

GIẢI TÍCH I

BÀI 6

§1.11. CÁC LƯỢC ĐỒ KHẢO SÁT HÀM SỐ

• Đặt vấn đề

I. Hàm số $y = f(x)$

1) Điểm uốn

Định nghĩa. Điểm $I(c; f(c))$ là điểm uốn của đồ thị hàm số $y = f(x) \Leftrightarrow$ là điểm phân chia phần lồi, lõm của đồ thị hàm số

Cách tìm. Tìm $(c; f(c))$ sao cho $f''(x)$ đổi dấu khi x biến thiên qua $x = c$.

2) Tiệm cận

Định nghĩa. • $x = x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$

• $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị $y = f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \rho(f(x), ax + b) = 0$.

Khi đó ta có $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$

Khi $a = 0$ ta có tiệm cận ngang

Ví dụ 1. Tìm các tiệm cận

a) $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$,

b) $y = \frac{x^4}{x^2 - 4}$,

c) $y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right)$,

d) $y = xe^{\frac{1}{x}} + 1$

e) $y = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}, & |x| > 1 \\ 0, & x = \pm 1 \end{cases}$

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số

a) (K51) 1. $y = \frac{3x^2 + 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ($x = \pm 2$, $y = 3x$ phải ; $y = -3x$ trái)

2. $y = \frac{2x^2 + 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$ ($x = \pm 1$, $y = 2x$ phải ; $y = -2x$ trái)

b) (K54) 1. $y = \frac{x^2 \operatorname{arccot} x}{x + 1}$ ($x = -1$, $y = 1$, $y = \pi x + 1 - \pi$)

2. $y = \frac{x^2 \operatorname{arccot} x}{1 - x}$ ($x = 1$, $y = -1$, $y = -\pi x - 1 - \pi$)

c) (K57) 1. $y = \frac{x^3 \operatorname{arccot} x}{1 + x^2}$ ($y = 1$, $y = \pi x + 1$)

$$2. y = \frac{x^5 \operatorname{arccot} x}{1+x^4} \quad (y=1, y=\pi x+1)$$

d)(K59) 1) $y = x - 2\arctan x$ (tc xiên bên phải $y=x-\pi$, bên trái $y=x+\pi$)

2) $y = xe^{\frac{1}{x}} + 1.$ (tc đứng bên phải $x=0$; $y=x+2$)

e)(K60) 1) $y = \sqrt[3]{x^3+2}$ (tc xiên $y=x$)

g)(K61) 1) $y = \frac{\ln x}{x}$ (tcđ bên phải $x=0$, tcn bên phải $y=0$)

h)(K62) 1) $y = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+3}}$ (tcn bên phải $y=1$, tcn bên trái $y=-1$)

1) $y = x \operatorname{arccot} \frac{2}{x}$ ($y = \frac{\pi}{2}x - 2$)

3. Lược đồ khảo sát đồ thị.

a) Tập xác định

b) Chiều biến thiên: tăng giảm, cực trị, lồi lõm, tiệm cận, bảng biến thiên

c) Đồ thị

Ví dụ 3. $y = \frac{4x^3+1}{x^4}$

Ví dụ 4. $y = \sqrt[3]{1-x^3}$

Ví dụ 5. $y = e^{\frac{1}{x}} - x$

Ví dụ 6. $y = \ln(1+e^{-x})$

II. Đường cong cho dưới dạng tham số $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}, t \in [\alpha; \beta]$

Tương tự như $y=f(x)$, chỉ khác là khảo sát gián tiếp y theo x qua biến trung gian t , và chú ý

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}$$

Ví dụ 1. $\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$

Ví dụ 2. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$

Ví dụ 3. $x^3 + y^3 - 3axy = 0, a > 0$ (lá Descartes)

Ví dụ 4. a)(K52) 1) Cho $y=f(x)$, ở đó $\begin{cases} x=3t+2t^3 \\ y=te^{t^2} \end{cases}$, tính $f'(x), f''(x)$

$$(f' = \frac{e^{t^2}}{3}, f'' = \frac{2+e^{t^2}}{9(1+2t^2)})$$

2) Cho $y = f(x)$, ở đó $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = 2t - e^{2t} \end{cases}$, tính $f'(x), f''(x)$ ($f' = 2(1 - e^t)$, $f'' = \frac{-2e^t}{1 + e^t}$)

b)(K55) 1) Cho $y = f(x)$, ở đó $\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = 3t^4 + 2t^2 \end{cases}$, tính $f'(x), f''(x)$.

