GIẢI TÍCH 1
BÀI 16
TÍCH PHÂN KÉP

1. Tính thể tích bằng tích phân lặp

• Đã biết công thức tính thể tích vật thể trong Giải tích I: $V = \int_a^b S(x)dx$ (0.1)

• Diện tích tiết diện thẳng $S(x)$ được tính như sau:

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \quad (0.2)$$

• Thay (0.2) vào (0.1) ta có

$$V = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy \right) dx \equiv \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$

Ví dụ 1. Tính tích phân lặp $I = \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} 2ydy \right) dx$

Ví dụ 2. Sử dụng tích phân lặp tính thể tích tứ diện giới hạn bởi các mặt phẳng toạ độ và mặt phẳng

$$x + y + z = 1.$$

2. Tích phân hai lớp trên hình chữ nhật đóng

2.1. Định nghĩa

a) Phân hoạch π chia hình chữ nhật $R = [a\,;b] \times [c\,;d]$ thành hữu hạn các hình chữ nhật đóng, đôi một không có phần trong chung và có $|R| = \sum_{i=1}^{n} \Delta R_i$,

ΔR_i là diện tích hình chữ nhật thứ i, $|R|$ là diện tích hình chữ nhật R;
d_i là đường chéo hình chữ nhật ΔR_i, $d(\pi) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} d_i$

b) Tổng tích phân

$$\sigma = \sigma(f, \pi, p_1, ..., p_n) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta R_i, \ p_i(\xi_i, \eta_i),$$

Hàm f(x,y) xác định và bị chặn trên R

c) Các tổng Đacbu

• Tổng Đacbu dưới: $s(\pi) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta R_i$

• Tổng Đacbu trên: $S(\pi) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta R_i$, ở đó

$$m_i = \inf_{\Delta R_i} f(x, y), M_i = \sup_{\Delta R_i} f(x, y),$$

thì có

$$m|R| \le s(\pi) \le \sigma(f, \pi, p_1, ..., p_n) \le S(\pi) \le M|R|$$

d) Tổng trên không tăng, tổng dưới không giảm

• Ta bảo phân hoạch π' mịn hơn π nếu mỗi hình chữ nhật trong phân hoạch π' luôn nằm trong hình chữ nhật nào đấy của phân hoạch π

• Khi π' mịn hơn π, ta có $s(\pi) \le s(\pi') \le S(\pi') \le S(\pi)$.

e) Dãy chuẩn tắc các phép phân hoạch

Cho $\{\pi_n\}$ là dãy các phân hoạch hình chữ nhật R. Dãy $\{\pi_n\}$ được gọi là chuẩn tắc nếu $\lim_{n\to\infty} d(\pi_n) = 0$.

f) Định nghĩa tích phân kép

Cho f xác định trên hình chữ nhật đóng R, Nếu có $\lim_{n\to\infty} \sigma(f, \pi, p_1, \dots, p_n) \equiv$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta R_i = I$ (số thực hữu hạn) với mọi dãy chuẩn tắc

$$\{\pi_n\}: \pi_n = \{\Delta R_1, \Delta R_2, ..., \Delta R_{p_n}\},$$

với mọi cách chọn điểm $p_i = (\xi_i ; \eta_i) \in \Delta R_i$, thì ta có hàm f khả tích trên R và viết $\iint_R f(x, y)dx\,dy = I$.

2.2. Điều kiện khả tích

Định lí 1. Hàm f khả tích trên R đóng $\Rightarrow f$ bị chặn

Định lí 2. Cho f bị chặn trên $\bar{R}$. Khi đó f khả tích trên $R \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, bé tuỳ ý, $\exists$ phân hoạch π của R sao cho $S(\pi) - s(\pi) < \varepsilon$

Định lí 3. f liên tục trên $\bar{R}$ thì f khả tích trên R.

2.3. Tích phân hai lớp trên tập hợp bị chặn

a) Định nghĩa. R là hình chữ nhật đóng, tập bị chặn $D \subset R$, hàm f xác định trên D, và

$$f_0(x,y)=\begin{cases} f(x,y), (x,y)\in D \\ 0, \quad (x,y)\in R\setminus D\end{cases}$$

Nếu f_0 khả tích trên R thì ta bảo f khả tích trên D và định nghĩa

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\iint\limits_R f_0(x,y)dx\,dy$$

b) Tính chất

1°/ Cộng tính. $D = D_1 \cup D_2$ bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, $|D_1 \cap D_2| = 0$, f khả tích trên D_1, D_2 $\Rightarrow f$ khả tích trên D và có

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\iint\limits_{D_1} f(x,y)dx\,dy+\iint\limits_{D_2} f(x,y)dx\,dy$$

