GIẢI TÍCH I
BÀI 14
§ 3.2. ĐẠO HÀM RIÊNG VÀ VI PHÂN (TT)

5. Đạo hàm riêng và vi phân cấp cao:

Định nghĩa: Cho $z = f(x, y)$, ta định nghĩa:

$$f''_{x^2}(x,y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad f''_{y^2}(x,y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

$$f''_{xy}(x,y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right); \quad f''_{yx}(x,y) \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Tương tự nếu $z = g(x, y, z)$ thì:

$$g'''_{x^3}(x,y,z) \equiv \frac{\partial^3 g}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right); \quad g'''_{xyz}(x,y,z) \equiv \frac{\partial^3 g}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\right).$$

$$g'''_{yx^2}(x,y,z) \equiv \frac{\partial^3 g}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)\right), \ldots$$

Ví dụ 1.

a) $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Tính z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}. d) $z = \sin(xy)$. Tính $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$

b) $z = \arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$. Tính z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}. e) $w = e^{xyz}$. Tính w'''_{xyz}.

c) $z = e^{xe^y}$. Tính z''_{xx}, z''_{xy}, z''_{yy}

f) $g(x, y) = (1+x)^m (1+y)^n$. Tính $g''_{xx}(0,0)$, $g''_{xy}(0,0)$, $g''_{yy}(0,0)$.

g) $f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = 0 = y \end{cases}$ CMR $f''_{yx}(0,0) = 1$, $f''_{xy}(0,0) = -1$

h)(K51) 1. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = 0 = y \end{cases}$ Tính $f''_{xy}(0,0)$ $(\nexists)$

2. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x = 0 = y \end{cases}$ Tính $f''_{yx}(0,0)$ $(\nexists)$

i)(K54) 1. Cho $z = y\sin\dfrac{y}{x}$, tính $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}$ (0)

2. Cho $z = x\cos\dfrac{x}{y}$, tính $x^2 z''_{xx} + 2xyz''_{xy} + y^2 z''_{yy}$ (0)

3. Cho $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin^3 y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, tính $f'_x(x,y), f''_{xy}(0,0)$

$$\left(f'_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(y^2-x^2\right)\sin^3 y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & x=y=0\end{cases},\quad f''_{xy}(0,0)=1\right)$$

4. Cho $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sin^3 x}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, tính $f'_y(x,y), f''_{yx}(0,0)$

$$\left(f'_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\left(x^2-y^2\right)\sin^3 x}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & x=y=0\end{cases},\quad f''_{yx}(0,0)=1\right)$$

k)(K55) 1. Cho $z=ye^{\frac{y}{x}}$. Tính $A=x^2z''_{xx}+2xyz''_{xy}+y^2z''_{yy}$ (0)

2. Cho $z=ye^{\frac{x}{y}}$. Tính $A=x^2z''_{xx}+2xyz''_{xy}+y^2z''_{yy}$ (0)

l) (K58) Cho $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\tan y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, tính $f''_{xx}(0,0)$ (0)

m)(K60)

1. Cho $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$, tính $f''_{xx}(0,0)$ (2)

2. Cho các hàm φ và ψ khả vi đến cấp hai. Bằng cách đạo hàm riêng liên tiếp, thiết lập hệ thức liên hệ giữa các đạo hàm riêng của z không phụ thuộc vào φ và ψ, biết $z=\varphi(xy)+\psi\left(\dfrac{x}{y}\right)$. $\left(x^2z''_{xx}-y^2z''_{yy}+xz'_x-yz'_y=0\right)$

Định lí Schwart. z = f(x, y) có các đạo hàm riêng f''_{xy}, f''_{yx} trong lân cận $M_0(x_0,y_0)$ và các đạo hàm riêng này liên tục tại $M_0(x_0,y_0)\Rightarrow f''_{xy}(M_0)=f''_{yx}(M_0)$.

Chú ý: Định lí này có thể mở rộng cho đạo hàm riêng cấp cao hơn và cho hàm số n biến số nếu các đạo hàm riêng ấy liên tục.

Ví dụ 2: Tính các đạo hàm riêng cấp hai: f''_{xy}, f''_{yx}

a. $f(x,y) = x^2y^3 + y^5$; b. $f(x,y) = e^{xy} + \sin(x^2 + y^2)$

Định nghĩa. z = f(x, y), ta định nghĩa $d^nz = d(d^{n-1}z)$, $2 \le n \in N$.

