PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 15

§4. Đạo hàm, Tích phân, và tích các phép biến đổi

•Tích chập của hai hàm •Vi phân của phép biến đổi •Tích phân của phép biến đổi

1. Mở đầu

• Phép biến đổi Laplace của nghiệm của một phương trình vi phân đôi khi là tích của các biến đổi của hai hàm đã biết.

• Chẳng hạn, xét bài toán với giá trị ban đầu $x''+x=\cos t$; $x(0)=x'(0)=0$,

• Tác động phép biến đổi Laplace ta có:

$$s^2X(s)-sx(0)-x'(0)+X(s)=\frac{s}{s^2+1} \Leftrightarrow X(s)=\frac{s}{s^2+1}.\frac{1}{s^2+1}=\mathcal{L}\{\cos t\}.\mathcal{L}\{\sin t\}.$$

• Mặt khác ta có $\mathcal{L}\{\cos t.\sin t\}=\mathcal{L}\left\{\frac{1}{2}\sin 2t\right\}=\frac{1}{2}.\frac{2}{s^2+2^2}=\frac{1}{s^2+4}\neq\frac{s}{(s^2+1)^2}$.

• Do đó $\mathcal{L}\{\cos t\sin t\}\neq\mathcal{L}\{\cos t\}.\mathcal{L}\{\sin t\}$

• Rõ ràng rằng, để giải được bài toán trên, ta cần tìm hàm $h(t)$ sao cho

$$\mathcal{L}\{h(t)\}=\mathcal{L}\{\cos t\}.\mathcal{L}\{\sin t\}$$

2. Tích chập của hai hàm

Định nghĩa. Tích chập đối với phép biến đổi Laplace của hai hàm f, g liên tục từng khúc được định nghĩa với như sau: $(f*g)(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau,\quad t\geq 0$

• Tích chập là giao hoán

Ví dụ 1 a) Tính $(\cos t)*(\sin t)$

• Ta có $(\cos t)*(\sin t)=\int_0^t \cos\tau\sin(t-\tau)d\tau=\int_0^t\frac{1}{2}[\sin t-\sin(2\tau-t)]d\tau$

$$=\frac{1}{2}\left[\tau\sin t+\frac{1}{2}\cos(2\tau-t)\right]_{\tau=0}^{t}=\frac{1}{2}\left[t\sin t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{1}{2}\cos(-t)\right]=\frac{1}{2}t\sin t.$$

b) $t*e^{at}$ $\quad\left(\dfrac{e^{at}-at-1}{a^2}\right)$ **c)** $t^2*\cos t$ $\quad(2(t-\sin t))$

Định lí 1. • Giả sử $f(t),\ g(t)$ liên tục từng khúc với $t\geq 0$

• $|f(t)|,\ |g(t)|$ bị chặn bởi Me^{ct} khi $t\to+\infty$, các số M, c không âm.

Khi đó ta có $\mathcal{L}\{f(t)*g(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}.\mathcal{L}\{g(t)\}$ và $\mathcal{L}^{-1}\{F(s).G(s)\}=f(t)*g(t)$

Chứng minh. • Có $G(s)=\int_0^\infty e^{-su}g(u)du \overset{u=t-\tau}{=} \int_\tau^\infty e^{-s(t-\tau)}g(t-\tau)dt$

• Do đó $G(s) = e^{s\tau}\int_0^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt$

• Với $g(u) \equiv 0$ khi $u < 0$, có $F(s)G(s) = G(s)\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)G(s)d\tau$

• $= \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\left(e^{s\tau}\int_0^\infty e^{-st}g(t-\tau)dt\right)d\tau = \int_0^\infty\left(\int_0^\infty e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)dt\right)d\tau.$

• Từ giả thiết đã cho đổi thứ tự lấy tích phân có

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt = \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st}\left[f(t)*g(t)\right]dt,$$

• Do đó $F(s)G(s) = \mathcal{L}\{f(t)*g(t)\}$.

