PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 10

§3. Phương trình vi phân cấp hai (TT)

4. Phương trình vi phân tuyến tính cấp hai có hệ số không đổi

$$y'' + py' + qy = f(x),\ p, q \in \mathbb{R} \quad (1)$$

a) Phương trình thuần nhất $y'' + py' + qy = 0$ (2)

Cách giải.

• Giải phương trình đặc trưng $k^2 + pk + q = 0$ (3)

• (3) có hai nghiệm thực $k_1 \neq k_2 \Rightarrow$ (2) có nghiệm tổng quát $\bar{y} = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$

• (3) có nghiệm kép $k_1 \Rightarrow$ (2) có nghiệm tổng quát $y = e^{k_1x}(C_1x + C_2)$

• (3) có 2 nghiệm phức $k_{1,2} = \gamma \pm i\beta \Rightarrow$ (2) có nghiệm tổng quát

$$y = e^{\gamma x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$$

Ví dụ 1.

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ **b)** $y'' + 4y' + 4y = 0$ **c)** $y'' + y' + y = 0$

d) $y'' - 4y' + 5y = 0$ **e)** $4y'' + 4y' + y = 0$ **f)** $y'' + 4y' + 3y = 0$

Giải a) • $k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = 2$

• Nghiệm tổng quát $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$

b) +) $k^2 + 4k + 4 = 0 \Leftrightarrow (k+2)^2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = -2$ +) $y = e^{-2x}(C_1x + C_2)$

c) +) $k^2 + k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ +) $y = e^{-\frac{x}{2}}\left(C_1\cos\sqrt{\dfrac{3}{2}}x + C_2\sin\sqrt{\dfrac{3}{2}}x\right)$

b) Phương trình không thuần nhất $y'' + py' + qy = f(x)$ (1)

1°/ Khi $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x), \alpha \in \mathbb{R}$

• Nếu α không là nghiệm của (3) $\Rightarrow$ nghiệm riêng của (1) có dạng $Y = e^{\alpha x}Q_n(x)$, $Q_n(x)$ là đa thức bậc n của x.

• Nếu α là nghiệm đơn của (3) $\Rightarrow$ nghiệm riêng của (1) có dạng $Y = xe^{\alpha x}Q_n(x)$.

• Nếu α là nghiệm kép của (3) $\Rightarrow$ nghiệm riêng của (1) có dạng $Y = x^2e^{\alpha x}Q_n(x)$.

Ví dụ 2. **a)** $y'' + 3y' - 4y = x$

Giải • $k^2 + 3k - 4 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 1, k_2 = -4$ • $\bar{y} = c_1e^x + c_2e^{-4x}$

• $\alpha = 0 \Rightarrow Y = Ax + B$, thay vào ta có $-4Ax + 3A - 4B = x, \forall x \Leftrightarrow A = -\dfrac{1}{4}; B = -\dfrac{3}{16}$

$\Rightarrow Y = -\dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{16}$

• Nghiệm tổng quát $y = c_1 e^x + c_2 e^{-4x} - \dfrac{x}{4} - \dfrac{3}{16}$

b) $y'' - 2y' + y = 2xe^x \quad (y = C_1 e^x + C_2 xe^x + \dfrac{x^3}{3} e^x)$

c) $y'' - y = e^x$ **d)** $y'' + y'^2 = 3e^{-y},\ y(0) = 0,\ y'(0) = \sqrt{6}$

Giải • $k^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 1$ • $\bar{y} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

• $\alpha = 1$ là nghiệm đơn $\Rightarrow Y = xe^x A$, do đó $A(xe^x + 2e^x) - Axe^x = e^x$

$\Rightarrow A = \dfrac{1}{2} \Rightarrow Y = \dfrac{1}{2} xe^x$

• Nghiệm tổng quát $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \dfrac{x}{2} e^x$

d) $y'' + 3y' - 4y = xe^{-x} + e^{-4x} \quad (y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \dfrac{x}{5} e^{-4x} - \left(\dfrac{x}{6} + \dfrac{1}{36}\right) e^{-x})$

e) $y'' - y = 2e^x - x^2 \quad (y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x + x^2 + 2)$

f) $y'' - 2y' - 3y = x(1 + e^{3x}) \quad (y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-x} + \dfrac{1}{9}(2 - 3x) + \dfrac{1}{16}(2x^2 - x)e^{3x})$

