

## GIẢI TÍCH I

## BÀI 13

## §3.2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN (TT)

## 2. Vi phân toàn phần

**Định nghĩa.**  $f(x, y)$  xác định trên  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $M_0(x_0; y_0) \in D$ . Nếu  $\exists A, B$  không phụ thuộc vào  $\Delta x, \Delta y$  để có  $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$ , ở đó  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \alpha = 0, \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \beta = 0$

thì ta bảo hàm  $f$  khả vi tại  $M_0$  và có  $df(M_0) = A\Delta x + B\Delta y$  là vi phân toàn phần của hàm  $f$  tại  $M_0$ .

Hàm  $f$  được gọi là khả vi trong miền  $D \Leftrightarrow f$  khả vi tại  $\forall M \in D$ .

**Chú ý.**  $f(x, y)$  khả vi tại  $M_0(x_0; y_0) \Rightarrow f(x, y)$  liên tục tại  $M_0(x_0; y_0)$ .

**Ví dụ 1.** Xét tính khả vi của các hàm số sau tại  $(0; 0)$

a)  $u = x + 2y$

b)  $u = 2x + \sqrt[3]{y}$

c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases} \quad (f \text{ không liên tục tại } (0; 0) \Rightarrow \text{không khả vi})$

d)  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

e)(K50) 1.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \tan y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$   
( $f$  không liên tục tại  $(0; 0) \Rightarrow$  không khả vi)

2.  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x \sin y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (\text{không khả vi})$

f)(K62) Cho  $Z(x, y) = \sqrt[3]{x^4 + y^2}$ ,  $Z$  có khả vi tại  $(0, 0)$ ? Tại sao?  
(không có  $Z'_x(0, 0) \Rightarrow$  không khả vi)

**Định lý 1.**  $f(x, y)$  có các đạo hàm riêng cấp 1 liên tục trong lân cận  $M_0(x_0; y_0) \Rightarrow f(x, y)$  khả vi tại  $M_0(x_0; y_0)$  và có  $dz = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y$

**Ví dụ 2.** Tính vi phân toàn phần

a)  $z = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$

b)  $u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad du(3, 4, 5)$

c)  $z = \arctan xy$

d)(K59)

1)  $u = x^{y^z}$  tại  $A(3; 1; 2)$  ( $dx + 6 \ln 3 dy$ ). 2)  $u = x^{y^z}$  tại  $A(3; 1; 2)$  ( $dx + 6 \ln 2 dy$ ).

**Chú ý.** Dựa vào vi phân để tính gần đúng:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$$

**Ví dụ 3.** Tính gần đúng

a)  $(1,02)^3(0,97)^2$

b)  $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$

c)  $(1,04)^{2,02}$

d)  $\ln(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$

e)  $\sin 32^\circ \cos 59^\circ$

f) Tính gần đúng sự biến thiên của hàm số  $z = \frac{x+3y}{y-3x}$  khi  $x$  biến thiên từ  $x_1 = 2$

đến  $x_2 = 2,5$  còn  $y$  từ  $y_1 = 4$  đến  $y_2 = 3,5$ .

g) Hình chữ nhật có hai cạnh  $a = 10\text{cm}$  và  $b = 24\text{cm}$ . Đường chéo  $l$  thay đổi như thế nào nếu cạnh  $a$  dài thêm  $4\text{mm}$  còn cạnh  $b$  ngắn đi  $1\text{mm}$ ? Tính giá trị gần đúng và so sánh với giá trị đúng của nó.

h) Chiều cao của một hình nón  $h = 30\text{cm}$ , bán kính đáy  $R = 10\text{cm}$ . Thể tích của nó thay đổi như thế nào nếu tăng  $h$  thêm  $3\text{mm}$  và giảm  $R$  đi  $1\text{mm}$ ?

i)(K53) 1.  $\ln(0,02 + \sqrt[3]{1,03})$  (0,03) 2.  $\sqrt[3]{(1,97)^2 + 4e^{0,06}}$  (2,01)

k)(K55) 1.  $A = \sqrt[3]{(1,04)^3 + (2,03)^2} + 3$  (2,02)

2.  $A = \sqrt[4]{(3,04)^2 + (2,02)^3} - 1$  (2,015)

l)(K59) 1)  $\sqrt[3]{2(2,98)^3 - 3(4,01)^2} + 2$  (1,89).

