PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 1. CHƯƠNG I. LÝ THUYẾT CHUỖI

§ 1. Đại cương về chuỗi số

- Định nghĩa
- Điều kiện cần để chuỗi hội tụ
- Các tính chất cơ bản

Đặt vấn đề: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2$

- Có phải là cứ cộng mãi các số hạng của vế trái thì thành vế phải?
- 1 + (– 1)+1 + (– 1) + ... = ?

1. Chuỗi số:

Định nghĩa: Với mỗi số tự nhiên n, cho tương ứng với một số thực a_n, ta có dãy số kí hiệu là $\{a_n\}$.

Định nghĩa:

Cho dãy số $\{a_n\}$, ta gọi tổng vô hạn $a_1+a_2+a_3+\cdots$ là chuỗi số, ký hiệu là $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, a_n là số hạng tổng quát.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ là tổng riêng thứ n. Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ thì ta bảo chuỗi hội tụ, có tổng S và viết: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$.

Khi dãy $\{S_n\}$ phân kỳ thì ta bảo chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Ví dụ 1. Xét sự hội tụ và tính $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$

$$S_n = 1+q+q^2+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},\quad |q|<1$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q},\quad |q|<1$$

Phân kỳ khi $|q|\ge 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q},\quad |q|<1.$$

Ví dụ 2. Xét sự hội tụ và tính $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$S_n = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ, phân kỳ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (Chuỗi điều hoà) $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

Lấy $n > 2^{m+1}$ có

$$S_n > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}} = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^m + 1} + \cdots + \frac{1}{2^{m+1}}\right)$$

$$> \frac{1}{2} + 2.\frac{1}{4} + 4.\frac{1}{8} + \cdots + 2^m.\frac{1}{2^{m+1}} = (m+1)\frac{1}{2}$$

Do đó S_n có thể lớn bao nhiêu tuỳ ý, nên có $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$

Chuỗi đã cho phân kỳ

Ví dụ 4. Chuỗi nghịch đảo bình phương: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{3.3} + \cdots + \frac{1}{n.n} < 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$$

S_n tăng và dương

$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = S$$

Nhận xét:

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (Điều kiện cần để chuỗi hội tụ)

Chứng minh: Có $a_n = S_n - S_{n-1}$; $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$

- Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ hoặc không tồn tại thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.
- Thay đổi một số hữu hạn số hạng đầu không làm thay đổi tính hội tụ hay phân kỳ của chuỗi.

Ví dụ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1\neq 0$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ phân kỳ

Ví dụ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n=1+(-1)+1+(-1)+\cdots$

Có $\lim_{n\to\infty}(-1)^n=\begin{cases}1 & n=2k, k\in N\\ -1 & n=2k+1.\end{cases}$

Không tồn tại $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ phân kỳ.

Ví dụ 7. Tìm tổng (nếu có) của chuỗi số sau $\frac{3}{4}+\frac{5}{36}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}+\cdots$ (ĐS: 1)

Ví dụ 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$ (PK)

2. Tính chất. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S_1,\ \sum_{n=1}^{\infty}b_n=S_2,$

- $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\alpha S_1+\beta S_2$

§2. Chuỗi số dương

- Định nghĩa
- Các định lí so sánh
- Các tiêu chuẩn hội tụ

1. Định nghĩa: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad a_n>0$

Nhận xét. $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ khi và chỉ khi S_n bị chặn.

Trong bài này ta giả thiết chỉ xét các chuỗi số dương

2. Các định lí so sánh.

Định lí 1. Cho hai chuỗi số dương, $a_n \le b_n$, n tuỳ ý hoặc từ một lúc nào đó trở đi

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ

Chứng minh.

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < b_1 + b_2 + \cdots + b_n$$

$$0 < S_n \le T_n$$

Rút ra các khẳng định.

Ví dụ 1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 1}$

Chuỗi dương

$$3^n + 1 > 3^n$$

$$\frac{1}{3^n + 1} < \frac{1}{3^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}$ hội tụ

$\Rightarrow$ Chuỗi đã cho hội tụ

Ví dụ 2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

Chuỗi dương

$$\ln n < n$$

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ phân kỳ

Định lí 2. Cho hai chuỗi số dương, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \ne 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.

