GIẢI TÍCH 2

BÀI 1. CHƯƠNG I.

ỨNG DỤNG PHÉP TÍNH VI PHÂN TRONG HÌNH HỌC

§ 1. Hàm vectơ

1.1. Định nghĩa. Cho I là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Ánh xạ $t \in I \mapsto \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^n$ được gọi là hàm vectơ của biến số t xác định trên I.

Đặt $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(t)$. Quỹ tích điểm $M\big(x(t);y(t);z(t)\big)$ khi t biến thiên trong I là đường L trong $\mathbb{R}^3$, gọi là tốc đồ của hàm vectơ $\vec{r}(t)$. Ta cũng nói rằng đường L có các phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$.

1.2 Giới hạn. Ta nói rằng hàm vectơ $\vec{r}(t)$ có giới hạn là $\vec{a}$ khi t dần tới t_0 nếu $|\vec{r}(t)-\vec{a}| \to 0$ khi $t \to t_0$, tức là nếu với $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ sao cho $|t-t_0| < \delta$ $\Rightarrow |\vec{r}(t)-\vec{a}| < \varepsilon$. Khi đó ta kí hiệu $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

Hàm vectơ $\vec{r}(t)$ xác định trên I được gọi là liên tục tại $t_0 \in I$ nếu $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$

Nhận xét. Tính liên tục của hàm vectơ $\vec{r}(t)$ tương đương với tính liên tục của các hàm toạ độ

1.3 Đạo hàm. Cho hàm vectơ $\vec{r}(t)$ xác định trên I và $t_0 \in I$. Giới hạn (nếu có) của tỉ số

$$\frac{\Delta\vec{r}}{h} = \frac{\vec{r}(t_0+h)-\vec{r}(t_0)}{h}$$

khi $h \to 0$ được gọi là đạo hàm của $\vec{r}(t)$ tại t_0 và kí hiệu là $\vec{r}'(t_0)$ hay $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$. Khi đó ta nói rằng hàm vectơ khả vi tại t_0.

Ta có $\frac{\Delta\vec{r}}{h} = \frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\vec{i} + \frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}\vec{j} + \frac{z(t_0+h)-z(t_0)}{h}\vec{k}$

Khi đó nếu các hàm số $x(t),\ y(t),\ z(t)$ khả vi tại t_0 thì hàm vectơ $\vec{r}(t)$ cũng khả vi tại t_0 và có $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$

Đạo hàm cấp cao (tương tự)

Khi h khá nhỏ ta có thể xấp xỉ vectơ $\Delta\vec{r} = \overrightarrow{M_0M}$ bởi vectơ tiếp tuyến $h.\vec{r}'(t_0)$

Tính chất.

1°/ Tuyến tính $\big(\alpha\vec{f}(t)+\beta\vec{g}(t)\big)' = \alpha\vec{f}'(t)+\beta\vec{g}'(t),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2°/ $\langle\vec{f}(t),\vec{g}(t)\rangle' = \langle\vec{f}(t),\vec{g}'(t)\rangle + \langle\vec{f}'(t),\vec{g}(t)\rangle$

3°/ $\left(\vec{f}(t)\vec{g}(t)\right)' = \vec{f}(t)\vec{g}'(t) + \vec{f}'(t)\vec{g}(t)$

1.4. Tích phân Riemann của hàm vectơ

Cho $\vec{f}(t) = \left(f_1(t), \dots, f_n(t)\right)$. Ta có $\vec{f}(t)$ khả tích trên [*a* ; *b*] $\Leftrightarrow$ $f_k(t), k = \overline{1, n}$ khả tích trên [*a* ; *b*] và có $\int\limits_a^b \vec{f}(t)dt = \left(\int\limits_a^b f_1(t)dt, \int\limits_a^b f_2(t)dt, \dots, \int\limits_a^b f_n(t)dt\right)$.

Hàm $\vec{F}(t)$ được gọi là nguyên hàm của $\vec{f}(t)$ nếu $\vec{F}'(t) = \vec{f}(t)$, khi đó ta viết

$$\int \vec{f}(t)dt = \vec{F}(t) + C$$

và ta cũng có $\int \vec{f}(t)dt = \left(\int f_1(t)dt, \int f_2(t)dt, \dots, \int f_n(t)dt\right)$

Ta cũng có công thức Leibnitz $\int\limits_a^b \vec{f}(t)dt = \vec{F}(b) - \vec{F}(a)$.

