

## GIẢI TÍCH I

### BÀI 7

## CHƯƠNG II. PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN HÀM MỘT BIẾN SỐ

### §2.1. TÍCH PHÂN BẤT ĐỊNH

#### • Đặt vấn đề

#### I. Định nghĩa.

##### 1. Định nghĩa.

$f(x)$  trên  $(a; b)$ ,  $F(x)$  là nguyên hàm của  $f(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x), \forall x \in (a; b)$

##### Ví dụ

**a)**  $f(x) = 2010$

**b)**  $f(x) = 0$

**c)**  $f(x) = x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$

**d)**  $f(x) = \sin x$

**e)**  $f(x) = \ln x$

**f)**  $y = x^2 e^x$

**g)**  $f(x) = x^2 \ln x$

**h)**  $f(x) = x \cos x$

**i)**  $f(x) = x^3 \sin x$

**Định lý.**  $F'(x) = f(x), x \in (a; b)$ , khi đó tập tất cả các nguyên hàm của  $f(x)$  là  $F(x) + C$

**Định nghĩa.**  $\int f(x) dx = F(x) + C$

##### 2. Tính chất

**a)**  $f(x)$  liên tục trên  $(a; b) \Rightarrow \exists \int f(x) dx$

**b)** Tuyến tính.  $\exists \int f(x) dx, \exists \int g(x) dx$

$$\Rightarrow \int [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Toán tử  $\int$  có khả nghịch trái, không có khả nghịch phải

**c)**  $\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x)$

**d)**  $\int \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) dx = f(x) + C$

##### 3. Bảng một số tích phân thông dụng

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, & \alpha \neq -1 \\ \ln|x| + C, & \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

#### II. Các phương pháp tính

##### 1. Đổi biến số

**Mệnh đề 1.** Nếu  $\int g(t) dt = G(t) + C \Rightarrow \int g(w(x)) w'(x) dx = G(w(x)) + C$

**Mệnh đề 2.** Nếu  $\int g(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = G(x) + C \Rightarrow \int g(t) dt = G(\varphi^{-1}(t)) + C$ , ở đó  $t = \varphi(x)$  có hàm ngược là  $x = \varphi^{-1}(t)$

### Ví dụ 1

a)  $\int x(x+4)^{12} dx$

b)  $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

c)  $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$

d)  $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx$

e)  $\int \frac{\ln 2x}{x \ln 4x} dx$

f)  $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$

g)  $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4-x^2}}$

h)  $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$

i)  $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$

k) (K54) 1.  $\int \frac{\tan x}{1+\cos^2 x} dx$

$(-\frac{1}{2} \ln \frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x} + C)$

2.  $\int \frac{\cot x}{1+\sin^2 x} dx$

$(\frac{1}{2} \ln \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x} + C)$

l) (K57)  $\int \frac{2^x + 1}{2^x - 1} dx$

$(x + \frac{2}{\ln 2} \ln \frac{2^x - 1}{2^x} + C)$

m) (K61)  $\int e^{\sin^2 x} \sin(2x) dx$

$(e^{\sin^2 x} + C)$

n) (K62)  $\int \frac{3-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$(3 \arcsin x + 2\sqrt{1-x^2} + C)$

**2. Tích phân từng phần.** Các hàm  $u, v$  khả vi, có  $\int u dv = uv - \int v du$

### Ví dụ 2

a)  $\int \ln^2 x dx$

b)  $\int (5x+6) \cos 3x dx$

c)  $\int \sin(\ln x) dx$

d)  $\int (\arcsin x)^2 dx$

e)  $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

f)  $\int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx$

g)  $\int x \ln \frac{1-x}{1+x} dx$

h)  $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx$

i)  $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$

k)  $\int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} dx$

### Ví dụ 3.

a)  $\int \frac{x dx}{e^x (x-1)^2}$   $(-\frac{e^{-x}}{x-1} + C)$

b)  $\int \frac{(1+x) dx}{x^2 e^x}$   $(-\frac{e^{-x}}{x} + C)$

c) (K53) 1)  $\int \operatorname{arccot} \sqrt{2x-1} dx$

$(\frac{1}{2} [2x \operatorname{arccot} \sqrt{2x-1} + \sqrt{2x-1}] + C)$

$$2) \int \arctan \sqrt{2x+1} dx \quad \left( \frac{1}{2} [2(x+1) \arctan \sqrt{2x+1} - \sqrt{2x+1}] + C \right)$$

