PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 8

§3. Phương trình vi phân cấp hai

• **Đặt vấn đề.** Bài trước đã học xong phương trình vi phân cấp một và có ứng dụng thú vị sau:

• Phương trình logistic được đưa ra (vào khoảng năm 1840) bởi nhà toán học và nhân chủng học người Bỉ P.F. Verhulst và nó trở thành một mô hình cho sự tăng trưởng dân số.

• Trong ví dụ sau đây chúng ta so sánh mô hình tăng trưởng tự nhiên và mô hình logistic cho dữ liệu điều tra dân số ở Mỹ vào thế kỷ 19, sau đó đưa ra dự án so sánh cho thế kỷ 20.

Ví dụ. Dân số nước Mỹ năm 1850 là 23.192 triệu. Nếu lấy $P_0 = 5,308$.

• Thế các dữ liệu t = 50, P = 23,192 (với thời điểm 1850) và t = 100, P = 76212 (với thời điểm 1900) vào phương trình logistic $\dfrac{dP}{dt} = kP(M-P)$ (1)

ta có hệ hai phương trình $\dfrac{(5,308)M}{5,308+(M-5,308)e^{-50kM}} = 23,192$;

$$\dfrac{(5.308)M}{5,308+(M-5,308)e^{-100kM}} = 76,212.$$

• Giải hệ này ta có $M = 188,121,\ k = 0,000167716$.

• Thế vào (1) ta có $P(t) = \dfrac{998,546}{5,308+(182,813)e^{-(0,031551)t}}$ (2)

Năm	Dân số thực của nước Mỹ	Mô hình dân số dạng mũ	Sai số dạng mũ	Mô hình logistic	Sai số logistic
1800	5.308	5.308	0.000	5.308	0.000
1810	7.240	6.929	0.311	7.202	0.038
1820	9.638	9.044	0.594	9.735	-0.097
1830	12.861	11.805	1.056	13.095	-0.234
1840	17.064	15.409	1.655	17.501	-0.437
1850	23.192	20.113	3.079	23.192	0.000
1860	31.443	26.253	5.190	30.405	1.038
1870	38.558	34.268	4.290	39.326	-0.768
1880	50.189	44.730	5.459	50.034	0.155
1890	62.980	58.387	4.593	62.435	0.545
1900	76.212	76.212	0.000	76.213	-0.001
1910	92.228	99.479	-7.251	90.834	1.394
1920	106.022	129.849	-23.827	105.612	0.410
1930	123.203	169.492	-46.289	119.834	3.369
1940	132.165	221.237	-89.072	132.886	-0.721
1950	151.326	288.780	-137.454	144.354	6.972
1960	179.323	376.943	-197.620	154.052	25.271
1970	203.302	492.023	-288.721	161.990	41.312
1980	226.542	642.236	-415.694	168.316	58.226
1990	248.710	838.308	-589.598	173.252	76.458
2000	281.422	1094.240	-812.818	177.038	104.384

Hình 1.7.4. So sánh kết quả của mô hình dạng mũ và mô hình logistic
với dân số thực của nước Mỹ (tính theo triệu)

• Những dự đoán theo mô hình dạng mũ $P(t) = (5{,}308)e^{(0{,}026643)t}$ và theo mô hình dạng logistic (2) đối chiếu với kết quả thống kê dân số thực của Mỹ, ta thấy

– Cả 2 mô hình đều cho kết quả tốt trong giai đoạn thế kỉ 19

– Mô hình dạng mũ cho số liệu phân kỳ ngay từ thập niên đầu tiên của thế kỉ 20, trong khi mô hình logistic có kết quả tương đối tốt cho tới tận những năm 1940.

– Đến cuối thế kỉ 20 mô hình dạng mũ cho kết quả vượt quá xa dân số thực của Mỹ, còn mô hình logistic lại cho số liệu dự đoán thấp hơn số liệu thực.

• **Sai số trung bình** để đo mức độ cho phép của mô hình hợp lí với dữ liệu thực tế: là căn bậc hai của trung bình các bình phương của các sai số thành phần.