2)  $\sqrt[3]{4(1,97)^2 - (3,02)^3} + 3$  (-2,085)

### 3. Vi phân hàm hợp, tính bất biến, các dạng vi phân

Cho hàm  $f: B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow B$

$$(x, y) \xrightarrow{\varphi} (u(x, y), v(x, y)) \xrightarrow{f} f(u(x, y), v(x, y))$$

**Định lý 2.**  $f$  có các đạo hàm riêng liên tục trên  $B$ , còn  $u, v$  có các đạo hàm riêng liên tục trên  $D$  thì  $f \circ \varphi$  có các đạo hàm riêng và

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \circ \varphi) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial}{\partial y}(f \circ \varphi) = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

**Chú ý.**

1°/  $z = f(x, y)$ ,  $y = y(x)$  thì có  $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(x)$

2°/  $z = f(x, y)$ ,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  thì có  $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t)$

**Ví dụ 4.** Tính

a)  $\frac{dz}{dt}$ ,  $z = \frac{x}{y}$ ,  $x = e^t$ ,  $y = \ln t$

b)  $\frac{dz}{dx}$ ,  $z = u^v$ ,  $u = \sin x$ ,  $v = \cos x$

c)  $z'(x)$  và  $\frac{dz}{dx}$ ,  $z = \arctan \frac{y}{x}$ ,  $y = x^2$

d)  $\frac{\partial z}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial v}$ ,  $z = \arctan \frac{x}{y}$ ,  $x = u \sin v$ ,  $y = u \cos v$

e)  $u = \frac{e^{zx(y-z)}}{a^2 + 1}$ ,  $y = a \sin x$ ,  $z = \cos x$ , tính  $\frac{du}{dx}$ .

### f)(K58)

1. Cho  $z=f(x(t),y(t))$ , ở đó các hàm  $f(x,y)$ ,  $x=g(t)$ ,  $y=h(t)$  khả vi và có  $g(3)=2$ ,  $g'(3)=5$ ,  $h(3)=7$ ,  $h'(3)=-4$ ,  $f'_x(2,7)=6$  và  $\frac{dz}{dt}(3)=-2$ . Tính  $f'_y(2,7)$ . (8)

2. Cho  $z=f(x(t),y(t))$ , ở đó các hàm  $f(x,y)$ ,  $x=g(t)$ ,  $y=h(t)$  khả vi và có  $g(3)=0$ ,  $g'(3)=-5$ ,  $h(3)=7$ ,  $h'(3)=4$ ,  $f'_y(0,7)=8$  và  $\frac{dz}{dt}(3)=-3$ . Tính  $f'_x(0,7)$ . (7)

### g)(K61)

Cho  $z=z(u,v)$  khả vi trên  $\mathbb{R}^2$ ,  $z_u(1,-1)=2$ ,  $z_v(1,-1)=3$ , đặt  $f(x)=z(x^2, x^3)$ . Tính  $f'(-1)$ . (5)

### h)(K62)

1) Cho  $f(x)$  khả vi cấp hai trên  $\mathbb{R}$ . CMR  $w(u,t)=f(u-3t)$  thỏa mãn phương

trình truyền sóng,  $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ .

2) CMR hàm số  $u(x,t)=e^{-16t}\cos(2x+3)$  thỏa mãn phương trình truyền nhiệt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

### Tính bất biến của vi phân cấp 1:

$$z = z(u, v), u = u(x, y), v = v(x, y) \Rightarrow dz = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv$$

**Phép toán:**  $u, v$  là các hàm khả vi, khi đó ta có

$$d(u \pm v) = du \pm dv, d(uv) = u dv + v du, d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}, v \neq 0$$

### 4. Đạo hàm của hàm ẩn

#### Khái niệm về hàm ẩn:

Hệ thức  $F(x, y) = 0$  xác định một hay nhiều hàm ẩn  $y$  theo  $x$ .

