GIẢI TÍCH I
BÀI 11

§2.4. ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH (TT)

II. Ứng dụng hình học

1. Tính diện tích hình phẳng

a) Đường cong cho trong toạ độ Descarter

+) $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$

$$S = \int_a^b |f_1(x) - f_2(x)|dx$$

+) $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, $y = c$, $y = d$

$$S = \int_c^d |g_1(y) - g_2(y)|dy$$

Ví dụ 1. Tính diện tích giới hạn bởi các đường:

a) $y = x(x - 1)(x - 2)$ và trục Ox

b) $y = x^2$ và $y = \frac{x^3}{3}$

c) $x = y^2(y - 1)$ và trục Oy

d) $y = x^2$, $y = \frac{x^2}{2}$, $y = 2x$

e) $x^2 + y^2 \le 8$, $y \ge \frac{x^2}{2}$

f) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$

g) $y^2 = x(x-1)^2$

h)(K59)

1) $x \ge y^2$ **,** $x^2 + y^2 = 2y$**.** **(**$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$**)**

2) $x \ge y^2$ **,** $x^2 + y^2 = -2y$**.** **(**$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$**)**

i)(K60)

1) $y \ge x + 1$**,** $y = \cos x$**,** $y \ge 0$**.** **(**$\frac{1}{2}$**)**

2) $y = x^2 + 2x - 3$ **,** $y = -x^2 - 2x + 3$**.** **(**$\frac{64}{3}$**)**

b) Đường cong cho dưới dạng tham số

+) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$, không kín. Khi đó $S = \int_\alpha^\beta |y(t)x'(t)|\,dt$

+) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $0 \le t \le T$, kín, giới hạn miền nằm bên trái. Khi đó

$$S = -\int_0^T y(t)x'(t)dt = \int_0^T x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^T [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt$$

Ví dụ 2. Tính diện tích giới hạn bởi đường cong:

a) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$

b) Cycloide: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$, $y \ge 0$

c) Astroide: $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$

d) Cardioide: $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$

e) $x = 3t^2$, $y = 3t - t^3$

f) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$

g) Lá Descarter: $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$

c) Đường cong trong toạ độ cực: $r = r(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$

Khi đó có $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$

Ví dụ 3. Tính diện tích giới hạn bởi đường cong:

a) $r = R$

b) $r = a\cos 2\varphi$ (hoa hồng 4 cánh)

c) $r = a\sin 3\varphi$ (hoa hồng 3 cánh)

d) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (cardioide)

e) $r^2 = a^2\sin 4\varphi$

f) $r = a\cos\varphi$, $r = a(\cos\varphi + \sin\varphi)$, miền chứa điểm $\left(\dfrac{a}{2}; 0\right)$

g) $r = 2a\cos 3\varphi$, $r \ge a$

2. Tính thể tích

a) Thể tích vật thể có tiết diện thẳng góc với Ox với diện tích $S(x)$ là hàm liên tục, $a \le x \le b$ là $V = \displaystyle\int_a^b S(x)dx$

Tương tự nếu vật thể có tiết diện thẳng góc với Oy với diện tích $S(y)$, $c \le y \le d$ thì ta có $V = \displaystyle\int_c^d S(y)dy$

b) Vật thể tròn xoay được tạo ra khi quay hình $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ quanh trục Ox có thể tích là $V = \pi\displaystyle\int_a^b y^2(x)dx$

Tương tự khi quay hình $x = x(y)$, $x = 0$, $y = c$, $y = d$ quanh trục Oy có thể tích là

$$V = \pi\int_c^d x^2(y)dy$$

– Khi quay $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$ quanh trục Oy tạo nên vật thể tròn xoay có thể tích là $V = 2\pi\int\limits_a^b xy(x)dx$

c) Khi quay $r = r(\varphi)$, $0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi$ quanh trục cực tạo nên vật thể tròn xoay có thể tích là $V = \dfrac{2\pi}{3}\int\limits_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi$

