

GIẢI TÍCH I

BÀI 2.

(§1.6 - §1.8)

§1.6. Giới hạn hàm số

• Đặt vấn đề

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} 2^x = ? \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = ? \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = ?$$

I. Định nghĩa

– ĐN1. $x_0 \in \mathbb{R}$ là điểm tụ của $X \subset \mathbb{R} \Leftrightarrow (U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \emptyset, \forall \varepsilon > 0$.

– ĐN2. $f(x)$ xác định trên X , x_0 là điểm tụ của X . Ta bảo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset X, x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow a.$$

– ĐN3. $f(x)$ xác định trên X , x_0 là điểm tụ của X . Ta bảo

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ bé tùy ý, } \exists \delta(\varepsilon) > 0: 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Chú ý. ĐN2 ~ ĐN3.

Ví dụ 1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2)$

Ví dụ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$

II. Tính chất và phép toán

1) Tính chất

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \Rightarrow a = b$

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - a) = 0$

c) $f(x) = c \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = c$

d) $f(x) \leq h(x) \leq g(x), \forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0); \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$

e) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, f(x) \leq c, \forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow a \leq c$

f) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, a > p \Rightarrow f(x) > p, \forall x \in U_{\varepsilon_0}(x_0) \setminus \{x_0\}$

2. Phép toán

a) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$

b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x).g(x)) = a.b$ và $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}, (b \neq 0)$

3. Khử dạng vô định**a) Các dạng vô định** $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$; 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0 **b) Khử dạng vô định.** Sử dụng các phép biến đổi đại số và các giới hạn đặc biệt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Ví dụ 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$

Ví dụ 2. $\lim_{x \rightarrow 2} (2-x) \tan \frac{\pi x}{4}$

Ví dụ 3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^{2x+1}$

Ví dụ 4. a)(K53) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\cot^2 x} \quad \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)$

b)(K59) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \cos \frac{x}{3}\right)^{\tan x} \quad (1)$

c)(K59) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \sin x}{1 - 2 \sin x}\right)^{\frac{1}{x}} \quad (e^3)$

d)(K62) 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x}-1}{\ln(1+3x)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln(e+2x))^{\frac{1}{\sin x}} \quad \left(e^{\frac{2}{e}}\right)$

III. Giới hạn hàm hợp, một phía, vô cực**1. Giới hạn hàm hợp.** $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = u_0, \quad \lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = a \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(u(x)) = a$ **2. Giới hạn một phía.****Định nghĩa 4.**

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ bé tùy ý, } \exists \delta(\varepsilon) > 0: 0 < x - x_0 < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Định nghĩa 5.

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ bé tùy ý, } \exists \delta(\varepsilon) > 0: 0 < x_0 - x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Mối liên hệ giữa giới hạn một phía và giới hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

3. Giới hạn ở vô cực và giới hạn vô cực**Định nghĩa 6.** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall (x_n) \rightarrow \infty \text{ có } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$ **Định nghĩa 7.** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ bé tùy ý, } \exists N(\varepsilon) > 0: |x| > N(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon.$ **Chú ý.** ĐN6 ~ ĐN7.

Ví dụ 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x}}{x + \sqrt[5]{x^4 + 2x}}$

Ví dụ 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$

Ví dụ 3. $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Ví dụ 4(K52) 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x - \sin \sqrt{1+x^2})$ (0)

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\cos \sqrt{x-1} - \cos \sqrt{x+1})$ (0)

Ví dụ 5(K58) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{2}{x} \right)^{x^2} (e^{-2})$ **b)(K60)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x}]$. (2)

Định nghĩa 8. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall (x_n) \rightarrow \infty \text{ có } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$

Định nghĩa 9

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall N > 0 \text{ lớn tùy ý, } \exists \delta(N) > 0: |x - x_0| < \delta(N) \Rightarrow |f(x)| > N.$$

Khi đó ta bảo $f(x)$ không có giới hạn khi $x \rightarrow x_0$.

§1.7. Vô cùng bé, vô cùng lớn

• Đặt vấn đề

I. Vô cùng bé

1. Định nghĩa. $\alpha(x)$ là vô cùng bé (VCB), $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$.

