VỤ GIÁO DỤC CHUYÊN NGHIỆP

GIÁO TRÌNH
TOÁN ỨNG DỤNG TRONG TIN HỌC

SÁCH DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG ĐÀO TẠO HỆ TRUNG HỌC CHUYÊN NGHIỆP

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

PGS. TS. BÙI MINH TRÍ

Giáo trình
TOÁN ỨNG DỤNG TRONG TIN HỌC

(Sách dùng cho các trường Đào tạo hệ Trung học chuyên nghiệp)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời giới thiệu

Năm 2002, Vụ Giáo dục Chuyên nghiệp – Bộ Giáo dục và Đào tạo đã phối hợp với Nhà xuất bản Giáo dục xuất bản 21 giáo trình phục vụ cho đào tạo hệ THCN. Các giáo trình trên đã được nhiều trường sử dụng và hoan nghênh. Để tiếp tục bổ sung nguồn giáo trình đang còn thiếu, Vụ Giáo dục Chuyên nghiệp phối hợp cùng Nhà xuất bản Giáo dục tiếp tục biên soạn một số giáo trình, sách tham khảo phục vụ cho đào tạo ở các ngành : Điện – Điện tử, Tin học, Khai thác cơ khí. Những giáo trình này trước khi biên soạn, Vụ Giáo dục Chuyên nghiệp đã gửi đề cương về trên 20 trường và tổ chức hội thảo, lấy ý kiến đóng góp về nội dung đề cương các giáo trình nói trên. Trên cơ sở nghiên cứu ý kiến đóng góp của các trường, nhóm tác giả đã điều chỉnh nội dung các giáo trình cho phù hợp với yêu cầu thực tiễn hơn.

Với kinh nghiệm giảng dạy, kiến thức tích luỹ qua nhiều năm, các tác giả đã cố gắng để những nội dung được trình bày là những kiến thức cơ bản nhất nhưng vẫn cập nhật được với những tiến bộ của khoa học kỹ thuật, với thực tế sản xuất. Nội dung của giáo trình còn tạo sự liên thông từ Dạy nghề lên THCN.

Các giáo trình được biên soạn theo hướng mở, kiến thức rộng và cố gắng chỉ ra tính ứng dụng của nội dung được trình bày. Trên cơ sở đó tạo điều kiện để các trường sử dụng một cách phù hợp với điều kiện cơ sở vật chất phục vụ thực hành, thực tập và đặc điểm của các ngành, chuyên ngành đào tạo.

Để việc đổi mới phương pháp dạy và học theo chỉ đạo của Bộ Giáo dục và Đào tạo nhằm nâng cao chất lượng dạy và học, các trường cần trang bị đủ sách cho thư viện và tạo điều kiện để giáo viên và học sinh có đủ sách theo ngành đào tạo. Những giáo trình này cũng là tài liệu tham khảo tốt cho học sinh đã tốt nghiệp cần đào tạo lại, nhân viên kỹ thuật đang trực tiếp sản xuất.

Các giáo trình đã xuất bản không thể tránh khỏi những sai sót. Rất mong các thầy, cô giáo, bạn đọc góp ý để lần xuất bản sau được tốt hơn. Mọi góp ý xin gửi về : Công ty Cổ phần sách Đại học – Dạy nghề 25 Hàn Thuyên – Hà Nội.

VỤ GIÁO DỤC CHUYÊN NGHIỆP - NXB GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Tin học có nội dung chủ yếu là thu thập, lưu giữ và xử lý các thông tin được rời rạc hóa trên máy tính bằng cách thiết lập ra các công cụ đặc biệt.

Một trong các công cụ đó là Toán học rời rạc. Người ta sử dụng Toán học rời rạc khi cần đếm các phần tử, nghiên cứu mối quan hệ giữa các tập rời rạc, phân tích các quá trình hữu hạn.

Những nội dung chính đề cập trong giáo trình này là : Tập hợp và quan hệ, suy luận toán học, quy nạp và đệ quy, tính toán ma trận, đại số logic, lý thuyết đồ thị và độ phức tạp tính toán. Ngoài ra những kiến thức và phương pháp toán học không thể thiếu được trong tin học ứng dụng : Tính toán và xác suất ; Phương pháp tính. Để tránh trùng lặp và cồng kềnh, giáo trình không đi sâu vào việc xét những nội dung toán học đã được trình bày ở chương trình toán phổ thông như : hàm số, đạo hàm và tích phân của hàm số, giải phương trình cấp 1, cấp 2 và hệ phương trình đại số tuyến tính.

Giáo trình này nhằm phục vụ cho chương trình đào tạo hệ Trung cấp tin học với khối lượng vừa phải là 90 tiết. Vì vậy cần trình bày cặn kẽ, dễ hiểu các khái niệm, các phương pháp tính toán và các ví dụ áp dụng mà không đi sâu vào chứng minh lý thuyết phức tạp.

Giáo trình gồm 6 chương :

Chương 1. TẬP HỢP – QUAN HỆ – ÁNH XẠ
Bao gồm 8 tiết lí thuyết và 4 tiết bài tập.

Chương 2. HÀM SỐ VÀ MA TRẬN
Bao gồm 10 tiết lí thuyết và 4 tiết bài tập.

Chương 3. ĐẠI SỐ BOOLE
Bao gồm 8 tiết lí thuyết và 4 tiết bài tập.

Chương 4. ĐỒ THỊ VÀ CÂY
Bao gồm 12 tiết lí thuyết và 6 tiết bài tập.

Chương 5. THUẬT TOÁN VÀ XÁC SUẤT
Bao gồm 8 tiết lí thuyết và 6 tiết bài tập.

Chương 6. PHƯƠNG PHÁP TÍNH
Bao gồm 12 tiết lí thuyết và 6 tiết bài tập.

Trong lần xuất bản thứ nhất, chắc chắn không thể tránh khỏi những thiếu sót về nội dung và hình thức trình bày. Rất mong bạn đọc góp ý kiến để nâng cao chất lượng giáo trình.

Xin trân trọng cảm ơn.

Ý kiến, thư từ xin gửi về : Nhà xuất bản Giáo dục - 81 Trần Hưng Đạo - Hà Nội

TÁC GIẢ

Chương 1

TẬP HỢP – QUAN HỆ – ÁNH XẠ

I – TẬP HỢP

1.1. Khái niệm về tập hợp

1. Tập hợp là một khái niệm cơ bản của toán học (người ta không định nghĩa). Tuy nhiên ta hiểu tập hợp là một số các phần tử được ghép lại với nhau bởi một tính chất nào đó.

Các ví dụ :

1) Tập hợp sinh viên của một trường đại học.

2) Tập hợp các số nguyên.

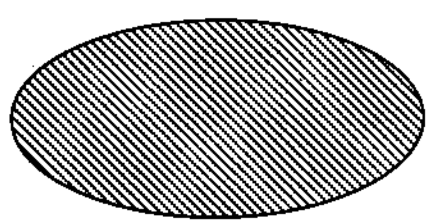
3) Tập hợp các quyển sách trong thư viện trường.

4) Tập hợp các điểm trên một đường thẳng (d).

Để chỉ x là một phần tử của tập A ta viết $x \in A$. Nếu y không thuộc A ta viết $y \notin A$.

Tập hợp không chứa phần từ nào gọi là tập rỗng, ký hiệu $\varnothing$. Ví dụ : tập các nghiệm thực của phương trình $x^2 = -1$ là tập rỗng.

2. Biểu đồ Ven : Hình 1.1 biểu diễn một tập hợp. Đó là một đường cong kín, phẳng và không tự cắt, phần bên trong đường cong chứa tất cả các phần tử của tập hợp.



Hình 1.1

1.2. Cách xác định một tập hợp

Có 2 cách xác định một tập hợp :

Cách 1 :

Cách liệt kê : Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp.

Ví dụ : A = {a, b, c} – tập hợp gồm 3 phần tử.

Cách 2 :

Cách đặc trưng : Gọi p là tính chất đặc trưng của tất cả các phần tử của tập hợp A, ta viết :

$$A = \{x \mid x, \text{ có tính chất } p\}$$

Ví dụ : Tập hợp các số chẵn p = {m | m = 2n, n nguyên}.

1.3. Các tập hợp số thường gặp

1) Tập hợp các số tự nhiên :

$$N = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \; ; \; N^* = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$$

2) Tập hợp các số nguyên :

$$Z = \{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ...\}$$

3) Tập hợp các số hữu tỷ :

$$Q = \{ \frac{p}{q} \mid p, q \text{ là các số nguyên } q \neq 0\}$$

Các số hữu tỷ có thể viết thành các số thập phân hữu hạn, hay vô hạn tuần hoàn.

Chẳng hạn $\frac{3}{4} = 0{,}75 \; ; \; -\frac{4}{3} = -1{,}333... = -1,\ (3)$

4) Một số vô tỷ là một số thể viết dưới dạng số thập phân vô hạn không tuần hoàn.

Chẳng hạn $\sqrt{2} = 1{,}414213563...$, $\pi = 3{,}14159...$

5) Tập hợp tất cả các số hữu tỷ và vô tỷ gọi là tập số thực, ký hiệu là R.

1.4. Quan hệ giữa các tập hợp

1. Tập hợp con

* A là tập hợp con của B khi mọi phần tử của A đều thuộc về B.

Ký hiệu : $A \subset B$.

Đọc :

$$\begin{cases} \bullet \text{ A bao hàm trong B} \\ \bullet \text{ B chứa A} \\ \bullet \text{ A là tập con của B} \end{cases}$$

Ví dụ : $N \subset Z \subset Q \subset R$; Tập hợp học sinh lớp 10 bao hàm trong tập tất cả học sinh trường Trung học Thăng Long.

* Theo quy ước $\varnothing \subset A$

* Tính bắc cầu :

$$\begin{cases} A \subset B \\ B \subset C \end{cases} \Rightarrow A \subset C$$

2. Sự bằng nhau của 2 tập hợp

Nếu một phần tử bất kỳ của tập hợp A đều thuộc về tập hợp B và ngược lại mỗi phần tử của tập hợp B đều thuộc về tập hợp A thì ta nói A và B bằng nhau :

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \subset B \\ B \subset A \end{cases}$$

Ví dụ : $A = \{x, 1, ..., \Delta\}$

$B = \{1, ..., x, \Delta\}$

1.5. Các phép toán về tập hợp

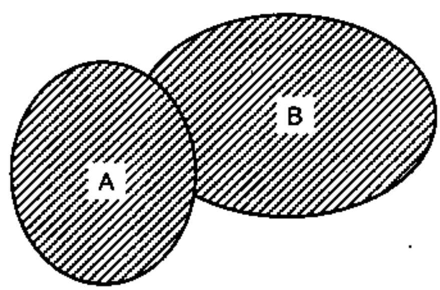
1. Phép hợp

Hợp của hai tập A và B là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử thuộc A hoặc thuộc B (hình 1.2).

Ký hiệu : $A \cup B$;

Đọc : A hợp B.

$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A$ hoặc $x \in B)$



Hình 1.2

Ví dụ :

$$\left.\begin{aligned} A &= \{a,b,c,d\} \\ B &= \{c,d,e,f\} \end{aligned}\right\} \quad A \cup B = \{a,b,c,d,e,f\}$$

Tính chất 1.1 :

1) $A \cup A = A$ (tính lũy đẳng)

2) $A \cup B = B \cup A$ (tính giao hoán)

3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (tính kết hợp)

4) $\varnothing \cup A = A \cup \varnothing = A$

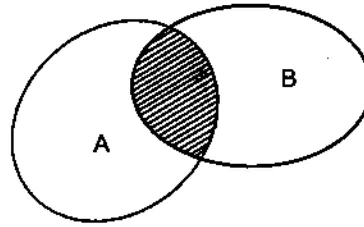
2. Phép giao

Giao của 2 tập A và B là tập hợp tạo bởi các phần tử vừa thuộc A vừa thuộc B (hình 1.3).

Ký hiệu : $A \cap B$;

Đọc : A giao B

$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \text{ và } x \in B)$



Hình 1.3

Tính chất 1.2 :

1) $A \cap A = A$ (tính lũy đẳng)

2) $A \cap B = B \cap A$ (tính giao hoán)

3) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ (tính kết hợp)

4) $\varnothing \cap A = A \cap \varnothing = \varnothing$

➤ *Chú ý :* Khi $A \cap B = \varnothing$ thì ta nói A và B rời nhau.

Tính chất chung 1.3 của $\cup$ và $\cap$:

1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$: tính phân phối của $\cup$ đối với $\cap$.

2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: tính phân phối của $\cap$ đối với $\cup$.

Chứng minh tính chất (1) :

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{hoặc} \\ x \in (B \cap C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{hoặc} \\ x \in B \quad \text{và} \quad x \in C) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \quad \text{hoặc} \quad x \in B \\ \text{và} \\ x \in A \quad \text{hoặc} \quad x \in C \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x \in (A \cup B) \text{ và } x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$$

$$\Rightarrow A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

* Ngược lại :

$$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \cup B) \\ \text{và} \\ x \in (A \cup C) \end{cases}$$

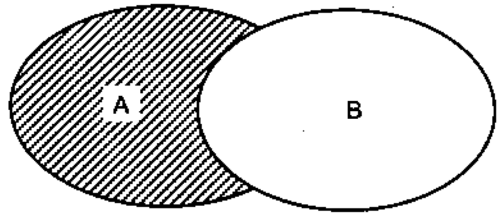
$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \quad \text{hoặc} \quad x \in B \\ \text{và} \\ x \in A \quad \text{hoặc} \quad x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \text{và} \\ x \in B \quad \text{hoặc} \quad x \in C \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cap (B \cup C)$$

3. Hiệu của 2 tập hợp

Hiệu của tập A và tập B là tập tạo bởi tất cả các phần tử thuộc A mà không thuộc B (hình 1.4)

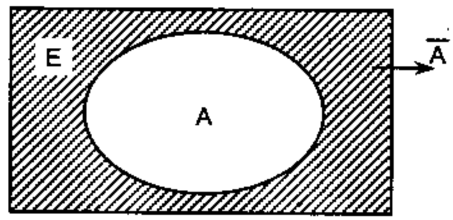
Ký hiệu : $A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A$ và $x \notin B)$



Hình 1.4

4. Tập bù

Khi $A \subset E$ thì $E \setminus A$ gọi là bù của A trong E ký hiệu $C_E A$ hay $\overline{A}$ (hình 1.5).



Hình 1.5

Ví dụ : Gọi A là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + 2 = 0$ (1)

Gọi B là tập nghiệm của phương trình $x^2 - 4x + 3 = 0$ (2)

Giải (1) : $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2 \Rightarrow A = \{1,2\}$

Giải (2) : $a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3 \Rightarrow B = \{1,3\}$

$$\Rightarrow A \cup B = \{1,2,3\} \; ; \; A \cap B = \{1\} \; ; \; A \setminus B = \{2\}$$

Tập nghiệm của phương trình :

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 4x + 3) = 0 \text{ là } A \cup B = \{1,2,3\}$$

Luật De Morgan :

$\forall$ A, B $\in$ E, ta có :

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad (1.1)$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad (1.2)$$

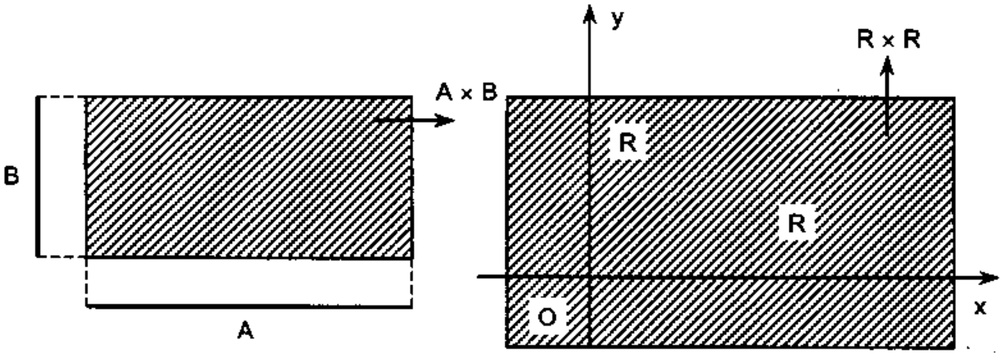
Chứng minh (1.1) :

$$x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow (x \notin A \text{ và } x \notin B)$$

$$\Rightarrow (x \in \overline{A} \text{ và } x \in \overline{B}) \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$$

5. Tích của hai tập hợp

Tích của tập hợp A với tập hợp B (theo thứ tự ấy) là tập hợp bao gồm tất cả các cặp thứ tự (x,y) với $x \in A$ và $y \in B$ (hình 1.6).



Hình 1.6. Mặt phẳng tọa độ xOy được đồng nhất với tích Đề các $R \times R$

Ký hiệu : $A \times B$ hoặc A.B

Đọc : A nhân B

$(x,y) \in A \times B \Leftrightarrow (x \in A$ và $y \in B)$

➤ *Chú ý :* Tích của hai tập hợp không có tính giao hoán.

Vì $(x,y) \neq (y,x)$ nếu $x \neq y$ $(2,3) \neq (3,2)$

Ví dụ : $A = \{1,3\}$, $B = \{2,x\}$

$A \times B = \{(1,2), (1,x), (3,2), (3,x)\}$

6. Phân hoạch

Ta nói các tập con $A_1, A_2, ..., A_n$ của tập X tạo nên một phân hoạch của X nếu :

1) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = X$

2) $A_i \cap A_j = \varnothing \quad i \neq j$

1.6. Biểu diễn các tập hợp trên máy tính

Có nhiều cách để biểu diễn các tập hợp trên máy tính. Nếu lưu trữ các phần tử của tập hợp theo cách không sắp thứ tự thì ít phải chuẩn bị. Tuy nhiên việc tính giao, hợp hoặc hiệu của hai tập hợp sẽ rất mất thời gian, vì mỗi phép tính đó đòi hỏi một lượng tìm kiếm rất lớn đối với các phần tử. Dưới đây sẽ giới thiệu một phương pháp lưu trữ các phần tử bằng cách dùng sự sắp tùy ý các phần tử của tập toàn thể. Phương pháp biểu diễn tập hợp này sẽ làm cho việc tính những tổ hợp trở nên dễ dàng hơn.

Giả sử tập toàn thể U được dùng là hữu hạn (và có kích thước hợp lý để số phần tử của U không lớn hơn dung lượng bộ nhớ của máy tính mà ta đang dùng). Trước hết, hãy chỉ rõ sự sắp tùy ý các phần tử của U, ví dụ $a_1, a_2, ..., a_n$ sau đó biểu diễn tập con A của U bằng một xâu bit có chiều dài n, trong đó bit thứ i ở xâu này là 1 nếu $a_i \in A$ và là 0 nếu $a_i \notin A$. Ví dụ sau đây sẽ minh họa kỹ thuật này.

Ví dụ : Cho U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} và sự sắp các phần tử trong U theo thứ tự tăng dần ; tức là $a_i = i$. Xác định xâu bit biểu diễn tập con các số nguyên lẻ trong U, tập con các số nguyên chẵn trong U và tập con các số nguyên không quá 5 trong U.

Giải : Xâu bit biểu diễn tập hợp các số nguyên lẻ trong U, cụ thể là tập {1,3,5,7,9}, có bit 1 ở các vị trí thứ nhất, thứ ba, thứ năm, thứ bảy và thứ chín, và bit 0 ở các vị trí còn lại. Đó là :

10101 01010

(Ở đây chúng ta đã tách xâu có chiều dài là 10 này thành hai khối, mỗi khối có chiều dài là 5 để dễ đọc vì các xâu bit dài rất khó đọc). Tương tự, ta biểu diễn tập con tất cả các số nguyên chẵn trong U, cụ thể là tập {2,4,6,8,10} bằng xâu :

01010 10101

Tập con tất các số nguyên trong U không vượt quá 5, cụ thể là tập {1,2,3,4,5} được biểu diễn bởi xâu :

11111 00000

Bằng cách dùng các xâu bit để biểu diễn các tập hợp, ta dễ dàng tìm được phần bù của các tập hợp, cũng như hợp, giao và hiệu của chúng. Để tìm xâu bit cho phần bù của một tập hợp từ xâu bit của tập hợp đó ta chỉ việc thay mỗi 1 thành 0 và thay mỗi 0 thành 1, vì $x \in A$ nếu và chỉ nếu $x \notin \overline{A}$. Chú ý rằng phép toán này tương ứng với việc lấy phủ định của mỗi bit khi ta gắn một bit với một giá trị chân lý : 1 ứng với đúng và 0 ứng với sai.

Ví dụ : Ta đã biết xâu bit đối với tập hợp {1,3,5,7,9} (với tập hợp toàn thể {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}) là

10101 01010

Xác định xâu bit đối với phần bù của tập này.

Giải : Xâu bit đối với phần bù của tập này sẽ nhận được bằng cách thay đổi các số 0 thành 1 và ngược lại. Sau khi làm như vậy ta được xâu :

$$01010\ 10101$$

tương ứng với tập {2, 4, 6, 8, 10}.

Để nhận được các xâu bit cho các hợp và giao của hai tập hợp, chúng ta sẽ thực hiện các phép toán Boole trên các xâu bit biểu diễn hai tập hợp đó. Bit ở vị trí i trong xâu bit của hợp là 1 (hoặc cả hai là 1) và là 0 khi cả 2 bit đó là 0. Từ đó suy ra rằng xâu bit đối với hợp là OR bit của hai xâu bit tương ứng với hai tập số. Còn bit ở vị trí thứ i trong xâu bit của giao sẽ là 1 khi các bit ở vị trí tương ứng trong hai xâu bit đều bằng 1 và đều bằng 0 khi một trong hai bit bằng 0 (hoặc cả hai bằng 0). Từ đó suy ra rằng xâu bit đối với giao là một AND bit của hai xâu bit biểu diễn hai tập đã cho.

Ví dụ : Xâu bit đối với các tập hợp {1,2,3,4,5} và {1,3,5,7,9} là 11111 00000 và 10101 01010. Dùng các xâu bit để tìm hợp và giao của hai tập trên.

Giải : Xâu bit đối với hợp của hai tập là :

$$11111\ 00000 \vee 10101\ 01010 = 11111\ 01010$$

và xâu này tương ứng với tập {1,2,3,4,5,7,9}

Xâu bit đối với giao của hai tập này là :

$$11111\ 0000 \wedge 10101\ 01010 = 10101\ 00000$$

và xâu này tương ứng với tập {1,3,5}.

1.7. Số phức

1. Khái niệm số phức

a) *Mở đầu :* Mọi số thực, trừ số 0, bình phương lên đều dương. Riêng số 0 bình phương lên bằng 0. Vì vậy, nếu ta chỉ biết các số thực thì phương trình :

$$x^2 + 1 = 0 \text{ hay } x^2 = -1$$

sẽ vô nghiệm. Do đó người ta phải nghiên cứu thêm một loại số mới gọi là số phức.

b) *Đơn vị ảo – số ảo :* Trước hết ta đưa vào số i sao cho

$$i^2 = -1 \text{ nghĩa là } i = \sqrt{-1}$$

và gọi nó là đơn vị ảo.

Với đơn vị ảo i, phương trình $x^2 = -1$ có hai nghiệm là i và $-i$.

Sau đó mọi số dạng bi với b là số thực, sẽ có bình phương

$$(bi)^2 = b^2i^2 = -b^2$$

là số âm, người ta gọi chúng là các số ảo thuần túy.

c) *Số phức :* Bây giờ số z có dạng :

$$z = a + bi \tag{1.3}$$

trong đó a và b là các số thực z, được gọi là một số phức.

a gọi là phần thực của số phức, viết là Re(z) :

$$a = \mathrm{Re}(z)$$

b gọi là phần ảo của số phức, viết là Im(z) :

$$b = \mathrm{Im}(z)$$

Khi b = 0, z = a là một số thực. Vậy số thực là một trường hợp riêng của số phức.

Khi a = 0, z = bi là một số ảo thuần túy.

d) *Số phức không :* Khi a = 0, b = 0, số phức z = 0 + 0i, cũng viết là z = 0.

e) *Hai số phức bằng nhau :* Hai số phức z = a + bi và z' = a' + b'i gọi là bằng nhau nếu a = a' và b = b' và ngược lại.

f) *Số phức liên hợp :* Hai số phức z = a + bi, $\overline{z} = a - bi$ gọi là hai số phức liên hợp.

Ví dụ :

$$z = 2 - 3i \text{ thì } \overline{z} = 2 + 3i$$

2. Các phép tính về số phức

a) *Phép cộng số phức :* Tổng của hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$ là một số phức có phần thực là tổng của các phần thực, phần ảo bằng tổng các phần ảo của chúng.

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \tag{1.4}$$

Các tính chất của phép cộng :

- $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ **(tính kết hợp)**
- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ **(tính giao hoán)**

• $z + 0 = z$ (0 là số phức $z = 0$)

• $z + (-z) = 0$ ($-z$ là số phức đối của số phức z)

nghĩa là nếu $z = a + ib$ thì : $-z = -a + (-b)i = -a - ib$

Từ tính chất cuối cùng ta suy ra phép trừ hai số phức z_1 và z_2 là :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$$

Ví dụ : $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 5i$

thì $$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 - 5i) = (2 + 1) + (3 - 5)i = 3 - 2i$$

và $$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (1 - 5i) = (2 - 1) + (3 + 5)i = 1 + 8i$$

b) *Phép nhân số phức :* Tích của hai số phức $z_1 = a_1 + ib_1$ và $z_2 = a_2 + ib_2$ là số phức có được bằng cách nhân chúng như nhân hai nhị thức với nhau và chú ý rằng $i^2 = -1$.

$$z_1z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \quad (1.5)$$

Các tính chất của phép nhân :

• $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3)$ (tính kết hợp)

• $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (tính giao hoán)

• $z . 1 = 1 . z = 1$ (1 là số phức đơn vị)

Nếu $z \neq 0$ thì tồn tại số z^{-1} để $z^{-1}z = z z^{-1} = 1$

z^{-1} được gọi là số phức nghịch đảo của số phức z, nghĩa là nếu $z = a + ib \neq 0$ thì :

$$z^{-1} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$$

ta có :

$$z^n = \underbrace{z.z....z}_{n \text{ lần}}$$

Từ tính chất cuối cùng ta suy ra phép chia hai số phức

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1z_2^{-1} \ (z_2 \neq 0)$$

Ví dụ : $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - 2i$

thì $$z_1z_2 = (2 + 3i)(1 - 2i) = (2 + 6) + i(3 - 4) = 8 - i$$

và : $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1-2i} = \frac{(2+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{(1-6)+i(3+4)}{1-4i^2}$$

$$= \frac{-5+7i}{1+4} = \frac{-5+7i}{5} = -1 + \frac{7}{5}i$$

c) *Liên hệ giữa phép cộng và phép nhân*

$$(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1\, z_3 + z_2\, z_3$$
$$z_1(z_2 + z_3) = z_1\, z_2 + z_1\, z_3$$

Ví dụ 1 : Tìm x, y là các số thực thỏa mãn phương trình :

$$(1 + 2i)x + (3 - 5i)y = 1 - 3i$$

Giải : Do x, y là những số thực ta thực hiện các phép tính ở vế trái thì có :

$$(x + 3y) + (2x - 5y) = 1 - 3i$$

Vì khi hai số phức bằng nhau ta suy ra phần thực của chúng bằng nhau và phần ảo của chúng bằng nhau, nên có :

$$x + 3y \;= 1$$
$$2x - 5y = -3$$

Giải hệ này ta được :

$$x = \frac{-4}{11}; \quad y = \frac{5}{11}$$

Ví dụ 2 : Tính A = (x − 1 − i) (x − 1 + i) (x + 1 + i) (x + 1 − i)

Giải : Ta có $[(x - 1) - i]\,[(x - 1) + i] = (x - 1)^2 + 1$

Còn $[(x + 1) + i]\,[(x + 1) - i] = (x + 1)^2 + 1$

Vậy $A = [(x - 1)^2 + 1]\,[(x + 1)^2 + 1] = (x^2 + 2 - 2x)\,(x^2 + 2 + 2x)$

$$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4$$

Chú thích :

– Ta có : $i^2 = -1$; $i^3 = i^2 i = -i$; $i^4 = i^3 i = -i^2 = 1$; v.v...

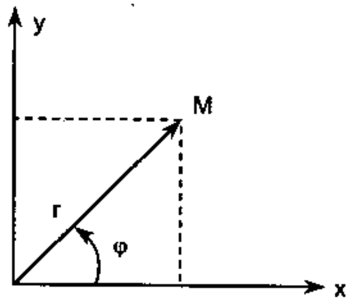
– Với z = a + bi thì :

$$z + \overline{z} = 2a = 2R(z)$$
$$z\overline{z} \;= a^2 + b^2$$

3. Dạng lượng giác của số phức

Mỗi điểm M(x,y) ứng với một véc tơ $\overrightarrow{OM}$ và ngược lại, nên mỗi số phức $z = x + iy$ ứng với một véc tơ $\overrightarrow{OM}$ có gốc tại gốc tọa độ, ngọn là điểm M(x,y). Ta đưa vào các định nghĩa sau :

$r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ gọi là mô đun của số phức $z = x + iy$.



Hình 1.7

$\varphi(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$ là góc lượng giác tạo bởi véc tơ $\overrightarrow{OM}$ với hướng dương của trục Ox, được xác định sai khác $2k\pi$, k nguyên.

Góc φ gọi là Argu–men của z, ký hiệu $\varphi = \text{Arg } z$.

Nếu lấy $-\pi \le \varphi \le \pi$ thì dùng ký hiệu $\varphi = \arg z$.

Dễ thấy : $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, do vậy

$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.6}$$

Dạng (1.6) gọi là dạng lượng giác của số phức.

Phần tử đối của số phức $z = x + iy$ là $-z = -x - iy$.

Với cách biểu diễn lượng giác là $-z = r[\cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi)]$ với $\varphi = \text{Arg } z$.

Số phức $\overline{z} = x - iy$ gọi là số phức liên hợp của $z = x + iy$.

Có cách biểu diễn lượng giác là $\overline{z} = r[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)]$ với ảnh là véc tơ $\overrightarrow{OM'}$ đối xứng với véc tơ $\overrightarrow{OM}$ qua trục Ox.

4. Công thức Moivre

Cho hai số phức :

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = x_1 + iy_1$$

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = x_2 + iy_2$$

Khi đó số phức :

$$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

sẽ có cách biểu diễn lượng giác là :

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2)]$$

$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)] \tag{1.7}$$

Nếu $z_2 \neq 0$ thì tồn tại số phức $z_2^{-1} = \frac{1}{z_2}$ và tích $z = z_1 z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2}$ gọi là thương của z_1 với z_2.

Từ (1.7) suy ra :

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right] \tag{1.8}$$

Phép chứng minh các hệ thức (1.7), (1.8) không có gì khó, xem như bài tập.

Từ (1.7) suy ra $z\overline{z} = r^2 = |z|^2$

Với n là số nguyên dương bất kỳ, ta đặt $z^n = \underbrace{z.z...z}_{n}$ sẽ có :

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \tag{1.9}$$

gọi là lũy thừa bậc n của số phức z.

Nói riêng khi r = 1, từ (1.9) ta được :

$$(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \tag{1.10}$$

Công thức (1.10) gọi là công thức Moivre. Nhờ đó có thể thu được các biểu thức của cos nφ và sin nφ bởi phép khai triển vế trái của (1.10) theo công thức Newton và sự bằng nhau giữa các số phức (lưu ý : $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$,...).

4. Căn bậc n của số phức

Cho n là số tự nhiên, $n \geq 2$, α là số phức cho trước.

Nếu có số phức z sao cho $z^n = \alpha$ thì z gọi là căn bậc n của α, ký hiệu $z = \sqrt[n]{\alpha}$.

Nhờ cách viết số phức dưới dạng lượng giác, ta sẽ thấy rằng mỗi số phức α có đúng n nghiệm phức phân biệt (trong đó có thể có những nghiệm thực).

Thật vậy, giả sử $\alpha = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

Ta tìm số phức z dưới dạng $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$

thỏa mãn đẳng thức $z^n = \alpha$ hay :

$$\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Từ đó : $\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in z \end{cases}$

tức là : $\rho = \sqrt[n]{r}$; $\theta = \dfrac{\varphi + 2k\pi}{n}$

Khi k lần lượt nhận các giá trị nguyên k = 0, 1, 2,..., n − 1 ta có n giá trị của z, các giá trị phức này có cùng mô đun là $\rho = \sqrt[n]{r}$, còn các arg sai kém $\dfrac{2\pi}{n}$.

Nếu k nhận trị nguyên khác bộ trị {0, 1, 2,..., n − 1} thì dễ dàng thấy z lại có giá trị trùng với một trong n giá trị trên do tính chất tuần hoàn của cos và sin.

Vậy tồn tại n căn bậc n của số phức α, xác định bởi :

$$Z_R = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i \quad \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right] \qquad (1.11)$$

$k \in \{0, 1, 2,..., n - 1\}$

Trên mặt phẳng phức, chúng là các đỉnh của đa giác đều n cạnh nội tiếp đường tròn tâm 0, bán kính $\rho = \sqrt[n]{r}$.

5. Giải phương trình bậc hai và bậc cao

a) *Xét phương trình :*

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in R$$

Ta đã biết rằng nếu $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ thì phương trình có nghiệm thực. Bây giờ ta xét trường hợp $\Delta < 0$. Phương trình đã cho viết được dưới dạng :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

hay là :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} = \frac{i^2(-\Delta)}{4a^2} \qquad -\Delta > 0$$

Suy ra :

$$x + \frac{b}{2a} = \pm i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Vậy khi $\Delta < 0$ phương trình bậc hai có 2 nghiệm phức dạng liên hợp :

$$x_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Ví dụ 1 : Phương trình $x^2 + x + 1 = 0$

có 2 nghiệm :

$$x_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad x_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

b) *Giải phương trình bậc cao:*

Khi giải phương trình bậc cao trong trường số phức thì việc dùng dạng lượng giác tỏ ra thuận tiện.

Ví dụ 2 : Giải phương trình trong tập số phức C :

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

Chú ý hệ thức : $\quad z^5 + 1 = (z + 1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)$

Ta viết lại phương trình dưới dạng :

$$\frac{z^5 + 1}{z + 1} = 0 \Leftrightarrow z^5 = -1 \quad (z \neq -1)$$

hay $\quad z^5 = \cos\pi + i\sin\pi \quad (z \neq -1)$

$$\Leftrightarrow z_k = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{5}$$

$$\begin{cases} k = 0,1,2,3,4 \\ k \neq 2 \end{cases}$$

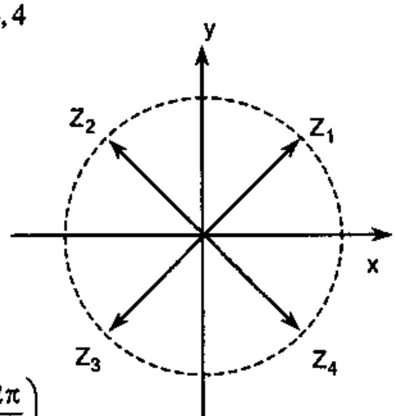
Vậy ngoài nghiệm $z = -1$, phương trình có 4 nghiệm cho bởi :

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}$$

$$z_2 = \cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}$$

$$z_3 = \cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5} = -\left(\cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$z_4 = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5} = -\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$$



Hình 1.8

II – SUY LUẬN TOÁN HỌC

2.1. Quy nạp toán học

Nhiều định lý phát biểu rằng P(n) là đúng với mọi n nguyên dương, trong đó P(n) là một hàm mệnh đề. Quy nạp toán học là một kỹ thuật chứng minh các định lý thuộc loại như thế. Nói cách khác quy nạp toán học thường được sử dụng để chứng minh các mệnh đề dạng $\forall n\, P(n)$, trong đó n là số nguyên dương tùy ý.

Quá trình chứng minh P(n) là đúng với mọi số nguyên dương n bao gồm hai bước :

1. *Bước cơ sở :* Chỉ ra mệnh đề P(1) là đúng.

2. *Bước quy nạp :* Chứng minh phép kéo theo $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ là đúng với mọi số nguyên dương n, trong đó người ta gọi P(n) là *giả thiết quy nạp*.

Khi hoàn thành cả hai bước chúng ta đã chứng minh P(n) là đúng với mọi n nguyên dương, tức là đã chứng minh P(n) là đúng.

Ví dụ 1 : Bằng quy nạp toán học hãy chứng minh rằng tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên là n^2.

Giải : Gọi P(n) là mệnh đề "tổng n số nguyên dương lẻ đầu tiên là n^2". Đầu tiên ta cần làm bước cơ sở, tức là phải chỉ ra P(1) là đúng. Sau đó phải chứng minh bước quy nạp, tức là cần chỉ ra P(n + 1) là đúng nếu giả sử P(n) là đúng.

Bước cơ sở : P(1) hiển nhiên là đúng vì $1 = 1^2$.

Bước quy nạp : Giả sử P(n) đúng, tức là với mọi n nguyên dương lẻ ta có :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

Ta phải chỉ ra P(n + 1) là đúng, tức là :

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

Do giả thiết quy nạp ta suy ra :

$$\begin{aligned} &1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) \\ &\quad = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)] + (2n + 1) \\ &\quad = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2 \end{aligned}$$

Đẳng thức này chứng tỏ P(n + 1) được suy ra từ P(n).

Vì P(1) là đúng và vì mệnh đề kéo theo $P(n) \rightarrow P(n + 1)$ là đúng với mọi n nguyên dương, nguyên lý quy nạp toán học chỉ ra rằng P(n) là đúng với mọi n nguyên dương.

2.2. Định nghĩa bằng đệ quy

Đôi khi chúng ta rất khó định nghĩa một đối tượng một cách tường minh, nhưng có thể dễ dàng định nghĩa đối tượng này qua chính nó. Kỹ thuật này được gọi là *đệ quy.*

1. Các hàm được định nghĩa bằng đệ quy

Để định nghĩa một hàm xác định trên tập các số nguyên không âm, chúng ta cho :

1. Giá trị của hàm tại n = 0.

2. Công thức tính giá trị của nó tại số nguyên n từ các giá trị của nó tại các số nguyên nhỏ hơn.

Định nghĩa như thế được gọi là *định nghĩa đệ quy* hay *định nghĩa quy nạp.*

Ví dụ 2 : Giả sử f được định nghĩa bằng đệ quy như sau :

$$f(0) = 3, \; f(n + 1) = 2f(n) + 3$$

Hãy tìm f(1), f(2), f(3) và f(4).

Giải : Từ định nghĩa đệ quy ta suy ra :

$$f(1) = 2f(0) + 3 = 2.3 + 3 = 9$$

$$f(2) = 2f(1) + 3 = 2.9 + 3 = 21$$

$$f(3) = 2f(2) + 3 = 2.21 + 3 = 45$$

$$f(4) = 2f(3) + 3 = 2.45 + 3 = 93$$

Trong một số định nghĩa hàm bằng đệ quy, người ta cho giá trị của hàm tại k số nguyên dương đầu tiên và cho quy tắc tính giá trị của hàm tại số nguyên lớn hơn từ k giá trị này. Theo nguyên lý thứ hai của quy nạp toán học thì cách định nghĩa này tạo ra các hàm hoàn toàn xác định.

2. Các tập hợp được định nghĩa bằng đệ quy

Các tập hợp thường được định nghĩa bằng đệ quy. Trước tiên người ta đưa ra tập xuất phát. Sau đó là quy tắc tạo các phần tử mới từ các phần tử đã biết của tập. Những tập được mô tả bằng cách như vậy được gọi là các tập được định nghĩa tốt, các định lý về chúng có thể chứng minh bằng cách sử dụng định nghĩa đệ quy của chúng.

Ví dụ 3 : Giả sử S được định nghĩa bằng đệ quy như sau :

$$3 \in S;$$

$$x + y \in S \text{ nếu } x \in S \text{ và } y \in S;$$

Hãy chỉ ra rằng S là tập các số nguyên chia hết cho 3.

Giải : Gọi A là tập các số nguyên dương chia hết cho 3. Để chứng minh A = S ta sẽ chứng minh rằng A là một tập con của S và S là tập con của A. Để chứng minh A là tập con của S, giả sử P(n) là mệnh đề "3n thuộc tập S". P(1) đúng vì theo định nghĩa của S "$3.1 = 3 \in S$".

Giả sử P(n) đúng, tức là $3n \in S$. Vì $3 \in S$ và $3n \in S$ nên theo định nghĩa $3 + 3n = 3(n + 1) \in S$. Điều này có nghĩa là P(n + 1) đúng. Theo quy nạp toán học mọi số có dạng 3n, với n nguyên dương, thuộc S, hay nói cách khác A là tập con của S.

Ngược lại, $3 \in S$, hiển nhiên 3 chia hết cho 3 nên $3 \in A$. Tiếp theo ta chứng minh tất cả các phần tử của S sinh ra do phần tử thứ hai của định nghĩa, cũng thuộc A. Giả sử x, y là hai phần tử của S, cũng là hai phần tử của A. Theo định nghĩa của S thì x + y cũng là một phần tử của S, vì x và y đều chia hết cho 3 nên x + y cũng chia hết cho 3, tức là $x + y \in A$. Vậy S là tập con của A.

Định nghĩa đệ quy thường được dùng khi nghiên cứu các xâu kí tự. Xâu là một dãy các kí tự thuộc bộ chữ cái Σ. Tập hợp các xâu ứng với bộ chữ cái Σ được ký hiệu bởi Σ^*. Hai xâu có thể kết hợp với nhau theo phép ghép. Ghép các xâu x và y cho xy là xâu tạo nên bằng cách viết tiếp xâu y vào xâu x. Ví dụ : cho x = abra, y = cadabra, khi đó xy = abracadabra. Khi chứng minh các kết quả về xâu người ta thường dùng định nghĩa đệ quy.

Ví dụ 4 : Định nghĩa đệ quy của tập các xâu.

