PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 3

§ 4. Chuỗi hàm số

• **Đặt vấn đề.**

1. Chuỗi hàm số hội tụ

Định nghĩa: Cho dãy hàm số $\{u_n(x)\}$ xác định trên X, ta định nghĩa chuỗi hàm số

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \qquad (1)$$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tại $x_0 \Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ hội tụ

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ phân kì tại $x_0 \Leftrightarrow$ chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ phân kì

Tập các điểm hội tụ của (1) gọi là tập hội tụ của nó. Tổng của chuỗi hàm số là hàm số xác định trong tập hội tụ của nó.

Ví dụ 1. Tìm tập hội tụ của các chuỗi hàm số sau

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ $(x>1)$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $(\mathbb{R})$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(2n^2+4\right)x}{(3n+1)^2}$ $(\mathbb{R})$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n\cos x}$ $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi < x < \frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n5^n(x-3)^n}$ $\left(|x-3|>\frac{1}{5}\right)$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^{2n-1}$ $(-1<x<3)$

Hướng dẫn.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$

+) Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \left|x_0^{n-1}\right|$ (2)

+) (2) hội tụ với $|x_0|<1$ +) Tại $|x_0|\ge 1$, (2) phân kì +) Tập hội tụ: $|x|<1$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2+x^2}$

+) Xét chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos nx_0|}{n^2+x_0^2}$ (2) +) $\frac{|\cos nx_0|}{n^2+x_0^2} \le \frac{1}{n^2} \Rightarrow$ (2) hội tụ với mọi x_0

+) Tập hội tụ $\mathbb{R}$

Ví dụ 2. Tìm tập hội tụ của các chuỗi hàm số sau

a) 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n+3}}{3^{2n}(2n+3)}$ $(-3 \le x \le 3)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}(x+1)^n}$ $(x > 0 \vee x \le -2)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}(x+2)^n}$ $(x > -1 \vee x \le -3)$

b) 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n^2+1)^2}\left(\frac{4x-3}{x}\right)^n$ $\left(\left[\frac{3}{5}; 1\right)\right)$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2-1}}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ $([0; +\infty))$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2-x+1)^n}{(n+1)\sqrt{n+2}}$ $(0 \le x \le 1)$

d) 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(\tan x)^n}$ $\left(\frac{\pi}{4} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(\cot x)^n}$ $\left(k\pi < x < \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right)$

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(\ln x)^n}$ $\left(\mathbb{R} \setminus \left[\frac{1}{e}; e\right]\right)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+e^{nx}}$ $(x > 0)$

2. Chuỗi hàm số hội tụ đều

Định nghĩa. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều đến $S(x)$ trên tập X $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n > n_0(\varepsilon)$, ta có $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$.

Ý nghĩa hình học. Với n đủ lớn, $S_n(x)$ thuộc dải $(S(x)-\varepsilon;\ S(x)+\varepsilon)$.

Tiêu chuẩn Cauchy. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều trên tập $X \subset \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ bé tuỳ ý $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall p > q > n_0(\varepsilon)$, ta có $|S_p(x) - S_q(x)| < \varepsilon$, $\forall x \in X$.

Tiêu chuẩn Weierstrass. Nếu có $|u_n(x)| \le a_n, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$ và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ tuyệt đối và đều trên X.

Tiêu chuẩn Dirichlet.

$u_n = v_n.w_n$, $|V_n|$ đơn điệu không tăng và $\to 0$, $\left|\sum_{k=1}^{n} w_k\right| \le c, \forall n$ $\Rightarrow$ Hội tụ đều.

