PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 14

§3. Phép tịnh tiến và phân thức đơn giản

• Quy tắc phân thức đơn giản • Sự cộng hưởng và nhân tử tích lặp bậc hai

1. Mở đầu.

Phương trình vi phân tuyến tính với hệ số hằng có nghiệm là biến đổi Laplace nghịch đảo của hàm hữu tỉ $R(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$

Cần đưa ra kĩ thuật cho phép tính $\mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}$ được thuận lợi.

2. quy tắc phân thức đơn giản

a) Quy tắc 1. Phân thức đơn giản tuyến tính

Nếu $Q(s)$ có $(s-a)^n$ thì $R(s)$ có các số hạng sau

$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\dots+\frac{A_n}{(s-a)^n},\quad A_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}$$

b) Quy tắc 2. Phân thức đơn giản bậc hai

Nếu $Q(s)$ có $\left((s-a)^2+b^2\right)^n$ thì $R(s)$ có dạng

$$\frac{A_1s+B_1}{(s-a)^2+b^2}+\frac{A_2s+B_2}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^2}+\dots+\frac{A_ns+B_n}{\left[(s-a)^2+b^2\right]^n}$$

ở đó $A_i,\ B_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}$

Định lí 1. Biến đổi trên trục s

Nếu $F(s)=\mathcal{L}\{f(t)\}$ tồn tại với $s>c$, thì tồn tại $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}$ với $s>a+c$ và có

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a)\equiv\mathcal{L}\{f(t)\}(s-a).$$

Hay tương đương với $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)\equiv e^{at}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t)$

Chứng minh. Ta có

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at}f(t)\right]dt=\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\},\ s-a>c$$

Từ kết quả này và từ bảng 4.1.2 có

$f(t)$	$F(s)$		
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$,	$s>a$	(2.1)
$e^{at}\cos(kt)$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$,	$s>a$	(2.2)

$$e^{at}\sin(kt) \qquad \frac{k}{(s-a)^2+k^2}, \quad s>a \qquad (2.3)$$

Ví dụ 1. Tìm phép biến đổi Laplace ngược của

a) $R(s)=\dfrac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}$

• $R(s)=\dfrac{s^2+1}{s(s+2)(s-4)}=\dfrac{A}{s}+\dfrac{B}{s+2}+\dfrac{C}{s-4}$

• $s^2+1=A(s+2)(s-4)+Bs(s-4)+Cs(s+2)$.

• Thay $s=0$, $s=-2$, và $s=4$ ta có

$$-8A=1,\ 12B=5,\ 24C=17 \Leftrightarrow A=-\frac{1}{8};\ B=\frac{5}{12},\ C=\frac{17}{24}$$

• $R(s)=-\dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{s}+\dfrac{5}{12}.\dfrac{1}{s+2}+\dfrac{17}{24}.\dfrac{1}{s-4}$,

• $\mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}=-\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{12}e^{-2t}+\dfrac{17}{24}e^{4t}$.

b) $F(s)=\dfrac{s^2+2s}{s^4+5s^2+4}$ $\left(f(t)=\dfrac{1}{3}(2\cos t-\sin t-2\cos 2t+2\sin 2t)\right)$

c) $F(s)=\dfrac{s^2-2s}{s^4+3s^2+2}$ $\left(f(t)=-2\cos t-\sin t+2\cos\sqrt{2}t+\sqrt{2}\sin\sqrt{2}t\right)$

Ví dụ 2. Giải bài toán giá trị ban đầu $y''+4y'+4y=t^2$; $y(0)=y'(0)=0$.

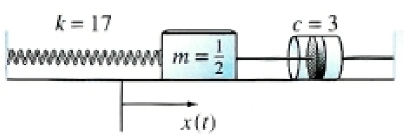
• Tác động phép biến đổi Laplace ta có $s^2Y(s)+4sY(s)+4Y(s)=\dfrac{2}{s^3}$.

• $Y(s)=\dfrac{2}{s^3(s+2)^2}=\dfrac{A}{s^3}+\dfrac{B}{s^2}+\dfrac{C}{s}+\dfrac{D}{(s+2)^2}+\dfrac{E}{s+2}$

• Đồng nhất các hệ số ta có $Y(s)=\dfrac{\frac{1}{2}}{s^3}-\dfrac{\frac{1}{2}}{s^2}+\dfrac{\frac{3}{8}}{s}-\dfrac{\frac{1}{4}}{(s+2)^2}-\dfrac{\frac{3}{8}}{s+2}$

• $y(t)=\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{1}{2}t+\dfrac{3}{8}-\dfrac{1}{4}te^{-2t}-\dfrac{3}{8}e^{-2t}$.

Ví dụ 3. Xét một hệ con lắc lò xo với $m=\dfrac{1}{2}$, $k=17$, $c=3$ đơn vị (mét, kilôgam, giây). $x(t)$ là khoảng dịch chuyển của khối lượng m từ vị trí cân bằng của nó. Nếu khối lượng được đặt ở vị trí $x(0)=3$, $x'(0)=1$. Tìm $x(t)$ là hàm của dao động tự do tắt dần.



