PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 7

§2. Phương trình vi phân cấp một (TT)

3. Phương trình vi phân phân li biến số

a) Định nghĩa. f(y) dy = g(x) dx

b) Cách giải. $\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$

$$F(y) = \int g(x)\,dx$$

Ví dụ 1. 1°/ $2\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

+) $\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$, |y| < 1, x > 0

+) $\int \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$

+) $\sin^{-1} y = \sqrt{x} + C$

+) $y = \sin\left(\sqrt{x} + C\right)$

+) $y = \pm 1$ là nghiệm kỳ dị

2°/ $y' = 1 + x + y + xy$

+) $y' = (1 + x)(1 + y)$

+) $\dfrac{dy}{dx} = (1+x)(1+y)$

+) $\dfrac{dy}{1+y} = (1+x)\,dx$, $y \neq -1$, $\ln|1+y| = x + \dfrac{x^2}{2} + C$

+) $y = -1$ là nghiệm kì dị

3°/ $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(y - x^2y\right)dy = 0$ $\left(1 + y^2 = C\left(1 - x^2\right)\right)$

4°/ $\tan x \sin^2 y\,dx + \cos^2 x \cot y\,dy = 0$ $\left(\cot^2 y = \tan^2 x + C\right)$

5°/ $y - xy' - a\left(1 + x^2y\right) = 0$ $\left(y = a + \dfrac{Cx}{1 + ax}\right)$

6°/ $x + xy + y'\left(y + xy\right) = 0$ $\left(x + y = \ln\left(C(x+1)\right)(y+1)\right)$

7°/ $y' = (x + y)^2$ $\left(\arctan(x + y) = x + C\right)$

8°/ $(2x - y)dx + (4x - 2y + 3)dy = 0$ $\left(5x + 10y + C = 3\ln(10x - 5y + 6)\right)$

9°/ $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$

$\left(\sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln\left(\sqrt{4x - 2y + 1} + 2\right) = x + C\right)$

10°/ $\left(xy^2 + 2x\right)dx + \left(2y - 2x^2y\right)dy = 0$ $\left(\sqrt{\left|x^2 - 1\right|} = C\left(y^2 + 2\right)\right)$

c) Một số ứng dụng

1°/ Sinh trưởng tự nhiên và thoái hoá

• Sự tăng dân số: $\dfrac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P$, β là tỉ lệ sinh, δ là tỉ lệ chết

2°/ Lãi luỹ tiến $\dfrac{dA}{dt} = rA$

A là lượng đô la trong quỹ tiết kiệm tại thời điểm *t*, tính theo năm

r là tỉ lệ lãi luỹ tiến tính theo năm.

3°/ Sự phân rã phóng xạ $\dfrac{dN}{dt} = -kN$, k phụ thuộc vào từng loại đồng vị phóng xạ

4°/ Giải độc $\dfrac{dA}{dt} = -\lambda A$, λ là hằng số giải độc của thuốc

5°/ Phương trình tăng trưởng tự nhiên $\dfrac{dx}{dt} = kx$

6°/ Quá trình nguội đi và nóng lên $\dfrac{dT}{dt} = k(A - T)$, k là hằng số dương, A là nhiệt độ của môi trường

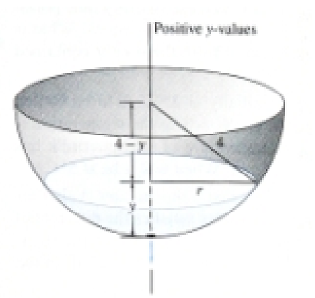
Ví dụ 2. Một miếng thịt 4-lb có nhiệt độ ban đầu là 50^0 F, được cho vào một cái lò 375^0 F vào lúc 5 giờ chiều. Sau 75 phút người ta thấy nhiệt độ miếng thịt là 125^0 F. Hỏi tới khi nào miếng thịt đạt nhiệt độ 150^0 F (vừa chín tới)?

