PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 6

§ 6 Chuỗi Fourier (TT)

• Khai triển hàm chẵn, lẻ • Khai triển hàm tuần hoàn chu kì bất kì

3. Khai triển hàm chẵn, lẻ

3.1. Nếu $f(x)$ là hàm số chẵn $\Rightarrow f(x)\cos kx$ là hàm chẵn, $f(x)\sin kx$ là hàm lẻ

$$\Rightarrow a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx; \quad b_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$$

Ví dụ 1. $f(x) = \begin{cases} \pi - x, & 0 \le x \le \pi \\ \pi + x, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ tuần hoàn với chu kì 2π, khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier.

+) $f(-x) = f(x)$

+) $b_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$

+) $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \pi$

+) $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos kx\,dx = \frac{2}{k}\sin kx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,d\left(\frac{\sin kx}{k}\right)$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin kx}{k}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin kx}{k}dx\right] = \frac{2}{\pi}.\frac{-\cos kx}{k^2}\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}(1 - \cos k\pi) = \frac{2}{\pi k^2}\left(1 - (-1)^k\right)$$

+) $f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi k^2}\left(1 - (-1)^k\right)\cos kx = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$

Ví dụ 2. Khai triển thành chuỗi Fourier theo các hàm số cosin của các hàm số sau

a) $f(x) = 1 - x, \quad 0 \le x \le \pi$ $\quad \left(1 - \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\right)$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ $\quad \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos(4n+1)x}{4n+1} - \frac{\cos(4n+3)x}{4n+3}\right]\right)$

c) $f(x) = x(\pi - x), \ 0 < x < \pi$ $\quad \left(\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^2}\right)$

3.2. Nếu hàm $f(x)$ là hàm số lẻ $\Rightarrow f(x)\cos kx$ là hàm số lẻ còn $f(x)\sin kx$ là hàm chẵn

$$\Rightarrow a_k = 0; \quad b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx, \forall k \in \mathbb{N}$$

Ví dụ 3. Cho hàm số $f(x) = x,\ -\pi \le x \le \pi$, tuần hoàn với chu kì 2π, khai triển hàm $f(x)$ thành chuỗi Fourier

+) Hàm $f(x)$ lẻ

+) $a_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}^*$

+) $b_k = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx\,dx = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x d\left(\dfrac{-\cos kx}{k}\right)$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x\cos kx}{k}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos kx}{k}dx\right) = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\pi\cos k\pi}{k} + \frac{\sin kx}{k^2}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}$$

+) $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{2}{k}\sin kx$

Ví dụ 4. Khai triển thành chuỗi Fourier theo các hàm số sin của các hàm số sau

a) $f(x) = \pi - x,\ 0 < x < \pi$ $\qquad\left(2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}\right)$

b) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$ $\qquad\left(\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin nx\right)$

c) $f(x) = x(\pi - x),\ 0 < x < \pi$ $\qquad\left(\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}\right)$

3.3 Nếu $f(x)$ tuần hoàn với chu kì $2l$, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên đoạn $[-l;\ l]$. Đổi biến $x' = \dfrac{\pi}{l}x \Rightarrow f(x) = f\left(\dfrac{l}{\pi}x'\right) \equiv F(x')$ tuần hoàn với chu kì 2π

Sử dụng khai triển Fourier cho hàm này có

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x + b_n\sin n\frac{\pi}{l}x\right),$$

ở đó $a_0 = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)dx$, $a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos n\frac{\pi x}{l}dx,\quad \forall n \in \mathbb{N}$;

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin n\frac{\pi x}{l}dx,\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nhận xét. Công thức này nhận được từ công thức (1.3) khi thay π bởi l, thay x bởi $\dfrac{\pi}{l}x$

Ví dụ 5. Khai triển hàm tuần hoàn với chu kì 2, $f(x) = x^2,\ -1 \le x \le 1$ thành chuỗi Fourier

+) $f(x)$ chẵn

+) $b_k = 0,\ k = 1, 2, \dots$

+) $a_0 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

+) $a_n = \int_{-1}^{1} x^2 \cos n\pi x\, dx = 2\int_0^1 x^2 \cos n\pi x\, dx$

$$= 2\int_0^1 x^2 d\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right) = 2\left[\left.\frac{x^2}{n\pi}.\sin n\pi x\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}.2x dx\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi}\int_0^1 x d\left(\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right) = \frac{4}{n\pi}\left[\left. x.\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right|_0^1 - \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi} dx\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left[\frac{\cos n\pi}{n\pi} - \left.\frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\right|_0^1\right] = (-1)^n \frac{4}{n^2\pi^2}$$