Hình 4.3.1. Hệ khối lượng-lò xo và vật cản của Ví dụ 1

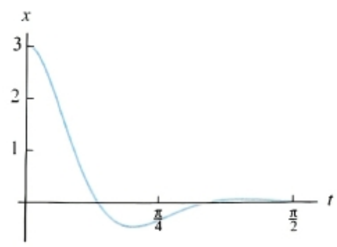
• Ta có phương trình vi phân tương ứng với bài toán là: $\frac{1}{2}x'' + 3x' + 17x = 0$ với điều kiện ban đầu $x(0) = 3$; $x'(0) = 1$

• Tác động phép biến đổi Laplace vào hai vế, chú ý $L\{0\} = 0$ ta có

$$\left[s^2X(s) - 3s - 1\right] + 6\left[sX(s) - 3\right] + 34X(s) = 0$$

• $X(s) = \dfrac{3s+19}{s^2+6s+34} = 3.\dfrac{s+3}{(s+3)^2+25} + 2\dfrac{5}{(s+3)^2+25}$

• Sử dụng (2.2), (2.3) có $x(t) = e^{-3t}(3\cos 5t + 2\sin 5t)$



Hình 4.3.2. Hàm vị trí $x(t)$ trong Ví dụ 1.

Từ hình ta thấy đồ thị của dao động tắt dần.

Ví dụ 4. a) Xét hệ con lắc lò xo - giảm xóc như trong Ví dụ 3, tuy nhiên với điều kiện $x(0) = x'(0) = 0$ và với một lực tác động bên ngoài $F(t) = 15\sin 2t$. Tìm chuyển động tức thời và ổn định của khối lượng đó.

• Ta cần giải bài toán với giá trị ban đầu

$$x'' + 6x' + 34x = 30\sin 2t;\ x(0) = x'(0) = 0.$$

• Tác động phép biến đổi Laplace vào ta có $s^2X(s) + 6sX(s) + 34X(s) = \dfrac{60}{s^2+4}$

• $X(s) = \dfrac{60}{\left(s^2+4\right)\left[(s+3)^2+25\right]} = \dfrac{As+B}{s^2+4} + \dfrac{Cs+D}{(s+3)^2+25}$.

• Đồng nhất ta có $A = -\dfrac{10}{29}$, $B = \dfrac{50}{29}$, $C = D = \dfrac{10}{29}$. Vì vậy,

• $X(s) = \dfrac{1}{29}\left(\dfrac{-10s+50}{s^2+4} + \dfrac{10s+10}{(s+3)^2+25}\right) = \dfrac{1}{29}\left(\dfrac{-10s+25.2}{s^2+4} + \dfrac{10(s+3)-4.5}{(s+3)^2+25}\right)$.

• Do đó $x(t) = \dfrac{5}{29}(-2\cos 2t + 5\sin 2t) + \dfrac{2}{29}e^{-3t}(5\cos 5t - 2\sin 5t)$.

b) $x^{(3)} + x'' - 6x' = 0,\ x(0) = 0,\ x'(0) = x''(0) = 1$

+) $\left[s^3X(s) - s - 1\right] + \left[s^2X(s) - 1\right] - 6sX(s) = 0$

+) $X(s) = \dfrac{s+2}{s^3+s^2-6s} = \dfrac{1}{15}\left(-\dfrac{5}{s} - \dfrac{1}{s+3} + \dfrac{6}{s-2}\right)$

+) $=\frac{1}{15}\left(-5L\{1\}-L\{e^{-3t}\}+6L\{e^{2t}\}\right)=L\left\{\frac{1}{15}\left(6e^{2t}-e^{-3t}-5\right)\right\}$

+) $x(t)=\frac{1}{15}\left(6e^{2t}-e^{-3t}-5\right)$

c) $x''-6x'+8x=2,\ x(0)=0=x'(0)$ $\left(x(t)=\frac{1}{4}\left(1-2e^{2t}+e^{4t}\right)\right)$

d) $x''+4x'+8x=e^{-t},\ x(0)=x'(0)=0$ $\left(x(t)=\frac{1}{10}\left[2e^{-t}-e^{-2t}(2\cos 2t+\sin 2t)\right]\right)$

e) $x^{(4)}-x=0,\ x(0)=1,\ x'(0)=x''(0)=x^{(3)}(0)=0$ $\left(x(t)=\frac{1}{2}(\cosh t+\cos t)\right)$

f) $x^{(4)}+13x''+36x=0,\ \ x(0)=x''(0)=0,\ x'(0)=2,\ x^{(3)}(0)=-13$

$\left(x(t)=\frac{1}{2}\sin 2t+\frac{1}{3}\sin 3t\right)$

g) $x^{(4)}+2x''+x=e^{2t},\ x(0)=x'(0)=x''(0)=x^{(3)}(0)=0$

$\left(x(t)=\frac{1}{50}\left[2e^{2t}+(10t-2)\cos t-(5t+14)\sin t\right]\right)$

h) $x''+6x'+18x=\cos 2t,\ x(0)=1,\ x'(0)=-1$

$\left(x(t)=\frac{1}{510}e^{-3t}(489\cos 3t+307\sin 3t)+\frac{1}{170}(7\cos 2t+6\sin 2t)\right)$

