PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN VÀ LÍ THUYẾT CHUỖI

BÀI 5

§ 5. Chuỗi luỹ thừa (TT)

- Khai triển một số hàm sơ cấp
- Ứng dụng

4. Khai triển một số hàm số sơ cấp cơ bản

4.1. Một số khai triển

1°/ $f(x) = e^x$

- $f^{(n)}(0) = 1$
- $\left|f^{(n)}(x)\right| = e^x < e^A = M,\ \forall x \in (-A;\ A),\ A > 0$
- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!},\ \forall x \in (-A;\ A),\ A > 0 \Rightarrow e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!},\ \forall x \in \mathbb{R}$

2° $f(x) = \cos x$

- $f^{(n)}(0) = \cos n\dfrac{\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$
- $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)\right| \le 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,\ x \in \mathbb{R}$

3° $f(x) = \sin x$

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,\ x \in \mathbb{R}$

4° $f(x) = (1+x)^{\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$

- $f(x) = 1 + \dfrac{\alpha}{1!}x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots,\ -1 < x < 1$

5° $f(x) = \ln(1+x)$

- $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \cdots,\ -1 < x < 1$

6° $f(x) = \arctan x$

- $\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \cdots,\ x \in \mathbb{R},\ -1 \le x \le 1$

Ví dụ 1. Khai triển thành chuỗi Maclaurin

a) $f(x) = a^x,\ 0 < a \ne 1$

- $a^x = e^{x\ln a}$
- $e^{x\ln a} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\ln^n a}{n!}x^n,\ x \in \mathbb{R}$

b) $f(x) = \ln(2+x)$

- $\ln(2+x) = \ln 2\left(1 + \dfrac{x}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \dfrac{x}{2}\right),\ -1 < \dfrac{x}{2} < 1$

- $\ln\left(1+\dfrac{x}{2}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n.2^n}$
- $\ln(2+x)=\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n.2^n},-2<x<2$

c) $\sin^2 x$ $\quad(\dfrac{1}{2}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R})$

d) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ $\quad(2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\ -1<x<1)$

e) $f(x)=\int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ $\quad(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(2n+1)},\ x\in\mathbb{R})$

f) $f(x)=\ln(1+x+x^2+x^3)$ $\quad(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{n},\ -1\le x\le 1)$

g) $f(x)=e^x\sin x$ $\quad(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\sqrt{2})^n}{n!}\sin\dfrac{n\pi}{4},\ x\in\mathbb{R})$

h) $f(x)=\cosh x$ $\quad(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!},\ x\in\mathbb{R})$

i) $f(x)=\int\limits_0^x\dfrac{\sin t}{t}dt$ $\quad(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)},\ x\in\mathbb{R})$

k) $f(x)=\int\limits_0^x\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\quad(x+\dfrac{x^5}{2.5}+\cdots+\dfrac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n!2^n(4n+1)}x^{4n+1}+\cdots,\ |x|<1)$

l) Viết rõ các hệ số đến x^6: $f(x)=e^x\sin x$ $\quad(x+x^2+\dfrac{x^3}{3}+0x^4-\dfrac{x^5}{30}-\dfrac{x^6}{90}\cdots)$

m) Viết rõ các hệ số đến x^6: $f(x)=e^x\cos x$ $\quad(1+x-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{6}-\dfrac{x^5}{30}+0x^6+\cdots)$

Ví dụ 2. Khai triển thành chuỗi Taylor tại lân cận điểm tương ứng

a) $f(x)=\ln x,\ x=1$

- $\ln x=\ln(1+x-1)$
- $\ln(1+x-1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(x-1)^n}{n}$

b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2},\ x=4$

- $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$
- $f^{(n)}(x)=(-1)^n n!\left[\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}}-\dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$

- $f^{(n)}(4) = (-1)^n n!\left(5^{-n-1} - 6^{-n-1}\right)$
- $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(5^{-n-1} - 6^{-n-1}\right)(x-4)^n$

c) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$, theo chuỗi luỹ thừa của $\dfrac{x}{1+x}$

$\left(f(x) = \dfrac{x}{1+x} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^2 + \dfrac{1.3}{2.4}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^3 + \dots + \dfrac{1.3\dots(2n-3)}{2.4\dots(2n-2)}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^n + \dots\right)$

d) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2}$, theo chuỗi luỹ thừa của $\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{1!2} - \dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2!2^2} - \dots - \dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}}{(n-1)!2^{n-1}} + \dots\right]\right)$

e) $f(x) = \sin 3x$, theo chuỗi luỹ thừa của $\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{3^{2n-1}}{(2n-1)!}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)^{2n-1}\right)$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ theo luỹ thừa của $(x-3)$

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}}\right)(x-3)^n,\ |x-3| < 1\right)$

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$ theo luỹ thừa của $(x-2)$

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{3^n} + \dfrac{1}{4^n}\right)(x-2)^n,\ |x-2| < 3\right)$

h) Khai triển thành chuỗi Maclaurin

1) $f(x) = \ln\left(x^3 + 2x^2 + 4x + 8\right)$ 2) $f(x) = \ln\left(4x + 8 - x^3 - 2x^2\right)$

