GIẢI TÍCH 2
BÀI 9

CHƯƠNG IV. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG VÀ TÍCH PHÂN MẶT

A. TÍCH PHÂN ĐƯỜNG

§1. Tích phân đường loại 1

1. Đặt vấn đề

2. Định nghĩa. $f(x, y)$ xác định trên đường cong $C = \overset{\frown}{AB}$. Chia C thành n phần (không dẫm lên nhau) bởi các điểm $A \equiv A_0, A_1, \ldots, A_n \equiv B$.

Gọi tên và độ dài của cung thứ i: $\overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$ là Δs_i, $i = \overline{1, n}$.

Lấy tuỳ ý $M_i(x_i\,;\,y_i) \in \overset{\frown}{A_{i-1}A_i}$, lập tổng $I_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$.

Nếu có $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = I$ với mọi cách chia C và mọi cách chọn điểm M_i thì ta gọi I là tích phân đường loại một của hàm $f(x, y)$ lấy trên đường cong C và kí hiệu

$$I = \int\limits_C f(x, y)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds$$

Ví dụ 1. Tính $\int\limits_C 2ds$, C: $x^2 + y^2 = 9$, $x \ge 0$, từ $(0\,;\,-3)$ đến $(0\,;\,3)$

Ví dụ 2. Xét $\int\limits_C D(x, y)ds$, C: $0 \le x \le 1$, $y = 0$, $D(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in I \end{cases}$

3. Sự tồn tại.

Định lí 1. $f(x, y)$ liên tục trên đường cong trơn C thì tồn tại $\int\limits_C f(x, y)ds$

• Ý nghĩa cơ học

$f(x, y) > 0$ là mật độ khối lượng của đường cong vật chất C thì có khối lượng của đường cong là $m = \int\limits_C f(x, y)ds$

5. Tính chất. Có tính chất giống như tích phân xác định trừ ra tính chất sau

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} f(x, y)ds = \int\limits_{\overset{\frown}{BA}} f(x, y)ds$$

6. Cách tính. Ta cần tính $\int\limits_C f(x, y)ds$

a) C : $y = y(x)$, $a \le x \le b$, khi đó ta có $\int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx$

Ví dụ 1. Tính $I = \int\limits_C \frac{4y}{x}ds$, $C : y = \frac{x^2}{2}$ nối điểm $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$ với $B(2\,;\,2)$.

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_C xy\,ds$, $C : |x| + |y| = a$, $a > 0$.

b) C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, thì có $\int\limits_C f(x,y)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t);y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$

Ví dụ 1. Tính $\int\limits_C xy\,ds$, $C : x^2 + y^2 = R^2$, $x \ge 0$, $y \ge 0$

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_C (x-y)ds$, $C : x^2 + y^2 = ax$.

c) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, thì có

$$\int\limits_C f(x,y,z)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

Ví dụ 1. Tính $\int\limits_C (x+y)ds$, $x = t$, $y = \sqrt{\frac{3}{2}}t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $t \ge 0$.

§2. Tích phân đường loại hai

1. Đặt vấn đề

2. Định nghĩa. Cho hàm vectơ $\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j}$ xác định trên đường cong C nối hai điểm A, B, $C = \overset{\frown}{AB}$, vectơ $\vec{T}(M) = \cos\alpha(M)\vec{i} + \sin\alpha(M)\vec{j}$ là vectơ tiếp tuyến với C tại M, $\alpha(M) = (\vec{T}, Ox)$, khi đó tích phân đường loại một của hàm

$f(x,y) = \vec{F}.\vec{T} = P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)$ trên đường C

$$I = \int\limits_C \vec{F}.\vec{T}\,ds = \int\limits_C [P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\sin\alpha(M)]ds$$

cùng được gọi là tích phân đường loại hai của hàm $\vec{F}(M)$ hay của các hàm $P(M)$, $Q(M)$ lấy trên C đi từ A đến B. Ta cũng có

$$I = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Tương tự, ta cùng có tích phân đường loại hai của hàm

$$\vec{F}(M) = P(M)\vec{i} + Q(M)\vec{j} + \vec{R}(M)\vec{k},\, M \in \mathbb{R}^3 \text{ là}$$

$$I = \int_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = \int_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