i) $x^{(3)}+x''-12x'=0,\ x(0)=0,\ x'(0)=x''(0)=1$ $\left(x(t)=-\frac{1}{6}+\frac{5}{21}e^{3t}-\frac{1}{14}e^{-4t}\right)$

k) $x^{(3)}+x''-20x'=0,\ x(0)=0,\ x'(0)=x''(0)=1$ $\left(x(t)=-\frac{1}{10}+\frac{1}{6}e^{4t}-\frac{1}{15}e^{-5t}\right)$

l) 1°/ $x^{(4)}-3x''-4x=0,\ \ x(0)=x'(0)=x''(0)=0,\ \ x'''(0)=1$

$\left(-\frac{1}{5}\sin t+\frac{1}{20}e^{2t}-\frac{1}{20}e^{-2t}\right)$

2°/ $x^{(4)}-8x''-9x=0,\ \ x(0)=x'(0)=x''(0)=0,\ \ x'''(0)=1$

$\left(-\frac{1}{10}\sin t+\frac{1}{60}e^{3t}-\frac{1}{60}e^{-3t}\right)$

m)

1°/ $x^{(6)}+4x^{(4)}-x''-4x=\sinh 2t,\ \ x^{(k)}(0)=0,\ k=\overline{0,5}$ . . .. .

. $\left(\frac{\sinh 2t-\sin 2t}{20}-\frac{\sinh t-\sin t}{15}\right)$

2°/ $x^{(6)}-4x^{(4)}-x''+4x=\sin 2t,\ x^{(k)}(0)=0,\ k=\overline{0,5}$, $\left(\frac{\sinh 2t-\sin 2t}{20}-\frac{\sinh t-\sin t}{15}\right)$

n) $x^{(4)}+4x=0\ \ x(0)=0=x'(0)=x'''(0),\ x''(0)=1.$ $\left(\frac{1}{2}\sin t\sinh 2t\right)$

3. Sự cộng hưởng và nhân tử tích lặp bậc hai

Hay dùng hai phép biến đổi Laplace ngược của hàm phân thức đơn giản trong trường hợp phân tích lặp bậc hai (nhận được khi sử dụng kỹ thuật như ở Ví dụ 5, Bài 13)

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}=\frac{1}{2k}t\sin kt;\quad L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+k^2\right)^2}\right\}=\frac{1}{2k^3}(\sin kt-kt\cos kt)$$

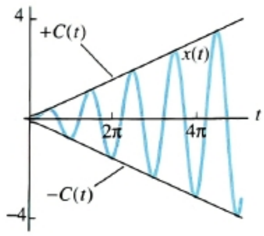
Ví dụ 5. Sử dụng phép biến đổi Laplace để giải bài toán với giá trị ban đầu

$$x''+\omega_0^2 x=F_0\sin\omega t;\ x(0)=0=x'(0)$$

• Tác động phép biến đổi Laplace vào có $s^2X(s)+\omega_0^2X(s)=\dfrac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}$

• $X(s)=\dfrac{F_0\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)\left(s^2+\omega_0^2\right)}=\dfrac{F_0\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\dfrac{1}{s^2+\omega_0^2}-\dfrac{1}{s^2+\omega^2}\right)$, $\omega\neq\omega_0\Rightarrow$ tìm được $x(t)$

• Nếu $\omega=\omega_0$ ta có $X(s)=\dfrac{F_0\omega_0}{\left(s^2+\omega_0^2\right)^2}$, khi đó $x(t)=\dfrac{F_0}{2\omega_0^2}\left(\sin\omega_0 t-\omega_0 t\cos\omega_0 t\right)$



Hình 4.3.4. Nghiệm cộng hưởng trong (18) với $\omega_0=\dfrac{1}{2}$ và $F_0=1$,

cùng với đường bao của nó $x=\pm C(t)$

Ví dụ 6. Giải bài toán với giá trị ban đầu

$$y^{(4)}+2y''+y=4te^t;\ y(0)=y'(0)=y''(0)=y^{(3)}(0)=0.$$

• Có $L\{y''(t)\}=s^2Y(s)$, $L\left\{y^{(4)}(t)\right\}=s^4Y(s)$, $L\left\{te^t\right\}=\dfrac{1}{(s-1)^2}$.

• Tác động phép biến đổi Laplace vào có $\left(s^4+2s^2+1\right)Y(s)=\dfrac{4}{(s-1)^2}$.

• $Y(s)=\dfrac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2}=\dfrac{A}{(s-1)^2}+\dfrac{B}{s-1}+\dfrac{Cs+D}{\left(s^2+1\right)^2}+\dfrac{E\,s+F}{s^2+1}$

• Dùng hệ số bất định có

$$Y(s)=\frac{1}{(s-1)^2}-\frac{2}{s-1}+\frac{2s}{\left(s^2+1\right)^2}+\frac{2s+1}{s^2+1}$$

• Do đó $y(t)=(t-2)e^t+(t+1)\sin t+2\cos t$.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!