Ví dụ 2 a) Cho $f(t) = \sin 2t$, $g(t) = e^t$. Tính $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\}$

• Ta có $\mathcal{L}\{\sin 2t\} = \dfrac{2}{s^2+4}$, $\mathcal{L}\{e^t\} = \dfrac{1}{s-1}$

• $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\} = (\sin 2t)*e^t = \displaystyle\int_0^t e^{t-\tau}\sin 2\tau d\tau$

• $= e^t\displaystyle\int_0^t e^{-\tau}\sin 2\tau d\tau = e^t\left[\dfrac{e^{-\tau}}{5}(-\sin 2\tau - 2\cos 2\tau)\right]_0^t$

• $= e^t\left[\dfrac{e^{-t}}{5}(-\sin 2t - 2\cos 2t) - \dfrac{1}{5}(-2)\right]$

• $= \dfrac{2}{5}e^t - \dfrac{1}{5}\sin 2t - \dfrac{2}{5}\cos 2t$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4)}\right\}$ **(**$\dfrac{1}{4}(1-\cos 2t)$**)**

c) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s^2+k^2)}\right\}$ **(**$\dfrac{kt-\sin kt}{k^3}$**)**

d) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2+4s+5)}\right\}$ **(**$\dfrac{1}{5}\left[1-e^{-2t}(2\sin t+\cos t)\right]$**)**

3. Vi phân của phép biến đổi

Định lí 2. Giả sử $f(t)$ liên tục từng khúc với $t \ge 0$, $|f(t)| \le Me^{ct}$ khi $t \to +\infty$, các số M, c không âm thì có $\quad \mathcal{L}\{-tf(t)\} = F'(s),\ s > c \quad (3.1)$

$$\Leftrightarrow\ f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\} \quad (3.2)$$

Tổng quát ta có $\quad \mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n F^{(n)}(s),\quad n = 1,2,3,\ldots \quad (3.3)$

Chứng minh.

+) Từ giả thiết $\Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$ hội tụ tuyệt đối, đều và $\frac{\partial}{\partial s}\left(e^{-st} f(t)\right)$ liên tục, $s > c$

+) Do đó $F'(s) = \frac{d}{ds}\int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \frac{d}{ds}\left(e^{-st} f(t)\right)dt$

+) $= \int\limits_0^\infty e^{-st}\left(-tf(t)\right)dt = \mathcal{L}\{-tf(t)\}$

+) Ta chứng minh (3.3) bằng phương pháp quy nạp toán học. Thật vậy,

$n = 1$: ta đã có $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -F'(s)$

Giả sử đúng $n = k$, tức có $\mathcal{L}\left\{t^k f(t)\right\} = (-1)^k F^{(k)}(s)$

Ta chứng minh đúng với $n = k + 1$, thật vậy

$$\mathcal{L}\left\{t^{k+1} f(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{t.t^k f(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{t^k f(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\left((-1)^k F^{(k)}(s)\right) = (-1)^{k+1} F^{(k+1)}(s)$$

Ví dụ 1 a) Tìm $\mathcal{L}\left\{t^2 \sin kt\right\}$.

• Từ (3.3) ta có $\mathcal{L}\left\{t^2 \sin kt\right\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{k}{s^2 + k^2}\right) = \frac{d^2}{ds^2}\cdot\frac{k}{s^2 + k^2}$

• $= \frac{d}{ds}\left(\frac{-2ks}{\left(s^2 + k^2\right)^2}\right) = \frac{6ks^2 - 2k^3}{\left(s^2 + k^2\right)^3}$

b) $\mathcal{L}\left\{t^2 \cos 2t\right\}$ **(**$\frac{2s^3 - 24s}{\left(s^2 + 4\right)^3}, s > 0$**)** **c)** $\mathcal{L}\left\{te^{-t} \sin^2 t\right\}$