- $\dfrac{dT}{dt} = k(375 - T)$, $T(0) = 50$, $T(75) = 125$
- $\displaystyle\int \frac{dT}{375 - T} = \int kdt \Rightarrow 375 - T = Be^{-kt}$
- Thay $T(0) = 50$, $T(75) = 125 \Rightarrow B = 325$, $k \approx 0,0035$
- $t \approx 105$ phút tức vào lúc khoảng 6h45'.

7°/ Quy luật Torricelli $A(y)\dfrac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$, ở đó v là thể tích nước trong thùng, $A(y)$ là diện tích tiết diện thẳng nằm ngang của bình ở độ cao y so với đáy, $\sqrt{2gy}$ là tốc độ nước thoát ra khỏi lỗ hổng

Ví dụ 3. Một cái bát dạng bán cầu có bán kính miệng bát là 4ft được chứa đầy nước vào thời điểm t = 0. Vào thời điểm này, người ta mở một lỗ tròn đường kính 1 inch ở đáy bát. Hỏi sau bao lâu sẽ không còn nước trong bát?

- $A(y) = \pi r^2 = \pi(8y - y^2)$,
- $\pi(8y - y^2)\dfrac{dy}{dt} = -\pi\left(\dfrac{1}{24}\right)^2\sqrt{2.32y}$;
- $\dfrac{16}{3}y^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} = -\dfrac{1}{72}t + C$.
- $y(0) = 4 \Rightarrow C = \dfrac{448}{15}$.
- $t \approx 2150$ (s); tức là khoảng 35 phút 50 giây.



Tháo nước từ một bát bán cầu

Ví dụ 4. 1. $y' + \sin\dfrac{x+y}{2} = \sin\dfrac{x-y}{2}$, $y(\pi) = \pi$ $\left(C = 2,\ \ln\left|\tan\dfrac{y}{4}\right| = 2 - 2\sin\dfrac{x}{2}\right)$

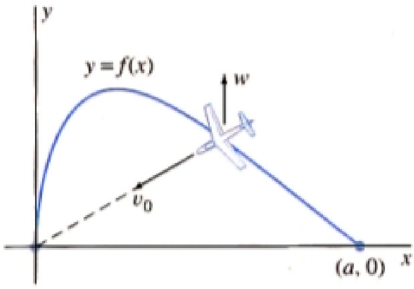
2. $x - xy + y'(y - xy) = 0$ $(y = 1,\ x + y + \ln|(y-1)(1-x)| = C)$

4. Phương trình thuần nhất (đẳng cấp)

a) Đặt vấn đề

• Nhiều ứng dụng dẫn đến các phương trình vi phân không phân li

• Chẳng hạn, một máy bay xuất phát từ điểm $(a\,;\,0)$ đặt ở đúng phía Đông của nơi nó đến, là một sân bay đặt tại gốc tọa độ $(0\,;\,0)$. Máy bay di chuyển với vận tốc không đổi v_0 liên quan đến gió, mà thổi theo đúng hướng Nam với vận tốc không đổi w. Như đã thể hiện trong Hình vẽ, ta giả thiết rằng phi công luôn giữ hướng bay về phía gốc tọa độ.



Máy bay hướng về gốc

Đường bay $y = f(x)$ của máy bay thỏa mãn phương trình vi phân

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{v_0 x}\left(v_0 y - w\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

b) Định nghĩa. $\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ (hoặc $\dfrac{dx}{dy} = G\left(\dfrac{x}{y}\right)$) (1)

c) Cách giải

• Đặt $v = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

• Biến đổi (1) thành phương trình phân ly: $x\dfrac{dv}{dx} = F(v) - v.$

Ví dụ 1

1°/ Giải phương trình: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x^2 + 3y^2}{2xy}$

• $\dfrac{dy}{dx} = 2\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

• $v = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{v} = \dfrac{x}{y}$, $y = vx \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$

• $v + x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2}{v} + \dfrac{3}{2}v$

• $x\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{2}{v} + \dfrac{v}{2} = \dfrac{v^2 + 4}{2v}$;

• $\displaystyle\int \frac{2v}{v^2 + 4}dv = \int \frac{1}{x}dx \Rightarrow \ln(v^2 + 4) = \ln|x| + \ln C.$