+) $f(x) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2\pi^2} \cos n\pi x$

Ví dụ 6. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số

a) $f(x) = \begin{cases} 0, & -3 \le x \le 0 \\ \frac{x}{3}, & 0 < x \le 3 \end{cases}$ với chu kì $2l = 6$

$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3} + \frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)\right)$

b) $f(x) = \begin{cases} 0, & -2 \le x \le 0 \\ \frac{x}{2}, & 0 < x \le 2 \end{cases}$ với chu kì $2l = 4$

$\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sum\left(\frac{2}{\pi(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2} + \frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\right)\right)$

c) Khai triển hàm tuần hoàn $T = 4$ thành chuỗi Fourier.

1) $f(x) = x^2$, $-2 \le x \le 2$ $\quad \left(\frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right)$

2) $f(x) = x|x|$, $-2 \le x \le 2$ $\quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2},\ b_n = \begin{cases} \frac{8}{(2k-1)\pi} - \frac{32}{(2k-1)^3\pi^3}, & n = 2k-1 \\ -\frac{8}{2k\pi}, & n = 2k \end{cases}\right.$

3.4. Nếu $f(x)$ đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[a;\ b]$, muốn khai triển $f(x)$ thành chuỗi Fourier, ta xây dựng hàm số $g(x)$ tuần hoàn với chu kì $\geq (b-a)$ sao cho $g(x)=f(x),\quad \forall x\in[a;\ b]$.

Khai triển hàm $g(x)$ thành chuỗi Fourier thì tổng của chuỗi bằng $f(x)$ tại $\forall x\in[a;\ b]$ (trừ ra có chăng là các điểm gián đoạn của $f(x)$). Vì hàm $g(x)$ không duy nhất nên có nhiều chuỗi Fourier biểu diễn hàm số $f(x)$, nói riêng nếu hàm số $g(x)$ chẵn thì chuỗi Fourier của nó chỉ gồm những hàm số cosin, còn nếu hàm số $g(x)$ lẻ thi chuỗi Fourier của nó chỉ gồm những hàm số sin.

Ví dụ 7. Khai triển hàm số $f(x)=\dfrac{x}{2},\quad 0<x<2$ thành chuỗi Fourier theo các hàm số cosin và thành chuỗi Fourier theo các hàm số sin.

a) +) Xét hàm $g(x)=\dfrac{|x|}{2},\ -2\leq x\leq 2$, tuần hoàn chu kì 4

+) $g(x)\equiv f(x),\ 0<x<2$

+) Khai triển Fourier hàm $g(x)$ có $g(x)$ chẵn, do đó

$$b_k=0,\ k=1,2,\ldots$$

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|dx=\int_0^2 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=2$$

$$a_k=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2}|x|\cos\frac{k\pi x}{2}dx=\int_0^2 x\cos\frac{k\pi x}{2}dx=\int_0^2 xd\left(\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}\right)$$

$$=\left.\frac{2}{k\pi}x\sin\frac{k\pi x}{2}\right|_0^2-\int_0^2\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{2}dx=\left(\frac{2}{k\pi}\right)^2\left.\cos\frac{k\pi x}{2}\right|_0^2=\frac{4}{k^2\pi^2}\left((-1)^k-1\right)$$

+) $g(x)=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{k^2\pi^2}\left((-1)^k-1\right)\cos\frac{k\pi x}{2}=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{8}{(2n+1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2},\ |x|\leq 2$

+) $f(x)=1-\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2},\ 0<x<2$

b) $f(x)=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\frac{k\pi x}{2},\ 0<x<2$

c) 1) Khai triển thành chuỗi Fourier theo hàm số cosine

$f(x)=\dfrac{x}{3},\ 0\leq x<3$ $\qquad$ $\left(\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{3}\right)$

2) Khai triển thành chuỗi Fourier theo hàm số sine

$f(x)=\dfrac{x}{3},\ 0\leq x<3$ $\qquad$ $\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right)$

CHƯƠNG II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN
§1. MỞ ĐẦU

• **Đặt vấn đề**

• Các quy luật trong vũ trụ đều được viết theo ngôn ngữ Toán học

• Môn Đại số đủ để giải rất nhiều bài toán tĩnh

• Tuy nhiên, hầu hết các hiện tượng tự nhiên đáng quan tâm lại liên quan tới sự biến đổi và thường được mô tả bởi các phương trình có liên quan đến sự thay đổi về lượng, đó là **phương trình vi phân.**

1. Khái niệm cơ bản

• **Phương trình vi phân** là phương trình có dạng $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$ (1)

trong đó x là biến số độc lập, $y = y(x)$ là hàm số phải tìm, $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ là các đạo hàm của nó.