Tương tự, hệ thức  $F(x, y, z) = 0$  xác định một hay nhiều hàm ẩn  $z$  theo các biến số  $x$  và  $y$ .

Hệ hai phương trình  $\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$  xác định một hay nhiều cặp hàm số ẩn

$u, v$  của ba biến số  $x, y, z$ .

**Định lý 3.**  $F(x_0, y_0) = 0$ ,  $F(x, y)$  có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận  $M_0(x_0, y_0)$  và  $F'_x(M_0) \neq 0$  thì hệ thức  $F(x, y) = 0$  xác định hàm ẩn  $y = f(x)$  trong lân cận nào đó của điểm  $x_0$ , thỏa mãn  $y(x_0) = y_0$  và khả vi liên tục trong lân cận này, và có

$$y'(x_0) = -\frac{F'_x(M_0)}{F'_y(M_0)}$$

**Ví dụ 5.** Cho  $x^2 + y^2 = r^2$ , tính  $y'$

**Định lý 4.**  $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ ,  $F(x, y, z)$  có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  và  $F'_z(M_0) \neq 0$ , khi đó hệ thức  $F(x, y, z) = 0$  xác định hàm ẩn  $z = f(x, y)$  trong lân cận nào đó của  $(x_0, y_0)$  thỏa mãn  $z(x_0, y_0) = z_0$  liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận này, và có

$$z'_x(x_0; y_0) = -\frac{F'_x}{F'_z}(M_0), \quad z'_y(x_0; y_0) = -\frac{F'_y}{F'_z}(M_0)$$

**Định lý 5.**  $F(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$ ,  $G(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0) = 0$ , các hàm  $F(x, y, z, u, v)$ ,  $G(x, y, z, u, v)$  có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận  $M_0(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$  và định thức

$$D \equiv \frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

khi đó hệ thức  $\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0 \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$  xác định hai hàm ẩn  $u = f(x, y, z)$ ,  $v = g(x, y, z)$

trong lân cận nào đó của  $(x_0, y_0, z_0)$ , thỏa mãn  $u(x_0, y_0, z_0) = u_0$ ,  $v(x_0, y_0, z_0) = v_0$ , các hàm  $u, v$  liên tục và có các đạo hàm riêng liên tục trong lân cận này và có

$$u'_x(x_0; y_0; z_0) = -\frac{1}{D} \cdot \frac{D(F, G)}{D(x, v)}(M_0); \quad v'_x(x_0; y_0; z_0) = -\frac{1}{D} \cdot \frac{D(F, G)}{D(u, x)}(M_0).$$

Tương tự có  $u'_y(x_0; y_0; z_0)$ ,  $v'_y(x_0; y_0; z_0)$ ,  $u'_z(x_0; y_0; z_0)$ ,  $v'_z(x_0; y_0; z_0)$

### Ví dụ 6.

a)  $z^3 - 3xyz = a^3$ , tính  $dz$

b)  $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$ , tính  $dy$ .

c)  $\frac{x}{z} = \ln \frac{y}{z} + 10$ , tính  $dz$

d)  $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ , tính  $dy, dz$ .

e)  $x = u \cos v$ ,  $y = u \sin v$ ,  $z = u^2$ , tính vi phân toàn phần  $dz$ .

f)  $x = v \cos u - u \cos v + \sin u$ ,  $y = v \sin u - u \sin v - \cos u$ ,  $z = (u - v)^2$ , tính  $dz$ .

g)(K50) Phương trình  $x.e^{yz} = y + z + 1$  xác định hàm ẩn  $z(x, y)$ . Tính  $dz(0; 0)$

$(dx - dy)$

h)(K51) 1) Hàm ẩn  $z = z(x, y)$  xác định bởi phương trình  $z - ye^{x/z} = 0$ . Tính  $dz(0; 1)$

$(dx + dy)$

2) Hàm ẩn  $z = z(x, y)$  xác định bởi phương trình  $xe^{y/z} - z = 0$ . Tính  $dz(1; 0)$

$(dx - dy)$

i)(K53) 1) Phương trình  $x + 2y + z = ye^{xz}$  xác định hàm ẩn  $z = z(x, y)$ . Tính  $dz(0; 1)$

$(-2dx - dy)$

2) Phương trình  $xe^{yz} = 2x - y - z$  xác định hàm ẩn  $z = z(x, y)$ . Tính  $dz(1; 0)$

$(dx - 2dy)$

3) Phương trình  $y(z - \sqrt{x^2 - z}) = -2$  xác định hàm ẩn  $z = z(x, y)$ .