Giả sử Σ^* là tập các xâu trên bộ chữ cái Σ. Khi đó Σ^* được định nghĩa bằng đệ quy như sau :

- $\lambda \in \Sigma^*$, trong đó λ là một xâu rỗng (không có phần tử nào) ;
- $\omega x \in \Sigma^*$ nếu $\omega \in \Sigma^*$ và $x \in \Sigma$.

Phần đầu của định nghĩa nói rằng xâu rỗng thuộc Σ^*. Phần sau khẳng định một xâu mới tạo nên bằng cách ghép một kí tự của Σ với một xâu của Σ^* cũng thuộc Σ^*.

Độ dài của xâu, tức là số kí tự trong xâu, cũng được định nghĩa bằng đệ quy.

Ví dụ 5 : Hãy định nghĩa bằng đệ quy độ dài của xâu ω.

Giải : Ta ký hiệu độ dài của ω là $l(\omega)$. Khi đó định nghĩa đệ quy của $l(\omega)$ như sau :

- $l(\lambda) = 0$, trong đó λ là xâu rỗng ;
- $l(\omega x) = l(\omega) + 1$ nếu $\omega \in \Sigma^*$ và $x \in \Sigma$.

Ví dụ 6 : Sử dụng quy nạp toán học chứng minh

$$l(xy) = l(x) + l(y)$$

trong đó x và y là các xâu thuộc Σ^*.

Giải : Gọi $P(y)$ là mệnh đề $l(xy) = l(x) + l(y)$ với x, y thuộc Σ^*.

BƯỚC CƠ SỞ : Dễ kiểm tra rằng $P(\lambda)$ là đúng vì

$$l(x\lambda) = l(x) + 0 = l(x) + l(\lambda) \text{ với mọi xâu } x.$$

BƯỚC QUY NẠP : Giả sử $P(y)$ là đúng, ta phải chứng minh $P(ya)$ đúng với mọi $a \in \Sigma$ tức là $l(xya) = l(x) + l(ya)$. Theo định nghĩa độ dài của xâu ta có :

$$l(xya) = l(xy) + 1 \text{ và } l(ya) = l(y) + 1$$

Theo giả thiết của phép quy nạp $l(xy) = l(x) + l(y)$
ta có $l(xya) = l(x) + l(y) + 1 = l(x) + l(ya)$

Đó là điều cần chứng minh.

2.3. Các thuật toán đệ quy

ĐỊNH NGHĨA : *Một thuật toán được gọi là đệ quy nếu nó giải bài toán bằng cách rút gọn liên tiếp bài toán ban đầu tới bài toán cũng như vậy nhưng có dữ liệu đầu vào nhỏ hơn.*

Ví dụ 7 : Tìm thuật toán đệ quy tính giá trị a^n và a là số thực khác không và n là số nguyên không âm.

Giải : Ta xây dựng thuật toán đệ quy nhờ định nghĩa đệ quy của a^n, đó là $a^{n+1} = a.a^n$ với $n > 0$ và khi $n = 0$ thì $a^o = 1$. Vậy để tính a^n ta quy về các trường hợp có số mũ n nhỏ hơn, cho tới khi $n = 0$. Xem thuật toán 1 sau đây :

THUẬT TOÁN 1 : THUẬT TOÁN ĐỆ QUY TÍNH a^n

Procedure power (a : số thực khác không ; n : số nguyên không âm) ;

if n = 0 then power(a,n) := 1

*else power(a,n) := a * power(a, n − 1)*

Định nghĩa đệ quy biểu diễn giá trị của hàm tại một số nguyên qua giá trị của nó tại các số nguyên nhỏ hơn. Điều này có nghĩa là ta có thể xây dựng một thuật toán đệ quy tính giá trị của hàm được định nghĩa bằng đệ quy tại một điểm nguyên.

Ví dụ 8. Thủ tục đệ quy sau đây cho ta giá trị của n ! với n nguyên dương.

THUẬT TOÁN 2 : THỦ TỤC ĐỆ QUY TÍNH GIAI THỪA

Procedure factorial (n : nguyên dương)

if n = 1 then factorial(n) := 1

*else factorial(n) := n * factorial(n − 1)*

Có cách khác tính hàm giai thừa của một số nguyên từ định nghĩa đệ quy của nó. Thay cho việc lần lượt rút gọn việc tính toán cho các giá trị nhỏ hơn, chúng ta có thể xuất phát từ giá trị của hàm tại 1 và lần lượt áp dụng định nghĩa đệ quy để tìm giá trị của hàm tại các số nguyên lớn dần. Đó là *thủ tục lặp*. Nói cách khác để tìm n ! ta xuất phát từ n ! = 1 (với n = 1), tiếp theo lần lượt nhân với các số nguyên cho tới khi bằng n. Xem thuật toán 3 :

THUẬT TOÁN 3 : THỦ TỤC LẶP TÍNH GIAI THỪA

Procedure iterative factorial (n : nguyên dương) ;

x := 1 ;

for i := 1 to n

*x := i * x*

{x là n !}

2.4. Tính đúng đắn của chương trình

Mở đầu

Giả sử rằng chúng ta đã thiết kế được một thuật toán để giải một bài toán nào đó và đã viết chương trình để thể hiện nó. Liệu ta có thể tin chắc rằng chương trình có luôn luôn cho lời giải đúng hay không ? Sau khi tất cả các sai sót về mặt cú pháp được loại bỏ, chúng ta có thể thử chương trình với các đầu vào mẫu. Tuy nhiên, ngay cả khi chương trình cho kết quả đúng với tất cả các đầu vào mẫu, nó vẫn có thể không luôn luôn tạo ra các câu trả lời đúng (trừ khi tất cả các đầu vào có thể đã được thử). Chúng ta cần phải chứng minh rằng chương trình luôn luôn cho đầu ra đúng.

Kiểm chứng chương trình

Một chương trình gọi là đúng đắn nếu với mọi đầu vào khả dĩ, nó cho đầu ra đúng. Việc chứng minh tính đúng đắn của chương trình gồm hai phần. Phần đầu chỉ ra rằng nếu chương trình kết thúc thì nhận được kết quả đúng. Phần này xác minh *tính đúng đắn bộ phận* của chương trình. Phần thứ hai chứng tỏ chương trình luôn luôn là kết thúc.

Để định rõ thế nào là một chương trình cho thông tin ra đúng, người ta thường dùng hai mệnh đề sau :

– Thứ nhất là khẳng định đầu, nó đưa ra những tính chất mà thông tin đầu vào cần phải có.

– Mệnh đề thứ hai là *khẳng định cuối,* nó đưa ra những tính chất mà thông tin đầu ra cần phải có, tùy theo mục đích của chương trình. Khi kiểm tra chương trình cần phải chuẩn bị các khẳng định đầu và khẳng định cuối thích hợp.

ĐỊNH NGHĨA : *Chương trình hay đoạn chương trình S được gọi là đúng đắn bộ phận đối với khẳng định đầu p và khẳng định cuối q, nếu p là đúng với các giá trị vào của S và nếu S kết thúc thì q là đúng với các giá trị ra của S. Ký hiệu p{S}q có nghĩa là chương trình hay đoạn chương trình S là đúng đắn bộ phận đối với khẳng định đầu p và khẳng định cuối q.*

Chú ý : Khái niệm đúng đắn bộ phận không đề cập tới việc chương trình có kết thúc hay không. Nó chỉ nhằm kiểm tra xem chương trình có làm được cái mà nó định làm hay không, nếu nó kết thúc.

CÂU LỆNH ĐIỀU KIỆN

Trước tiên, chúng ta sẽ trình bày những quy tắc suy luận đối với câu lệnh điều kiện. Giả sử một đoạn chương trình có dạng :

If điều_kiện then

S

trong đó S là một khối lệnh. Khối S sẽ được thi hành nếu điều kiện là đúng và S sẽ không được thi hành nếu điều kiện là sai.

Tương tự, giả sử một đoạn chương trình có dạng :

If điều_kiện then

S_1

else

S_2

Nếu *điều kiện* là đúng thì S_1 được thi hành, nếu *điều kiện* là sai thì S_2 được thi hành.

BẤT BIẾN VÒNG LẶP

Tiếp theo chúng ta sẽ trình bày cách chứng minh tính đúng đắn của vòng lặp while. Để xây dựng quy tắc suy luận cho đoạn chương trình dạng :

***while** điều_kiện*

S

Hãy lưu ý rằng S được lặp đi lặp lại cho tới khi nào điều kiện trở nên sai. Ta gọi một điều khẳng định nào đó là *bất biến vòng lặp* nếu nó vẫn còn đúng sau mỗi lần S thi hành.

III – QUAN HỆ HAI NGÔI

3.1. Khái niệm về quan hệ hai ngôi

Giả sử cho tập X khác rỗng và một tính chất $\mathcal{R}$ được thỏa mãn với một số cặp phần tử a, b nào đó của X. Khi đó ta nói a có quan hệ $\mathcal{R}$ với b và viết $a\mathcal{R}b$, còn $\mathcal{R}$ được gọi là một *quan hệ hai ngôi* trong X.

Ví dụ :

1) Trong tập R mọi số thực, quan hệ "a = b" hoặc quan hệ "a ≤ b" là quan hệ hai ngôi.

2) Trong tập mọi đường thẳng trên mặt phẳng, quan hệ vuông góc giữa hai đường thẳng là quan hệ hai ngôi.

3) Trên tập N* các số nguyên dương, "a là ước số của b" là quan hệ hai ngôi.

4) Trên tập $\mathcal{P}$(E) các phân tập của tập E quan hệ bao hàm $A \subset B$ là quan hệ hai ngôi.

3.2. Các tính chất có thể có của quan hệ trong một tập hợp

Quan hệ $\mathcal{R}$ trong tập X (tức $\mathcal{R} \subset X^2$) có thể có các tính chất sau :

– Tính phản xạ : $a\mathcal{R}a\ \forall a \in X$ (tức là $(a, a) \in \mathcal{R}\ \forall a \in X$)

– Tính đối xứng : $a\mathcal{R}b \Rightarrow b\mathcal{R}a$ (tức là nếu $(a, b) \in \mathcal{R}$ thì $(b, a) \in \mathcal{R}$)

– Tính phản đối xứng : $(a\mathcal{R}b$ và $b\mathcal{R}a) \Rightarrow a = b$

– Tính bắc cầu : $(a\mathcal{R}b)$ và $(b\mathcal{R}c) \Rightarrow a\mathcal{R}c$

Ví dụ :

– Trong tập hợp $\mathcal{P}(X)$ các phần tập của tập hợp X quan hệ bao hàm $A \subset B$ có tính phản xạ, phản đối xứng và bắc cầu mà không có tính đối xứng.

– Trong tập hợp mọi đa thức của một biến số thực, quan hệ bằng nhau có các tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Các quan hệ định nghĩa trong các mục dưới đây rất quan trọng trong nhiều lĩnh vực toán học.

3.3. Quan hệ tương đương

Quan hệ $\mathcal{R}$ trong tập X gọi là quan hệ tương tương nếu nó có tính phản xạ, đối xứng, bắc cầu.

Trong trường hợp này, ta viết $a \sim b$ thay vì $a\mathcal{R}b$.

Ví dụ : Quan hệ song song giữa các đường thẳng trong tập mọi đường thẳng của không gian (coi 2 đường thẳng trùng nhau là song song) ; quan hệ đồng dạng giữa các tam giác ; quan hệ cùng tỉnh của một tập hợp dân một thành phố là các ví dụ trực quan của quan hệ tương đương.

Các lớp tương đương :

Giả sử $\sim$ là một quan hệ tương trong X. Với mỗi phần tử $a \in X$, ta ký hiệu C(a) là tập hợp mọi phần tử thuộc X tương đương với a và gọi nó là lớp tương đương chứa a.

$$C(a) = \{x \in X \mid x \sim a\}$$

Do tính phản xạ $a \sim a$ nên mỗi tập con C(a) không rỗng. Hơn nữa nếu $C(a) \cap C(b) \neq \varnothing$ thì $C(a) = C(b)$.

Thật vậy, giả sử $c \in C(a) \cap C(b)$, thì ta có :

$$c \in C(a) \text{ và } c \in C(b)$$

Tức là $c \sim a$ và $c \sim b$, hay $b \sim c \sim a$. Từ đó do tính chất bắc cầu, suy ra $b \sim a$, vậy $b \in C(a)$.

Lập luận tương tự cũng có $a \in C(b)$, tức là $C(a) = C(b)$.

Từ đó rút ra được định lý :

Một quan hệ tương đương trong X xác định một phân hoạch của X, mỗi phần tử của phân hoạch này là một lớp tương đương.

Họ các lớp tương đương này được gọi là tập thương, ký hiệu $X/\sim$.

Ví dụ : Trong tập các số nguyên Z.

Xét quan hệ R : $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow a - b = 2p$ với $a, b, p \in Z$.

Ta có :

$(a\mathcal{R}a)$	$a - a = 2p \quad (p = 0)$	phản xạ
$(a\mathcal{R}b)$	$a - b = 2p \rightarrow (b - a) = -2p \; (b\mathcal{R}a)$	đối xứng
	$a - b = 2p,\ b - c = 2q$	
	$\Rightarrow (a - c) = (a - b) + (b - c) = 2(p + q)$	bắc cầu

Vậy $\mathcal{R}$ là một quan hệ tương đương.

Ta có : $a = b + 2p$

– Lớp tương đương ứng với $b = 0$ là các số chẵn.

– Lớp tương đương ứng với $b = 1$ là các số lẻ.

3.4. Quan hệ thứ tự

ĐỊNH NGHĨA : *Quan hệ $\mathcal{R}$ trong X gọi là quan hệ thứ tự (hay quan hệ bộ phận) nếu có tính phản đối xứng và bắc cầu.*

Nếu ngoài ra với bất kỳ hai phần tử nào $x \in X$, $y \in Y$ đều có $x\mathcal{R}y$ hoặc $y\mathcal{R}x$ thì $\mathcal{R}$ gọi là quan hệ thứ tự toàn phần (hay thứ tự tuyến tính).

Khi $\mathcal{R}$ là một quan hệ thứ tự trong X ta nói X được xếp thứ tự bởi $\mathcal{R}$ và thay vì $x\mathcal{R}y$ ta viết $x \leq y$ và đọc "x bé hơn y" hoặc "x đi trước y". Ta cũng viết $y \geq x$ và đọc là "y lớn hơn x" hoặc "y đi sau x".

Nếu $x \leq y$ và $x \neq y$ ta viết $x < y$ (hay $y > x$).

Ví dụ :

• Quan hệ $<$ hoặc $\leq$ thông thường trong tập hợp các số thực là quan hệ thứ tự toàn phần, R là tập được sắp thứ tự.

• Quan hệ bao hàm $\subset$ trong tập $\mathcal{P}(X)$ mọi tập con của tập X là quan hệ thứ tự bộ phận. Tuy nhiên nó không là thứ tự toàn phần.

• Quan hệ "a $\vdots$ b" tức a là bội số của b trong N^* là quan hệ thứ tự bộ phận.

Tập X trong đó đã xác định một quan hệ thứ tự gọi là tập được sắp xếp.

IV – ÁNH XẠ

4.1. Định nghĩa

Cho X và Y là hai tập hợp khác rỗng. Nếu có một quy tắc f ứng mỗi phần tử $x \in X$ với mỗi phần tử $y \in Y$ thì người ta nói có một ánh xạ từ X vào Y, ký hiệu $f : X \to Y$ hoặc

$$x \in X \to y \in Y$$

Tập X gọi là *miền xác định* hay nguồn của ánh xạ, tập Y gọi là đích của ánh xạ.

Phần tử $y \in Y$ ứng với phần tử $x \in X$ bởi quy tắc đã cho gọi là ảnh của phần tử x, ký hiệu $y = f(x)$.

Nói riêng khi X và Y là các tập hợp số thì khái niệm ánh xạ trở thành khái niệm hàm số.

Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ từ X vào Y

$A \subset X$ là tập con của X

$B \subset Y$ là tập con của Y

Ta gọi ảnh của A bởi f là tập con của Y xác định bởi :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

Đặc biệt f(X), ảnh của miền xác định X được gọi là miền giá trị của ánh xạ f và ký hiệu bởi :

$$f(X) = \mathrm{Im} f$$

Nghịch ảnh của tập con $B \subset Y$ bởi ánh xạ f là tập con của X xác định bởi :

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$$

Khi $A = \{x\}$, $B = \{y\}$ ta viết $f(x)$ thay vì $f(\{x\})$; $f^{-1}(y)$ thay vì $f^{-1}(\{y\})$ và gọi vắn tắt là ảnh của x và nghịch ảnh của y theo trình tự tương ứng.

Cần để ý là $f^{-1}(B)$, $B \neq \phi$ có thể là tập rỗng.

4.2. Đơn ánh – toàn ánh – song ánh

Trong số các ánh xạ, các ánh xạ dưới đây giữ vai trò quan trọng :

– Ánh xạ f gọi là *đơn ánh* nếu $f(x_1) = f(x_2)$ thì $x_1 = x_2$, nói cách khác hai phần tử khác nhau sẽ có ảnh khác nhau.

– Ánh xạ f gọi là *toàn ánh* nếu $f(X) = f(Y)$, nói cách khác $\forall y \in Y$ đều tồn tại $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

– Một ánh xạ vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh gọi là *song ánh*. Ta cũng gọi nó là ánh xạ một đôi một (ánh xạ 1 – 1).

Nếu $f : X \rightarrow Y$ là đơn ánh thì $f : X \rightarrow \mathrm{Im}f$ sẽ là toàn ánh và do đó là song ánh.

Ánh xạ $f : X \rightarrow X$ cho bởi $f(x) = x$ $\forall x \in X$, gọi là ánh xạ đồng nhất trên X, ký hiệu là i_X. Dễ thấy i_X là song ánh. Trường hợp X = R là tập mọi số thực thì i_R chính là ánh xạ y = x thông thường.

Ví dụ :

1) Ánh xạ $x \rightarrow f(x) = x^3$ từ R vào R là một đơn ánh.

2) Ánh xạ $x \rightarrow f(x) = e^x$ là đơn ánh, còn ánh xạ $x \rightarrow f(x) = 2x + 3$ là song ánh.

3) Ánh xạ $x \rightarrow f(x) = \mathrm{arctg}x$ từ R vào R là đơn ánh ; cũng ánh xạ đó từ R vào khoảng mở $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ lại là song ánh.

4.3. Ánh xạ hợp của các ánh xạ

Cho 2 ánh xạ : $X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$

Ánh xạ $h : X \rightarrow Z$ xác định bởi $\forall x \in X$, $h(x) = g(f(x))$

được gọi là *hợp thành* của các ánh xạ f và g, ký hiệu h = gof theo thứ tự đó, h còn gọi là *ánh xạ hợp* hay *tích của các ánh xạ* f và g.

Ví dụ : f và g là các ánh xạ từ R vào R bởi :

$$f(x) = \sin x,\ g(y) = y^2$$

Thì : $(gof)(x) = (\sin x)^2 = \sin^2 x$

Còn : $(fog)(x) = \sin(x^2)$

Từ định nghĩa, suy ra tính chất :

a) Nếu $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$; $k : Z \to S$

thì $ko(gof) = (kog)of$ (tính kết hợp)

Do tính chất này, có thể mở rộng phép toán hợp các ánh xạ từ hai sang một số hữu hạn ánh xạ cho trước và ký hiệu kogof có ý nghĩa hoàn toàn xác định.

b) Giả sử $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ là các ánh xạ thì :

– Nếu f và g đều là đơn ánh thì gof là đơn ánh.

– Nếu f và g đều là toàn ánh thì gof là toàn ánh.

– Nếu f và g đều là song ánh thì gof là song ánh.

4.4. Ánh xạ ngược (của một song ánh)

Giả sử $f : X \to Y$ là song ánh, thì với bất kỳ $y \in Y$ đều tồn tại duy nhất một phần tử $x \in X$ sao cho $f(x) = y$.

Ánh xạ $f^{-1} : Y \to X$ xác định bởi :

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$$

gọi là ánh xạ ngược của f.

Ta cũng thấy ánh xạ ngược của f^{-1} lại là ánh xạ f, vậy f và f^{-1} là cặp song ánh ngược của nhau.

Trong trường hợp riêng khi $Y = X$ và $f^{-1} = f$ nghĩa là $f^{-1}(x) = f(x)\ \forall x \in X$ thì f gọi là ánh xạ "nội quy" (involution) hay ánh xạ đối hợp.

Chẳng hạn nếu R_0 là tập mọi số thực khác 0 thì ánh xạ $f : R_0 \to R_0$ xác định bởi $f(x) = \dfrac{1}{x}$ là ánh xạ nội quy.

Ánh xạ $f : R \to R$ bởi $f(x) = x^3$ có ánh xạ ngược $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.

Ánh xạ $f : \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ bởi $f(x) = \sin x$ có ánh xạ ngược

$$f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

Nếu $f : X \rightarrow Y$ là song ánh thì ánh xạ hợp $f^{-1}of$ là ánh xạ đồng nhất trên X, tức là :

$$f^{-1}of = i_X$$

Tương tự $f^{-1}of = i_Y$ là ánh xạ đồng nhất trên Y.

Nếu $f : X \rightarrow Y$ và $g : Y \rightarrow Z$ là các song ánh thì gof cũng là song ánh và :

$$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$$

4.5. Thu hẹp và mở rộng một ánh xạ

Giả sử $f : X \rightarrow Y$ là một ánh xạ, $A \subset X$ là tập con thực sự của X.

Ánh xạ $g : A \rightarrow Y$ bởi $g(x) = f(x)\ \forall x \in A$ gọi là thu hẹp của ánh xạ f trên tập A, ta ký hiệu $g = f_A$.

Nếu $X' \subset X$, $X' \neq X$ thì ánh xạ $X' \rightarrow Y$ sao cho $h(x) = f(x)\ \forall x \in X$ gọi là mở rộng của f lên tập X.

Ta cũng nhận thấy là một ánh xạ f cho trước có thể tồn tại nhiều mở rộng của nó ngay cả khi tập X' được hoàn toàn xác định.

BÀI TẬP

A - Bài tập có lời giải

Bài 1.

Cho hai tập hợp X và Y

a) Xác định các tập hợp :

$$A = X \cap (X \cup Y)\ ;\ B = X \cup (X \cap Y)$$

b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để X = Y là :

$$X \cap Y = X \cup Y$$

Giải :

a) Ta có : $X \subset X \cup Y \rightarrow X \cap (X \cup Y)$ vậy $A = X$

$$B = X \cup (X \cap Y) = (X \cup X) \cap (X \cup Y)$$

$$= X \cap (X \cup Y) = A = X$$

b) *Cần :* $X = Y \to X \cap X = X \cup X$

Đủ : Giả sử có $X \cap Y = X \cup Y$

$$\Rightarrow X \cup (X \cap Y) = X \cup (X \cup Y)$$

$$= X \cup Y \Rightarrow X = X \cup Y \quad (1)$$

$$X \cap Y = X \cup Y \to Y \cap (X \cap Y) = Y \cap (X \cup Y)$$

$$\Leftrightarrow Y = X \cap Y \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $X = Y$

Bài 2.

Chứng minh rằng :

a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

b) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Giải :

a) Ta lập luận theo cách bao hàm 2 chiều :

Chiều $\Rightarrow$: Lấy $(x, y) \in A \times (B \cup C)$ ta có :

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \\ y \in B \cup C \quad (x \in B \quad \text{hay} \quad y \in C) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x,y) \in A \times B \\ \text{hay} \quad (x,y) \in A \times C \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (x,y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

Vậy $A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)$ (1)

Chiều $\Leftarrow$: Lấy $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ có :

$$\left.\begin{array}{l} (x,y) \in (A \times B) \\ \text{hay} \\ (x,y) \in (A \times C) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in A \\ y \in B \quad \text{hay} \quad y \in C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in A \\ y \in B \cup C \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (x,y) \in A \times (B \cup C)$$

Vậy $(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)$ (2)

Từ (1) và (2) ta có điều phải chứng minh.

b) Chiều $\Rightarrow$: Lấy $(x,y) \in A \times (B \cap C)$ ta có :

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \\ y \in B \quad \text{hay} \quad y \in C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (x,y) \in A \times B \\ \text{và} \quad (x,y) \in A \times C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$$

Vậy $A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$ (3)

Chiều $\Leftarrow$: Lấy $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$ có :

$$\left.\begin{array}{l} x \in A \\ y \in B \quad \text{và} \quad y \in C \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in A \\ y \in B \cap C \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x, y) \in A \times (B \cap C)$$

Vậy $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)$ (4)

Từ (3) và (4) ta có điều phải chứng minh.

Bài 3.

Xâu bit đối với các tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ và $\{1, 3, 7, 9\}$ là 11111 00000 và 10101 01010. Dùng các xâu bit để tìm hợp và giao của 2 tập hợp trên.

Giải :

Xâu bit đối với hợp của hai tập là :

$$11111\ 00000 \vee 10101\ 01010 = 11111\ 01010$$

và xâu này tương ứng với tập $\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$

Xâu bit đối với giao của hai tập này là :

$$11111\ 00000 \wedge 10101\ 01010 = 10101\ 00000$$

và xâu này tương ứng với tập $\{1, 3, 5\}$.

Bài 4.

Giải các phương trình sau trong trường số phức C.

1) $z^2 + (4 - 6i)z - 9 - 15i = 0$

2) $z^2 = 5 - 12i$

3) $1 - z + z^2 - z^3 = 0$

Giải :

1) $z^2 + (4 - 6i)z - 9 - 15i = 0$

$$\Delta' = (2 - 3i)^2 + 9 + 15i = 4 - 9 - 12i + 9 + 15i = 4 + 3i$$

$$= (a + ib)^2 = a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 4 & (1) \\ 2ab = 3 & (2) \\ a^2 + b^2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 & (3) \end{cases}$$

Cộng (1) và (3) ta có :

$$2a^2 = 9 \Rightarrow a^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow a = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (a, b cùng dấu)}$$

$$z_1 = (-2+3i) + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}-4\right) + \frac{i}{2}\left(6+\sqrt{2}\right)$$

$$z_2 = (-2+3i) - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{2}\left(3\sqrt{2}+4\right) + \frac{i}{2}\left(6-\sqrt{2}\right)$$

2) $z = (a + ib)$ $\qquad\qquad$ $z^2 = (5 - 12i)$

$(a + ib)^2 = (5 - 12i)$

$a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + 2abi = 5 - 12i$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 5 & (1) \\ 2ab = -12 \Rightarrow ab = -6 \quad \text{(a,b trái dấu)} & (2) \\ a^2 + b^2 = 13 & (3) \end{cases}$$

Cộng (1) và (3) ta có $2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$

$\Rightarrow \qquad a = \pm 3 b = \mp 2$

$z_1 = 3 - 2i$

$z_2 = -3 + 2i$

3) $1 - z + z^2 - z^3 = 0$

Vế trái là một cấp số nhân với công bội là $(-z)$. Vậy phương trình có thể viết :

$$\frac{1-z^4}{1+z} = 0 \quad \text{hay} \quad z^4 = 1 \quad \text{với} \quad z \neq -1$$

Ta được 3 nghiệm là căn bậc 4 của 1 và phải khác -1, nghĩa là :

$$z_0 = 1,\ z_1 = i,\ z_2 = -i.$$

Bài 5.

1) Thiết lập đẳng thức sau cho z_1 và z_2 trong C :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \qquad (1)$$

2) z và z' là các số phức. Chứng minh rằng :

$$|z + \sqrt{z^2 - z'^2}| + |z - \sqrt{z^2 - z'^2}| = |z + z'| + |z - z'| \qquad (2)$$

Giải :

1) Theo định nghĩa

$$|z|^2 = z.\overline{z}\,,\ \overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$$

ta có :

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z}_1 + \overline{z}_2)$$

$$= z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z}_1 - \overline{z}_2)$$

$$= z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 - z_1\overline{z}_2 - z_2\overline{z}_1$$

do đó :

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2)$$

$$= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

2) Đặt $|z_1| = |z + \sqrt{z^2 - z'^2}|,\ |z_2| = |z - \sqrt{z^2 - z'^2}|$ (3)

Theo (1) ta có :

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 = \frac{1}{2}|z_1 + z_2|^2 + \frac{1}{2}|z_1 - z_2|^2$$

$$= |z_1|^2 + |z_2|^2$$

$$= \frac{1}{2}|(z + \sqrt{z^2 - z'^2}) + (z - \sqrt{z^2 - z'^2})|^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}|(z + \sqrt{z^2 - z'^2}) - (z - \sqrt{z^2 - z'^2})|^2$$

$$= \frac{1}{2}|2z|^2 + \frac{1}{2}|2\sqrt{z^2 - z'^2}|^2$$

$$= 2|z|^2 + 2|z^2 - z'^2|^2$$

Mặt khác ta có :

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1|\,|z_2|$$

$$= 2|z|^2 + 2|z^2 - z'^2| + 2|z + \sqrt{z^2 - z'^2}|\,|z - \sqrt{z^2 - z'^2}|$$

Ta có :

$$|z + \sqrt{z^2 - z'^2}\,|\,|z - \sqrt{z^2 - z'^2}\,|$$

$$= |(z + \sqrt{z^2 - z'^2})(z - \sqrt{z^2 - z'^2})|$$

$$= |z^2 - (z^2 - z'^2)| = |z'^2|$$

$$(|z_1| + |z_2|)^2 = 2|z|^2 + 2|z^2 - z'^2| + 2|z'|^2$$

$$= 2|z^2 - z'^2| + 2(|z|^2 + |z'|^2)$$

theo (1) ta có :

$$|z|^2 + |z'|^2 = |z + z'|^2 + |z - z'|^2$$

$$= 2|z^2 - z'^2| + |z + z'|^2 + |z - z'|^2$$

$$= (|z + z'| + |z - z'|)^2$$

Lấy căn bậc 2 của 2 vế và lưu ý tới cách đặt (3) ta có điều phải chứng minh.

Bài 6.

Giải trong trường số phức C phương trình sau :

$$(z + 1)n = e^{2ina} \qquad (1)$$

Giải :

Ta có $(z + 1)n = (e^{2ia})^n \,.\, 1$

Mặt khác ký hiệu α_k $(0 \le k \le n - 1)$ là các căn bậc n của 1 ta có :

$$\alpha_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad k = 0,1,\dots,n - 1$$

Theo công thức Euler ta có : $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, vậy với $x = \dfrac{2k\pi}{n}$ ta có :

$$\alpha_k = e^{2ikn/n}$$

và các nghiệm của (1) là :

$$z_k + 1 = (e^{2ia})e^{2ikn/n} = e^{2i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)}$$

$$= \cos\left[2\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right] + i\sin\left[2\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

$$\Rightarrow z_k = \left[1-\cos\left[2\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]+i\sin\left[2\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]\right]$$

$$= -2\sin^2\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left[2\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= -2\sin^2\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)+2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\cos\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$= -2\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\left[\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)-i\cos\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

$$= 2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\left[i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)+\cos\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

$$z_k = 2i\sin\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)e^{i\left(a+\frac{k\pi}{n}\right)} \qquad k = 0,1,\dots,n-1$$

Bài 7.

Chứng minh với mọi n ($n \in N$) ta có :

$$1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{1}$$

Giải :

Thật vậy

a) Với n = 1 thì hai vế bằng nhau và bằng 1.

b) Giả sử đẳng thức (1) đúng với mọi $n \le k$, có nghĩa là với mọi $n \le k$ ta có :

c) Ta phải chứng minh (1) đúng với $n = k + 1$, tức là phải chứng minh :

$$1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Thật vậy với n = k, theo giả thiết quy nạp ta có :

$$1^2+2^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Do đó ta có :

$$1^2+2^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Vậy đẳng thức đúng với $n = k + 1$, do đó (1) được chứng minh.

Bài 8.

Chứng minh đẳng thức sau đúng với mọi $n > 1$, $a > -1$ và $a \neq 0$.

$$(1 + a)^n > 1 + na \qquad (1)$$

Giải :

a) Với $n = 2$, khi đó vế trái của (1) lớn hơn vế phải của (1). Vậy (1) đúng.

b) Giả sử (1) đúng với mọi $n \leq k$ tức là với $k > 1$ và $n \leq k$ thì ta có :

$$(1 + a)^n > 1 + na \qquad (2)$$

c) Tiếp theo cần chứng minh bất đẳng thức đúng với $n = k + 1$, tức là cần phải chứng minh

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1)a \qquad (3)$$

Thật vậy vì $(1 + a) > 0$ và từ (2) ta có :

$$(1 + a)^{k+1} = (1 + a)^k(1 + a)$$

Vậy $$(1 + a)^{k+1} > (1 + ka)(1 + a) \qquad (4)$$

Ta biến đổi

$$(1 + ka)(1 + a) = 1 + ka + a + ka^2 > 1 + (1 + k)a, \text{ vì } ka^2 > 0 \qquad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra (3) đúng và do đó bất đẳng thức đã được chứng minh.

Bài 9.

Một dãy số $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ có tính chất sau : $a_0 = 0$, $a_n = 2a_{n-1} + 3$ với mọi $n \geq 1$. Khi đó ta có thể xác định được số hạng a_n tổng quát của dãy số trên như sau :

Trước hết chọn các số α_1, α_2 sao cho :

$$(a_n - \alpha_1) = \alpha_2(\alpha_{n-1} - \alpha_1) \qquad (1)$$

Giải :

Từ (1) suy ra $a_n = \alpha_2 a_{n-1} - \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1$

Rõ ràng các số α_1, α_2 phải thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases}\alpha_2 = 2\\ \alpha_1 - \alpha_1\alpha_2 = 3\end{cases}$$

Từ hệ trên ta có ngay $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 2$. Đặt $q_n = a_n - \alpha_1$, với $n \geq 1$. Suy ra $q_n = \alpha_2 . q_{n-1}$ với $n \geq 1$ và $q_1 = 6$, từ đó ta có $q_n = q_1 . \alpha_2^{n-1}$. Vậy $a_n - \alpha_1 = q_1 . \alpha_2^{n-1}$, suy ra $a_n = \alpha_1 + q_1 . \alpha_2^{n-1} = 6.2^{n-1} - 3$.

Một chương trình con đệ quy để tính số hạng tổng quát a_n được minh họa như sau :

```
Function fn(n : integer) : integer ;
BEGIN
        if n = 0 then fn := 0
        else fn := 2*fn(n-1) + 3 ;
END
```

Bài 10.

Một dãy $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ có tính chất sau : $a_0 = 0, a_1 = 1$; $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với mọi $n \geq 2$ được gọi là dãy Fibonacci. Như vậy dãy Fibonacci là dãy 0, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... và với $n \geq 2$ ta có thể tìm được số Fibonacci thứ n nếu biết số Fibonacci thứ $n - 1$ và $n - 2$.

Bằng quy nạp toán học ta dễ dàng chứng minh được rằng với $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Tuy nhiên công thức trên có thể tính trực tiếp như sau :

Trước hết ta hãy tìm một cặp số α_1, α_2 sao cho :

$$a_n - \alpha_1 a_{n-1} = \alpha_2(a_{n-1} - \alpha_1 a_{n-2})$$

suy ra $$a_n = (\alpha_1 + \alpha_2)a_{n-1} - \alpha_1\alpha_2 a_{n-2}$$

Rõ ràng các cặp số α_1, α_2 thỏa mãn hệ phương trình :

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1\alpha_2 = -1 \end{cases}$$

Khi đó α_1, α_2 sẽ là nghiệm của phương trình $x^2 - x - 1 = 0$, do vậy ta có thể chọn $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. Đặt $q_n = a_n - \alpha_1 a_{n-1}$.

Khi đó $q_n = \alpha_2 q_{n-1}$ với $n \geq 2$ và $q_1 = 1$. Ta có $q_n = \alpha_2^{\,n-1}$.

Vậy $a_n - \alpha_1 a_{n-1} = \alpha_2^{\,n-1}$, suy ra $a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2^{\,n-1}$.

$$a_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 \quad (1)$$

$$a_3 = \alpha_1 a_2 + \alpha_2^2 \quad (2)$$

$$a_4 = \alpha_1 a_2 + \alpha_2^3 \quad (3)$$

....

$$a_{n-1} = \alpha_1 a_{n-2} + \alpha_2^{n-2} \quad (n-2)$$

$$a_n = \alpha_1 a_{n-2} + \alpha_2^{n-1} \quad (n-1)$$

Khi nhân hai vế của đẳng thức (n – 2) với α_1, đẳng thức (n – 3) với α_1^2 ..., đẳng thức (1) với α_1^{n-2} và cộng lại theo từng vế ta có :

$$a_n = \alpha_1^{n-1}a_1 + \alpha_1^{n-2}\alpha_2 + \ldots + \alpha_1^{n-3}\alpha_2^2 = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

Vậy $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ với $n \geq 2$; Tuy nhiên công thức này cũng đúng với $n \geq 0$.

Chương trình con để tính số hạng tổng quát thứ n có thể được viết như sau :

```
Function fn(n : integer) : integer ;
Begin
        if n <= 1 then fn := n
        else fn := fn(n – 1) + fn(n – 2) ;
End ;
```

Bài 11.

Xét 2 tập có thứ tự E và F, trong đó thứ tự cho bởi ≤ 1 trên cả 2 tập. Hãy xác định quan hệ $\mathcal{R}$ sau đây. Xác định trên E × F có phải là quan hệ thứ tự không ?

$$(x, y)\,\mathcal{R}\,(x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x < x' \\ \text{hay } (x = x' \text{ và } y \leq y') \end{cases}$$

Giải :

a) Phản xạ : $(x, y)\,\mathcal{R}\,(x, y)$ vì $x = x$ và $y \leq y'$

b) Phản đối xứng :

$$(x_1, y_1)\,\mathcal{R}\,(x_2, y_2) \text{ và } (x_2, y_2)\,\mathcal{R}\,(x_1, y_1)$$

$$\Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

– Xét $x_1 < x_2$ (hay $x_2 < x_1$). Điều này không thể xảy ra vì ta sẽ không có $(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2)$ và $(x_2, y_2) \mathcal{R} (x_1, y_1)$ cùng một lúc.

– Nếu $x_1 = x_2$ và $y_1 \le y_2$ và $\begin{cases} x_2 = x_1 \\ y_2 \le y_1 \end{cases}$

khi đó $x_1 = x_2$ và $y_1 = y_2$.

c) Bắc cầu :

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2) \text{ và } (x_2, y_2) \mathcal{R} (x_3, y_3)$$
$$\overset{?}{\Rightarrow} (x_1, y_1) \mathcal{R} (x_3, y_3) \text{ ?}$$

Ta xét tất cả các trường hợp có thể xảy ra :

– Nếu $x_1 < x_2$ và $x_2 < x_3$ khi đó $x_1 < x_3$

– Nếu $x_1 < x_2$ và $(x_2 = x_3, y_2 \le y_3)$ khi đó $x_1 < x_3$

– Nếu $(x_1 = x_2, y_1 \le y_2)$ và $(x_2 < x_3)$ khi đó $x_1 < x_3$

– Nếu $(x_1 = x_2, y_1 \le y_2)$ và $(x_2 = x_3, y_2 \le y_3)$

khi đó $(x_1 = x_3, y_1 \le y_3)$.

Bài 12.

Cho $F : E \to F$ và T là ánh xạ tương đương trên F.

Người ta xác định quan hệ $\mathcal{R}$ trên E bởi $x\mathcal{R}Y \Leftrightarrow f(x)\ T\ f(y)$

Chứng minh rằng $\mathcal{R}$ cũng là quan hệ tương đương.

Giải :

a) Phản xạ của $\mathcal{R}$:

$$f(x) \in F, \text{ vì T là phản xạ trên } F \Rightarrow f(x)\ T\ f(x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$$

Vậy $\mathcal{R}$ là phản xạ.

b) Đối xứng của $\mathcal{R}$: giả sử $x\mathcal{R}y$

Ta có : $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x)\ T\ f(y)$

Vì T là đối xứng $\Rightarrow f(y)\ T\ f(x) \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$

Vậy $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$.

c) Bắc cầu của $\mathcal{R}$:

Giả sử $x\mathcal{R}y$ và $y\mathcal{R}z$

Ta có : $\begin{cases} xRy \Leftrightarrow f(x)Tf(y) \\ \text{và} \\ yRz \Leftrightarrow f(y)Tf(z) \end{cases}$

Bài 13.

Cho f là một ánh xạ từ E vào F.

Chứng minh rằng f là toàn ánh khi và chỉ khi đối với mỗi tập G và với các ánh xạ g và h bất kỳ từ F vào G, ta có :

$$gof = hof \Rightarrow g = h \qquad (1)$$

Giải :

Theo giả thiết :

$$f : E \rightarrow F ; \quad g, h : F \rightarrow G$$

Cần ($\Rightarrow$) : Giả sử f là toàn ánh vào gof = hof.

Khi đó : $\left.\begin{matrix} \forall y \in F, \exists x : y = f(x) \\ g(y) = gof(x) = hof(x) = h(y) \end{matrix}\right\} \Rightarrow g = h$

Đủ ($\Leftarrow$) Giả sử có (1)

Bằng phản chứng, giả sử f không phải toàn ánh. Cho C và C' là hai phần tử khác nhau của G. Ta chọn :

$g : \ \forall y \in F, g(y) = C$

$h : \begin{cases} \forall y \in f(E), h(y) = C \\ \forall y \notin f(E), h(y) = C' \end{cases}$ (Do giả thuyết f không phải là toàn ánh)

Ta có :

$$\forall x \in E, f(x) = y \in f(E) \Rightarrow gof(x) = hof(x)$$

(Vì $g(y) = h(y) = C, \forall y \in f(E)$)

Nhưng theo cách chọn : $g \neq h$ điều này mâu thuẫn với (1). Vậy f phải là toàn ánh.

Bài 14.

Cho f là một ánh xạ từ E vào F.

Chứng minh rằng f là đơn ánh khi và chỉ khi với mỗi tập D và với các ánh xạ g và h từ D vào E ta có :

$$fog = foh \Rightarrow g = h \qquad (1)$$

Cần ($\Rightarrow$) : Giả sử f là đơn ánh và fog = foh.

