GIẢI TÍCH 2
BÀI 2.
§ 4. Mặt trong $\mathbb{R}^3$

Điểm M_0 trên mặt S được gọi là điểm chính quy nếu tại đó có các đạo hàm riêng $F'_x(M_0), F'_y(M_0), F'_z(M_0)$ và chúng không đồng thời bằng không. Một điểm không chính quy gọi là điểm kì dị.

Định lí. Tập hợp tất cả các tiếp tuyến của mặt S tại điểm chính quy M_0 là một mặt phẳng đi qua M_0.

• Phương trình pháp tuyến của mặt S tại điểm chính quy M_0 là

$$\frac{X-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{Y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{Z-z_0}{F'_z(M_0)}$$

• Phương trình tiếp diện của mặt S: $F(x, y, z) = 0$, tại M_0 là

$$F'_x(M_0)(X-x_0)+F'_y(M_0)(Y-y_0)+F'_z(M_0)(Z-z_0)=0$$

Nói riêng khi mặt S có phương trình $z = f(x, y)$ thì phương trình tiếp diện và pháp tuyến với S tại điểm chính quy $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ lần lượt là

$$(X-x_0)f'_x(M_0)+(Y-y_0)f'_y(M_0)-(Z-z_0)=0;$$

$$\frac{X-x_0}{f'_x(M_0)}=\frac{Y-y_0}{f'_y(M_0)}=\frac{Z-z_0}{-1}.$$

Nếu mặt S có phương trình tham số $x=x(u,v), y=y(u,v), z=z(u,v)$, $(u, v) \in D$. Khi đó phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt S tại điểm chính quy $M_0(x_0 ; y_0 ; z_0)$ lần lượt là

$$(X-x_0)A+(Y-y_0)B+(Z-z_0)C=0;$$

$$\frac{X-x_0}{A}=\frac{Y-y_0}{B}=\frac{Z-z_0}{C}$$

ở đó $A=\begin{vmatrix} y'_u(M_0) & z'_u(M_0) \\ y'_v(M_0) & z'_v(M_0)\end{vmatrix}$, $B=\begin{vmatrix} z'_u(M_0) & x'_u(M_0) \\ z'_v(M_0) & x'_v(M_0)\end{vmatrix}$, $C=\begin{vmatrix} x'_u(M_0) & y'_u(M_0) \\ x'_v(M_0) & y'_v(M_0)\end{vmatrix}$

• Vectơ pháp tuyến của mặt S tại M_0 là $\vec{N}(A;B;C)$.

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong $z = x^2 + y^2$ tại điểm $M(1 ; -2 ; 5)$.

Ví dụ 2. Viết phương trình pháp tuyến và tiếp diện của mặt $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ tại điểm $M_0(3 ; 4 ; 5)$.

Ví dụ 3. Viết phương trình tiếp diện và pháp tuyến của mặt cong

$x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi, z=r\cot\alpha$ tại (r,φ)

CHƯƠNG II.
TÍCH PHÂN PHỤ THUỘC THAM SỐ

§ 1. Tích phân phụ thuộc tham số trên một đoạn

1.1. Khái niệm.

Định nghĩa. Cho $K(x, t)$ bị chặn: $x \in [c\,;\,d]$, $t \in [a\,;\,b]$ và khả tích theo t trên $[a\,;\,b]$, khi đó ta gọi $I(x) = \int_a^b K(x,t)\,dt$ là tích phân phụ thuộc tham số x.

Ví dụ 1. $I(x) = \int_0^1 te^{xt}\,dt$, $x \in [1\,;\,2]$

Ví dụ 2. $I(x) = \int_a^b t\sin xt\,dt$, $x \in [c\,;\,d]$, $cd > 0$.

Ví dụ 3. $I(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1+x^2t^2}$, $x \in [1\,;\,2]$

1.2. Tính liên tục, khả vi, khả tích

Định lí 1. (Leibnitz). Cho $K(x, t)$ liên tục trên hình chữ nhật D: $a \le t \le b$, $c \le x \le d$ thì

1°/ $I(x)$ liên tục trên $[c\,;\,d]$

2°/ $I(x)$ khả tích trên $[\alpha\,;\,\beta] \subset [c\,;\,d]$ và có $\int_\alpha^\beta I(x)\,dx = \int_a^b dt \int_\alpha^\beta K(x,t)\,dx$

3°/ Nếu có $\frac{\partial}{\partial x}K(x,t)$ liên tục trên D thì có $I'(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x}K(x,t)\,dt$.

Ta vận dụng định lí trên để tính một số tích phân phụ thuộc tham số sau

Ví dụ 1. Tính $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx,\ a, b > 0$

Ví dụ 2. Tính $\int_0^1 \frac{\arctan x}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx,$

Ví dụ 3. Tính $I_n(a) = \int_0^1 \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n},\ a \ne 0,\ 0 \ne n \in \mathbb{N}$

Ví dụ 4. Tính $I(a) = \int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x\right)dx,\ a, b > 0$.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!