PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 12

CHƯƠNG 3. PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE

§1. Phép biến đổi Laplace và phép biến đổi ngược

- Phép biến đổi Laplace
- Tính chất của phép biến đổi Laplace
- Phép biến đổi Laplace ngược

1. Đặt vấn đề

• Thường gặp trong thực tế các phương trình vi phân

$$mx'' + cx' + kx = F(t); \qquad LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

tương ứng với hệ thống giảm sóc và chuỗi mạch RLC, $F(t)$ và $E'(t)$ nói chung là gián đoạn, khi đó phương pháp như đã biết khá bất tiện. Có hay không phương pháp tiện lợi hơn?

• Phép biến đổi Laplace: $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$ biến phương trình vi phân với ẩn hàm $f(t)$ thành một phương trình đại số với ẩn hàm $F(s)$ - có lời giải được tìm ra dễ hơn nhiều. Chẳng hạn như đối với phương trình vi phân cấp cao

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots a_{n-1}y' + a_ny = f(x),$$

với điều kiện ban đầu nhận được công thức nghiệm tường minh biểu diễn qua tích chập Laplace.

• Giải một lớp phương trình vi phân cấp cao với hệ số hàm số (điều này không thể làm được với các phương pháp đã biết), chẳng hạn $xy'' - (4x+1)y' + 2(2x+1)y = 0$

• Giải hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp cao

$$\begin{cases} y_1^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k}y_k + f_1(x) \\ \vdots \\ y_n^{(n)} = \sum\limits_{k=n}^{n} a_{nk}y_k + f_n(x) \end{cases}$$

• Giải một lớp hệ phương trình vi phân tuyến tính cấp cao với hệ số hàm số.

2. Phép biến đổi Laplace

• **Định nghĩa:** $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int\limits_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$, ở đó $s, f(t) \in \mathbb{R}$

• **Nhận xét.** Phép biến đổi Laplace xác định với $s, f(t) \in \mathbb{C}$. Nhưng trong chương này ta chỉ cần sử dụng $s, f(t) \in \mathbb{R}$

Ví dụ 1. Tính $\mathcal{L}\{1\}(s)$

- $= \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-bs} + \frac{1}{s}\right] = \frac{1}{s}$, $s > 0$
- Không tồn tại $\mathcal{L}\{1\}(s)$ khi $s \le 0$.

Ví dụ 2. $f(t) = e^{at}$, $t \ge 0$. Tính $\mathcal{L}\left(e^{at}\right)$, $a \in \mathbb{R}$.

- $\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{e^{(s-a)t}}{s-a}\right)\Bigg|_0^b$

$= \lim_{b\to\infty}\frac{1}{s-a}\left(1 - e^{-(s-a)b}\right) = \frac{1}{s-a}$, nếu $s > a$

- Phân kì khi $s \le a$

Ví dụ 3. Cho $f(t) = t^a$, $a > -1$. Tính $\mathcal{L}\{f(t)\}$ và $\mathcal{L}\left\{t^n\right\}, n \in \mathbb{N}$

- $\mathcal{L}\left\{t^a\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}t^a dt$.
- Đặt $u = st \Rightarrow t = \frac{u}{s}$, $dt = \frac{du}{s}$ có $\mathcal{L}\left\{t^a\right\} = \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^a du = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$, $s > 0$ (2.1)
- $\mathcal{L}\left\{t^n\right\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$

3. Tính chất của phép biến đổi Laplace

Định lý 1. Tính tuyến tính của phép biến đổi Laplace

Cho α, β là hằng số và $\exists\ \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ và $\mathcal{L}\{g(t)\}(s)$, khi đó

$$\mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\}(s) = \alpha\mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \beta\mathcal{L}\{g(t)\}(s),\ \forall s$$

Chứng minh. +) $\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right)dt$

+) $= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\left(\alpha f(t) + \beta g(t)\right)dt$

+) $= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\alpha f(t)dt + \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}\beta g(t)dt$

+) $= \alpha\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + \beta\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$

+) $= \alpha\mathcal{L}\{f\} + \beta\mathcal{L}\{g\}$.

Ví dụ 4. Tính $\mathcal{L}\left\{3t^2 + 4t^{\frac{3}{2}}\right\}$

- Ta có $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$
- $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{3}{2}+1\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{2}.\frac{1}{2}.\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
- $\mathcal{L}\left\{3t^2+4t^{\frac{3}{2}}\right\}=3\mathcal{L}\left\{t^2\right\}+4\mathcal{L}\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\}$

Sử dụng (2.1) ta có

- $\mathcal{L}\left\{t^2\right\}=\frac{\Gamma(3)}{s^3}=\frac{2!}{s^3},\ s>0$
- $\mathcal{L}\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{3\sqrt{\pi}}{4.s^{\frac{5}{2}}}$
- $\mathcal{L}\left\{3t^2+4t^{\frac{3}{2}}\right\}=3.\frac{2!}{s^3}+4\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}}=\frac{6}{s^3}+3\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}$