2°/ Tuyến tính. D bị chặn trong $\mathbb{R}^2$, f, g khả tích trên $D \Rightarrow \alpha f + \beta g$ khả tích trên D và có $\iint\limits_D \left[\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)\right]dx\,dy$

$$=\alpha\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy+\beta\iint\limits_D g(x,y)dx\,dy,\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

3°/ Bảo toàn thứ tự. Hai hàm f, g khả tích trên tập bị chặn $D \subset \mathbb{R}^2$, và có $f(x, y) \le g(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$. Khi đó

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy\le\iint\limits_D g(x,y)dx\,dy.$$

Hệ quả 4. Nếu $m \le f(x, y) \le M$, $\forall (x, y) \in D$, thì có

$$m|D|\le\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy\le M|D|$$

Hệ quả 5. $\left|\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy\right|\le\iint\limits_D |f(x,y)|dx\,dy$

4°/ Các định lí giá trị trung bình

Định lí 4. D là tập hợp đo được, f khả tích trên D và có $m \le f(x, y) \le M$, $\forall (x, y) \in D$. Khi đó $\exists\, \mu \in [m, M]$ sao cho $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\mu|D|$

Định lí 5. Cho D đóng, đo được, liên thông, f liên tục trên $D \Rightarrow \exists\, p(\xi, \eta) \in D$ sao cho

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=f(p)|D|.$$

2.4. Đưa tích phân hai lớp về tích phân lặp

a) Định lí Fubini trên hình chữ nhật. *f* khả tích trên hình chữ nhật $R = [a\,;b] \times [c\,;d]$

1°/ Nếu tồn tại $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ với *x* cố định $\in$ [*a* ; *b*] $\Rightarrow \varphi(x) = \int\limits_c^d f(x,y)dy$ khả tích trên [*a* ; *b*] và có $\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b \left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx$ (4.1)

2°/ $\exists$ $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, với *y* cố định thuộc [*c* ; *d*] $\Rightarrow \psi(y) = \int\limits_a^b f(x,y)dx$ khả tích trên [*c* ; *d*] và có $\iint\limits_R f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d \left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right]dy$ (4.2)

Nói riêng, nếu có *f* liên tục trên *R* thì ta có đồng thời (4.1), (4.2)

Ví dụ 1. $\iint\limits_R (x+y)^2 dxdy$, *R* = [0 ; 1]×[0 ; 2]

Ví dụ 2. $\iint\limits_R \frac{x^2 dxdy}{1+y^2}$, *R* = [0 ; 1]×[0 ; 1]

b) Định lí Fubini trên tập hợp bị chặn

1°/ φ_1, φ_2 khả tích trên [*a* ; *b*], $\varphi_1(x) \le \varphi_2(x)$, $\forall x \in$ [*a* ; *b*],

$D = \{(x\,;y): a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$

f khả tích trên *D*, $\exists$ $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, $\forall x$ cố định thuộc [*a* ; *b*].

Khi đó, $\varphi(x) = \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ khả tích trên [*a* ; *b*] và có

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (4.3)$$

Nói riêng, nếu φ_1, φ_2 liên tục trên [*a* ; *b*], *f* liên tục trên *D* thì vẫn đúng

2°/ ψ_1, ψ_2 khả tích trên [*c* ; *d*], $\psi_1(y) \le \psi_2(y)$, $\forall y \in$ [*c* ; *d*],

$D = \{(x\,;y): c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$

f khả tích trên *D* và $\exists$ $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$, $\forall$ *y* cố định thuộc [*c* ; *d*].

Khi đó $\psi(y)=\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$ khả tích trên [c ; d] và có

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx \qquad (4.4)$$

Nói riêng, nếu ψ_1, ψ_2 liên tục trên [c ; d], f liên tục trên D thì vẫn đúng

Ví dụ 1. $\iint\limits_D \left(x^2+y\right)dx\,dy$, D: $y^2=x$, $y=x^2$.

Ví dụ 2. $\iint\limits_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dx\,dy$, D: $x=1$, $y=0$, $y=x$.

Ví dụ 3. $\iint\limits_D \left|\cos(x+y)\right|dx\,dy$, D: $[0\ ;\ \pi]\times[0\ ;\ \pi]$

Ví dụ 4. $\iint\limits_D \sqrt{\left|y-x^2\right|}\,dx\,dy$, D: $[-1\ ;\ 1]\times[0\ ;\ 2]$

Ví dụ 5. Đổi thứ tự tính tích phân $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{\sqrt{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx$

Ví dụ 6. Tính $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^1 e^{-x^2}dx$

2.5. Đổi biến trong tích phân 2 lớp.

a) Đổi biến

Định lí 1. Tập mở $U\subset\mathbb{R}^2$, D là tập con đo được, compact của U, ánh xạ φ: $U\to\mathbb{R}^2$, $(u, v)\mapsto(x(u, v), y(u, v))$, ở đó

• x, y khả vi liên tục

• $\varphi|_{D^\circ}$ là đơn ánh

• Định thức Jacobi $J(u,v)=\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\equiv\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}\neq 0$ trên D°.

