GIẢI TÍCH I
BÀI 4.
(§1.9, §1.10)

§1.9 ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN (Tiếp theo)

5. Đạo hàm và vi phân cấp cao.

a) Đạo hàm cấp cao.

Định nghĩa. $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Ví dụ 1. a) $y = \cos x$, $y^{(n)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, tính $y^{(n)}$

c) $y = \log_a|x|$, tính $y^{(n)}$

Quy tắc. $\exists\, f^{(n)}(x), g^{(n)}(x)$

1°) $(\alpha f(x))^{(n)} = \alpha f^{(n)}(x)$

2°) $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$

3°) $\left(f(x).g(x)\right)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$

Ví dụ 2. $y = x\ln x$, tính $y^{(5)}$.

Ví dụ 3. $y = \sin ax\cos bx$, tính $y^{(20)}$

Ví dụ 4. $y = x^2\cos x$, tính $y^{(30)}$.

Ví dụ 5. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, tính $y^{(n)}$

Ví dụ 6. a)(K50) 1. $y = \dfrac{1-2x}{e^{2x}}$, tính $y^{(n)}$ $\quad ((-2)^n e^{-2x}(n + 1 - 2x))$

2 . $y = x\ln(1-3x)$, tính $y^{(n)}$ $\quad \left(\dfrac{(n-2)!3^{n-1}}{(1-3x)^n}(3x - n)\right)$

b)(K52) 1. $y = f(x)$, $\begin{cases} x = 3t + 2t^3 \\ y = te^{t^2} \end{cases}$, tính $f'(x), f''(x)$ $\quad \left(f' = \dfrac{e^{t^2}}{3},\ f'' = \dfrac{2te^{t^2}}{9\left(1+2t^2\right)}\right)$

2. $y = f(x)$, $\begin{cases} x = t + e^t \\ y = 2t - e^{2t} \end{cases}$, tính $f'(x), f''(x)$ $\quad \left(f' = 2(1-e^t),\ f'' = \dfrac{-2e^t}{1+e^t}\right)$

c)(K55) 1. $f(x) = x^2\sin(1-x)$. Tính $f^{(50)}(1)$ $\quad (-100)$

2. $f(x) = (1-x)^2\cos x$. Tính $f^{(51)}(0)$ $\quad (102)$

d)(K57) Cho $f(x) = \ln\left|\dfrac{2x-1}{2x^2 - x - 1}\right|$. Tính $f^{(2n)}(0)$ $\quad ((2n-1)!)$

e)(K60) 1. $f(x) = x^9\ln x$. Tính $f^{(10)}(1)$ $\quad (9!)$

2. $f(x) = \ln\dfrac{1}{1+x}$. Tính $f^{(10)}(0)$ $\quad (9!)$

3. $f(x)=\frac{x^3}{x-2}$. Tính $f^{(20)}(x)$ $\left(8\frac{20!}{(x-2)^{21}}\right)$

f)(K62) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$. Tính $f^{(50)}(x)$. $\left(\frac{99!}{2^{50}}\frac{1}{\sqrt{(1+x)^{101}}}, x>-1\right.$

b) Vi phân cấp cao

Định nghĩa. $d^nf = d(d^{n-1}f)$

khi x là biến số độc lập ta có $d^nf = f^{(n)}(x)dx^n$.

Ví dụ 7. $y = x^3e^x$, tính $d^{10}y$

Vi phân cấp cao không có tính bất biến

Ví dụ 8. $y = x^3$, $x = t^2$, có $d^2y \neq y^{(2)}dx^2$

Ví dụ 9(K52) a) $y = (x + 1)^2 \ln(2x + 3)$, tính $d^{11}y(-1)$, $(8!C_{11}^2 2^{10}dx^{11})$

b) $y=(1-x^2)\ln(2x-1)$, tính $d^{10}y(1)$. $(-7!C_{10}^2.2^9dx^{10})$

Ví dụ 10(K54) a) $f(x)=e^x\sin x$, tính $d^{22}f(0)$ $(-2^{11}dx^{22})$

b) $f(x)=e^x\cos x$, tính $d^{20}f(0)$ $(-2^{10}dx^{20})$

Ví dụ 11(K56) a) $f(x)=(x^3+1)\ln(1+x)$. Tính $d^7f(0)$ $(-540\,dx^7)$

b) $f(x)=(x^3-1)\ln(1-x)$. Tính $d^7f(0)$ $(-540\,dx^7)$

§ 1.10. CÁC ĐỊNH LÍ VỀ HÀM KHẢ VI VÀ ỨNG DỤNG

• Đặt vấn đề.

1. Các định lí về hàm khả vi

Định lí Fermat. $f(x)$ xác định trên $(a ; b)$, $f(x)$ đạt cực trị tại $c \in (a ; b)$, $\exists\, f'(c)$ thì $f'(c) = 0$.

Ví dụ 1. a) $y = x^2$, $x \in (-1 ; 2)$ b) $y = |x|$, $x \in (-1 ; 1)$.