Ví dụ 5. Tính $\mathcal{L}\{\cosh kt\}$, $\mathcal{L}\{\sinh kt\}$, $\mathcal{L}\{\cos kt\}$, $\mathcal{L}\{\sin kt\}$

- $\mathcal{L}\{\cosh kt\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{kt}+e^{-kt}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{L}\left\{e^{kt}\right\}+\mathcal{L}\left\{e^{-kt}\right\}\right)$
- Theo ví dụ 2 có $\mathcal{L}\{\cosh kt\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k}+\frac{1}{s+k}\right)=\frac{s}{s^2-k^2},\quad s>k>0$
- Tương tự $\mathcal{L}\{\sinh kt\}=\frac{k}{s^2-k^2},\quad s>k>0$
- $\mathcal{L}\{\cos kt\}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}\cos kt\,dt=\frac{e^{-st}}{s^2+k^2}(k\sin kt-s\cos kt)\Big|_0^{\infty}=\frac{s}{s^2+k^2}$

(hoặc $\mathcal{L}\{\cos kt\}=\mathcal{L}\left\{\frac{e^{ikt}+e^{-ikt}}{2}\right\}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ik}+\frac{1}{s+ik}\right)=\frac{s}{s^2+k^2},\quad s>0$)

- Tương tự $\mathcal{L}\{\sin kt\}=\frac{k}{s^2+k^2},\quad s>0$

Ví dụ 6. Tính $\mathcal{L}\left\{3e^{2t}+2\sin^2 3t\right\}$

- $\mathcal{L}\left\{3e^{2t}+2\sin^2 3t\right\}=\mathcal{L}\left\{3e^{2t}+1-\cos 6t\right\}$
- $=3\mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\}+\mathcal{L}\{1\}-\mathcal{L}\{\cos 6t\}$
- $=\frac{3}{s-2}+\frac{1}{s}-\frac{s}{s^2+36}$
- $=\frac{3s^3+144s-72}{s(s-2)(s^2+36)},\quad s>2$

4. Phép biến đổi Laplace ngược

Định nghĩa. Nếu $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s)$ thì ta gọi $f(t)$ là biến đổi Laplace ngược của $F(s)$ và viết $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Ví dụ 7 a. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+k^2}\right\} = \cos kt,\ s > 0$; **b.** $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-k^2}\right\} = \cosh kt,\ s > k > 0$

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$ $(s > 0)$
t	$\frac{1}{s^2}$ $(s > 0)$
$t^n\ (n \ge 0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ $(s > 0)$
$t^a\ (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$ $(s > 0)$, $\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt$ $(\mathrm{Re}\, s > 0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ $(s > a)$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$ $(s > 0)$
$\sin kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$ $(s > 0)$
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$ $(s > \lvert k\rvert)$
$\sinh kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$ $(s > \lvert k\rvert)$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$ $(s > 0)$, a>0

Bảng 4. 1. 2. Bảng các phép biến đổi Laplace

c. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-5}\right\} = 4.e^{5t}$

+) $\frac{4}{s-5} = 4\mathcal{L}\{e^{5t}\}$ +) $= \mathcal{L}\{4e^{5t}\}$ +) $= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-5}\right\} = 4e^{5t}$

d. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^4}\right\} = \frac{1}{3}t^3$

+) $\frac{2}{s^4} = \frac{2}{3!}.\frac{3!}{s^4} = \frac{1}{3}\mathcal{L}\{t^3\}$ +) $= \mathcal{L}\left\{\frac{1}{3}t^3\right\}$ +) $= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^4}\right\} = \frac{1}{3}t^3$

Nhận xét. Phép biến đổi ngược Laplace có tính chất tuyến tính.

Thật vậy, ta có

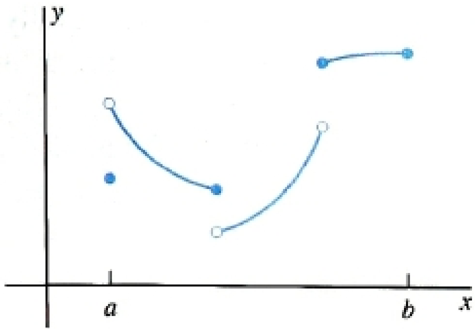
+) $\alpha F + \beta G = \alpha \mathcal{L}\{f\} + \beta \mathcal{L}\{g\} = \mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}$

+) $= \mathcal{L}\left\{\alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G\}\right\}$

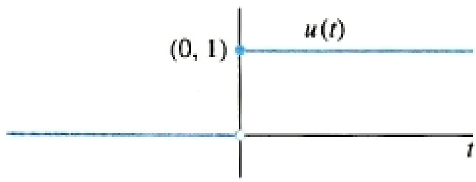
+) Từ đó và từ định nghĩa có $\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F + \beta G\} = \alpha \mathcal{L}^{-1}\{F\} + \beta \mathcal{L}^{-1}\{G\}$.

