GIẢI TÍCH 2
BÀI 10

B. TÍCH PHÂN MẶT

§1. Tích phân mặt loại 1

1. Đặt vấn đề

2. Định nghĩa.

• Cho hàm số $f(M)$ xác định trên mặt S nào đó $\subset \mathbb{R}^3$

• Chia mặt S thành n phần bất kì không dẫm lên nhau, gọi tên và diện tích của chúng là ΔS_i, $i = \overline{1, n}$.

• Lấy điểm tuỳ ý $M_i(x_i\,;y_i\,;z_i) \in \Delta S_i$, lập tổng $I_n = \sum_{n=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$.

• Nếu $\lim_{n\to\infty} I_n = I$ sao cho $d \to 0$, $\forall$ cách chia S và cách chọn M_i thì ta gọi I là tích phân mặt loại một của hàm số $f(M)$ trên mặt S và kí hiệu

$$I = \iint_S f(M)dS \text{ hoặc } I = \iint_S f(x, y, z)dS$$

Ví dụ 1. Tính $\iint_S 2dS$, $S = x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1, z \ge 0$

Chú ý. $\iint_S dS$ chính là diện tích của mặt S.

2. Tính chất. Có các tính chất giống như tích phân đường loại một

3. Sự tồn tại

Định lí 1. Cho hàm $f(x, y, z)$ liên tục trên mặt trơn hay trơn từng phần S

$$\Rightarrow \exists \iint_S f(x, y, z)dS$$

4. Cách tính. $z = z(x, y)$ xác định trên $D \subset \mathbb{R}^2$, khi đó có

$$\iint_S f(x, y, z)dS = \iint_D f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,dxdy$$

Ví dụ 1. Tính $\iint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$, S là mặt bán cầu $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$.

Ví dụ 2. Tính $\iint_S (xy + yz + zx)dS$, S : $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ bị cắt bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

§2. Tích phân mặt loại hai

1. Đặt vấn đề

2. Định nghĩa.

a) Định nghĩa. Cho mặt S giới hạn bởi một đường trơn từng khúc C. Lấy $M_0 \in S$ và dựng pháp tuyến $\vec{N}$ của S tại M_0, nếu xuất phát từ M_0 đi theo một đường cong kín bất kì L trên S không cắt đường biên C trở lại vị trí M_0 mà hướng của pháp tuyến tại M_0 không thay đổi thì mặt S gọi là mặt hai phía. Trường hợp ngược lại thì S được gọi là mặt một phía.

Mặt S được gọi là định hướng từng phần nếu nó liên tục và được chia thành một số hữu hạn phần định hướng bởi các đường trơn từng khúc.

Cho mặt định hướng S giới hạn bởi đường cong C. Ta gọi hướng dương trên C ứng với phía đã chọn của S xác định theo quy tắc bàn tay phải.

b) Định nghĩa tích phân mặt loại hai.

- Cho hàm vectơ $\vec{F} = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + R(M)\vec{k}$ xác định trên mặt hai phía S
- Chọn một phía của S ứng với pháp tuyến

$$\vec{N}(M) = \vec{i}\cos\alpha(M) + \vec{j}\cos\beta(M) + \vec{k}\cos\gamma(M)$$

- Ta gọi tích phân mặt loại một của hàm $\vec{F}.\vec{N} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ trên mặt S:

$$I = \iint_S \vec{F}.\vec{N}\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS$$

là tích phân mặt loại hai của hàm $\vec{F}(M)$ (hay của các hàm P, Q, R) lấy trên phía đã chọn của mặt S.

Ví dụ 1. Tính $\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS,\ S: x^2 + y^2 = 1, z = 2$, hướng lên trên, trong đó

$$P = z^{x^{zy}},\ Q = e^{y^2}\sin x^2,\ R = \left(x^2 + y^2\right)^z$$

Chú ý. Gọi hình chiếu của ΔS_i lên các mặt phẳng Oyz, Ozx, Oxy lần lượt là $\Delta S_i^{(1)}, \Delta S_i^{(2)}, \Delta S_i^{(3)}$, khi đó có

$$\cos\alpha(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(1)},\ \cos\beta(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(2)},\ \cos\gamma(M_i)\Delta S_i = \Delta S_i^{(3)}.$$

Do đó ta cũng kí hiệu tích phân mặt loại hai là $I = \iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

3. Tính chất. Có các tính chất tương tự như tích phân đường loại hai

4. Định lí tồn tại. Cho các hàm P, Q, R liên tục trên mặt định hướng từng phần S thì tích phân mặt loại hai của các hàm đó lấy theo một phía của S là tồn tại.

