PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 9

§3. Phương trình vi phân cấp hai (TT)

• **Đặt vấn đề.** Mô hình toán học của hệ cơ học và mạch điện dẫn đến phương trình vi phân cấp hai $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + c\dfrac{dx}{dt} + kx = 0$; $LI'' + RI' + \dfrac{1}{C}I = E'(t)$

k là hệ số co dãn của lò xo; c là hệ số giảm xóc; m là khối lượng vật thể

3. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai

a) Định nghĩa. $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (1)

b) Phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (2)

Định lí 1. y_1, y_2 là các nghiệm của (2) $\Rightarrow$ $c_1y_1 + c_2y_2$ cũng là nghiệm của (2), $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

• **Định nghĩa.** Các hàm $y_1(x), y_2(x)$ là độc lập tuyến tính trên $[a\,;\,b]$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq$ hằng số trên $[a\,;\,b]$. Trong trường hợp ngược lại ta nói các hàm này phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ 1. a) e^x, e^{2x} b) $x^2 + 2x + 1,\ x + 1$ c) $\tan x,\ 2\tan x$

Định nghĩa. Cho các hàm $y_1(x), y_2(x)$, khi đó định thức Wronsky của các hàm này là

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Định lí 2. Các hàm y_1, y_2 phụ thuộc tuyến tính trên $[a\,;\,b]$ $\Rightarrow$ $W(y_1, y_2) = 0$ trên đoạn đó

Chú ý. Nếu $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại x_0 nào đó thuộc $[a;\,b]$ $\Rightarrow$ độc lập tuyến tính

Định lí 3. Cho y_1, y_2 là các nghiệm của (2), $W(y_1, y_2) \neq 0$ tại $x_0 \in [a;\,b]$, các hàm $p(x), q(x)$ liên tục trên $[a;\,b]$ $\Rightarrow$ $W(y_1, y_2) \neq 0,\ \forall\, x \in [a\,;\,b]$

Định lí 4. Các nghiệm y_1, y_2 của (2) độc lập tuyến tính trên $[a;\,b]$

$\Rightarrow W(y_1, y_2) \neq 0,\ \forall\, x \in [a\,;\,b]$

Định lí 5. Cho y_1, y_2 là các nghiệm độc lập tuyến tính $\Rightarrow$ nghiệm tổng quát của (2) là

$$y = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Ví dụ 2. $y'' + y = 0$

Định lí 6. Biết nghiệm riêng $y_1 \neq 0$ của (2) $\Rightarrow$ tìm được nghiệm riêng y_2 của (2) độc lập tuyến tính với y_1 và có dạng $y_2(x) = y_1(x)u(x)$

Hệ quả. Với giả thiết của định lí 6, nghiệm y_2 tìm được theo công thức sau

$$y_2 = y_1\int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x)dx} dx \text{ (Liouville).}$$

Vấn đề đặt ra là : Tìm nghiệm riêng khác không như thế nào ?

Ví dụ 3. a) $y'' - y' = 0$

+) Dễ thấy $y_1 = 1$ là nghiệm +) $y_2 = \int e^{-\int(-1)dx} dx = e^x$ +) $y = C_1 + C_2 e^x$

b) $x^2 y'' + xy' - y = 0$

+) $y_1 = x$ là nghiệm +) $y_2 = x\int \frac{1}{x^2} e^{-\int \frac{1}{x}dx} dx = x\int \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{-2x}$

+) $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$

c) $(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ $(y = C_1 x + C_2 e^{-2x})$

d) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$ $(y = C_1 e^x + C_2 x^2 e^x)$

e) $y'' - 2(1+\tan^2 x)y = 0$ $(y = C_1 \tan x + C_2(1 + x\tan x))$

c) Phương trình vi phân tuyến tính không thuần nhất $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ (1)

Định lí 1. Nghiệm tổng quát của (1) có dạng $y = \bar{y} + Y$, ở đó $\bar{y}$ là nghiệm tổng quát của (2), Y là nghiệm riêng của (1).

Định lí 2. (Nguyên lí chồng nghiệm)

Nếu y_1 là nghiệm của phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$.

y_2 là nghiệm của phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$.

Thì có $y = y_1 + y_2$ là nghiệm của phương trình $y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$.

Phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

- Biết nghiệm tổng quát của (2) là $\bar{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2$
- Giải hệ sau $\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x) \end{cases}$ có $C_1 = \phi_1(x) + K_1$, $C_2 = \phi_2(x) + K_2$
- Nghiệm tổng quát của (1) là $y = y_1(\phi_1(x) + K_1) + y_2(\phi_2(x) + K_2)$

Nhận xét. Phương pháp này cho ta cách tìm NTQ của (1), khi biết NTQ của (2).