Nhận xét:

+ Khi x, y là các biến số độc lập ta có: $d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$.

+ Khi x, y không phải là các biến số độc lập thì công thức trên không còn đúng với $n \ge 2$.

Thật vậy: $d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f + f'_x d^2x + f'_y d^2y$

Do đó vi phân toàn phần d^nz $(n \ge 2)$ của hàm z nhiều biến số không có dạng bất biến.

Ví dụ 3

a) $f(x,y) = (1+x)^m(1+y)^n$. Tính $d^2f(0,0)$

b) $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 5xz + 7yz$. Tính $d^2f(0,0,0)$.

c) $z = x^2 + 2y + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$. Tính $d^2(1,2)$. d) $z = e^{xy}$. Tính d^2z

e) $z = e^x\cos y$. Tính d^3z.

f)(K52) 1. $f(x,y) = x^{2y}$. Tính $d^2f(1,1)$ $(2dx^2 + 4dxdy)$

2. $f(x,y) = y^{3x}$. Tính $d^2f(1,1)$ $(6dxdy + 6dy^2)$

g)(K57) 1) $f(x,y) = x^{y^2}$. Tính $d^2f(1,-1)$ $(-4dxdy)$

2) $f(x,y) = y^{x^3}$. Tính $d^2f(1,1)$ $(6dxdy)$

h)(K59) Cho $w = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng đến cấp 2 liên tục; còn x, y không là các biến số độc lập. Tính $d^2f(x,y)$.

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f + f'_x d^2x + f'_y d^2y\right)$$

6. Công thức Taylor

Định lí: f(x,y) có đạo hàm riêng đến cấp (n + 1), liên tục trong lân cận nào đó của $M_0(x_0,y_0)$. Nếu $M_0(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ cũng nằm trong lân cận đó thì ta có:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \ldots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0) +$$
$$\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y),\quad 0 < \theta < 1$$

Ví dụ 4

a. Khai triển $f(x,y) = -x^2 + 3y^2 + 2xy - 6x - 2y - 4$ thành chuỗi Taylor ở lân cận điểm (- 2, 1).

b. Khai triển Maclaurin $f(x,y)=e^x \sin y$ đến bậc 3.

c. Khai triển Maclaurin $f(x,y)=\dfrac{1}{1-x-y+xy}$.

d. Viết công thức Taylor hàm $f(x,y)=y^x$ ở lân cận điểm (1, 1) đến bậc hai.

e(K59) 1) Cho hàm ẩn z xác định bởi $z^3-2xz+y=0$, biết z(1, 1) = 1. Hãy tính một số số hạng của khai triển hàm z theo luỹ thừa của (x – 1) và (y +1).

$(1+2(x-1)+(y+1)+...)$

2) Cho hàm ẩn z xác định bởi $z^3-2xz-y=0$, biết z(1, -1) = 1. Hãy tính một số số hạng của khai triển hàm z theo luỹ thừa của (x – 1) và (y - 1).

$(1+2(x-1)-(y-1)+...)$

f(K62) Cho hàm số $z=\operatorname{arc}\cot\dfrac{y}{x}$. Tính dz, d^2z.

$(\dfrac{y}{x^2+y^2}dx-\dfrac{x}{x^2+y^2}dy;\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}(-2xydx^2+2(x^2-y^2)dxdy+2xydy^2))$

§3. Cực trị

Đặt vấn đề

I. Định nghĩa: $z=f(M),\ \ M\in R^n$.

Ta bảo z đạt cực tiểu tại $M_0 \Leftrightarrow f(M)>f(M_0),\ \forall M\in U_\varepsilon(M_0)\backslash\{M_0\}$.

Tương tự z có cực đại tại $M_1 \Leftrightarrow f(M)<f(M_1),\ \forall M\in U_\varepsilon(M_1)\backslash\{M_1\}$.

Ví dụ 1. a) $z=x^2+y^2$ b) $z=4-x^2-y^2$

II. Quy tắc tìm cực trị

a, $z = f(x,y)$, đặt $p=f'_x,\ q=f'_y,\ a=f''_{x^2},\ \ b=f''_{xy},\ c=f''_{y^2}$

Định lí 1. $z = f(x,y)$ đạt cực trị tại $M_0, \exists f'_x, f'_y \Rightarrow f'_x(M_0)=f'_y(M_0)=0$.