($\frac{2\left(3s^2 + 6s + 7\right)}{(s+1)^2\left(s^2 + 2s + 5\right)^2}, s > 0$**)**

d) $tx'' + (t-2)x' + x = 0,\ \ x(0) = 0,$

+) Tác động phép biến đổi Laplace và sử dụng định lí 2 ta có

+) $\mathcal{L}\{tx'\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{x'\} = -\frac{d}{ds}\left(sX(s) - x(0)\right),$

$\mathcal{L}\{tx''\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{x''\} = -\frac{d}{ds}\left[s^2 X(s) - s\,x(0) - x'(0)\right]$

+) Thay vào phương trình ta có $-\frac{d}{ds}\left[s^2X(s)-x'(0)\right]-\frac{d}{ds}\left[sX(s)\right]-2sX(s)+X(s)=0$

+) $s(s+1)X'(s)+4sX(s)=0$, là phương trình vi phân phân li biến số, có nghiệm là $X(s)=\frac{A}{(s+1)^4}$, $A\neq 0$

+) $x(t)=Ct^3e^{-t}$, $C\neq 0$

e) $tx''+(3t-1)x'+3x=0$ **(**$x(t)=Ct^2e^{-3t}, C\neq 0$**)**

f) $tx''+2(t-1)x'-2x=0$ **(**$x(t)=C\left(1-t-e^{-2t}-te^{-2t}\right), C\neq 0$**)**

g) 1°/ $tx''+(t-1)x'+x=0.\ \ x(0)=0$ **(**$x(t)=ct^2e^{-t},\ c\neq 0$**)**

2°/ $tx''+(t-2)x'+x=0.\ \ x(0)=0$ **(**$x(t)=ct^3e^{-t},\ c\neq 0$**)**

h) $tx''+(3t-1)x'+3x=0$ **,** $x(0)=0$ **(**$x(t)=ct^2e^{-3t},\ c\neq 0$**)**

Ví dụ 2 a) Tìm $\mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}$.

• Do đạo hàm của $\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)$ là hàm hữu tỉ, từ (3.2) ta có

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\}$$

• $=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/s^2}{1+(1/s)^2}\right\}=-\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s^2+1}\right\}=-\frac{1}{t}(-\sin t)$

• $\mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)\right\}=\frac{\sin t}{t}$.

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\ln\frac{s^2+1}{s^2+4}\right\}$ **(**$\frac{2(\cos 2t-\cos t)}{t}$**)** **c)** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{3}{s+2}\right\}$ **(**$\frac{e^{-2t}\sin 3t}{t}$**)**

4. Tích phân của phép biến đổi

Định lí 3. Cho $f(t)$ liên tục từng khúc đối với $t\geq 0$, $\exists\ \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t}$, $|f(t)|\leq Me^{ct}$ khi $t\to+\infty$, các số M, c không âm thì có $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}=\int_s^{\infty}F(\sigma)d\sigma,\ s>c$ (4.1)

$$\Leftrightarrow\ f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty}F(\sigma)d\sigma\right\}\quad (4.2)$$

Chứng minh.

+) Từ giả thiết $\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$ hội tụ tuyệt đối và đều, $s > c$

+) Ta có $\int_s^{\infty} F(\sigma)\,d\sigma = \int_s^{\infty}\left(\int_0^{\infty} e^{-\sigma t} f(t)\,dt\right)d\sigma$

+) Từ đó đổi thứ tự tích phân ta có $\int_s^{\infty} F(\sigma)\,d\sigma = \int_0^{\infty}\left(\int_s^{\infty} e^{-\sigma t} f(t)\,d\sigma\right)dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\sigma t}}{-t}\Big|_{\sigma=s}^{\infty} f(t)\,dt$

+) $= \int_0^{\infty} e^{-st}\frac{f(t)}{t}\,dt = L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}$

Ví dụ 1 a) Tìm $L\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\}$.