• **Cấp của phương trình vi phân.** Là cấp cao nhất của đạo hàm của y có mặt trong phương trình (1).

• **Phương trình vi phân tuyến tính.** Là phương trình vi phân (1) khi F là bậc nhất đối với $y, y', y'', \cdots, y^{(n)}$. Dạng tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính cấp n là

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = b(x)$$

trong đó $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ là những hàm số cho trước.

• **Nghiệm của phương trình vi phân** (1) là hàm số thoả mãn (1)

• **Giải phương trình vi phân** (1) là tìm tất cả các nghiệm của nó.

Ví dụ 1. Giải phương trình vi phân sau

a) $y' = \cos x$ b) $y' = \ln x$ c) $y' = x^5e^x$ d) $y' = x^4 \sin x$

2. Một số ứng dụng

a) Sinh trưởng tự nhiên và thoái hoá

• Sự tăng dân số: $\dfrac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P$, β là tỉ lệ sinh, δ là tỉ lệ chết

b) Lãi luỹ tiến $\dfrac{dA}{dt} = rA$, A là lượng đô la trong quỹ tiết kiệm tại thời điểm t, tính theo năm, r là tỉ lệ lãi luỹ tiến tính theo năm.

c) Sự phân rã phóng xạ $\dfrac{dN}{dt} = -kN$, k phụ thuộc vào từng loại đồng vị phóng xạ

d) Giải độc $\dfrac{dA}{dt} = -\lambda A$, λ là hằng số giải độc của thuốc

e) Phương trình tăng trưởng tự nhiên $\dfrac{dx}{dt} = kx$

Ví dụ 2. Theo số liệu tại **www.census.gov** vào giữa năm 1999 số dân toàn thế giới đạt tới 6 tỉ người và đang tăng thêm khoảng 212 ngàn người mỗi ngày. Giả sử là mức tăng dân số tự nhiên tiếp tục với tỷ lệ này, hỏi rằng:

(a) Tỷ lệ tăng k hàng năm là bao nhiêu?

(b) Vào giữa thế kỉ 21, dân số toàn thế giới sẽ là bao nhiêu?

(c) Hỏi sau bao lâu số dân toàn thế giới sẽ tăng gấp 10 lần–nghĩa là đạt tới 60 tỉ mà các nhà nhân khẩu học tin là mức tối đa mà hành tinh của chúng ta có thể cung cấp đầy đủ lương thực?

(a) Ta tính dân số theo tỉ và thời gian theo năm. Lấy $t = 0$ ứng với giữa năm 1999, nên $P_0 = 6$. Sự kiện P tăng lên 212 ngàn hay là 0,000212 tỉ người trong một ngày tại $t = 0$ có nghĩa là $P'(0) = (0,000212)(365,25) \approx 0,07743$ tỉ một năm.

Từ phương trình tăng dân số tự nhiên $P' = kP$ với $t = 0$, ta nhận được

$$k = \frac{P'(0)}{P(0)} \approx \frac{0,07743}{6} \approx 0,0129,$$

Như vậy, số dân thế giới đang tăng theo tỉ lệ khoảng 1,29% một năm vào năm 1999. Với giá trị k này, ta có hàm cho số dân thế giới là $P(t) = 6e^{0,0129t}$.

(b) Với $t = 51$ ta có dự báo $P(51) = 6e^{(0,0129)(51)} \approx 11,58$ (tỉ)

sẽ là số dân của thế giới vào giữa năm 2050 (như thế kể từ năm 1999 mới qua một nửa thế kỉ, dân số thế giới đã tăng gần gấp đôi).