Định nghĩa. Hàm số $f(t)$ được gọi là liên tục từng khúc trên $[a;\ b]$ nếu như

- $f(t)$ liên tục trên mỗi khoảng nhỏ (ở đó $[a;\ b]$ được chia thành hữu hạn khoảng nhỏ)
- $f(t)$ có giới hạn hữu hạn khi t tiến tới hai điểm biên của mỗi đoạn này.



Hình 4.1.3. Đồ thị của hàm liên tục từng khúc.
Các dấu chấm chỉ ra các giá trị mà hàm số gián đoạn



Hình 4.1.4. Đồ thị của hàm đơn vị bậc thang

Ví dụ 8. Tính $\mathcal{L}\{u_a(t)\},\ a > 0,\ u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \ge a. \end{cases}$

- $\mathcal{L}\{u_a(t)\} = \int\limits_0^{\infty} e^{-st} u_a(t) dt = \int\limits_a^{\infty} e^{-st} dt = \lim\limits_{b \to \infty} \left(-\dfrac{e^{-st}}{s} \right) \Bigg|_{t=a}^{b}$
- $= \dfrac{1}{s} . \lim\limits_{b \to \infty} \left(e^{-sa} - e^{-sb} \right)$
- $= \dfrac{e^{-as}}{s},\ \ s > 0, a > 0$

Định nghĩa. Hàm f được gọi là bậc mũ khi $t \to +\infty$ nếu tồn tại các hằng số không âm M, c, T sao cho $|f(t)| \le Me^{ct}, \forall t \ge T$

Định lý 2. Sự tồn tại của phép biến đổi Laplace

Nếu hàm f liên tục từng khúc với $t \ge 0$ và là bậc mũ khi $t \to +\infty$ thì tồn tại $\mathcal{L}\{f(t)\}(s),\ \forall s > c$.

Chứng minh. +) Từ giả thiết f là bậc mũ khi $t \to \infty \Rightarrow |f(t)| \le Me^{ct}, \ \forall t \ge 0$

+) Ta có $\int_0^b |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^b e^{-st} |f(t)| dt \le \int_0^b e^{-st}.Me^{ct} dt = M \int_0^b e^{-(s-c)t} dt \le \dfrac{M}{s-c}, \ s > c.$

+) Cho $b \to +\infty$ có $|F(s)| \le \int_0^\infty |e^{-st} f(t)| dt \le \dfrac{M}{s-c} \Rightarrow \exists F(s), s > c.$

Từ đó, khi cho $s \to +\infty$, ta có

Hệ quả. Nếu $f(t)$ thỏa mãn giả thiết của Định lý 2 thì $\lim\limits_{s \to +\infty} F(s) = 0$

Chú ý.

• Một hàm hữu tỉ (bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu) là ảnh của phép biến đổi Laplace

• Định lí 2 không là điều kiện cần, ví dụ:

Hàm $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ không liên tục từng khúc tại $t = 0$ và là bậc mũ khi $t \to +\infty$, nhưng ở ví dụ 3 có

$$\mathrm{L}\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Định lý 3. Sự duy nhất của biến đổi Laplace nghịch đảo

Giả sử rằng các hàm $f(t), g(t)$ thỏa mãn giả thiết của Định lý 2 để tồn tại $F(s) = \mathrm{L}\{f(t)\}(s)$, $G(s) = \mathrm{L}\{g(t)\}(s)$. Nếu $F(s) = G(s), \ \forall s > c$ thì có $f(t) = g(t)$ tại t mà cả hai hàm liên tục.

Ví dụ 9. Dùng bảng tính biến đổi Laplace của các hàm số sau

a) $f(t) = \cos^2 t$ b) $f(t) = \sin 2t \cos 3t$ c) $f(t) = \cosh^2 3t$

d) $f(t) = (2+t)^2$ e) $f(t) = te^t$ f) $f(t) = t + 2e^{3t}$

Ví dụ 10. Dùng bảng tính biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau

a) $F(s) = \dfrac{2}{s^3}$ b) $F(s) = \dfrac{2}{s-3}$ c) $F(s) = \dfrac{4-2s}{s^2+4}$

d) $F(s) = \dfrac{5s-2}{9-s^2}$ e) $F(s) = 3s^{-1}e^{-5s}$

Chú ý

• Hai hàm liên tục từng khúc, là bậc mũ và bằng nhau qua phép biến đổi Laplace chỉ có thể khác nhau tại những điểm gián đoạn cô lập. Điều này không quan trọng trong hầu hết các ứng dụng thực tế.

• Phép biến đổi Laplace có một lịch sử khá thú vị: Xuất hiện đầu tiên trong nghiên cứu của Euler, mang tên nhà toán học Pháp Laplace (1749-1827) - người đã dùng tích phân trong lý thuyết xác xuất của mình, nhưng việc vận dụng phương pháp biến đổi Laplace để giải phương trình vi phân lại không thuộc về Laplace mà thuộc về kĩ sư người Anh Oliver Heaviside (1850-1925).

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!