$$d)(K56) \quad 1) \int \frac{x \ln(1+2x)}{e^{2x}} dx \quad \left( -\frac{1}{4} e^{-2x} [(2x+1) \ln(1+2x) + 1] + C \right)$$

$$2) \int \frac{x \ln(1+3x)}{e^{3x}} dx \quad \left( -\frac{1}{9} e^{-3x} [(3x+1) \ln(3x+1) + 1] + C \right)$$

$$e)(K59) \quad 1) \int \ln(x^2 + 2x + 3) dx$$

$$\left( -\frac{\ln(x^2 + 1)}{x+1} + \frac{1}{3} \ln(x^2 + 2) + \frac{2\sqrt{2}}{3} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{2}{3} \ln|x+1| + C \right)$$

$$2) \int \frac{\ln(x^2 + 2)}{(x+1)^2} dx$$

$$\left( -\frac{\ln(x^2 + 1)}{x+2} + \frac{2}{5} \ln(x^2 + 1) + \frac{2}{5} \arctan x - \frac{4}{5} \ln|x+2| + C \right)$$

$$f)(K62) \quad \int (x+2) \ln x dx \quad \left( \left( \frac{x^2}{2} + 2x \right) \ln x - \frac{x^2}{4} - 2x + C \right)$$

### 3. Sử dụng các lớp hàm có tính chất đặc biệt

#### Ví dụ 4

$$a) \int x^8 e^x dx$$

$$b) \int x^9 \cos x dx$$

$$c) \int x^{10} \sin x dx$$

$$d) \int x^n e^x dx$$

$$e) \int x^n \cos x dx$$

$$f) \int x^n \sin x dx$$

### 4. Tích phân của một vài lớp hàm khác

a) Hàm hữu tỉ  $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ ,  $P_m(x)$ ,  $Q_n(x)$  là các đa thức bậc  $m$ ,  $n$  của  $x$  ( $m < n$ ).

**Định lý.** Nếu  $Q_n(x) = a_n(x-a)^\alpha(x-b)^\beta \dots (x^2+px+q)^\mu \dots (x^2+lx+s)^\gamma$ , ở đó  $\alpha, \beta, \dots, \mu \in \mathbb{N}$ ;  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $p^2 - 4q < 0$ ,  $l^2 - 4s < 0$ ,  $\alpha + \beta + \dots + 2(\mu + \dots + \gamma) = n$ . Khi đó

$$R(x) = \frac{A}{(x-a)^\alpha} + \frac{A_1}{(x-a)^{\alpha-1}} + \dots + \frac{A_{\alpha-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^\beta} + \frac{B_1}{(x-b)^{\beta-1}} + \dots + \frac{B_{\beta-1}}{x-b} + \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\mu} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^{\mu-1}} + \dots + \frac{M_{\mu-1}x+N_{\mu-1}}{x^2+px+q} + \dots + \frac{Px+Q}{(x^2+lx+s)^\gamma} + \frac{P_1x+Q_1}{(x^2+lx+s)^{\gamma-1}} + \dots + \frac{P_{\gamma-1}x+Q_{\gamma-1}}{x^2+lx+s},$$

các hệ số nêu trên được tính theo phương pháp hệ số bất định.

Từ đó, để tính  $\int R(x) dx$  ta sẽ dẫn đến tính các tích phân sau

$$1^\circ) \int \frac{A}{(x-a)^k} dx; \quad 2^\circ) \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx; \quad 3^\circ) \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^m} dx;$$

ở đó  $p^2 - 4q < 0$ .

### Ví dụ 5.

$$a) \int \frac{dx}{(x-2)^5}$$

$$b) \int \frac{2x+1}{x^2+3x+4} dx$$

$$c) \int \frac{3x+2}{(x^2+2x+2)^2} dx$$

$$d) \int \frac{x^2+1}{(x+3)(x-1)^3} dx$$

$$e) \int \frac{x^2+2}{x^4+4} dx$$

$$f) \int \frac{dx}{x^8+x^6}$$

$$g) \int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$$

$$h)(K58) \int \frac{x^2+1}{(x-3)^3(x+1)} dx$$

$$\left( \frac{1}{32} \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| - \frac{7}{8(x-3)} - \frac{5}{4(x-3)^2} + C \right)$$

$$i)(K60) \int (3x^2 - 4x + 1) \arctan x dx$$

$$\left( (x^3 - 2x^2 + x) \arctan x - \frac{(x-2)^2}{2} + 2 \arctan x + C \right)$$

$$k)(K61) \int \frac{x^3}{1+x^8} dx$$

$$\left( \frac{1}{4} \arctan(x^4) + C \right)$$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!