(c) Dân số thế giới sẽ đạt tới 60 tỉ khi mà $60 = 6e^{0,0129t}$; nghĩa là khi $t = \dfrac{\ln 10}{0,0129} \approx 178$; tức là năm 2177.

f) Quá trình nguội đi và nóng lên $\dfrac{dT}{dt} = k(A - T)$, k là hằng số dương, A là nhiệt độ của môi trường

Ví dụ 3. Một miếng thịt 4-lb (1 lb ≈ 450 gam) có nhiệt độ ban đầu là 50^0 F ($1^0 C = 3,38^0 F$)), được cho vào một cái lò 375^0 F vào lúc 5 giờ chiều. Sau 75 phút người ta thấy nhiệt độ miếng thịt là 125^0 F. Hỏi tới khi nào miếng thịt đạt nhiệt độ 150^0 F (vừa chín tới)?

Giải. Ta tính thời gian theo phút và coi lúc 5 giờ chiều là t = 0. Ta cũng giả thiết (có vẻ không thực tế) rằng tại mọi lúc, nhiệt độ T(t) của cả miếng thịt là đều như nhau. Ta có $T(t) < A = 375$, $T(0) = 50$ và $T(75) = 125$. Vì thế

$$\frac{dT}{dt} = k(375 - T);\ \int \frac{dT}{375 - t} = \int k dt;\ -\ln(375 - T) = kt + C;\ 375 - T = Be^{-kt}.$$

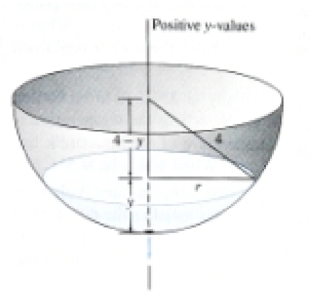
Vì $T(0) = 50$ nên $B = 325$, vậy $T = 375(1 - e^{-kt})$. Ta lại thấy $T = 125$ khi $t = 75$. Thay các giá trị đó vào phương trình trên sẽ được $k = -\dfrac{1}{75}\ln(\dfrac{250}{325}) \approx 0,0035.$

Sau cùng, ta giải phương trình $150 = 375 - 325e^{(-0,0035)t}$,

đối với $t = -[\ln(225/325)]/(0,0035) \approx 105$ (phút) là tất cả thời gian nướng thịt theo yêu cầu đặt ra. Bởi vì miếng thịt được đặt vào lò lúc 5 giờ chiều, ta sẽ lấy nó ra khỏi lò vào khoảng 6 giờ 45 phút.

g) Quy luật Torricelli $A(y)\dfrac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$, ở đó, v là thể tích nước trong thùng, $A(y)$ là diện tích tiết diện thẳng nằm ngang của bình ở độ cao y so với đáy, $\sqrt{2gy}$ là tốc độ nước thoát ra khỏi lỗ hổng

Ví dụ 4. Một cái bát dạng bán cầu có bán kính miệng bát là 4ft ($ft \approx 0.3048$ m)được chứa đầy nước vào thời điểm t = 0. Vào thời điểm này, người ta mở một lỗ tròn đường kính 1in (in $\approx$ 2,54 cm) ở đáy bát. Hỏi sau bao lâu sẽ không còn nước trong bát?



Tháo nước từ một bát bán cầu

Giải. Ta nhận thấy trong hình, dựa vào tam giác vuông có $A(y) = \pi r^2 = \pi[16-(4-y)^2] = \pi(8y - y^2)$, với $g = 32\text{ft/s}^2$, phương trình trên có

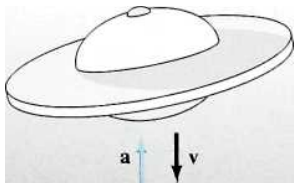
$$\pi(8y - y^2)\frac{dy}{dt} = -\pi\left(\frac{1}{24}\right)^2\sqrt{2.32y}\,;$$

$$\int (8y^{1/2} - y^{3/2})dy = -\int \frac{1}{72}dt\,;\quad \frac{16}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2} = -\frac{1}{72}t + C.$$

Do $y(0) = 4$, ta có $C = \dfrac{16}{3}\cdot 4^{3/2} - \dfrac{2}{5}4^{5/2} = \dfrac{448}{15}$.

Bình hết nước khi $y = 0$, nghĩa là khi $t = 72\cdot\dfrac{448}{15} \approx 2150\ (s)$; tức là khoảng 35 phút 50 giây. Có thể coi là sau gần 36 phút, bát sẽ không còn nước.