• Từ bảng 1.7.4 trên được: mô hình dạng mũ có sai số trung bình là 3.162, còn mô hình logistic có sai số trung bình là 0.452. Do đó mô hình logistic dự đoán tốc độ tăng trưởng dân số nước Mỹ suốt thế kỷ 20 tốt hơn mô hình dạng mũ.

1. Đại cương

• **Định nghĩa.** $F(x, y, y', y'') = 0$ (1) hoặc $y'' = f(x, y, y')$ (2)

Ví dụ. a) $yy'' + y'^2 + xy = 0$

b) $y' = \sqrt[3]{xy + y'' + 1}$

• **Định lí về sự tồn tại và duy nhất nghiệm**

Nếu $f(x, y, y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}f(x, y, y')$, $\dfrac{\partial f}{\partial y'}f(x, y, y')$ liên tục trên $D \subset \mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, y_0') \in D$ thì (2) có nghiệm duy nhất trong $U_\varepsilon(x_0)$ thoả mãn $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$

• **Về mặt hình học:** Định lí trên khẳng định nếu $(x_0, y_0, y_0') \in D \Rightarrow$ trong $U_\varepsilon(x_0, y_0)$ có đường tích phân duy nhất của phương trình (2) đi qua (x_0, y_0) và hệ số góc của tiếp tuyến của nó tại điểm này bằng y_0'.

Định nghĩa. Hàm $y = \varphi((x, C_1, C_2)$ là nghiệm tổng quát của (2) $\Leftrightarrow$

+) $\varphi(x, C_1, C_2)$ thoả mãn (2) với $\forall C_1, C_2$

+) $\forall (x_0, y_0, y_0') \in D$ nêu trong định lí tìm được c_1^0, c_2^0: $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$ thoả mãn

$$\varphi(x, c_1^0, c_2^0)\big|_{x=x_0} = y_0,\ \varphi'(x, c_1^0, c_2^0)\big|_{x=x_0} = y_0'$$

Hàm $\varphi(x, c_1^0, c_2^0)$ được gọi là nghiệm riêng

Định nghĩa. Hệ thức $\phi(x, y, c_1, c_2) = 0$ xác định nghiệm tổng quát của (2) dưới dạng ẩn được gọi là tích phân tổng quát. Hệ thức $\phi(x, y, c_1^0, c_2^0)$ được gọi là tích phân riêng

• **Một số ứng dụng**

• Là mô hình toán học của những hệ cơ học và mạch điện : $LI'' + RI' + \dfrac{1}{C}I = E'(t)$, ở đó E(t) là điện áp (nguồn điện).

• Phương trình mô tả dao động tự do của chất điểm $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+c\dfrac{dx}{dt}+kx=0,$ ở đó chất điểm có khối lượng m, các hằng số dương $k,\ c$.

• Phương trình mô tả dao động cưỡng bức của chất điểm bởi tác động của ngoại lực $F(t)$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t).$$

• Bài toán vận tốc vũ trụ cấp hai : $m\dfrac{d^2r}{dt^2}=-k\dfrac{Mm}{r^2},\ r(0)=R,\ r'(0)=v_0$

2. Phương trình khuyết

a) $F(x,y'')=0$

Cách giải. Đặt $y'=p\Rightarrow$ phương trình vi phân cấp một $F(x,p')=0\ \Rightarrow\ p=\varphi(x,c)$. Giải phương trình vi phân cấp một $y'=\varphi(x,c)$

Ví dụ 1. 1°/ $x=(y'')^2+y''+1$

• $p=y'\ \Rightarrow\ x=(p')^2+p'+1$

• Đặt $p'=t\ \Rightarrow\ x=t^2+t+1$ và $dp=tdx=t(2t+1)dt\ \Rightarrow\ p=\dfrac{2}{3}t^3+\dfrac{t^2}{2}+c_1$