2. Tính chất.

a) $\alpha(x)$ là VCB, $x \rightarrow x_0$, $c = \text{const} \Rightarrow c\alpha(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

b) $\alpha_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \alpha_i(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$

c) $\alpha(x)$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$, $f(x)$ bị chặn trong $U_{\varepsilon_0}(x_0) \Rightarrow \alpha(x)f(x)$ là VCB, $x \rightarrow x_0$

3. Liên hệ giữa VCB và giới hạn

Định lí. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow f(x) - L$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$ (hay $f(x) = L + \alpha(x)$, $\alpha(x)$ là VCB)

4. So sánh VCB. Giả sử $\alpha(x)$, $\beta(x)$ là các VCB khi $x \rightarrow x_0$.

Định nghĩa. $\alpha(x) \sim \beta(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$

Định nghĩa. $\alpha(x)$ là VCB cùng cấp với VCB $\beta(x)$ khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Định nghĩa. $\alpha(x)$ là VCB cấp cao hơn VCB $\beta(x)$ khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$

Ví dụ 1. a) $\sin x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $\ln(1+x) \sim x$, $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$, $\arcsin x \sim x$, $\arctan x \sim x$ khi $x \rightarrow 0$

b)(K55) Cho $\alpha(x) = \frac{ex}{2}$, $\beta(x) = e - (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Chứng minh rằng $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \rightarrow 0$.

c)(K55) Cho $\alpha(x) = e - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}$, $\beta(x) = ex$.

Chứng minh rằng $\alpha(x) \sim \beta(x)$ khi $x \rightarrow 0$.

d)(K59) So sánh hai VCB sau trong quá trình $x \rightarrow 1$:

$$\alpha(x) = \tan(\pi x) + e^{(x-1)^2} - 1, \beta(x) = 1 + \cos \pi x + \ln x \quad (2 \text{ VCB cùng bậc})$$

5. Ứng dụng tìm giới hạn

$$a) \alpha(x) \sim \bar{\alpha}(x), \beta(x) \sim \bar{\beta}(x), x \rightarrow x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{\alpha}(x)}{\bar{\beta}(x)}$$

$$\text{Ví dụ 2. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \tan x}{\sin^2 x}$$

$$\text{Ví dụ 3(K53)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x} \sqrt[4]{1+4x} - 1}{\sqrt{1-x} - 1} \quad (-4)$$

$$b) \beta(x) \text{ là VCB cấp cao hơn } \alpha(x) \text{ khi } x \rightarrow x_0 \Rightarrow \alpha(x) + \beta(x) \sim \alpha(x)$$

$$\text{Ví dụ 4. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

c) Quy tắc ngắt bỏ VCB : $\alpha(x), \beta(x)$ là các VCB khi $x \rightarrow x_0$;

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^m \alpha_k(x), \alpha_1(x) \text{ là VCB có cấp thấp nhất;}$$

$$\beta(x) = \sum_{k=1}^n \beta_k(x), \beta_1(x) \text{ là VCB có cấp thấp nhất} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$$

$$\text{Ví dụ 5. a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin^3 x + \tan^4 x}{4x + x^4 + 5x^8}$$

$$b)(K56) 1^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \ln(1+4x)}{2x^3 - 3 \tan x^4} \quad (2)$$

$$2^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1-3x^2)}{x^3 + 2 \sin^4 x} \quad (-3)$$

$$3^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(e^{2x} - 1)}{x^4 + 2x^5} \quad (2)$$

$$4^\circ) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(e^{3x} - 1)}{x^4 - 3x^5} \quad (3)$$

$$c)(K61) 1^\circ) \text{ Tìm } a, \alpha \text{ để } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{ax^\alpha} = 1 \quad (a = -\frac{3}{2}, \alpha = -2)$$

$$2^\circ) \lim_{x \rightarrow 5} \left(\frac{x}{5}\right)^{\frac{1}{x-5}} \quad \left(e^{\frac{1}{5}}\right)$$

II. Vô cùng lớn

1. Định nghĩa. $f(x)$ xác định $U_{\varepsilon_0}(x_0)$ (có thể trừ x_0), $f(x)$ là vô cùng lớn (VCL) khi $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

Chú ý. Hàm là VCL \Rightarrow không bị chặn

Ví dụ 6. $f(x) = x \sin x$ là không bị chặn nhưng không phải là VCL.

2. Liên hệ giữa VCB và VCL

a) $f(x)$ là VCB, $x \rightarrow x_0$ và $f(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCL khi $x \rightarrow x_0$.

b) $f(x)$ là VCL, $x \rightarrow x_0 \Rightarrow \frac{1}{f(x)}$ là VCB khi $x \rightarrow x_0$.

3. So sánh các VCL. Giả sử $A(x)$, $B(x)$ là các VCL khi $x \rightarrow x_0$,

a) $A(x)$ là VCL cấp cao hơn VCL $B(x)$, $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \infty$

b) $A(x)$, $B(x)$ là các VCL cùng cấp, $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = a \neq 0$

c) $A(x)$, $B(x)$ là các VCL tương đương, $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = 1$.