$$(f' = 4t, f'' = \frac{4}{3t^2 + 1})$$

2) Cho $y = f(x)$, ở đó $\begin{cases} x = t^3 + 3t \\ y = t^5 - 5t \end{cases}$, tính $f'(x), f''(x)$. ($f' = \frac{5(t^2 - 1)}{3}$, $f'' = \frac{10t}{9(t^2 + 1)}$)

Ví dụ 5. Tìm các tiệm cận

a)(K54) 1. $\begin{cases} x = \frac{t}{t^3 - 1} \\ y = \frac{-2t^2}{t^3 - 1} \end{cases} \quad (y = -2x - \frac{2}{3})$ 2. $\begin{cases} x = \frac{-t}{t^3 + 1} \\ y = \frac{3t^2}{t^3 + 1} \end{cases} \quad (y = 3x - 1)$

c)(K56) 1) $\begin{cases} x = \frac{1}{1 - t^3} \\ y = \frac{2t}{1 - t^3} \end{cases} \quad (y = 2x - \frac{2}{3})$ 2) $\begin{cases} x = \frac{1}{1 + t^3} \\ y = \frac{3t}{1 + t^3} \end{cases} \quad (y = -3x + 1)$

3) $\begin{cases} x = \frac{2}{1 - t^3} \\ y = \frac{1 + t}{1 - t^3} \end{cases} \quad (y = x - \frac{1}{3})$ 4) $\begin{cases} x = \frac{1 - t}{1 + t^3} \\ y = \frac{3}{1 + t^3} \end{cases} \quad (y = x + \frac{1}{3})$

d)(K58) $\begin{cases} x = \frac{2t}{1 + t^3} \\ y = \frac{1 - 2t}{1 + t^3} \end{cases} \quad (y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{3})$

III. Đường cong cho trong hệ tọa độ cực

1) Hệ tọa độ cực. Hệ gồm điểm O, trục Ox gọi là hệ tọa độ cực

$$M(r; \varphi), r = |\overrightarrow{OM}|, 0 \leq r < \infty, \varphi = (\text{Ox}; \overrightarrow{OM}), 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Ví dụ 1.

a) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ b) $r = \cos \varphi$ c) $r = \sin \varphi$ d) $r = \frac{1}{\cos \varphi}$ e) $r = \frac{1}{\sin \varphi}$

Liên hệ với hệ tọa độ Descartes:

$$(r; \varphi) \rightarrow (x; y), x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi.$$

$(x; y) \rightarrow (r; \varphi)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctan \frac{y}{x}$, lấy φ : $\sin \varphi$ cùng dấu với y .

Chú ý. Trong hệ tọa độ cực suy rộng ta có $-\infty < r < \infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$, khi $r_1 < 0$ thì định nghĩa $(r_1; \varphi) = (-r_1; \varphi + \pi)$

2. Lược đồ khảo sát đường cong $r = f(\varphi)$

a) Tìm tập xác định

b) Chiều biến thiên: Xét tính chẵn (thì đồ thị đối xứng qua trục cực), lẻ (thì đồ thị đối xứng qua $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$), tuần hoàn, chiều biến thiên, cực trị, bảng biến thiên,

$\tan V = \frac{r}{r'}$, ở đó V là góc dương giữa \overrightarrow{OM} và vector chỉ phương của tiếp tuyến với đồ thị tại điểm M .

c) Đồ thị

Ví dụ 1. $r = a(1 + \cos \varphi)$, $a > 0$

Ví dụ 2. $r = a \sin 3\varphi$, $a > 0$

Ví dụ 3. $r = a \sin 2\varphi$, $a > 0$

Ví dụ 4. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $a > 0$.

Ví dụ 5. $r = a(1 + 2\cos \varphi)$, $a > 0$

Ví dụ 6. $r = a \sin n\varphi$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$

Ví dụ 7. $r = a \cos n\varphi$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!