GIẢI TÍCH 2
BÀI 6

A. TÍCH PHÂN HAI LỚP (TÍCH PHÂN KÉP) (TT)

3.4. Đưa tích phân hai lớp về tích phân lặp

a) Định lí Fubini trên hình chữ nhật. *f* khả tích trên hình chữ nhật $R=[a\,;b]\times[c\,;d]$

1°/ Nếu tồn tại $\int\limits_c^d f(x,y)dy$ với *x* cố định $\in$ [*a* ; *b*] $\Rightarrow$ $\varphi(x)=\int\limits_c^d f(x,y)dy$ khả tích trên [*a* ; *b*] và có $\iint\limits_R f(x,y)dx\,dy=\int\limits_a^b\left[\int\limits_c^d f(x,y)dy\right]dx$ (4.1)

2°/ $\exists$ $\int\limits_a^b f(x,y)dx$, với *y* cố định thuộc [*c* ; *d*] $\Rightarrow$ $\psi(y)=\int\limits_a^b f(x,y)dx$ khả tích trên [*c* ; *d*]

và có $\iint\limits_R f(x,y)dx\,dy=\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b f(x,y)dx\right]dy$ (4.2)

Nói riêng, nếu có *f* liên tục trên *R* thì ta có đồng thời (4.1), (4.2)

Ví dụ 1. $\iint\limits_R (x+y)^2dx\,dy$, *R* = [0 ; 1]×[0 ; 2]

Ví dụ 2. $\iint\limits_R \dfrac{x^2dx\,dy}{1+y^2}$, *R* = [0 ; 1]×[0 ; 1]

b) Định lí Fubini trên tập hợp bị chặn

1°/ φ_1, φ_2 khả tích trên [*a* ; *b*], $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$, $\forall x\in$ [*a* ; *b*],

$D=\{(x\,;y): a\le x\le b,\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$

f khả tích trên *D*, $\exists$ $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$, $\forall x$ cố định thuộc [*a* ; *b*].

Khi đó, $\varphi(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ khả tích trên [*a* ; *b*] và có

$$\iint\limits_D f(x,y)dx\,dy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \qquad (4.3)$$

Nói riêng, nếu φ_1, φ_2 liên tục trên [*a* ; *b*], *f* liên tục trên *D* thì vẫn đúng

2°/ ψ_1, ψ_2 khả tích trên [*c* ; *d*], $\psi_1(y)\le\psi_2(y)$, $\forall y\in$ [*c* ; *d*],

$D = \{(x\,;\,y)\colon c \le y \le d,\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\}$

f khả tích trên D và $\exists \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$, $\forall\, y$ cố định thuộc $[c\,;\,d]$.

Khi đó $\psi(y) = \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx$ khả tích trên $[c\,;\,d]$ và có

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx \qquad (4.4)$$

Nói riêng, nếu ψ_1, ψ_2 liên tục trên $[c\,;\,d]$, f liên tục trên D thì vẫn đúng

Ví dụ 1. $\iint\limits_D (x^2 + y)\,dx\,dy$, D: $y^2 = x$, $y = x^2$.

Ví dụ 2. $\iint\limits_D \sqrt{4x^2 - y^2}\,dx\,dy$, D: $x = 1$, $y = 0$, $y = x$.

Ví dụ 3. $\iint\limits_D |\cos(x + y)|\,dx\,dy$, D: $[0\,;\,\pi] \times [0\,;\,\pi]$

Ví dụ 4. $\iint\limits_D \sqrt{|y - x^2|}\,dx\,dy$, D: $[-1\,;\,1] \times [0\,;\,2]$

Ví dụ 5. Đổi thứ tự tính tích phân $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\,dx$

Ví dụ 6. Tính $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 e^{-x^2}\,dx$

3.5. Đổi biến trong tích phân 2 lớp.

a) Đổi biến

Định lí 1. Tập mở $U \subset \mathbb{R}^2$, D là tập con đo được, compact của U, ánh xạ φ: $U \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$, ở đó

- x, y khả vi liên tục
- $\varphi_{|D^\circ}$ là đơn ánh
- Định thức Jacobi $J(u, v) = \dfrac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0$ trên D°.