5. Cách tính.

- Ta có $\iint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint_S Pdydz + \iint_S Qdzdx + \iint_S Rdxdy$

• Ta tính một tích phân trong vế phải, chẳng hạn $I_1 = \iint\limits_S R\,dxdy$

Cho $S : z = f(x, y)$ xác định trên D.

Tích phân lấy theo phía trên của mặt S là $I_1 = \iint\limits_D R\big(x, y, z(x, y)\big)dxdy$

Tích phân lấy theo phía dưới của mặt S là $I = -\iint\limits_D R\big(x, y, z(x, y)\big)dxdy$

Ví dụ 1. $\iint\limits_S z\,dxdy$, S là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Ví dụ 2. $\iint\limits_S x^3dydz$, S là phía trên của nửa trên của mặt Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $z \geq 0$.

§3. Công thức Stokes

1. Đặt vấn đề

2. Công thức Stokes

Định lí 1. Các hàm P, Q, R cùng các đạo hàm riêng cấp một liên tục trên mặt định hướng từng phần S, giới hạn bởi đường trơn từng khúc C, thì ta có công thức

$$\oint\limits_C (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')ds$$

$$= \iint\limits_S \Big[\big(R'_y - Q'_z\big)\cos\alpha + \big(P'_z - R'_x\big)\cos\beta + \big(Q'_x - P'_y\big)\cos\gamma\Big]dS$$

$$= \iint\limits_S \big(R'_y - Q'_z\big)dydz + \big(P'_z - R'_x\big)dzdx + \big(Q'_x - P'_y\big)dxdy$$

ở đó : $\vec{\tau} = (\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$ là vectour tiếp tuyến với C, còn $\vec{N} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ là vectour pháp tuyến với S.

Chú ý. 1°/ Trong mặt phẳng thì công thức Stokes trở thành công thức Green đã biết.

2°/ Công thức Stokes còn viết dưới dạng sau

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_S \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix};$$

$$\oint_C (P\cos\alpha' + Q\cos\beta' + R\cos\gamma')ds = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Ví dụ 1. Tính $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, C: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x + y + z = 0$, lấy hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn thừ phía dương của Ox.

Ví dụ 2. $\oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz$,

ở đó $C : x^2 + y^2 = a^2, \dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1\ (a > 0, h > 0)$ hướng ngược chiều kim đồng hồ nếu nhìn từ phía dương của trục Ox.

2. Định lí bốn mệnh đề tương đương.

Từ công thức Stokes có thể chứng minh được định lí bốn mệnh đề tương đương cho tích phân đường trong khôn gian.

Định lí 1. Các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền V đơn liên thì bốn mệnh đề sau là tương đương

1) $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}, \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

2) $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = 0$, $\forall$ đường cong kín $L \subset V$.

3) $\int_{\overset{\frown}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz$ không phụ thuộc vào đường nối các điểm $A, B \in V$ mà chỉ phụ thuộc vào điểm đầu A và điểm cuối B.

4) $\exists\ U(x, y, z)$: $du = Pdx + Qdy + Rdz$

Ví dụ 1. $\oint_C yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$, ở đó C là đường cong kín bất kì

3. Ý nghĩa vật lí.

a) Lưu số (hoàn lưu) của trường vectơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ dọc theo chu tuyến kín C là

$$T = \int_C \vec{F}.\vec{\tau}ds = \oint_C Pdx + Qdy + Rdz$$

b) Vectơ xoáy

Định nghĩa. Vectơ xoáy ($\text{rot}\,\vec{F}(M)$) tại M trong trường vectơ $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ là

$$\operatorname{rot}\vec{F}(M)=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Ví dụ 1. Tìm vectơ xoáy của điện trường $\vec{E}=\dfrac{q\vec{r}}{r^3}$

Vectơ xoáy có các tính chất sau:

- Tuyến tính
- $\operatorname{rot}(u\vec{c})=\overrightarrow{\operatorname{grad}}u\wedge\vec{c}$, $\vec{c}$ là hằng số
- $\operatorname{rot}(u\vec{F})=u\operatorname{rot}\vec{F}+\overrightarrow{\operatorname{grad}}u\wedge\vec{F}$

c) Công thức Stokes dưới dạng vectơ. $\oint\limits_C\vec{F}\vec{\tau}ds=\iint\limits_S\operatorname{rot}\vec{F}\vec{N}dS$

Do đó có: lưu số của trường vectơ $\vec{F}$ theo một đường cong kín C bằng thông lượng của vectơ $\operatorname{rot}\vec{F}$ qua mặt S giới hạn bởi đường cong C.