• Ta có $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sinh t}{t} = \lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\cosh t}{1} = 1$

• $L\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} L\{\sinh t\}\,d\sigma = \int_s^{\infty}\frac{d\sigma}{\sigma^2-1}$

• $= \frac{1}{2}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{\sigma-1}-\frac{1}{\sigma+1}\right)d\sigma = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sigma-1}{\sigma+1}\right]_s^{\infty} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}$

• $L\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1}$

b) $L\left\{\frac{1-\cos 2t}{t}\right\}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}\ln\left(s^2+4\right)-\ln s,\ s>0\right)$

c) $L\left\{\frac{e^t-e^{-t}}{t}\right\}$ $\qquad$ $\left(\ln(s+1)-\ln(s-1),\ s>1\right)$

Ví dụ 2 a) Tìm $L^{-1}\left\{\frac{2s}{\left(s^2-1\right)^2}\right\}$.

• Từ (4.2) có $L^{-1}\left\{\frac{2s}{\left(s^2-1\right)^2}\right\} = tL^{-1}\left\{\int_s^{\infty}\frac{2\sigma}{\left(\sigma^2-1\right)^2}d\sigma\right\}$

• $= tL^{-1}\left\{\left[\frac{-1}{\sigma^2-1}\right]_s^{\infty}\right\} = tL^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\} = t.\sinh t$

• $f(t) = t\sinh t$ thoả mãn định lí 3.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{\left(s^2-1\right)^2}\right\} = t\sinh t.$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+1\right)^3}\right\}$ $\left(\frac{1}{8}\left(t\sin t - t^2\cos t\right)\right)$

5. Phép biến đổi của hàm liên tục từng khúc

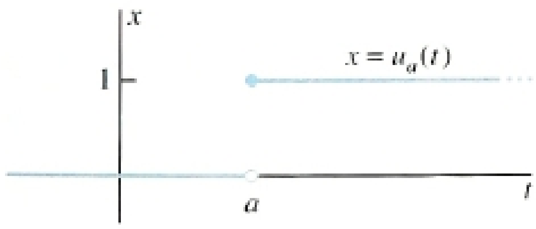
a) Đặt vấn đề

• Các mô hình toán học trong hệ cơ học hay hệ điện thường liên quan đến các hàm không liên tục tương ứng với các lực bên ngoài bất ngờ đảo chiều bật hay tắt.

• Hàm đơn giản bật, tắt là hàm bậc thang đơn vị tại $t = a$ (hàm Heaviside)

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \ge a \end{cases}$$

có đồ thị như sau



Hình 4.5.1. Đồ thị của hàm đơn vị bậc thang

b) Phép tịnh tiến trên trục t

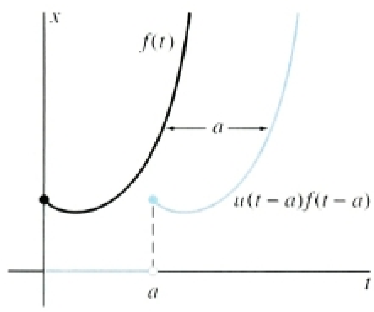
Định lí 4. Nếu $\mathcal{L}\{f(t)\}$ tồn tại với $s > c$, thì có

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f\}$$

(2.1)

và $$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = u(t-a)f(t-a) = u(t-a)\mathcal{L}^{-1}\{F\}(t-a),\ \ s > c+a$$

(2.2)



Hình 4.5.2. Tịnh tiến của $f(t)$ về phía phải a đơn vị

Chứng minh. +) Ta có $e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau)\,d\tau$

+) Đổi biến $t = \tau + a$, ta có $e^{-as}F(s) = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt$

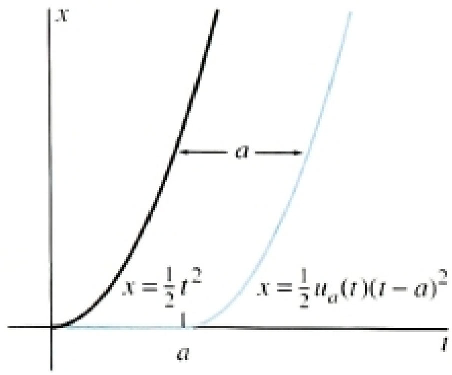
+) Do $u(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ f(t-a), & t \geq a \end{cases}$, nên có