Định lí Rolle. $f(x)$ liên tục trên $[a ; b]$, khả vi trên $(a ; b)$, $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, c \in (a ; b)$ sao cho $f'(c) = 0$

Ví dụ 2. $f(x) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$, $x \in [-3 ; -1]$

Ví dụ 3. $f(x)=2-\sqrt[5]{x^4}$, $x \in [-1 ; 1]$. **Ví dụ 4.** $f(x) = x^2 + 2x$, $x \in \left[-\frac{3}{2} ; 1\right]$

Ví dụ 5(K51) $f(x)$ khả vi $[0 ; 1]$, $f'(0).f'(1) < 0$. CMR $\exists\, c \in (0 ; 1)$: $f'(c) = 0$.

Ví dụ 6.

a)(K52) 1. Cho $a = b + c$. CMR phương trình $4ax^3 + 3bx^2 + c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(-1 ; 0)$.

2. Cho $a + b + c = 0$. CMR phương trình $ax^3 + 2bx + 2c = 0$ có nghiệm thuộc khoảng (0 ; 2).

b)(K54) 1.CMR: Với mọi số tự nhiên lẻ n, phương trình $x = \int_0^x (\arctan t)^n dt$ có không quá 2 nghiệm thực phân biệt

2. CMR: Với mọi số tự nhiên lẻ n, phương trình $x = \int_0^x (\operatorname{arccot} t)^n dt$ có không quá 2 nghiệm thực phân biệt.

c)(K59) Cho $6a = 4b + 3c$. CMR phương trình $ax^3 + bx^2 + c = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng (–2 ; 0).

d)(K60) 1. Hàm số $f(x) = x^2 + 2x$ có thỏa mãn định lý Rolle trên $[-\frac{3}{2}, 1]$? Kết luận của định lý Rolle có còn đúng? (không, $c = -1 \in \left(-\frac{3}{2}, 1\right): f'(c) = 0$)

2. Hàm số $f(x) = x^2 + 3x$ có thỏa mãn định lý Rolle trên $[0, 2]$? Kết luận của định lý Rolle có còn đúng? (không, $c = 1 \in (0, 2): f'(c) = 0$)

e)(K61) 1. Cho $a + b + c = 0$. CMR phương trình $6ax^5 + 5bx^4 + c = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng (0 ; 1). (3)

c)(K59) 1. Hàm số $f(x) = |x|(x-1)$, $1 \le x \le 2$ có thỏa mãn định lý Lagrange ? công thức Lagrange có đúng cho hàm đó ? (thỏa mãn, $c = \frac{3}{2}$)

2. Hàm số $f(x) = |x|(x+1)$, $-1 \le x \le 2$ có thỏa mãn định lý Lagrange ? công thức Lagrange có đúng cho hàm đó ? (không, $c = \frac{1}{2}$)

3. Cho $x_i, y_i \in (a;b), x_i > y_i$, $i = \overline{1,n}$. CMR nếu f khả vi trên (a;b) thì tồn tại số $c \in (a;b)$, sao cho $\sum_{i=1}^{n} [f(x_i)\text{-}f(y_i)] = f'(c) \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)$.

Định lí Cauchy. $f(x)$, $g(x)$ liên tục trên $[a ; b]$, khả vi trên $(a ; b) \Rightarrow \exists\, c \in (a ; b)$:

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Ngoài ra, nếu $g'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (a ; b)$ thì có

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Ví dụ 11. $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $x \in [1 ; 2]$

Ví dụ 12. $f(x) = |x|(x + 1)$, $g(x) = x$, $x \in [-2 ; 1]$

Ví dụ 13. a)(K53) 1) CMR $\forall\, x > 0$ có $3\arctan x + \arctan(x + 2) < 4\arctan(x + 1)$.

2) CMR $\forall\, x > 0$ có $2\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot}(x + 2) > 3\operatorname{arccot}(x + 1)$.

b)(K58) 1) Cho phương trình $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$, $\prod_{k=1}^{4} a_k \neq 0$, có bốn nghiệm thực phân biệt. CMR : $3(a_1)^2 > 8a_2$

2) Cho f(x) liên tục trên [0,1], khả vi trên (0,1), có f(0)=0, f(1)=1.

+) CMR : phương trình f(x)=1-x có nghiệm trong khoảng (0,1)

+) CMR : Tồn tại hai số a, $b \in (0,1)$: $f'(a)f'(b) = 1$.

c)(K59) 1. Hàm số $f(x) = |x|(x+1)$, $g(x) = x - 1$, $-1 \leq x \leq 2$ có thỏa mãn định lý Cauchy ? công thức Cauchy có đúng cho hàm đó ? (không thỏa mãn, $c = \frac{1}{2}$)

2. Hàm số $f(x) = |x|(x-1)$, $g(x) = x + 1$, $-2 \leq x \leq 1$ có thỏa mãn định lý Cauchy ? công thức Cauchy có đúng cho hàm đó ? (không thỏa mãn, $c = -\frac{1}{2}$)

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!