• Từ $y'=p\ \Rightarrow\ y=\int pdx=\int\left(\dfrac{2}{3}t^3+\dfrac{t^2}{4}+c_1\right)(2t+1)dt$

$$=\frac{4}{15}t^5+\frac{5}{12}t^4+\frac{1}{6}t^3+c_1t^2+c_1t+c_2$$

• Tích phân tổng quát của phương trình đã cho là

$$x=t^2+t+1,\ y=\frac{4}{15}t^5+\frac{5}{12}t^4+\frac{1}{6}t^3+c_1t^2+c_1t+c_2$$

2°/ $y''=\dfrac{1}{x}$ $\quad$ ($y=x(\ln|x|+C_1)+C_2$)

3°/ $y''=x+\sin x$ $\quad$ ($y=\dfrac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$)

4°/ $y''=\ln x$ $\quad$ ($y=\dfrac{x^2}{2}\left(\ln x-\dfrac{3}{2}\right)+C_1x+C_2$)

5°/ $y''=\arctan x$ $\quad$ ($y=\dfrac{x^2-1}{2}\arctan x-\dfrac{x}{2}\ln(1+x^2)+C_1x+C_2$)

6°/ $xy''=x^2-x,\ y(0)=0$. $\quad$ ($y=a_1x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6},a_1\in\mathbb{R}$)

b) $F(x, y', y'') = 0$

Cách giải. Đặt $p = y'$ $\Rightarrow$ phương trình vi phân cấp một $F(x, p, p') = 0$ $\Rightarrow$ $p = \varphi(x, c)$, giải phương trình vi phân cấp một $y' = \varphi(x, c)$

Ví dụ 2. 1°/ $(1 - x^2)y'' - xy' = 2,\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

- $p = y'$ $\Rightarrow$ $(1 - x^2)p' - xp = 2$ $\Rightarrow$ $p' - \dfrac{x}{1 - x^2}p = \dfrac{2}{1 - x^2}$, $x \neq \pm 1$ là phương trình vi phân tuyến tính cấp 1, có nghiệm tổng quát

$$p = c_1 e^{-\int \frac{-x}{1-x^2}dx} + e^{-\int \frac{-x}{1-x^2}dx} \int \frac{2}{1 - x^2} e^{\int \frac{-x}{1-x^2}dx} dx$$

$$= c_1 e^{-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} + e^{-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} \int \frac{2}{1 - x^2} e^{\frac{1}{2}\ln|1-x^2|} dx = \frac{c_1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \int \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} dx$$

$$= \frac{c_1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \arcsin x$$

$$y' = \frac{c_1}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \arcsin x \Rightarrow\ y = (\arcsin x)^2 + c_1 \arcsin x + c_2$$

- $y(0) = 0$ $\Rightarrow$ $c_2 = 0$ $y'(0) = 0$ $\Rightarrow$ $c_1 = 0$
- Nghiệm cần tìm : $y = (\arcsin x)^2$

2°/ $y'' = y' + x$ $\quad\left(y = C_1 e^x + C_2 - x - \dfrac{x^2}{2}\right)$

3°/ $y'' = \dfrac{y'}{x} + x$ $\quad\left(y = \dfrac{1}{3}x^3 + C_1 x^2 + C_2\right)$

4°/ $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$ $\quad\left(y = (C_1 x - C_1^2)e^{\frac{x}{C_1} + 1} + C_2\right)$

5°/ $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$ $\quad\left(y = (1 + C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1 x + C_2\right)$

6°/ $x^2 y'' = y'^2$ $\quad\left(C_1 x - C_1^2 y = \ln|C_1 x + 1| + C_2;\ 2y = x^2 + C;\ y = C\right)$

7°/ $2xy'y'' = y'^2 - 1$ $\quad\left(9C_1^2(y - C_1^2) = 4(C_1 x + 1)^3;\ y = C \pm x\right)$

8°/* $y''^2 + y' = xy''$ $\quad\left(y = C_1 \dfrac{x^2}{2} - C_1^2 x + C_2;\ y = \dfrac{x^3}{12} + C\right)$

9°/* $y''^3 + xy'' = 2y'$ $\quad\left(x = C_2 p + 3p^2;\ y = \dfrac{12}{5}p^5 + \dfrac{5}{4}C_1 p^4 + C_1^2 \dfrac{p^3}{6} + C_2;\ y = C\right)$