Khi đó :

$\forall z \in D : f[g(z)] = f[h(z)]$ (do f là đơn ánh) $\Rightarrow g(z) = h(z) \Rightarrow g = h$

Đủ ($\Leftarrow$) ; Giả sử có (1)

Ta chọn : g : $\forall z \in D \quad g(z) = x'$

h : $\forall z \in D \quad h(z) = x''$

$\forall z \in D \quad fog(z) = f(x')$

$foh(z) = f(x'')$

$fog(z) = foh(z) \Rightarrow g(z) = h(z)$

$\Leftrightarrow f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$

Vậy f là đơn ánh.

Bài 15.

Cho f là ánh xạ từ E vào F.

A, B là các tập con của E.

A', B' là các tập con của F.

Chứng minh rằng ta có :

a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

và cho ví dụ để có $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

c) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

d) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

e) $A \subset f^{-1}(f(A))$? Cho ví dụ để có $A \neq f^{-1}(f(A))$

Giải :

a) Lập luận theo hàm 2 chiều :

$f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$?

Giả sử $y \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in (A \cup B) : y = f(x)$

$\Rightarrow (\exists x)\ (x \in A$ hay $x \in B) : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A)$

hay $y \in f(B) \quad \Rightarrow y \in f(A) \cup f(B)$

Vậy $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

* $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$?

Giả sử $y \in [f(A) \cup f(B)] \Rightarrow y \in f(A)$

hay $\quad y \in f(B) \Rightarrow (\exists x_1 \in A : y = f(x_1))$

hay $\quad (\exists x_2 \in A : y = f(x_2))$

$$\Rightarrow \exists x \in A \cup B, (x = x_1 \text{ hay } x = x_2) : y = f(x) \Rightarrow y \in f(A \cup B)$$

Vậy $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

b) Giả sử $y \in f(A \cap B) \Rightarrow \exists x \in A \cap B : y = f(x)$

$$\Rightarrow (\exists x)\ (x \in A \text{ và } x \in B) : y = f(x)$$

$$\Rightarrow y \in f(A) \text{ và } y \in f(B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B)$$

* Ví dụ để có $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

Cho $E = \{a, b, c\}$; $F = \{1, 2\}$ và xác định bởi :

$$f(a) = f(b) = 1 \text{ và } f(c) = 2$$

Cho $A = \{a, c\}$ và $B = \{b, c\}$

$$f(A) = f(B) = \{1, 2\} = F \text{ vậy } f(A) \cup f(B) = F$$

Mặt khác :

$$A \cap B = \{c\} \text{ vậy } f(A \cap B) = f(a) = \{2\} \neq F$$

Do đó $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$

c) Lập luận theo bao hàm 2 chiều

* $f^{-1}(A' \cup B') \subset f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$?

Giả sử $x \in f^{-1}(A' \cup B') \Rightarrow f(x) \in (A' \cup B')$

$$\Rightarrow f(x) \in A' \text{ hay } f(x) \in B' \Rightarrow x \in f^{-1}(A')$$

hay $x \in f^{-1}(B') \Rightarrow x \in [f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')]$

* $f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cup B')$?

Cho $\quad x \in [f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')] \Rightarrow x \in f^{-1}(A')$ hay $x \in f^{-1}(B')$

$$\Rightarrow f(x) \in A' \text{ hay } f(x) \in B'$$

$$\Rightarrow f(x) \in (A' \cup B')$$

$$\Rightarrow x \in f^{-1}(A' \cup B')$$

d) Lập luận theo bao hàm 2 chiều :

* $f^{-1}(A' \cap B') \subset f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$

Cho $x \in f^{-1}(A' \cap B') \Rightarrow f(x) \in (A' \cap B')$

$\Rightarrow f(x) \in A'$ và $f(x) \in B' \Rightarrow x \in f^{-1}(A')$ và $x \in f^{-1}(B')$

$\Rightarrow x \in [f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')]$

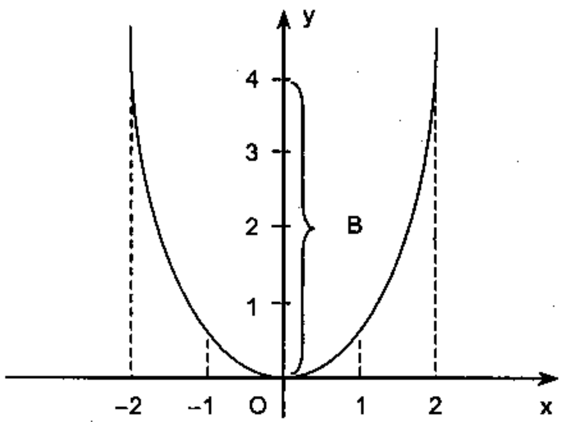
* $f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \subset f^{-1}(A' \cap B')$?

Cho $x \in [f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')] \Rightarrow x \in f^{-1}(A')$ và $x \in f^{-1}(B')$

$\Rightarrow f(x) \in A'$ và $f(x) \in B' \Rightarrow f(x) \in (A' \cap B') \Rightarrow x \in f^{-1}(A' \cap B')$

e) Giả sử $x \in A \Rightarrow f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}[f(A)]$

Cho ví dụ : $f : E \to FA = [0, 2]$, $E = R_1$, $F = R$ $f(x) = x^2$



Hình 1.9

$f(0) = 0$, $f(2) = 4$, $f(A) = [0, 4] = B$

$f^{-1}[f(A)] = f^{-1}(B) = \{x \in E \mid \exists y \in B, y = f(x)\}$

$0 \in B \Rightarrow f^{-1}(\{0\}) = \{x \in R \mid x^2 = 0\} = \{0\}$.

B – Bài tập tự giải

1. Cho $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

   $C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

   Tìm các tập sau

   a) $A \cup C$ b) $A \cap B$ c) $A \cap (B \cup C)$

   d) $(A \cap B) \cup C$ e) $\overline{A \cap B}$ f) $\overline{A} \cap \overline{B}$

2. Cho A $\{1, 2, 3\}$ và $B = \{a, b\}$

Tìm các tập sau :

a) $A \times B$ b) $B \times B$

c) $A \times \varnothing$

3. Cho $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$ và $C = \{\square, \Delta, O, *\}$ và cho các quan hệ R trên $A \times B$, S trên $B \times C$ như sau :

$$R = \{(1, x), (1, y), (3, x)\}$$

$$S = \{(x, \square), (x, \Delta), (y, O), (y, *)\}$$

Hãy tìm quan hệ hợp T = RoS

Hướng dẫn : Để tìm quan hệ hợp T = RoS ta sử dụng định nghĩa sau :

$$T = \{(a, c) \mid \exists\, b \in B \text{ sao cho } (a, b) \in R \text{ và } (b, c) \in S\}$$

4. Tính các biểu thức sau :

a) $(3 + 5i)(4 - i)$ b) $(6 + 11i)(7 + 3i)$

c) $\dfrac{3-i}{4+5i}$ d) $(1 + 2i)^6$

5. Đưa 1 + i về dạng lượng giác, tính $(1 + i)^{25}$

6. Giải các phương trình bậc hai sau :

a) $x^2 - x + 1 = 0$ b) $x^2 - 2x + 7 = 0$

7. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases}(3-i)x + (4+2i)y = 2+6i \\ (4+2i)x - (2+3i)y = 5+4i\end{cases}$$

8. Dùng quy nạp toán học chứng minh rằng :

a) $3.5 + 3.5^2 + \ldots + 3.5^n = \dfrac{3(5^{n+1} - 1)}{4}$ với $\forall n \geq 0$ và nguyên.

b) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$, với $\forall n$ nguyên dương.

c) $1.2 + 2.3 + \ldots + n(n + 1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$, với $\forall n$ nguyên dương.

9. Hãy tìm f(1), f(2), f(3) và f(4) nếu f(n) được định nghĩa bằng đệ quy với $f(0) = 1$ và với $n = 0, 1, 2, \ldots$

a) $f(n + 1) = f(n) + 2$

b) $f(n + 1) = 3f(n)$

c) $f(n + 1) = 2^{f(n)}$

d) $f(n + 1) = [f(n)]^2 + f(n) + 1$

10. Cho Z là tập tất cả các số nguyên, xác định quan hệ R trên Z × Z bởi

$R = \{(a, b) \mid a - b = 5k \text{ với } k \in Z\}$

Hãy chứng minh rằng R là quan hệ tương đương.

11. Trong số các ánh xạ từ X vào Y dưới đây, ánh xạ nào là đơn ánh, toàn ánh, song ánh ?

a) $X = R$, $Y = (0, \pi)$, $f(x) = \text{arccotg}x$

b) $X = \{4, 9\}$, $Y = \{21, 96\}$, $f(x) = x^2 + 2x - 3$

c) $X = Y = R$, $f(x) = 3x - 2|x|$

d) $X = R$, $Y = \left[0, \frac{1}{3}\right]$, $f(x) = \dfrac{x^2}{1 + x^2 + x^4}$

12. Cho ánh xạ $f : R \to R$ bởi $f(x) = x^2 - 3x + 2$

a) Xác định f(R).

b) Cho $A = [-1, 2]$, xác định $f^{-1}(A)$.

Chương II

HÀM SỐ VÀ MA TRẬN

I – HÀM SỐ

1.1. Khái niệm tổng quát

1. Định nghĩa

Cho các tập hợp X, Y $\subseteq$ R, X, Y $\neq \varnothing$, một ánh xạ f từ X vào Y : X $\to$ Y gọi là một hàm số biến số thực, ảnh y = f(x) với x $\in$ X gọi là giá trị của f, X gọi là miền xác định, tập hợp các giá trị {f(x)}, gọi là miền giá trị của hàm số. Ta cũng nói f là một hàm xác định trong tập hợp X và lấy giá trị trong tập hợp Y. Để đơn giản, ta cũng nói hàm y = f(x), x gọi là biến số độc lập, y gọi là biến số phụ thuộc.

Một hàm số y = f(x) có thể cho bằng các phương pháp khác nhau, tùy theo f chỉ cách tương ứng giữa x $\in$ X và y $\in$ Y.

Nếu f chỉ ra các quy tắc tính nhất định để ứng với mỗi x ta có một giá trị f(x) thì f gọi là được cho bằng một công thức hay một biểu thức giải tích, khi đó miền xác định X của f sẽ tìm được theo ý nghĩa của các quy tắc tính.

Ví dụ :

Các hàm số sau đây là các hàm được cho bằng công thức :

1) y = f(n) có miền xác định là X = N, đó là một dãy số.

2) $y = x^2$ có miền xác định X = R.

3) $y = \sqrt{4 - x^2}$, y có ý nghĩa khi $4 - x^2 \geq 0$ hay $-2 \leq x \leq 2$,

hàm số có miền xác định là đoạn [–2 ; 2].

4) $y = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{2+x}}$, y có nghĩa khi :

$-x \geq 0$ và $2 + x > 0$ hay $x \leq 0$ và $x > -2$. Vậy hàm số có miền xác định :

$$X = (-\infty ; 0] \cap (-2 ; +\infty) = (-2 ; 0].$$

5) $y = \sqrt{\sin x}$, có ý nghĩa khi $\sin x \geq 0$ hay $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$, $k \in Z$, nghĩa là miền xác định của hàm số là tập hợp các đoạn $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, $(k \in Z)$.

6) $y = f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{khi } x \leq 0 \\ \sqrt{x}, & \text{khi } x > 0 \end{cases}$

Nếu hàm $y = f(x)$ được cho bằng một công thức nhưng không giải ra đối với y : $F(x,y) = 0$, $\forall x \in X$ thì y gọi là hàm ẩn của x.

Trường hợp y cho bởi một công thức đã được giải ra đối với y cũng gọi là hàm số hiển.

Ngoài phương pháp cho bằng một công thức thường dùng trong giải tích, một hàm số có thể cho bằng những phương pháp khác nhau, chẳng hạn cho bằng một bảng tương ứng giữa $x \in X$, $y \in Y$ như các bảng số thường dùng, hoặc bằng phương pháp đồ thị.

2. Đồ thị của hàm số

Xét hàm số $f : X \to Y$. Gọi đồ thị của hàm số là tập hợp con của tích $X \times Y$, nghĩa là tập hợp các cặp số thực (có thứ tự) : (x, y) với $x \in X$, $y \in Y$, $(y = f(x))$. Trong mặt phẳng, xét hệ trục tọa độ vuông góc xOy và xét cặp (x, y) như là một điểm $M(x, y)$ trong mặt phẳng thì đồ thị của hàm số đối với hệ trục tọa độ đó là một tập hợp điểm trong mặt phẳng và đồ thị đó thường là một đường thẳng hoặc cong.

Ví dụ :

1) $y = ax + b$: đồ thị là một đường thẳng.

2) $y = x^2$: đồ thị là một đường parabole.

3) $y = \dfrac{a}{x}$: đồ thị là một đường hyperbole.

4) $y = e^x$ là hàm số mũ, đồ thị đi qua điểm (0, 1).

5) $y = |x - 2| + |x - 1|$ có đồ thị như hình 2.1.

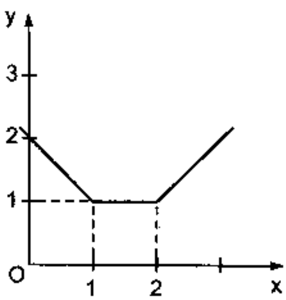
vì :

$$y = \begin{cases} -2x + 3 & \text{nếu } x < 1 \\ 1 & \text{nếu } 1 \le x \le 2 \\ 2x-3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

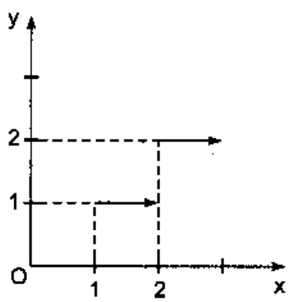
6) $y = E(x)$

$E(x)$ chỉ phần nguyên của x : $E(x) \le x$, có đồ thị như hình 2.2 ($x \ge 0$).

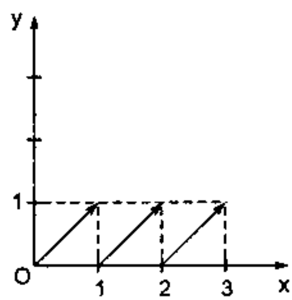
7) $y = x - E(x)$ có đồ thị như hình 2.3 ($x \ge 0$).



Hình 2.1



Hình 2.2



Hình 2.3

➤ *Chú ý :* Một hàm số cũng có thể được cho bằng đồ thị của nó, khi đó mỗi điểm của đồ thị sẽ cho cách tương ứng giữa $x \in X$ và $y \in Y$.

3. Hàm số ngược

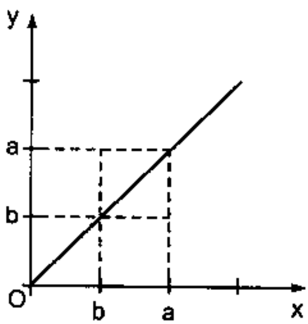
Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định là X và miền giá trị là Y, theo định nghĩa thì f là một ánh xạ từ X lên Y, nếu f có ánh xạ ngược f^{-1}, $x = f^{-1}(y)$ thì f^{-1} gọi là hàm số ngược của f. Khi đó hàm số ngược f^{-1} sẽ có miền xác định là Y và miền giá trị là X.

Nếu đồ thị của $y = f(x)$ và $x = f^{-1}(y)$ trong cùng một hệ trục tọa độ xOy thì đồ thị của chúng như nhau vì cùng xác định bằng một cách tương ứng.

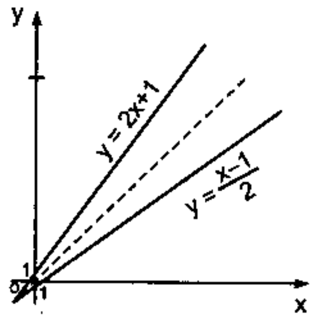
Nhưng cần phân biệt : giá trị của $y = f(x)$ được biểu diễn trên trục Oy và giá trị của $x = f^{-1}(y)$ được biểu diễn trên trục Ox.

Trong thực tế, người ta thường biểu diễn giá trị của f và f^{-1} trên cùng một trục Oy, khi đó hàm ngược phải đổi ký hiệu lại là $y = f^{-1}(x)$ và đồ thị của $y = f^{-1}(x)$ sẽ đối xứng với đồ thị của $y = f(x)$ qua đường phân giác của góc tọa độ thứ nhất, vì xét một điểm bất kỳ M(a,b) trên đồ thị của $y = f(x)$ thì $b = f(a)$, suy ra $a = f^{-1}(b)$ nghĩa là điểm M'(b, a) trên đồ thị của $y = f^{-1}(x)$, rõ ràng M và M' đối xứng nhau qua đường phân giác của góc tọa độ thứ nhất (hình 2.4).

(Lấy đơn vị trên các trục như nhau.)



Hình 2.4

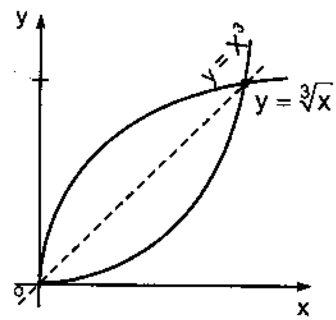


Hình 2.5

Ví dụ :

1) $y = 2x + 1$ có hàm số ngược là $x = \frac{y-1}{2}$, đổi lại ký hiệu ta có $y = \frac{x-1}{2}$ (hình 2.5).

2) $y = x^3$ có hàm ngược là $x = \sqrt[3]{y}$, đổi lại ký hiệu $y = \sqrt[3]{x}$ (hình 2.6, với $x \geq 0$).



Hình 2.6

4. Hàm số hợp

Cho hàm số $y = f(x)$ có miền xác định là X, miền giá trị là Y và hàm $g(y)$ có miền xác định là Y, miền giá trị là Z, ta gọi ánh xạ hợp của f và g : (gof), $(gof)(x) = g[f(x)]$ là một hàm hợp của các hàm f, g hay là hàm kép của biến độc lập x qua biến trung gian y.

Rõ ràng hàm hợp $z = (gof)(x)$ có miền xác định là X và miền giá trị là Z.

Ví dụ : $y = 5x + 2$ có $X = R$, $Y = R$

$z = \sin y$ có $Y = R$, $Z = [-1,1]$

Vậy hàm hợp $z = \sin(5x + 2)$ có $X = R$, $Z = [-1,1]$.

➤ *Chú ý :*

1) Nếu miền giá trị của f là Y và miền xác định của g là Y_1 thì khi $Y \subset Y_1$ ta mới lập được hàm số hợp (gof).

Ví dụ : $y = x^2$, $z = \sqrt{-\frac{1}{y}}$; ta có $Y = [0, +\infty]$

$Y_1 = (-\infty, 0)$, do đó không lập được hàm hợp, điều này cũng rõ khi thay $y = x^2$ ta có :

$$Z = \sqrt{-\frac{1}{x^2}} \text{ không có nghĩa.}$$

2) Có thể lập được hàm hợp của nhiều hàm số.

1.2. Một số hàm đặc biệt

1. Hàm bị chặn

Cho hàm $y = f(x)$ có miền xác định là X, miền giá trị là Y, $f(x)$ gọi là bị chặn trên (dưới, bị chặn) trong X nếu miền giá trị Y của nó là một tập hợp bị chặn trên (dưới, bị chặn) nghĩa là :

$$\exists c \in R\ \forall x \in X,\ f(x) \leq c,\ (f(x) \geq c,\ |f(x)| \leq c,\ c > 0)$$

Ví dụ :

$f(x) = \sin x$ trong $X = [0, 2\pi]$ là bị chặn trong X, ($|\sin x| \leq 1$),

$f(x) = x - E(x)$ trong $X = [0,1]$, f là bị chặn trong X.

2. Hàm đơn điệu

Cho hàm $y = f(x)$ trong miền X, $f(x)$ gọi là đơn điệu không giảm (không tăng) trong X nếu :

$\forall\ x_1, x_2 \in X,\ x_1 < x_2\ f(x_1) \leq f(x_2)\ (f(x_1) \geq f(x_2))$

Trường hợp không có dấu =, $f(x)$ gọi là đơn điệu tăng (giảm) trong X. Các hàm trên gọi là các hàm đơn điệu.

Ví dụ :

1) $Y = x^2$ là đơn điệu giảm trong $(-\infty, 0)$ và đơn điệu tăng trong $(0, +\infty)$

2) $y = E(x)$ là đơn điệu không giảm trong $(-\infty, +\infty)$

Từ định nghĩa suy ra :

Định lý : *Nếu f(x) là đơn điệu tăng (giảm) trong miền X, và có miền giá trị Y, thì f tồn tại hàm ngược f^{-1} đơn điệu tăng (giảm) trong Y.*

Thực vậy xét f(x) đơn điệu tăng (đơn điệu giảm lý luận tương tự).

Theo định nghĩa $\forall\ x_1, x_2,\ x_1 < x_2 : f(x_1) < f(x_2)$

$f(x_1), f(x_2) \in Y$ do đó $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$ nghĩa là f(x) là một ánh xạ 1–1 từ X lên Y, do đó tồn tại ánh xạ ngược f^{-1} của f từ Y lên X nghĩa là tồn tại hàm ngược $x = f^{-1}(y)$ có miền xác định Y và miền giá trị X. Rõ ràng $f^{-1}(y)$ là đơn điệu tăng. Thật vậy, giả sử $y_1 < y_2$ và $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$.

Theo định nghĩa thì $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ nếu $x_1 \geq x_2$, do f(x) là đơn điệu tăng nên $f(x_1) \geq f(x_2)$ tức là $y_1 \geq y_2$, trái với giả thiết. Vậy $z_1 < x_2$ nghĩa là :

$x = f^{-1}(y)$ là đơn điệu tăng trong Y.

3. Hàm số chẵn, lẻ

Cho hàm f xác định trong miền X đối xứng với gốc O.

f(x) gọi là chẵn (lẻ) nếu :

$$\forall\, x \in X,\ f(-x) = f(x)\ (f(-x) = -f(x))$$

Rõ ràng là đồ thị của hàm số chẵn (lẻ) đối xứng qua trục Oy (gốc tọa độ).

Ví dụ :

1) $f(x) = x^2$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = |x|$ là các hàm chẵn.

2) $f(x) = x^3$, $f(x) = \mathrm{tg}x$ là các hàm lẻ.

Rõ ràng rằng mọi hàm f(x), xác định trong miền X có thể viết thành tổng của một hàm chẵn và một hàm lẻ :

$$f(x) = F(x) + G(x)$$

$$F(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad G(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Như vậy F(x) là hàm chẵn và G(x) là hàm lẻ.

4. Hàm tuần hoàn

Cho hàm f(x) xác định trên miền X, f(x) gọi là hàm tuần hoàn nếu $\exists a \in R$, $a \neq 0$ (a = const)

$$\forall x \in X : f(x) = f(x + a)$$

Suy ra : $f(x + 2a) = f(x + a) = f(x)$

Tổng quát :

$$f(x + ka) = f(x) \qquad k \in Z$$

Số dương $T > 0$ nhỏ nhất sao cho $f(x + T) = f(x)$ gọi là chu kỳ của $f(x)$.

Theo định nghĩa, muốn xét sự tuần hoàn của $f(x)$ ta giải phương trình $f(x + a) = f(x)$, nếu tìm được $a \neq 0$ không phụ thuộc x thì $f(x)$ tuần hoàn và chu kỳ T của $f(x)$ được xác định bởi hệ thức $a = kT$, $k \in Z$.

Ví dụ :

1) Xét $f(x) = \sin\alpha x$

Giải : $\sin\alpha(x + a) = \sin\alpha x$. Ta có $\alpha(x + a) = \alpha x + 2k\pi$, $a = \dfrac{2k\pi}{\alpha}$

Vậy $f(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ $T = \dfrac{2\pi}{|\alpha|}$.

2) Xét $f(x) = x - E(x)$

Giải : $x - E(x) = (x + a) - E(x + a)$, ta có :

$$a = E(x + a) - E(x) = k, \qquad k \in Z$$

Vậy $f(x)$ là hàm tuần hoàn có chu kỳ $T = 1$.

3) Xét $f(x) = x^2$

Giải : $(x + a)^2 = x^2$, ta có : $a = 0$ và $a = -2x$

Vậy không có $a \neq 0$, không phụ thuộc x nên hàm không tuần hoàn.

II – MA TRẬN

2.1. Mở đầu

Các ma trận được dùng suốt trong toán học rời rạc để biểu diễn mối quan hệ giữa các phần tử trong một tập hợp và trong một số rất lớn các mô hình. Ví dụ, các ma trận sẽ được dùng trong các mạng thông tin và các hệ thống giao thông vận tải, trong đồ thị. Nhiều thuật toán sẽ được phát triển để dùng các mô hình ma trận đó.

ĐỊNH NGHĨA 1 : *Ma trận là một bảng số hình chữ nhật. Một ma trận có m hàng và n cột được gọi là ma trận m x n. Một ma trận có số hàng bằng số cột được gọi là một ma trận vuông. Hai ma trận là bằng nhau nếu chúng có cùng số hàng, số cột và các phần tử tương ứng ở tất cả các vị trí đều bằng nhau.*

Ví dụ 1 : Ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

là ma trận 3 x 2.

Bây giờ chúng ta sẽ đưa ra một số thuật ngữ về ma trận. Các chữ cái hoa và đậm sẽ được dùng để ký hiệu các ma trận.

ĐỊNH NGHĨA 2 : Cho

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Hàng thứ i của A là ma trận $1 \times n$ $[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$

Cột thứ j của A là ma trận $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}$$

Phần tử thứ (i, j) của A là phần tử a_{ij}, tức là số nằm ở hàng thứ i và cột thứ j của A. Một ký hiệu ngắn gọn và thuận tiện của ma trận A là viết $A = [a_{ij}]$, ký hiệu đó cho biết A là một ma trận có phần tử thứ (i, j) là a_{ij}.

2.2. Số học ma trận

Bây giờ chúng ta sẽ xét các phép toán cơ bản của số học ma trận, bắt đầu bằng định nghĩa phép cộng các ma trận.

ĐỊNH NGHĨA 3 : *Cho $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ là các ma trận m x n. Tổng của A và B được ký hiệu là A + B là ma trận m x n có phần tử thứ (i, j) là $a_{ij} + b_{ij}$. Nói cách khác, $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$.*

Tổng của hai ma trận có cùng kích thước nhận được bằng cách cộng các phần tử ở những vị trí tương ứng. Các ma trận có kích thước khác nhau không thể cộng được với nhau, vì tổng của hai ma trận chỉ được xác định khi cả hai ma trận có cùng số hàng và cùng số cột.

Ví dụ 2. Ta có

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Bây giờ chúng ta sẽ xét phép nhân các ma trận. Tích của hai ma trận chỉ được xác định khi số cột của ma trận thứ nhất bằng số hàng của ma trận thứ hai.

ĐỊNH NGHĨA 4 : *Cho A là ma trận $m \times k$ và B là ma trận $k \times n$. Tích của A và B được ký hiệu là AB, là ma trận $m \times n$ với phần tử thứ (i, j) bằng tổng các tích của các phần tử tương ứng từ hàng thứ i của A và cột thứ j của B. Nói cách khác, nếu $AB = [c_{ij}]$, thì*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} = \sum_{t=1}^{k} a_{it}b_{tj}$$

Trong hình 2.7 hàng tô đậm của A và cột tô đậm của B được dùng để tính phần tử c_{ij} của AB. Tích của hai ma trận không xác định khi số hàng của ma trận thứ nhất và số cột của ma trận thứ hai không như nhau.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{i1}} & \mathbf{a_{i2}} & \cdots & \mathbf{a_{ik}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & \mathbf{b_{1j}} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & \mathbf{b_{2j}} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & \mathbf{b_{kj}} & \cdots & b_{kn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \mathbf{C_{ij}} & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Hình 2.7. Tích của $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$

Dưới đây là một số ví dụ về tích hai ma trận.

Ví dụ 3. Cho

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Tìm AB.

Giải : Vì A là ma trận 4×3 và B là ma trận 3×2 nên tích của AB là xác định và là ma trận 4×2. Để tìm các phần tử của AB, các phần tử tương ứng của các hàng của A và các cột của B ban đầu được nhân với nhau rồi sau đó các tích đó sẽ được cộng lại. Ví dụ, phần tử ở vị trí (3,1) của AB là tổng các tích của các phần tử ở hàng thứ ba của A và cột thứ nhất của B, cụ thể là $3.2 + 1.1 + 0.3 = 7$. Khi tất cả các phần tử của AB đã được :

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 8 & 9 \\ 7 & 13 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

Phép nhân ma trận không có tính chất giao hoán. Tức là, nếu A và B là hai ma trận, thì không nhất thiết AB phải bằng BA. Thực tế có thể chỉ một trong hai tích đó là xác định. Ví dụ, nếu A là ma trận 2×3 và B là ma trận 3×4, khi đó AB là xác định và là ma trận 2×4, tuy nhiên ma trận BA là không xác định vì không thể nhân ma trận 3×4 với ma trận 2×3.

Giả sử A là ma trận $m \times n$ và B là ma trận $r \times s$. Khi đó AB là xác định chỉ khi $n = r$ và BA là xác định chỉ khi $s = m$. Hơn nữa, khi AB và BA đều xác định, thì chúng cũng sẽ không cùng kích thước trừ trường hợp $m = n = r = s$. Do đó, nếu cả hai AB và BA xác định và có cùng kích thước thì cả A và B đều phải là các ma trận vuông và có cùng kích thước. Thậm chí nếu cả A và B đều là các ma trận $n \times n$, thì AB và BA cũng không nhất thiết phải bằng nhau, như ví dụ dưới đây cho thấy :

Ví dụ 4. Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Hỏi AB có bằng BA không ?

Giải : Ta tìm được

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad BA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Vậy : $AB \neq BA$

2.3. Các thuật toán nhân ma trận

Định nghĩa của tích hai ma trận dẫn tới thuật toán tính tích của hai ma trận. Giả sử rằng $C = [c_{ij}]$ là ma trận $m \times n$,là tích của ma trận $m \times k$ $A = [a_{ij}]$ và ma trận $k \times n$ $B = [b_{ij}]$. Thuật toán dựa trên định nghĩa nhân ma trận được biểu diễn dưới dạng giải mã như sau :

ALGORITHM 1. Nhân ma trận

Procedure nhân ma trận (A, B : ma trận)

For i :=1 *to* m

Begin

for j :=1 *to* n

Begin

$c_{ij} := 0$

For q :=1 *to* k

$c_{ij} := c_{ij} + a_{iq}b_{qj}$

End

End {$C = [c_{ij}]$ là tích của A và B}

Bây giờ chúng ta sẽ xác định độ phức tạp của thuật toán này qua số các phép nhân và phép cộng được dùng.

Ví dụ 5. Có bao nhiêu phép cộng và phép nhân các số nguyên được dùng trong Algorithm 1 để nhân hai ma trận có các số phần tử là các số nguyên ?

Giải : Trong tích A và B có n^2 phần tử. Để tìm mỗi phần tử đòi hỏi n phép nhân và n phép cộng. Vậy tổng cộng có n^3 phép nhân và n^3 phép cộng được sử dụng.

2.4. Chuyển vị và lũy thừa các ma trận

Bây giờ chúng ta đưa vào một ma trận quan trọng có các phần tử chỉ là 0 và 1.

ĐỊNH NGHĨA 5 : *Ma trận đồng nhất (hay còn gọi là ma trận đơn vị) bậc n là ma trận* $n \times n$ $I_n = [\delta_{ij}]$ *; với* $\delta_{ij} = 1$ *nếu* $i = j$ *và* $\delta_{ij} = 0$ *nếu* $i \neq j$. *Do đó :*

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Nhân một ma trận với ma trận đơn vị kích thước thích hợp không làm thay đổi ma trận đó. Nói cách khác, khi A là ma trận $m \times n$, ta có :

$$AI_n = I_mA = A$$

Người ta cũng có thể định nghĩa lũy thừa của các ma trận vuông khi A là một ma trận n x n, ta có :

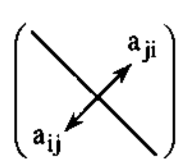
$$A^0 = I_n \quad , \quad A^n = \underbrace{AAAAA\cdots A}_{n\text{ lần}}$$

Phép toán chuyển hàng thành cột và cột thành hàng của một ma trận vuông cũng được sử dụng trong nhiều thuật toán.

ĐỊNH NGHĨA 6 : *Cho* $A = [a_{ij}]$ *là ma trận cấp* $m \times n$. *Chuyển vị của A được ký hiệu là* A^t, *là ma trận* $n \times m$ *nhận được bằng cách trao đổi các hàng và cột của ma trận A cho nhau. Nói cách khác, nếu* $A^t = [b_{ij}]$ *thì* $b_{ij} = a_{ji}$ *với* $i = 1, 2, \ldots, m$.

Ví dụ 6. Chuyển vị của ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ là ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

Các ma trận không đổi khi trao đổi các hàng và cột của nó cho nhau thường đóng vai trò quan trọng.



Hình 2.8. Ma trận đối xứng

ĐỊNH NGHĨA 7 : *Một ma trận vuông A được gọi là đối xứng nếu* $A = A^t$. *Như vậy* $A = [a_{ij}]$ *là đối xứng nếu* $a_{ij} = a_{ji}$ *với mọi i và j ;* $0 \leq i \leq n$ *và* $0 \leq j \leq n$.

Chú ý rằng một ma trận là đối xứng nếu và chỉ nếu nó là ma trận vuông và đối xứng qua đường chéo chính của nó. Phép đối xứng này được minh họa trên hình 2.8.

Ví dụ 7. Ma trận $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ là đối xứng.

2.5. Các ma trận 0 – 1 (không - một)

Các ma trận có các phần tử là 0 hoặc 1 được gọi là các ma trận không – một. Các ma trận không – một thường được dùng để biểu diễn các cấu trúc rời rạc. Các thuật toán dùng các cấu trúc này dựa trên số học Boole cho các ma trận không – một. Số học này lại dựa trên các phép toán Boole $\wedge$ và $\vee$ thực hiện trên các cặp bit và được định nghĩa bởi :

$$b_1 \wedge b_2 = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad b_1 = b_2 = 1 \\ 0 & \text{các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

$$b_1 \vee b_2 = \begin{cases} 1 & \text{nếu} \quad b_1 = 0 \quad \text{và} \quad b_2 = 0 \\ 0 & \text{các trường hợp còn lại} \end{cases}$$

ĐỊNH NGHĨA 8 : *Cho $A = [a_{ij}]$ và $B = [b_{ij}]$ là các ma trận không – một $m \times n$. Khi đó hợp của A và B, được ký hiệu là $A \vee B$ là ma trận không – một với phần tử ở vị trí (i,j) là $a_{ij} \vee b_{ij}$. Giao của A và B được ký hiệu là $A \wedge B$, là ma trận không – một với phần tử ở vị trí (i, j) là $a_{ij} \wedge b_{ij}$.*

Ví dụ 8. Tìm hợp và giao của các ma trận không – một sau :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Giải : Hợp của A và B là :

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 0 \vee 1 & 1 \vee 0 \\ 0 \vee 1 & 1 \vee 1 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Giao của A và B là :

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 1 \wedge 0 & 0 \wedge 1 & 1 \wedge 0 \\ 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 & 0 \wedge 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Bây giờ ta định nghĩa tích Boole của hai ma trận.

ĐỊNH NGHĨA 9 : *Cho $A = [a_{ij}]$ là ma trận không – một $m \times k$ và $B = [b_{ij}]$ là ma trận không – một $k \times n$. Khi đó tích Boole của A và B được ký hiệu là $A \odot B$ là ma trận $m \times n$ với phần tử ở vị trí (i, j) $[c_{ij}]$ là :*

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{ik} \wedge b_{kj})$$

Chú ý rằng tích Boole của A và B nhận được bằng cách tương tự với tích thông thường của hai ma trận đó, nhưng với phép cộng được thay bằng phép $\vee$ và với phép nhân được thay bằng phép $\wedge$. Dưới đây là ví dụ về tích Boole của các ma trận.

Ví dụ 9. Tìm tích Boole của A với B, với

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Giải : Tích Boole $A \odot B$ được cho bởi :

$$A \odot B = \begin{bmatrix} (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) & (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) & (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \\ 0 \vee 0 & 0 \vee 1 & 0 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 0 & 0 \vee 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Algorithm 2 dưới dạng giả mã sau đây mô tả thuật toán tính tích Boole của hai ma trận.

ALGORITHM 2. Tích Boole

Procedure tích *Boole* (A, B : các ma trận không – một)

For i :=1 *to* m

Begin

  For j :=1 *to* n

  Begin

$c_{ij} := 0$

For q :=1 *to* k

$c_{ij} := c_{ij} \vee (a_{iq} \wedge b_{qj})$

End

End {$C = [c_{ij}]$ là tích Boole của A và B}

Chúng ta cũng có thể định nghĩa lũy thừa Boole của các ma trận không – một vuông. Các lũy thừa này sẽ được dùng trong các nghiên cứu sau này về các đường trong đồ thị, các đường này được dùng, chẳng hạn để mô hình các đường liên lạc trong các mạng máy tính.

ĐỊNH NGHĨA 10 : *Cho A là ma trận không – một vuông và r là một số nguyên dương. Lũy thừa Boole bậc r của A được ký hiệu là* $A^{[r]}$ *với :*

$$A^{[r]} = \underbrace{A \odot A \odot \ldots \odot A}_{r \text{ lần}}$$

($A^{[r]}$ là hoàn toàn xác định vì tích Boole có tính chất kết hợp).

Chúng ta cũng có thể định nghĩa $A^{[0]}$ là I_n.

Ví dụ 10. Cho $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Tìm $A^{[n]}$ với mọi n nguyên dương.

Giải : Ta thấy ngay rằng :

$$A^{[2]} = A \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ta cũng tìm được :

$$A^{[3]} = A^{[2]} \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad A^{[4]} = A^{[3]} \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tính thêm một lần nữa, ta được :

$$A^{[5]} = A^{[4]} \odot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Độc giả bây giờ có thể thấy rằng $A^{[n]} = A^{[5]}$ với mọi n nguyên dương không nhỏ hơn 5.

Số các phép toán bit được dùng để tìm tích Boole của hai ma trận $n \times n$ cũng dễ dàng xác định được.

Ví dụ 11. Có bao nhiêu phép toán bit được dùng để tính $A \odot B$ với A, B là các ma trận không – một $n \times n$.

Giải : Có n^2 phần tử trong $A \odot B$.

III – LỰC LƯỢNG CỦA TẬP HỢP

3.1. Khái niệm

Khái niệm *"lực lượng"* (power) là sự trừu xuất hóa của khái niệm số lượng thông thường của các tập hữu hạn. Rõ ràng mỗi tập hợp hữu hạn gồm n phần tử được đánh số bởi n số nguyên dương 1, 2, 3, ..., n.

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Thực chất việc đánh số hay việc đếm số phần tử là sự thiết lập một song ánh f từ tập n số tự nhiên $I = \{1, 2, ..., n\}$. Nhận xét đó giúp ta đưa vào khái niệm lực lượng của một tập hợp bất kỳ.

ĐỊNH NGHĨA 1 : *Cho hai tập hợp A và B khác $\varnothing$ (hữu hạn hoặc vô hạn). Nếu tồn tại một song ánh $f : A \to B$ thì ta nói A và B "đồng lực lượng".*

Rõ ràng hai tập hữu hạn đồng lực lượng khi và chỉ khi chúng có cùng số phần tử.

Nếu A và B đồng lực lượng, ta nói A tương đương với B và viết $A \sim B$.

Để thấy $A \sim A$, nếu $A \sim B$ thì $B \sim A$ và từ $A \sim B \sim C$ kéo theo $A \sim C$. Do vậy, ~ thỏa mãn các định nghĩa của quan hệ tương đương.

ĐỊNH NGHĨA 2 : *Mỗi tập A tương đương với tập $N^* = \{1, 2, 3 ...\}$ gọi là có lực lượng* "đếm được". *Lực lượng đếm được biểu thị bởi ký hiệu a hoặc $\aleph_0$.*

Mọi phần tử của một tập đếm được có thể liệt kê thành dãy vô hạn : a_1, a_2, ...a_n, ... và ngược lại.

Từ đó dễ dàng suy ra :

a) Tập hợp mọi số tự nhiên N = {1, 2, ..., n, ...} là đếm được.

b) Tập hợp mọi số tự nhiên chẵn là đếm được, song ánh f giữa N* và tập này được xác định bởi :

$$n \leftrightarrow 2n$$

c) Tập hợp mọi số tự nhiên lẻ là đếm được, song ánh f giữa N* và tập này được xác định bởi :

$$n \leftrightarrow 2n + 1$$

d) Tập hợp mọi số nguyên âm là đếm được, song ánh f giữa N* và tập này được xác định bởi :

$$n \leftrightarrow -n$$

Ta nhận thấy, qua các ví dụ trên một tập hợp vô hạn có thể tương đương với một tập con thực sự nào đó của nó. Tính chất này là đặc trưng của các tập vô hạn.

3.2. Các tính chất của các tập đếm được

a) Nếu thêm hoặc bớt đi một số hữu hạn phần tử từ một tập đếm được ta lại có một tập đếm được.

Thật vậy, chỉ cần đánh số lại các phần tử của tập mới bởi dãy số tự nhiên N*.

b) Hợp của hai hay một số hữu hạn các tập đếm được lại là tập đếm được. Chỉ cần chứng minh cho hai tập.

Giả sử $A = \{a_1, a_2, ...\}$, $B = \{b_1, b_2, ...\}$ là hai tập đếm được. Kê các phần tử của $A \cup B$ thành dạng $a_1, b_1, a_2, b_2, ...$ rồi đánh số lại mỗi phần tử theo vị trí của chúng trong dãy tạo thành, ta được điều phải chứng minh (các phần tử trùng nhau tính một lần).