Ứng dụng. Tìm khoảng cách xa nhất của viên đạn được bắn ra từ bệ phóng tạo góc α so với mặt nằm ngang và với vận tốc ban đầu v_0

§ 2. Đường trong không gian ba chiều

2.1. Đường cong liên tục, trơn, trơn từng khúc

Tiếp tuyến và pháp diện của đường tại một điểm.

Cho đường cong L trong không gian có phương trình tham số là $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Phương trình vectơ của nó là $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$.

2.2. Vectơ pháp tuyến của đường

Cho $M_0\left(x(t_0); y(t_0); z(t_0)\right)$ thuộc L, khi đó vectơ $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$ nằm trên tiếp tuyến của L tại M_0. Giả sử các $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$ không đồng thời triệt tiêu, khi đó ta có $\vec{r}'(t_0) \neq \vec{0}$. Do đó điểm $P(X; Y; Z)$ nằm trên tiếp tuyến của L tại M_0 khi và chỉ khi vectơ $\overrightarrow{M_0P}$ đồng phương với vectơ $\vec{r}'(t_0)$, tức là

$$\frac{X - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{Y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{Z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Đây chính là phương trình tiếp tuyến của L tại M_0.

Đường thẳng đi qua M_0 vuông góc với tiếp tuyến của L tại đó được gọi là pháp tuyến của L tại M_0.

Phương trình pháp diện của đường cong L tại điểm $M_0 \in L$ là

$$\left(X - x(t_0)\right)x'(t_0) + \left(Y - y(t_0)\right)y'(t_0) + \left(Z - z(t_0)\right)z'(t_0) = 0.$$

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

$$x = R\cos^2 t,\ y = R\sin t\cos t,\ z = R\sin t \text{ tại } t = \frac{\pi}{4}$$

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến và pháp diện của đường cong

$$z = x^2 + y^2,\ x = y \text{ tại điểm } (1;1;2)$$

• **Đường chính quy:** đường chứa gồm toàn các điểm chính quy

• Giả sử đường cong L có tiếp tuyến dương MT tại M, tiếp tuyến dương $M'T'$ tại M'. Đặt $\Delta\alpha = \left(\overrightarrow{MT}, \overrightarrow{M'T'}\right)$, $\Delta s = \overset{\frown}{MM'}$. Giới hạn (nếu có) của tỉ số $\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$ khi M' dần đến M trên đường L được gọi là độ cong của đường cong L tại M, kí hiệu là $C(M)$.

Người ta chứng minh được công thức tính độ cong của đường L là

$$C = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{3/2}}$$

Ví dụ 1. Tính độ cong của đường đinh ốc trụ tròn xoay $x = a\cos wt$, $y = a\sin wt$, $z = akt$

Ví dụ 2. Tính độ cong của đường $x = \ln\cos t$, $y = \ln\sin t$, $z = t\sqrt{2}$ tại $(x\,;y\,;z)$

2.3. Độ dài của đường

Cho đường cong Γ liên tục: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a\,;b]$;

phân hoạch π trên $[a\,;b]$: $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Độ dài đường gấp khúc $l_\pi = \sum\limits_{i=1}^{n} \left|M(t_{i-1})M(t_i)\right|$

Định nghĩa. Cho tập hợp $\{l_\pi : \pi \in P\}$, P là phân hoạch $[a\,;b]$, ta bảo Γ khả trường (có độ dài) nếu $l(\Gamma) = \sup\limits_{\pi \in P} l_\pi$

Định lí 1. Nếu ánh xạ $t \mapsto M(t), t \in [a\,;b]$ có đạo hàm $\vec{M}'(t) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$ và $\left|\vec{M}'(t)\right|$ bị chặn trên $[a\,;b]$ thì Γ là khả trường.

Định lí 2. Nếu ánh xạ $t \mapsto M(t), t \in [a\,;b]$ có đạo hàm $\vec{M}'(t) = \left(x'(t), y'(t), z'(t)\right)$ liên tục (trơn) trên $[a\,;b]$ thì cung Γ khả trường và có độ dài

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,dt$$

Nhận xét. Khi đường cong Γ trơn từng khúc ($\vec{M}'(t)$ liên tục từng khúc) thì Γ cũng khả trường và có công thức tính như trên.

2.4. Tham số tự nhiên của đường.

Phương trình tự hàm $X = X(s), Y = Y(s)$, s là độ dài cung.