Khi đó

- $\varphi(D)$ là tập compact đo được

• Nếu $f : \varphi(D) \to R$ liên tục trên $\varphi(D)$ thì có

$$\iint_{\varphi(D)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint_D f\big(x(u,v), y(u,v)\big)\left|J(u,v)\right|du\,dv$$

Ví dụ 1. Tính $\iint_D x\sin(x+y)\,dx\,dy$, $D: 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, 0 \le y \le x$

Ví dụ 2. Tính $\iint_D (2-x-y)^2\,dx\,dy$, D: $0 \le x \le 1$, $-x \le y \le x$

Ví dụ 3. Tính $\iint_D \arcsin\sqrt{x+y}\,dx\,dy$, $D: \begin{Bmatrix} x+y=0, y=-1 \\ x+y=1, y=0 \end{Bmatrix}$

Ví dụ 4. Tính $\iint_D dx\,dy$, D: $y = x$, $y = 4x$, $xy = 1$, $xy = 2$.

b) Đổi biến trong toạ độ cực

Cho ánh xạ $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\theta, r) \mapsto (x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$.

Ta có $J(\theta, r) = \dfrac{D(x,y)}{D(\theta,r)} = \begin{vmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix} = -r$.

Dễ thấy φ không là song ánh, tuy nhiên thu hẹp của φ trên $A = (\alpha\ ;\ \alpha + 2\pi) \times (0\ ;\ +\infty)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ là song ánh từ $A \to \mathbb{R}^2 \setminus (0\,;0)$.

Nếu D là tập compact đo được sao cho Int$D \subset U_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ thì thu hẹp của φ trên Int$D$ là đơn ánh và $J(\theta, r) \ne 0$ trên Int$D$. Khi đó với hàm số liên tục tuỳ ý $f : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ ta luôn có $\iint_{\varphi(D)} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta$

Ví dụ 1. $I = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$, D: $x^2 + y^2 \le 1$.

Ví dụ 2. $I = \iint_D \sin\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, D: $\pi^2 \le x^2 + y^2 \le 4\pi^2$.

Ví dụ 3. $I = \iint_D \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$, $D: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} \le 1$.

Ví dụ 4. $I = \iint_D \sqrt{\dfrac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy$, D : $\{x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$

Ví dụ 5. $I = \iint_D \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{4-\left(x^2+y^2\right)^2}}\,dx\,dy$, $D: \dfrac{x^2}{2} + y^2 \le 1$

c) Tích phân hai lớp trên tập đối xứng

Cho $D = D_1 \cup D_2$, $D_2 = S(D_1)$, các tập D_1, D_2 đo được và $|D_1 \cap D_2| = 0$, S là phép đối xứng

1°/ Nếu $f(S(x, y)) = f(x, y)$, $\forall (x, y) \in D$ thì có $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = 2\iint_{D_1} f(x, y)\,dx\,dy$

2°/ Nếu $f(S(x, y)) = -f(x, y)$ thì có $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = 0$

Ví dụ 1. Tính $I = \iint_D (x^2 - y^2)\,dx\,dy$, $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$

Ví dụ 2. Tính

$$I = \iint_D (x^5 - y^5)\,dx\,dy,\ D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1$$

3.6. Tính thể tích vật thể

$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \varphi_1(x, y) \le z \le \varphi_2(x, y), (x, y) \in D\}$

$V = |B| = \iint_D [\varphi_2(x, y) - \varphi_1(x, y)]\,dxdy$

Ví dụ 1. Tính thể tích vật thể

a) ellipxoit $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$

+) $V = 2c\iint_D \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,dxdy$

+) $x = ar\cos\varphi,\ y = br\sin\varphi \Rightarrow V = \frac{4}{3}\pi abc$

b) $y = \sqrt{x},\ y = 2\sqrt{x},\ x + z = 6,\ z = 0$ ($\frac{48\sqrt{6}}{5}$)

c) $2az \ge x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$

d) $z = xy$, $x^2 = y$, $x^2 = 2y$, $y^2 = x$, $y^2 = 2x$, $z = 0$

e) $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$

f) $z = x + y$, $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, $(x \ge 0,\ y \ge 0)$, $z = 0$

HAVE A GOOD UNDERSTANDING!