Ví dụ : Tập hợp Z mọi số nguyên là đếm được vì Z là hợp của tập N các số tự nhiên và tập N^- các số nguyên âm.

c) Hợp của dãy đếm được các tập đếm được là tập đếm được.

Giả sử cho dãy tập $\{A_k\}$, $k \in N^*$

$$A_1 = \{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}, ...\}$$
$$A_2 = \{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n}, ...\}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$A_k = \{a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn}, ...\}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

Có thể kê mọi phần tử của $\bigcup_{k\in N} A_k$ thành dãy theo nhiều cách khác nhau, chẳng hạn xếp theo thứ tự từ nhỏ tới lớn của tổng các chỉ số i + j của các phần tử a_{ij} :

$$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{31}, a_{22}, a_{13}\dots$$

Hệ quả 1 : Tập hợp mọi số hữu tỷ là tập đếm được. Mỗi số hữu tỷ đều có dạng $r = \frac{p}{q}$, trong đó p và q là các số nguyên, $q \neq 0$.

Có thể biểu diễn tập Q mọi số hữu tỷ là hợp đếm được các tập đếm được Q_k, với :

$$Q_k = \left\{\frac{p}{k},\ \ k \in N^*\right\}$$

Ta có : $$Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

Vì mỗi tập Q_k với k cố định là đếm được nên theo tính chất c, Q là tập đếm được.

Hệ quả 2 : Tích Descartes của hai hoặc một số hữu hạn các tập đếm được là đếm được.

Thật vậy, giả sử :

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_i, \dots\}$$

là hai tập đếm được.

Gọi $D = A \times B$, thì D là hợp đếm được, $D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$ trong đó

$$D_i = \{(a_i, b_j) \text{ với } j \in N^*\}.$$

Với mỗi i cố định, tập D_i là hợp đếm được, do đó tích Descartes D đếm được.

Nếu A và B là tập các số hữu tỷ thì với cách nói hình học, tập hợp mọi điểm của mặt phẳng R^2 có tọa độ hữu tỷ là tập đếm được.

3.3. Lực lượng continum

Trong phần trên ta đã gặp các tập đếm được, nghĩa là các tập đồng lực lượng với tập mọi số tự nhiên. Phát sinh câu hỏi : tồn tại hay không các tập vô hạn có lực lượng không đếm được ? Định lý sau cho câu trả lời khẳng định.

Định lý 1. (G.Cantor)

Tập hợp mọi điểm của đoạn thẳng [0 ; 1] có lực lượng không đếm được.

Có thể chúng minh định lý này nhờ nguyên lý *"dãy đoạn thắt"* của Borel hoặc dựa vào sự biểu diễn mỗi số thực thành phân số thập phân vô hạn.

Lực lượng của tập này (và của các tập đồng lực lượng với nó) gọi là *lực lượng continum* ký hiệu c.

Bằng phương pháp thiết lập các song ánh thích hợp có thể chứng minh rằng tập hợp các điểm của đoạn [a,b] của khoảng (a,b) của toàn bộ đường thẳng thực đều có lực lượng continum.

Định lý sau cho thấy tồn tại các tập có lực lượng cao hơn lực lượng c.

Định lý 2. *Cho X là một tập hợp tùy ý, thế thì tập $\mathcal{P}(X)$ gồm mọi phần tử của X có lực lượng lớn hơn lực lượng của X.*

Nói riêng khi X là tập hữu hạn gồm n phần tử thì nhờ công thức Newton dễ thấy số phần tử của $\mathcal{P}(X)$ sẽ là 2^n.

Định lý trên cho thấy với bất kỳ tập nào có lực lượng cho trước luôn tồn tại các tập có lực lượng lớn hơn, nói cách khác "thang đo lực lượng" là vô tận.

IV – THUẬT TOÁN VÀ ĐỘ PHỨC TẠP CỦA THUẬT TOÁN

Nội dung của phần này là nêu ra một ý nghĩa chính xác cho các từ "thuật toán hiệu quả", cho khái niệm "dễ" và "khó" của các bài toán tối ưu hoá. Đó là lý thuyết về "độ phức tạp của các thuật toán" được phát triển trong vài chục năm gần đây theo các công trình của Cook và Karp. Tư tưởng của việc đặc trưng cho các thuật toán hiệu quả được J.Ednonds đề ra năm 1965. Người ta nói rằng một thuật toán là "hiệu quả" (hay là "tốt") nếu con số các phép toán để giải bài toán được chặn bởi một hàm đa thức của một thông số đặc trưng cho kích thước của bài toán.

4.1. Thuật toán

1. Khái niệm thuật toán

ĐỊNH NGHĨA 1 : *Một thuật toán để giải một bài toán (P) đã cho là một thủ tục, chia ra thành các phép toán cơ bản, biến đổi một dãy các dấu hiệu diễn tả các dữ liệu (không quan trọng ở chỗ thuộc bản chất gì) của bài toán (P) thành một dãy các dấu hiệu đặc trưng cho các kết quả của (P).*

2. Mô tả thuật toán

Có nhiều cách mô tả thuật toán : dùng ngôn ngữ tự nhiên, ngôn ngữ lưu đồ (sơ đồ khối), ngôn ngữ lập trình, ngôn ngữ phỏng trình. Trong giáo trình này các thuật toán được trình bày bằng ngôn ngữ phỏng Pascal, trong đó cho phép vừa mô tả thuật toán bằng ngôn ngữ đời thường, vừa sử dụng những cấu trúc lệnh tương tự như của ngôn ngữ lập trình Pascal. Sau đây ta liệt kê một số câu lệnh chính được sử dụng để mô tả thuật toán :

– Câu lệnh procedure (hay function) : thuật toán được mô tả trong ngôn ngữ phỏng trình Pascal được bắt đầu bằng câu lệnh procedure (hay function), sau đó là tên thuật toán, danh sách các biến của thuật toán.

Chẳng hạn câu lệnh function nguyen_to(m) ; cho biết tên thuật toán được mô tả là nguyen_to và biến là m. Còn câu lệnh procedure max(a,b,c) cho biết tên thuật toán được mô tả là max và 3 biến là a, b, c.

Các bước của thuật toán được mô tả trong thân procedure (function) được bắt đầu bằng begin và kết thúc bằng end.

Ví dụ :

```
Function nguyen_to(m) ;
        Begin
                (thân function)
        End ;
procedure max(a,b,c) ;
        Begin
                (thân procedure)
        end ;
```

Khi mô tả thuật toán bắt đầu bằng function, khi kết thúc làm việc thuật toán đưa giá trị được ghi nhận trong tên hàm cho nên trong thân hàm phải có mặt câu lệnh gán giá trị cho hàm.

– *Câu lệnh gán :* dùng để gán giá trị của một biểu thức cho một biến. Cách viết :

Tên biến := biểu thức ;

Ví dụ :

- x := (20 + 5)*2 mod 3 ;
- max := a ;

– *Khối câu lệnh :* các câu lệnh có thể nhóm lại thành một khối. Để mô tả khối câu lệnh ta sử dụng (begin...end ;). Dạng khối câu lệnh :

```
Begin
        Câu lệnh 1 ;
        Câu lệnh 2 ;
        ...
        Câu lệnh n ;
End ;
```

Các câu lệnh trong khối được thực hiện tuần tự. Sau đây, thuật ngữ câu lệnh được dùng để chỉ chung một câu lệnh cũng như một khối câu lệnh.

Ví dụ :

```
Begin
    t := x ;
    x := y ;
    y := t ;
End
```

Ví dụ này nhằm trao đổi giá trị hai biến x,y và dùng biến t như biến trung gian.

– *Câu lệnh điều kiện :* có hai dạng :

+ Dạng đơn giản : if (điều kiện) then (câu lệnh) ;

Khi lệnh này được sử dụng, điều kiện sẽ được kiểm tra, nếu nó thoả mãn câu lệnh sẽ được thực hiện.

+ Dạng đầy đủ : if (điều kiện) then (câu lệnh1) else(câu lệnh2) ;

Khi lệnh này được sử dụng, điều kiện được kiểm tra, nếu nó thoả mãn câu lệnh 1 sẽ được thực hiện. Ngược lại câu lệnh 2 được thực hiện.

– *Các câu lệnh lặp :*

+ Câu lệnh FOR :

Dạng câu lệnh : **for** *biến* := *giá trị đầu* **to** *giá trị cuối* **do** *câu lệnh ;*

Khi lệnh này được sử dụng, máy sẽ thực hiện các bước sau :

Đầu tiên *biến* lấy giá trị là *giá trị đầu*

Máy kiểm tra điều kiện : *(biến < giá trị cuối) ?*

Nếu *điều kiện* trên là sai, máy thoát ra khỏi vòng lặp **for** để thực hiện tiếp các lệnh sau **for** nếu có. Nếu điều kiện trên là đúng, *câu lệnh* được thực hiện, sau đó *biến* tăng lên 1 giá trị và trở lại bước 2.

+ Câu lệnh REPEAT :

Dạng câu lệnh : **repeat** *câu lệnh* **until** *điều kiện ;*

Khi lệnh này được sử dụng, câu lệnh được thực hiện. Nếu *điều kiện* sai thì *câu lệnh* lại được thực hiện. Việc đó tiếp diễn cho tới khi *điều kiện* là đúng.

+ Câu lệnh WHILE :

Dạng câu lệnh : **while** *điều kiện* **do** *câu lệnh ;*

Khi lệnh này được sử dụng, *điều kiện* sẽ được kiểm tra, nếu nó đúng câu lệnh được thực hiện. Nếu điều kiện vẫn đúng sau khi thực hiện *câu lệnh* thì *câu lệnh* lại được thực hiện. Việc đó tiếp diễn cho tới khi *điều kiện* là sai.

Ví dụ :

Thuật toán tìm số lớn nhất trong một dãy hữu hạn các số nguyên cho trước có thể mô tả như sau :

– Đầu vào : Dãy a gồm n số $a_1, a_2, ..., a_n$.

– Đầu ra : large là số lớn nhất trong dãy đã cho.

```
Procedure find_large(a,n,large) ;
Begin
        large := a1 ;
        for i :=2 to n do
        if ai >large then large := ai ;
End ; { large là số lớn nhất }
```

Để giải các bài toán phức tạp, ta thường phải phân nó thành các bài toán con, sau đó xây dựng các thủ tục để giải các bài toán con. Các thủ tục này sẽ được tập hợp để giải bài toán đặt ra. Ví dụ dưới đây sẽ minh hoạ ý tưởng này.

Ví dụ : Tìm và in các số nguyên tố nhỏ hơn số nguyên dương n cho trước.

Giải :

– Bước1 : Xây dựng thủ tục kiểm tra xem một số nguyên dương m có phải là số nguyên tố hay không.

– Bước 2 : Sử dụng thủ tục này ta xây dựng thuật toán giải bài toán đặt ra.

• Thuật toán kiểm tra một số nguyên dương có phải là số nguyên tố hay không.

Một số nguyên dương m là số nguyên tố nếu như tất cả các số nguyên kể từ 2 đến $\sqrt{m}$ đều không phải là ước số của m. Do đó, trong thuật toán ta thử xem nếu số dư của m chia cho tất cả các số nằm giữa 2 và $[\sqrt{m}]$ luôn khác 0 thì là số nguyên tố.

– Đầu vào : số nguyên dương m.

– Đầu ra : *true* nếu m là số nguyên tố, *false* nếu ngược lại.

```
Function nguyen_to (m) ;
Begin
        i := 2 ;
        k := trunc(sqrt(m)) ;
        while (i<=k) and (m mod i <>0) do i := i+1 ;
        nguyen_to := i>k ;
End ;
```

• Thuật toán tìm và in ra các số nguyên tố nhỏ hơn số nguyên dương n.

Thuật toán này sử dụng thuật toán nguyen_to ở trên như là thủ tục con.

– Đầu vào : số nguyên dương n.

– Đầu ra : các số nguyên tố nhỏ hơn n.

```
Procedure list_nguyen_to (n) ;
Begin
        for i := 2 to n=1 do
                if nguyen_to (i) then write (i,'') ;
End ;
```

4.2. Độ phức tạp của thuật toán

1. Khái niệm về độ phức tạp của thuật toán

Một chương trình máy tính thường được cài đặt dựa trên một thuật toán để giải bài toán hay vấn đề đặt ra. Một đòi hỏi đương nhiên là thuật toán phải đúng. Tuy nhiên ngay cả khi thuật toán đúng, chương trình vẫn có thể không sử dụng được đối với một số dữ liệu nhập nào đó bởi vì thời gian cần thiết để chạy chương trình hay vùng nhớ cần thiết để lưu trữ dữ liệu (như các biến trong chương trình, các file lưu trữ,...) quá lớn.

Để đo tính hiệu quả của một thuật toán đã cho, ta thiết lập một mối quan hệ giữa thời gian tiến hành thuật toán, được diễn tả bởi số phép toán cơ bản với kích thước của ví dụ đang xét và được diễn tả bởi số các dấu hiệu cần thiết để mã hoá các dữ liệu của ví dụ. Có 3 câu hỏi được đặt ra :

1) Những phép toán cơ bản ta đang nói đến là những phép toán nào ?

2) Bộ mã hoá nào của các dữ liệu cho phép ta đo kích thước của bài toán ?

3) Những hàm nào liên kết kích thước với số các phép toán cơ bản mà có thể giúp ta nói rằng một thuật toán là hiệu quả ?

Có thể coi rằng việc trả lời cho câu hỏi thứ ba cho phép trả lời hai câu hỏi đầu.

Thời gian của một thuật toán là hàm của dữ liệu đầu vào. Thông thường khó có thể xây dựng công thức dưới dạng hiện cho của hàm này, vì vậy ta đặt vấn đề đơn giản hơn. Thay vì làm việc với dữ liệu đầu vào, ta sẽ làm việc với một đặc trưng quan trọng của dữ liệu đầu vào, đó là kích thước của nó. Chúng ta sẽ quan tâm đến :

– Thời gian tính tốt nhất của thuật toán với đầu vào kích thước n, đó là thời gian tối thiểu cần thiết để thực hiện thuật toán.

– Thời gian tính tồi nhất của thuật toán với đầu vào kích thước n, đó là thời gian nhiều nhất cần thiết để thực hiện thuật toán.

– Thời gian tính trung bình của thuật toán, đó là thời gian trung bình cần thiết để thực hiện thuật toán trên tập hữu hạn các đầu vào kích thước n.

Ví dụ : Xét thuật toán tìm số lớn nhất trong dãy số n số a_1, a_2,..., a_n. Có thể coi kích thước nhập dữ liệu là số lượng phần tử của dãy số, tức n.

Trong thuật toán mỗi số hạng của dãy dùng 2 phép so sánh : một là xác định chưa đặt tới cuối dãy số, hai là xác định có phải nhận giá trị lớn nhất tạm thời hay không. Việc so sánh này được dùng cho mỗi phần tử a_i trong dãy từ phần tử thứ 2 trở đi (i = 2, 3, ..., n). Sau đó là phép so sánh để ra khỏi vòng lặp, nên số phép so sánh cần dùng tất cả là 2(n − 1) + 1 = 2n − 1, vòng lặp trong thuật toán luôn thực hiện đúng n − 1 lần. Do đó, nếu coi mỗi phép so sánh đòi hỏi một đơn vị thời gian (giây chẳng hạn) thì tất cả thời gian tính tốt nhất, tồi nhất cũng như trung bình của thuật toán đều là 2n − 1 giây.

2. Đánh giá thời gian tính tốt nhất, tồi nhất và trung bình của một thuật toán

Thông thường trong các ứng dụng thực tế, thời gian chính xác mà thuật toán đòi hỏi để thực hiện nó ít được quan tâm hơn so với việc xác định mức độ tăng lên của thời gian thực hiện thuật toán khi kích thước của dữ liệu đầu vào tăng lên. Chẳng hạn một thuật toán đang được xem xét nào đó có thời gian tính trong trường hợp tồi nhất là :

$t(n) = 30n^2 + 6n + 6$ với đầu vào kích thước n.

n	$t(n) = 30n^2 + 6n + 6$	$30n^2$
10	3066	3000
100	300606	300000
1000	30006006	30000000
10000	3000060006	3000000000

Khi n lớn thì ta có thể lấy xấp xỉ T(n) với $30n^2$ .Trong trường hợp này T(n) có tốc độ tăng giống như $30n^2$.

Nếu t(n) được tính bằng giây, thì $T(n) = 0.5n^2 + 0.1n + 0.1$ sẽ cho ta thời gian tính đo bằng phút. Khi mô tả tốc độ tăng thời gian tính của thuật toán khi kích thước đầu vào tăng ta chỉ quan tâm đến số hạng trội ($30n^2$), có thể bỏ qua các hằng số.

Với giả thiết như vậy, thời gian tính T(n) tăng giống như n^2 khi n tăng. Việt làm ở đây là thay thế biểu thức $T(n) = 0.5n^2 + 0.1n + 0.1$ bởi n^2 có cùng tốc độ tăng với T(n). Ta đi đến định nghĩa sau :

ĐỊNH NGHĨA 2 : *Giả sử f và g là các hàm đối số nguyên dương.*

• *Ta nói f(n) có bậc không quá g(n), ký hiệu f(n) = O(g(n)), nếu tồn tại hằng số dương C_1 và số nguyên dương N_1 sao cho ≤ với mọi $n \geq N_1$.*

• *Ta nói f(n) có bậc ít nhất là g(n), ký hiệu $f(n) = \Omega(g(n))$, nếu tồn tại hằng số dương C_2 và số nguyên dương N_2 sao cho ≥ với mọi $n \geq N_2$.*

• *Ta nói f(n) có bậc là g(n), ký hiệu $f(n) = \theta(g(n))$, nếu $f(n) = O(g(n))$ và $f(n) = \Omega(g(n))$.*

Ví dụ : Xét hàm $f(n) = \dfrac{n(n+5)}{2}$

Do $\dfrac{n(n+5)}{2} \leq n^2$ với $n \geq 5$, ($C_1 = 1$, $N_1 = 5$) nên $f(n) = O(n_2)$.

Do $\dfrac{n(n+5)}{2} \geq n^2$ với $n \geq 1$,($C_2 = 0.5$, $N_2 = 1$) nên $f(n) = \Omega(n_2)$

Từ đó ta có $f(n) = \theta(n^2)$.

Phương pháp chứng minh trong ví dụ trên có thể sử dụng để chỉ ra rằng mọi đa thức bậc k với hệ số dương là n^k, tức là :

$$P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_1 n + a_0 = \theta(n^k)$$

ĐỊNH NGHĨA 3 :

• *Nếu thuật toán đòi hỏi thời gian tính tốt nhất là t(n) với kích thước đầu vào n và $t(n) = O(g(n))$ ta nói thời gian tính tốt nhất của thuật toán có bậc không quá g(n) hay thời gian tính tốt nhất của thuật toán là $O(g(n))$.*

• *Nếu thuật toán đòi hỏi thời gian tính tồi nhất là t(n) với kích thước đưa vào n và $t(n) = O(g(n))$ ta nói thời gian tính tồi nhất của thuật toán có bậc không quá g(n) hay thời gian tính tồi nhất của thuật toán là $O(g(n))$.*

• *Nếu thuật toán đòi hỏi thời gian tính trung bình là t(n) với kích thước đầu vào n và $t(n) = O(g(n))$ ta nói thời gian tính trung bình của thuật toán có bậc không quá g(n) hay thời gian tính trung bình của thuật toán là $O(g(n))$.*

Trong định nghĩa trên, nếu thay O bởi Ω và không quá bởi ít nhất ta có bậc ít nhất của thời gian tính tốt nhất, tồi nhất và trung bình của thuật toán. Nếu thời gian tính tốt nhất của thuật toán vừa là O(g(n)) vừa là Ω(g(n)), ta nói thời gian tính tốt nhất của thuật toán là θ(g(n)). Tương tự như vậy ta cũng định nghĩa thời gian tính tồi nhất và trung bình của thuật toán là θ(g(n)).

Cần đánh giá thời gian tính tốt nhất, tồi nhất và trung bình của thuật toán so với kích thước đầu vào n. Thời gian tính của thuật toán có thể đánh giá bởi số lần thực hiện câu lệnh trong vòng lặp repeat.

– Nếu $a_1 = x$ thì câu lệnh i :=i + 1 trong thân vòng lặp repeat thực hiện một lần. Do đó thời gian tính tốt nhất của thuật toán là $\theta(1)$.

– Nếu x không có mặt trong dãy đã cho, thì câu lệnh i :=i + 1 thực hiện n lần. Do đó thời gian tính tồi nhất của thuật toán là $\theta(n)$.

– Cuối cùng ta tìm thời gian tính trung bình của thuật toán. Nếu x tìm thấy ở vị trí thứ i của dãy ($x = a_i$) thì câu lệnh i := i + 1 phải thực hiện i lần (i = 1, 2,... n) ; nếu x không có mặt trong dãy đã cho thì câu lệnh i :=i + 1 thực hiện n lần. Từ đó suy ra số lần trung bình phải thực hiện câu lệnh i :=i + 1 là :

$$\left[(1+2+...+n)+n\right]/(n+1) \le \left(n^2+n\right)/(n+1) = n$$

Vậy thời gian tính trung bình của thuật toán là O(n).

Mặt khác, do

$$[(1+2+...+n)+n]/(n+1) \ge (n^2/4+n)/(n+1) \ge (n^2/4+n/4)/(n+1) = n/4$$

nên thời gian tính trung bình của thuật toán là $\theta(n)$.

Sau đây là tên gọi một số dạng đánh giá thông dụng :

Dạng đánh giá	**Tên gọi**
$\theta(1)$	Hằng số
$\theta(\log_2 n)$	Logarithm
$\theta(n)$	Tuyến tính
$\theta(n\log_2 n)$	n log n
$\theta(n^2)$	Bậc hai
$\theta(n^3)$	Bậc ba
$\theta(n^m)$	Đa thức
$\theta(m^n)$, $m \ge 2$	Hàm mũ
$\theta(n!)$	Giai thừa

Trong bảng, các đánh giá được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của tốc độ tăng (ngoại trừ trường hợp $\theta(n^m)$).

Bảng dưới đây cho ta thấy thời gian tính tăng như thế nào với các đánh giá khác nhau khi sử dụng đơn vị thời gian 0,001 giây (những số có đơn vị kèm theo là những số gần đúng).

Đánh giá	Thời gian tính nếu n =			
	2	8	32	64
I	0,001	0,001	0,001	0,001
$\log_2 n$	1	3	5	6
n	2	8	32	24
$n\log_2 n$	2	24	160	384
n_2	4	64	1,02 giây	4,09 giây
n_3	8	512	32,7 giây	4,36 phút
2^n	4	256	49,71 ngày	$5,85.10^8$ năm
n!	2	40,3 giây	$8,34.10^{23}$ năm	$4,02.10^{78}$ năm

4.3. Lớp P và NP

ĐỊNH NGHĨA 4 : *Một thuật toán là "đa thức" nếu số các phép toán cơ bản cần thiết để giải một ví dụ kích thước n là một hàm đa thức của n. Một thuật toán được coi là "hiệu quả" nếu và chỉ nếu nó là đa thức.*

Tính chất 1 : Lớp đa thức là đóng : Một đa thức của một hàm đa thức là một đa thức. Nói cách khác, nếu f và g là các đa thức (bằng n^p và n^q tương ứng) thì f(g(n)) là đa thức (bằng n^{pq}).

Tính chất 2 : Hàm đa thức tăng chậm hơn tất cả các hàm số mũ. Nghĩa là nếu a > 1 thì ta không tìm được b sao cho :

$$a^n < n^b \qquad \forall n$$

Tính chất 2 tỏ rõ ý nghĩa nếu ta cho nó một giải thích chất lượng. Giả sử có MTĐT với tốc độ tính toán là 10^6 phép tính/giây và với bài toán có kích thước số liệu n = 100 thì thuật toán có độ phức tạp n^3 cần sử dụng MTĐT trong 1 giây, trong khi đó thuật toán có độ phức tạp 2^n cần $1,27.10^{24}$ giây và thuật toán có độ phức tạp n! cần 10^{152} giây.

Một cách so sánh khác là nếu bộ nhớ của MTĐT tăng lên 1.000 lần thì với thuật toán có độ phức tạp n^3 người ta có thể giải bài toán có kích thước lớn hơn 10 lần, trong khi đó thuật toán có độ phức tạp 2^n thì kích thước bài toán chỉ tăng thêm được 10 số liệu (chứ không phải 10 lần !). Ví dụ giải bài toán người du lịch với 100 thành phố, nếu bộ nhớ của MTĐT tăng 1.000 lần thì bằng thuật toán có độ phức tạp n^3 ta có thể giải được bài toán với 1.000 thành phố, trong khi đó bằng thuật toán có độ phức tạp 2^n thì ta chỉ giải được bài toán với 110 thành phố.

➤ *Chú ý :* Để tính số phép toán cần thiết giải một trường hợp của bài toán đã cho, người ta có thể tính những phép toán lớn cơ bản (4 phép toán, các so sánh...). Nhưng chú ý tới tính chất 1 ở trên người ta có thể tính số phép toán cơ sở của MTĐT đang sử dụng hoặc là các phép toán của một máy trạng thái (máy Turing) tương ứng vì rằng số các phép toán này là hàm đa thức của số các phép toán kia.

ĐỊNH NGHĨA 4 : *Một phép mã hoá các dữ liệu sẽ được coi là "cho phép" nếu những con số không mã hoá dưới dạng đơn nhất, nghĩa là nếu phần ô nhớ để bảo quản số nguyên dương N bằng [log(N +1)] trong đó [x] là để chỉ số nguyên bé nhất ≥ x.*

ĐỊNH NGHĨA 5 : *Một bài toán được coi là thuộc "lớp P" nếu tồn tại một thuật toán đa thức để giải nó. Người ta nói rằng những bài toán thuộc lớp P là dễ.*

Ví dụ : Bài toán tìm đường đi ngắn nhất giữa hai thành phố A, B là bài toán dễ vì độ phức tạp của thuật toán để giải nó là $O(n^2)$ (tức là một thuật toán đa thức).

Ta sẽ xét các bài toán thuộc lớp NP.

Theo định nghĩa trên ta nêu ra ví dụ bài toán "khó". Giả sử người ta đòi hỏi xác định tất cả các con đường nối đỉnh S với đỉnh T trong mạng R = (X, U, d) và có độ dài nhỏ hơn (1 + ε) lần so với độ dài của đường đi ngắn nhất. Người ta có thể không có khả năng lập nên danh mục này trong thời gian đa thức (cách nói này có ý nghĩa tương tự với số các phép toán) vì một nguyên nhân đơn giản là danh mục này chứa một số các phần tử không đa thức (nghĩa là nó không bị chặn bởi một đa thức theo số các dữ liệu).

ĐỊNH NGHĨA 6 : *Một bài toán "nhận biết" là bài toán mà các kết quả chỉ có thể lập một trong hai giá trị tại **đúng** hay **sai**.*

Ví dụ 1 : Bài toán về sự tìm phân bố phù hợp.

Cho tập $X = \{x_1, x_2,..., x_n\}$

Các biến Booles và một biểu thức Boole đối với các số hạng của các biến này :

$$E = C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_m$$

trong đó $C_i (i = \overline{1,m})$ là một biểu thức :

$$C_i = u_{j1} \cup u_{j2} \cup \ldots \cup u_{jk(i)}$$

và trong đó mỗi u_{jq} là một trong các biến của X.

Bài toán đặt ra là thử tìm xem có một phân bố các biến x_k ($k = 1,2,\ldots,n$) bằng 0 hay 1 sao cho E = 1.

Ta nhớ lại rằng :

• Anh có thể làm cho "người siêu quan sát" của anh tin tưởng về sự tồn tại một chu trình Hamilton trong đồ thị G bằng cách diễn ra một chu trình như vậy.

• Nếu người ta tự cho một vòng đi, người ta biết tính bằng thời gian đa thức giá của vòng đi này và so sánh giá này với a.

• Nếu người ta tự cho một tập $X' \subset X$, người ta biết kiểm tra bằng thời gian đa thức nếu $|X'| = k$ và nếu đồ thị G = (X, E) có hoặc không có cạnh nào mà hai biến của nó đều trong X'.

• Nếu người ta tự cho $x_j \in N$, $j = 1, 2,\ldots, n$ khi ấy người ta có thể bằng thời gian đa thức quyết định xem

$$A_i^{'}x \le b_i^{'} \text{ cho } i = 1, 2,\ldots, m \text{ hay không}$$

Nguyên tắc "người siêu quan sát" cho ta một cách tiếp cận suy diễn của lớp NP. Ký hiệu NP dẫn đến vấn đề là những bài toán của lớp này là những bài toán có thể giải được bởi một máy Turing không tiền định bằng thời gian đa thức. Những thuật toán không tiền định là một kiến thức siêu tưởng. Chúng khác các thuật toán tiền định ở chỗ chúng không thể đưa lên MTĐT.

ĐỊNH NGHĨA 7 : *Một bài toán thuộc lớp NP nếu có thể giải được bằng thời gian đa thức bởi một thuật toán không tiền định.*

Ví dụ : Một bài toán nhận biết mà nó có thể giải được bằng thuật toán đa thức thuộc về lớp NP và kéo theo là $P \subset NP$. Những lớp NP chứa các bài toán (như bài toán người du lịch, bài toán cái túi,...) mà đối với chúng người ta không biết thuật toán đa thức, trong khi người ta còn chưa có thể chứng minh được rằng $P \neq NP$. Nếu biết rõ $P \neq NP$ thì có thể nói lớp NP chứa các bài toán khó hơn các bài toán thuộc lớp P.

BÀI TẬP

A - Bài tập có lời giải

Bài 1.

Cho $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, hãy tìm f(x).

Giải :

Đặt $t = x + \dfrac{1}{x} \Rightarrow t^2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 \Rightarrow f(t) = t^2 - 2$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 2.$$

Bài 2.

Cho các hàm số $f(x) = x^2$, $g(x) = 2^x$.

Hãy tìm f[f(x)], g[g(x)], f[g(x)], g[f(x)].

Giải :

$$f[f(x)] = [f(x)]^2 = (x^2)^2 = x^4\ ; \qquad g[g(x)] = 2^{g(x)} = 2^{2^x}$$

$$f[g(x)] = [g(x)]^2 = (2^x)^2\ ; \qquad g[f(x)] = 2^{f(x)} = 2^{x^2}$$

Bài 3.

Tìm miền xác định của các hàm số :

1. $f(x) = \sqrt{\log_2(1 + 3x + x^2)}$; 2. $f(x) = \arcsin(\lg x)$

3. $f(x) = \sqrt{\log_{0,5}\dfrac{x-1}{2x+3} - 1}$

Giải :

1. Điều kiện (ĐK) :

$$\begin{cases} 1 + 3x + x^2 > 0 & (1) \\ \log_2(1 + 3x + x^2) \geq 0 & (2) \Leftrightarrow \log_2(1 + 3x + x^2) \geq \log_2 \end{cases} \qquad (1)$$

(2) $\Leftrightarrow 1 + 3x + x^2 \geq 1$ (do hàm đồng biến) thỏa mãn cả (1)

$\Leftrightarrow x^2 + 3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+3) \geq 0$

x	$-\infty$	$-$	-3	$-$	0	+	$+\infty$
x + 3		$-$	0	+	|	+	
x(x + 3)		+	0	$-$	0	+	

Miền xác định : $(-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$

2. ĐK :

$$\begin{cases} x > 0 & (1) \\ -1 \le \lg x \le 1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log(10^{-1}) \le \lg x \le \lg(10^{1}) \\ 10^{-1} \le x \le 10^{1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{10} \le x \le 10 \text{ thỏa mãn cả (1)} \end{cases}$$

3. ĐK :

$$\begin{cases} x \ne \dfrac{3}{2} & (1) \\ \dfrac{x-1}{2x+3} > 0 & (2) \\ \log_{0,5} \dfrac{x-1}{2x+3} \ge 1 & (3) \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$x - 1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2x + 3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x-1}{2x+3}$		$+$	||	$-$	0	$+$	

Miền xác định : $x < -\dfrac{3}{2}$ hoặc $x > 1$ (4)

(3) $\Leftrightarrow \log_{0,5} \dfrac{x-1}{2x+3} \ge 1 = \log_{0,5} 0,5 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{2x+3} \le \dfrac{1}{2}$ (do hàm nghịch biến)

$\Leftrightarrow \dfrac{-5}{2(2x+3)} \le 0 \Leftrightarrow x \ge -\dfrac{3}{2}$ (5)

Kết hợp (4) và (5) $\Rightarrow x > 1$.

Bài 4.

Tìm hàm ngược của các hàm số sau :

a) $y = f(x) = \dfrac{5x^3 - 1}{2}$

b) $y = f(x) = \begin{cases} \sin x, \ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x, \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \\ 2^x, \quad x > \pi \end{cases}$

Giải :

a) $y = f(x) = \dfrac{5x^3 - 1}{2} \Leftrightarrow 5x^3 - 1 = 2y \Leftrightarrow 5x^3 = 2y + 1 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\dfrac{2y+1}{5}}$

thay vai trò của x và y : $y = \sqrt[3]{\dfrac{2y+1}{5}}$

b) $y = f(x) = \begin{cases} \sin x, \text{ khi } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ \cos x, \text{ khi } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \\ 2^x \text{ khi } x > \pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \begin{cases} \arcsin y, 0 \le y \le 1 \\ \arccos y, -1 \le y < 0 \\ \log_2 y, y > 2^\pi \end{cases}$

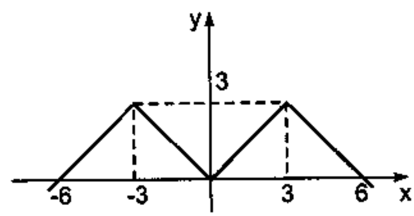
thay vai trò của x và y : $y = \begin{cases} \arccos x, 0 \le x \le 1 \\ \arcsin x, -1 \le x < 0 \\ \log_2 x, x > 2^\pi \end{cases}$

Bài 5.

Vẽ đồ thị của hàm số : $y = 3 - |3 - |x||$

Giải :

y là hàm chẵn ta chỉ cần vẽ đồ thị với $x \ge 0$ rồi lấy đối xứng qua trục tung (hình 2.9).



Hình 2.9

$x \ge 0 \Rightarrow y = 3 - |3 - x|$

$y = \begin{cases} 3 - (3 - x) = x, \text{ nếu } 0 \le x \le 3 \\ 3 + (3 - x) = 6 - x, \text{ nếu } x \ge 3 \end{cases}$

Bài 6.

Xác định các hàm số sau, hàm nào là chẵn, là lẻ :

a) $y = |x + 2| + |x - 2|$;

b) $y = \dfrac{16^x - 1}{4^x}$

c) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$

Giải :

a) $y = |x + 2| + |x - 2|$

$y(-x) = |-x + 2| + |-x - 2| = |-(x - 2)| + |-(x + 2)|$

$= |x - 2| + |x + 2| = y(x)$

Vậy y là hàm chẵn.

b) $y = \dfrac{16^x - 1}{4^x} \Rightarrow y(-x) = \dfrac{16^{-x} - 1}{4^{-x}} = \dfrac{1 - 16^x}{4^x} = -\,y(x) \Rightarrow$ y là hàm lẻ.

c) $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}\,) \Rightarrow y(-x) = \ln(-\,x + \sqrt{1 + x^2}\,)$

$$= \ln\frac{(\sqrt{1+x^2} - x)(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2} + x}$$

$$= \ln\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = \ln[(x + \sqrt{1+x^2}\,)^{-1}]$$

$$= -\ln(x + \sqrt{1+x^2}\,) = -\,y(x) \Rightarrow y \text{ là hàm lẻ.}$$

Bài 7. Chứng minh rằng một hàm f(x) có thể biểu diễn thành tổng của một hàm chẵn và một hàm lẻ.

Giải :

Đặt $f_1(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$, $\quad f_2(x) = \dfrac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$

Ta có $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Mặt khác :

$f_1(x)$ là hàm chẵn vì $f_1(-x) = \dfrac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = f_1(x)$

$f_2(x)$ là hàm lẻ vì $f_2(-x) = \dfrac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -\,f_2(x)$.

Bài 8.

Xác định các hàm số sau có tuần hoàn không ? Nếu có thì tìm chu kỳ.

a) $y = A\cos(kx + b)$, $k \neq 0$; $b > 0$

b) $y = \sin\sqrt{x + a + 1}$

c) $y = 3\mathrm{tg}[5(x + a) + 1]$

Giải :

a) $y = A\cos(kx + b)$, $k \neq 0$; $b > 0$

$$A\cos[k(x + a) + b] = A\cos(kx + b)$$

$$\left\{\begin{array}{l} k(x+a) + b = kx + b + 2m\pi \\ k(x+a) + b = -kx - b + 2m\pi \end{array}\right. \qquad m \in Z$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a = \dfrac{2m\pi}{k} \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{k} \\ ka = -2kx - 2b + 2m\pi \end{array}\right.$$

Đẳng thức sau loại vì a phụ thuộc x.

b) $\sin\sqrt{x+a+1} = \sin\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x+a+1} = \sqrt{x+1} + 2k\pi \\ \sqrt{x+a+1} = \pi - \sqrt{x+1} + 2k\pi\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a = (x+1+2k\pi)^2 - x - 1 \\ a = (\pi - \sqrt{x+1} + 2k\pi)^2 - x - 1\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ hàm không tuần hoàn.

c) $3\text{tg}[5(x + a) + 1] = 3\text{tg}(5x + 1)$

$\Leftrightarrow 5(x + a) + 1 = 5x + 1 + k\pi \Leftrightarrow a = \dfrac{k\pi}{5} \Rightarrow T = \dfrac{\pi}{5}.$

Bài 9.

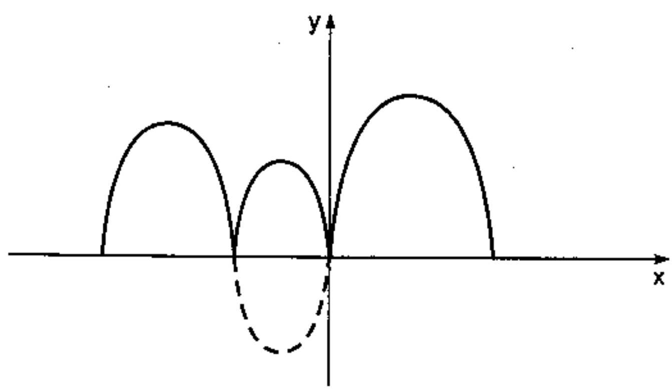
Biết đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Hãy vẽ đồ thị của :

a) $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ nếu } f(x) < 0 \end{cases}$; b) $y = f(|x|)$

Giải :

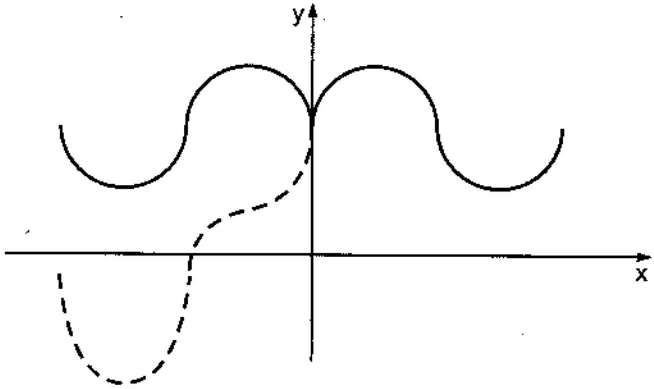
a) $|f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ nếu } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ nếu } f(x) < 0 \end{cases}$

Ta vẽ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ rồi giữ nguyên phần đồ thị trên trục hoành, lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị nằm phía dưới trục hoành (hình 2.10).



Hình 2.10

b) Hàm $y = f(|x|)$ là hàm chẵn vì $f(|-x|) = f(|x|)$. Ta vẽ đồ thị $y = f(x)$. Giữ lại phần đồ thị ở bên phải trục tung và lấy đối xứng qua trục tung (hình 2.11).



Hình 2.11

Bài 10.

Tìm miền giá trị của các hàm số :

a) $(y-1)x^2+(y+1)x+y-1=0$; b) $y=\dfrac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$

Giải :

a) Ta tìm y để phương trình có nghiệm đối với x

$$(y-1)x^2+(y+1)x+y-1=0 \qquad (1)$$

* Với y = 1 : rõ ràng (1) có nghiệm với phương trình $2x=0 \Rightarrow x=0$

* Với $y \neq 1$: để (1) có nghiệm phải có :

$$\Delta=(y+1)^2-4(y-1)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow -3y^2+10y-3\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}\leq x\leq 3$$

b) $$y=\frac{1+\sin^2 x}{1+\cos^2 x} \qquad (2)$$

(2) $$\Leftrightarrow y+y\cos^2 x=1+\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow (1+y)\sin^2 x=2y-1 \qquad (3)$$

* Với $y=-1$: phương trình (3) vô nghiệm vì $0.\sin^2 x=-3 \Leftrightarrow 0=-3$,vô lý.

* Với $y\neq -1$: phương trình (3) $\Leftrightarrow \sin^2 x=\dfrac{2y-1}{y+1}$ có nghiệm khi

$$0\leq \frac{2y-1}{y+1}\leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\leq y\leq 2$$

Vậy miền giá trị của hàm số là $\dfrac{1}{2}\leq y\leq 2$.

Bài 11.

Cho $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$ và $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$. Hãy tính f(A).

Giải :

$$f(A) = 3A^2 - 2A + 5E$$

$$= 3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}^2 - 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= 3\begin{bmatrix} 6 & -9 & 7 \\ 3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{bmatrix}$$

Bài 12.

Tìm A^n với $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

Giải :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

Vậy :

Nếu $n = 2k$ thì ta có $A^n = A^{2k} = (A^2)^k = E^k = E$

Nếu $n = 2k + 1$ thì ta có $A^n = A^{2k+1} = A^{2k}.A = E.A = A$

Bài 13.