Ví dụ 4. a 1) $y'' - y' = \frac{2-x}{x^3} e^x$

+) $y_1 = 1$ là nghiệm +) $y_2 = \int e^{\int dx} dx = e^x$ +) $\bar{y} = C_1 + C_2 e^x$

+) Giải hệ $\begin{cases} C_1' + C_2' e^x = 0 \\ C_1'.0 + C_2' e^x = \dfrac{2-x}{x^3} e^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -\dfrac{2-x}{x^3} e^x \\ C_2' = \dfrac{2-x}{x^3} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} C_1 = \displaystyle\int \frac{e^x}{x^2} dx - \int \frac{2e^x}{x^3} dx \\ C_2 = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + K_2 \end{cases}$$

Ta có $C_1 = \displaystyle\int \frac{e^x}{x^2} dx + \int e^x d\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{e^x}{x^2} + K_1$

+) Nghiệm tổng quát $y = 1.\left(\dfrac{e^x}{x^2} + K_1\right) + e^x\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + K_2\right) = K_1 + K_2 e^x + \dfrac{e^x}{x}$

2) $x^2 y'' + xy' - y = x^2$

+) Theo ví dụ 3 có $\overline{y} = C_1 x + \dfrac{C_2}{x}$

+) Giải hệ $\begin{cases} C_1' x + C_2' \dfrac{1}{x} = 0 \\ C_1'.1 + C_2'\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' + C_2' \dfrac{1}{x^2} = 0 \\ C_1' - C_2' \dfrac{1}{x^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = \dfrac{1}{2} \\ C_2' = -\dfrac{x^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{x}{2} + K_1 \\ C_2 = -\dfrac{x^3}{6} + K_2 \end{cases}$$

+) Nghiệm tổng quát $y = x\left(\dfrac{x}{2} + K_1\right) + \dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{x^3}{6} + K_2\right) = K_1 x + \dfrac{K_2}{x} + \dfrac{x^2}{3}$

b) $x^2 y'' - xy' = 3x^3$ $\quad (y_1 = x^3)$

c) $x^3(y'' - y) = x^2 - 2$ $\quad \left(y = -\dfrac{1}{x} + C_1 e^x + C_2 e^{-x}\right)$

d. 1) $x^2(x+1)y'' = 2y$, biết nghiệm riêng $y_1 = 1 + \dfrac{1}{x}$

$$\left(y = C_1\left(1 + \frac{1}{x}\right) + C_2\left[x + 1 - \frac{1}{x} - \frac{x+1}{x}\ln(x+1)^2\right]\right)$$

2) $y'' \tan x + y'(\tan^2 x - 2) + 2y \cot x = 0$, biết nghiệm riêng $y_1 = \sin x$

$$(y = C_1 \sin x + C_2 \sin^2 x)$$

3) $x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = e^x$ bằng cách đổi hàm số $y = \dfrac{z}{x^2}$

$$\left(y = \frac{C_1}{x^2}\cos x + \frac{C_2}{x^2}\sin x + \frac{e^x}{2x^2}\right)$$

e. 1) $xy'' + 2y' + xy = x$ bằng cách đổi hàm số $y = \dfrac{u}{x}$

$$\left(y = \frac{1}{x}(C_1\cos x + C_2\sin x + x)\right)$$

2) $y'' + y'\tan x - y\cos^2 x = 0$, biết nghiệm riêng $y_1 = e^{\sin x}$ $\left(y = C_1 e^{\sin x} + C_2 e^{-\sin x}\right)$

3) $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{e^x + 1}$ $\left(y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1 + e^x)\right)$

f. 1) $y'' - \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 0$ biết nghiệm riêng $y_1 = x$ $\left(y = C_1 x + C_2 x\ln|x|\right)$

2) $y'' - \dfrac{2xy'}{x^2+1} + \dfrac{2y}{x^2+1} = 0$ biết nghiệm riêng $y_1 = x$ $\left(y = C_1 x + C_2(x^2 - 1)\right)$

g. 1) $x^2y'' - (6x^2 + 2x)y' + (9x^2 + 6x + 2)y = 4x^3e^{3x}$ bằng cách đặt $u = \dfrac{y}{x}$

$$\left(y = e^{3x}(C_1 x + C_2 x^2 + 2x^3)\right)$$

2) $xy'' + 2(1 - x)y' + (x - 2)y = e^{-x}$ bằng cách đặt $u = yx$

$$\left(y = C_1\frac{e^x}{x} + C_2 e^x + \frac{1}{4x}e^{-x}\right)$$

h. 1) $y'' + y = \cos x + \tan x$

$\left(y = K_1\cos x + K_2\sin x + \dfrac{x}{2}\sin x - \dfrac{\cos x}{2}\ln\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\right)$

2) $y'' + y = \sin x + \cot x$ $\left(y = K_1\cos x + K_2\sin x - \dfrac{x}{2}\cos x - \dfrac{\sin x}{2}\ln\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}\right)$

i. $\dfrac{y''}{y'^3} + \dfrac{2}{y'} - x - y = e^{-y}$ $\left(x = e^y\left(C_1 + C_2 y\right) - y - 2 - \dfrac{1}{4}e^{-y}\right)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!