

GIẢI TÍCH I

BÀI 10

§2.3. TÍCH PHÂN SUY RỘNG (TT)

2. Các dấu hiệu hội tụ

Hệ quả. Nếu có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0; +\infty) \Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx, \int_a^\infty g(x) dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Nếu có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ và $\int_a^\infty g(x) dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ hội tụ

Nếu có $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ và $\int_a^\infty g(x) dx$ phân kì $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ phân kì

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ, phân kì

a) $\int_1^\infty \frac{1+x^3}{x^4+1} dx$

b) $\int_1^\infty \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$

c) $\int_0^\infty \frac{x^{10} dx}{(x^4 + x^3 + x^2 + 1)^3}$

d) $\int_0^\infty \frac{x \arctan x}{\sqrt[3]{1+x^4}} dx$

e) $\int_{10}^\infty \frac{dx}{x \ln(\ln x)}$

f) $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$

g)(K50) $\int_0^\infty \frac{\ln^\alpha(3+2x)}{2+x} dx$

(HT với $\alpha < -1$, PK với $\alpha \geq -1$)

h)(K54) 1. $\int_{-\infty}^0 x \cdot 2^{2x-1} dx$

(HT)

2. $\int_{-\infty}^0 x \cdot 3^{2x+1} dx$

(HT)

i)(K57) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x\sqrt{2-3x}}$

(HT)

k)(K58) $\int_0^{+\infty} (\sqrt[4]{x^4+1} - x) dx$

(HT)

m)(K59) 1) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(2+x)}{x} dx$

(PK).

2) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \alpha > 0$

(HT)

n)(K60) $\int_1^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{4}{x}\right) dx$

(HT).

n)(K61) $\int_0^{+\infty} \frac{x+2}{x^4-x^2+3} dx$

(HT).

b) $f(x)$ có dấu tùy ý. Nếu $\int_a^\infty |f(x)| dx$ hội tụ $\Rightarrow \int_a^\infty f(x) dx$ hội tụ. Khi đó ta bảo

$\int_a^\infty f(x) dx$ hội tụ tuyệt đối

Còn nếu $\int_a^{\infty} f(x) dx$ hội tụ mà $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$ phân kì thì ta bảo $\int_a^{\infty} f(x) dx$ bán hội tụ.

Tiêu chuẩn Dirichlet. Nếu $F(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$ bị chặn khi $x \rightarrow +\infty$ thì $\int_a^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} dx$

hội tụ $\forall \alpha > 0$ ($a > 0$).

Ví dụ 3. Xét hội tụ, phân kì

a) $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt[3]{2+x}}$

c) $\int_1^{\infty} \frac{(\sqrt{x}-1) dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x^3+1}}$

d) $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x^2} \cos x}{x^2} dx$

e) $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x^k \ln x}$

f) $\int_1^{\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} x^k dx$

g) $\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{b^2 + x^2} dx, a, b > 0$

h) $\int_1^{\infty} e^{\sin x} \frac{\sin 2x}{x^\lambda} dx, \lambda > 0$

i) $\int_0^{\infty} \cos x^2 dx$

II. Tích phân suy rộng của hàm không bị chặn

1) Định nghĩa. $f(x)$ bị chặn và khả tích trên $[a; b - \eta]$, $\forall \eta \in (0; b - a)$, $f(b - 0)$ không giới nội (khi đó b được gọi là điểm bất thường), khi đó

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\eta} f(x) dx.$$

Ta bảo tích phân suy rộng hội tụ nếu về phải tồn tại (hữu hạn) và phân kì trong trường hợp còn lại.

Tương tự nếu $f(x)$ khả tích trên $[a + \eta; b]$, $\forall \eta \in (0; b - a)$, và $f(a + 0)$ không bị

chặn (khi đó a là điểm bất thường), khi đó $\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{a+\eta}^b f(x) dx$

Tích phân suy rộng hội tụ \Leftrightarrow về phải tồn tại (hữu hạn)

- Nếu $f(x)$ không bị chặn tại $x = c \in (a; b)$, khi đó ta có $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Tích phân suy rộng ở về trái hội tụ \Leftrightarrow cả hai tích phân suy rộng ở về phải hội tụ