• $v^2 + 4 = C|x| \Rightarrow \dfrac{y^2}{x^2} + 4 = C|x| \Rightarrow y^2 + 4x^2 = kx^3.$

2°/ Giải: $xy^2y' = x^3 + y^3$

+) $y = 0$ không là nghiệm +) $y \neq 0;\ y' = \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y}{x}$

+) $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$ +) $u + xu' = u + \dfrac{1}{u^2}$

+) $u^3 = 3\ln|x| + C \Rightarrow y^3 = x^3(3\ln|x| + C)$

3°/ $(x + 2y)dx - x\,dy = 0$ $(x + y = Cx^2)$

4°/ $(x - y)y\,dx = x^2\,dy$ $\left(x = Ce^{\frac{x}{y}}\right)$

5°/ $2x^3y' = y\left(2x^2 - y^2\right)$ $\left(x = \pm y\sqrt{\ln Cx}\right)$

6°/ $xy' - y = (x + y)\ln\dfrac{x + y}{x}$ $(y = -x\ln\ln Cx)$

7°/ $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$ $\left((x + y)^2 = Cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}\right)$

8°/ $y' = \dfrac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}$ $\left((3x + y + 2\ln|x + y - 1| = 0\right)$

9°/ $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ $(1 - xy = Cx^3(2 + xy),\ \ xy = -2)$

Ví dụ 2. 1°/ $xy' - y = y(\ln y - \ln x),\ y(1) = e$ $\left(x = \ln\dfrac{y}{x}\right)$

2°/ $(x^2 - y^2)dy = 2xydx$ $\left(y = 0,\ \ x' = \dfrac{x}{2y} - \dfrac{y}{2x}\right.$, đẳng cấp)

3°/ $y^2dx = (xy - x^2)dy$ $(e^{y/x} = Cy,\ y = 0,\ x = 0)$

4°/ $(x - y)ydx = x^2dy$ $\left(y = x\left(\ln|Cx|\right)^{-1},\ y = 0,\ x = 0\right)$

5°/ $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2},\ y(1) = 0$ $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2,\ C = 1\right)$

6°/ $(2x - y + 4)dx + (x - 2y + 5)dy = 0$ $\left((x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)\right)$

7°/ $(2x + y + 1)dx - (x + 2y - 3)dy = 0$ $\left(C|y - x - 4|^3\left|y + x - \dfrac{2}{3}\right| = 1\right)$

8°/ $yy' = y^3 - \dfrac{2}{x^3}$

9°/ $(x^2 + y^2)dx = xydy$ $\left(y^2 = \dfrac{1}{3}(\ln x^2 + C)\right.$, x=0)

5. Phương trình tuyến tính

a) Đặt vấn đề

• Phương trình đại số tuyến tính cấp một $ax = b$ luôn giải được

• Liệu có thể xây dựng được cách giải đối với phương trình vi phân tuyến tính cấp một hay không?

b) Định nghĩa. $\dfrac{dy}{dx} + p(x)\,y = q(x)$ hoặc $x' + p(y)x = q(y)$ (1)

c) Phương pháp giải. Có 3 phương pháp giải là :

- Sử dụng công thức nghiệm tổng quát.

- Thừa số tích phân.

- Biến thiên hằng số.

Dưới đây là phương pháp thừa số tích phân :

• Tính thừa số tích phân $\rho(x) = e^{\int p(x)dx}$,

• Nhân hai vế của phương trình vi phân với $\rho(x)$,

• Đưa vế trái của phương trình được xét về dạng đạo hàm của một tích:

$$D_x\left(\rho(x)y(x)\right) = \rho(x)q(x).$$

• Tích phân phương trình này

$$\rho(x)y(x) = \int \rho(x)q(x)dx + C,$$

rồi giải theo y để nhận được nghiệm tổng quát của phương trình vi phân.

Ngoài ra có thể giải bằng các phương pháp khác như : Sử dụng công thức ngiệm tổng quát (3), phương pháp biến thiên hằng số)

Ví dụ 1. 1°/ Giải bài toán giá trị ban đầu $\dfrac{dy}{dx} - y = \dfrac{11}{8}e^{-x/3}$, $y(0) = -1$.

