GIẢI TÍCH 2
BÀI 4.

§ 3. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số (TT)

3.6. Tích phân suy rộng phụ thuộc tham số khác

3.6.1. Tính tich phân Dirichlet

a) Định nghĩa $I(y) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(yx)}{x} dx, \, y \in \mathbb{R}$

hàm $f(x, y) = \frac{\sin(yx)}{x}$ xác định trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, ở đó $f(0, y) = y$

b) Các tính chất.

1°/ $I(y)$ hội tụ đều trên [α ; β], với $\beta \geq \alpha > 0$ (hoặc $\beta \leq \alpha < 0$)

2°/ $I(y) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} y$

3.7. Tính liên tục

Bổ đề. Cho $I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$ hội tụ đều trên tập U và dãy số $\{a_n\}$ thoả mãn $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \infty$, $a_n > a$, $\forall\, n$. Khi đó dãy hàm $\varphi_n(y) = \int_a^{a_n} f(x, y) dx$ hội tụ đều về hàm số $I(y)$ trên U.

Định lí 1. Cho hàm f liên tục trên $[a, \infty) \times [\alpha ; \beta]$ và tích phân $I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$ hội tụ đều trên [α ; β]. Khi đó hàm $I(y)$ liên tục trên [α ; β].

Hệ quả. f liên tục và dương trên miền $[a ; \infty) \times [\alpha ; \beta]$, tích phân $\int_a^{\infty} f(x, y) dx$ hội tụ tới hàm liên tục $I(y)$ trên [α ; β]. Khi đó ta có tích phân trên hội tụ đều.

3.8. Tính khả vi

Định lí. Giả thiết rằng

1°/ Hàm f liên tục và có đạo hàm riêng f'_y liên tục trên miền $[a ; \infty) \times [\alpha ; \beta]$

2°/ Tích phân $I(y) = \int_a^{\infty} f(x, y) dx$ hội tụ trên [α ; β]

3°/ Tích phân $\int_a^{\infty} f'(x, y) dx$ hội tụ đều trên [α ; β]

Khi đó hàm $I(y)$ khả vi trên [α ; β] và đạo hàm được tính theo công thức $I'(y)=\int\limits_a^{\infty} f'_y(x,y)\,dx$

3.9. Tính khả tích

Định lí. Cho

1°/ Hàm f liên tục trên miền $[a\,;\,\infty)\times[\alpha\,;\,\beta]$

2°/ Tích phân $I(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ hội tụ đều trên [α ; β]

Khi đó $I(y)$ khả tích trên [α ; β] và có $\int\limits_{\alpha}^{\beta} dy\int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx=\int\limits_a^{\infty} dx\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\,dy$

Hệ quả. Cho

1°/ f liên tục, dương trên miền $[a\,;\,\infty)\times[\alpha\,;\,\infty)$

2°/ Các tích phân $J(x)=\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x,y)\,dy$, $I(y)=\int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx$ hội tụ tới các hàm liên tục

Khi đó nếu một trong các tích phân sau tồn tại $\int\limits_a^{\infty} dx\int\limits_{\alpha}^{\infty} f(x,y)\,dy$, $\int\limits_{\alpha}^{\infty} dy\int\limits_a^{\infty} f(x,y)\,dx$

thì tích phân còn lại cũng tồn tại và chúng bằng nhau.

3.10. Một số ví dụ.

a) Xét sự tồn tại, khả vi của các hàm $f_{\alpha}(x)=\int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}e^{ixt}\,dt$

b) Tính $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}\,dx,\ a,b>0$

c) Tính $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\sin mx\,dx,\ a,b>0$

d) Tính $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{\arctan ax}{x(1+x^2)}\,dx,\ a>0$

e) Tính $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax^2}\cos mx\,dx,\ a>0$

§ 4. Các tích phân Euler

4.1. Tích phân Euler loại 1

a) Định nghĩa. Tích phân Euler loại 1 (hay gọi là hàm Beta) là tích phân phụ thuộc hai tham số dạng $B(p,q)=\int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,\ p>0,\ q>0$

b) Tính chất

1°/ $B(p,q)$ hội tụ với $p>0$, $q>0$.

2°/ $B(p,q)$ hội tụ đều trên miền $[p_0\,;\,p_1]\times[q_0\,;\,q_1]$, ở đó $p_1>p_0>0$, $q_1>q_0>0$

3°/ Hàm $B(p, q)$ liên tục

4°/ Hàm Beta có tính đối xứng

5°/ Công thức truy hồi: $B(p+1, q+1) = \dfrac{q}{p+q+1} B(p+1, q) = \dfrac{p}{p+q+1} B(p, q+1)$.

Nói riêng $B(1, 1) = 1$, $B(p + 1, 1) = \dfrac{1}{p+1}$

$$B(p+1, n) = \frac{n!}{(p+n)(p+n-1)\cdots(p+2)} B(p+1,1) = \frac{n!}{(p+n)(p+n-1)\cdots(p+1)}$$

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!} B(1,1) = \frac{(n-1)!(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

4.2. Tích phân Euler loại 2

a) Định nghĩa. Tích phân Euler loại 2 (hay còn gọi là hàm Gamma) là tích phân phụ thuộc một tham số có dạng $\Gamma(p) = \int\limits_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx,\ p > 0$

b) Tính chất

1°/ $\Gamma(p)$ hội tụ với mọi $p > 0$, và hội tụ đều trên miền $[p_0 ; p_1]$ với $p_1 > p_0 > 0$

2°/ $\Gamma(p)$ liên tục

3°/ Công thức truy hồi $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \forall x > 0$

$$\Gamma(n + p) = (n + p - 1)(n + p - 2) \ldots p\,\Gamma(p).$$

Nói riêng $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(n + 1) = n!$; $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}$

4°/ Liên hệ với $B(p, q)$: $B(p, q) = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

4.3. Một số ví dụ tính tích phân nhờ hàm Gamma và Beta

Ví dụ 1. Tính $\int\limits_0^{\infty} e^{-t}(t-x)t^{x-1}\ln t\, dt$ $\quad (\Gamma(x))$

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_0^{\infty} x^m e^{-ax^2} dx$, a>0 $\quad \left(\dfrac{1}{2a^{\frac{m+1}{2}}} \Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)\right)$

Ví dụ 3. Tính $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2p-1}\theta \cos^{2q-1}\theta\, d\theta$, $p, q > 0$ $\quad \left(\dfrac{1}{2} B(q, p)\right)$

Ví dụ 4. Tính $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{(1+x)^{2p-1}(1-x)^{2q-1}}{(1+x^2)^{p+q}} dx$, $p, q > 0$ $\quad (2^{p+q-2} B(p, q))$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!