10°/* $2y'(y'' + 2) = xy''^2$ $\quad\left(3C_1 y = (x - C_1)^3 + C_2;\ y = C;\ y = C - 2x^2\right)$

Ví dụ 3

a). 1°/ $y'' + \frac{y'}{x} = x^2(y')^4$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 1$ ($y = \frac{1}{2}\left[5 - (1 - 3\ln|x|)^{\frac{2}{3}}\right]$)

2°/ $(x+1)y'' + x(y')^2 = y'$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ ($y = \ln(1+x^2) + 2\arctan x + 1$)

b). $y'' - \frac{1}{x-1}y' = x(x-1)$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$ ($y = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{2} + 3x + \frac{1}{3}$)

c). $2xy'' - 6y' + x^2 = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ ($y = \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{8} - \frac{7}{24}$)

d). $1 + (y')^2 = 2xy'y''$ ($y = \frac{2}{3C_1}\sqrt{(C_1x-1)^3} + C_2$)

e/ $(1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$, $y'(0) = 1$ ($y = -x + \ln(1+x)^2 + C_2$, $x \neq 0$)

c) $F(y, y', y'') = 0$

Cách giải. Đặt $p = y' \Rightarrow \frac{dp}{dx} = p\frac{dp}{dy} \Rightarrow F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$ là phương trình vi phân cấp một, giải ra có $p = \varphi(y, c)$, giải phương trình vi phân cấp một $y' = \varphi(y, c)$ ta được nghiệm cần tìm.

Ví dụ 4. 1°/ $2yy'' = y'^2 + 1$

- $p = y' \Rightarrow y'' = p\frac{dp}{dy}$, thay vào có $2yp\frac{dp}{dy} = p^2 + 1$
- $\frac{2p}{1+p^2}dp = \frac{dy}{y}$, $y \neq 0$

$\Leftrightarrow \ln|y| = \ln(1+p^2) + \ln|c_1|$ hay $y = c_1(1+p^2)$

- Từ $p = y' \Rightarrow dx = \frac{dy}{p} = 2c_1dp$, $p \neq 0 \Rightarrow p = \frac{x}{2c_1} + c_2$
- Nghiệm tổng quát $y = c_1\left(1 + \left(\frac{x}{2c_1} + c_2\right)^2\right) = c_1 + \frac{(x + 2c_1c_2)^2}{4c_1}$
- Đặt $2c_1c_2 = -a$, $2c_1 = b \Rightarrow 2b\left(y - \frac{b}{2}\right) = (x-a)^2$ là parabol phụ thuộc 2 tham số và có đường chuẩn là trục Ox.

2°/ $y'^2 + 2yy'' = 0$ ($y^3 = C_1(x+C_2)^2$, $y = C$)

3°/ $yy'' + 1 = y'^2$ ($C_1y = \pm\sin(C_1x + C_2)$)

4°/ $yy'' = y'^2 - y'^3$ ($y + C_1\ln|y| = x + C_2$, $y = C$)

5°/ $2yy'' = y^2 + y'^2$ ($y = C_1(1 \pm \mathrm{ch}(x + C_2))$)

6°/ $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$ ($e^y + C_1 = (x + C_2)^3$

7°/ $y'^2 = (3y - 2y')y''$ $(x = 3C_1p^2 + \ln C_2p;\ y = 2C_1p^3 + p;\ y = C)$

8°/ $y'(1 + y'^2) = ay''$ $\left(x - C_1 = a\ln\left|\sin\dfrac{y - C_2}{a}\right|\right)$

Ví dụ 5. (Bài toán vận tốc vũ trụ cấp 2). Xác định vận tốc nhỏ nhất để phóng một vật thẳng đứng vào vũ trụ sao cho vật không trở lại trái đất, giả thiết sức cản không khí không đáng kể.

• Khối lượng trái đất là M, vật phóng là m, khoảng cách giữa tâm trái đất và tâm vật phóng là r, theo định luật hấp dẫn của Newton, lực hút tác dụng lên vật là $f = k\dfrac{Mm}{r^2}$, k là hằng số hấp dẫn.