Ví dụ 5. Một đĩa bay rơi xuống bề mặt Mặt trăng với vận tốc 450m/s. Tên lửa hãm của nó, khi cháy, sẽ tạo ra gia tốc 2,5m/s^2 (gia tốc trọng trường trên mặt trăng được coi là bao gồm trong gia tốc đã cho). Với độ cao nào so với bề mặt Mặt trăng thì tên lửa cần được kích hoạt để đảm bảo "sự tiếp đất nhẹ nhàng", tức là $v = 0$ khi chạm đất?

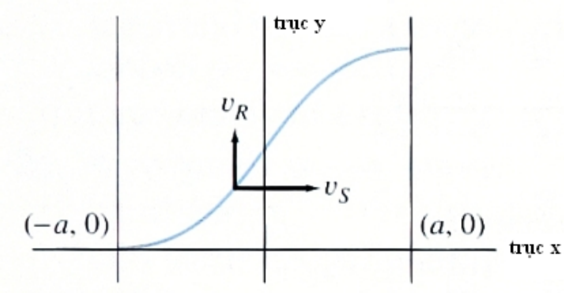


Đĩa bay trong Ví dụ 5

- Phương trình: $v(t) = 2{,}5t - 450$.
- Đáp số: $x_0 = 40{,}5$ km.

Do đó tên lửa hãm nên được kích hoạt khi đĩa bay ở độ cao 40,5km so với bề mặt Mặt trăng, và nó sẽ tiếp đất nhẹ nhàng sau 3 phút giảm tốc.

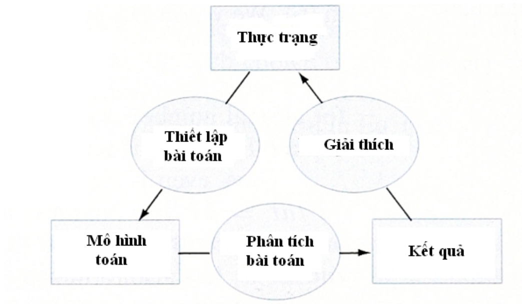
Ví dụ 6. Bài toán người bơi



Bài toán về người bơi

Phương trình vi phân cho quỹ đạo của người bơi qua sông là $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v_0}{v_s}\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)$

3. Các mô hình toán

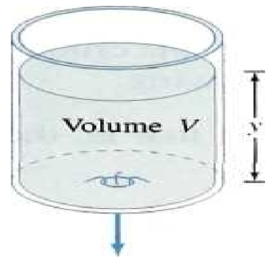


Quá trình mô hình toán.

Ví dụ 1. Suất biến đổi theo thời gian của dân số $P(t)$ trong nhiều trường hợp đơn giản với tỷ lệ sinh, tử không đổi thường tỷ lệ với số dân. Nghĩa là: $\frac{dP}{dt} = kP$

(1)

với k là hằng số tỷ lệ.



Quy luật thoát nước của **Torricelli**.

Phương trình (1) mô tả quá trình thoát nước khỏi bể chứa.

Ví dụ 2. Quy luật của Torricelli nói rằng suất biến đổi theo thời gian của khối lượng nước V trong một bể chứa tỷ lệ với căn bậc hai của độ sâu y của nước trong bể:

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}, \text{ với } k \text{ là một hằng số.}$$

Nếu bể chứa là một hình trụ tròn xoay với diện tích đáy là A, thì $V = Ay$, và $dV/dt = A.(dy/dt)$. Khi đó phương trình có dạng: $\frac{dy}{dt} = -h\sqrt{y}$, trong đó $h = k/A$ là một hằng số.

Ví dụ 3. Quy luật giảm nhiệt của Newton có thể phát biểu như sau: Suất biến đổi đối với thời gian của nhiệt độ $T(t)$ của một vật thể tỷ lệ với hiệu số giữa T và nhiệt độ A của môi trường xung quanh. Nghĩa là $\frac{dT}{dt} = -k(T - A).$

(2)

trong đó, k là một hằng số dương. Nhận thấy rằng nếu $T > A$, thì $dT/dt < 0$, do đó nhiệt độ là một hàm giảm theo t và vật thể nguội đi. Nhưng nếu $T < A$, thì $dT/dt > 0$, và T sẽ tăng lên.