• Có $p(x) = -1$ và $q(x) = \dfrac{11}{8}e^{-x/3}$, thừa số tích phân là $\rho(x) = e^{\int(-1)dx} = e^{-x}$.

• Nhân cả hai vế của phương trình đã cho với e^{-x} được $e^{-x}\dfrac{dy}{dx} - e^{-x}y = \dfrac{11}{8}e^{-4x/3}$

• $\dfrac{d}{dx}(e^{-x}y) = \dfrac{11}{8}e^{-4x/3}$

• $e^{-x}y = \displaystyle\int \frac{11}{8}e^{-4x/3}dx = -\frac{33}{32}e^{-4x/3} + C$,

• $y(x) = Ce^{x} - \dfrac{33}{32}e^{-x/3}$.

• Thay $x = 0$ và $y = -1$ vào ta có $C = 1/32$, nghiệm riêng cần tìm là

$$y(x) = \frac{1}{32}e^{x} - \frac{33}{32}e^{-x/3} = \frac{1}{32}(e^{x} - 33e^{-x/3}).$$

2°/ Giải phương trình $y' + 3y = 2x.e^{-3x}$

+) $p = 3$, $q = 2x.e^{-3x}$ +) $\rho = e^{\int 3dx} = e^{3x}$

+) $e^{3x}(y' + 3y) = 2x$ +) $\dfrac{d}{dx}\left(y.e^{3x}\right) = 2x$

+) $y.e^{3x} = x^2 + C \Rightarrow y = (x^2 + C)e^{-3x}$

3°/ Giải: $\left(x + y.e^{y}\right)\dfrac{dy}{dx} = 1$

+) $\dfrac{dx}{dy} - x = y.e^{y}$ +) $\rho = e^{-\int dy} = e^{-y}$

+) $e^{-y}(x' - x) = y$ +) $\frac{d}{dy}\left(xe^{-y}\right) = y$

+) $xe^{-y} = \frac{1}{2}y^2 + C \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}y^2 + C\right)e^y$

4°/ $y'(2x+1) = 4x + 2y$ $\left(y = (2x+1)(C + \ln|2x+1| + 1)\right)$

5°/ $y = x(y' - x\cos x)$ $\left(y = x(C + \sin x)\right)$

6°/ $(x + y^2)dy = y\,dx$ $\left(x = y^2 + Cy\right)$

7°/ $y^2dx - (2xy + 3)dy = 0$ $\left(x = Cy^2 - \frac{1}{y}\right)$

8°/ $(1 + y^2)dx = \left(\sqrt{1+y^2}\sin y - xy\right)dy$ $\left(x\sqrt{1+y^2} + \cos y = C\right)$

9°/ $(2x + y)dy = y\,dx + 4\ln y\,dy$ $\left(x = 2\ln y - y + 1 + Cy^2\right)$

ĐỊNH LÝ 1. Phương trình tuyến tính cấp một

Nếu hàm $p(x)$ và $q(x)$ liên tục trên một khoảng mở I chứa điểm x_0, thì bài toán giá trị ban đầu

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

có nghiệm duy nhất $y(x)$ trên I, cho bởi công thức

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int \left(q(x)e^{\int p(x)dx}\right)dx + C\right] \tag{3}$$

với một giá trị C thích hợp.

Chú ý:

• Định lý 1 cho ta biết mọi nghiệm của phương trình (1) đều nằm trong nghiệm tổng quát cho bởi (3). Như vậy phương trình vi phân *tuyến tính* cấp một không có các nghiệm kì dị.

• Giá trị thích hợp của hằng số C–cần để giải bài toán giá trị ban đầu với phương trình (2) – có thể chọn "một cách tự động" bằng cách viết

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{t} p(u)du}.q(t)dt\right]$$

Các cận x_0 và x nêu trên đặt vào các tích phân bất định trong (3) đảm bảo trước cho $\rho(x_0) = 1$ và vì thế $y(x_0) = y_0$.