Định nghĩa: ta gọi M_0 là điểm tới hạn $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'_x(M_0)=0=f'_y(M_0) \\ \nexists f'_x(M_0),\ \nexists f'_y(M_0) \end{array}\right.$

Định lí 2: Giả sử $z = f(x,y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục trong lân cận nào đó của $M_0(x_0,y_0)$, $f'_x(M_0)=0=f'_y(M_0)$ (điểm dừng). Khi đó:

+ Nếu $b^2-ac<0$ thì f(x, y) đạt cực trị tại M_0; cực tiểu nếu a >0, cực đại nếu a <0.

+ Nếu $b^2-ac>0$ thì f(x, y) không đạt cực trị tại M_0.

+ Nếu $b^2-ac=0$ thì không có kết luận gì về cực trị tại M_0.

Ví dụ 2: Tìm các cực trị của các hàm số sau:

a(K50) 1) $z = x^2 - 2x + \arctan y^2$ $(z_{CT}(1\,;\,0) = -1)$

2) $z = \operatorname{arccot} x^2 - y^2 + 2y$ $\left(z_{CD}(0\,;1) = \frac{\pi}{2} + 1\right)$

b(K51) 1) $z = 3x^2y - x^3 - y^4$ ($z_{CĐ}(6\,;\,3) = 27$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;\,0)$

2) $z = 3xy^2 - y^3 - x^4$ ($z_{CĐ}(3\,;\,6) = 27$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;\,0)$

c(K52) 1) $z = (x^2 + 2x - y)e^{-2y}$ $\left(z_{CT}\left(-1; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{e}{2}\right)$

2) $z = x + y - \dfrac{1}{xy}$ $(z_{CĐ}(-1\,;\,-1) = 3)$

d) (K53) $z = x^3 - y^3 - 3xy$ ($z_{CĐ}(-1\,;\,1) = 1$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;\,0)$

e 1) $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$ 2) $z = \dfrac{1}{4}\left(x^4 + y^4\right) - \left(x^2 + y^2\right) - xy + 1$

3) $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ 4) $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$

5) $z = xy\ln(x^2 + y^2)$ 6) $z = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$

f) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$

g(K54) 1) $z = e^{-x}\left(2x - 3y + y^3\right)$ ($z_{CĐ}(0\,;\,-1) = 2$, $\nexists$ cực trị tại $(2\,;\,1)$

+) $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x}\left(-2x + 3y - y^3 + 2\right) = 0 \\ e^{-x}\left(-3 + 3y^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y^3 - 3y - 2}{-2} \\ y = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1(0\,;-1) \\ M_2(2\,;1) \end{cases}$

+) $z''_{xx} = e^{-x}\left(2x - 3y + y^3 - 4\right)$, $z''_{xy} = e^{-x}\left(3 - 3y^2\right)$, $z''_{yy} = e^{-x}6y$

M_i	A	B	C	Δ	Kết luận
M_1	-2	0	-6	-12	$z_{CĐ}(M_1) = 2$
M_2	$-2e^{-2}$	0	$6e^{-2}$	$12e^{-4}$	Không có cực trị

2) $z = e^{-y}\left(3x - x^3 - 2y\right)$ ($z_{CĐ}(-1\,;\,0) = -2$, $\nexists$ cực trị tại $(1\,;\,2)$

h(K55) 1) $z = xy\left(3 - x - y\right)$ ($z_{CĐ}(1\,;\,1) = 1$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;\,0)$, $(0\,;\,3)$, $(3\,;\,0)$

2) $z = xy\left(x + y + 3\right)$ ($z_{CĐ}(-1\,;\,-1) = 1$, $\nexists$ cực trị tại $(0\,;\,0)$, $(0\,;\,-3)$, $(-3\,;\,0)$

3) $z = x^2 + \dfrac{2}{x} + y + \dfrac{4}{y}$ $(z_{min}(1;2) = 7$, $(1\,;\,-2)$ không là cực trị)

4) $z = x + \frac{1}{x} - y^2 - \frac{2}{y}$ $\quad (z_{max}(-1;1) = 5$, (1 ; 1) không là cực trị)

k(K56) 1) $z = 2x^3 + 2y^3 - 3x^2 + 3y^2$

($z_{max}(0 ; -1) = 1$, $z_{min}(1 ; 0) = -1$, tại (0 ; 0), (1 ; –1) không là cực trị)

2) $z = 3x^2 + 3y^2 - 2x^3 - 2y^3$

($z_{min}(0 ; 0) = 0$, $z_{max}(1 ; 1) = 2$ tại (0 ; 1), (1 ; 0) không là cực trị)