Tìm tất cả các ma trận vuông X cấp 2 sao cho : $X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Giải :

Đặt X = ta có :

$$X^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Do } X^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ ab + bd = 0 \\ ac + cd = 0 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 0 & (1) \\ b(a + d) = 0 & (2) \\ c(a + d) = 0 & (3) \\ bc + d^2 = 0 & (4) \end{cases}$$

từ (1) và (4) ta có $a^2 = d^2$.

* Nếu a = – d thì (2) và (3) thỏa mãn với b, c bất kỳ và thỏa mãn điều kiện $a^2 + bc = 0$.

Trong trường hợp này ta có :

$$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \text{ sao cho } \det(X) = 0$$

* Nếu a = d = 0 thì b = 0 hoặc c = 0 (hệ (1) và (4)), khi đó :

$$X = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ hoặc } \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

B – Bài tập tự giải

1. Cho $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

   Tính $f(0)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right), f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$

2. Tìm miền xác định của hàm số :

   a) $y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2 + x}}$ b) $y = \lg\frac{2x + 1}{x - 1}$

   c) $y = \arccos\frac{2x}{x + 1}$

3. Xác định tính chẵn, lẻ của hàm số :

   a) $y = \lg\frac{1 + x}{1 - x}$ b) $y = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$

4. Tìm chu kỳ của hàm số :

   a) $y = 10\sin 3x$ b) $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$

5. Tìm hàm ngược của hàm số :

   a) $y = 2x + 3$; b) $y = \lg\frac{x}{2}$; c) $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$

6. Hãy viết ma trận hệ số hệ phương trình :

a) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 + x_2 + ax_3 + x_4 = a^2 \end{cases}$

7. Cho ma trận :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 10 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ và I là ma trận đơn vị cấp 3. Hãy tính A + 2I.

8. Cho hai ma trận :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

Hãy tính AB và BA.

9. Cho hai ma trận :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Hãy tính AB và BA.

10. Cho ma trận :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Hãy tính A^2 và $A^2 + 5A$.

Chương 3
ĐẠI SỐ BOOLE

Các mạch điện trong máy tính và các dụng cụ điện tử khác đều có các đầu vào, mỗi đầu vào là số 0 hoặc số 1, và tạo ra các đầu ra cũng là các số 0 và 1. Các mạch điện đó đều có thể được xây dựng bằng cách dùng bất kỳ một phần tử cơ bản nào có hai trạng thái khác nhau. Chúng bao gồm các chuyển mạch có thể ở hai vị trí mở hoặc đóng và các dụng cụ quang học có thể là sáng hoặc tối. Năm 1938 Claude Shannon chứng tỏ rằng có thể dùng các quy tắc cơ bản của logic do George Boole đưa ra vào năm 1854 trong cuốn "*Các quy luật của tư duy*" của ông để thiết kế các mạch điện. Các quy tắc này đã tạo nên cơ sở của đại số Boole.

I – HÀM BOOLE

1.1. Mở đầu

Đại số Boole đưa ra các phép toán và quy tắc làm việc với tập {0, 1}. Các chuyển mạch điện tử và quang học có thể được nghiên cứu bằng cách dùng tập này và các quy tắc của đại số Boole. Ba phép toán trong đại số Boole mà chúng ta sẽ dùng nhiều nhất, đó là phép lấy phần bù, phép lấy tổng Boole và tích Boole. *Phần bù* của một phần tử được ký hiệu bằng một gạch ngang trên đầu và được định nghĩa bởi $\overline{0} = 1$ và $\overline{1} = 0$. Tổng Boole được ký hiệu là + *hoặc* OR (hoặc) có các giá trị sau :

$$1 + 1 = 0 \;;\quad 1 + 0 = 1 \;;\quad 0 + 1 = 1 \;;\quad 0 + 0 = 0$$

Tích Boole được ký hiệu là. *hoặc* AND (và) có các giá trị như sau :

$$1.1 = 1 \;;\quad 1.0 = 0 \;;\quad 0.1 = 0 \;;\quad 0.0 = 0$$

Khi không có nguy cơ nhầm lẫn ký hiệu dấu có thể được bỏ đi như cách viết các tích đại số thông thường. Nếu không dùng các dấu ngoặc thì thứ tự thực hiện các phép toán Boole như sau : trước hết, thực hiện tất cả các phép lấy phần bù, sau đó đến tích Boole rồi mới đến tổng Boole. Điều này được minh họa trong ví dụ sau :

Ví dụ 1 : Tìm giá trị của $1.0 + (\overline{0+1})$

Giải : Dùng các định nghĩa của phép lấy phần bù, phép lấy tổng và tích Boole, ta suy ra :

$$(1.0) + (\overline{0+1}) = 0 + \overline{1}$$
$$= 0 + 0 = 0$$

1.2. Biểu thức Boole và hàm Boole

Cho B = {0, 1}. Biến x được gọi là một *biến Boole* nếu nó nhận các giá trị chỉ từ B. Một hàm từ B^n – tức là từ tập $\{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in B, 1 \le i \le n\}$ tới B được gọi là hàm Boole bậc n. Các giá trị của hàm Boole thường được cho trong các bảng. Ví dụ, hàm Boole F(x, y) với giá trị bằng 1 khi x = 1 và y = 0 và bằng 0 với mọi lựa chọn khác đối với các giá trị của x và y có thể được biểu diễn bởi bảng 1.

Bảng 1

x	y	F(x, y)
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Các hàm Boole cũng có thể được biểu diễn bằng cách dùng các biểu thức được tạo bởi các biến và các phép toán Boole. Các *biểu thức Boole* với các biến $x_1, x_2, ..., x_n$ được định nghĩa một cách đệ quy như sau :

$0, 1, x_1, x_2, ..., x_n$ là các biểu thức Boole.

Nếu E_1 và E_2 là các biểu thức Boole thì $\overline{E}_1$, (E_1E_2) và $(E_1 + E_2)$ cũng là các biểu thức Boole.

Mỗi một biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole. Các giá trị của hàm này nhận được bằng cách thay 0 và 1 cho các biến trong biểu thức đó. Ở phần sau chúng ta sẽ chứng minh rằng mỗi một hàm Boole đều có thể được biểu diễn bằng một biểu thức Boole.

Bảng 2

x	y	z	xy	$\overline{z}$	$F(x,y,z) = xy + \overline{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của hàm Boole được biểu diễn bởi

$$F(x,y,z) = xy + \overline{z}$$

Giải :

Các giá trị của hàm này được cho trong bảng 2.

1.3. Các hằng đẳng thức của đại số Boole

Trong đại số Boole có nhiều hằng đẳng thức. Các hằng đẳng thức quan trọng nhất được cho trong bảng 3. Các hằng đẳng thức này đặc biệt tiện ích trong việc làm đơn giản hóa việc thiết kế các mạch. Mỗi một hằng đẳng thức trong bảng 3 đều có thể được chứng minh bằng cách lập bảng. Ta sẽ chứng minh một trong số hai luật phân phối bằng cách đó trong ví dụ dưới đây.

Bảng 3. **Các hằng đẳng thức Boole**

Hằng đẳng thức	Tên gọi
$\overline{\overline{x}} = x$	Luật phần bù kép
$x + x = x$ $x.x = x$	Luật lũy đẳng (idempotent)
$x + 0 = x$ $x.1 = x$	Luật đồng nhất
$x + 1 = 1$ $x.0 = 0$	Luật nuốt
$x(x + y) = x$ $x + x.y = x$	Luật hút thu
$x + y = y + x$ $xy = yx$	Luật giao hoán
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$	Luật kết hợp
$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	Luật phân phối
$\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{(x + y)} = \overline{x}\,\overline{y}$	Luật De Morgan

Ví dụ 3. Chứng minh sự đúng đắn của luật phân phối $x(y + z) = xy + xz$.

Giải : Sự chứng minh hằng đẳng thức này được cho trong bảng 4, gọi là bảng chân lý. Hằng đẳng thức này đúng vì hai cột sau cùng của bảng hoàn toàn phù hợp với nhau.

Bảng 4

x	y	z	y + z	xy	xz	x(y + z)	xy + xz
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Các hằng đẳng thức trong bảng 3 cũng có thể được dùng để chứng minh các hằng đẳng thức khác. Ta sẽ minh họa điều này bằng ví dụ sau.

Ví dụ 4. Chứng minh *luật hút thu* $x(x + y) = x$ bằng cách dùng các hằng đẳng thức của đại số Boole (Hằng đẳng thức này được gọi là luật hút thu vì sự hút thu của $x + y$ vào x để cho x không thay đổi).

Giải : Các bước được dùng để rút ra hằng đẳng thức trên và các luật được sử dụng ở mỗi bước đó như sau :

$x(x + y) = (x + 0)(x + y)$ – luật đồng nhất đối với tổng Boole

$= x + 0.y$ – luật phân phối của tổng Boole đối với tích Boole

$= x + y.0$ – luật giao hoán của tích Boole

$= x + 0$ – luật nuốt đối với tích Boole

$= x$ – luật đồng nhất đối với tổng Boole.

Ngoài những hằng đẳng thức trên giữa các biểu thức Boole còn có các mối quan hệ khác, thể hiện ở các định lí sau :

Định lý 1 *: Trong một đại số Boole, đối với mọi x, y ta có :*

1) $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$; 2) $\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$

Chứng minh :

– Ta chứng minh phần 1, còn phần 2 sẽ được suy ra từ tính đối ngẫu.

– Theo luật phân phối x + yz = (x + y)(x + z) ta có :

$$xy + (\overline{x} + \overline{y}) = (x + \overline{x} + \overline{y})(y + \overline{x} + \overline{y}) = (1 + \overline{y})(1 + \overline{x}) = 1$$

– Mặt khác :

$$xy(\overline{x} + \overline{y}) = xy\overline{x} + xy\overline{y} = oy + ox = 0$$

Như vậy $\overline{x} + \overline{y}$ là phần bù của xy (tổng của chúng = 1 và tích của chúng = 0).

Đối với đại số Boole ta còn có quan hệ ≤ định nghĩa bởi :

$$x \le y \Leftrightarrow xy = x \Leftrightarrow x + y = y$$

Quan hệ thứ tự ≤ có tính tương hợp trái và phải đối với phép toán cộng và nhân :

$$x \le y \Rightarrow zx \le zy \text{ và } xz \le yz$$

$$x \le y \Rightarrow z + x \le z + y \text{ và } x + z \le y + z.$$

Định lý 2 : *Trong một đại số Boole, đối với mọi x, y ta có :*

1) $x \le y \Leftrightarrow \overline{y} \le \overline{x}$

2) $x \le y \Leftrightarrow x\overline{y} = 0$

3) $x \le y \Leftrightarrow \overline{x} + y = 1$

Chứng minh :

1) Theo định nghĩa ta có $x \le y \Leftrightarrow xy = x$

Mặt khác $xy = x \Leftrightarrow \overline{xy} = \overline{x}$

và theo định lý 1 : $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$

Vậy ta có : $\overline{x} = \overline{x} + \overline{y}$ hay là $\overline{y} \le \overline{x}$

2) $x \le y$ kéo theo $x\overline{y} \le y\overline{y} = 0$ vậy $x\overline{y} = 0$

Đảo lại nếu $x\overline{y} = 0$ thì ta có :

$$x + y = (x + y)1 = (x + y)(y + \overline{y}) = xy + x\overline{y} + y = 0 = xy + y = y$$

3) Theo (2) ta đã có : $x\overline{y} = 0$, lấy phần bù của 2 vế ta được $\overline{x} + y = 1$.

1.4. Các phép toán và biểu diễn hàm Boole

Cho E là một tập hợp. Cho B là đại số Boole. Trên tập các hàm số từ E vào B, ta định nghĩa :

- hàm 0 : $0(x) = 0_B$
- hàm 1 : $1(x) = 1_B$
- hàm bù (hay bổ sung) của hàm f : $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$
- tích của 2 hàm f và g : $[fg](x) = f(x)g(x)$
- tổng của 2 hàm f và g : $[f + g](x) = f(x) + g(x)$

Với các phép trên tập các hàm từ E vào B, ký hiệu $[E \to B]$ là một đại số Boole. Ta có thể kiểm tra tính chất sau :

$$f \leq g \Leftrightarrow (\forall x \in E)[f(x) \leq g(x)] \Leftrightarrow fg = f \Leftrightarrow f + g = g$$

Định lý 3 : Tập các hàm số của một tập bất kỳ trong một đại số Boole là một đại số Boole.

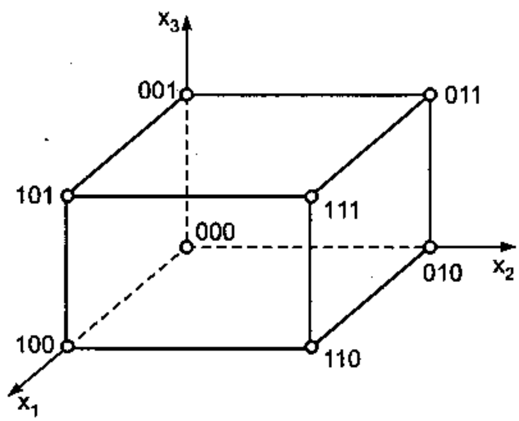
Xét tập $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. Tích trực tiếp $\mathcal{B}^n$ của n lần $\mathcal{B}$ là một đại số Boole.

ĐỊNH NGHĨA 1. *Ta gọi hàm Boole đơn của n biến là một hàm từ đại số $\mathcal{B}^n$ vào đại số $\mathcal{B}$.*

Có hai cách chính để biểu diễn hàm Boole đơn của n biến.

1) Biểu diễn không gian

Ta có tương ứng một bộ 3 số (x_1, x_2, x_3) trong đó $x_i \in \{0, 1\}$ như là một đỉnh của hình lập phương (hình 3.1)



Hình 3.1

Khi n = 4, 5, .. ta có biểu diễn tương tự. Cho một hàm Boole đơn f của 3 biến, chính là cho tập các đỉnh của lập phương, mà ở đó f nhận giá trị 1. Một đỉnh như vậy được gọi là phủ bởi f (bạn đọc hình dung cho trường hợp n biến).

2) Biểu diễn bằng bảng

Ở trên ta đã nói tới biểu diễn này, bây giờ trình bày một cách tổng quát hơn.

Ta hình dung mỗi bộ n số $(x_1, x_2, ..., x_n)$, trong đó $x_i \in \{0, 1\}$ như là biểu diễn nhị phân của một số nguyên từ 0 đến $2^n - 1$. Xếp các bộ n số này theo thứ tự, khi đó hàm Boole đơn của n biến được cho bởi bảng các giá trị của hàm số tại một điểm. Tùy thuộc vào cột giá trị mà ta có các hàm Boole khác nhau.

Ví dụ 4. Xét hàm 3 biến f(x, y, z) cho bởi bảng sau (chú ý rằng cột f(x, y, z) là cột giá trị của hàm ta đang xét, khi cột này thay đổi ta sẽ có một hàm khác).

Bảng 5

	x	**y**	**z**	**f(x, y, z)**
0	0	0	0	1
1	0	0	1	0
2	0	1	0	0
3	0	1	1	1
4	1	0	0	1
5	1	0	1	1
6	1	1	0	1
7	1	1	1	0

Người ta còn dùng loại bảng sau đây gọi là bảng Karnaugh.

– Các cột được ký hiệu thay cho xy ;

– Các hàng được ký hiệu thay cho z.

Bảng 6

		xy			
		00	01	11	10
z	0	1	0	1	1
	1	0	1	1	0

Một hàm Boole bậc 2 là hàm từ tập 4 phần tử, cụ thể là các cặp phần tử từ tập B = {0, 1} đến B là tập có hai phần tử. Từ đó suy ra có 16 hàm Boole bậc 2. Bảng 7 cho giá trị của 16 hàm Boole bậc 2 khác nhau mà ta ký hiệu là $F_1, F_2, ..., F_{16}$.

Bảng 7

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Ta có thể viết ra các biểu thức của các hàm tương ứng như sau :

$F_1(x,y) = 1$ $\qquad$ $F_9(x, y) = \overline{x} + \overline{y}$

$F_2(x,y) = x + y$ $\qquad$ $F_{10}(x, y) = x\overline{y} + \overline{x}y$

$F_3(x, y = x + \overline{y}$ $\qquad$ $F_{11}(x,y) = \overline{y}$

$F_4(x, y) = x\overline{y} + xy = x$ $\qquad$ $F_{12}(x,y) = x\overline{y}$

$F_5(x,y) = \overline{x} + y$ $\qquad$ $F_{13}(x,y) = \overline{x}$

$F_6(x, y) = \overline{x}y + xy = y$ $\qquad$ $F_{14}(x, y) = \overline{x}y$

$F_7 = xy + \overline{x}\,\overline{y}$ $\qquad$ $F_{15}(x,y) = \overline{x}\,\overline{y}$

$F_8(x,y) = xy$ $\qquad$ $F_{16}(x,y) = 0$

Ví dụ 5. Có bao nhiêu hàm Boole khác nhau bậc n ?

Giải : Theo quy tắc nhân của phép đếm ta suy ra rằng có 2^n bộ n phần tử khác nhau gồm các số 0 và 1. Vì hàm Boole là sự gán 0 hoặc 1 cho mỗi bộ trong số 2^n bộ n phần tử đó, nên theo quy tắc nhân sẽ có 2^{2^n} các hàm Boole khác nhau.

Bảng 8 **Số các hàm Boole bậc n**

Bậc	Số các hàm Boole
1	4
2	16
3	256
4	65.536
5	4.294.987.296
6	18.446.744.073.709.551.616

II – BIỂU DIỄN CÁC HÀM BOOLE

Hai bài toán quan trọng của đại số Boole sẽ được nghiên cứu trong tiết này. Bài toán thứ nhất là : cho các giá trị của một hàm Boole, làm thế nào tìm được biểu thức Boole biểu diễn hàm đó ? Bài toán này sẽ được giải bằng cách chứng minh rằng mọi hàm Boole đều có thể được biểu diễn bởi tổng các tích Boole của các biến và phần bù của chúng. Lời giải của bài toán này chứng tỏ rằng mọi hàm Boole đều có thể được biểu diễn bằng cách dùng ba toán tử Boole . + và – . Bài toán thứ hai là : liệu có thể dùng một tập nhỏ hơn các toán tử để biểu diễn các hàm Boole không ? Chúng ta sẽ trả lời bài toán này bằng cách chứng minh rằng mọi hàm Boole đều có thể được biểu diễn bằng cách dùng chỉ một toán tử. Cả hai bài toán trên đều có tầm quan trọng thực tiễn trong việc thiết kế các mạch.

2.1. Khai triển tổng các tích

Chúng ta sẽ dùng các ví dụ để minh họa một phương pháp quan trọng để tìm biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole.

Ví dụ 1 : Tìm các biểu thức Boole biểu diễn các hàm F(x,y,z) và G(x,y,z) có các giá trị được cho trong bảng 9.

Bảng 9

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

Giải : Cần phải có một biểu thức có giá trị 1 khi $x = z = 1$ và $y = 0$ và có giá trị 0 trong mọi trường hợp còn lại để biểu diễn hàm F. Có thể lập một biểu thức như vậy bằng cách lấy tích Boole của x, $\overline{y}$ và z. Tích này, tức $x\overline{y}z$ có giá trị 1 nếu và chỉ nếu $x = \overline{y} = z = 1$, mà điều này đúng nếu và chỉ nếu $x = z = 1$ và $y = 0$.

Để biểu diễn hàm G, ta cần có một biểu thức bằng 1 khi $x = y = 1$ và $z = 0$ hoặc khi $x = z = 0$ và $y = 1$. Chúng ta có thể lập một biểu thức với các giá trị đó bằng cách lấy tổng Boole của hai tích Boole khác nhau. Tích Boole $xy\overline{z}$ có giá trị 1 nếu và chỉ nếu $x = y = 1$ và $z = 0$. Tương tự, tích Boole $\overline{x}y\overline{z}$ có giá trị 1 nếu và chỉ nếu $x = z = 0$ và $y = 1$. Tổng Boole của hai tích này, tức $xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$ biểu diễn hàm G vì nó có giá trị 1 nếu và chỉ nếu $x = y = 1$ và $z = 0$ hoặc $x = z = 0$ và $y = 1$.

Ví dụ 1 minh họa một thủ tục xây dựng biểu thức Boole biểu diễn một hàm Boole có các giá trị đã cho. Mỗi một tổ hợp giá trị của các biến làm cho hàm có giá trị 1 sẽ dẫn tới một tích Boole của các biến hoặc các phần bù của chúng.

ĐỊNH NGHĨA 2. Một biến Boole hoặc phần bù của nó được gọi là một *tục biến*. Tích Boole $y_1y_2...y_n$ trong đó $y_i = x_i$ hoặc $y_i = \overline{x}_i$ với $x_1, x_2, ..., x_n$ là các biến Boole được gọi là một *tiểu hạng* (minterm). Do đó, tiểu hạng là tích của n tục biến.

Một tiểu hạng có giá trị 1 đối với một và chỉ một tổ hợp giá trị của các biến của nó. Nói một cách chính xác hơn, tiểu hạng $y_1y_2...y_n$ bằng 1 nếu và chỉ nếu mọi $y_i = 1$ và điều này xảy ra nếu và chỉ nếu $x_i = 1$ khi $y_i = x_i$ và $x_i = 0$ khi $y_i = \overline{x}_i$

Ví dụ 2. Tìm tiểu hạng có giá trị bằng 1 nếu $x_1 = x_3 = 0$ và $x_2 = x_4 = x_5 = 1$ và bằng 0 trong mọi trường hợp còn lại.

Giải : Tiểu hạng $\overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4x_5$ có tập các giá trị đúng theo yêu cầu của đầu bài.

Bằng cách lấy tổng Boole của các tiểu hạng phân biệt chúng ta có thể lập được biểu thức Boole với tập các giá trị đã được cho trước. Đặc biệt, tổng Boole của các tiểu hạng có giá trị 1 chỉ khi một trong các tiểu hạng của tổng có giá trị bằng 1. Tiểu hạng đó có giá trị 0 đối với mọi tổ hợp giá trị còn lại của các biến. Do đó, với một hàm Boole đã cho, ta có thể lập một tổng Boole các tiểu hạng có giá trị 1 khi hàm đó có giá trị 1 và có giá trị 0 khi hàm đó có giá trị 0. Các tiểu hạng của tổng Boole này tương ứng với các tổ hợp giá trị làm cho hàm có giá trị 1. Tổng các tiểu hạng biểu diễn hàm được gọi là *khai triển tổng các tích* hay *dạng tuyển chuẩn tắc* của hàm Boole.

Ví dụ 3. Tìm khai triển tổng các tích của hàm $F(x, y, z) = (x + y)\overline{z}$.

Giải : Bước đầu tiên là tìm các giá trị của hàm F. Các giá trị này được cho trong bảng 10.

Bảng 10

x	y	z	x + y	$\overline{z}$	$(x + y)\overline{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

Khai triển tổng các tích của F là tổng của ba tiểu hạng tương ứng với ba dòng của bảng cho giá trị 1 của hàm đó. Từ đó, ta có :

$$F(x,y,z) = xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$$

Cũng có thể tìm biểu thức biểu diễn một hàm Boole bằng cách lấy tích Boole của các tổng Boole. Biểu thức tìm được gọi là *dạng hội chuẩn tắc hay khai triển tích các tổng.* Các khai triển này có thể tìm được từ khai triển tổng các tích bằng cách lấy các đối ngẫu.

Tổng quát, người ta có thể biểu diễn hàm n biến $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ dưới các dạng sau đây :

1) Dạng tuyển chuẩn tắc hoàn toàn

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} ... x_n^{\sigma_n}$$

trong đó $x^{\sigma} = \begin{cases} x, \text{ nếu } \sigma = 1 \\ \overline{x}, \text{ nếu } \sigma = 0 \end{cases}$

2) Dạng hội chuẩn tắc hoàn toàn

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{f(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, ..., \overline{\sigma}_n)=0} x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee ... \vee x_n^{\sigma_n}.$$

2.2. Tính đầy đủ

Tất cả hàm Boole đều có thể được biểu diễn như tổng Boole của các tiểu hạng. Mỗi tiểu hạng là một tích Boole của các biến Boole hoặc các phần bù của chúng. Điều này chứng tỏ rằng mỗi hàm Boole có thể được biểu diễn bằng cách dùng các phép toán Boole . , + và – . Vì tất cả các hàm Boole đều có thể được biểu diễn bằng cách dùng các phép toán đó, nên ta nói rằng tập hợp {. , +, –} là đầy đủ. Liệu ta có thể tìm được một tập đầy đủ các phép toán nhỏ hơn thế không ? Chúng ta có thể làm được điều đó nếu một trong ba phép toán của tập đó có thể được biểu diễn qua hai phép toán kia. Và điều này có thể làm được bằng cách dùng một trong hai luật De Morgan. Chúng ta có thể loại tất cả các tổng Boole bằng cách dùng hằng đẳng thức :

$$x + y = \overline{\overline{x}\,\overline{y}}$$

Hằng đẳng thức này nhận được bằng cách lấy phần bù cả hai vế của luật De Morgan thứ hai cho trong bảng 3, sau đó áp dụng luật phần bù kép. Điều này có nghĩa là tập {. ; –} là đầy đủ. Tương tự, ta cũng có thể loại tất cả các tích Boole bằng cách dùng hằng đẳng thức :

$$xy = \overline{\overline{x} + \overline{y}}\ ;$$

Hằng đẳng thức này nhận được bằng cách lấy phần bù cả hai vế của luật De Morgan thứ nhất cho trong bảng 3, và sau đó áp dụng luật phần bù kép. Do đó, tập {+, –} cũng là đầy đủ. Chú ý rằng tập {+, .} không phải là đầy đủ vì nó không thể biểu diễn hàm Boole $F(x) = \overline{x}$ bằng cách dùng các phép toán đó.

Ở trên chúng ta đã tìm được các tập đầy đủ chứa hai phép toán. Liệu chúng ta còn có thể tìm được tập đầy đủ các phép toán nhỏ hơn nữa, cụ thể là chỉ chứa một phép toán thôi không ? Những tập như vậy có tồn tại. Ta sẽ định nghĩa hai phép toán : toán | hay NAND và phép ↓ hay NOR như sau :

$$1|1 = 0,\ 1|0 = 0|1 = 0|0 = 1 \text{ và}$$

$$1{\downarrow}1 = 1{\downarrow}0 = 0{\downarrow}1 = 0,\ 0{\downarrow}0 = 1$$

Cả hai tập {|} và {↓} đều là đầy đủ.

Vì {. , –} là đầy đủ, nên để thấy {|} là đầy đủ, tất cả những thứ mà ta cần phải làm đều chứng tỏ rằng cả hai phép toán . và – đều có thể được biểu diễn bằng cách chỉ dùng phép toán |. Điều này được làm như sau :

$$\overline{x} = x|x$$

$$xy = (x|y)|(x|y)$$

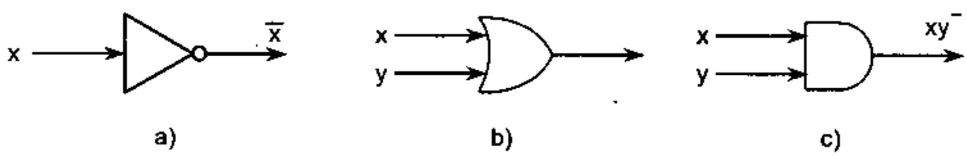
III – CÁC CỔNG LOGIC

3.1. Mở đầu

Đại số Boole được dùng để mô hình hóa sơ đồ các mạch trong các dụng cụ điện tử. Mỗi một đầu vào và mỗi một đầu ra của một dụng cụ như vậy có thể được xem như một phần tử của tập {0,1}. Một máy tính cũng như một dụng cụ điện tử khác được tạo bởi nhiều mạch. Mỗi một mạch có thể được thiết kế bằng cách dùng các quy tắc của đại số Boole đã được đề cập tới. Các phần tử cơ bản của các mạch được gọi là các cổng. Mỗi một loại cổng thực hiện một phép toán Boole. Trong tiết này, chúng ta sẽ định nghĩa một số loại cổng. Dùng các cổng này, chúng ta sẽ áp dụng các quy tắc của đại số Boole để thiết kế các mạch thực hiện các nhiệm vụ khác nhau. Các mạch mà chúng ta nghiên cứu trong chương này sẽ cho đầu ra chỉ phụ thuộc vào đầu vào chứ không phụ thuộc vào trạng thái hiện thời của mạch. Nói một cách khác, các mạch này không có khả năng nhớ. Những mạch như vậy được gọi là mạch tổ hợp.

Chúng ta sẽ xây dựng các mạch tổ hợp bằng cách dùng ba loại phần tử. Loại thứ nhất là *bộ đảo*, nó chấp nhận giá trị của một biến Boole như đầu vào và tạo phần bù của giá trị đó như đầu ra. Ký hiệu được dùng để biểu diễn bộ đảo cho trên hình 3.2a. Đầu vào của bộ đảo cho ở phía trái, đi vào và đầu ra cho ở phía phải, đi ra từ bộ đảo đó.

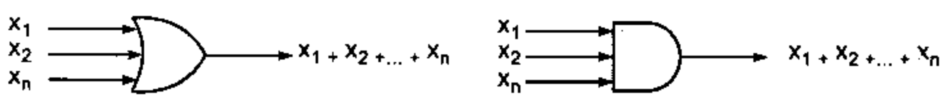
Loại phần tử thứ hai là cổng OR. Đầu vào cổng này là các giá trị của hai hoặc nhiều hơn biến Boole. Đầu ra là tổng Boole của các giá trị đó. Ký hiệu được dùng để biểu diễn cổng OR được cho trên hình 3.2b. Đầu vào cổng OR cho ở phía trái, đi vào và đầu ra cho ở phía phải, đi ra khỏi phần tử đó.



Hình 3.2. Các loại cổng cơ bản

Loại phần tử thứ ba là cổng AND. Đầu vào cổng là các giá trị của hai hoặc nhiều hơn biến Boole. Đầu ra là tích Boole của các giá trị đó. Ký hiệu được dùng để biểu diễn cổng AND được cho trên hình 3.2c. Đầu vào cổng AND cho ở phía trái, đi vào và đầu ra cho ở phía phải, đi ra từ cổng đó.

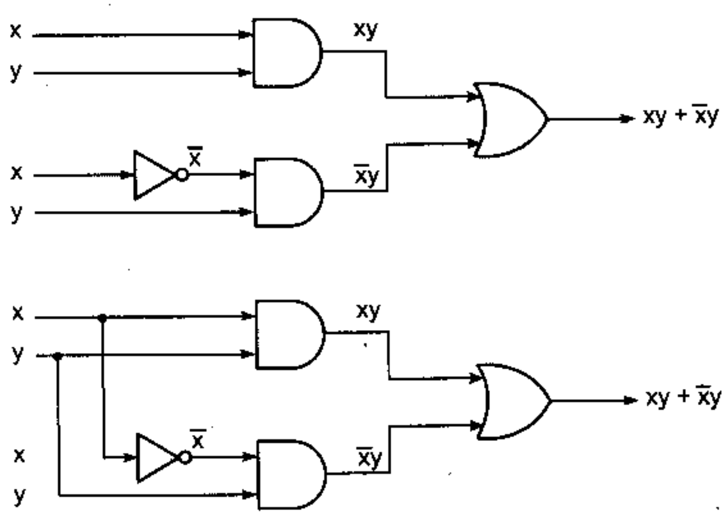
Chúng ta sẽ cho phép có nhiều đầu vào đối với các cổng OR và AND. Các đầu vào đối với mỗi cổng này cho ở bên trái, đi vào cổng và đầu ra cho ở bên phải. Ví dụ về các cổng AND và OR với n đầu vào cho trong hình 3.3.



Hình 3.3. Các cổng có n đầu vào

3.2. Tổ hợp các cổng

Các mạch tổ hợp có thể được xây dựng bằng cách dùng tổ hợp các bộ đảo, các cổng OR và AND. Khi lập tổ hợp các mạch, một số cổng có thể dùng chung đầu vào. Điều này được chỉ rõ ở một trong hai cách vẽ mạch dưới đây. Một cách dùng các phân nhánh để chỉ tất cả các cổng cùng dùng một đầu vào đã cho. Còn cách thứ hai chỉ đầu vào này một cách riêng biệt đối với mỗi cổng. Hình 3.4 minh họa hai cách biểu diễn các cổng cùng dùng chung các giá trị đầu vào. Cũng cần chú ý rằng đầu ra từ một cổng có thể được dùng như đầu vào đối với một hoặc nhiều phần tử như chỉ rõ trên hình 3.4. Cả hai hình vẽ trên hình 3.4 đều vẽ mạch cho cùng đầu ra là $xy + \overline{x}y$.



Hình 3.4. Hai cách vẽ cùng một mạch

Ví dụ : Dựng các mạch tạo các đầu ra sau :

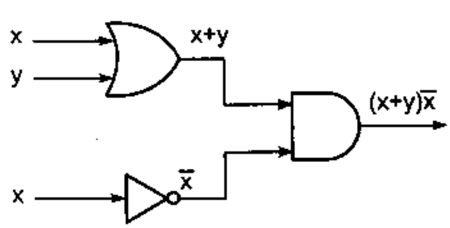
a) $(x + y)\overline{x}$;

b) $\overline{x}\overline{(y + \overline{z})}$;

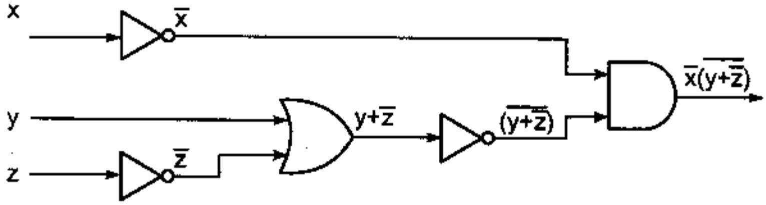
c) $(x + y + z)(\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z})$.

Giải : Các mạch tạo các đầu ra như trên được cho ở hình 3.5.

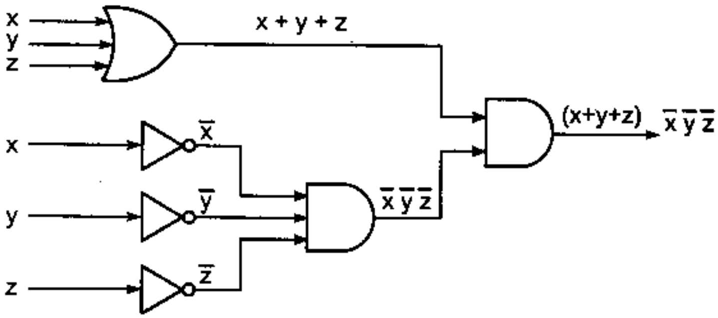
a)



b)



c)



Hình 4. Các mạch tạo đầu ra cho trong ví dụ 1

IV – THUẬT TOÁN TÌM DẠNG TUYỂN CHUẨN TẮC TỐI THIỂU

4.1. Chú ý mở đầu

Từ những cơ sở lý thuyết đã trình bày trong các tiết trên ta có thể chia quá trình tìm dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu của một hàm đại số lôgic $f(x_1, ..., x_n)$ thành 2 giai đoạn :

a) Xuất phát từ dạng tuyển chuẩn tắc hoàn toàn của f, tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của f.

b) Xuất phát từ dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của f, tìm các dạng tuyển chuẩn tắc nghẽn của f và lựa chọn từ các dạng này để được các dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu của f.

Trong quá trình tìm dạng chuẩn tối thiểu người ta phải thực hiện một số phép biến đổi.

Dưới đây là một số phép toán mà ta sẽ dùng nhiều lần trong quá trình biến đổi :

(i) phép nuốt sơ cấp

$$AB \vee A = A$$

(ii) phép dán

$$Ax \vee A\overline{x} = A$$

(iii) phép dán không đầy đủ

$$Ax \vee A\overline{x} = A \vee Ax \vee A\overline{x}$$

(iv) phép dán mở rộng

$$AC \vee B\overline{C} = AC \vee B\overline{C} \vee AB$$

Trong các phép toán đó A, B và C là các biểu thức bất kỳ, x là biến.

4.2. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn

Mỗi hội sơ cấp hạng k

$$x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_j}^{\sigma_j}$$

được gọi là một nguyên nhân hạng k của hàm f, nếu nó là một nguyên nhân của f. Một cấu tạo đơn vị của f là một nguyên nhân hạng n của nó.

Định lý 1.

a) Một nguyên nhân hạng k của hàm f (k < n) là kết quả của phép dán hai nguyên nhân hạng k + 1 của hàm f đó.

b) Một nguyên nhân hạng k của hàm f (k ≤ n) là nguyên nhân nguyên tố của f nếu không thể dán được với bất kỳ một nguyên nhân hạng k nào của f.

Chứng minh :

a) Giả sử A là một nguyên nhân hạng k (k < n) của f. Tìm được biến x không có mặt trong A. Khi đó các hội Ax và $A\overline{x}$ sẽ là các nguyên nhân hạng k + 1 của f, và A nhận được từ phép dán hai nguyên nhân này.

b) Giả sử A là một nguyên nhân hạng k (k ≤ n) của f. Nếu A không phải là nguyên nhân nguyên tố thì luôn tìm được một biến x trong A để sau khi xóa nó (cùng với dấu phủ định nếu có) khỏi A, ta được phần con B là một nguyên nhân của f. Có thể giả thiết A = Bx. Khi đó A' = $B\overline{x}$ cũng là một nguyên nhân hạng k của f và A có thể dán với A'.

Từ định lý 1, ta có thuật toán Quyne sau đây để tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm đại số lôgic $f(x_1, \ldots, x_n)$:

Bước 1. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc hoàn toàn của f, ký hiệu f_o.

Bước 2. Từ f_i xây dựng f_{i+1} bằng cách trong f thực hiện tất cả các phép dán không đầy đủ đối với các hội sơ cấp hạng n – i, sau đó xóa bỏ tất cả các hội sơ cấp hạng n – i có thể được bằng phép nuốt sơ cấp.

Bước 3. Lặp lại bước 2 cho đến khi thu được $f_{k+1} = f_k$. Khi đó f_k sẽ là dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của f.

Từ cách xây dựng f_i, có thể chứng minh quy nạp điều khẳng định : trong mỗi f_i, có mặt tất cả các nguyên nhân nguyên tố hạng không nhỏ hơn n – k + 1 và tất cả các nguyên nhân hạng n – k của f, và chỉ có chúng.

Nếu $f_{k+1} = f_k$ thì theo phần b của định lý 1, mọi nguyên nhân hạng n – k của f trong f_k đều là nguyên tố và như vậy f_k chứa tất cả các nguyên nhân nguyên tố của f, do đó nó là dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của f.

Ví dụ 1 : Tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm

$$f = xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$$

Ta có $f_o = f$. Dùng các phép dán không đầy đủ đối với các hội sơ cấp hạng 3, ta được :

$$yz \vee xz \vee xy \vee xyz \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$$

Sau đó dùng các phép nuốt sơ cấp ta được :

$$f_1 = yz \vee xz \vee xy \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}$$

Đến đây các hội sơ cấp hạng 2 không dán được với nhau, tức là $f_2 = f_1$ và f_1 là dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của f.

Thuật toán Quyne không chỉ rõ việc tìm cho hết các phép dán có thể có. Vì thế McCluskey đề nghị bổ sung thuật toán Quyne một thủ tục hình thức như trình bày dưới đây.

Giả sử f là hàm của n biến $x_1 ..., x_n$. Mỗi hội sơ cấp của n biến đó được biểu diễn bằng một dãy n ký hiệu trong tập {0, 1} theo quy ước : ký tự thứ i là 1 hay 0 nếu x_i có mặt trong hội là bình thường hay với dấu phủ định, còn nếu x_i không có mặt thì ký tự này là – . Chẳng hạn hội sơ cấp của 5 biến $x_1, ... x_5$: $x_1\bar{x}_3x_5$ được biểu diễn bởi 1–0–1. Hai hội sơ cấp được gọi là lân cận nhau, nếu các biểu diễn nói trên của chúng chỉ khác nhau ở một vị trí. Rõ ràng các hội sơ cấp chỉ có thể dán được với nhau nếu chúng là lân cận nhau.

Thuật toán Quyne – McCluskey

Thuật toán Quyne, theo thủ tục McCluskey, được tiến hành như sau : Lập một bảng gồm nhiều cột để ghi kết quả các phép dán. Sau đó lần lượt thực hiện các bước :

Bước 1. Viết vào cột thứ nhất, các biểu diễn của các nguyên nhân hạng n (tức là các cấu tạo đơn vị) của hàm f. Các biểu diễn được chia thành từng nhóm, các biểu diễn trong mỗi nhóm có số các ký hiệu 1 bằng nhau và các nhóm xếp theo thứ tự số các ký hiệu 1 tăng dần (các nhóm được đánh số từ 1).

Bước 2. Lần lượt thực hiện tất cả các phép dán các biểu diễn trong nhóm i với các biểu diễn trong nhóm i + 1 (i = 1, 2, ...). Biểu diễn nào tham gia ít nhất một phép dán sẽ được ghi nhận một dấu * bên cạnh. Kết quả dán được ghi vào cột tiếp theo.

Bước 3. Lặp lại bước 2 cho cột kế tiếp cho đến khi không thu thêm được cột nào mới (tức là tại cột hiện hành, không thực hiện được một phép dán nào cả). Khi đó, tất cả các biểu diễn không có dấu * sẽ cho ta tất cả các nguyên nhân nguyên tố của f.