Chứng minh rằng  $\frac{1}{x}z'_x + y^2z'_y = 2$

4) Phương trình  $x(z - \sqrt{y^3 - z}) = 3$  xác định hàm ẩn  $z = z(x, y)$ .

Chứng minh rằng  $x^2 z'_x - \frac{1}{y^2} z'_y = -3$

k)(K55) 1)  $x^3 - 2y^3 + 3z^3 = (x + y)z$ . Tính  $dz(1; -1)$   $(-\frac{4}{9}dx + \frac{5}{9}dy)$

2)  $3x^3 + 2y^3 + z^3 = (x + y)z$ . Tính  $dz(-1; 1)$   $(-\frac{8}{3}dx - \frac{5}{3}dy)$

l)(K56) 1)  $\sin(x - z) = e^{y-z}$ , tính  $z'_x + z'_y$  (1)

2)  $\cos(z + y) = e^{z+x}$ , tính  $z'_x + z'_y$  (-1)

m)(K57) 1) Cho  $x(z - \sqrt{y - z}) = -1$ . CMR  $x^2 z'_x + z'_y = 1$

2) Cho  $y(z - \sqrt{x - z}) = -1$ . CMR  $z'_x + y^2 z'_y = 1$

n)(K58)

1) Cho  $yz = \ln(x + z)$ . Tính  $z'_x, z'_y$  ( $z'_x = \frac{1}{y(x+z)-1}, z'_y = \frac{z(x+z)}{1-y(x+z)}$ )

2) Cho  $x - z = \arctan(yz)$ . Tính  $z'_x, z'_y$  ( $z'_x = \frac{1+(yz)^2}{1+y+(yz)^2}, z'_y = \frac{-z}{1+y+(yz)^2}$ )

o)(K59) 1) Cho  $x^3 + 2xy^2 + 2yz + z^3 = 2$ . Tính  $z'_x(1; 0), z'_y(1; 0)$   $(-1; -\frac{2}{3})$

2) Cho  $2x^2y + 4y^2 + x^2z + z^3 = 3$ . Tính  $z'_x(0; 1), z'_y(0; 1)$   $(0; -\frac{8}{3})$

p)(K60) Cho  $x^2 \arctan z + 2xy^2 + y^4 + 2z^3 = 1$ . Tính  $z'_x, z'_y$ .

( $z'_x = -\frac{(2x \arctan z + 2y^2)(z^2 + 1)}{x^2 + 6z^2(z^2 + 1)}, z'_y = -\frac{4(xy + y^3)(z^2 + 1)}{x^2 + 6z^2(z^2 + 1)}$ )

2) Cho  $x^3 + y^2 \arctan z - 4x^2y + 2y + z^5 = 2$ . Tính  $z'_x, z'_y$ .

( $z'_x = -\frac{(3x^2 - 8xy)(z^2 + 1)}{y^2 + 5z^4(z^2 + 1)}, z'_y = -\frac{2(y \arctan z - 2x^2 + 1)(z^2 + 1)}{y^2 + 5z^4(z^2 + 1)}$ )

3) Cho  $x^3 + 2y^3 + 3x^2y = 2$ . Tính  $y'(0)$ . (0)

q)(K61) Phương trình  $x^3 - y^3 + 3xy - 13 = 0$  xác định hàm ẩn  $y = y(x)$ . Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm ẩn này, tại điểm  $A(-1; -2)$ .

( $y = -\frac{x+11}{5}$ ).

Have a good understanding!