Ví dụ 1. Tính hoặc xét sự phân kì

a) $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^\alpha}$ (HT với $\alpha < 1$, PK với $\alpha \geq 1$)

b) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c) $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \ln^2 x}$

d) $\int_0^1 \frac{e^x}{x^3} dx$

e) $\int_0^1 x \ln x dx$

$$\text{f)} \int_3^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x-3)(5-x)}}$$

$$\text{g)} \int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$\text{h)} \int_{-1}^1 \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$\text{i)} \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2 + 2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{k)} \int_0^1 (\ln x)^n dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\text{l)} \int_{-1}^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

2. Các dấu hiệu hội tụ

a) $f(x) \geq 0$

Định lý. $f(x)$ có b là điểm bất thường, có $f(x) \leq g(x), \forall x \in (a; b - \varepsilon)$. Khi đó

$$\text{Nếu } \int_a^b g(x) dx \text{ hội tụ} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ hội tụ}$$

$$\text{Nếu } \int_a^b f(x) dx \text{ phân kì} \Rightarrow \int_a^b g(x) dx \text{ phân kì.}$$

Hệ quả. $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = k \in (0; +\infty) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx$ và $\int_a^b g(x) dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

$$\text{Nếu } k = 0, \text{ từ } \int_a^b g(x) dx \text{ hội tụ} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ hội tụ}$$

$$\text{Nếu } k = +\infty, \text{ từ } \int_a^b g(x) dx \text{ phân kì} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ phân kì.}$$

b) $f(x)$ có dấu thay đổi.

$$\text{Nếu } \int_a^b |f(x)| dx \text{ hội tụ} \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ hội tụ, khi đó } \int_a^b f(x) dx \text{ hội tụ tuyệt đối}$$

$$\text{Nếu } \int_a^b f(x) dx \text{ hội tụ còn } \int_a^b |f(x)| dx \text{ phân kì thì ta nói } \int_a^b f(x) dx \text{ bán hội tụ.}$$

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ, phân kì của tích phân sau

$$\text{a)} \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

$$\text{b)} \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}} - 1}$$

$$\text{c)} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}$$

$$\text{d)} \int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}$$

$$\text{e)} \int_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}} dx$$

$$\text{f)} \int_0^{\pi/2} \frac{\ln(\sin x)}{\sqrt{x}} dx$$

$$\text{g)} \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{x})}{e^{\sin x} - 1} dx$$

$$\text{h)} \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^k x}$$

$$\text{i)} \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\text{k)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(e^x - e^{-x})}}$$

$$\text{l)} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos x}{x^m} dx$$

$$\text{m)(K58) 1) } \int_0^1 \frac{\sqrt[4]{x}}{x(1-x^2)} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{2) } \int_0^1 \frac{1}{\ln(x+1+\sqrt{x^2+x})} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{n)(K59) 1) } \int_0^2 \frac{\tan x}{\sqrt{x(4-x^2)}} dx \quad (\text{PK})$$

$$\text{2) } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)\tan x}} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{l)(K61) } \int_0^1 \frac{x\sqrt{x}}{1-\cos x} dx \quad (\text{HT})$$

Chú ý. Khi f có điểm bất thường là a thì $\int_a^\infty f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^\infty f(x) dx$; khi đó tích phân suy rộng ở về trái hội tụ \Leftrightarrow cả hai tích phân suy rộng ở về phải cùng hội tụ

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ, phân kì của các tích phân sau:

$$\text{a)(K51) } \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5-1}} \quad (\text{HT})$$

$$\text{b)(K52) 1. } \int_0^\infty \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2 \ln(1+2\sqrt{x})} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{2. } \int_0^\infty \frac{2\sin x - \sin 2x}{x^3 \ln(1+3\sqrt{x})} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{c)(K53) 1. } \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{4^x - 2^x} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{2. } \int_0^\infty \frac{\sqrt[3]{x}}{9^x - 3^x} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{d) } \int_1^\infty \frac{dx}{x^p (\ln x)^q}$$

$$\text{e)(K55) 1. } \int_2^\infty \frac{\sin(x-2)}{\sqrt{(x-2)^3}} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{2. } \int_1^\infty \frac{\sin(x-1)}{\sqrt[3]{(x-1)^4}} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{3. } \int_0^\infty \frac{\ln(x^2 + e^x)}{x\sqrt{x+x^6}} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{4. } \int_0^\infty \frac{\ln(x^3 + e^x)}{x\sqrt{x+x^4}} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{f)(K56) 1) } \int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{2) } \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx \quad (\text{HT})$$