Ví dụ 2. Giả sử hồ Erie có thể tích 480 km^3 và vận tốc của dòng chảy vào (từ hồ Huron) và của dòng chảy ra (vào hồ Ontario) đều là 350 km^3/năm. Giả sử tại thời điểm $t = 0$ (năm), nồng độ ô nhiễm của hồ Erie – mà nguyên nhân là ô nhiễm công nghiệp và nay đã được giảm bớt – bằng 5 lần so với hồ Huron. Nếu dòng chảy ra đã được hoà tan hoàn toàn với nước hồ, thì sau bao lâu nồng độ ô nhiễm của hồ Erie sẽ gấp 2 lần hồ Huron?

• Phương trình vi phân cấp 1: $\frac{dx}{dt} = rc - \frac{r}{V}x$

• Ta viết lại nó theo dạng tuyến tính cấp 1: $\frac{dx}{dt} + px = q$

với hệ số hằng $p = r/V$, $q = rc$ và nhân tử tích phân $\rho = e^{pt}$.

• $x(t) = cV + 4cVe^{-rt/V}$.

• Để xác định khi nào $x(t)=2cV$, ta cần giải phương trình:

$$cV + 4cVe^{-rt/V} = 2cV \text{ ; } t = \frac{V}{r}\ln 4 = \frac{480}{350}\ln 4 \approx 1{,}901 \text{ (năm).}$$

Ví dụ 3. Một bình dung tích 120 gallon (gal) lúc đầu chứa 90 lb (pao-khoảng 450g) muối hoà tan trong 90 gal nước. Nước mặn có nồng độ muối 2 lb/gal chảy vào bình với vận tốc 4 gal/phút và dung dịch đã được trộn đều sẽ chảy ra khỏi bình với vận tốc 3 gal/phút. Hỏi có bao nhiêu muối trong bình khi bình đầy?

• Phương trình vi phân : $\frac{dx}{dt} + \frac{3}{90+t}x = 8$

• Bình sẽ đầy sau 30 phút, và khi t = 30 ta có lượng muối trong bình là :

$$x(30) = 2(90+30) - \frac{90^4}{120^3} \approx 202 \text{ (lb).}$$

Ví dụ 4.

a) 1°/ $(2xy + 3)dy - y^2dx = 0,\ y(0) = 1$ $\quad\left(x = y^2 - \frac{1}{y}\right)$

2°/ $2ydx + (y^2 - 6x)dy = 0,\ y(1) = 1$ $\quad\left(x = \frac{y^2}{2}(1+y)\right)$

b) 1°/ $ydx - (x + y^2\sin y)dy = 0$ $\quad(x = (C - \cos y)y,\ y = 0)$

2°/ $(1+y^2)dx - (\arctan y - x)dy = 0$ $\quad(x = \arctan y - 1 + Ce^{-\arctan y})$

c) 1°/ $y' - \frac{y}{x} = x\cos x,\quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ $\quad(y = x + x\sin x)$

2°/ $y' - y = \frac{e^x}{x},\quad y(1) = e$ $\quad(y = (1+\ln x)e^x)$

3°/ $y' = \frac{e^x}{x+1} - \frac{y}{x+1}$ $\quad\left(y = \frac{e^x + C}{x+1}\right)$

4°/ $y' = 1 + \frac{y}{x(x+1)}$ $\quad\left(y = \frac{x}{x+1}(x + \ln|x| + C)\right)$

d) 1°/ $2ydx - (6x - y^2)dy = 0,\quad y(1) = 1$ $\quad\left(x = \frac{y^2}{2}(1+y)\right)$

2°/ $(y+2)dx + (y - x + 2)dy = 0,\quad y(1) = 1$ $\quad\left(x = \left(\frac{1}{3} - \ln|y+2|\right)(y+2)\right)$

e) 1°/ $xy' + y - e^x = 0,\ y(1) = 1$ $\quad\left(y = \frac{e^x - e + 1}{x}\right)$