Nhận xét. Đối với các chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

1°/ Nếu $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

2/° Nếu $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kì $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì

Ví dụ 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^3 - 3}$

Chuỗi dương

$$\frac{n+2}{2n^3-3}=\frac{n}{2n^3}\cdot\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{2n^3}}=\frac{1}{2n^2}\cdot\frac{1+\frac{2}{n}}{1-\frac{3}{2n^3}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{2n^3}:\frac{1}{2n^2}\right)=1$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ hội tụ

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2n^3-3}$ hội tụ

Ví dụ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\ p>0$

Khi $0<p\le 1$ có $0<n^p\le n\Rightarrow \frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$, do $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ nên $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ phân kỳ.

Khi $p>1$, n tuỳ ý, chọn m sao cho $n<2^m$, có

$$S_n\le S_{2^m-1}=1+\left(\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}\right)+\left(\frac{1}{4^p}+\dots+\frac{1}{7^p}\right)+\dots+\left[\frac{1}{\left(2^{m-1}\right)^p}+\dots+\frac{1}{\left(2^m-1\right)^p}\right]$$

$$\le 1+\frac{2}{2^p}+\frac{4}{4^p}+\dots+\frac{2^{m-1}}{\left(2^{m-1}\right)^p}=1+\frac{1}{2^{p-1}}+\frac{1}{\left(2^{p-1}\right)^2}+\dots+\frac{1}{\left(2^{p-1}\right)^{m-1}}$$

$$=\frac{1-a^m}{1-a}<\frac{1}{1-a},\quad 0<a=\frac{1}{2^{p-1}}<1$$

Dãy S_n bị chặn trên $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ hội tụ.

KL: Chuỗi hội tụ với $p > 1$ và phân kì với $0 < p \le 1$.

Ví dụ 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$

Chuỗi dương

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n^3+3}}=\frac{1}{n^{3/2}\sqrt{1+\frac{3}{n^3}}};\ b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+3}}$ hội tụ

Ví dụ 7

a1) $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)$ (PK) **a2)** $\sum_{n=2}^{\infty} \sin\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$ (PK)

b1) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin^2\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$ (PK); **b2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$ (HT)

c1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\cos n}{\sqrt{n^5+1}}$ (HT) **c2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sin n}{\sqrt{n^3+1}}$ (PK)

d1) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n-1}\right)$ (PK) **d2)** $\sum_{n=2}^{\infty} n\left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}-1\right)$ (PK)

d3) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n+1}{\sqrt[3]{n^7+2n^3+3}}$ (HT)

e) Xét sự hội tụ

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ (HT) **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\arcsin\frac{1}{n}+\ln n}$ (PK)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\arctan^2\frac{\pi}{2\sqrt{n^3}}\right)$ (HT)

f) Xét sự hội tụ

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1-\ln n}$ (PK) **2)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt[4]{n^5}}$ (HT)

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (HT)

f) Xét sự hội tụ : **1)** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{(n+1)^3}}$ (HT)

3) Các tiêu chuẩn hội tụ

a) Tiêu chuẩn D'Alembert

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$

Khi $l < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ

Khi $l > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Chứng minh

• $l < 1$: Từ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, chọn $\varepsilon > 0$ đủ bé để $l + \varepsilon < 1 \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < l + \varepsilon$, $\forall\ n \geq n_0$.

• Mặt khác có $a_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}.\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdots\dfrac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}.a_{n_0} \leq (l+\varepsilon)^{n-n_0} a_{n_0} \to 0,\ n \to \infty$

Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$

• $l > 1$: Từ $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$, chọn ε đủ bé để $l - \varepsilon > 1 \Rightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > l - \varepsilon > 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$

$\Rightarrow$ phân kì

Nhận xét. Khi $l = 1$ không có kết luận gì

Ví dụ 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$

$a_n = \dfrac{1}{n!} > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(n+1)!} : \dfrac{1}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 < 1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ hội tụ

Ví dụ 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3^n}{n!}$

$a_n = \dfrac{3^n}{n!} > 0$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{3^n}{n!} = \dfrac{3}{n+1}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$

