GIẢI TÍCH 2
BÀI 8
B. TÍCH PHÂN BA LỚP (TT)

3.10. Cách tính. Gặp nhiều khó khăn trong việc tính tích phân ba lớp bằng định nghĩa. Giải pháp hợp lí là dựa vào kĩ thuật tính tích phân hai lớp và tích phân một lớp.

a) Tích phân ba lớp trên hình hộp chữ nhật

Định lí Fubini. Cho f khả tích trên hình hộp chữ nhật đóng $P = [a, a']\times[b, b']\times[c, c']$

1°/ Với mỗi $(x, y) \in \mathbb{R} = [a, a']\times[b, b']$, hàm số $z \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên đoạn $[c, c']$ thì hàm số $\varphi(x, y) = \int\limits_c^{c'} f(x, y, z)dz$ khả tích trên $\mathbb{R}$ và có

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dx\,dy\,dz = \iint\limits_R \varphi(x, y)dx\,dy = \iint\limits_R dx\,dy\int\limits_c^{c'} f(x, y, z)dz \qquad (10.1)$$

2°/ Với mỗi $z \in [c, c']$, hàm số $(x, y) \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên hình chữ nhật $R = [a, a']\times[b, b']$ thì hàm số $\psi(z) = \iint\limits_R f(x, y, z)dx\,dy$ khả tích trên $[c, c']$ và

$$\iiint\limits_P f(x,y,z)dx\,dy,dz = \int\limits_c^{c'} \psi(z)dz = \int\limits_c^{c'} dz\iint\limits_R f(x, y, z)dx\,dy \qquad (10.2)$$

b) Cho hàm f liên tục trên hình hộp chữ nhật đóng P, khi đó ta có các công thức (10.1) và (10.2), khi đó do hàm số $(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = \int\limits_c^{c'} f(x,y,z)dz$ liên tục trên hình chữ nhật $R = [a, a']\times[b, b']$, nên ta có

$$\iiint\limits_P f(x, y, z)dx\,dy\,dz = \int\limits_a^{a'} dx\int\limits_b^{b'} dy\int\limits_c^{c'} f(x, y, z)dz$$

c) Cho tập D đo được theo Jordan trong $\mathbb{R}^2$, các hàm số $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$ khả tích trên D và $\varphi_1(x, y) \le \varphi_2(x, y)$, $\forall (x_1, x_2) \in D$, $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y)\}$ (vật thể hình trụ)

Định lí (Fubini). Cho hàm $f : B \to \mathbb{R}$ khả tích trên B. Với mỗi $(x, y) \in D$, hàm số $z \mapsto f(x, y, z)$ khả tích trên đoạn $[\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)]$ thì hàm số

$$\psi(x, y) = \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)dz$$

khả tích trên D và có

$$\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \psi(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$

d) Cho tập hợp D đo được trên $\mathbb{R}^2$, hàm số φ_1, φ_2 liên tục, bị chặn trên D, hàm $f: B \to \mathbb{R}$ liên tục, bị chặn trên B thì định lí Fubini nói trên vẫn đúng.

e) Cho B là tập đo được theo Jordan trong $\mathbb{R}^3$, giới hạn bởi $z = c$ và $z = c'$ và mỗi $z \in [c, c']$, tiết diện thẳng B cắt bởi mặt phẳng $Z = z$ là tập đo được theo Jordan trong $\mathbb{R}^2$, gọi B_z là hình chiếu của tiết diện đó lên mặt phẳng Oxy.

Định lí (Fubini). Cho hàm $f: B \to \mathbb{R}$ khả tích trên B. Nếu mỗi $z \in [c, c']$, hàm số $(x,y) \mapsto f(x,y,z)$ khả tích trên B_z thì hàm số $\varphi(z) = \iint\limits_{B_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$ khả tích trên $[c, c']$ và có $\iiint\limits_B f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_c^{c'} \varphi(z)\,dz = \int\limits_c^{c'} dz \iint\limits_{B_z} f(x,y,z)\,dx\,dy$

Nói riêng, Định lí đúng với hàm số f liên tục và bị chặn trên B.

Ví dụ 1. Tính $\iiint\limits_B x\,dx\,dy\,dz$, B: $x + y + z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$. $\left(\frac{1}{24}\right)$

Ví dụ 2. Tính $\iiint\limits_V \frac{dx\,dy\,dz}{(x+y+z+1)^3}$, $V: x + y + z \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ $\left(\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}\right)$

3.11. Đổi biến trong tích phân ba lớp

a) Đổi biến

Định lí 1. Cho Ω là tập mở $\subset \mathbb{R}^3$, tập compact, đo được $B \subset \Omega$, ánh xạ $\varphi: \Omega \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi $\varphi(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$, ở đó

1°/ Các hàm $x, y, z: \Omega \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^1 trên Ω.

2°/ Thu hẹp của φ trên Int$B$ là đơn ánh

3°/ Định thức Jacobi $J(u, v, w) = \dfrac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} \ne 0$, $\forall\ (u, v, w) \in \text{Int } B$.