Ví dụ 4. Tính thể tích vật thể

a) $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ **b)** $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$

c) Quay $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \le x \le \pi$ quanh trục Ox ; trục Oy

d) $z = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2}$, $z = 1$

e) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - z^2 = 1$, $z = -1$, $z = 2$ **f)** $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$

g) $z = x^2 + 2y^2$, $x^2 + 2y^2 + z^2 = 6$

h) Quay một nhịp của đường xicloide: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ quanh trục Oy; Ox và $y = 2a$.

i)(K52) 1. Khi quay hình $y = \sqrt{x}\,\text{arccot}\,x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục Ox

$(\dfrac{\pi^2}{4} - \dfrac{\pi^3}{16} + \dfrac{\pi\ln 2}{2})$

2. Khi quay hình $y = \sqrt{x}\arctan x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ quanh trục Ox

$(\dfrac{\pi^3}{16} - \dfrac{\pi^2}{4} + \dfrac{\pi\ln 2}{2})$

k)(K56) 1) Khi quay hình $y = \dfrac{\sqrt{x\arctan x}}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, quanh trục Ox. $(\dfrac{\pi}{8})$

2) Khi quay hình $y = \dfrac{\sqrt{x\,\text{arccot}\,x}}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, quanh trục Ox. $(\dfrac{\pi^2 - \pi}{8})$

l)(K58) 1) Khi quay hình phẳng $y = e^x - 1$, $y = 0$, x=0, $x = 1$, quanh trục Oy. (π)

2) Khi quay hình $y = \ln(x+1)$, $y = 0$, x=0, $x = 1$, quanh trục Oy. $(\dfrac{\pi}{2})$

m)(K59) 1) Giới hạn bởi $x^2 + z^2 \le 4$, $y^2 + z^2 \le 4$. $(\dfrac{128}{3})$

2) Giới hạn bởi $x^2 + y^2 \le 4$, $x^2 + z^2 \le 4$. $(\dfrac{128}{3})$

n)(K60) 1) Giới hạn bởi : $z = 9 - y^2, z = 0, x = 3, x = 0$. (108)

o)(K62) Quay miền D : $y=\sin x, y=a, 0\le a\le 1, x=0, x=\frac{\pi}{2}$, quanh trục y=a.

Tìm a để thể tích là nhỏ nhất. $\left(\frac{\pi^2}{4}-2; a=\frac{2}{\pi}\right)$

3. Tính độ dài cung

a) AB: $y = y(x)$, $a \le x \le b$, $y'(x)$ liên tục trên $[a\ ;\ b]$, khi đó có $s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2(x)}dx$

b) AB: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, khi đó có $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$

c) AB: $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, khi đó có $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$

Ví dụ 5. Tính độ dài đường cong

a) $x^2 + y^2 = R^2$ **b)** $y^2 = x^3$ từ (0 ; 0) đến điểm có hoành độ $x = 4$.

c) $r = a(1 + \cos\varphi)$ **d)** $y=\frac{a}{2}\left(e^{x/a}+e^{-x/a}\right)$ **e)** $y=\int_{-\pi/2}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$

f) Tìm chu vi của tam giác cong giới hạn bởi Ox, $y = \ln\cos x$ và $y = \ln\sin x$

g)(K50) **1)** $x = t + \cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$ $(8-4\sqrt{2})$

2) $x = \sin 2t$, $y = 2t - \cos 2t$, $0 \le t \le \pi$ (8)

3) $y = \arcsin e^{-x}$, $0 \le x \le \ln 2$ $\left(\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$

h)(K51) $\begin{cases} x=\frac{1}{3}t^6 \\ y=4-\frac{1}{2}t^4 \end{cases}$, $0\le t\le \sqrt[4]{8}$ $\left(\frac{26}{3}\right)$

i)(K54) **1)** $\begin{cases} x=2t-\cos 2t \\ y=\sin 2t \end{cases}$, $0\le t\le \pi$ **(8)** **2)** $\begin{cases} x=\sin 2t \\ y=2t+\cos 2t \end{cases}$, $0\le t\le \pi$ **(8)**

k)(K56) **1)** $\begin{cases} x=1+t^3 \\ y=2-3t^2 \end{cases}$, $0\le t\le \sqrt{5}$ **(19)** **2)** $\begin{cases} x=2+3t^3 \\ y=3+2t^2 \end{cases}$, $0\le t\le \sqrt{3}$ **(14)**

