo được theo nghĩa Jordan

d) Các lớp hàm khả tích: Tập B đo được trong $\mathbb{R}^3$, hàm số f liên tục, bị chặn trên B thì khả tích trên B.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!