GIẢI TÍCH I

BÀI 3.

§1.9. ĐẠO HÀM VÀ VI PHÂN

• Đặt vấn đề

I. Định nghĩa. $f(x)$ xác định trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, $f'(x_0) = a$

$$\Leftrightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a \in \mathbb{R}$$

Ví dụ 1. $y = 2010$, tính y'

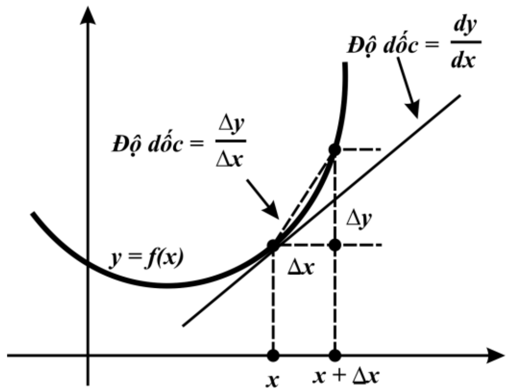
Ví dụ 2. $y = x^3$, tính y'

Ví dụ 3. $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, tính y'

Ví dụ 4. $y = |x|$, xét $y'(0)$, $y'(-1)$

a) Ý nghĩa hình học

$f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại $x = x_0$.



b) Ý nghĩa cơ học. Xét chất điểm M chuyển động thẳng, không đều với quãng đường là $S(t)$ tính từ điểm O nào đó. Khi đó vận tốc tức thời tại t_0 là $v(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{S(t) - S(t_0)}{t - t_0} = S'(t_0)$

Ví dụ 5. Một người đi xe máy với vận tốc 30km/h trong nửa đầu tiên của đoạn đường và 20km/h trong nửa thứ hai. Hỏi vận tốc trung bình là bao nhiêu?

(24km/h)

Ví dụ 6. Một tên lửa bắn thẳng lên từ mặt đất với vận tốc ban đầu v_0 m/s và đạt độ cao trong t giây là $S = tv_0 - 16t^2$

a) Tìm vận tốc ở thời điểm t

b) Mất bao lâu để tên lửa đạt tới độ cao tối đa?

c) Tính vận tốc tên lửa khi chạm đất

d) Vận tốc ban đầu là bao nhiêu để tên lửa chạm đất sau khi bắn 15 giây.

c) Ý nghĩa thực tế. $\dfrac{dy}{dx}$ là suất biến đổi của y theo x.

Ví dụ 7. Cho hình tròn bán kính r, ta có $S = \pi r^2$, ta có $S' = 2\pi r$. Như vậy suất biến đổi diện tích của một hình tròn theo bán kính chính bằng chu vi của nó.

Ví dụ 8. Một cái thang dài 13ft đứng dựa vào bức tường thì chân thang bị trượt ra xa bức tường với tốc độ không đổi 6ft/s. Đầu trên của chiếc thang chuyển động xuống dưới nhanh như thế nào khi chân thang cách tường 5ft?

Ví dụ 9. Người ta hút dầu ra khỏi thùng để làm sạch nó. Biết sau khi hút t phút lượng dầu còn lại trong thùng là $V = 40(50 - t)^2$ lít.

a) Tìm lượng dầu hút trung bình trong 20 phút đầu tiên.

$$\left(v_{tb} = \frac{40.50^2 - 40.30^2}{20} = 3200 \ \ (\text{l/p})\right)$$

b) Tìm tốc độ dầu được hút ra khỏi thùng tại thời điểm t = 20 phút.

$(v(20) = (40.50^2 - v)'_{t=10} = 2400$ l/p)

Ví dụ 10. Một cái thùng hình nón với đỉnh ở phía dưới có chiều cao 12 ft và đường kính đáy là 12ft được bơm đầy nước với tốc độ không đổi là 4ft^3/phút. Hãy tính tốc độ biến đổi chiều cao cột nước khi

a) nước sâu 2ft $\quad (y'(2) = \dfrac{1}{\pi})$ $\quad$ b) nước sâu 8ft. $\quad (y'(8) = \dfrac{1}{16\pi})$

Ví dụ 11. a)(K57) Chứng minh rằng:

1) $2\arctan x + \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2} = \pi, \ \forall x \ge 1$

2) $2\operatorname{arccot} x + \arccos\dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{5\pi}{2}, \ \forall x \le -1$

b)(K58) Cho $f(x) = \begin{cases} x\operatorname{arccot}\dfrac{1}{x^2}, & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, tính $f'(x)$

$\left(f(x) = \operatorname{arccot}\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{2x^2}{1+x^4}, x \ne 0;\ y'(0) = 0\right)$

c)(K59) 1) Chứng minh rằng phương trình $x^5 - \sin x + 2x = 2$, có duy nhất nghiệm thực.