Ví dụ 2 : Tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm

$$f = \bar{x}\bar{y}\bar{z}u \vee \bar{x}y\bar{z}u \vee \bar{x}\bar{y}zu \vee x\bar{y}\bar{z}u \vee x\bar{y}zu \vee \bar{x}yzu \vee xyzu.$$

Thủ tục McCluskey được tiến hành bởi bảng sau đây :

0001*	0–01*	0––1
0101*	00–1*	–0–1
0011*	–001*	––11
1001*	–011*	
1011*	10–1*	
0111*	01–1*	
1111*	0–11*	
	1–11*	
	–111*	

Dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm f là :

$$f = \bar{x}u \vee \bar{y}u \vee zu$$

Ví dụ 3 : Tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm

$$f = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1\bar{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2\bar{x}_3x_4$$

$$\vee x_1x_2x_3\bar{x}_4 \vee x_1x_2x_3x_4.$$

Thủ tục McCluskey được tiến hành bởi bảng sau đây :

0010*	001–	11––
0011*	–011	
1100*	110– *	
1011*	11–0 *	
1101*	1–11	
1110*	11–1 *	
1111*	111– *	

Dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm f là :

$$f = x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3 .$$

Thuật toán Quyne cùng với sự cải tiến của McCluskey gọi chung là thuật toán Quyne – McCluskey. Thuật toán này cho phép tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn từ dạng tuyển chuẩn tắc hoàn toàn.

Dưới đây trình bày thêm phương pháp Blake – Poreski, cho phép tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn từ một dạng tuyển chuẩn tắc tùy ý. Cơ sở của phương pháp này là định lý sau đây :

Định lý 2. *Nếu trong một dạng tuyển chuẩn tắc tùy ý của hàm đại số lôgic $f(x_1, ..., x_n)$ ta liên tiếp thực hiện tất cả các phép dán mở rộng có thể có được rồi sau đó thực hiện tất cả các phép nuốt sơ cấp, thì sẽ thu được dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm f.*

Có thể chứng minh định lý này bằng quy nạp theo số các đối số của hàm f.

Ví dụ 4 : Tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm

$$f = xy\overline{z} \vee zx \vee \overline{x}y$$

Thực hiện liên tiếp các phép dán mở rộng và các phép nuốt sơ cấp ta được :

$$\begin{aligned} f &= xy\overline{z} \vee zx \vee \overline{x}y \\ &= xy\overline{z} \vee zx \vee \overline{x}y \vee xy \vee y\overline{z} \vee yz \\ &= xz \vee \overline{x}y \vee xy \vee y\overline{z} \vee yz \vee y \\ &= xz \vee y \end{aligned}$$

Vậy $xz \vee y$ là dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm f.

Ví dụ 5 : Tìm dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm

$$f = (x + y) \vee (y + z)$$

Ta có :

$$f = \overline{x}y \vee x\overline{y} \vee \overline{y}z \vee y\overline{z}$$

$$= \overline{x}y \vee x\overline{y} \vee \overline{y}z \vee y\overline{z} \vee \overline{x}z \vee x\overline{z}$$

Đó là dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của hàm f. Ví dụ 5 chứng tỏ rằng, dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của một hàm f có thể "dài" hơn dạng nguyên thủy của nó.

4.3. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu

Sau khi tìm được dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn của f, nghĩa là tìm được tất cả các nguyên nhân nguyên tố của nó, ta tiếp tục phương pháp Quyne tìm dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu của f như sau : Lập một bảng chữ nhật, mỗi cột ứng với một cấu tạo đơn vị của f và mỗi dòng ứng với một nguyên nhân nguyên tố của f. Tại ô (i, j), ta đánh dấu + nếu nguyên nhân nguyên tố ở dòng i là một phần con của cấu tạo đơn vị ở cột j. Ta cũng nói rằng khi đó, nguyên nhân nguyên tố i là phủ cấu tạo đơn vị j. Một hệ S các nguyên nhân nguyên tố của f được gọi là phủ hàm f, nếu mọi cấu tạo đơn vị của f đều được phủ ít nhất bởi một thành viên thuộc hệ. Dễ thấy rằng, nếu hệ S là phủ hàm f thì nó là đầy đủ, nghĩa là tuyển của các thành viên trong S là thực hiện f.

Một nguyên nhân nguyên tố được gọi là cốt yếu, nếu thiếu nó thì một hệ các nguyên nhân nguyên tố không thể phủ hàm f. Các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu được tìm như sau : tại những cột chỉ có duy nhất một dấu +, xem dấu + đó thuộc dòng nào thì dòng đó ứng với một nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Việc lựa chọn các nguyên nhân nguyên tố trên bảng đã đánh dấu, để được một dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu, có thể tiến hành theo các bước sau đây :

Bước 1. Phát hiện tất cả các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Bước 2. Xóa tất cả các cột được phủ bởi các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu, tức là tất cả các cột có ít nhất một dấu + tại những dòng ứng với các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu.

Bước 3. Trong bảng còn lại, xóa nốt những dòng không còn dấu +, và sau đó nếu có hai cột giống nhau thì xóa bớt một cột.

Bước 4. Sau các bước trên, tìm một hệ S các nguyên nhân nguyên tố với số biến ít nhất phủ tất cả các cột còn lại.

Tuyển của các nguyên nhân nguyên tố cốt yếu và các nguyên nhân trong hệ S sẽ là dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu của hàm f.

Các bước 1, 2, 3 có tác dụng rút gọn bảng trước khi lựa chọn. Độ phức tạp chủ yếu nằm ở bước 4. Tình huống tốt nhất là mọi nguyên nhân nguyên tố đều là cốt yếu. Trường hợp này không phải lựa chọn gì và hàm f có duy nhất một dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu cũng chính là dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn. Tình huống xấu nhất là không có nguyên nhân nguyên tố nào là cốt yếu. Trường hợp này ta phải lựa chọn toàn bộ bảng. Các thí dụ sau đây minh họa các tình huống có thể xảy ra.

Ví dụ 1 : Tìm dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu của hàm f cho trong ví dụ 1, mục 4.2. Bảng sau khi đã đánh dấu +, có dạng :

	xyz	$\overline{x}yz$	$x\overline{y}z$	$xy\overline{z}$	$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$
xy	+			+	
xz	+		+		
yz	+	+			
$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$					+

Trong trường hợp này mọi nguyên nhân nguyên tố đều là cốt yếu. Hàm f có một dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu, đồng thời cũng là dạng tuyển chuẩn tắc thu gọn :

$$f = xy \vee xz \vee yz \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$$

Ví dụ 2 : Tìm dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu của hàm f cho trong ví dụ 3, mục 4.2. Sau khi đánh dấu +, bảng có dạng :

	$\overline{x}_1\overline{x}_2 x_3\overline{x}_4$	$\overline{x}_1\overline{x}_2 x_3x_4$	$x_1\overline{x}_2 x_3x_4$	$x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4$	$x_1x_2\overline{x}_3x_4$	$x_1x_2x_3\overline{x}_4$	$x_1x_2x_3x_4$
x_1x_2				+	+	+	+
$\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$	+	+					
$\overline{x}_2\,x_3x_4$		+	+				
$x_1x_3x_4$			+				+

Có hai nguyên nhân nguyên tố cốt yếu nằm ở dòng 1 và 2. Sau khi rút gọn, bảng còn hai dòng 3, 4 và một cột 3. Việc chọn S khá đơn giản : có thể chọn một trong hai nguyên nhân nguyên tố còn lại. Vì vậy ta được hai dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu là :

$$f = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3x_4 ;$$

$$f = x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee x_2x_3x_4 .$$

Ví dụ 3 : Tiếp tục ví dụ 5, mục 4.2. Dạng tuyển chuẩn tắc hoàn toàn của hàm f là :

$$f = \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$$

Ta lập bảng

	$\bar{x}\bar{y}z$	$\bar{x}y\bar{z}$	xyz	$x\bar{y}\bar{z}$	$x\bar{y}z$	$xy\bar{z}$
$\bar{x}y$		+	+			
$x\bar{y}$				+	+	
$\bar{y}z$	+				+	
$y\bar{z}$		+				+
$\bar{x}z$	+		+			
$x\bar{z}$				+		+

Không có nguyên nhân nào là nguyên nhân nguyên tố cốt yếu. Trường hợp này phải lựa chọn toàn bộ. Có hai hệ phủ hàm f với số biến ít nhất, chúng tương ứng với hai dạng tuyển chuẩn tắc tối thiểu :

$$f = \bar{x}y \vee \bar{y}z \vee x\bar{z}$$

$$f = x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee \bar{x}z$$

Hệ $\{ \bar{x}y, x\bar{y}, \bar{y}z, y\bar{z} \}$ phủ f không thừa, nó cho ta một dạng tuyển chuẩn tắc nghẽn

$$f = \bar{x}y \vee x\bar{y} \vee \bar{y}z \vee y\bar{z}$$

nhưng không phải là tối thiểu.

4.4. Phương pháp bảng Karnaugh

Phương pháp này dựa trên việc tổ hợp các hội sơ cấp có thể tổ hợp được để loại bỏ các hội sơ cấp của hàm Boole không cần thiết trong *Dạng chuẩn tắc tuyển* (DCTT) của hàm Boole đó.

Trước hết, mô tả phương pháp này đối với hàm Boole có hai biến x, y.

Bảng Karnaugh để tối thiểu hóa hàm Boole 2 biến gồm 4 ô vuông, trong đó hình vuông biểu diễn hội sơ cấp có mặt trong DCTT được đánh số 1. Các ô vuông được gọi là kề nhau nếu các hội sơ cấp trong các ô đó chỉ khác nhau một tục biến (tức là biến có mặt trong hội sơ cấp này là x thì nó có mặt trong hội sơ cấp kia là $\overline{x}$, còn các biến khác giữ nguyên).

Bảng Karnaugh đối với hàm 2 biến x, y là :

	y	$\overline{y}$
x	xy	$x\overline{y}$
$\overline{x}$	$\overline{x}y$	$\overline{x}\,\overline{y}$

Tiếp theo là dựa vào các ô có số 1 kề nhau trong bảng Karnaugh để rút gọn lại thành một hội sơ cấp chỉ gồm 1 biến.

Chú ý : Nếu tất cả bốn ô đều có số 1 thì có thể rút gọn bốn hội sơ cấp thành một số hạng.

Ví dụ 4.

Cho $f(x, y) = x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y \vee \overline{x} \wedge \overline{y}$. Hãy tối thiểu hóa f(x,y) bằng bảng Karnaugh.

Giải : Bảng Kranaugh của f(x,y) có dạng :

	y	$\overline{y}$
x		1
$\overline{x}$	1	1

Có 3 ô kề nhau, nên ta có thể tổ hợp các hội sơ cấp $\overline{x} \wedge y$ và $\overline{x} \wedge \overline{y}$ được biểu thức $\overline{x}$ và tổ hợp hội sơ cấp $x \wedge \overline{y}$ với $\overline{x} \wedge \overline{y}$ ta được $\overline{y}$. Hay dạng tối thiểu hóa của $f(x,y) = \overline{x} \vee \overline{y}$.

b) Bảng Karnaugh cho hàm Boole 3 biến x, y, z là một hình chữ nhật chia thành 8 ô có dạng sau :

	$y \wedge z$	$y \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge z$
x			1	
$\overline{x}$			1	

$$\overline{y} \wedge \overline{z} = x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}$$

	$y \wedge z$	$y \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge z$
x				
$\overline{x}$	1			1

$$\overline{x} \wedge z = \overline{x} \wedge y \wedge z \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z$$

	$y \wedge z$	$y \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge z$
x		1	1	
$\overline{x}$		1	1	

$$\overline{z} = x \wedge y \wedge \overline{z} \vee x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}$$

	$y \wedge z$	$y \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge z$
x				
$\overline{x}$	1	1	1	1

$$\overline{x} = \overline{x} \wedge y \wedge z \vee \overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z$$

	$y \wedge z$	$y \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge z$
x	1	1	1	1
$\overline{x}$	1	1	1	1

$$1 = x \wedge y \wedge z \vee x \wedge y \wedge \overline{z} \vee x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee x \wedge \overline{y} \wedge z \vee$$
$$\vee\ \overline{x} \wedge y \wedge z \vee \overline{x} \wedge y \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z.$$

Để tối thiểu hóa hàm Boole ba biến f(x, y, z) ta lập bảng Karnaugh cho f (x, y, z).

• Các khối gồm hai ô kề nhau chứa các hội sơ cấp có thể tổ hợp với nhau thành hội sơ cấp.

• Các khối gồm 4 ô kề nhau có thể tổ hợp các hội sơ cấp thành một hội sơ cấp gồm một biến duy nhất.

• Khối gồm tất cả các ô kề nhau thì f(x, y, z) = 1

Ví dụ 5.

Cho

$$F(x, y, z) = (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}).$$

Hãy tối thiểu hóa hàm Boole trên bằng bảng Karnaugh.

Giải : Bảng Karnaugh của hàm này là :

	$y \wedge z$	$y \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge z$
x		1	1	
$\overline{x}$	1		1	

Tổ hợp 2 ô kề nhau : $x \wedge y \wedge \overline{z} \vee x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} = x \wedge \overline{z}$

Tổ hợp 2 ô kề nhau : $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} = \overline{y} \wedge \overline{z}$.

Vậy khai triển tối thiểu hóa của

$$f(x, y, z) = (x \wedge \overline{z}) \vee (\overline{y} \wedge \overline{z}) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge z).$$

BÀI TẬP

A - Bài tập có lời giải

Bài 1.

Biểu diễn :

a) $A \rightarrow B$, $A \sim B$ bởi $\vee$; $\wedge$ và bổ sung (/)

b) $A \vee B$ bởi $\wedge$ và (')

c) $A \wedge B$ bởi $\vee$ và (')

d) A', $A \vee B$ và $A \wedge B$ bởi hàm Sheffer :

$$\varphi(A,B) = \overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

e) $A \vee B$ bởi $\rightarrow$

Giải :

a) $A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$

$A \sim B$ $(A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A) = (\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{B} \vee A) = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge \overline{B})$;

b) $A \vee B = \overline{\overline{A} \wedge \overline{B}}$; c) $A \wedge B = \overline{\overline{A} \vee \overline{B}}$;

d) $\overline{A} = \varphi(A, A)$ $\qquad\qquad \overline{\varphi(A,B) \vee \varphi(A,B)}$

$$A \vee B = \overline{\overline{A \vee B}} = \overline{\varphi(A,B)} = \varphi(\varphi(A, B), \varphi(A,B))$$

$$A \wedge B = \varphi(\overline{A}, \overline{B}) = \varphi(\varphi(A,A), \varphi(B, B))$$

$$= \overline{\overline{A} \vee \overline{B}} \qquad \varphi(A, A) = \overline{A \vee A}$$

$$\varphi(B, B) = \overline{B \vee B}$$

A	B	A→B	$\overline{A}$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1

e) $A \vee B = (A \to B) \to B$

A	B	$A \vee B$	A→B	(A→B) → B
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Bài 2.

Các mệnh đề sau đây có đúng không ?

a) Nếu mệnh đề P sai thì mệnh đề "P⇒ Q" luôn luôn đúng.

b) Nếu mệnh đề P đúng thì mệnh đề "P⇒ Q" chỉ đúng khi Q đúng.

Giải :

a) $(P \Rightarrow Q) = (\overline{P} \vee Q)$

Nếu P là sai thì $\overline{P}$ là đúng và $\overline{P} \vee Q$ luôn luôn đúng.

b) Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai và $\overline{P} \vee Q$ là đúng chỉ khi Q là đúng.

Bài 3.

Cho P, Q và R là 3 mệnh đề. Chứng minh rằng :

$$((P + Q) \Rightarrow PR) \Leftrightarrow (P' + R)(Q' + P)(Q' + R)$$

Giải :

$[(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge R)] \Leftrightarrow (\overline{P} \vee R) \wedge (\overline{Q} \vee P) \wedge (\overline{Q} \vee R)$?

$[(P \vee Q) \Rightarrow (P \wedge R)] \Leftrightarrow \overline{(P \vee Q)} \vee (P \wedge R) \Leftrightarrow (\overline{P} \wedge \overline{Q}) \vee (P \wedge R)$

$\Leftrightarrow [\overline{P} \vee (P \wedge R)] \wedge [\overline{Q} \vee (P \wedge R)]$

$\Leftrightarrow [(\overline{P} \vee P) \wedge (\overline{P} \vee R)] \wedge [(\overline{Q} \vee P) \wedge (\overline{Q} \vee R)]$

$\Leftrightarrow (\overline{P} \vee R) \wedge (\overline{Q} \vee P) \wedge (\overline{Q} \vee R).$

Bài 4.

Tìm dạng tuyển chuẩn tắc cho các hàm sau :

1) $\overline{(x \vee z)}(x \rightarrow y)$

2) $(x \sim y)\ \overline{(z \rightarrow t)}$

3) $x \vee yz$

4) $xy\bar{x}z \vee xt$

5) $\overline{xy} \vee yzt \vee \bar{x}yzt$

Giải :

1. $\overline{(x \vee z)}(x \rightarrow y) = \bar{x}\bar{z}(\bar{x} \vee y) = \bar{x}\bar{z}\bar{x} \vee \bar{x}\bar{z}y = \bar{x}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$

$= \bar{x}\bar{z}(y \vee \bar{y}) \vee \bar{x}y\bar{z} = \bar{x}\bar{z}y \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$

$= \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$

2. $(x \sim y)\ \overline{(z \rightarrow t)} = (\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})\overline{(\bar{z} \vee t)} =$

$(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})(z\bar{t}) = \underbrace{\bar{x}xz\bar{t}}_{\text{loại}} \vee \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee yxz\bar{t} \vee \underbrace{y\bar{y}z\bar{t}}_{\text{loại}}$

$= \bar{x}\bar{y}z\bar{t} \vee xyz\bar{t}.$

3. $x \vee yz = x(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z}) \vee (x \vee \bar{x})yz$

$= xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xyz \vee \bar{x}yz$

$= xyz \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz.$

4. $\underbrace{xy\bar{x}z}_{=0} \vee xt = xt = x(y \vee \bar{y})(z \vee \bar{z})t =$

$= xyzt \vee x\bar{y}zt \vee xy\bar{z}t \vee x\bar{y}\bar{z}t.$

5. $\bar{x}y \vee yzt \vee \bar{x}yzt = \bar{x}\,\bar{y}(z \vee \bar{z})(t \vee \bar{t}) \vee (x \vee \bar{x})yzt \vee \bar{x}yzt$

$= \bar{x}\,\bar{y}xt \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}t \vee \bar{x}\,\bar{y}z\bar{t} \vee \bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z}\,\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}yzt.$

Bài 5.

Tìm dạng hội chuẩn tắc hoàn toàn cho các hàm sau :

a) $\overline{(x \vee z)}(x \to y)$; b) $(x \vee y)(y \vee z)(z \vee t)$; c) $x(y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z)$

Giải :

a) $\overline{(x \vee z)}(x \to y) = \bar{x}\,\bar{z}(\bar{x} \vee y) = (\bar{x} \vee y\bar{y} \vee z\bar{z})(x\bar{x} \vee y\bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z\bar{z})$

$= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \vee$

$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) =$

$= (\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \times$

$\times\ (x \vee \bar{y} \vee z).$

b) $(x \vee y)(y \vee z)(z \vee t) = (x \vee y \vee z\bar{z} \vee t\bar{t})(x\bar{x} \vee y \vee z \vee t\bar{t})(x\bar{x} \vee y\bar{y} \vee z \vee t) =$

$= (x \vee y \vee z \vee t)(x \vee y \vee \bar{z} \vee t)(x \vee y \vee z \vee t)(x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t}) \times$

$(x \vee y \vee z \vee t)(\bar{x} \vee y \vee z \vee t)(x \vee y \vee z \vee \bar{t})(\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t}) \times$

$(x \vee y \vee z \vee t)(\bar{x} \vee y \vee z \vee t)(x \vee \bar{y} \vee z \vee t)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t) =$

$= (x \vee y \vee z \vee t)(x \vee y \vee \bar{z} \vee t)(x \vee y \vee z \vee \bar{t})(x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t}) \times$

$\times\ (\bar{x} \vee y \vee z \vee t)(\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t})(x \vee \bar{y} \vee z \vee t)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t).$

c) $x(y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z) = (x \vee y\bar{y} \vee z\bar{z})(x\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z) =$

$= (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee y \vee \bar{z}) \times$

$\times\ (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})(x \vee y \vee z) = (x \vee y \vee z)(x \vee \bar{y} \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})$

$(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$

Bài 6.

a) Tối thiểu hóa hàm Boole

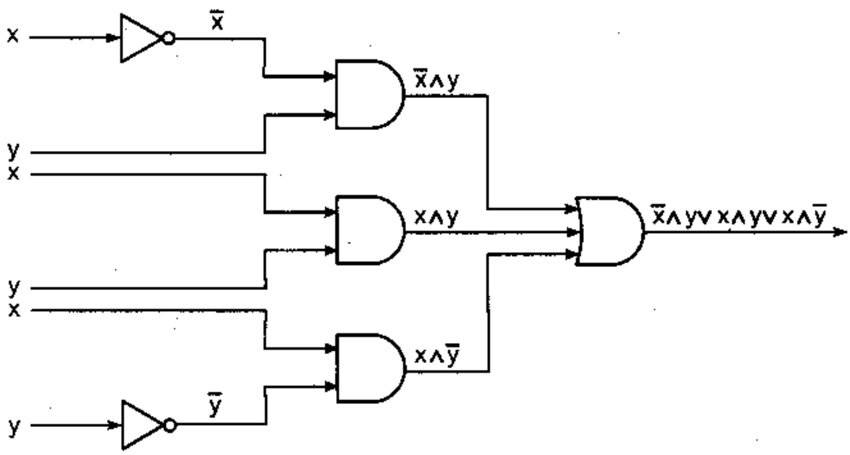
$$f(x,y) = \bar{x} \wedge y \vee x \wedge y \vee x \wedge \bar{y}$$

b) Thiết kế mạch tổ hợp của f(x,y) ở dạng nguyên gốc và dạng tối thiểu hóa.

Giải : a) Ta có $f(x,y) = (\overline{x} \vee x) \wedge y \vee x \wedge (y \vee \overline{y})$

Từ đó ta có dạng $f(x,y) = 1 \wedge y \vee x \wedge 1 = y \vee x$

b) Mạch tổ hợp của $f(x, y) = \overline{x} \wedge y \vee x \wedge y \vee x \wedge \overline{y}$ có dạng



Mạch tổ hợp của dạng tối thiểu của $f(x,y) = y \vee x$ là

Bài 7.

Cho hàm Boole $f(x, y) = x \wedge \overline{y} \vee \overline{x}\ \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y$

a) Tìm dạng tối thiểu hóa của hàm Boole

$$f(x, y) = x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y$$

b) Thiết kế mạch tổ hợp của $f(x, y) = x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y$ và mạch tổ hợp của dạng tối thiểu hóa của nó.

Giải :

a) $f(x, y) = x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y$

$= (x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge \overline{y}) \vee (\overline{x} \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y)$

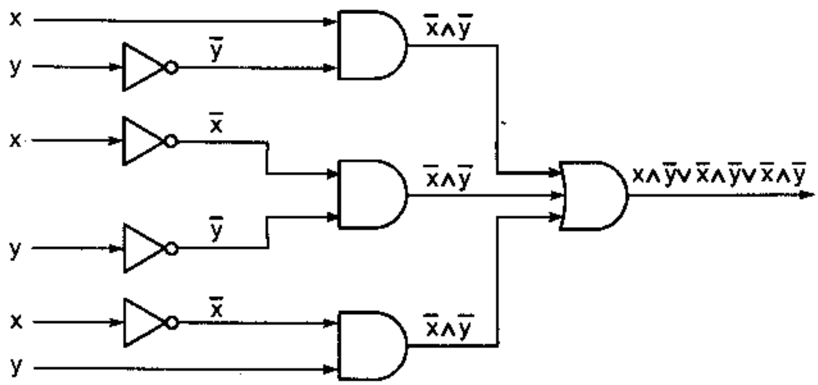
$= (x \vee \overline{x}) \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge (\overline{y} \vee y)$

$= 1 \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge 1$

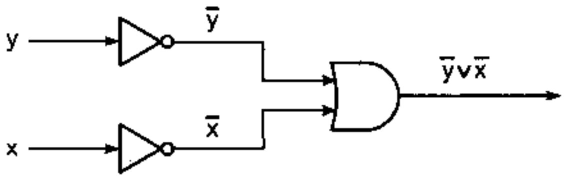
$= \overline{y} \vee \overline{x}$

Dạng tối thiểu của $f(x,y)$ là $\overline{y} \vee \overline{x}$.

b) Mạch tổ hợp của $f(x, y) = x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y$ là :



Mạch của $f(x,y) = \overline{y} \vee \overline{x}$ là :



Bài 8.

Tối thiểu hóa hàm Boole

$$f(x, y, z) = x \wedge \overline{y} \wedge z \vee x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge y \wedge z \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}.$$

Giải : Bảng Karnaugh có dạng :

	$y \wedge z$	$y \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge \overline{z}$	$\overline{y} \wedge z$
x			1	1
$\overline{x}$	1		1	1

Tổ hợp các ô liền nhau : $x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee x \wedge \overline{y} \wedge z = x \wedge \overline{y}$

$$\overline{x} \wedge \overline{y} \wedge \overline{z} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \wedge z = \overline{x} \wedge \overline{z}.$$

Vậy dạng tối thiểu của

$$f(x, y, z) = x \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y \wedge z = \overline{y} \vee \overline{x} \wedge y \wedge z .$$

B – Bài tập tự giải

1. Tìm giá trị của biến Boole x thỏa mãn

$$x.y = x + y$$

2. Chứng minh các đẳng thức sau trong một đại số Boole

a) $x + \overline{x}y = x + y$

b) $xy + yz + zx = (x + y)(y + z)(z + x)$

c) $(x + y)(y + z)(z + \overline{x}) = \overline{x}y + yz + zx = (x + y)(\overline{x} + z) = \overline{x}y + xz$

d) $ax + b\overline{x} = (a + b)(a + \overline{x})(b + x) = (a + \overline{x})(b + x)$

3. Tìm dạng tuyển chuẩn tắc của hàm Boole

a) $f(x, y, z) = (x \vee y) \wedge \overline{z}$ b) $f(x, y) = \overline{x} \vee y$

c) $f(x, y) = \overline{y}$ d) $f(x, y, z) = x \vee y \vee z$

4. Tìm tích boole của các biến x, y, z hoặc phần bù của chúng, biết rằng tích đó có giá trị 1 nếu và chỉ nếu :

a) $x = y = 0, z = 1$ b) $x = 0, y = 1, z = 0$

c) $x = 0, y = z = 1$ d) $x = y = z = 0$

5. Rút gọn các biểu thức sau bằng phương pháp Quine – McCluskey

a) $xy\overline{z} + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + x\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}z$

b) $x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}yz + xyz$

6. Dùng phương pháp Karnaugh để rút gọn các biểu thức sau

a) $xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{yz}$

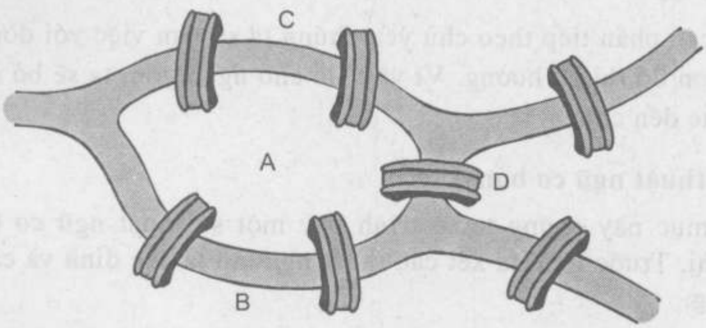
b) $x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$

c) $xyz + xy\overline{z} + x\overline{y}z + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}yz + \overline{x}\,\overline{y}z + \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$.

Chương 4
ĐỒ THỊ VÀ CÂY

I – ĐỒ THỊ

1.1. Các khái niệm cơ bản của lý thuyết đồ thị



Hình 1. Thành phố Konigsberg ở thế kỷ 18
(Kaliningrad)

Lý thuyết đồ thị là một lĩnh vực nghiên cứu đã có từ lâu và có nhiều ứng dụng hiện đại. Những tư tưởng cơ bản của lý thuyết đồ thị được đề xuất vào những năm đầu của thế kỷ 18 bởi nhà toán học lỗi lạc người Thụy Sỹ Leonhard Euler. Chính ông là người đã sử dụng đồ thị để giải bài toán nổi tiếng về các cái cầu ở thành phố Konigsberg.

Đồ thị được sử dụng để giải các bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau : trong giải tích mạch điện, cấu trúc phân tử, mô hình đồ thị của mạng máy tính, mạng giao thông.

1. Định nghĩa đồ thị

Đồ thị là một cấu trúc rời rạc bao gồm các đỉnh và các cạnh nối các đỉnh này. Người ta phân biệt các loại đồ thị khác nhau bởi *kiểu* và *số lượng* cạnh nối hai đỉnh nào đó của đồ thị.

ĐỊNH NGHĨA 1. *Đơn đồ thị vô hướng G = (V,E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh.*

ĐỊNH NGHĨA 2. *Đa đồ thị vô hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là họ các cặp không có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cạnh. Hai cạnh e_1 và e_2 được gọi là cạnh lặp nếu chúng cùng tương ứng với một cặp đỉnh.*

ĐỊNH NGHĨA 3. *Đơn đồ thị có hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là tập các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung.*

ĐỊNH NGHĨA 4. *Đa đồ thị có hướng G = (V, E) bao gồm V là tập các đỉnh và E là họ các cặp có thứ tự gồm hai phần tử khác nhau của V gọi là các cung. Hai cung e_1, e_2 tương ứng với cùng một cặp đỉnh được gọi là cung lặp.*

Trong các phần tiếp theo chủ yếu chúng ta sẽ làm việc với đơn đồ thị vô hướng và đơn đồ thị có hướng. Vì vậy, để cho ngắn gọn, ta sẽ bỏ qua tính **từ** *đơn* khi nhắc đến chúng.

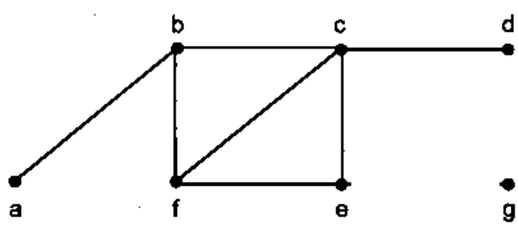
2. Các thuật ngữ cơ bản

Trong mục này chúng ta sẽ trình bày một số thuật ngữ cơ bản của lý thuyết đồ thị. Trước tiên, ta xét các thuật ngữ mô tả các đỉnh và cạnh của đồ thị vô hướng.

ĐỊNH NGHĨA 1. *Hai đỉnh u và v của đồ thị vô hướng G được gọi là kề nhau nếu (u, v) là cạnh của đồ thị G. Nếu e = (u, v) là cạnh của đồ thị thì ta nói cạnh này là liên thuộc với hai đỉnh u và v hoặc cũng nói là cạnh e là nối đỉnh u và đỉnh v, đồng thời các đỉnh u và v sẽ được gọi là các đỉnh đầu và cuối của cạnh (u, v).*

Để có thể biết có bao nhiêu cạnh liên thuộc với một đỉnh, ta đưa vào định nghĩa sau.

ĐỊNH NGHĨA 2. *Ta gọi bậc của đỉnh v trong đồ thị vô hướng là số cạnh liên thuộc với nó và sẽ ký hiệu là deg(v).*



***Hình 4.1.** Đồ thị vô hướng G*

Ví dụ 1. Xét đồ thị cho trong hình 4.1, ta có.

$$\deg(a) = 1, \deg(b) = 3, \deg(c) = 4, \deg(f) = 3,$$
$$\deg(d) = 1, \deg(e) = 2, \deg(g) = 0$$

Đỉnh bậc 0 gọi là *đỉnh cô lập*. Đỉnh bậc 1 được gọi là *đỉnh treo*. Trong ví dụ trên đỉnh g là đỉnh cô lập, a và d là các đỉnh treo. Bậc của đỉnh có tính chất sau :

Định lý 1 : Giả sử G = (V, E) là đồ thị vô hướng với m cạnh. Khi đó

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

Chứng minh : Rõ ràng mỗi cạnh e = (u, v) được tính một lần trong deg(u) và một lần trong deg(v). Từ đó suy ra tổng tất cả các bậc của các đỉnh bằng hai lần số cạnh.

Ví dụ 2 : Đồ thị của n đỉnh và mỗi đỉnh của bậc là 6 có bao nhiêu cạnh ?

Giải : Theo định lý 1, ta có 2m = 6n. Từ đó suy ra số cạnh của đồ thị là $m = \frac{6n}{2} = 3n$.

Hệ quả : *Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ (nghĩa là có bậc là số lẻ) là một số chẵn.*

Chứng minh : Thực vậy, gọi O và U tương ứng là tập đỉnh bậc lẻ và tập đỉnh bậc chẵn của đồ thị. Ta có :

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v) = \sum_{v \in O} \deg(v) + \sum_{v \in U} \deg(v)$$

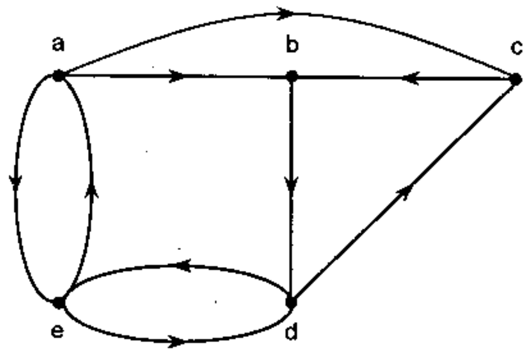
Do deg(v) là chẵn với v là đỉnh trong U nên tổng thứ hai trong vế phải ở trên là số chẵn. Từ đó suy ra tổng thứ nhất (chính là tổng bậc của các đỉnh bậc lẻ) cũng phải là số chẵn ; do tất cả các số hạng của nó là số lẻ, nên tổng này phải gồm một số chẵn các số hạng. Vì vậy, số đỉnh bậc lẻ phải là số chẵn.

Ta xét các thuật ngữ tương tự cho đồ thị có hướng.

ĐỊNH NGHĨA 3 : *Nếu e = (u, v) là cung của đồ thị có hướng G thì ta nói hai đỉnh u và v là kề nhau và nói cung (u, v) nối đỉnh u với đỉnh v hoặc cũng nói cung này là đi ra khỏi đỉnh u và đi vào đỉnh v. Đỉnh u(v) sẽ được gọi là đỉnh đầu (cuối) của cung (u, v).*

Tương tự như khái niệm bậc, đối với đồ thị có hướng ta có khái niệm bậc ra (vào) của một đỉnh.

ĐỊNH NGHĨA 4. *Ta gọi bán bậc ra (bán bậc vào) của đỉnh v trong đồ thị có hướng là số cung của đồ thị đi ra khỏi nó (đi vào nó) và ký hiệu là* $\deg^+(v)$ $(\deg^-(v))$.



Hình 4.2. Đồ thị có hướng G

Ví dụ 3. Xét đồ thị cho trong hình 4.2. Ta có :

$$\deg^-(a) = 1,\ \deg^-(b) = 2,\ \deg^-(c) = 2\ ;\ \deg^-(d) = 2,\ \deg^-(e) = 2.$$

$$\deg^+(a) = 3,\ \deg^+(b) = 1,\ \deg^+(c) = 1,\ \deg^+(d) = 2,\ \deg^+(e) = 2.$$

Do mỗi cung (u, v) sẽ được tính một lần trong bán bậc vào của đỉnh v và một lần trong bán bậc ra của đỉnh u nên ta có :

Định lý 2 : Giả sử G = (V, E) là đồ thị có hướng. Khi đó :

$$\sum_{v \in V} \deg^+(v) = \sum_{v \in V} \deg^-(v) = |E|$$

Rất nhiều tính chất của đồ thị có hướng không phụ thuộc vào hướng trên các cung của nó. Vì vậy, trong nhiều trường hợp sẽ thuận tiện hơn nếu ta bỏ qua hướng trên các cung của đồ thị. Đồ thị vô hướng thu được bằng cách bỏ qua hướng trên các cung được gọi là đồ thị vô hướng tương ứng với đồ thị có hướng đã cho.

3. Hành trình, chu trình. Đồ thị liên thông

ĐỊNH NGHĨA 1. *Hành trình* độ dài n *từ đỉnh u đến đỉnh v, trong đó n là số nguyên dương, trên đồ thị vô hướng G = (V, E) là dãy*

$$x_o, x_1 \ldots, x_{n-1}, x_n$$

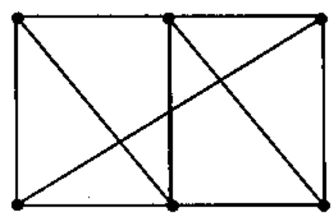
trong đó $u = x_o$, $v = x_n$, $(x_i, x_{i+1}) \in E$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

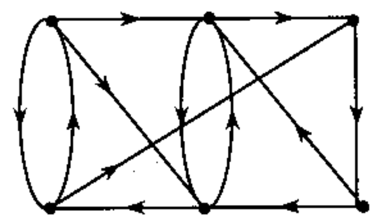
Hành trình nói trên có thể biểu diễn dưới dạng dãy các cạnh :

$$(x_o, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n).$$

Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v gọi là đỉnh cuối của hành trình. Hành trình có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là u = v) được gọi là chu trình. *Hành trình hay chu trình được gọi là* đơn *nếu như không có cạnh nào bị lặp lại.*

Ví dụ 1. Trên đồ thị vô hướng cho trong hình 4.3 : a, d, c, f, e là hành trình đơn độ dài 4. Còn d, e, c, a không là hành trình, do (e, c) không phải là cạnh của đồ thị. Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 4. Hành trình a, b, e, d, a, b có độ dài là 5 không phải là hành trình đơn, do cạnh (a, b) có mặt trong nó hai lần.





Hình 4.3. Đường đi trên đồ thị

Khái niệm hành trình và chu trình trên đồ thị có hướng được định nghĩa hoàn toàn tương tự như trường hợp đồ thị vô hướng, chỉ khác là ta có chú ý đến hướng trên các cung.

ĐỊNH NGHĨA 2. Đường đi độ dài n *từ đỉnh u đến đỉnh v, trong đó n là số nguyên dương, trên đồ thị có hướng G = (V, A) là dãy*

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$$

trong đó $u = x_0$, $v = x_n$, $(x_i, x_{i+1}) \in A$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Đường đi nói trên còn có thể biểu diễn dưới dạng dãy các cung :

$$(x_0, x_1), (x_1, x_2) \ldots, (x_{n-1}, x_n)$$

Đỉnh u gọi là đỉnh đầu, còn đỉnh v gọi là đỉnh cuối của đường đi. Đường đi có đỉnh đầu trùng với đỉnh cuối (tức là u = v) được gọi là chu trình. Đường đi hay chu trình được gọi là đơn nếu như không có cung nào bị lặp lại.

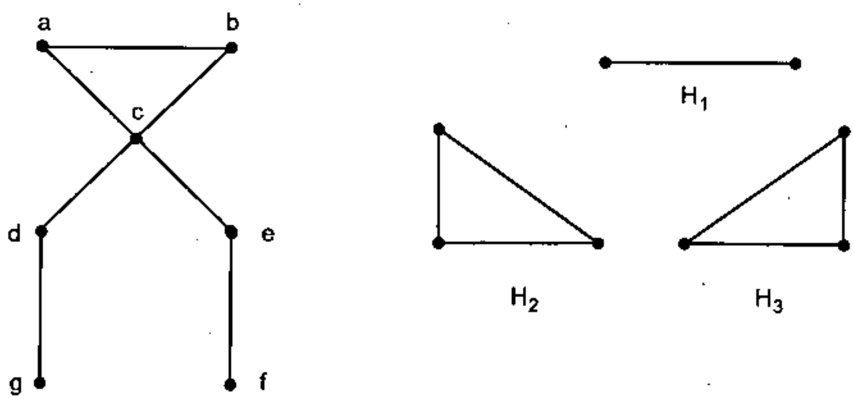
Ví dụ 2. Trên đồ thị có hướng cho trong hình 4.3 : a, d, c, f, e là đường đi đơn độ dài 4. Còn d, e, c, a không là đường đi, do (e, c) không phải là cung của đồ thị. Dãy b, c, f, e, b là chu trình độ dài 4. Đường đi a, b, e, d, a, b có độ dài là 5 không phải là đường đi đơn, do cung (a, b) có mặt trong nó hai lần.

Xét một mạng máy tính. Một câu hỏi đặt ra là hai máy tính bất kỳ trong mạng này có thể trao đổi thông tin được với nhau hoặc là trực tiếp qua kênh nối chúng hoặc thông qua một hoặc vài máy tính trung gian trong mạng ? Nếu sử dụng đồ thị để biểu diễn mạng máy tính này (trong đó các đỉnh của đồ thị tương ứng với các máy tính, còn các cạnh tương ứng với các kênh nối) câu hỏi đó được phát biểu trong ngôn ngữ đồ thị như sau : Tồn tại hay chặng đường đi giữa mọi cặp đỉnh của đồ thị ?

ĐỊNH NGHĨA 3. *Đồ thị vô hướng G = (V, E) được gọi là liên thông nếu luôn tìm được hành trình giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.*

Như vậy hai máy tính bất kỳ trong mạng có thể trao đổi thông tin được với nhau khi và chỉ khi đồ thị tương ứng với mạng này là đồ thị liên thông.

Ví dụ 3 : Trong hình 4.4, đồ thị G là liên thông, còn đồ thị H là không liên thông.



Hình 4.4. Đồ thị liên thông G và đồ thị H gồm 3 thành phần liên thông H_1, H_2, H_3

ĐỊNH NGHĨA 4. *Ta gọi đồ thị con của đồ thị G = (V, E) là đồ thị H = (W, F), trong đó $W \subseteq V$ và $F \subseteq E$.*

Trong trường hợp đồ thị là không liên thông, nó sẽ rã ra thành một số đồ thị con liên thông đôi một không có đỉnh chung. Những đồ thị con liên thông như vậy được gọi là các thành phần liên thông của đồ thị.

Ví dụ 4 : Đồ thị H trong hình 4.4 gồm 3 thành phần liên thông H_1, H_2, H_3.