• Phương trình chuyển động của vật là $m\dfrac{d^2r}{dt^2} = -k\dfrac{Mm}{r^2}, r(0) = R, r'(0) = v_0$, ở đó R là bán kính trái đất, v_0 là vận tốc lúc phóng.

• Đặt $v = r' \Rightarrow r'' = v\dfrac{dv}{dr} \Rightarrow v\dfrac{dv}{dr} = -k\dfrac{M}{r^2} \Rightarrow vdv = -\dfrac{kM}{r^2}dr \Rightarrow \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{1}{r}kM + c_1$

• Từ $v(0) = 0$ có $v(R) = v_0 \Rightarrow c_1 = \dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{kM}{R} \Rightarrow \dfrac{v^2}{2} = k\dfrac{M}{r} + \left(\dfrac{v_0^2}{2} - \dfrac{kM}{R}\right) \geq 0$

Cho $r \to \infty \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{\dfrac{2kM}{R}} \approx 11{,}2$ km/s (do $k = 6{,}68.10^{-11}\dfrac{m^3}{kg.s^2}$, $R = 63.10^5$ m.

• Vận tốc vũ trụ cấp hai là $11{,}2$ km/s

Ví dụ 6

a). $yy'' - y'^2 = y^4, y(0) = 1, y'(0) = 1$ $\left(y = \dfrac{1}{1 - x}\right)$

b) . 1. $2yy'' - y'^2 = 1, y(1) = 1, y'(1) = 1$ $\left(y = \dfrac{x^2 + 1}{2}\right)$

2. $yy'' + y'^2 = 1, y(0) = 1, y'(0) = 1$ $(y = x + 1)$

c). $2yy'' - y'^2 - 1 = 0, y(1) = 1, y'(1) = 1$ $\left(y = \dfrac{x^2 + 1}{2}\right)$

d). $1 + (y')^2 = 2yy''$ $(C_1^2(x + C_2)^2 = 4(C_1y - 1))$

e) $y'^2 - 2yy'' = 0$ $\left(y = \dfrac{c_1}{4}(x + c_2)^2\right.$, y=C)

f) $y'' + y'^2 = 3e^{-y}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \sqrt{6}$ $\left(2e^{\frac{y}{2}} - \sqrt{6}\left(x + \sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = 0\right.$, y=C)

d) Một số trường hợp $F(x, y, y', y'') = 0$

Ví dụ 1.

a) $yy'' + y'^2 = 2x$

b) $y'' = 2yy'$ $\left(y = C_1 \tan(C_1 x + C_2);\ \ln\left|\dfrac{y - C_1}{y + C_1}\right| = 2C_1 y + C_2;\ y(x + C_2) = -1;\ y = C \right)$

c) $yy'' = y'(1 + y')$ $\left(C_1 y - 1 = C_2 e^{C_1 x};\ y = C - x,\ y = 0 \right)$

d) $yy'' + y'^2 = 1$ $\left(y^2 = x^2 + C_1 x + C_2 \right)$

e) 1°/ $xy'' - y'\left(e^y - 1\right) = 0$

$$\left(\ln|x| + C_2 = \frac{1}{C_1}\left(y - \ln\left|e^y + C_1\right|\right),\ e^{-y} + \ln|x| + C_2 = 0,\ y = c \right)$$

2°/ $xy'' + y'\left(e^{-y} + 1\right) = 0$

$$\left(\ln|x| + C_2 = \frac{1}{C_1}\left(y + \ln\left|e^{-y} + C_1\right|\right),\ e^y = \ln|x| + C_2;\ y = c \right)$$

3°/ $yy'' + (y')^2 + x\sin x = 0$ $\left(-\dfrac{y^2}{2} + x\sin x + 2\cos x + C_1 x + C_2 = 0 \right)$

4°/ $yy'' + (y')^2 + \ln x = 0$ $\left(-\dfrac{y^2}{2} + \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{3}{4}x^2 + C_1 x + C_2 = 0 \right)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!