3) $z = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$, $\quad (z_{min}(1 ; 1) = 4 = z_{min}(-1 ; -1))$

4) $z = \frac{2}{xy} - x^2 - y^2$, $\quad (z_{max}(1 ; -1) = -4 = z_{max}(-1 ; 1))$

5) $z = x^2 + 2y^3 + 2x - 3y^2$ $\quad$ ($z_{min}(-1 ; 1) = -2$, tại (–1 ; 0) không là cực trị)

6) $z = 2x^3 + y^2 - 3x^2 + 2y$ $\quad$ ($z_{min}(1 ; -1) = -2$, tại (0 ; –1) không là cực trị)

l(K57) 1) $z = x^2 - y + \frac{2}{x} - \frac{1}{y}$ $\quad (z_{min}(1, -1) = 5, \nexists$ CT $(1, 1))$

2) $z = x + \frac{4}{x} - y^2 + \frac{2}{y}$ $\quad (z_{max}(-2, -1) = -7, \nexists$ CT $(2, -1))$

m(K58)

1) $z = e^{2x}\left(4x^2 - 2xy + y^2\right)$ $\quad$ ($z_{min}(0; 0) = 0$, $\nexists$ cực trị tại (-1 ; -1))

2) $z = e^{2x}(x - y)(x + y + 2)$ $\quad$ ($z_{CĐ}(-2 ; -1) = e^{-4}$, $\nexists$ cực trị tại (-1 ; -1))

3) $z = x^4 + y^4 - (x + y)^3$ $\quad$ ($z_{min}(3 ; 3) = -54$, $\nexists$ cực trị tại (0 ; 0))

4) Tìm a, b,c để hàm số $z = 2x^3 + 3xy + 2y^3 + ax + by + c$ đạt cực trị tại M(1,1) và có $z(M) = 0$. $\quad$ (a=b=-9, c=11)

n(K59)

1) $z = 2x^4 + y^4 + 4x^2 - 2y^2$ $\quad$ ($z_{min}(0;\pm1) = -1$; (0 ;0) không là cực trị)

2) $z = x^2 - 2xy^2 + 2y^4 - 4y + 1$ $\quad$ ($z_{min}(1;1) = -2$; (0 ;0) không là cực trị)

3) $z = x^3 - 2xy + y^2 - x + 2$ $\quad$ ($z_{min}(1;1) = 1$; $(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$ không là cực trị)

4) $z = 2x^2 + 3y^2 - e^{-(x^2+y^2)}$ $\quad$ ($z_{min}(0;0) = -1$)

o(K60)

1) $z = x^3 + x^2y + 2y^2 + 1$ $\quad$ ((6;–9) ; (0 ;0) không là cực trị)

2) $z = 12xy - 8x^3 + y^3 + 2$ $\quad$ ($z_{min}(-1;2) = -6$; (0 ;0) không là cực trị)

3) $z = x^3 + \frac{3}{2}y^4 - 3xy^2$ $\left(z_{\min}(1;1) = -\frac{1}{2}\right.$; $(1;-1)$, $(0;0)$ không là cực trị)

4) $z = \frac{1}{2}x^4 + y^2 - 2xy$

$\left(z_{\min}(1;1) = -\frac{1}{2}, z_{\min}(-1;-1) = -\frac{1}{2}\right.$, $(0;0)$ không là cực trị)

5) $z = x^2 + \frac{16}{x} + y + \frac{1}{y} + 3$ ($z_{\min}(2;1) = 17$; $(2;-1)$ không là cực trị)

p(K61)

1) $z = \frac{1}{x^3} + y^3 - 3\frac{y}{x}$. ($z_{\min}(1;1) = -1$)

2) $z = \frac{y}{x} + \frac{3}{y} - \frac{xy}{12}$. ($z_{\max}(-4;-3) = -3$)

3) $z = x^2 + 3y^2 - 5xy + 3x - y$. ($(1;1)$ không là cực trị do $\Delta > 0$)

q(K62)

1) $z = x^3 + 2xy - 7x - 6y + y^2 + 4$. ($z_{\min}(1;2) = -6$; $\left(-\frac{1}{3};\frac{10}{3}\right)$ không là cực trị)

2) $z = x^4 + 2xy - 4x - 4y + y^2 + 1$. $\left(z_{\min}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}};2\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{13}{4}\right.$; $(0;2)$ không là cực trị)

3) $z = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$. ($z_{\max}(1;0) = 1$; $(0;2)$ không là cực trị)

Have a good understanding!