4. Ứng dụng tìm giới hạn

a) Cho các VCL tương đương $A(x) \sim \bar{A}(x)$, $B(x) \sim \bar{B}(x)$,

$$x \rightarrow x_0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\bar{A}(x)}{\bar{B}(x)}$$

b) Quy tắc ngắt bỏ VCL : Cho $A(x)$, $B(x)$ là các VCL khi $x \rightarrow x_0$;

$$A(x) = \sum_{k=1}^m A_k(x), A_1(x) \text{ là VCL có cấp cao nhất;}$$

$$B(x) = \sum_{k=1}^n B_k(x), B_1(x) \text{ là VCL có cấp cao nhất}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A(x)}{B(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{A_1(x)}{B_1(x)}$$

Ví dụ 7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^4 + x^3 + x + 2}{2009x^4 + 3x^2 + x + 1} = \frac{9}{2009}$

Ví dụ 8. Tính giới hạn

a)(K54) 1. $\lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\cot(x^2 - 1)} \quad (e^{-\frac{1}{2}})$ **2.** $\lim_{x \rightarrow -1} (2 + x)^{\cot(1 - x^2)} \quad (e^{\frac{1}{2}})$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 4^x) \ln(1 + 2x)}{x^2 + 2x^3} \quad (-2 \ln 4)$ **4.** $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - 9^x) \ln(1 + 3x)}{3x^2 - 4x^3} \quad (-2 \ln 3)$

b)(K58) 1) Tìm a để các VCB sau tương đương khi $x \rightarrow \infty$:

$\alpha(x) = \ln(1 + \frac{1}{x}) \sin \frac{1}{x}$ và $\beta(x) = \frac{1}{ax^2}$, (**$a=1$**)

2) Tìm a để các VCB sau tương đương khi $x \rightarrow 0$:

$\alpha(x) = \ln(1 - ax^2)$ và $\beta(x) = (\sqrt{1 + x^2} - 1)$, (**$a=-0,5$**)

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \tan x} - \sqrt{1 + \sin x}}{\ln(1 + x^3)}, \quad (\frac{1}{4})$

c)(K60) $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + 3x)^{\frac{1}{\sin x}} \quad (e^4)$

d)(K61) Tìm a, α để $f(x) = \ln(3x + 5x)$ và $g(x) = ax^\alpha$ là hai VCL tương đương khi $x \rightarrow +\infty$ (**$a = \ln 5, \alpha = 1$**)

§ 1.8. HÀM SỐ LIÊN TỤC

• Đặt vấn đề

I. Hàm liên tục

1. Định nghĩa. $f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow$ $\begin{aligned} &+) f(x) \text{ xác định trên } U_{\varepsilon_0}(x_0) \\ &+) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x) = 0) \end{aligned}$

$f(x)$ liên tục trái tại $x_0 \Leftrightarrow$ $\begin{aligned} &+) f(x) \text{ xác định trên } U_{\varepsilon_0}(x_0) \cap \{x < x_0\} \\ &+) \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0) \end{aligned}$

Tương tự ta có ĐN liên tục phải.

Định nghĩa. $f(x)$ liên tục trên $(a; b) \Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $\forall x \in (a; b)$

$f(x)$ liên tục trên $[a; b] \Leftrightarrow f(x)$ liên tục trong $(a; b)$, liên tục trái tại b và liên tục phải tại a .

Ví dụ 1. Tìm a để hàm số sau liên tục tại $x = 0$: $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

Ví dụ 2.(K51)

a) Tìm a để $y = \begin{cases} \frac{\sin \frac{1}{x-1}}{2^{x-1} + 1}, & x \neq 1 \\ a, & x = 1 \end{cases}$ liên tục tại $x = 1$. ($\nexists a$)

b) Tìm a để $y = \begin{cases} \frac{\sin \frac{1}{x+1}}{2^{x+1} + 1}, & x \neq -1 \\ a, & x = -1 \end{cases}$ liên tục tại $x = -1$. ($\nexists a$)

Ví dụ 3. a)(K55)

1. Tìm a để $y = \begin{cases} a \sin(\operatorname{arccot} x), & x \leq 0 \\ \cos \ln x - \cos \ln(x + x^2), & x > 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$. ($a = 0$)

2. Tìm a để $y = \begin{cases} a \cos(\arctan x), & x \leq 0 \\ \sin \ln(x + x^2) - \sin \ln x, & x > 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$. ($a = 0$).

b)(K59) 1. Tìm a để $y = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x \sin x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ liên tục tại $x = 0$. ($-\frac{1}{2}$).