Ví dụ. $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi, \varphi \in [0\,; 2\pi]$

$s = \int\limits_0^{\varphi} \sqrt{x'^2 + y'^2}dt = R\varphi \Rightarrow \begin{cases} X = R\cos\dfrac{s}{R} \\ Y = R\sin\dfrac{s}{R} \end{cases}$ là phương trình tự hàm

§ 3. Đường cong phẳng

3.1. Tiếp tuyến và pháp tuyến của đường

• **Điểm chính quy.** Trong hệ toạ độ Descarter, cho đường cong L có phương trình $f(x,y) = 0$. Điểm $M_0(x_0\,; y_0) \in L$ được gọi là điểm chính quy nếu $f'_x(x_0\,; y_0)$ và $f'_y(x_0\,; y_0)$ không đồng thời bằng không, là điểm kì dị trong trường hợp còn lại.

• **Vectơ pháp tuyến.** Xét điểm chính quy $M_0(x_0\,; y_0) \in L$, $\vec{n}\left(f'_x(x_0\,; y_0), f'_y(x_0\,; y_0)\right)$, $dM = (dx, dy)$ nằm trên tiếp tuyến của đường cong L tại điểm M_0, do đó $\vec{n}$ là vectơ pháp tuyến L tại M_0 (do có $\vec{n}.dM = 0$).

• **Phương trình tiếp tuyến.** Điểm $P(x, y)$ nằm trên tiếp tuyến của đường cong L tại M_0. Phương trình tiếp tuyến của đường cong L tại M_0 là

$$(x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) = 0$$

Ví dụ. Tìm pháp tuyến và phương trình tiếp tuyến của đường tròn $x^2 + y^2 = 4$ tại điểm $(1; \sqrt{3})$.

3.2. Độ cong

Cho đường cong L đơn, có tiếp tuyến tại mọi điểm. Trên đường cong L chọn một chiều làm chiều dương. Trên tiếp tuyến của L tại M, ta chọn một hướng ứng với chiều dương của L, gọi là "tiếp tuyến dương".

Định nghĩa 1. Cho M, M' là hai điểm trên L, còn $MT, M'T'$ là hai tiếp tuyến dương. Ta gọi độ cong trung bình của cung $\overset{\frown}{MM'}$ là tỉ số của góc giữa hai tiếp tuyến dương MT và $M'T'$, được kí hiệu là $C_{tb}\left(\overset{\frown}{MM'}\right)$, tức là $C_{tb}\left(\overset{\frown}{MM'}\right) = \dfrac{\alpha}{\overset{\frown}{MM'}}$, ở đó $\alpha = \left|(MT, M'T')\right|$.

Định nghĩa 2. Ta gọi độ cong của đường L tại M là giới hạn (nếu có) của độ cong trung bình $C_{tb}\left(\overset{\frown}{MM'}\right)$ khi M' dần tới M trên L, kí hiệu là $C(M)$, tức là $C(M) = \lim\limits_{M' \to M} C_{tb}\left(\overset{\frown}{MM'}\right)$.

Ví dụ 1. Đường thẳng có độ cong bằng không tại mọi điểm.

Ví dụ 2. Tính độ cong của đường tròn bán kính R.

Dưới đây ta xây dựng công thức tính độ cong cho đường cong L trong hệ toạ độ Descarter vuông góc có phương trình $y = f(x)$.

$$C(M) = \frac{|y''|}{\left(1 + y'^2\right)^{3/2}}.$$

Khi L được cho bởi phương trình tham số $x = x(t),\ y = y(t)$, sử dụng các công thức $\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'^3(t)}$, ta nhận được $C(M) = \frac{|x'y'' - y'x''|}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}$.

Khi L cho bởi phương trình trong toạ độ cực $r = f(\varphi)$, khi đó ta có $x = f(\varphi)\cos\varphi$, $y = f(\varphi)\sin\varphi$. Ta có $C(M) = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}}$

Ví dụ 3. Tính độ cong của parabol $y = x^2$.

Ví dụ 4. Tính độ cong của đường Ellip $x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$.

Ví dụ 5. Tính độ cong của đường $r = ae^{b\varphi},\ a > 0,\ b > 0$.

3.3. Đường tròn chính khúc, khúc tâm

Tại mỗi điểm M của đường L, vẽ pháp tuyến hường về phía lõm của L, trên đó lấy một điểm I sao cho $MI = \frac{1}{C(M)}$. Đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{1}{C(M)}$ được gọi là đường tròn chính khúc của L tại M. Nó tiếp xúc với L tại M vì nó có chung với L đường tiếp tuyến và có cùng độ cong $C(M) = \frac{1}{R}$ với L tại M. Tâm của đường tròn chính khúc này gọi là khúc tâm, bán kính $R = \frac{1}{C(M)}$ của nó được gọi là khúc bán kính.