2) Cho $f(x) = \begin{cases} 3x + e^{-\frac{2}{|x|}}, & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, tính $f'(0)$. $\qquad$ (3)

2. Đạo hàm một phía, mối liên hệ với liên tục, đạo hàm của hàm ngược.

a) Đạo hàm một phía.

Định nghĩa.

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x};\ f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Nhận xét. $\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0)$

Ví dụ 1. a) $y = \sqrt{1-x}$, xét $y'(1 - 0)$

b)(K60) $y = |1 - x^2|$, tích các đạo hàm phải, trái tại ± 1. $\qquad$ (2; -2; 2; -2)

c)(K61) Tính $f'(0)$, ở đó $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & x > 0, \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ $\qquad$ (0)

b) Liên hệ đạo hàm và liên tục.

$\exists f'(x_0) \Rightarrow f(x)$ liên tục tại x_0.

Ngược lại không đúng, ví dụ $y=\sqrt[3]{x}$ liên tục tại $x_0 = 0$ nhưng $\nexists$ $f'(0)$.

c) Đạo hàm của hàm số ngược

+) Hàm số $x = \varphi(y)$ có hàm ngược $y = f(x)$

+) $y = f(x)$ liên tục tại $x_0 = \varphi(y_0)$

+) $\varphi'(y_0) \neq 0$

Khi đó ta có $f'(x_0)=\dfrac{1}{\varphi'(y_0)}$.

Ví dụ 2. $y = \text{arccot}\, x$, tính y'.

Ví dụ 3. a) $y = \arcsin x$, tính y'.

b)(K58) 1) Cho các hàm f, g khả vi, $g(x)=f^{-1}(x)$. Đặt $G(x)=\dfrac{1}{g(x)}$, tính $G'(2)$, biết

$f(3)=2$, $f'(3)=1$. $\left(-\dfrac{1}{9}\right)$

2) Cho các hàm f, g khả vi, $g(x)=f^{-1}(x)$. Đặt $G(x)=e^{g(x)}$, tính $G'(2)$, biết $f(3)=2$, $f'(3)=1$. $\left(-\dfrac{1}{9}\right)$

3) Cho các hàm f, g khả vi, biết $f(g(x))=x$, $f'(x)=1+(f(x))^2$. Tìm g(x) $(\arctan x + C)$

c)(K59) Chứng minh rằng hàm số $f(x)=2x+2+\ln(x^2+1)$ có hàm số ngược $g(x)=f^{-1}(x)$. Tính $g'(2)$. $\left(\dfrac{1}{2}\right)$

3. Phép toán và công thức.

a) Phép toán. Các hàm f, g khả vi tại x_0, khi đó

- $(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$
- $(f.g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)g(x_0)-g'(x_0)f(x_0)}{g^2(x_0)}$, $g(x_0)\neq 0$.

b) Đạo hàm các hàm sơ cấp cơ bản.

Ta dẫn ra công thức của một vài hàm

- $c' = 0$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $\left(\log_a|x|\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}$
- $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
- $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\text{arccot}\, x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Ví dụ 1(K52) Tìm k để hàm số $f'(x)$ liên tục tại $x = 0$

a) $f(x)=\begin{cases}(\arcsin x)^k\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $(k>2)$

b) $f(x)=\begin{cases}(\arctan x)^k\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $(k>2)$

Ví dụ 2(K57) Tính $f'(0)$, ở đó $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{1+x^4}\cos x^2}{x^4\ln\left(1+2x^2\right)}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ (0)

c) Đạo hàm của hàm hợp.

$\exists\, y'_u(u_0)$, $\exists\, u'_x(x_0) \Rightarrow y = y(u(x))$ có đạo hàm tại x_0 và có $y'_x(x_0) = y'_u(u_0).u'_x(x_0)$.

Ví dụ 1. $y = (x-1)(x-2)\ldots(x-2009)$, tính $y'(1)$. (2008!)