Trong mạng máy tính có thể có những máy (những kênh nối) mà sự hỏng hóc của nó sẽ ảnh hưởng đến việc trao đổi thông tin trong mạng. Các khái niệm tương ứng với tình huống này được đưa ra trong định nghĩa sau.

ĐỊNH NGHĨA 5. *Đỉnh v được gọi là* đỉnh rẽ nhánh *nếu việc loại bỏ v cùng với các cạnh liên thuộc với nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị. Cạnh e được gọi là* cầu *nếu việc loại bỏ nó khỏi đồ thị làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị.*

Ví dụ 5. Trong đồ thị G ở hình 4.4, đỉnh d và e là đỉnh rẽ nhánh, còn các cạnh (d, g) và (e, f) là cầu.

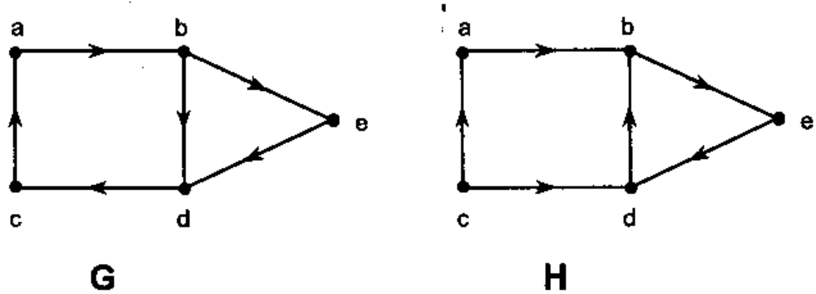
Đối với đồ thị có hướng có hai khái niệm liên thông phụ thuộc vào việc ta có xét đến hướng trên các cung hay không.

ĐỊNH NGHĨA 6. *Đồ thị có hướng G = (V, A) được gọi là liên thông mạnh nếu luôn tìm được đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ của nó.*

ĐỊNH NGHĨA 7. *Đồ thị có hướng G = (V, A) được gọi là liên thông yếu nếu đồ thị vô hướng tương ứng với nó là đồ thị vô hướng liên thông.*

Rõ ràng, nếu đồ thị liên thông mạnh thì nó cũng là liên thông yếu, nhưng điều ngược lại là không luôn đúng, điều này được chỉ ra trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 6. Trong hình 4.5 đồ thị G là liên thông mạnh, còn H là liên thông yếu nhưng không là liên thông mạnh.



Hình 4.5. *Đồ thị liên thông mạnh G ;*
Đồ thị liên thông yếu H.

Một câu hỏi đặt ra là khi nào có thể định hướng các cạnh của một đồ thị vô hướng liên thông để có thể thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh ? Ta sẽ gọi đồ thị như vậy là đồ thị định hướng được. Định lý dưới đây cho ta tiêu chuẩn nhận biết một đồ thị có là định hướng được hay không.

Định lý 1. *Đồ thị vô hướng liên thông là định hướng được khi và chỉ khi mỗi cạnh của nó nằm trên ít nhất một chu trình.*

Chứng minh : Điều kiện cần :

Giả sử (u, v) là một cạnh của đồ thị. Từ sự tồn tại đường đi có hướng từ n đến v và ngược lại, suy ra (u, v) phải nằm trên ít nhất một chu trình.

Điều kiện đủ :

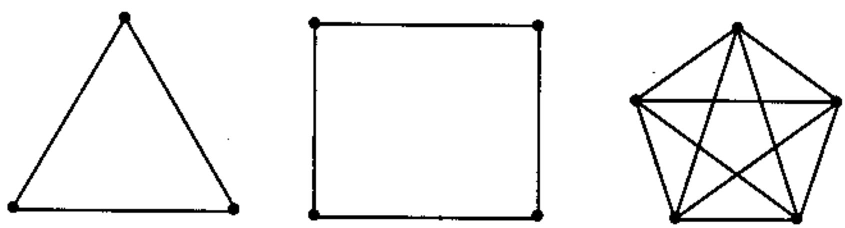
Thủ tục sau đây cho phép định hướng các cạnh của đồ thị để thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh. Giả sử $\mathcal{C}$ là một chu trình nào đó trong đồ thị. Định hướng các cạnh trên chu trình này theo một hướng đi vòng theo nó. Nếu tất cả các cạnh của đồ thị là đã được định hướng thì thủ tục kết thúc. Ngược lại, chọn e là một cạnh chưa định hướng có chung đỉnh với ít nhất một trong số các cạnh đã định hướng. Theo giả thiết tìm được chu trình $\mathcal{C}'$ chứa cạnh e. Định hướng các cạnh chưa được định hướng của $\mathcal{C}'$ theo một hướng dọc theo chu trình này (không định hướng lại các cạnh đã có hướng). Thủ tục trên sẽ được lặp lại cho đến khi tất cả các cạnh của đồ thị được định hướng. Khi đó ta thu được đồ thị có hướng liên thông mạnh.

4. Một số dạng đồ thị đặc biệt

Trong mục này ta xét một số dạng đơn đồ thị vô hướng đặc biệt, xuất hiện trong nhiều vấn đề ứng dụng thực tế.

* *Đồ thị đầy đủ*. Đồ thị đầy đủ n đỉnh, ký hiệu bởi K_n, là đơn vị đồ thị vô hướng mà giữa hai đỉnh bất kỳ của nó luôn có cạnh nối.

Các đồ thị K_3, K_4, K_5 cho trong hình 4.6 dưới đây.



K_2 K_4 K_5

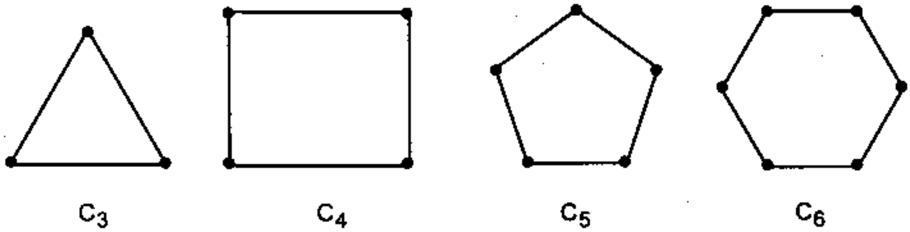
Hình 4.6. Đồ thị đầy đủ

Đồ thị đầy đủ K_n có tất cả $n(n-1) / 2$ cạnh, nó là đơn đồ thị có nhiều cạnh nhất.

* *Đồ thị vòng :* Đồ thị vòng C_n, $n \geq 3$, gồm n đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$ và các cạnh

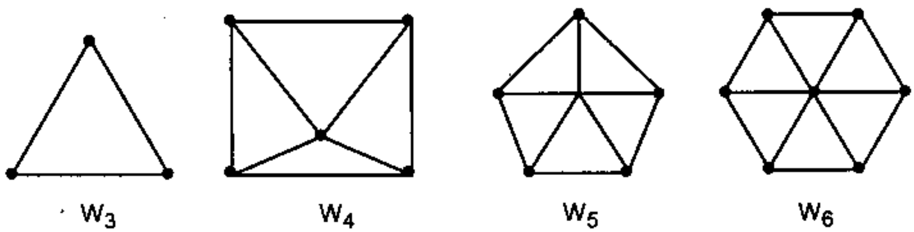
$$(v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1).$$

Đồ thị vòng C_3, C_4, C_5, C_6 cho trong hình 4.7.



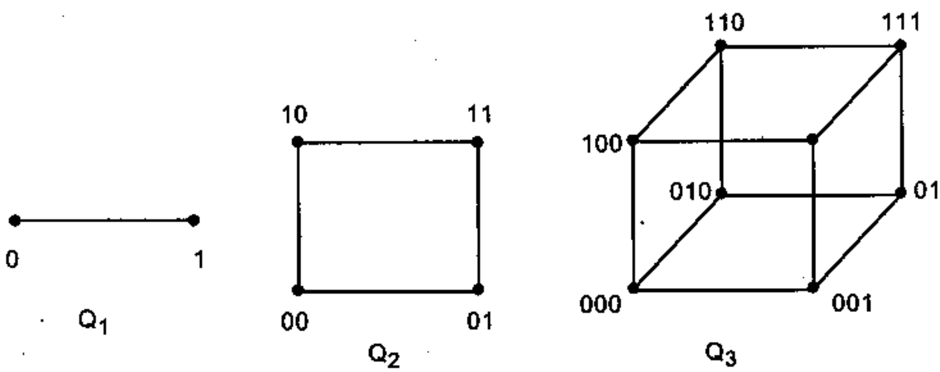
Hình 4.7. Đồ thị vòng C_3, C_4, C_5, C_6

* *Đồ thị bánh xe :* Đồ thị W_n thu được từ C_n bằng cách bổ sung vào một đỉnh mới, nối với tất cả các đỉnh của C_n (hình 4.8).



Hình 4.8. Đồ thị bánh xe W_3, W_4, W_5, W_6

* *Đồ thị lập phương :* Đồ thị lập phương n đỉnh Q_n là đồ thị với các đỉnh biểu diễn 2^n xâu nhị phân độ dài n. Hai đỉnh của nó là kề nhau nếu như hai xâu nhị phân tương ứng chỉ khác nhau 1 bit. Hình 4.9 cho thấy Q_n, với n = 1, 2, 3.



Hình 4.9. Đồ thị lập phương Q_1, Q_2, Q_3

* *Đồ thị hai phía :* Đơn đồ thị G = (V, E) được gọi là hai phía nếu như tập đỉnh V của nó có thể phân hoạch thành hai tập X và Y sao cho mỗi cạnh của đồ thị chỉ nối một đỉnh nào đó trong X với một đỉnh nào đó trong Y. Khi đó ta sẽ sử dụng ký hiệu G = (X ∪ Y, E) để chỉ đồ thị hai phía với tập đỉnh X ∪ Y.

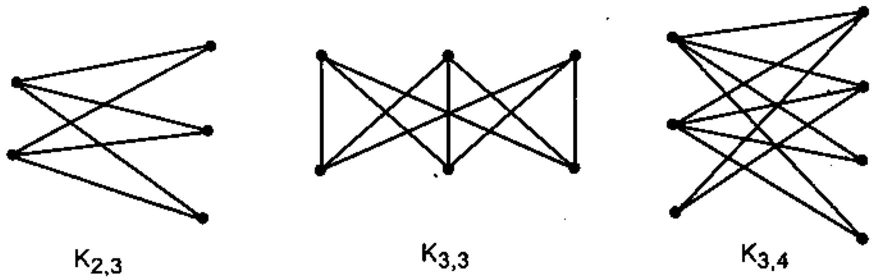
Định lý sau đây cho phép nhận biết một đơn đồ thị có phải là hai phía hay không.

Định lý 2 : *Đơn đồ thị là đồ thị hai phía khi và chỉ khi nó không chứa chu trình độ dài lẻ.*

Để kiểm tra xem một đồ thị liên thông có phải là hai phía hay không, có thể áp dụng thủ tục sau :

Chọn v là một đỉnh bất kỳ của đồ thị. Đặt X = {v}, còn Y là tập các đỉnh kề của v. Khi đó các đỉnh kề của các đỉnh trong Y phải thuộc vào X. Ký hiệu tập các đỉnh như vậy là T. Vì thế nếu phát hiện $T \cap Y \neq \varnothing$ thì đồ thị không phải là hai phía, kết thúc. Ngược lại, đặt $X = X \cup T$. Tiếp tục xét như vậy đối với T' là tập các đỉnh kề của T,...

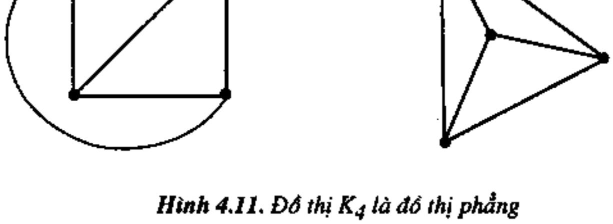
Đồ thị hai phía $G = (X \cup Y, E)$ với $|X| = m$, $|Y| = n$ được gọi là *đồ thị hai phía đầy đủ* và ký hiệu là $K_{m,n}$ nếu mỗi đỉnh trong tập X được nối với mỗi đỉnh trong Y. Các đồ thị $K_{2,3}$, $K_{3,3}$, $K_{3,4}$ được cho trong hình 4.10.



***Hình 4.10.** Đồ thị hai phía*

* *Đồ thị phẳng :* Đồ thị được gọi là *đồ thị phẳng* nếu ta có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài ở đỉnh. Cách vẽ như vậy sẽ được gọi là biểu diễn phẳng của đồ thị.

Ví dụ đồ thị K_4 là phẳng, vì có thể vẽ nó trên mặt phẳng sao cho các cạnh của nó không cắt nhau ngoài ở đỉnh (hình 4.11).



***Hình 4.11.** Đồ thị K_4 là đồ thị phẳng*

Một điểm đáng lưu ý là nếu đồ thị là phẳng thì luôn có thể vẽ nó trên mặt phẳng với các cạnh nối là các đoạn thẳng không cắt nhau ngoài ở đỉnh (ví dụ xem cách vẽ K_4 trong hình 4.11).

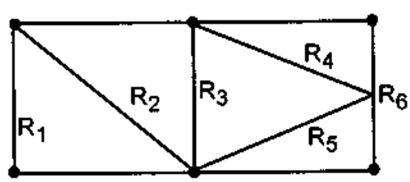
Để nhận biết xem một đồ thị có phải là đồ thị phẳng có thể sử dụng định lý Kuratovski, mà để phát biểu nó ta cần một số khái niệm sau : Ta gọi một *phép chia cạnh* (u, v) của đồ thị là việc loại bỏ cạnh này khỏi đồ thị và thêm vào đồ thị một đỉnh mới w cùng với hai cạnh (u, w), (w, u). Hai đồ thị G = (V, E) và H = (W, F) được gọi là *đồng cấu* nếu chúng có thể thu được từ cùng một đồ thị nào đó nhờ các phép chia cạnh.

Định lý 3 **(Kuratovski) :** *Đồ thị là phẳng khi và chỉ khi nó không chứa đồ thị con đồng cấu với $K_{3,3}$ hoặc K_5.*

Trong trường hợp riêng, đồ thị $K_{3,3}$ và K_5 không phải là đồ thị phẳng. Bài toán về tính phẳng của đồ thị $K_{3,3}$ là bài toán đố nổi tiếng về *ba căn hộ và ba hệ thống cung cấp năng lượng* cho chúng : Cần xây dựng hệ thống đường cung cấp điện, hơi đốt và nước cho ba căn hộ, nối mỗi một trong ba nguồn cung cấp năng lượng với mỗi một căn hộ nói trên sao cho chúng không cắt nhau.

Đồ thị phẳng còn tìm được những ứng dụng quan trọng trong công nghệ chế tạo mạch in.

Biểu diễn phẳng của đồ thị sẽ chia mặt phẳng ra thành các miền, trong đó có thể có cả miền không bị chặn. Ví dụ, biểu diễn phẳng của đồ thị cho trong hình 4.12 chia mặt phẳng ra thành 6 miền R_1, R_2, ..., R_6.



Hình 4.12. Các miền tương ứng với biểu diễn phẳng của đồ thị

Euler đã chứng minh được rằng các cách biểu diễn phẳng khác nhau của một đồ thị đều chia mặt phẳng ra thành cùng một số miền. Để chứng minh điều đó, Euler đã tìm được mối liên hệ giữa số miền, số đỉnh của đồ thị và số cạnh của đồ thị phẳng sau đây.

Định lý 4 **(Công thức Euler) :** *Giả sử G là đồ thị phẳng liên thông với n đỉnh, m cạnh. Gọi r là số miền của mặt phẳng bị chia bởi biểu diễn phẳng của G. Khi đó :*

$$r = m - n + 2$$

Có thể chứng minh định lý bằng quy nạp. Xét ví dụ minh họa cho áp dụng công thức Euler.

Ví dụ : Cho G là đồ thị phẳng liên thông với 20 đỉnh, mỗi đỉnh đều có bậc là 3. Hỏi mặt phẳng bị chia làm bao nhiêu phần bởi biểu diễn phẳng của đồ thị G ?

Giải : Do mỗi đỉnh của đồ thị đều có bậc là 3, nên tổng bậc của các đỉnh là $3 \times 20 = 60$. Từ đó suy ra số cạnh của đồ thị $m = 60/2 = 30$. Vì vậy, theo công thức Euler, số miền cần tìm là

$$r = 30 - 20 + 2 = 12.$$

1.2. Biểu diễn đồ thị trên máy tính

Để lưu trữ đồ thị và thực hiện các thuật toán khác nhau với đồ thị trên máy tính cần phải tìm những cấu trúc dữ liệu thích hợp để mô tả đồ thị. Việc chọn cấu trúc dữ liệu nào để biểu diễn đồ thị có tác động rất lớn đến hiệu quả của thuật toán. Vì vậy, việc chọn lựa cấu trúc dữ liệu để biểu diễn đồ thị phụ thuộc vào từng tình huống cụ thể (bài toán và thuật toán cụ thể). Trong mục này chúng ta sẽ xét một số phương pháp cơ bản được sử dụng để biểu diễn đồ thị trên máy tính, đồng thời cũng phân tích một cách ngắn gọn những ưu điểm cũng như những nhược điểm của chúng.

1. Ma trận kề. Ma trận trọng số

Xét đơn đồ thị vô hướng $G = (V, E)$, với tập đỉnh $V = \{1, 2, ..., n\}$, tập cạnh $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$. Ta gọi ma trận kề của đồ thị G là (0, 1) – ma trận

$$A = \{a_{ij} : i, j = 1, 2, ..., n\}$$

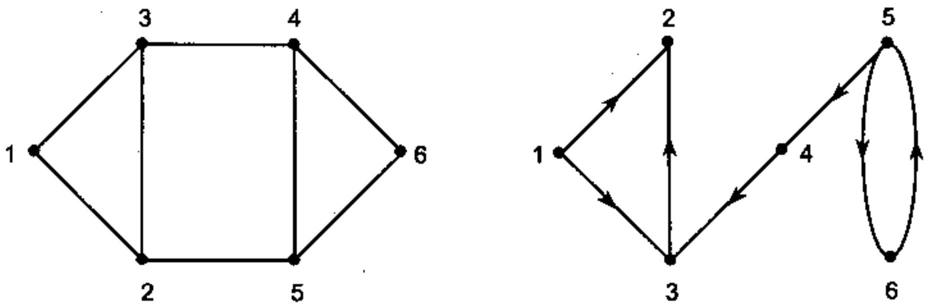
với các phần tử được xác định theo quy tắc sau đây :

$$a_{ij} = 0, \text{ nếu } (i, j) \notin E \text{ và } a_{ij} = 1, \text{ nếu } (i, j) \in E,$$

$$i, j = 1, 2, ..., n.$$

Ví dụ 1 : Ma trận kề của đồ thị vô hướng G cho trong hình 4.13 là

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$



G $\quad\quad$ G_1

Hình 4.13. Đồ thị vô hướng G và đồ thị có hướng G_1

Các tính chất của ma trận kề :

1. Rõ ràng ma trận kề của đồ thị vô hướng là ma trận đối xứng, tức là

$$a[i, j] = a[j, i], \ i, j = 1, 2, ..., n.$$

Ngược lại, mỗi (0, 1) – ma trận đối xứng cấp n sẽ tương ứng, chính xác đến cách đánh số đỉnh (còn nói là : chính xác đến đẳng cấu), với một đơn đồ thị vô hướng n đỉnh.

2. Tổng các phần tử trên dòng i (cột j) của ma trận kề chính bằng bậc của đỉnh i (đỉnh j).

3. Nếu ký hiệu

$$a_{ij}^{p}, \ i, j = 1, 2, ..., n$$

là các phần tử của ma trận

$$A^{p} = \underbrace{A.\ A...A}_{\text{p thừa số}}$$

Khi đó

$$a_{ij}^{p},\ i, j = 1, 2, ..., n$$

cho ta số đường đi khác nhau từ đỉnh i đến đỉnh j qua p – 1 đỉnh trung gian.

Ma trận kề của đồ thị có hướng được định nghĩa một cách hoàn toàn tương tự.

Ví dụ 2 : Đồ thị có hướng G_1 cho trong hình 4.13 có ma trận kề là ma trận sau :

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}$$

Lưu ý rằng ma trận kề của đồ thị có hướng không phải là ma trận đối xứng.

Chú ý : Trên đây chúng ta chỉ xét đơn đồ thị. Ma trận kề của đa đồ thị có thể xây dựng hoàn toàn tương tự, chỉ khác là thay vì ghi 1 vào vị trí a[i, j] nếu (i, j) là cạnh của đồ thị, chúng ta sẽ ghi k là số cạnh nối hai đỉnh i và j.

Trong rất nhiều vấn đề ứng dụng của lý thuyết đồ thị, mỗi cạnh e = (u, v) của đồ thị được gán với một con số c(e) (còn viết là c(u, v) gọi là trọng số của cạnh e. Đồ thị trong trường hợp như vậy được gọi là đồ thị có trọng số. Trong trường hợp đồ thị có trọng số, thay vì ma trận kề, để biểu diễn đồ thị ta sử dụng ma trận trọng số

$$C = c[i, j],\ \ i, j = 1, 2, ..., n$$

với

$$c[i, j] = c(i, j) \qquad \text{nếu } (i, j) \in E$$

và

$$c[i, j] = \theta, \qquad \text{nếu } (i, j) \notin E$$

trong đó số θ, tùy từng trường hợp cụ thể, có thể được đặt bằng một trong các giá trị sau : 0, +∞, – ∞.

Ưu điểm lớn nhất của phương pháp biểu diễn đồ thị bằng ma trận kề (hoặc ma trận trọng số) là để trả lời câu hỏi : Hai đỉnh u, v có kề nhau trên đồ thị hay không, chúng ta chỉ phải thực hiện một phép so sánh. Nhược điểm lớn nhất của phương pháp này là : không phụ thuộc vào số cạnh của đồ thị, ta luôn phải sử dụng n^2 đơn vị bộ nhớ để lưu trữ ma trận kề của nó.

2. Danh sách cạnh (cung)

Trong trường hợp đồ thị thưa (đồ thị có số cạnh m thỏa mãn bất đẳng thức : m < 6n) người ta thường dùng cách biểu diễn đồ thị dưới *dạng danh sách cạnh*.

Trong cách biểu diễn đồ thị bởi danh sách cạnh (cung) chúng ta sẽ lưu trữ danh sách tất cả các cạnh (cung của đồ thị vô hướng (có hướng). Mỗi cạnh (cung) e = (x, y) của đồ thị sẽ tương ứng với hai biến Dau[e], Cuoi[e]. Như vậy, để lưu trữ đồ thị ta cần sử dụng 2m đơn vị bộ nhớ. Nhược điểm của cách biểu diễn này là để xác định những đỉnh nào của đồ thị là kề với một đỉnh cho trước chúng ta phải làm cỡ *m* phép so sánh (khi duyệt qua danh sách tất cả các cạnh của đồ thị).

➤ *Chú ý :* Trong trường hợp đồ thị có trọng số ta cần thêm *m* đơn vị bộ nhớ để lưu trữ trọng số của các cạnh.

Ví dụ 3. Danh sách cạnh (cung) của đồ thị $G(G_1)$ cho trong hình 4.13 là :

Đầu	Cuối	Đầu	Cuối
1	2	1	2
1	3	1	3
1	5	3	2
2	3	3	4
2	5	5	4
3	4	5	6
4	5	6	5
4	6		
5	6		
Danh sách cạnh của G		Danh sách cung của G_1	

3. Danh sách kề

Trong rất nhiều vấn đề ứng dụng của lý thuyết đồ thị, cách biểu diễn đồ thị dưới dạng *danh sách kề* là cách biểu diễn thích hợp nhất được sử dụng.

Trong cách biểu diễn này, với mỗi đỉnh v của đồ thị chúng ta lưu trữ danh sách các đỉnh kề với nó, mà ta sẽ ký hiệu là Ke(v), tức là

$$Ke(v) = \{u \in V : (v, u) \in E\}$$

Khi đó vòng lặp thực hiện với mỗi một phần tử trong danh sách này theo thứ tự các phần tử được sắp xếp trong nó sẽ được viết như sau :

for u ∈ Ke(v) do...

Chẳng hạn, trên PASCAL có thể mô tả danh sách này như sau (gọi là cấu trúc Forward Star) :

```
Const
        m = 1000 ; {m – số cạnh}
        n = 100 ; {n – số đỉnh}
var
        Ke : array [1..m] of integer ;
        Tro : array [1..n+1] of integer ;
```

trong đó Tro [i] ghi nhận vị trí bắt đầu của danh sách kề của đỉnh i, i = 1, 2, ..., n, Tro [n+1] = 2m + 1.

Khi đó dòng lệnh quy ước

```
        For u ∈ Ke(v) do
        Begin
              ...
        End ;
```

có thể thay thế bởi cấu trúc lệnh cụ thể trên PASCAL sau

```
        For i := Tro[v] to Tro [v+1] – 1 do
        Begin
              u :=Ke[i]
              .......
        End ;
```

II – VÀI BÀI TOÁN CƠ BẢN TRÊN ĐỒ THỊ

2.1. Bài toán đường đi ngắn nhất với thuật toán Dijsktra

1. Phát biểu

Đồ thị có hướng (vô hướng) G = (V, E) với n đỉnh.

$s \in V$ là đỉnh xuất phát, $t \in V$ là đỉnh đích, $A = (a[u, v])_{n\times n}$ là ma trận trọng số với $u, v \in V$; $a[u, v] \geq 0$ là trọng số của cung (u,v).

Tìm đường đi trên đồ thị từ $s \to t$ sao cho tổng trọng số nhỏ nhất :

$$a[s,u_1] + a[u_1,u_2] + ... + a[u_k,t] \to \min$$

2. Thuật toán

– Gán nhãn cho các đỉnh v [truoc(v),d(v)]

truoc(v) : đỉnh trước v trong đường đi từ s đến v.

d(v) : khoảng cách từ s đến tất cả các đỉnh v ∈ V còn lại.

– Bước 1 : truoc[v] = s ; d[s] = 0 ; T := V\{s}

– Bước 2 : Nếu T ≠ ∅, tìm đỉnh u thỏa mãn d[z] = min{d[z], z ∈ T}

– Bước 3 : Nếu u ≡ t → kết thúc. Nếu không thì làm tiếp bước 4, 5, 6.

– Bước 4 : T := T \ {u}

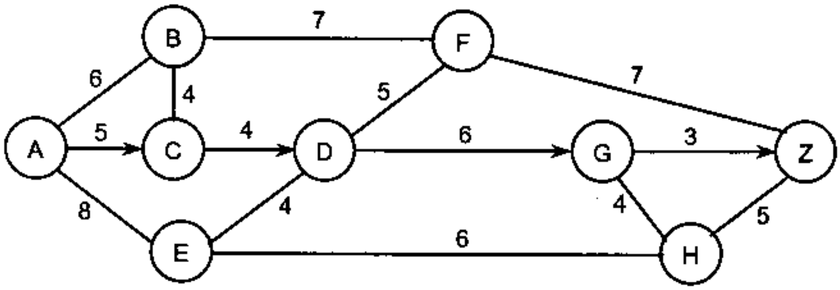
– Bước 5 : Gán lại nhãn các đỉnh theo công thức : với mọi v ∈ T ta có :

d[v] : = min{d[v], d[u] + a[u,v]} ;

truoc[v] : = u nếu d[v] > d[u] + a[u,v] ;

– Bước 6 : quay lại bước 2.

Ví dụ : Tìm đường đi ngắn nhất giữa A và Z trong đồ thị sau (hình 4.14) :



Hình 4.14

Để thuận tiện ta lập bảng và giải trên bảng.

Bước	**Đỉnh được gán nhãn**	**Nhãn**	**Đỉnh trước nhãn**
0	A	0	–
1	B	6	A
2	C	5	A
3	E	8	A
4	D	5 + 4 = 9	C
5	F	6 + 7 = 13	B
6	G	9 + 6 = 15	D
7	H	8 + 6 = 14	E
8	Z	15 + 3 = 18	G

Vậy đường ngắn nhất : ACDGZ.

2.2. Bài toán tìm kiếm trên đồ thị

Sử dụng một đồ thị coi như mô hình, người ta cần kiểm tra các đỉnh. Có thể nhận được sự kiểm tra này như một cuộc "dạo chơi" dọc theo các cạnh (cung) mà theo đó người ta tới thăm các đỉnh.

ĐỊNH NGHĨA : *Người ta gọi là sự tìm kiếm trên đồ thị một thủ tục cho phép chọn từ các đỉnh đã viếng thăm một đỉnh tiếp theo trong cuộc dạo chơi.*

Thực chất đó là sự xác định một thứ tự trong việc kiểm tra các đỉnh. Cụ thể hơn sự kiểm tra đó như sau :

• Đánh số các đỉnh đã viếng thăm ; người ta sẽ nói là số của một đỉnh biểu thị giờ viếng thăm ;

• Chọn một cạnh (cung) để đạt được đỉnh mới từ những đỉnh đã viếng thăm ; nói cách khác tại mỗi giờ, các đỉnh đã viếng thăm tạo nên một đồ thị liên thông.

Ta sẽ xét hai phương pháp tìm kiếm trên đồ thị :

– Tìm kiếm theo chiều sâu.

– Tìm kiếm theo chiều rộng.

Hai phương pháp này cho phép viếng thăm tất cả các đỉnh mà là tiếp theo của một đỉnh xuất phát cố định ở trước đó, ta gọi là gốc của tìm kiếm.

Để đơn giản sự trình bày, ta giả sử rằng đồ thị đã cất bỏ hướng và ta quan tâm đến các giờ viếng thăm các đỉnh hơn là danh sách các cạnh đã qua trong cuộc dạo chơi.

Việc chuyển các kết quả sang các đồ thị có hướng được thực hiện không khó khăn gì.

Trong nhiều sách và tài liệu *Tối ưu rời rạc* đều có trình bày hai phương pháp nêu trên.

1. Tìm kiếm theo chiều sâu trên đồ thị

Ý tưởng chính của thuật toán có thể trình bày như sau : ta sẽ bắt đầu tìm kiếm từ một đỉnh v_o nào đó của đồ thị. Sau đó chọn u là một đỉnh tùy ý kề với v_o và lặp lại quá trình đối với u. Ở bước tổng quát, giả sử ta đang xét đỉnh v, nếu như trong số các đỉnh kề với v tìm được đỉnh w là chưa được xét thì ta sẽ xét đỉnh này (nó sẽ trở thành đã xét) và bắt đầu từ nó ta sẽ tiếp tục quá trình tìm kiếm. Còn nếu như không còn đỉnh nào kề với v là chưa xét thì ta sẽ nói rằng đỉnh này là đã duyệt xong và quay trở lại tiếp tục tìm kiếm từ đỉnh mà trước đó ta đến được đỉnh v (nếu $v = v_o$ thì kết thúc tìm kiếm). Có thể nói nôm na là tìm kiếm theo chiều sâu bắt đầu từ đỉnh v được thực hiện trên cơ sở tìm kiếm theo chiều sâu từ tất cả các đỉnh chưa xét kề với v. Quá trình này có thể mô tả bởi thủ tục đệ quy sau đây :

```
Procedure DFS (v)
(* Tìm kiếm theo chiều sâu bắt đầu từ đỉnh v ;
Các biến Chuaxet, Ke là biến toàn cục*).
Begin
    Tham_dinh(v) ;
    Chuaxet[v] :=false ;
    for u ∈ Ke(v) do
        if Chuaxet[u] then DFS(u) ;
    End ; (* đỉnh v là đã duyệt xong*)
```

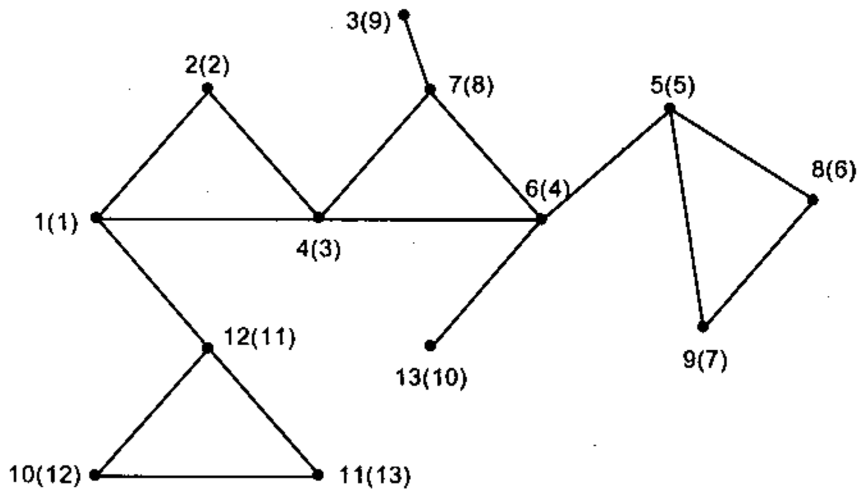
Khi đó, tìm kiếm theo chiều sâu trên đồ thị được thực hiện nhờ thuật toán sau :

```
Begin
    (*Initialization*)
    for v ∈ V do Chuaxet[v] :=true ;
    for v∈ V do
        if Chuaxet[v] then DFS(v) ;
End
```

Rõ ràng lệnh DFS(v) sẽ cho phép đến thăm tất cả các đỉnh thuộc cùng thành phần liên thông với đỉnh v, bởi vì sau khi thăm đỉnh là lệnh gọi đến thủ tục DFS đối với tất cả các đỉnh kề với nó. Mặt khác, do mỗi khi thăm đỉnh v xong, biến Chuaxet[v] được đặt lại giá trị false nên mỗi đỉnh sẽ được thăm đúng một lần. Thuật toán lần lượt sẽ tiến hành tìm kiếm từ các đỉnh chưa được thăm. Vì vậy, nó sẽ xét qua tất cả các đỉnh của đồ thị (không nhất thiết phải là liên thông).

Để đánh giá độ phức tạp tính toán của thủ tục, trước hết nhận thấy rằng số phép toán cần thực hiện trong hai chu trình của thuật toán (hai vòng for ở chương trình chính) là cỡ n. Thủ tục DFS phải thực hiện không quá n lần. Tổng số phép toán cần thực hiện trong các thủ tục này là O(n + m), do trong các thủ tục này ta phải xét qua tất cả các cạnh và các đỉnh của đồ thị. Vậy độ phức tạp tính toán của thuật toán là O(n + m).

Ví dụ 1. Xét đồ thị cho trong hình 4.15. Các đỉnh của nó được đánh số lại theo thứ tự chúng được thăm theo thủ tục tìm kiếm theo chiều sâu mô tả ở trên. Giả thiết rằng các đỉnh trong danh sách kề của đỉnh v (Ke(v)) được sắp xếp theo thứ tự tăng dần của chỉ số.



Hình 4.15. Chỉ số mới (trong ngoặc) của các đỉnh được đánh lại theo thứ tự chúng được thăm trong thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu

Thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu trên đồ thị vô hướng trình bày ở trên dễ dàng có thể mô tả lại cho đồ thị có hướng. Trong trường hợp đồ thị có hướng, thủ tục DFS(v) sẽ cho phép thăm tất cả các đỉnh u nào mà từ v có đường đi đến u. Độ phức tạp của thuật toán là O(n + m).

BÀI TOÁN TRẠM RA ĐA

Cho n trạm thu phát. Trạm thứ I có bán kính hoạt động R(I) cho trước (I = 1..n). Hai trạm I và J liên lạc trực tiếp được với nhau khi trạm I nằm trong bán kính hoạt động của trạm J và ngược lại trạm J nằm trong bán kính hoạt động của trạm I.

Một hệ thông suốt là hai trạm bất kỳ có thể liên lạc được với nhau. Một trạm xung yếu là trạm nếu loại nó ra khỏi mạng thì từ hệ thông suốt trở thành hệ không thông suốt.

Yêu cầu :

- Nhập hệ.
- Kiểm tra hệ có thông suốt hay không ?

• Hai trạm I và J bất kỳ có liên lạc được với nhau hay không ? Nếu được phải qua ít nhất bao nhiêu trạm trung gian.

• Khi hệ thông suốt tìm trạm xung yếu.

Áp dụng thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu đã trình bày ở trên ta tìm được các miền liên thông.

Việc kiểm tra một trạm có là xung yếu được giải quyết như sau :

Khi bỏ trạm này đi các trạm kề với nó có liên thông hay không ? Nếu có đây không phải là trạm xung yếu và ngược lại nó được kết nạp vào danh sách các trạm xung yếu.

Chương trình sử dụng giao diện đồ họa, cho phép sử dụng chuột và bàn phím để điều khiển bởi một Menu nằm ngang có các chức năng : nhập dữ liệu (nhập ngẫu nhiên, từ bàn phím và từ tệp), kiểm tra sự thông suốt của trạm, tìm đường đi ngắn nhất giữa hai trạm và tìm trạm xung yếu.

2. Tìm kiếm theo chiều rộng trên đồ thị

Trong thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu, đỉnh được thăm càng muộn sẽ càng sớm trở thành đã duyệt xong. Điều đó là hệ quả tất yếu của việc các đỉnh được thăm sẽ được kết nạp vào trong ngăn xếp (STACK). Tìm kiếm theo chiều rộng trên đồ thị, nếu nói một cách ngắn gọn, được xây dựng dựa trên cơ sở thay thế ngăn xếp (STACK) bởi hàng đợi (QUEUE). Với sự cải biên như vậy, đỉnh được thăm càng sớm sẽ càng sớm trở thành đã duyệt xong (tức là càng sớm dời khỏi hàng đợi). Một đỉnh sẽ trở thành duyệt xong ngay sau khi ta xét xong tất cả các đỉnh kề (chưa được thăm) với nó. Thủ tục có thể mô tả như sau :

Procedure BFS(v) ;

(* Tìm kiếm theo chiều rộng bắt đầu từ đỉnh v ;

Các biến Chuaxet, Ke là biến toàn cục*)

Begin

QUEUE :=∅ ;

QUEUE ⇐ v ; (*Kết nạp v vào QUEUE*)

Chuaxet[v] := false ;

While QUEUE ≠ ∅ do

Begin

P ⇐ QUEUE : (* Lấy p từ QUEUE*)

Tham_dinh(p) ;

for u ∈ Ke(p) *do*

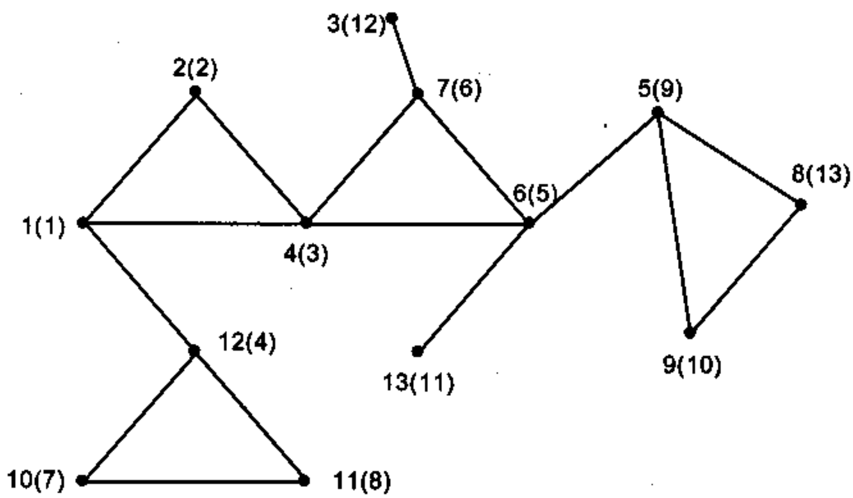
```
                    if Chuaxet[u] then
                    Begin
                          QUEUE ⇐ u : Chuaxet[u] := false ;
                    End ;
            End ;
    End ;
```

Khi đó, tìm kiếm theo chiều rộng trên đồ thị được thực hiện nhờ thuật toán sau :

```
    BEGIN
            (* Initialization*)
            for v ∈V do Chuaxet[v] := true ;
            for v ∈ V do
                    if Chuaxet[v] then BFS(v) ;
    END.
```

Lập luận tương tự như trong thủ tục tìm kiếm theo chiều sâu, có thể chỉ ra được rằng lệnh gọi BFS(v) sẽ cho phép đến thăm tất cả các đỉnh thuộc cùng thành phần liên thông với đỉnh v, và mỗi đỉnh của đồ thị sẽ được thăm đúng một lần. Độ phức tạp của thuật toán là O(n + m).

Ví dụ 2 : Xét đồ thị trong hình 4.16. Thứ tự thăm đỉnh của đồ thị này theo thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng được ghi trong ngoặc.



Hình 4.16. Chỉ số mới (trong ngoặc) của các đỉnh được đánh lại theo thứ tự chúng được thăm trong thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng

III – ĐỒ THỊ EULER VÀ ĐỒ THỊ HAMILTON

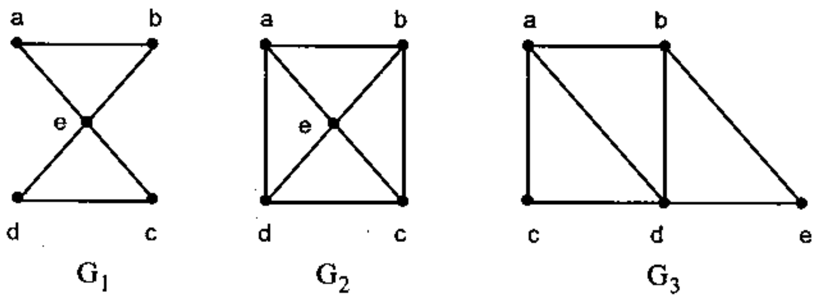
Trong mục này chúng ta sẽ nghiên cứu hai dạng đồ thị đặc biệt là đồ thị Euler và đồ thị Hamilton. Dưới đây, nếu không có giải thích bổ sung, thuật ngữ đồ thị được dùng để chỉ chung đa đồ thị vô hướng và có hướng, và thuật ngữ cạnh sẽ dùng để chỉ chung cạnh của đồ thị vô hướng cũng như cung của đồ thị có hướng.