Chuỗi đã cho hội tụ

Ví dụ 3. Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi $\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.5}+\frac{1.3.5}{2.5.8}+\dots+\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.5.8\cdots(3n-1)}$

$$a_n=\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.5.8\cdots(3n-1)}>0$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1.3.5\cdots(2n-1)(2n+1)}{2.5.8\cdots(3n-1)(3n+2)}:\frac{1.3.5\cdots(2n-1)}{2.5.8\cdots(3n-1)}=\frac{2n+1}{3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{3}<1$$

Chuỗi đã cho hội tụ

Ví dụ 4

a1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$ (PK) **a2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!2^n}{n^n}$ (HT)

a3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{7^n(n!)^2}{n^{2n}}$ (HT)

b1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n+1}}{4^n\ln(n+1)}$ (PK) **b2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n+1}}{5^n\ln(n+1)}$ (HT)

b3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{n^n}$ (HT) **b4)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{n^n}$ (HT)

c1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+2n+1}{2^n(3n+2)}$ (HT)

d1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!3^n}{n^n}$ (PK) **d2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\pi^n}{n^n}$ (PK)

b) Tiêu chuẩn Cauchy

Giả sử $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$

Nếu $l<1\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ

Nếu $l>1$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ phân kỳ

Nhận xét. Nếu l = 1, không có kết luận gì

Ví dụ 5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n$

$$a_n = \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right) > 0$$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2n-1}{3n+2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{3} < 1$$

Chuỗi đã cho hội tụ

Ví dụ 6. Xét sự hội tụ, phân kì $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ (PK)

Ví dụ 7.

a1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+\sqrt{n}+1}{4n^2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$ (HT)

a2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+\sqrt{n}+1}{3n^2+\sin n}\right)^{3n-\ln n}$ (HT)

a3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}5^n}{2^n(n+1)^{n^2}}$ (HT)

b1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{n(n+4)}$ (HT)

b2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n(n+4)}$ (PK)

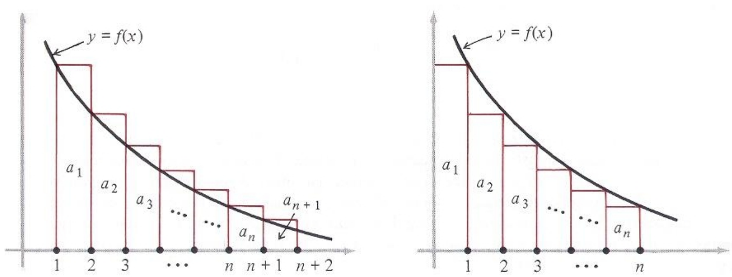
c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}5^n}{3^n(n+1)^{n^2}}$ (HT)

c) Tiêu chuẩn tích phân

Có mối liên hệ hay không giữa:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx$$

và $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} a_n$



Hình 14.4

$$\int_1^n f(x)dx \le a_1 + a_2 + \cdots + a_n \le a_1 + \int_1^n f(x)dx,$$

Nếu $f(x)$ là hàm liên tục, dương giảm với mọi $x \ge 1$ và $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f(n) = a_n$, khi đó

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\int_1^{\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 8. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$

$f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ dương, giảm với $x\geq 2$ và có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$\int_2^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{d(\ln x)}{\ln x} = \lim_{b\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^b = \lim_{n\to\infty}\left(\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)\right)=\infty$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ phân kỳ

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ phân kỳ

Tổng quát có thể xét $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ hội tụ chỉ khi $p > 1$.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng: $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots=\ln 2$

$$S_{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\left[\ln 2n+\gamma+o(1)\right]-\left[\ln n+\gamma+o(1)\right],\quad voi\quad \gamma=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

$$=\ln 2+o(1)\to\ln 2\quad khi\quad n\to\infty$$

Mặt khác ta có

$$S_{2n+1}=S_{2n}+\frac{1}{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1}=\lim S_{2n}=\ln 2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2$$

Ví dụ 10. Tương tự nhận được $1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{4}+\cdots=\dfrac{3}{2}\ln 2.$

Ví dụ 11. Xét sự hội tụ phân kì của chuỗi số sau

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\frac{1}{n}}{(n+2)^2}$ (HT); **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{(n+3)^2}$ (HT) **c)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{3n^2}$ (HT)

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!