• Cách tính toạ độ khúc tâm $I(X, Y)$:

Nếu $L : y = f(x)$ thì có: $X = x - \frac{y'\left(1 + y'^2\right)}{y''}$, $Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$.

Nếu L được cho bởi phương trình tham số $x = x(t), y = y(t)$ thì có

$$X = x - \frac{y'\left(x'^2 + y'^2\right)}{x'y'' - y'x''},\ Y = y + \frac{x'\left(x'^2 + y'^2\right)}{x'y'' - y'x''}$$

Ví dụ 1. Đường tròn chính khúc của đường tròn bán kính R là chính nó.

Ví dụ 2. Đường thẳng không có đường tròn chính khúc. Điều này là hiển nhiên vì đường thẳng có độ cong bằng 0.

Ví dụ 3. Viết phương trình đường tròn chính khúc với đường $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $(1;1)$.

3.4. Đường túc bế, đường thân khai

Định nghĩa. Ta gọi quỹ tích các khúc tâm của đường L (nếu có) là đường túc bế của đường L.

Ví dụ 1. Lập phương trình túc bế của đường $y = x^{3/2}$.

Ví dụ 2. Tìm đường túc bế của parabol $y^2 = 2px,\ p > 0$.

Ví dụ 3. Viết phương trình đường túc bế của ellip $x = a\cos t, y = b\sin t$.

Định nghĩa. Cho Γ là đường túc bế của đường L, khi đó L được gọi là đường thân khai của Γ.

Từ các ví dụ trên ta có

- đường $y = x^{3/2}$ là đường thân khai của đường $X = -\frac{9}{2}x^2 - 2x, Y = \frac{4}{3}\sqrt{x}(3x+1)$
- Parabol $y^2 = 2px$ là đường thân khai của đường $y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$
- Ellip $x = a\cos t, y = b\sin t$ là đường thân khai của đường $x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t, y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t$

Tính chất 1. Pháp tuyến tại mỗi điểm $M(x\,;\,y)$ của đường L là tiếp tuyến của đường túc bế Γ của L tại khúc tâm I ứng với M

Tính chất 2. Độ dài một cung trên đường Γ bằng trị số tuyệt đối của hiệu các khúc bán kính của đường thân khai L của nó tại hai mút của cung ấy, nếu dọc theo cung này khúc bán kính biến thiên đơn điệu.

Từ tính chất này ta nhận thấy đường thân khai của đường L là quỹ tích của một điểm A trên nửa đường thẳng MA tiếp xúc với L tại M khi nửa đường thẳng này lăn không trượt trên Γ.

3.5. Hình bao của một họ đường cong phụ thuộc tham số

Cho một họ đường cong L phụ thuộc một hay nhiều tham số. Nếu mọi đường cong của họ L đều tiếp xúc với một đường E và ngược lại tại mỗi điểm của đường E có một đường của họ L tiếp xúc với E tại điểm ấy thì E được gọi là hình bao của họ đường cong L.

Ví dụ 1. Họ đường tròn một tham số c: $(x - c)^2 + y^2 = R^2$, với bán kính R

Ví dụ 2. Họ đường thẳng một tham số $x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = 0$.

Ví dụ 3. Họ đường thẳng một tham số: $y - cx = 0$, c là tham số.

Ví dụ 4. Đường túc bế của một đường L là hình bao của họ các đường pháp tuyến của L (Xem tính chất 1 của đường túc bế). Do đó đường túc bế của L còn được gọi là đường pháp bao của L.

Định lí. Cho họ đường $F(x, y, c) = 0$ phụ thuộc tham số c. Nếu các đường của họ ấy không có điểm kì dị, thì hình bao E của họ này được xác định bằng cách khử c từ hai phương trình $\begin{cases} F(x, y, c) = 0 \\ F'_c(x, y, c) = 0 \end{cases}$.

Chú ý. Nếu họ đường cong $F(x, y, c) = 0$ có điểm kì dị thì hệ trên gồm cả phương trình hình bao E và quỹ tích các điểm kì dị. Hình bao không lấy những điểm kì dị

Ví dụ 1. Tìm hình bao của họ đường thẳng $x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1 = 0$.

Ví dụ 2. Tìm hình bao của họ parabol bán lập phương $(y - c)^2 = (x - c)^3$

Ví dụ 3. Xét họ quỹ đạo của viên đạn bắn từ một khẩu pháo với vận tốc v_0, phụ thuộc vào góc bắn α. Trong hệ trục toạ độ Descarter, phương trình chuyển động của viên đạn là $\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t\sin\alpha \end{cases}$,

ở đó g là gia tốc trọng trường.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!