Ví dụ 2. $y=\begin{cases}2+x, & x\le -2\\ (2+x)(x-3), & -2<x\le 3,\\ x-3, & x>3\end{cases}$ tính y'. $\left(=\begin{cases}1, & x<-2\\ 2x-1, & -2<x<3\\ 1, & x>3\end{cases}\right)$

Ví dụ 3. $y = x^x$, tính y'.

Ví dụ 4. Chứng minh rằng:

- Đạo hàm của hàm chẵn là hàm lẻ (K58)
- Đạo hàm của hàm lẻ là hàm chẵn (K58)
- Đạo hàm của hàm tuần hoàn là hàm tuần hoàn có cùng chu kì

Ví dụ 5. $y = x^{x^x}$, tính y'.

Ví dụ 6.(K53) Chứng minh rằng

a) $3\arctan x+\arctan(x+2)<4\arctan(x+1),\ \forall x>0$

b) $2\operatorname{arccot} x+\operatorname{arccot}(x+2)>3\operatorname{arccot}(x+1),\ \forall x>0$

Ví dụ 7(K50) **a)** CMR $\arctan x^4-\arctan y^4\le \ln\frac{x^2}{y^2}$, $\forall\, x, y$: $x\ge y>0$.

b) CMR $\operatorname{arccot} x^4-\operatorname{arccot} y^4\ge \ln\frac{y^2}{x^2}$, $\forall\, x, y$: $x\ge y>0$.

Ví dụ 8(K56) CMR $f(x)$ liên tục với mọi x.

a) $f(x)=\begin{cases}x^2\operatorname{arccot}\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x^3\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} x^3\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

4. Vi phân

a) Định nghĩa. $f(x)$ xác định trong $U_{\varepsilon_0}(x_0)$, nếu có $\Delta f = A\Delta x + \alpha(\Delta x)$, ở đó A chỉ phụ thuộc vào x_0 chứ không phụ thuộc vào Δx, $\alpha(\Delta x)$ là VCB cấp cao hơn so với Δx thì ta nói $f(x)$ khả vi tại x_0 và có

$$df = A\Delta x.$$

Ví dụ 1. $y = 2x + 3$, tính dy.

b) Ý nghĩa hình học. Nếu $A \neq 0$ thì $\Delta f \sim df$.

Nhận xét $A\Delta x$ là tuyến tính đối với Δx nên nó đơn giản hơn Δf nhiều.

c) Ứng dụng tính gần đúng. $f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0)$.

Ví dụ 2. a) Tính gần đúng $\sqrt{4{,}01}$.

b)(K59) Tính gần đúng $\sqrt[3]{\dfrac{2+0{,}06}{2-0{,}06}}$. (1,02)

Ví dụ 3. Một mảnh kim loại hình vuông, mỗi cạnh 20cm, khi nung nóng mỗi cạnh dãn ra 0,1cm. Tính gần đúng phần diện tích mảnh kim loại dãn ra.

d) Liên hệ giữa đạo hàm và khả vi

$$f'(x_0) = A \Leftrightarrow df(x_0) = A\Delta x.$$

Ví dụ 4. $\dfrac{d}{d(x^2)}\left(x^6+3x^4+1\right)$ **Ví dụ 5.** $\dfrac{d}{d(x^3)}\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$

e) Tính bất biến của vi phân cấp 1

$$y = f(x) \text{ khả vi, } x = \varphi(t) \text{ khả vi} \Rightarrow dy = f'(x)dx.$$

5. Đạo hàm và vi phân cấp cao

a) Đạo hàm cấp cao.

Định nghĩa. $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$

Ví dụ 1. • $y = x^{\alpha}$, $y^{(n)} = ?$ • $y = \sin x$, $y^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

Quy tắc. $\exists f^{(n)}(x), g^{(n)}(x)$ thì có

1°) $(f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x)$

2°) $\left(f(x).g(x)\right)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$ (Quy tắc Leibnitz).

Ví dụ 2. $y = x\ln x$, tính $y^{(5)}$ **Ví dụ 3.** $y = \sin ax\cos bx$, tính $y^{(20)}$

Ví dụ 4. $y = x^2\cos x$, tính $y^{(30)}$

Ví dụ 5. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$, tính $y^{(n)}$

Ví dụ 6(K50) Tính $y^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$

a) $y = \dfrac{1-2x}{e^{2x}}$ $\qquad ((-2)^n e^{-2x}(n+1-2x))$

b) $y = x\ln(1-3x)$ $\qquad (\dfrac{(n-2)!3^{n-1}}{(1-3x)^n}(3x-n))$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!