

GIẢI TÍCH I**BÀI 8****§2.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH (TIẾP THEO)****4. Tích phân của một vài lớp hàm**

b) Hàm lượng giác. $\int R(\sin x, \cos x) dx$, ở đó $R(\sin x, \cos x)$ là hàm hữu tỉ đối với các biến

$$\text{Đặt } t = \tan \frac{x}{2}, -\pi < x < \pi \Rightarrow \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt$$

Chú ý. +) $R(\sin x, \cos x)$ chẵn với $\sin x$ và $\cos x$ thì đặt $t = \tan x$ hoặc $t = \cot x$
 +) $R(\sin x, \cos x)$ lẻ với $\sin x$ thì đặt $t = \cos x$
 +) $R(\sin x, \cos x)$ lẻ với $\cos x$ thì đặt $t = \sin x$

Ví dụ 1.

a) $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$

c) $\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 3}$

e) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$

g) $\int \frac{dx}{(\sin x + \cos x)^2}$

i) $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - \cos^2 x}$

l)(K54) 1. $\int \frac{\tan x}{1 + \cos^2 x} dx$

2. $\int \frac{\cot x}{1 + \sin^2 x} dx$

m)(K60) $\int \frac{dx}{-3 \sin x + 4 \cos x + 5}$

n)(K61) $\int \frac{dx}{5 \cos x + 12 \sin x + 13}$

b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$

d) $\int \frac{\cos 2x dx}{\cos^4 x + \sin^4 x}$

f) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x - \sin^2 x - 1} dx$

h) $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$

k) $\int \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$

$\left(-\frac{1}{2} \ln \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} + C\right)$

$\left(\frac{1}{2} \ln \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} + C\right)$

$\left(\frac{2}{3 - \tan \frac{x}{2}} + C\right)$

$\left(\frac{1}{2(2 \tan \frac{x}{2} + 3)} + C\right)$

c) Tích phân các hàm số vô tỉ $\int R(x, \sqrt{Ax^2 + Bx + C}) dx$ và $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

1°) $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, đặt $x = a \sin t$ hoặc $x = a \cos t$ đưa về tích phân hàm lượng giác (4b).

2°) $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx$, đặt $x = a \tan t$ hoặc $x = a \cot t \Rightarrow (4b)$

3°) $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, đặt $x = \frac{a}{\cos t}$ hoặc $x = \frac{a}{\sin t} \Rightarrow (4b)$.

Ví dụ 2.

a) $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx$

b) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

c) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$

d) $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} dx, a > 0$

e) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$

f) $\int \sqrt[3]{\frac{2-x}{2+x}} \frac{dx}{(2-x)^2}$

g) $\int x\sqrt{-x^2+3x-2} dx$

h) $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$

i) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$

k) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x-x^2}}$

l) (K51) 1. $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+2x-3}} dx \quad (\sqrt{x^2+2x-3} + 3\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x-3}| + C)$

2. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x-5}} dx \quad (\sqrt{x^2+4x-5} + \ln|x+2+\sqrt{x^2+4x-5}| + C)$

m) (K59) $\int \frac{x+2}{\sqrt{-x^2+2x}} dx \quad (-\sqrt{-x^2+2x} + 3\arcsin(x-1) + C)$

n) (K60) $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (2\sqrt{x^2+1} + \ln(x+\sqrt{x^2+1}) + C)$

o) (K61) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2-2x-1}} dx \quad (\sqrt{x^2-2x-1} + 2\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x-1}) + C)$

Ví dụ 3. Dùng phép thế Euler để tính

• $A > 0$, đặt $\sqrt{Ax^2+Bx+C} = t \pm \sqrt{Ax}$

• $C > 0$, đặt $\sqrt{Ax^2+Bx+C} = xt \pm \sqrt{C}$

• Nếu $Ax^2+Bx+C = A(x-\lambda)(x-\mu)$, đặt $\sqrt{Ax^2+Bx+C} = t(x-\lambda)$ hoặc $t(x-\mu)$ sẽ đưa về tích phân hàm hữu tỉ.

a) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$

b) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$

c) $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2-a^2}}$

d) $\int \frac{x^2-1}{(x^2+1)\sqrt{x^4+1}} dx$

Chú ý. Có những hàm không có nguyên hàm sơ cấp:

- $e^{\pm x^2}$, $\cos x^2$, $\sin x^2$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$, $\sqrt{1-x^3}$, $\frac{1}{\sqrt{1-x^3}}$ (Chứng minh

bởi Liouville (Pháp) vào thế kỉ 19).