2°/ $xy' - \dfrac{y}{x+1} - x = 0,\ y(1) = 0$ $\left(y = \dfrac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)\right)$

f) 1°/ $4ydx - (12x - 8y)dy = 0$ $\left(x = y^3\left(c + \dfrac{1}{y^2}\right);\ y = 0\right)$

2°/ $2\sqrt{2}ydx - \left(6\sqrt{2}x - 2y^2\right)dy = 0$ $\left(x = y^3\left(c + \dfrac{1}{y\sqrt{2}}\right);\ y = 0\right)$

6. Phương trình Bernoulli

a) Định nghĩa. $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)y^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ hoặc $x' + p(y)x = q(y)x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$ (2)

b) Cách giải

• Với $y \neq 0$, đặt $v = y^{1-\alpha}$

• Biến đổi phương trình (2) thành phương trình tuyến tính:

$$\frac{dv}{dx} + (1-\alpha)p(x)v = (1-\alpha)q(x).$$

Ví dụ 1. 1°/ $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{3}{2x}y = \dfrac{2x}{y}$

• Là phương trình Bernoulli với $p(x) = -3/(2x)$, $q(x) = 2x$, $\alpha = -1$ và $1 - \alpha = 2$

$\Rightarrow yy' - \dfrac{3}{2x}y^2 = 2x$

• Đặt: $v = y^2$ ta thu được phương trình tuyến tính: $\dfrac{dv}{dx} - \dfrac{3}{x}v = 4x$

+) Nhân tử tích phân $\rho = e^{\int(-3/x)dx} = x^{-3}$.

+) $D_x(x^{-3}v) = \dfrac{4}{x^2} \Rightarrow x^{-3}v = -\dfrac{4}{x} + C \Rightarrow x^{-3}y^2 = -\dfrac{4}{x} + C$

• $y^2 = -4x^2 + Cx^3$.

2°/ $y' + 2y = y^2e^x$ $(y(e^x + Ce^{2x}) = 1;\ y = 0)$

3°/ $xy^2y' = x^2 + y^3$ $(y^3 = Cx^3 - 3x^2)$

4°/ $y' = y^4\cos x + y\tan x$

$(y^{-3} = C\cos^3 x - 3\sin x\cos^2 x;\ y = 0)$

5°/ $(x+1)(y' + y^2) = -y$ $(y(x+1)(\ln|x+1| + C) = 1,\ y = 0)$

6°/ $3x\,dy = y(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)\,dx$ $(y^3(3 + ce^{\cos x}) = x,\ x = 0,\ y = 0)$

Ví dụ 2 1°/ $y' + 2xy = 2x^3y^3$ $\left(y^{-2} = \dfrac{1}{2}(Ce^{2x^2} + 2x^2 + 1),\ y = 0\right)$

2°/ $y' + \dfrac{y}{x+1} + y^2 = 0$ $(y^{-1} = (1+x)(\ln|1+x| + C),\ y = 0)$

3°/ $3xy^2y' = x^3\cos x + y^3$ $\left(y = \sqrt[3]{x(x\sin x + \cos x + C}\right)$

4°/ $(x+1)(y' + y^2) = -y$ $\left(y = 0,\ y = \left[(x+1)(\ln|x+1| + C)\right]^{-1}\right)$

5°/ a) $xy^2y' = x^2 + y^3$ $\left(y = x\sqrt[3]{c - \frac{3}{x}}\right)$

b) $8xy^2y' = x^2 - 8y^3$ $\left(y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{c + \frac{3}{40}x^5}\right)$

7. Phương trình vi phân toàn phần

a) Định nghĩa. Phương trình $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ (1)

được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu các hàm $P(x, y)$ và $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền đơn liên D và có

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2)$$

thì có tích phân tổng quát là

$$\int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\,dt = C \text{ hoặc } \int_{y_0}^{y} Q(x_0, t)\,dt + \int_{x_0}^{x} P(t, y)\,dt = C$$

Chú ý. Có hai cách giải phương trình VPTP : Sử dụng công thức tích phân tổng quát nêu trên, hoặc Định lý 4 mệnh đề tương đương học trong Giải tích 2.