2°/ Khi $f(x) = P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x$

• Nếu $\pm i\beta$ không là nghiệm của (3) thì nghiệm riêng của (1) có dạng

$$Y = Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x,\quad l = \max(m, n)$$

• Nếu $\pm i\beta$ là nghiệm của (3) $\Rightarrow$ nghiệm riêng của (1) có dạng

$$Y = x\left[Q_l(x)\cos\beta x + R_l(x)\sin\beta x\right]$$

Ví dụ 3. **a)** $y'' + y = x\sin x$

Giải • $k^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow k = \pm i$ • $\bar{y} = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

• $\pm i\beta$ là nghiệm của phương trình đặc trưng $\Rightarrow$ nghiệm riêng có dạng

$$Y = x\left[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x\right]$$

• Tính Y', Y'' thay vào có

$[4Cx + 2(A + D)]\cos x + [-4Ax + 2(C - B)]\sin x = x\sin x,\ \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4C = 0 \\ A + D = 0 \\ -4A = 1 \\ C - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\dfrac{1}{4} \\ B = 0 \\ C = 0 \\ D = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow Y = \dfrac{x}{4}(\sin x - x\cos x)$$

• Nghiệm tổng quát $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \dfrac{x}{4}(\sin x - \cos x)$

b) $y'' + y = \cos x$ $\quad\left(y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{2}x\sin x\right)$

c) $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$

$\left(y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (0,1x - 0,12)\cos x - (0,3x - 0,34)\sin x\right)$

d) $y'' + 9y = \cos 2x$

Giải • $k^2 + 9 = 0 \Leftrightarrow k = \pm 3i$ • $\bar{y} = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$

• $Y = A\cos 2x + B\sin 2x$ • $Y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$

• $5A\cos 2x + 5B\sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow A = \dfrac{1}{5}$ và $B = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{5}\cos 2x$

• Nghiệm tổng quát $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \dfrac{1}{5}\cos 2x$

e) $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x$

$$\left(y = (C_1 + xC_2)e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{x^2}{4}e^{-3x} + x\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{25}\right)e^{2x}\right)$$

f) $y'' - 4y' - 8y = e^{2x} + \sin 2x$

$$\left(y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + 0,25e^{2x} + 0,1\cos 2x + 0,5\sin 2x\right)$$

g) $y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1$

$$\left(y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{x}{4}(3\sin 2x + 2\cos 2x) + \frac{1}{4}\right)$$

h) $y'' + y = 2x\cos x\cos 2x$

$$\left(y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x - \frac{x}{8}\cos 3x + \frac{3}{32}\sin 3x\right)$$

i) $xy'' + 2(1 - x)y' + (x - 2)y = e^{-x}$, bằng cách đặt $z = xy$

$$\left(y = C_1e^x + \frac{C_2}{x}e^x + \frac{1}{4x}e^{-x}\right)$$

k) $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ $\quad\left(y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|\right)$

l) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ $\quad\left(y = (C_1 + C_2x)e^x + xe^x\ln|x|\right)$

m) $y'' + y = \tan x$ $\left(y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln\left|\cot\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right)$

n) $y'' - y = \tanh x$ $\quad\left(y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (e^x + e^{-x})\arctan e^x\right)$

o) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 3x^2$, $x > 0$, bằng cách đặt $x = e^t$

$$\left(y = x^2(C_1 + C_2\ln x) + \frac{3}{2}x^2\ln^2 x\right)$$

Chú ý. 1/ Khi $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x\right]$, đặt $y=e^{\alpha x}z$ để đưa về 2°/ hoặc biện luận theo $\alpha\pm i\beta$ như sau :

• Nếu $\alpha\pm i\beta$ không là nghiệm của (3) thì nghiệm riêng của (1) có dạng

$$Y=e^{\alpha x}[Q_l(x)\cos\beta x+R_l(x)\sin\beta x],\ l=\max(m,n)$$

• Nếu $\alpha\pm i\beta$ là nghiệm của (3) $\Rightarrow$ nghiệm riêng của (1) có dạng

$$Y=xe^{\alpha x}\left[Q_l(x)\cos\beta x+R_l(x)\sin\beta x\right]$$

2/ Vế phải là tổng các dạng 1°/ và 2°/

3/ $f(x)$ bất kì dùng phương pháp biến thiên hằng số Lagrange

4/ Vế phải là tổng của 1°/ (hoặc 2°/) và bất kỳ.