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(t-a) f(t-a)\,dt = \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\}.$$

Ví dụ 1. Cho $f(t) = \frac{1}{2}t^2$. Tính $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^3}\right\}$

• Từ (2.2) có $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^3}\right\} = u(t-a)\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\}(t-a) = u(t-a)\frac{1}{2}(t-a)^2$

• $= \begin{cases} 0 & t < a \\ \frac{1}{2}(t-a)^2 & t \geq a \end{cases}$



Hình 4.5.3. Đồ thị của biến đổi ngược trong Ví dụ 1

Ví dụ 2. Cho $g(t) = \begin{cases} 0 & t < 3 \\ t^2 & t \geq 3 \end{cases}$. Tìm $\mathcal{L}\{g(t)\}$

• Do $g(t) = t^2$ nên có $f(t) = (t+3)^2$

• $F(s) = \mathcal{L}\{t^2 + 6t + 9\} = \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}$

• Từ định lí có $\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-3)f(t-3)\} = e^{-3s}F(s) = e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right)$

Ví dụ 3 a) Tìm $\mathcal{L}\{f(t)\}$ nếu $f(t) = \begin{cases} \cos 2t & 0 \leq t < 2\pi \\ 0 & t \geq 2\pi \end{cases}$

• $f(t)=\left[1-u\left(t-2\pi\right)\right]\cos 2t=\cos 2t-u(t-2\pi)\cos 2\left(t-2\pi\right)$

• Từ định lí 1 có $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{\cos 2t\right\}-e^{-2\pi s}\mathcal{L}\left\{\cos 2t\right\}=\dfrac{s(1-e^{-2\pi s})}{s^2+4}$.

b) $f(t)=\begin{cases}1, & 1\le t\le 4\\ 0, & 0\le t<1 \text{ và } t>4\end{cases}$ $\left(F(s)=\dfrac{e^{-s}-e^{-4s}}{s}\right)$

c) $f(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & 0\le t\le 2\\ 0, & t>2\end{cases}$ $\left(F(s)=\dfrac{s\left(1-e^{-2s}\right)}{s^2+\pi^2}\right)$

d) $f(t)=\begin{cases}t, & 0\le t\le 1\\ 1, & t>1\end{cases}$ $\left(F(s)=\dfrac{1-e^{-s}}{s^2}\right)$

Ví dụ 4. Một vật nặng 32 lb (1 lb = 450 g) được gắn tự do vào một lò xo bị căng ra 1 ft bởi một lực 4 lb. Khối lượng này ban đầu ở vị trí cân bằng. Bắt đầu tại thời điểm $t=0$ (lần thứ hai), một lực ở bên ngoài $f(t)=\cos 2t$ được tác động vào vật này. Tuy nhiên tại thời điểm $t=2\pi$ lực này bị mất đi (đột ngột không liên tục). Sau đó vật này lại tiếp tục chuyển động một cách tự do. Tìm hàm vị trí $x(t)$ của vật đã cho.

• Chuyển về bài toán giá trị ban đầu $x''+4x=f(t);\ x(0)=x'(0)=0$

ở đó $f(t)=\begin{cases}\cos 2t, & 0\le t<2\pi\\ 0, & t\ge 2\pi\end{cases}$

• Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế ta có $(s^2+4)X(s)=F(s)=\dfrac{s(1-e^{-2\pi s})}{s^2+4}$,

• $X(s)=\dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}-e^{-2\pi s}\dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}$.