Ví dụ 1. 1°/ Giải phương trình vi phân $(6xy - y^3)dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)dy = 0$

- $P(x, y) = (6xy - y^3)$; $Q(x, y) = (4y + 3x^2 - 3xy^2)$
- $\frac{\partial P}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial Q}{\partial x}$ $\Rightarrow$ Phương trình vi phân toàn phần
- $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y) \Rightarrow F(x, y) = \int (6xy - y^3)dx = 3x^2y - xy^3 + g(y).$
- $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y) \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 - 3xy^2 + g'(y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2,$
- $g'(y) = 4y \Rightarrow g(y) = 2y^2 + C_1,$
- $F(x, y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C_1.$
- Tích phân tổng quát $3x^2y - xy^3 + 2y^2 = C$

2°/ $(2x + 3y)dx + (3x + 2y)dy = 0$

+) $P = 2x + 3y$; $Q = 3x + 2y \Rightarrow Q_x = P_y = 3$ +) $F = \int (2x + 3y)dx = x^2 + 3xy + g(y)$

+) $F_y(y) = 3x + 2y \Rightarrow 3x + g'(y) = 3x + 2y \Rightarrow g(y) = y^2$

+) $x^2 + 3xy + y^2 = C$

3°/ $\left(4 - \frac{y^2}{x^2}\right)dx + \frac{2y}{x}dy = 0$ $\left((4x^2 + y^2) = Cx\right)$

4°/ $e^{-y}dx + (1 - xe^{-y})dy = 0$ $\left(y + xe^{-y} = C\right)$

5°/ $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$ $\left(4y\ln x + y^4 = C\right)$

6°/ $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ $\left(x^2 - y^2 = Cy^2\right)$

7°/ $x\,dx + y\,dy = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$ $\left(x^2 + y^2 - 2\arctan\dfrac{y}{x} = C\right)$

8°/ $2x\cos^2 y\,dx + (2y - x^2\sin 2y)dy = 0$ $\left(x^2\cos^2 y + y^2 = C\right)$

9°/ $\left(\dfrac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \dfrac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$ $\left(x^2 + 1 = 2(C - 2x)\sin y\right)$

10°)

a) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0$ $\left(\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{y} = C\right)$

b) $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$ $\left(\dfrac{y^4}{4} + y\ln x = C\right)$

c) $\left(\sin x + \dfrac{y}{x}\right)dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$ $\left(-\cos x + \dfrac{y^4}{4} + y\ln x = C\right)$

d) $\left(\sin x - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + \left(\cos y + 2\dfrac{y}{x}\right)dy = 0$ $\left(-\cos x + \sin y + \dfrac{y^2}{x} = C\right)$

11°)

a) $\left(\sin x + \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx - \dfrac{2y}{x}dy = 0$ $\left(\cos x + \dfrac{y^2}{x} = C\right)$

b) $\left(\cos x - \dfrac{y^2}{x^2}\right)dx + \dfrac{2y}{x}dy = 0$ $\left(\sin x + \dfrac{y^2}{x} = C\right)$

c) $\left(xy^2 + x\right)dx + \left(-y + x^2y\right)dy = 0$ $\left(x^2 + \left(x^2 - 1\right)y^2 = C\right)$

d) $\left(xy^2 - x\right)dx + \left(y + x^2y\right)dy = 0$ $\left(-x^2 + \left(x^2 + 1\right)y^2 = C\right)$

12°) $(1 - \dfrac{y^2}{x^2})dx + \dfrac{2y}{x}dy = 0$ $\left(x + \dfrac{y^2}{x} = C\right)$

13°) $\dfrac{2x}{y^3}dx + \dfrac{y - 3x^2}{y^4}dy = 0$ $\left(\dfrac{x^2}{y^3} - \dfrac{1}{2y^2} = C\right)$

b) Thừa số tích phân

Phương trình vi phân $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ với $Q'_x \neq P'_y$ có thể đưa về phương trình vi phân toàn phần khi tìm được $\mu(x) \neq 0$ (hoặc $\mu(y) \neq 0$) sao cho phương trình $\mu P dx + \mu Q dy = 0$ có $\dfrac{\partial}{\partial x}(\mu Q) = \dfrac{\partial}{\partial y}(\mu P)$. Khi đó hàm $\mu(x)$ ($\mu(y)$) được gọi là thừa số tích phân, và được tính như sau.