Ví dụ 4.

a) **1)** $y''+y=xe^x+\cos x$ $\left(y=C_1\cos x+C_2\sin x+\dfrac{x}{2}\sin x+\dfrac{e^x}{2}(x-1)\right)$

2) $y''+y=\sin x+e^{-x}x$ $\left(y=C_1\cos x+C_2\sin x-\dfrac{x}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}e^{-x}(x+1)\right)$

3) $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$ $\left(y=(-x+K_1)\cos x+(\ln|\sin x|+K_2)\sin x\right)$

4) $y''+y=\dfrac{1}{\cos x}$ $\left(y=(K_1+\ln|\cos x|)\cos x+(K_2+x)\sin x\right)$

b) $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$ $\left(y=(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}\right)$

c) **1)** $y''-6y'+9y=3x-8e^{3x}$ $\left(y=(C_1+C_2x-4x^2)e^{3x}+\dfrac{x}{3}+\dfrac{2}{9}\right)$

2) $y''+2y'+y=e^{-x}+\dfrac{e^{-x}}{x}$ $\left(y=e^{-x}\left(C_1+C_2x-x+x\ln|x|+\dfrac{x^2}{2}\right)\right)$

3) $y''+y=\cot x$ $\left(y=C_1\cos x+C_2\sin x+\sin x\ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|\right)$

4) $y''+y=\tan x$ $\left(y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\ln\left|\cot\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\right)$

d) **1)** $y''-3y'+2y=3e^{2x}+2e^x\cos\dfrac{x}{2}$

$\left(y=C_1e^x+C_2e^{2x}+3xe^{2x}+\dfrac{8}{3}e^x\left(\sin\dfrac{x}{2}+2\cos\dfrac{x}{2}\right)\right)$

2) $y''-3y'+2y=e^x(3-4x)+5\sin 2x$

$\left(y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(2x+1)xe^x+\dfrac{1}{4}(3\cos 2x-\sin 2x)\right)$

3) $y''+2y'+y=4xe^x+\dfrac{e^{-x}}{x}$

$(y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + (x-1)e^{x} - x e^{-x} + x e^{-x} \ln|x|)$

4) $y'' + y = 3xe^{x} - \cot^2 x$

$(y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{3}{4} e^{x}(x-1) + 2\cos x \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|)$

e) **1)** $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x} \cos x$ $\left(y = e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1 \cos\frac{4}{5}x + C_2 \sin\frac{4}{5}x\right) - \frac{5}{9} e^{\frac{3}{5}x} \cos x\right)$

2) $5y'' - 6y' + 5y = e^{\frac{3}{5}x} \sin x$ $\left(y = e^{\frac{3}{5}x}\left(C_1 \cos\frac{4}{5}x + C_2 \sin\frac{4}{5}x\right) - \frac{5}{9} e^{\frac{3}{5}x} \sin x\right)$

f) **1)** $y'' + y = 2\cos x \cos 2x$ $(y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{8}\cos 3x + \frac{x}{2}\sin x)$

2) $y'' + 9y = 2\sin 2x \cos x$ $(y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{x}{6}\cos 3x + \frac{1}{8}\sin x)$

3) $y'' + y = \cos x + \tan x$ $(y = K_1 \cos x + K_2 \sin x + \frac{x}{2}\sin x - \frac{\cos x}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x})$

4) $y'' + y = \sin x + \cot x$ $(y = K_1 \cos x + K_2 \sin x - \frac{x}{2}\cos x - \frac{\sin x}{2}\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x})$

g) **1)** $y'' - 4y = xe^{-x} + \cos x$ $\left(C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + \left(\frac{2}{9} - \frac{x}{3}\right)e^{-x} - \frac{1}{5}\cos x\right)$

2) $y'' + 4y = xe^{x} + \sin x$ $\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \left(\frac{x}{5} - \frac{2}{25}\right)e^{x} + \frac{1}{3}\sin x\right)$

h) **1)** $y'' - 3y' + 2y = \frac{x}{e^{x}} + \cos x$ $\left(C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{x}{6} - \frac{5}{36}\right)e^{-x} + \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x.\right)$

2) $y'' + y' - 2y = \frac{x}{e^{x}} + \sin x$ $\left(C_1 e^{x} + C_2 e^{2x} + \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{-x} - \frac{1}{10}\cos x - \frac{3}{10}\sin x\right)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!