§ 4. Công thức Ostrogradsky

• Đặt vấn đề

1. Công thức

Định lí 1. (Công thức Ostrogradsky). Các hàm $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong miền compact $V\subset\mathbb{R}^3$ giới hạn bởi mặt cong kín trơn từng phần S, thì ta có công thức

$$\iint\limits_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV,$$

trong đó tích phân mặt lấy theo phía ngoài của S.

Ví dụ 1. $\iint\limits_S xdydz+ydzdx+zdxdy$, S là phía ngoài mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Ví dụ 2. $\iint\limits_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$, ở đó S là phía ngoài mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$.

2. Ý nghĩa Vật lí.

a) Dive của trường vectơ

• Định nghĩa. Cho trường vô hướng u, vectơ gradient của trường vô hướng u là

$\overrightarrow{\operatorname{grad}}u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các vectơ đơn vị trên các trục

• Tính chất.

+) Tuyến tính

+) $\overrightarrow{\text{grad}}(u_1u_2) = u_1\overrightarrow{\text{grad}}\,u_2 + u_2\overrightarrow{\text{grad}}\,u_1$.

+) $\overrightarrow{\text{grad}}\,f(u) = f'(u)\overrightarrow{\text{grad}}\,u$.

Ví dụ (Bài toán con muỗi). Con muỗi đậu trong trường nhiệt độ T. Hỏi con muỗi cần bay theo hướng nào để được mát nhanh nhất.

b) Công thức Ostrogradsky dưới dạng vectơ $\iint\limits_S \vec{F}\vec{N}\,dS = \iiint\limits_V \text{div}\,\vec{F}\,dV$, ở đó

$$\text{div}\,\vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

ở đó N là vectour pháp tuyến phía ngoài của mặt S kín.

c) Điểm nguồn, điểm rò, trường vectơ có thông lượng bảo toàn

• Cho $\text{div}\,\vec{F}$ liên tục tại $M \in V$ và $\text{div}\,\vec{F}(M) > 0$. Gọi *V'* là miền giới hạn bởi mặt kín *S'* trong lân cận đủ nhỏ của *M*. Từ công thức ở mục b) $\Rightarrow$ thông lượng qua mặt *S'* từ trong ra ngoài là số dương, hay thông lượng vào mặt *S'* ít hơn thông lượng ra khỏi mặt đó. Khi đó điểm *M* được gọi là điểm nguồn của trường.

Ngược lại nếu $\text{div}\,\vec{F}(M) < 0$ thì *M* được gọi là điểm rò của trường.

• Nếu $\text{div}\,\vec{F}(M) = 0, \forall M \in$ trường thì trường không có các điểm nguồn và điểm rò. Khi đó ta bảo $\vec{F}$ là trường ống.

• Nếu $rot\,\vec{F}(M) = 0, \forall M \in$ trường thì F được gọi là trường bảo toàn.

• F được gọi là trường điều hòa $\Leftrightarrow$ F vừa là trường ống, vừa là trường thế.

Ví dụ 1. Tính thông lượng của trường $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ qua mặt xung quanh và mặt toàn phần của hình trụ $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le x \le h$.

Ví dụ 2. Tính thông lượng của điện trường $\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{r^3}, \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ (Định luật Gauss)

3. Toán tử Haminton

a) Định nghĩa. $\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$

b) Tính chất

• $\vec{\nabla} u = \overrightarrow{\text{grad}}\,u$

• $\vec{\nabla}\vec{F} = \text{div}\,\vec{F}$

- $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \operatorname{rot} \vec{F}$
- $\vec{\nabla}^2 = \Delta$, ở đó Δ là toán tử Laplace $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$
- $\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} u\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} u\right) = \Delta u$
- $\operatorname{rot}\left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} u\right) = 0$
- $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right) = 0$

Thank you and Good bye!