- Nếu $\dfrac{Q'_x - P'_y}{Q} = \varphi(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{-\int \varphi(x)dx}$
- Nếu $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P} = \psi(y) \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \psi(y)dy}$

Ví dụ 2. 1°/ $(x+y^2)dx-2xydy=0$ (1)

+) $\dfrac{Q'_x-P'_y}{Q}=\dfrac{-4y}{-2xy}=\dfrac{2}{x}$ +) $\mu(x)=e^{-\int\frac{2}{x}dx}=\dfrac{1}{x^2}$

+) $x=0$ là nghiệm

+) $x\neq 0$: (1) $\Leftrightarrow \dfrac{x+y^2}{x^2}dx-\dfrac{2y}{x}dy=0$ là phương trình vi phân toàn phần

+) $\int\limits_1^x \dfrac{1}{t}dt+\int\limits_0^y \dfrac{-2t}{x}dt=C$ +) $\ln|x|-\dfrac{y^2}{x}=C$ là tích phân tổng quát

2°/ $(x^2-y)dx+x\,dy=0$ $\left(\mu=\dfrac{1}{x^2},\ x+\dfrac{y}{x}=C,\ x=0\right)$

3°/ $2x\tan y\,dx+(x^2-2\sin y)dy=0$ $\left(\mu=\cos y,\ x^2\sin y+\dfrac{1}{2}\cos 2y=C\right)$

4°/ $(e^{2x}-y^2)dx+y\,dy=0$ $\left(\mu=e^{-2x},\ y^2=(C-2x)e^{2x}\right)$

5°/ $(1+3x^2\sin y)dx-x\cot y\,dy=0$ $\left(\mu=\dfrac{1}{\sin y},\ x^3+\dfrac{x}{\sin y}=C\right)$

Ví dụ 3.

a) 1°/ $e^x(2+2x-y^2)dx-2e^xydy=0$ $\left(2xe^x-e^xy^2=C\right)$

2°/ $(2xy+x^2y^3)dx+(x^2+x^3y^2)dy=0$ $\left(x^2y+\dfrac{1}{3}x^3y^3=C\right)$

3°/ Tìm $h(x)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(x)\left[(y+\cos y)dx+(1-\sin y)dy\right]=0$

$\left(h=K_1e^x,\ e^x(y+\cos y)=C\right)$

4°/ Tìm $h(y)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(y)\left[(1-\sin x)dx+(\cos x+x)dy\right]=0$

$\left(h=K_1e^y,\ e^y(x+\cos x)=C\right)$

b)

1°/ Tìm $h(x)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(x)\left[(y+\ln x)dx-xdy\right]=0$

$\left(h=\dfrac{C}{x^2},\ -\dfrac{1}{x}\ln x-\dfrac{1}{x}-\dfrac{y}{x}=C\right)$

2°/ Tìm $h(y)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(y)\left[y(1+xy)\,dx-xdy\right]=0$

$\left(h=\dfrac{C}{y^2},\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{x^2}{2}=C\right)$

c)

1°/ Tìm $h(y)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(y)\left[(1-\sin x)\,dx+(\cos x+x)dy\right]=0$

$(h = Ce^{y},\ e^{y}(x + \cos x) = C)$

2°/ Tìm $h(x)$ để phương trình sau là toàn phần và giải $h(x)\left[(y + \cos y)dx + (1 - \sin y)dy\right] = 0$

$(h = Ce^{x},\ e^{x}(y + \cos y) = C$

d) $(1+3x^2\sin y)dx - x\cot y dy = 0$

e) Tìm h(y) để phương trình sau là phương trình vi phân toàn phần và giải phương trình đó

. $2xh(y)\tan y dx + h(y)(x^2 - 2\sin y)dy = 0,\ \ (h(y) = \cos y, x^2 \sin y + \dfrac{\cos 2y}{2} = C)$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!