GIẢI TÍCH 2

BÀI 3.

§ 2. Tích phân phụ thuộc tham số với cận là hàm số

2.1. Định nghĩa.

Cho $K(x, t)$ liên tục trên hình chữ nhật D: $a \le t \le b$, $c \le x \le d$, các hàm $\alpha(x)$, $\beta(x)$ liên tục trên $[c\,;\,d]$ thoả mãn $a \le \alpha(x) \le b$, $a \le \beta(x) \le b$, ta gọi $I(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)\,dt$ là tích phân phụ thuộc tham số với cận là hàm số.

2.2. Tính liên tục, khả vi

Định lí 2. Cho $K(x, t)$ liên tục trên hình chữ nhật D: $a \le t \le b$, $c \le x \le d$, các hàm $\alpha(x)$, $\beta(x)$ liên tục trên $[c\,;\,d]$ thoả mãn $a \le \alpha(x)$, $\beta(x) \le b$, thì ta có

1°/ $I(x)$ liên tục trên $[c\,;\,d]$

2°/ Nếu thêm $\frac{\partial}{\partial x}K(x,t)$ liên tục trên D, các hàm $\alpha(x), \beta(x)$ khả vi , thì có $I(x)$ khả vi trên $[c\,;\,d]$ và có

$$I'(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial}{\partial x}K(x,t)\,dt + \beta'(x)K\big(x, \beta(x)\big) - \alpha'(x)K\big(x, \alpha(x)\big)$$

Ví dụ 1. Cho $I(x) = \int\limits_{x}^{1+x^2} \frac{dt}{1+t^2+x^3}$

Ví dụ 2. Xét tính khả vi và tính đạo hàm $I(x) = \int\limits_{\sin y}^{\cos y} e^{yx^2}\,dx$

§ 3. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số

3.1. Hội tụ đều

Định nghĩa. Ta gọi $I(x) = \int\limits_{a}^{+\infty} K(x,t)\,dt$ là tích phân phụ thuộc tham số x nếu nó hội tụ với mọi $x \in [c\,;\,d]$.

Tương tự có thể xét $\int\limits_{-\infty}^{b} K(x,t)\,dt$, $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} K(x,t)\,dt$

Định nghĩa. $I(x)$ được gọi là hội tụ đều trên $[c\,;\,d\,]$ nếu như $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N(\varepsilon) > 0$, $\forall\, b > N(\varepsilon)$, $\forall\, x \in [c\,;\,d] \Rightarrow \left|\int\limits_{b}^{\infty} K(x,t)\,dt\right| < \varepsilon$.

3.2. Tiêu chuẩn Cauchy

Định lí (tiêu chuẩn Cauchy). $I(x) = \int\limits_0^\infty K(x,t)\,dt$ hội tụ đều trên $[c\,;\,d] \Leftrightarrow \exists\, b_0$ để có

$$\left|\int\limits_{b_1}^{b_2} K(x,t)\,dt\right| < \varepsilon,\ \forall\, b_1, b_2 > b_0,\ \forall\, x \in [c\,;\,d].$$

3.3. Dấu hiệu Weierstrass. Cho:

- $|K(x,t)| \le F(t),\ \forall x \in [c\,;\,d],\ \forall t \ge b \ge a,\ F(t) \ge 0$ và khả tích
- $\int\limits_a^{+\infty} F(t)\,dt$ hội tụ.

Khi đó $\int\limits_a^{+\infty} K(x,t)\,dt$ hội tụ tuyệt đối và đều trên $[c\,;\,d]$.

Ví dụ 1. CMR $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{a^2+t^2}\,dt$ hội tụ đều trên R

Ví dụ 2. Xét tính hội tụ đều của $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}x^t\,dt,\quad a > 0, t \in [0, a]$

Ví dụ. Chứng minh rằng $\int\limits_0^{\infty} e^{-yx^2}\,dx$ hội tụ đều trên $(t_0; +\infty), t_0 > 0$.

3.4. Tiêu chuẩn Dirichlet. Cho

- $\left|\int\limits_a^b K(x,t)\,dt\right| < C_0,\ \forall\, b > a,\ \forall\, x \in [c\,;\,d],\ \exists\, C_0 > 0$
- $\varphi(x, t)$ hội tụ đều theo x đến 0 khi khi $t \to \infty$ và đơn điệu theo t với mỗi x cố định thuộc $[c\,;\,d]$.

Khi đó $\int\limits_a^{\infty} K(x,t)\varphi(t,x)\,dt$ hội tụ đều trên $[c\,;\,d]$

Ví dụ 1. Xét tính hội tụ đều $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin xt}{\sqrt{t}}\,dt$, $x \in [x_0\,;\,+\infty)$, $x_0 > 0$.

Ví dụ 2. CMR $\int_0^{+\infty} e^{-tx}\frac{\sin x}{x}dx$, $t \ge 0$

3.5. Tiêu chuẩn Abel. Giả thiết rằng:

1°/ $\int_a^{+\infty} K(x,t)dt$ hội tụ đều trên $[c\,;\,d]$

2°/ $|\varphi(x,t)| \le C_0$, $\exists\, C_0 > 0$, $\forall\, t \ge a$, $\forall\, x \in [c\,;\,d]$, và với mỗi x cố định ta có hàm $\varphi(x, t)$ đơn điệu theo t.

Khi đó ta có $\int_a^{\infty} K(x,t)\varphi(t, x)dt$ hội tụ đều trên $[c\,;\,d]$.

Ví dụ 1. Xét tính hội tụ đều $\int_0^{\infty} e^{-tx}\frac{1}{x^2+\sqrt{t}}dt$, $x \in [x_0\,;\,+\infty)$, $x_0 > 0$.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!