$$\text{g)(K57) Tìm } a \text{ để tích phân sau hội tụ: } \int_0^1 \frac{x^a}{x^2 - \ln(1+x^2)} dx \quad (a > 3)$$

$$\text{h)(K58) } \int_1^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x}} \quad (\text{HT})$$

$$\text{i)(K60) 1. } \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt[3]{x^2-1}} \quad (\text{HT})$$

$$\text{2. } \int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3-8}} \quad (\text{HT})$$

$$3. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^3 - 1}} dx \quad (\text{HT})$$

$$4. \int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{2x^3 + x^4}} dx \quad (\text{HT})$$

$$k)(K62) \int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{\sqrt[3]{x^{10}}} dx \quad (\text{HT})$$

Ví dụ 4. Tính

$$a) \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{\arctan(x-1) dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

$$c) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x - \cos \alpha) \sqrt{x^2 - 1}}, \quad 0 < \alpha < 2\pi$$

$$d) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$$

Nhận xét. Liên hệ giữa hai loại tích phân suy rộng ?

§4. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

I. Sơ đồ tổng tích phân, vi phân

1) Sơ đồ tổng tích phân. Giả sử cần tính $A(x)$, $x \in [a; b]$, ngoài ra $A(x)$ thỏa mãn tính chất cộng, khi đó ta tính A theo sơ đồ sau:

+) Chia $[a; b]$ thành n phần bởi các điểm chia $x_0 \equiv a < x_1 < x_2 < \dots < x_n \equiv b$

+) Phân tích A thành tổng $A = \sum_{i=1}^n A_i$, ở đó A_i là đại lượng A trên Δx_i

+) Tìm hàm số $f(x)$ sao cho $A_i \approx f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$

+) Tính gần đúng đại lượng A : $A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$

+) Sử dụng định nghĩa tích phân, có $A = \int_a^b f(x) dx$

Ví dụ 1. Tính diện tích hình thang cong

2) Sơ đồ vi phân. Cần tính $A(x)$, $x \in [a; b]$, ngoài ra $A(x)$ thỏa mãn tính chất cộng, khi đó ta tính A theo sơ đồ vi phân:

+) Lấy $x \in [a; b]$, lấy $x + dx$

+) Tính $A(x)$, $A(x + dx)$

+) Tìm phần chính bậc nhất dA của ΔA

+) Lấy tích phân của dA từ a đến b

Ví dụ 2. Cho điện tích e_1 đặt ở gốc O , tính công của lực đẩy F sản ra do điện tích e_2 di chuyển từ điểm M_1 có hoành độ r_1 đến điểm M_2 có hoành độ r_2 trên trục hoành Ox

+) Gọi $A(x)$ là công lực đẩy F sinh ra do e_2 di chuyển từ M_1 đến $M(x)$

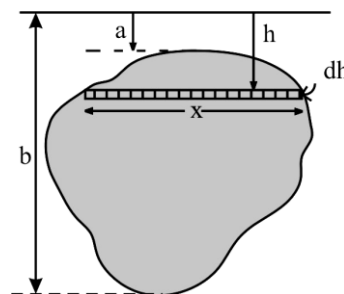
+) Vì dx khá bé nên coi F không đổi trên $[x; x + dx]$ và bằng $\frac{e_1 e_2}{x^2}$

$$+) dA = \frac{e_1 e_2}{x^2} dx$$

$$+) A = \int_{r_1}^{r_2} dA = \int_{r_1}^{r_2} \frac{e_1 e_2}{x^2} dx = e_1 e_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Ví dụ 3. Tính áp lực lên một mặt đĩa phẳng chìm trong nước trong hình

$$F = \int_a^b w h x dh, \text{ ở đó } w \text{ là trọng lượng riêng của nước} = \frac{1}{32} \text{ tấn/(ft)}^3$$



Ví dụ 4. Công của lực có độ lớn $f(x) > 0$ tác động vào vật chuyển động thẳng từ $x = a$ đến $x = b$.

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!