Quy luật giảm nhiệt của Newton,

Phương trình (2) mô tả một hòn đá nóng bị nguội đi trong nước

Vậy, một quy luật vật lý đã được diễn giải thành một phương trình vi phân. Nếu ta đã biết các giá trị của k và A, thì ta có thể tìm được một công thức tường minh cho T(t), rồi dựa vào công thức đó, ta có thể dự đoán nhiệt độ sau đó của vật thể

§ 2. Phương trình vi phân cấp một

- Đại cương về phương trình vi phân cấp 1
- Phương trình vi phân khuyết

• Đặt vấn đề

1. Đại cương về phương trình vi phân cấp 1

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp 1 là $F(x, y, y') = 0$ (1) hoặc $y' = f(x, y)$ (2)

Định lí về sự tồn tại và duy nhất nghiệm

- $f(x, y)$ liên tục trên miền $D \subset \mathbb{R}^2$
- $(x_0; y_0) \in D$

$\Rightarrow$ trong lân cận $U_\varepsilon(x_0)$ nào đó của x_0, tồn tại ít nhất một nghiệm $y = y(x)$ của phương trình (2) thoả mãn $y(x_0) = y_0$. Nếu ngoài ra $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ liên tục trên D thì nghiệm trên là duy nhất

Chú ý

- Việc vi phạm điều kiện của định lí có thể sẽ phá vỡ tính duy nhất

• $\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$

• $f'_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ gián đoạn tại (0 ; 0)

• Có hai nghiệm thoả mãn: $y_1 = x^2$; $y_2 = 0$.

- Vi phạm giả thiết định lí có thể làm bài toán vô nghiệm

• $x\frac{dy}{dx} = 2y$, $y(0) = 1$

• Nghiệm: $\frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow y = Cx^2$

• $y(0) = 1$, không có C nào $\Rightarrow$ vô nghiệm.

- Có hay không phương trình vi phân không thoả mãn giả thiết và có duy nhất nghiệm?
- Bài toán Cauchy $y' = f(x, y),\ \ y(x_0) = y_0$
- Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân (2) là hàm số $y = \varphi(x, C)$:
    - $\varphi(x, C)$ thoả (2) với mọi C
    - $\forall (x_0\ ;\ y_0) \in D,\ \exists C = C_0 :\ \varphi(x, C_0)\big|_{x=x_0} = y_0$

Khi đó $\varphi(x, C_0)$ được gọi là nghiệm riêng
- Nghiệm kì dị là nghiệm không nằm trong họ nghiệm tổng quát
- Tích phân tổng quát là nghiệm tổng quát dưới dạng ẩn $\phi(x, y, C) = 0$
- Khi cho tích phân tổng quát một giá trị cụ thể ta có tích phân riêng $\phi(x, y, C_0) = 0$

2. Phương trình vi phân khuyết

a) $F(x, y') = 0$

+) $y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)dx$

+) $x = f(y')$, đặt $y' = t \Rightarrow x = f(t);\ y = \int tf'(t)dt$

Ví dụ 1. Giải phương trình sau $x = y'^2 - y' + 2$

+) $y' = t$

+) $x = t^2 - t + 2$

+) $dy = t\,dx \Rightarrow y = \int t(2t-1)\,dt = \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^2}{2} + C$

+) Nghiệm $x = t^2 - t + 2,\ \ y = \frac{2}{3}t^3 - \frac{t^2}{2} + C$

b) $F(y, y') = 0$

+) $y' = f(y) \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)} \Rightarrow x = \int \frac{1}{f(y)}dy$

+) $y = f(y')$, đặt $y' = t \Rightarrow y = f(t),\ x = \int \frac{f'(t)}{t}dt$

+) $F(y, y') = 0$, đặt $y = f(t) \Rightarrow y' = g(t) \Rightarrow x = \int \frac{f'(t)}{g(t)}dt$

Ví dụ 2. Giải phương trình $y^2 + y'^2 = 4$

+) $y = 2\sin t \Rightarrow dy = 2\cos t\,dt = 2\cos t\,dx$

+) Nếu $\cos t \neq 0 \Rightarrow dt = dx \Rightarrow t = x + c \Rightarrow y = 2\sin(x + c)$ là nghiệm tổng quát

+) Nếu $\cos t = 0 \Rightarrow t = (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \pm 2$ (Nghiệm kì dị)

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!