Khi đó ta có

1°/ $\varphi(B)$ là tập compact đo được

2°/ Nếu $f: \varphi(B) \to \mathbb{R}$ liên tục trên $\varphi(B)$ thì

$$\iiint\limits_{\varphi(B)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_B f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\left|J(u,v,w)\right| du\,dv\,dw$$

b) Toạ độ trụ. Cho ánh xạ φ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(r, \varphi, z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$.

Rõ ràng có $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ đều thuộc lớp C^∞ trên $\mathbb{R}^3$,

$$J(r,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r$$

Với mỗi $\alpha\in\mathbb{R}$, thu hẹp của φ lên tập hợp $A=(0;\infty)\times[\alpha,\alpha+2\pi]\times\mathbb{R}^+$ là song ánh từ A lên $\mathbb{R}^3$ bỏ đi trục Oz, nên có $J(r,\varphi,z)\neq 0$ trên A.

Thu hẹp của φ trên tập mở $\Omega_\alpha=(0;\infty)\times(\alpha,\alpha+2\pi)\times\mathbb{R}^+$ là song ánh từ Ω_α lên tập mở $V_\alpha=\mathbb{R}^3\setminus P_\alpha^+$, P_α^+ là nửa mặt phẳng đóng có bờ là trục Oz cắt mặt phẳng Oxy theo nửa đường thẳng tạo với trục Ox góc α.

Khi B là tập compact đo được sao cho $\operatorname{Int}B\subset\Omega_\alpha$, $\forall\alpha$ thì thu hẹp của φ trên $\operatorname{Int}B$ là đơn ánh và $J(r,\varphi,z)\neq 0$ trên $\operatorname{Int}B$. Khi đó ta có

$$\iiint\limits_{\varphi(B)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint\limits_{B} f\big(x(r,\varphi,z),y(r,\varphi,z),z(r,\varphi,z)\big)r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Ví dụ 1. Tính $\displaystyle\iiint\limits_B\frac{z\,dx\,dy\,dz}{1+x^2+y^2}$, B: $x^2+y^2\le a^2$, $0\le z\le h$, $a>0$, $h>0$. $\left(\frac{1}{2}\pi h^2\ln\left(1+a^2\right)\right)$

Ví dụ 2. Tính $\displaystyle\iiint\limits_B\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}dx\,dy\,dz$, B: $2az\ge x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2\le 3a^2$ $\left(\frac{32\sqrt{2}}{15}\pi a^3\right)$

Ví dụ 3. Tính $\displaystyle\iiint\limits_B z\,dx\,dy\,dz$, $B: z^2=\frac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right)$, $z=h>0$ $\left(\frac{\pi h^2R^2}{4}\right)$

Ví dụ 4. Tính $\displaystyle\iiint\limits_B dx\,dy\,dz$, B : $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2\le z^2$ và chứa $(0;0;R)$

Ví dụ 5. Tính $\displaystyle\iiint\limits_B z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, B: $y=\sqrt{2x-x^2}$, $y=0$, $z=0$, $z=a>0$

c) Toạ độ cầu. Cho ánh xạ $\varphi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, $(r,\varphi,\theta)\mapsto(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)$ rõ ràng các hàm số $x, y, z\in C^\infty$ trên $\mathbb{R}^3$, và có

$$J(r,\varphi,\theta)=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=-r^2\sin\theta,$$

$\theta=\widehat{(Oz,OM)}$, $\varphi=\widehat{(Ox,OM')}$

Với mỗi $\alpha\in\mathbb{R}$, thu hẹp φ trên tập hợp $A=(0;\infty)\times[\alpha,\alpha+2\pi)\times(0,r)$ là song ánh từ A lên $\mathbb{R}^3$ bỏ đi trục Oz, và có $J(r,\varphi,\theta)\neq 0$ trên A.

Thu hẹp của φ trên tập mở $\Omega_\alpha=(0;\infty)\times(\alpha,\alpha+2\pi)\times\mathbb{R}$ là song ánh lên tập hợp mở $V_\alpha=\mathbb{R}^3\setminus P_\alpha^+$, ở đó P_α^+ là nửa mặt phẳng đóng có bờ là trục Oz, cắt mặt phẳng Oxy theo nửa đường thẳng tạo với trục Ox góc α.

Khi B là tập compact, đo được sao cho $\operatorname{Int}B\subset\Omega_\alpha$, α nào đó thì thu hẹp của φ trên

Int$B$ là đơn ánh và $J(r, \varphi, \theta) \neq 0$ trên Int$B$, do đó có

$$\iiint\limits_{\varphi(B)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{B} f\big(x(r, \varphi, z), y(r, \varphi, z), z(r, \varphi, z)\big) r^2 \sin\theta\,dr\,d\varphi\,dz$$

Ví dụ 1. $\iiint\limits_{B} dx\,dy\,dz, \quad B: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$

Ví dụ 2. $\iiint\limits_{B} \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy\,dz, \quad B: x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$

Ví dụ 3. $\iiint\limits_{B} x^2y^2z^2\,dx\,dy\,dz, \quad B: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$

Ví dụ 4. $\iiint\limits_{B} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz, \quad B: x^2 + y^2 + z^2 \leq x$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!