3) $\begin{cases} x=1-t^3 \\ y=2+3t^2 \end{cases}$, $0\le t\le \sqrt{5}$ **(19)** **4)** $\begin{cases} x=2-3t^2 \\ y=3-2t^3 \end{cases}$, $0\le t\le \sqrt{3}$ **(14)**

l)(K57) 1) $\begin{cases} x = \cos t + \ln\tan\dfrac{t}{2}, & \dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \\ y = \sin t, \end{cases}$ **(ln 2)**

2) $\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t - \ln\cot\dfrac{t}{2}, & \dfrac{\pi}{3} \le t \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ **(**$-\ln\dfrac{\sqrt{3}}{2}$**)**

m)(K58) 1) $y = \int\limits_2^x \sqrt{[t\ln(t+1)]^2 - 1}\,dt$ **,** $2 \le x \le 3$ **(**$4\ln 4 - \dfrac{3}{2}\ln 3 - \dfrac{3}{4}$**)**

2) $y = \int\limits_3^x \sqrt{[(t+1)\ln t]^2 - 1}\,dt$ **,** $3 \le x \le 4$ **(**$12\ln 4 - \dfrac{15}{2}\ln 3 - \dfrac{11}{4}$**)**

n)(K60) 1. $y = \ln x$ **,** $1 \le x \le 2$ **(**$\sqrt{5} - \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} - \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$**)**

2. $y = \ln(x^2 - 1)$ **,** $2 \le x \le 3$ **(**$1 + \ln\dfrac{3}{2}$**)**

3. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$ **.** **(12)**

4. Tính diện tích mặt tròn xoay

a) $y = f(x)$, $a \le x \le b$ quay quanh trục Ox, $f'(x)$ liên tục:

$$\sigma = 2\pi\int\limits_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx \quad (y \ge 0)$$

+) Tương tự, $x = x(y)$, $c \le y \le d$ quay quanh trục Oy, $x'(y)$ liên tục:

$$\sigma = 2\pi\int\limits_c^d x\sqrt{1 + x'^2}\,dy \quad (x \ge 0)$$

b) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $\alpha \le t \le \beta$ quay quanh trục Ox

$$\sigma = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \quad (y \ge 0)$$

Tương tự, nếu quay quanh trục Oy

$$\sigma = 2\pi\int\limits_\alpha^\beta x(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt \quad (x \ge 0)$$

c) $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$ quay quanh trục cực

$$\sigma = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi) \sin\varphi \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}\, d\varphi$$

Ví dụ 6. Tính diện tích tròn xoay

a) $y = \tan x$, $0 \le x \le \pi/4$ quay quanh trục Ox

b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

c) $r = 2R \sin\varphi$ quay quanh trục cực

d) $r = a(1 + \cos\varphi)$ quay quanh trục cực

e) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ quay quanh trục Ox ; Oy

f)(K58) Quay đường $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $0 \le x \le a$, quanh trục Ox

$\left(\dfrac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)\right)$

g) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1$

h) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ quay quanh Oy; quay quanh $y = x$

i)(K53) Tính diện tích mặt tròn xoay tạo bởi đường tròn $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ quay quanhtrục Oy . $(12\pi^2)$

k)(K59) 1) $y = \cos x$, $\dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi$,quay quanh ox. $(\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})])$

2) $y = \sin x$, $-\dfrac{\pi}{2} \le x \le 0$, quay quanh ox. $(\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})])$

3) $r = 3(1 + \cos\varphi)$, quay quanh trục cực. $\left(\dfrac{288}{5}\pi\right)$

l)(K62) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \le x \le 1$, quanh trục ox một vòng. (8π)

Have a good understanding!