2. Xét tính liên tục $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos 2x}{\ln(1 + x^2)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. (chỉ liên tục tại $x \neq 0$).

c)(K60) Xét tính liên tục $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{nêu } |x| \leq 1 \\ |x-1| & \text{nêu } |x| > 1 \end{cases}$. ($\mathbb{R} \setminus \{-1\}$).

d)(K62) Tìm a để hàm số sau liên tục trên \mathbb{R} : $f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi x}{2} & \text{nêu } |x| \leq 1 \\ |x-1| & \text{nêu } |x| > 1 \end{cases}$. (-1 và 4).

2. Tính liên tục của các hàm sơ cấp. Mọi hàm số sơ cấp liên tục trên các khoảng mà hàm số đó xác định.

3. Phép toán. Cho $f(x)$, $g(x)$ liên tục tại $x_0 \Rightarrow f(x) \pm g(x)$ liên tục tại x_0 , $f(x)g(x)$ liên tục tại x_0 và $\frac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$

4. Ý nghĩa. $f(x)$ liên tục trên $[a; b] \Rightarrow$ đồ thị là đường liền nét.

5. Tính chất

Định lí 1. (Weierstrass 1) $f(x)$ liên tục trên $[a; b] \Rightarrow f(x)$ bị chặn trên $[a; b]$

Định lí 2. (Weierstrass 2) $f(x)$ liên tục trên $[a; b] \Rightarrow f(x)$ đạt giá trị lớn nhất và bé nhất trên $[a; b]$

Định lí 3 (Bolzano-Cauchy). $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $M = \max_{[a; b]} f$, $N = \min_{[a; b]} f$, $\mu \in [m; M] \Rightarrow \exists c \in [a; b]: f(c) = \mu$.

Hệ quả. $f(x)$ liên tục trên $[a; b]$, $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists c \in (a; b): f(c) = 0$.

6. Điểm gián đoạn

Định nghĩa. $f(x)$ xác định $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, gián đoạn tại $x_0 \Leftrightarrow f(x)$ không liên tục tại x_0 .

$f(x)$ xác định $U_{\varepsilon_0}(x_0) \setminus \{x_0\}$ thì ta bảo $f(x)$ gián đoạn tại x_0

Định nghĩa. Điểm gián đoạn x_0 của hàm $f(x)$ là điểm gián đoạn loại 1

$$\Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Các điểm gián đoạn còn lại được gọi là điểm gián đoạn loại 2.

Ví dụ 4. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Ví dụ 5. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

Ví dụ 6(K54) Phân loại điểm gián đoạn của hàm số

a) $f(x) = \frac{1}{1 - 2^{\frac{x-1}{x}}}$ ($x = 1$, loại 2; $x = 0$, loại 1)

b) $f(x) = \frac{1}{1 - 3^{\frac{x+1}{x}}}$ ($x = -1$, loại 2; $x = 0$, loại 1)

Ví dụ 7(K56) Các điểm sau là các điểm gián đoạn loại gì của hàm số

a) $x = 0$; $f(x) = \frac{1}{2 + 3^{\cot x}}$ (loại 1) b) $x = \frac{\pi}{2}$, $f(x) = \frac{1}{3 + 2^{\tan x}}$ (loại 1)

Ví dụ 8 a)(K60) Tìm và phân loại điểm gián đoạn của hàm số

$$1. y = 2^{\frac{|x-2|}{x-2}} + \frac{\sin x}{x} \quad (x=2 \text{ là loại 2; } x=0 \text{ là loại 1})$$

$$2. y = 2^{\frac{1}{1-x}} + e^{x+\frac{1}{x}} \quad (x=1; x=0 \text{ là loại 2})$$

b)(K61) 1. Tìm và phân loại điểm gián đoạn của hàm số :

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2 - \log_3 |x|} & x \neq 0, \pm 9 \\ 3 & x = 0, \pm 9 \end{cases} \quad (x=0 \text{ là gi đ bỏ được; } x=9 \text{ là gi đ loại 2})$$

$$2. \text{ Tìm điểm gián đoạn của hàm số : } f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{2 + x^{2n}}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (x = \pm 1)$$

Định nghĩa. $f(x)$ liên tục từng khúc trên $[a;b]$ khi $[a;b]$ chia thành hữu hạn đoạn và hàm $f(x)$ liên tục trên mỗi đoạn này.

II. Hàm số liên tục đều

Định nghĩa. $f(x)$ liên tục đều trên $X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ bé tùy ý. $\exists \delta(\varepsilon) > 0, \forall x_1, x_2 \in X, |x_1 - x_2| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Ví dụ 8. a) $y = x + 2$. b) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0; 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Định lí (Cantor). $f(x)$ liên tục trong $[a; b] \Rightarrow f(x)$ liên tục đều trong $[a; b]$