$\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{3^n} + \dfrac{1}{4^n}\right)(x-2)^n,\ |x-2| < 3\right)$ $\left(3\ln 2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{(-1)^{n-1}2-1}{n2^n}x^n,\ |x| < 2\right)$

g) $f(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}dt$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}, R = \infty\right)$

4.2. Ứng dụng của chuỗi luỹ thừa

1°/ Tính gần đúng

Ví dụ 3. Áp dụng chuỗi luỹ thừa, tính gần đúng

a) $\sin 18°$ với độ chính xác 10^{-5}

$f(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}dt$

- $\sin x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$
- $\sin 18^\circ = \sin\dfrac{\pi}{10} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \dfrac{\pi^{2n-1}}{10^{2n-1}}$
- $|R_n| < \dfrac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!10^{2n+1}} \le 10^{-5}$
- $n \ge 3$

b) $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$ với độ chính xác 10^{-3}

- $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$
- $e^{-x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{n!}$
- $I = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\Big|_0^1 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n!(2n+1)}$
- $|R_n| \le \dfrac{1}{(n+1)!(2n+3)} \le 10^{-3} \Rightarrow n \ge 4$

c) Tính gần đúng số e với độ chính xác $0{,}00001$ $(2{,}71828)$

d) Tính gần đúng $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx$ với độ chính xác $0{,}0001$ $(0{,}747)$

e) $\int\limits_0^{\infty} \dfrac{dx}{1+x^3}$ với độ chính xác 10^{-3} $(0{,}118)$

2°/ Tính giới hạn.

Ví dụ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x + \dfrac{x^3}{3!} - \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!}}{x^9}$

- $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!} + o\left(x^9\right)$
- $A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{x^9}{9!} + o\left(x^9\right)}{x^9} = \dfrac{1}{9!}$

§ 6 Chuỗi FOURIER

- Chuỗi lượng giác, chuỗi Fourier
- Khai triển hàm số thành chuỗi Fourier

• **Đặt vấn đề**

1. Chuỗi lượng giác, chuỗi Fourier

a) Chuỗi lượng giác

Định nghĩa. Chuỗi lượng giác là chuỗi hàm số có dạng

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),\ \ a_n, b_n \in \mathbb{R} \tag{1.1}$$

Nhận xét.

1°/ Nếu $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,\ \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ $\Rightarrow$ chuỗi (1.1) hội tụ tuyệt đối trên $\mathbb{R}$

2°/ Tuy nhiên, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|,\ \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$ hội tụ không phải là điều kiện cần để chuỗi (1.1) hội tụ.

b) Chuỗi Fourier

Bổ đề. Với $\forall\, p, k \in \mathbb{Z}$, ta có

1°/ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx = 0$

2°/ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx = 0,\ \ k \neq 0$

3°/ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin px\,dx = 0$

4°/ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos px\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \pi, & k = p \neq 0 \end{cases}$

5°/ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin px\,dx = \begin{cases} 0, & k \neq p \\ \pi, & k = p \neq 0 \end{cases}$

• Giả sử $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π và có

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{1.2}$$

Sử dụng bổ đề trên và tính toán ta có

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\,;\ \ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx,\ \ n = 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,\ \ n = 1, 2, \ldots \tag{1.3}$$

Định nghĩa. Chuỗi lượng giác $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ với các hệ số a_0, a_n, b_n xác định trong (1.3) được gọi là chuỗi Fourier của hàm $f(x)$.

2. Điều kiện để hàm số khai triển được thành chuỗi Fourier

Định nghĩa. Chuỗi Fourier của hàm $f(x)$ hội tụ về hàm $f(x)$ thì ta bảo hàm $f(x)$ được khai triển thành chuỗi Fourier.

Định lí Dirichlet. Cho $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, đơn điệu từng khúc và bị chặn trên $[-\pi\,;\,\pi] \Rightarrow$ chuỗi Fourier của nó hội tụ tại mọi điểm trên đoạn $[-\pi\,;\,\pi]$ và có

$S(x) = f(x)$, tại điểm liên tục của $f(x)$.

Còn tại điểm gián đoạn $x = c$ có $S(c) = \dfrac{f(c+0)+f(c-0)}{2}$.

Ví dụ 1. Khai triển thành chuỗi Fourier hàm số $f(x)$ tuần hoàn với chu kì 2π, xác định như sau

a) $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le \pi \\ -1, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$

+) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \dfrac{1}{\pi}(\pi - \pi) = 0$

+) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos nx)dx + \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nx\, dx = 0$

+) $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\sin nx)dx + \dfrac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nx dx$

$= \dfrac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \dfrac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right]$

+) $f(x) = \dfrac{4}{\pi}\left(\sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x + \dfrac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$

b) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi \\ -x, & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ $\left(f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty}\dfrac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}\right)$

c) $f(x) = x^2,\ -\pi < x < \pi$

+) $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \dfrac{2\pi^2}{3}$

+) $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = 0$

+) $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \dfrac{4}{n^2}\cos n\pi = (-1)^n\dfrac{4}{n^2}$

$f(x) = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\left[\dfrac{\cos x}{1} - \dfrac{\cos 2x}{4} + \dfrac{\cos 3x}{9} - \dfrac{\cos 4x}{16} + \cdots\right]$

d) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \le x < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

$$\left(f(x) = -\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right)$$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!