• Do $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}\right\}=\dfrac{1}{4}t\sin 2t$;

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2\pi s}\dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}\right\}=u(t-2\pi).\dfrac{t-2\pi}{4}\sin 2(t-2\pi)$$

• Từ đó ta có $x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{\left(x^2+4\right)^2}\right\}-\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-2\pi s}\dfrac{s}{\left(s^2+4\right)^2}\right\}$

$$=\frac{1}{4}t\sin 2t-u(t-2\pi).\frac{t-2\pi}{4}\sin 2(t-2\pi)=\frac{1}{4}[t-u(t-2\pi).(t-2\pi)]\sin 2t$$

- $x(t)=\begin{cases}\frac{1}{4}t\sin 2t, & t<2\pi,\\ \frac{1}{2}\pi\sin 2t, & t\geq 2\pi.\end{cases}$

Ta thấy, vật dao động với tần số $\omega=2$ và với biên độ tăng tuyến tính đến khi lực được bỏ đi tại thời điểm $t=2\pi$. Sau đó, vật tiếp tục chuyển động với cùng tần số nhưng với biên độ dao động $\frac{\pi}{2}$. Lực $F(t)=\cos 2t$ có thể tiếp tục được cộng hưởng, tuy nhiên ta thấy nó bị biến mất ngay lập tức tại thời điểm nó không còn tác động nữa.

Ví dụ 5. Giải bài toán giá trị ban đầu $mx''+cx'+kx=f(t),\ \ x(0)=x'(0)=0$

a) $m=1, k=4, c=5, f(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t<2\\ 0, & t\geq 2\end{cases}$

$$\left(x(t)=g(t)-u(t-2)g(t-2),\ g(t)=\frac{1}{12}\left(3-4e^{-t}+e^{4t}\right)\right)$$

b) $m=1, k=1, c=0,\ f(t)=\begin{cases}t, & 0\leq t<1\\ 0, & t\geq 1\end{cases}$

$$\left(x(t)=g(t)-u(t-1)\left[g(t-1)+h(t-1)\right],\ g(t)=t-\sin t,\ \ h(t)=1-\cos t\right)$$

c) 1°/ $x''+9x=f(t),\ \ x(0)=x'(0)=0,\ f(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t<\pi\\ 0, & t\geq\pi\end{cases}$

$$\left(x(t)=\frac{1}{9}\left[1-u(t-\pi)-\left(1+u(t-\pi)\right)\cos 3t\right]\right)$$

2°/ $x''+16x=f(t),\ \ x(0)=x'(0)=0,\ f(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t<\pi\\ 0, & t\geq\pi\end{cases}$

$$\left(x(t)=\frac{1}{16}[1-u(t-\pi)][1-\cos 4(t-\pi)]\right)$$

d) $x''+x=f(t),\ \ f(t)=\begin{cases}1 & 0\leq t<1\\ 0 & t\geq 1\end{cases}\ \ , x(0)=0=x'(0)$

$$\left(x(t)=1-\cos t-[1-\cos(t-1)]u(t-1)\right)$$

BẢNG 2

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1	$e^{at}f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s-a)$
2	$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s), a>0$
3	$t^n f(t)$	$(-1)^n \dfrac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
4	$(f*g)(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s).\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$
5	$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty}\mathcal{L}\{f(t)\}(\tau)d\tau$
6	$f^{(n)}(t)$	$s^n\mathcal{L}\{f(t)\}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\dots-f^{(n-1)}(0)$
7	$\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$

BẢNG 3

	$F(s)$	$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$
1	$F(s)$	$-\dfrac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}(t)$
2	$F(s)$	$t\mathcal{L}^{-1}\left\{\int_s^{\infty}F(\delta)d\delta\right\}(t)$
3	$F(s-a)$	$e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$
4	$e^{-as}F(s)$	$u(t-a)\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t-a)$
5	$F(s)G(s)$	$\left(\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}*\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}\right)(t)$
6	$\dfrac{F(s)}{s}$	$\int_0^t \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(\tau)d\tau$

THE END.

Thank you and good bye!