Khi đó

• $\varphi(D)$ là tập compact đo được

• Nếu $f:\varphi(D)\to R$ liên tục trên $\varphi(D)$ thì có

$$\iint\limits_{\varphi(D)} f(x,y)dx\,dy=\iint\limits_D f\left(x(u,v),y(u,v)\right)\left|J(u,v)\right|du\,dv$$

Ví dụ 1. Tính $\iint\limits_D x\sin(x+y)dx\,dy$, $D: 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le x$

Ví dụ 2. Tính $\iint\limits_D (2-x-y)^2 dx\,dy$, D: $0 \le x \le 1$, $-x \le y \le x$

Ví dụ 3. Tính $\iint\limits_D \arcsin\sqrt{x+y}\,dx\,dy$, $D: \begin{Bmatrix} x+y=0, y=-1 \\ x+y=1, y=0 \end{Bmatrix}$

Ví dụ 4. Tính $\iint\limits_D dx\,dy$, D: $y = x$, $y = 4x$, $xy = 1$, $xy = 2$.

b) Đổi biến trong toạ độ cực

Cho ánh xạ $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\theta, r) \mapsto (x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Ta có $J(\theta, r) = \dfrac{D(x,y)}{D(\theta,r)} = \begin{vmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -r$.

Dễ thấy φ không là song ánh, tuy nhiên thu hẹp của φ trên $A = (\alpha\,;\alpha + 2\pi) \times (0\,;+\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ là song ánh từ $A \to \mathbb{R}^2 \setminus (0\,;0)$.

Nếu D là tập compact đo được sao cho Int$D \subset U_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ thì thu hẹp của φ trên Int$D$ là đơn ánh và $J(\theta, r) \neq 0$ trên Int$D$. Khi đó với hàm số liên tục tuỳ ý $f: \varphi(D) \to \mathbb{R}$ ta luôn có $\iint\limits_{\varphi(D)} f(x,y)dx\,dy = \iint\limits_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta$

Ví dụ 1. $I = \iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dx\,dy$, D: $x^2 + y^2 \le 1$.

Ví dụ 2. $I = \iint\limits_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D: $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$.

Ví dụ 3. $I = \iint\limits_D \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

Ví dụ 4. $I = \iint\limits_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, $D: \{x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$

Ví dụ 5. $I = \iint\limits_D \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{4-(x^2+y^2)^2}}dx\,dy$, $D: \dfrac{x^2}{2} + y^2 \le 1$

c) Tích phân hai lớp trên tập đối xứng

Cho $D = D_1 \cup D_2$, $D_2 = S(D_1)$, các tập D_1, D_2 đo được và $|D_1 \cap D_2| = 0$, S là phép đối xứng

1°/ Nếu $f(S(x, y)) = f(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$ thì có $\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy = 2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dx\,dy$

2°/ Nếu $f(S(x, y)) = -f(x, y)$ thì có $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$

Ví dụ 1. Tính $I = \iint\limits_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy$, $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$

Ví dụ 2. Tính

a) $I = \iint\limits_D (x^5 - y^5)\,dx\,dy$, $D: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1$

b (K58) 1) Tính $I = \iint\limits_{x^2+y^2 \le 2y} (x^5 + 2y)\,dx\,dy$ (2π)

2) Đổi thứ tự tính tích phân $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{2-x^2} f(x,y)dxdy$.

$$\left(\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f(x,y)dx\right)$$

c (K59) 1) Tính $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy$, D: $x + 2y \le 2, x \ge 0, y \ge 0$ $\left(\dfrac{5}{6}\right)$

2) Tính $I = \iint\limits_D (x^2 + 2y)\,dx\,dy$, D là giao : $y = x^2, y = 2x$ $\left(\dfrac{88}{15}\right)$

3) Đổi thứ tự tính tích phân $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^{1+x} f(x,y)dxdy$.

$$\left(\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y}}^1 f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y-1}^1 f(x,y)dx\right)$$

4) Tính $I = \iint\limits_D \sin(x+y)\,dx\,dy$, D l : $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$ (2)

d (K60) 1) Tính $I = \iint\limits_D e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D: $a \le x^2 + y^2 \le b^2, x \ge 0, (0 < a < b)$

$$\left(\frac{\pi}{2}(e^{b^2} - e^{a^2})\right)$$

2) Tính $I = \iint\limits_D \dfrac{dxdy}{1 + x^2 + y^2}$, D: $x^2 + y^2 \le 4$ $(\pi \ln 5)$

3) Tính $I = \iint\limits_D 3x\,dxdy$, D: $0 \le x \le 2, 1 \le x + y \le 3$ (12)

4) Tính $I = \iint\limits_D (x^2 + 2y^2)dxdy$, D: $x^2 + y^2 \le 1$ $\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!