α, β, γ lần lượt là các góc giữa tiếp tuyến $\vec{T}$ với các trục Ox, Oy, Oz

Ví dụ 1. Tính $\int_C xdx + e^{xy^2}dy$, C: $y = 1$, $x : 0 \to 2$

Ví dụ 2. Xét $\int_C \sin x^2 dx + dy$, $C : x = 2$, $y : 0 \to 1$

3. Sự tồn tại

Định lí 1. Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục trên đường cong trơn từng khúc C thì tồn tại $\int_C P(x, y)dx + Q(x, y)dy$

4. Ý nghĩa cơ học : Tính công của lực di chuyển chất điểm dọc theo đường cong C.

5. Tính chất : Có các tính chất giống như tích phân xác định, chẳng hạn :

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\overset{\frown}{BA}} Pdx + Qdy$$

6. Cách tính.

a) Nếu $C : y = y(x),\, x : a \to b$ thì có

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_a^b \big(P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x)\big)dx$$

Ví dụ 1. Tính $\int_C xydx + (y - x)dy$,

a) $C : y = x^2$, $x : 0 \to 1$

b) $C : y = 0$, $x : 0 \to 1$

c) $x = 1$, $y : 0 \to 1$

Ví dụ 2. Tính $\int_{ABCDA} \dfrac{dx + dy}{|x| + |y|}$, $ABCDA$ là chu tuyến hình vuông với các đỉnh $A(1 ; 0)$, $B(0 ; 1)$, $C(-1 ; 0)$, $D(0, -1)$.

b) C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, t: $\alpha \to \beta$, có

$$\int_C Pdx + Qdy = \int_\alpha^\beta \big[P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)\big]dt$$

Ví dụ 1. Tính $\oint\limits_C xdx+(x+y)dy$, $C: x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t: 0 \to 2\pi$

Ví dụ 2. Tính $\int_C \dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{(x^2+y^2)}$, C là $x^2 + y^2 = a^2$ theo chiều ngược chiều kim đồng hồ.

Chú ý. Tương tự cũng có công thức khi $C: x = x(t),\ y = y(t),\ z(t),\ t: \alpha \to \beta$

7. Công thức Green

Định lí 1. Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trên miền D compact, giới hạn bởi đường cong kín, trơn từng khúc C, thì có

$$\oint\limits_C Pdx+Qdx=\iint\limits_D (Q'_x-P'_y)dxdy$$

Ví dụ 1. Tính $\oint\limits_C (1-x^2)ydx+(1+y^2)xdy$, C: $x^2 + y^2 = R^2$

Ví dụ 2. Tính $\oint\limits_C (xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, $C: x^2 + y^2 = ax$.

8. Điều kiện để tích phân không phụ thuộc vào đường lấy tích phân

Định lí 1. (ĐL mệnh đề tương đương). Các hàm $P(x, y)$, $Q(x, y)$ liên tục cùng với các đạo hàm riêng cấp một trong miền D đơn liên thì bốn mệnh đề sau là tương đương

1°/ $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}, \forall (x, y)\in D$

2°/ $\oint\limits_L Pdx+Qdx=0$, $\forall$ L kín thuộc D.

3°/ $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} Pdx+Qdy$ chỉ phụ thuộc vào A, B mà không phụ thuộc vào đường nối A, B.

4°/ $\exists U(x, y): du=Pdx+Qdy$

Chú ý : $\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} dU=U\Big|_A^B=U(B)-U(A)$

Ví dụ 1. $\displaystyle\int\limits_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy+ydx$

Ví dụ 2. Tính $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} \left(4x^3y^3 - 3y^2 + 5\right)dx + \left(3x^4y^2 - 6xy - 4\right)dy$

Ví dụ 3. Tính $\int\limits_L \frac{x}{(x+y^2)^2}[(x+2y^2)dx - 2xydy]$,

ở đó L: $y = 1 - x^3$, đi từ A(1,0) đến B(0,1).

Chú ý. Tương tự có thể mở rộng định lí này cho đường cong trong không gian:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t : \alpha \to \beta.$$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!