- Một số công thức hay dùng

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

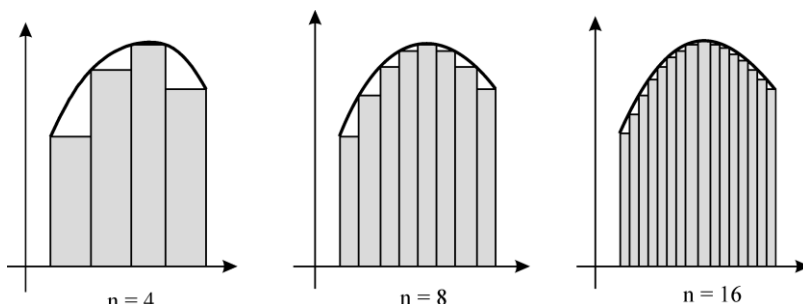
§2.2. TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

Đặt vấn đề

I. Định nghĩa.

1) Ý nghĩa hình học:

+) Bài toán diện tích hình thang cong: $f(x)$ liên tục và không âm trên $[a; b]$, khi đó diện tích của hình thang cong $0 \leq y \leq f(x)$, $a \leq x \leq b$



là $S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$, $\lambda = \max_{i=1, n} |\Delta x_i|$

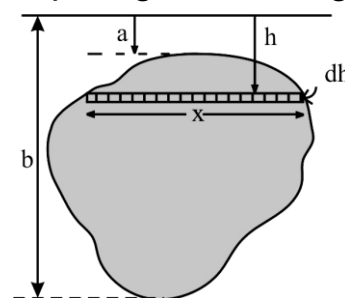
2) Ý nghĩa cơ học $\int_a^b f(x) dx$, $f(x) > 0$

- Là khối lượng của đoạn $[a; b]$ với mật độ khối lượng là $f(x)$
- là công của lực có độ lớn $f(x) > 0$ tác động vào vật chuyển động thẳng từ $x = a$ đến $x = b$.

3) Tính áp lực lên mặt đĩa. Tính áp lực lên một mặt đĩa phẳng chìm trong nước trong hình

$$F = \int_a^b w h x dh,$$

ở đó w là trọng lượng riêng của nước = $\frac{1}{32}$ tấn/(ft)³



4) Định nghĩa. $f(x)$ xác định, bị chặn trên $[a; b]$

+) Chia $[a; b]$ bởi các điểm chia $a \equiv x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \equiv b$

+) Lấy $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$

+) Lập tổng $\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$, đặt $\lambda = \max_{i=1, n} |\Delta x_i|$

Nếu $\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sigma = I$ không phụ thuộc vào cách chia $[a; b]$ và cách chọn điểm ξ_i thì

I là tích phân xác định của hàm $f(x)$ trên $[a; b]$ và kí hiệu là $\int_a^b f(x) dx$.

Ví dụ 1. a) Tính $\int_{20}^{30} 0 dx$ **b)** Tính $\int_{11}^2 2010 dx$

c) $\int_0^1 y(x) dx$, $y(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in I \end{cases}$, \mathbb{Q} là tập số hữu tỷ, còn I là tập số vô tỷ.

Định nghĩa. • Khi $b < a$ có $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
 • Khi $a = b$ có $\int_a^b f(x) dx = 0$

II. Tiêu chuẩn khả tích, tính chất

1) Tiêu chuẩn khả tích

Định lí 1. $f(x)$ khả tích trên $[a; b] \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} (S - s) = 0$,

$$S = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i, \quad s = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i, \quad M_i = \max_{\Delta x_i} f(x), \quad m_i = \min_{\Delta x_i} f(x)$$

Định lí 2. $f(x)$ liên tục trên $[a; b] \Rightarrow f(x)$ khả tích trên $[a; b]$

Định lí 3. $f(x)$ bị chặn trên $[a; b]$ và có hữu hạn điểm gián đoạn trong $[a; b] \Rightarrow f(x)$ khả tích trên $[a; b]$

Định lí 4. $f(x)$ bị chặn và đơn điệu trong $[a; b] \Rightarrow f(x)$ khả tích trong $[a; b]$

Ví dụ 2. Tính

a) $\int_0^2 x dx$

b) $\int_0^1 x^2 dx$

c) $\int_1^2 e^x dx$

d) $\int_1^5 x^3 dx$

e) $\int_0^1 a^x dx, a > 0$

f) $\int_a^b x^\alpha dx, a > 0$

g) (K52) 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \cos \frac{k\pi}{2n} \quad \left(\frac{2\pi - 4}{\pi^2} \right)$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin \frac{k\pi}{2n} \quad \left(\frac{4}{\pi^2} \right)$

h) (K54) 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2} \quad \left(\frac{\pi}{4} \right)$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{3n^2 + k^2} \quad \left(\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \right)$

i)(K55) 1. Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} < \ln 2$.

2. Chứng minh rằng $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2n-k} > \ln 2$

k)(K57) 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2 - 3k^2}} \quad \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right)$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + 3k^2} \quad \left(\frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!