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}$

+) $\left|\dfrac{(-1)^{n-1}}{x^2+n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}, \forall x$ +) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ hội tụ

+) Chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối và đều trên $\mathbb{R}$

Ví dụ 4. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n^2+x^2},\ x\in\mathbb{R}$ (HTĐ) b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{2^n n\sqrt[3]{n}},\ x\in[-2;\ 2]$ (HTĐ)

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{3^n},\ x\in\mathbb{R}$ (HTĐ) d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{n},\ x\in(-1;\ 1)$ (HTĐ)

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{nx}{1+n^5x^2},\ x\in\mathbb{R}$ (HTĐ) f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\ x>0$

Hướng dẫn.

b) +) $\left|\dfrac{x^n}{2^n n\sqrt[3]{n}}\right| \le \dfrac{1}{n^{4/3}},\ |x|\le 2$ +) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{4/3}}$ hội tụ

+) Chuỗi đã cho hội tụ đều và hội tụ tuyệt đối trên $[-2;2]$.

Ví dụ 5. Xét sự hội tụ đều của chuỗi hàm

a) 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^2}}\right)\sin nx,\ x\in\mathbb{R}$ (HTĐ) 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1+x^2}}\right)\cos nx,\ x\in\mathbb{R}$ (HTĐ)

b) 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^n,\ x\in[-1;\ 1]$ (HTĐ)

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2}\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)^n,\ x\in[-1;\ 1]$ (HTĐ)

c) Chứng minh rằng chuỗi hàm $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^2e^{-nx}$ hội tụ đều với $x\ge 0$

d) 1) Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^2+n+1}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$

2) Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{x^2+n+2}$ hội tụ đều trên $\mathbb{R}$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt[3]{t}}{\sqrt[4]{1+\sin^2 t}}dt\right)\cos nx$ (HTKĐ)

3. Tính chất của chuỗi hàm số hội tụ đều

Định lí 1. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều về $S(x)$ trên X, $u_n(x)$ liên tục trên X, với $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow S(x)$ liên tục trên X, nghia la

$$\lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x)$$

Định lí 2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ đều đến $S(x)$ trên $[a;\ b]$, $u_n(x)$ liên tục trên $[a;b]$, $\forall n$

$$\Rightarrow \int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx$$

Định lí 3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x)$ trên $(a;\ b)$, các hàm $u_n(x)$ khả vi liên tục trên $(a;\ b)$, $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ hội tụ đều trên $(a;\ b) \Rightarrow S(x)$ khả vi trên $(a;\ b)$ và có

$$S'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

Ví dụ 6. Xét tính khả vi của các hàm sau

a) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}$; b) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{x}{n^2}$ $\left(f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+x^2},\ x \in \mathbb{R}\right)$

Hướng dẫn.

a) +) $x \neq -n$ là chuỗi đan dấu hội tụ theo Leibnitz

+) $u'_n(x) = \frac{n}{(n+x)^2}$ liên tục $\forall\, x \neq -n$, $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ hội tụ đều theo Dirichlet

+) $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+x)^2}$, $x \neq -n$

Ví dụ 7. a) Tìm miền hội tụ và tính tổng

1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-1)^{3n+2}}{3n+1}$

$$\left((0;2],\ S = (x-1)\left[\frac{1}{3}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2-3x+3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x-3}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right]\right)$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^{3n+2}}{3n+1}$

$\left((-2;0],\ S=(x+1)\left[\frac{1}{3}\ln\frac{x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right]\right)$

b) Tìm miền hội tụ và tính tổng

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x+1)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(n+1)(x-1)^n$ $\left((0;2),\ S=\frac{x^2-1}{x^2}\right)$

c) Xét tính khả vi và tính đạo hàm (nếu có)

1) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\arctan\frac{x}{\sqrt{n+1}}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n+1}\right)$

2) $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n+2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{n+2}}$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n+2}\right)$

d) Tính tổng

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},\ |x|<1\right)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^{2n}$ $\left(\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\ |x|<1\right)$

Hướng dẫn.

b1) Hội tụ với $|x+1|<1$ và tại $x+1=1 \Rightarrow$ miền hội tụ $(-2;0]$

+) Đặt $t=-(x+1) \Rightarrow s=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n} \Rightarrow s'(t)=-\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=-\frac{1}{1-t}$

+) $\int_0^t s'(u)du=\ln|u-1|\Big|_0^t \Rightarrow s(t)-s(0)=\ln|t-1|$

+) $s(0)=0 \Rightarrow s(x)=\ln(x+2)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!