3.1. Đồ thị Euler

ĐỊNH NGHĨA 1 : *Chu trình đơn trong G đi qua mỗi cạnh của nó một lần được gọi là chu trình Euler. Đường đi đơn trong G đi qua mỗi cạnh của nó một lần được gọi là đường Euler. Đồ thị được gọi là đồ thị Euler nếu nó có chu trình Euler và gọi là đồ thị nửa Euler nếu nó có đường đi Euler.*

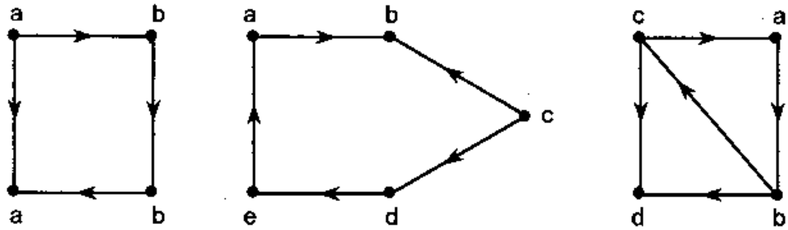
Rõ ràng mọi đồ thị Euler luôn là nửa Euler, nhưng điều ngược lại không luôn đúng.

Ví dụ 1. Đồ thị G_1 trong hình 4.17 là đồ thị Euler vì nó có chu trình Euler a, e, c, d, e, b, a. Đồ thị G_3 không có chu trình Euler nhưng nó có đường đi Euler a, c, d, e, b, d, a, b, vì thế G_3 là đồ thị nửa Euler. Đồ thị G_2 không có chu trình cũng như đường Euler.



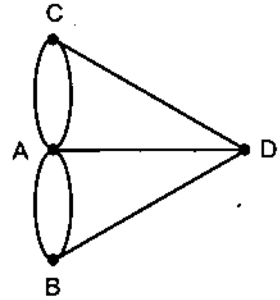
Hình 4.17. Đồ thị G_1, G_2, G_3

Ví dụ 2 : Đồ thị H_2 trong hình 4.18 là đồ thị Euler vì nó có chu trình Euler a, b, c, d, e, a. Đồ thị H_3 không có chu trình Euler nhưng nó có đường đi Euler c, a, b, c, d, b, vì thế H_3 là đồ thị nửa Euler. Đồ thị H_1 không có chu trình cũng như đường đi Euler.



Hình 4.18. Đồ thị H_1, H_2, H_3

Điều kiện cần và đủ để một đồ thị là đồ thị Euler được Euler tìm ra vào năm 1736 khi ông giải quyết bài toán hóc búa nổi tiếng thời đó về bảy cái cầu ở thành phố Konigsberg và đây là định lý đầu tiên của lý thuyết đồ thị. Những cái cầu ở thành phố Konigsberg có thể diễn tả bằng đồ thị trong hình 4.19.



Hình 4.19

***Định lý 1* (Euler) :** *Đồ thị vô hướng liên thông G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của G đều có bậc chẵn.*

Để chứng minh định lý trước hết ta chứng minh bổ đề :

Bổ đề : *Nếu bậc của mỗi đỉnh của đồ thị G không nhỏ hơn 2 thì G chứa chu trình.*

Chứng minh : Nếu G có cạnh lặp thì khẳng định của bổ đề là hiển nhiên. Vì vậy, giả sử G là đơn đồ thị. Gọi v là một đỉnh nào đó của G. Ta sẽ xây dựng theo quy nạp đường đi

$$v \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \ldots$$

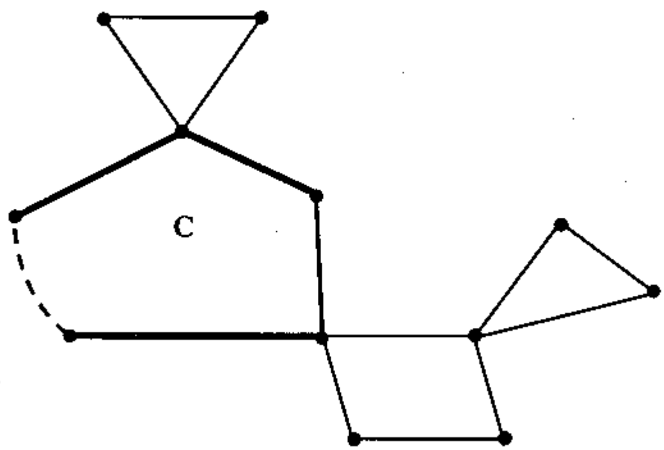
trong đó v_1 là đỉnh kề với v, còn với $i \geq 1$ chọn v_{i+1} là kề với v_i và $v_{i+1} \neq v_{i-1}$ (có thể chọn v_{i+1} như vậy là vì deg $(v_i) \geq 2$). Do tập đỉnh của G là hữu hạn, nên sau một số hữu hạn bước ta phải quay lại một đỉnh đã xuất hiện trước đó. Gọi đỉnh đầu tiên như thế là v_k. Khi đó, đoạn của đường đi xây dựng nằm giữa hai đỉnh v_k là một chu trình cần tìm.

Chứng minh định lý :

Cần : Giả sử G là đồ thị Euler tức là tồn tại chu trình Euler P trong G. Khi đó cứ mỗi lần chu trình P đi qua một đỉnh nào đó của G thì bậc của đỉnh đó tăng lên 2. Mặt khác mỗi cạnh của đồ thị xuất hiện trong P đúng một lần, suy ra mỗi đỉnh của đồ thị đều có bậc chẵn.

Đủ : Quy nạp theo số cạnh của G. Do G liên thông và deg(v) là số chẵn nên bậc của mỗi đỉnh của nó không nhỏ hơn 2. Từ đó theo bổ đề G phải chứa chu trình C. Nếu C đi qua tất cả các cạnh của G thì nó chính là chu trình Euler. Giả sử C không đi qua tất cả các cạnh của g. Khi đó loại bỏ khỏi G tất cả các cạnh thuộc C ta thu được một đồ thị mới H (không nhất thiết là liên thông). Số cạnh trong H nhỏ hơn trong G và rõ ràng mỗi đỉnh của H vẫn có bậc là chẵn. Theo giả thiết quy nạp trong mỗi thành phần liên thông của H đều tìm được chu trình Euler. Do G là liên thông nên mỗi thành phần trong H có ít nhất một đỉnh chung với chu trình C. Vì vậy, ta có thể xây dựng chu trình

Euler trong G như sau : Bắt đầu từ một đỉnh nào đó của chu trình C, đi theo các cạnh của chu trình C chừng nào chưa gặp phải đỉnh không cô lập của H. Nếu gặp phải đỉnh như vậy thì ta đi theo chu trình Euler của thành phần liên thông của H chứa đỉnh đó. Sau đó lại tiếp tục đi theo cạnh của C cho đến khi gặp phải đỉnh không cô lập của H thì lại theo chu trình Euler của thành phần liên thông tương ứng trong H v.v.. (hình 4.20). Quá trình sẽ kết thúc khi ta trở về đỉnh xuất phát, tức là thu được chu trình đi qua mỗi cạnh của đồ thị đúng một lần.



Hình 4.20. Minh họa cho chứng minh định lý 1

***Hệ quả 2** : Đồ thị vô hướng liên thông G là nửa Euler khi và chỉ khi nó có không quá 2 đỉnh bậc lẻ.*

Chứng minh : Thực vậy nếu G có không quá 2 đỉnh bậc lẻ thì số đỉnh bậc lẻ của nó chỉ có thể là 0 hoặc 2. Nếu G không có đỉnh bậc lẻ thì theo định lý 1 nó là đồ thị Euler. Giả sử G có hai đỉnh bậc lẻ là u và v. Gọi H là đồ thị thu được từ G bằng cách thêm vào G một đỉnh mới w và hai cạnh (w, u) và (w,v). Khi đó tất cả các đỉnh của H đều có bậc là chẵn, vì thế theo định lý 1 nó có chu trình Euler C. Xóa bỏ khỏi chu trình này đỉnh w và hai cạnh kề nó ta thu được đường đi Euler trong đồ thị G.

Giả sử g là đồ thị Euler, từ chứng minh định lý ta có thủ tục sau để tìm chu trình Euler trong G.

Procedure Euler_Cycle ;

Begin

STACK :=∅ ; CE := ∅ ;

```
        Chọn u là một đỉnh nào đó của đồ thị ;
        STACK ⇐ u ;
        while STACK ≠ ∅ do
        begin
            x := top (STACK) ; (* x là phần tử ở đầu STACK*)
            if Ke(x) ≠ ∅ then
            begin
                y := đỉnh đầu tiên trong danh sách Ke(x) ;
                STACK ⇐ y ;
                (* Loại bỏ cạnh (x, y) khỏi đồ thị *)
                Ke(x) := Ke(x) \ {y} ; Ke(y) := Ke(y) \{x} ;
            end else
            begin x ⇐ STACK ; CE ⇐ x ; end ;
        end ;
    end ;
```

Giả sử G là đồ thị Euler, thuật toán đơn giản sau đây cho phép xác định chu trình Euler khi làm bằng tay.

Thuật toán Flor

Xuất phát từ một đỉnh u nào đó của G ta đi theo các cạnh của nó một cách tùy ý chỉ cần tuân thủ 2 quy tắc sau :

i) Xóa bỏ cạnh đã đi qua và đồng thời xóa cả những đỉnh cô lập tạo thành.

ii) Ở mỗi bước ta chỉ đi qua cầu khi không còn cách lựa chọn nào khác.

Chứng minh tính đúng đắn của thuật toán

Trước tiên ta chỉ ra rằng thủ tục trên có thể thực hiện được ở mỗi bước. Giả sử ta đi đến một đỉnh v nào đó, khi đó nếu $v \neq u$ thì đồ thị con còn lại H là liên thông và chứa đúng hai đỉnh bậc lẻ là v và u. Theo hệ quả trong H có đường đi Euler P từ v đến u. Do việc xóa bỏ cạnh đầu tiên của đường đi P không làm mất tính liên thông của H, từ đó suy ra thủ tục có thể thực hiện ở mỗi bước. Nếu $v = u$ thì lập luận ở trên sẽ vẫn đúng chừng nào vẫn còn cạnh kề với u.

Như vậy chỉ còn phải chỉ ra là thủ tục trên dẫn đến đường đi Euler. Thực vậy, trong G không thể còn cạnh chưa đi qua khi mà ta sử dụng cạnh cuối cùng kề với u (trong trường hợp ngược lại, việc loại bỏ một cạnh nào đó kề với một trong số những cạnh còn lại chưa đi qua sẽ dẫn đến một đồ thị không liên thông, và điều đó là mâu thuẫn với giả thiết ii)).

Chứng minh tương tự như trong định lý 1 ta thu được kết quả sau đây cho đồ thị có hướng.

Định lý 2. *Đồ thị có hướng liên thông mạnh là đồ thị Euler khi và chỉ khi*

$$\deg^{+}(v) = \deg^{-}(v),\ \forall v \in V.$$

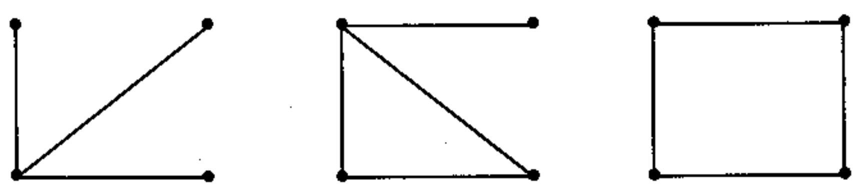
3.2. Đồ thị Hamilton

Trong mục này chúng ta xét bài toán tương tự như trong mục trước,chỉ khác là ta quan tâm đến đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần. Sự thay đổi tưởng chừng như là không đáng kể này trên thực tế đã dẫn đến sự phức tạp hoá vấn đề cần giải quyết.

ĐỊNH NGHĨA 2. *Đường đi qua tất cả các đỉnh của đồ thị, mỗi đỉnh đúng một lần được gọi là đường đi Hamilton. Chu trình bắt đầu từ một đỉnh v nào đó qua tất cả các đỉnh còn lại, mỗi đỉnh đúng một lần rồi quay trở về v được gọi là chu trình Hamilton. Đồ thị G được gọi là đồ thị Hamilton nếu nó chứa chu trình Hamilton và gọi là nửa Hamilton nếu nó chứa đường đi Hamilton.*

Rõ ràng đồ thị Hamilton là nửa Hamilton, nhưng điều ngược lại không luôn đúng.

Ví dụ 3 : Trong hình 4.21 : G_3 là Hamilton, G_2 là nửa Hamilton còn G_1 không là nửa Hamilton.



G_1 G_2 G_3

Hình 4.21.

Cho đến nay việc tìm một tiêu chuẩn nhận biết đồ thị Hamilton vẫn còn là mở, mặc dù đây là một vấn đề trung tâm của lý thuyết đồ thị. Hơn thế nữa, cho đến hiện nay cũng chưa có thuật toán hiệu quả để kiểm tra một đồ thị có là Hamilton hay không. Các kết quả thu được phần lớn là các điều kiện đủ để một đồ thị là đồ thị Hamilton. Phần lớn chúng đều có dạng "nếu G có số cạnh đủ lớn thì G là Hamilton". Một kết quả như vậy được phát biểu trong định lý sau đây :

***Định lý 3* (Dirak 1952) :** *Đơn đồ thị vô hướng G với n > 2 đỉnh, mỗi đỉnh có bậc không nhỏ hơn n/2 là đồ thị Hamilton.*

Chứng minh : Thêm vào đồ thị G k đỉnh mới và nối chúng với tất cả các đỉnh của G. Giả sử k là số nhỏ nhất các đỉnh cần thêm vào để cho đồ thị thu được G' là đồ thị Hamilton. Ta sẽ chỉ ra rằng k = 0. Thực vậy, giả sử ngược lại là k > 0, ký hiệu :

$$v, p, w, \ldots, v$$

là chu trình Hamilton trong G', trong đó v, w là đỉnh của G còn p là một trong số các đỉnh mới. Khi đó w không kề với v vì nếu ngược lại, ta không cần sử dụng p và điều đó là mâu thuẫn với giả thiết k nhỏ nhất. Hơn thế nữa đỉnh (w' chẳng hạn) kề với w không thể đi liền sau đỉnh v' (kề với v) vì rằng khi đó có thể thay

$$v \to p \to w \to \ldots \to v' \to w' \to \ldots \to v$$

bởi

$$v \to v' \to \ldots \to w \to w' \ldots \to v$$

bằng cách đảo ngược đoạn của chu trình nằm giữa w và v'. Từ đó suy ra là số đỉnh của đồ thị G' không kề với w là không nhỏ hơn số đỉnh kề với nó (tức là ít nhất cũng là bằng n/2 + k), đồng thời số đỉnh của G' kề với w cũng ít ra là phải bằng n/2 + k. Do không có đỉnh nào của G' vừa không kề, lại vừa kề với w, cho nên tổng số đỉnh của đồ thị G' (G' có n + k đỉnh) không ít hơn n + 2k. Mâu thuẫn thu được đã chứng minh định lý.

Định lý sau là tổng quát hoá của định lý Dirak cho đồ thị có hướng :

Định lý 4 : Giả sử G là đồ thị có hướng liên thông mạnh với n đỉnh. Nếu

$$\deg^{+}(v) \geq n/2, \qquad \deg^{-}(v) \geq n/2, \forall v$$

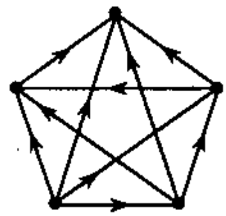
thì G là Hamilton.

Có một số dạng đồ thị mà ta có thể biết khi nào nó là đồ thị Hamilton. Một ví dụ như vậy là đồ thị đấu loại. *Đồ thị đấu loại* là đồ thị có hướng mà trong đó 2 đỉnh bất kỳ của nó được nối với nhau bởi đúng một cung. Tên gọi *đấu loại* xuất hiện vì đồ thị như vậy có thể dùng để biểu diễn kết quả thi đấu bóng chuyền, bóng bàn hay bất cứ một trò chơi nào mà không cho phép hòa. Ta có định lý sau :

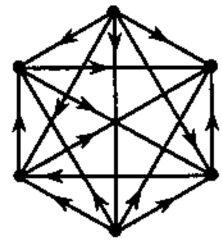
Định lý 5 : *i) Mọi đồ thị đấu loại là nửa Hamilton ;*

ii) Mọi đồ thị đấu loại liên thông mạnh là Hamilton.

Ví dụ 4. Đồ thị đấu loại D_5, D_6 được cho trong hình 4.22.



$\mathbf{D_5}$



$\mathbf{D_6}$

Hình 4.22. Đồ thị đấu loại D_5, đấu loại liên thông mạnh D_6

Thuật toán liệt kê tất cả các chu trình Hamilton của đồ thị

Thuật toán sau đây được xây dựng dựa trên cơ sở thuật toán quay lui cho phép liệt kê tất cả các chu trình Hamilton của đồ thị.

Procedure Hamilton (k) ;

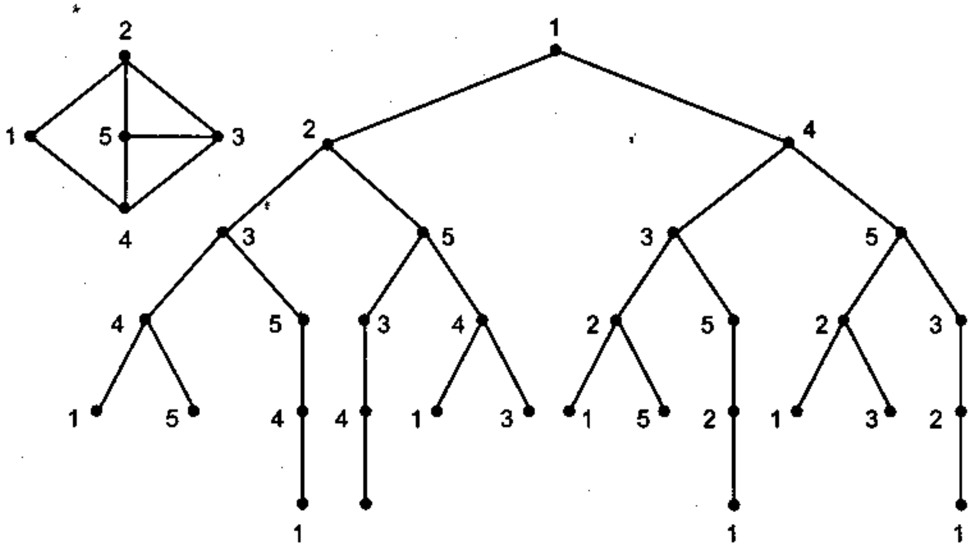
* Liệt kê các chu trình Hamilton thu được bằng việc phát triển dãy đỉnh (X[1], ..., X[k – 1]) của đồ thị G = (V, E) cho bởi danh sách kề : Ke(v), v ∈ V

*

```
Begin
    For y ∈ Ke(X[k – 1] do
        if (k = n+1) and (y = v0) then Ghinhan (X[1], ..., X[n], v0)
        else
        if Chuaxet[y] then
        Begin
            X[k] :=y
            Chuaxet[y] := false ;
            Hamilton(k+1) ;
            Chuaxet[y] :=true ;
        end ;
    end ;
    (* Main Program*)
    BEGIN
```

```
        for v ∈ V do Chuaxet[v] := true ;
        X[1] :=v0 ; (* v0 là một đỉnh nào đó của đồ thị *)
        Chuaxet [v0] := false ;
        Hamilton(2) ;
END.
```

Ví dụ 5 : Hình 4.23 dưới đây mô tả cây tìm kiếm theo thuật toán vừa mô tả.



Hình 4.23. Đồ thị và cây liệt kê chu trình Hamilton của nó theo thuật toán quay lui

Trong trường hợp đồ thị có không quá nhiều cạnh, thuật toán trên có thể sử dụng để kiểm tra xem đồ thị có phải là Hamilton hay không.

IV – CÂY VÀ CÂY KHUNG CỦA ĐỒ THỊ

Một đồ thị liên thông và không có chu trình đơn được gọi là cây. Cây đã được dùng từ năm 1857, khi nhà toán học Anh tên là Arthur Cayley dùng cây để xác định những dạng khác nhau của hợp chất hoá học. Từ đó cây đã được dùng để giải nhiều bài toán trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

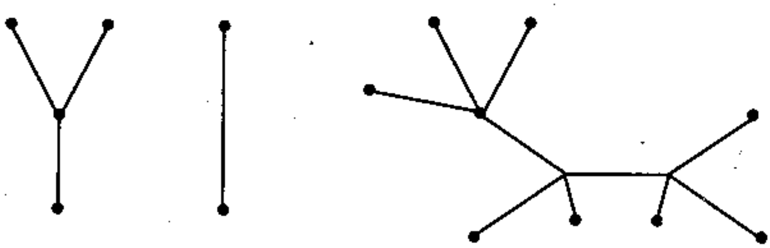
Cây rất hay được sử dụng trong tin học. Chẳng hạn, người ta dùng cây để xây dựng các thuật toán rất có hiệu quả để định vị các phần tử trong một danh sách. Cây cũng dùng để xây dựng các mạng máy tính với chi phí rẻ nhất cho các đường điện thoại nối các máy phân tán. Cây cũng được dùng để tạo ra các mã có hiệu quả để lưu trữ và truyền dữ liệu. Dùng cây có thể mô hình các thủ tục mà để thi hành nó cần dùng một dãy các quyết định. Vì vậy cây đặc biệt có giá trị khi nghiên cứu các thuật toán sắp xếp.

4.1. Cây và các tính chất cơ bản của cây

ĐỊNH NGHĨA 1. *Ta gọi cây là đồ thị vô hướng liên thông không có chu trình. Đồ thị không có chu trình được gọi là rừng.*

Như vậy rừng là đồ thị mà mỗi thành phần liên thông của nó là một cây.

Ví dụ 1 : Trong hình 4.24 là một rừng gồm 3 cây T_1, T_2, T_3.



Hình 4.24. Rừng gồm ba cây T_1, T_2, T_3

Có thể nói cây là đồ thị vô hướng đơn giản nhất. Định lý sau đây cho ta một số tính chất của cây.

Định lý 1 : Giả sử G = (V,E) là đồ thị vô hướng n đỉnh. Khi đó các mệnh đề sau đây là tương đương :

(1) T là cây ;

(2) T không chứa chu trình và có n−1 cạnh ;

(3) T liên thông và có n−1 cạnh ;

(4) T liên thông và mỗi cạnh của nó đều là cầu ;

(5) Hai đỉnh bất kỳ của T được nối với nhau bởi đúng một đường đi đơn ;

(6) T không chứa chu trình nhưng hễ cứ thêm vào nó một cạnh ta thu được đúng một chu trình.

Chứng minh : Ta sẽ chứng minh định lý theo sơ đồ sau :

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow \qquad (1)$$

(1) ⇒ (2) Theo định nghĩa T không chứa chu trình. Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo số đỉnh n khẳng định : Số cạnh của cây với n đỉnh là n−1.

Rõ ràng khẳng định đúng với $n = 1$. Giả sử $n > 1$. Trước hết nhận thấy rằng trong mọi cây T có n đỉnh đều tìm được ít nhất một đỉnh là đỉnh treo (tức là đỉnh có bậc là 1). Thực vậy, gọi $v_1, v_2, \ldots, v_k$ là đường đi dài nhất (theo số cạnh) trong T. Khi đó v_1 và v_k là các đỉnh treo, vì từ $v_1(v_k)$ không có cạnh nối tới bất cứ đỉnh nào trong số các đỉnh $v_2, v_3 \ldots, v_k$ (do đồ thị không chứa chu trình), cũng như tới bất cứ đỉnh nào khác của đồ thị (do đường đi đang xét là dài nhất). Loại bỏ v_1 và cạnh (v_1, v_2) khỏi T ta thu được cây T_1 với $n - 1$ đỉnh, mà theo giả thiết quy nạp có $n - 2$ cạnh. Vậy cây T có $n - 2 + 1 = n - 1$ cạnh.

(2) $\Rightarrow$ (3) Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử T không liên thông. Khi đó T phân rã thành $k \geq 2$ thành phần liên thông $T_1, T_2, \ldots, T_k$. Do T không chứa chu trình nên mỗi T_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ cũng không chứa chu trình, vì thế mỗi T_i là cây. Do đó nếu gọi $n(T_i)$ và $e(T_i)$ theo thứ tự là số đỉnh và cạnh của T_i ta có :

$$e(T_i) = n(T_i) - 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

suy ra

$$\begin{aligned} n - 1 &= e(T) = e(T_1) + \ldots + e(T_k) \\ &= n(T_1) + \ldots + n(T_k) - k \\ &= n(T) - k < n - 1 \ ?\ ! \end{aligned}$$

Mâu thuẫn thu được chứng tỏ T là liên thông.

(3) $\Rightarrow$ (4) Việc loại bỏ một cạnh bất kỳ khỏi T dẫn đến đồ thị với n đỉnh và $n - 2$ cạnh rõ ràng là đồ thị không liên thông. Vậy mọi cạnh trong T đều là cầu.

(4) $\Rightarrow$ (5) Do T là liên thông nên hai đỉnh bất kỳ của nó được nối với nhau bởi một đường đi đơn. Nếu có cặp đỉnh nào của T có hai đường đi đơn khác nhau nối chúng, thì từ đó suy ra đồ thị chứa chu trình, và vì thế các cạnh trên chu trình này không phải là cầu ?

(5) $\Rightarrow$ (6) T không chứa chu trình bởi vì nếu có chu trình thì hoá ra tìm được cặp đỉnh của T được nối với nhau bởi hai đường đi đơn. Bây giờ, nếu thêm vào T một cạnh e nối hai đỉnh u và v nào đó của T. Khi đó cạnh này cùng với đường đi đơn nối u và v sẽ tạo thành chu trình trong T. Chu trình thu được này là duy nhất, vì nếu thu được nhiều hơn một chu trình thì suy ra trong T trước đó phải có sẵn chu trình.

(6) $\Rightarrow$ (1) Giả sử T không liên thông. Khi đó nó gồm ít nhất là 2 thành phần liên thông. Vì vậy, nếu thêm vào T một cạnh nối hai đỉnh thuộc hai

thành phần liên thông khác nhau ta không thu được thêm một chu trình nào cả. Điều đó mâu thuẫn với giả thiết (6).

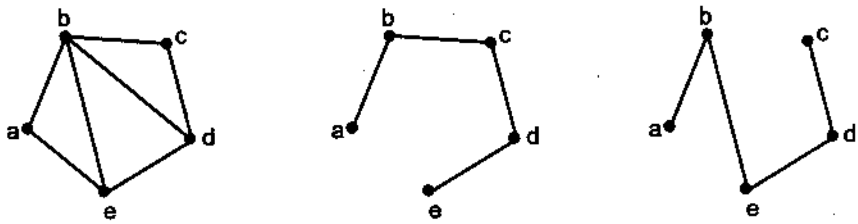
Định lý được chứng minh.

4.2. Cây khung của đồ thị

1. Khái niệm

ĐỊNH NGHĨA 2 : *Giả sử G (V, E) là đồ thị vô hướng liên thông. Cây T = (V,F) với $F \subset E$ được gọi là cây khung của đồ thị G.*

Ví dụ 2. Đồ thị G và cây khung của nó được cho trong hình 4.25.



Hình 4.25 Đồ thị và các cây khung của nó

Định lý sau đây cho biết số lượng cây khung của đồ thị đầy đủ K_n.

***Định lý 2* (Cayley) :** *Số cây khung của đồ thị K_n là n^{n-2}.*

Định lý 2 cho thấy số lượng cây khung của một đồ thị là một số rất lớn. Bây giờ ta xét áp dụng của thuật toán tìm kiếm theo chiều sâu và theo chiều rộng trên đồ thị để xây dựng cây khung của đồ thị vô hướng liên thông. Trong cả hai trường hợp mỗi khi ta đến được đỉnh mới u (tức Chuaxet[u] = true) từ đỉnh v thì cạnh (v, u) sẽ được kết nạp vào cây khung.

2. Bài toán cây khung cực tiểu và 2 thuật toán PRIM, KRUSKAL

a) *Phát biểu*

– Đồ thị G = (V, E) liên thông có trọng số $C = (c_{ij})_{m.n}$

– Cây khung T = (V,E') trong đó $E' \subset E$.

– $T_{min} : \sum_{e \in E'} C(e) \to \min$

b) *Thuật toán*

• Kruskal

Xây dựng dần các cạnh.

– Bước 1 : T = ∅.

– Bước 2 : Sắp xếp các cạnh của G thành dãy F theo thứ tự không giảm của trọng số.

– Bước 3 : Bắt đầu từ cạnh đầu tiên của F, thêm vào T sao cho không tạo thành chu trình.

– Bước 4 : Nếu $|T| = n - 1 \rightarrow$ kết thúc.

Không thì quay lại bước 3.

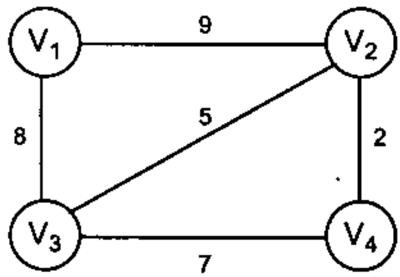
• Prim

– Từ một đỉnh S bất kỳ của đồ thị, chọn đỉnh t nối với s có khoảng cách nhỏ nhất.

– Trong số các đỉnh kề s, chọn đỉnh sao cho gần với 2 đỉnh s, t đã cho nhất.

– Lặp cho đến khi tất cả các đỉnh đã được kết nạp.

Ví dụ 1 : Tìm cây khung cực tiểu cho hình 4.26 sau theo thuật toán Kruskal.



Hình 4.26. Đồ thị theo thuật toán Kruskal.

– Bước 1 : T = ∅ với 4 đỉnh V_1, V_2, V_3, V_4.

– Bước 2 : Sắp xếp các cạnh

$$\{(V_2, V_4), (V_2, V_3), (V_3, V_4), (V_3, V_1), (V_1, V_2)\}$$

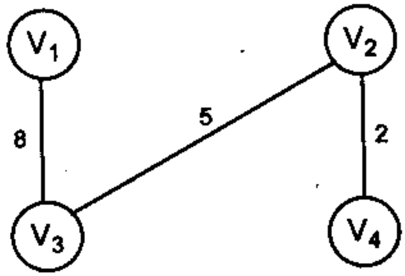
– Bước 3 : Thêm vào T cạnh (V_2, V_4).

– Bước 4 : Vì số cạnh của T là $1 < 4 - 1 = 3$ nên ta thêm vào T cạnh (V_2, V_3).

Sau đó thêm vào T cạnh (V_3, V_1).

(Không thêm cạnh (V_3, V_4), vì như vậy sẽ tạo thành chu trình).

Vậy ta được cây khung cực tiểu như hình 4.27.



Hình 4.27

$T_{min} = 2 + 5 + 8 = 15.$

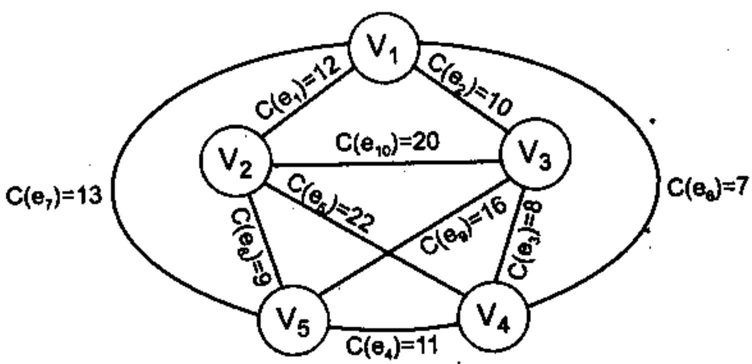
Ví dụ 2 : Cho $G = (V, E)$, $V = \{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$

Tập các cạnh

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}\}$$

với các trọng số cho trên các cạnh (hình 4.28).

Hãy tìm cây khung nhỏ nhất theo thuật toán Prim.



Hình 4.28

Giải :

$e_6 : c(e_6) = 7$; $e_3 : c(e_3) = 8$

$e_1 : c(e_1) = 12$; $e_8 : c(e_8) = 9$

Cây khung nhỏ nhất là :

$$v_3e_3v_4e_6v_2e_1v_1e_8v_5$$

với $T_{min} = 8 + 7 + 12 + 9 = 36.$

4.3. Cây phân cấp

1. Định nghĩa cây phân cấp

Cây phân cấp là một tập hữu hạn các đỉnh, trong đó có một đỉnh đặc biệt gọi là gốc ; giữa các đỉnh có mối phân cấp "cha con".

Số các con của một đỉnh gọi là bậc của đỉnh đó. Bậc của đỉnh bằng 0 thì đỉnh đó được gọi là lá. Thông thường đỉnh không phải là lá gọi là đỉnh trong và lá gọi là đỉnh ngoài. Bậc của cây là bậc cao nhất của các đỉnh trong cây. Như vậy một đỉnh là gốc của cây nếu nó không là con của bất cứ đỉnh nào trong cây.

Mức của cây được định nghĩa như sau :

Gốc của cây có mức là : 0

Nếu mức của cha là i thì mức của con là : i + 1.

Mức cao nhất của nút trong cây được gọi là *chiều cao của cây.*

Đường đi từ A đến đỉnh B trong một cây là dãy các đỉnh : $A_o = A$, A_1, A_2, A_3, ..., $A_n = B$, trong đó A_i là bố của A_{i+1} ($i = 0, 1, ..., n-1$) giữa A_i và A_{i+1} được nối với nhau bởi một cạnh.

Độ dài đường đi là số các cạnh trong đường đi đó.

Gọi h là chiều cao của cây T. Khi đó ta có thể định nghĩa chiều cao h là độ dài của đường đi lớn nhất của cây T.

Hai cách định nghĩa chiều cao của cây đề cập ở trên là tương đương nhau.

2. Cây phân cấp nhị phân

a) Định nghĩa cây nhị phân

Cây phân cấp được gọi là cây phân cấp nhị phân (để đơn giản ta gọi là cây nhị phân) nếu bậc ở tất cả các đỉnh đều không lớn hơn 2, hay mỗi đỉnh chỉ có tối đa hai con.

Đối với cây con của một đỉnh người ta phân biệt cây con trái với cây con phải, vì lý do đó cây nhị phân cũng gọi là cây có thứ tự.

b) Định nghĩa cây nhị phân đầy đủ

Cây nhị phân được gọi là đầy đủ nếu tất cả các đỉnh trong đều có bậc bằng 2 và tất cả các đỉnh ngoài đều thuộc mức lớn nhất của cây T.

3. Một số tính chất của cây nhị phân đầy đủ

Bổ đề 1 : *Số lượng các đỉnh ở mức i của cây nhị phân đầy đủ là 2^i với $(i = 0, 1, ...)$.*

Chứng minh : Quy nạp theo i ta có :

Với i = 0 : đỉnh thuộc mức 0 là gốc. Mỗi cây chỉ có một gốc nên bổ đề đúng với i = 0.

Giả sử bổ đề đúng với i, tức là số đỉnh ở mức i là 2^i, xét mức i + 1 và chỉ ra số đỉnh của mức này là 2^{i+1}.

Thật vậy, mỗi đỉnh ở mức i có đúng hai con nên 2^i đỉnh có $2 * 2^i = 2^{i+1}$ con hay số đỉnh ở mức i + 1 là 2^{i+1}.

Bổ đề 2 : *Số lượng của các đỉnh trong và đỉnh ngoài của cây nhị phân đầy đủ có độ cao h là $(2^{h+1} - 1)$.*

Chứng minh : Suy ra từ bổ đề 1 : Số các đỉnh trong và đỉnh ngoài của cây nhị phân đầy đủ bằng : số các đỉnh ở mức 0 + số các đỉnh ở mức 1 + số các đỉnh ở mức 2+ ... + số các đỉnh ở mức h = $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^h = 2^{h+1} - 1$.

Bổ đề 3 : *Cho cây nhị phân đầy đủ với L = số các đỉnh ngoài. Khi đó số các đỉnh trong của cây là L – 1.*

Chứng minh : Gọi chiều cao của cây là h. Theo bổ đề 1 thì số các đỉnh ngoài $L = 2^h$. Còn số các đỉnh trong và đỉnh ngoài của cây nhị phân đầy đủ theo bổ đề 2 là $(2^{h+1}-1)$. Nếu đặt K = số đỉnh trong thì $K + L = 2^{h+1} - 1$.

Vậy $K = (2 * 2^h - 1) - 2^h = 2L - 1 - L = L - 1$.

Định lý 3 : *Nếu cây nhị phân đầy đủ có n đỉnh và chiều cao là h thì ta có $h = log_2(n + 1) - 1$.*

Chứng minh : Theo bổ đề 2 thì $n = 2^{h+1} - 1 \Leftrightarrow n + 1 = 2^{h+1}$.

Loga cơ số 2 đẳng thức trên ta có :

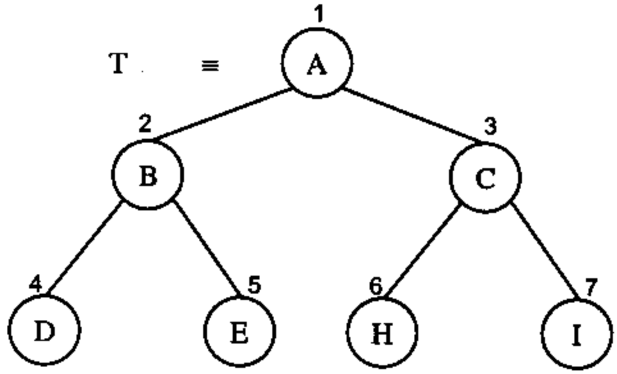
$$Log_2(n + 1) = h + 1 \text{ hay } h = log_2(n + 1) - 1$$

4. Biểu diễn cây nhị phân

a) Lưu trữ kế tiếp

Cây nhị phân đầy đủ có thể đánh số các đỉnh theo thứ tự từ mức thấp nhất (mức 0), đến mức cao nhất và trên mỗi mức thì đánh số theo thứ tự từ trái sang phải.

Ví dụ :



Hình 4.29

Với cách đánh số như trên hình 4.29 ta có thể lưu trữ cây T vào một vectơ V theo nguyên tắc :

Đỉnh thứ i được lưu trữ trong thành phần thứ i của V : Cách lưu trữ trên gọi là cách lưu trữ kế tiếp đối với cây nhị phân. Với cách lưu trữ này, nếu biết địa chỉ của cha sẽ tính được địa chỉ của con và ngược lại.

b) Lưu trữ móc nối

Trong cách lưu trữ này, mỗi đỉnh ứng với ba ô liền nhau :

L	I	R

ở đây, I ứng với tập tin (dữ liệu) của đỉnh trong cây, ô L và R là con trỏ trái và phải của I. Cách lưu trữ móc nối cho phép từ cha có thể truy nhập vào con, nhưng ngược lại thì không được.

4.4. Thuật toán tìm cây nhị nguyên tối ưu với các thông tin chứa ở các lá

1. Định nghĩa cây nhị nguyên

Cây nhị nguyên là một đồ thị liên thông không chứa chu trình và bậc ở tất cả các đỉnh bằng 0 hoặc bằng 2 mà chúng ta đã nghiên cứu trong phần lý thuyết đồ thị. Trên lớp các cây nhị nguyên này (chính xác sẽ định nghĩa sau) ta đưa ra thuật toán phân loại, tìm kiếm thông tin và xây dựng bảng mã cho các thông tin đã được phân loại. Dưới đây đề cập tới thuật toán về sự tương đương giữa các cây nhị nguyên và thuật toán xây dựng cây tối ưu theo cấu trúc cũng như theo thời gian của cây nhị nguyên. Ta ký hiệu N = {0, 1, ...} là tập các số tự nhiên, I là tập các đối tượng hay còn gọi là các thông tin nào đó.

Giả sử các ký hiệu $<, > \notin I \cup N$.

Cây nhị nguyên được định nghĩa như sau :

ĐỊNH NGHĨA 3 :

a) Mỗi phần tử $i \in I$ gọi là một cây.

b) Nếu T_1, T_2 là 2 cây còn $k \in N$ thì dãy ký hiệu $k < T_1, T_2 >$ gọi là một cây.

Tập tất cả các cây định nghĩa như trên ký hiệu qua TREE và gọi là tập các cây nhị nguyên với các thông tin chứa ở các lá, hay để cho gọn ta gọi là cây nhị nguyên.

Bây giờ ta định nghĩa ánh xạ $f : TREE \times N \rightarrow I$ và gọi f là hàm làm việc, hay hàm kết quả của cây nhị nguyên.

ĐỊNH NGHĨA 4 :

a) Nếu cây nhị nguyên có dạng là phần tử $i \in I$ thì $f(i, l) = i$ với mọi $l \in N$.

b) Nếu cây nhị nguyên trong TREE có dạng $k < T_1, T_2 >$ thì :

$$f(k < T_1, T_2 >, l) = \begin{cases} f(T_1, l) \text{ nếu } l \leq k \\ f(T_2, l) \text{ nếu } l > k \end{cases}$$

Dưới đây ta dùng ký hiệu "≡" ("≢") để chỉ ra sự đồng nhất (không đồng nhất) bằng nhau của cây.

ĐỊNH NGHĨA 5 :

Cho hai cây $T_1, T_2 \in TREE$ ta nói T_1 tương đương với T_2 khi và chỉ khi $f(T_1, l) = f(T_2, l)$ với mọi $l \in N$. Ta ký hiệu $T_1 \approx T_2$.

Do mỗi cây nhị nguyên chỉ có hữu hạn các đỉnh, tuy nhiên N là tập vô hạn các số tự nhiên nên thuật toán duyệt trên toàn bộ sẽ rất khó khăn để kết luận hai cây T_1 và T_2 có tương đương với nhau hay không ? Vì vậy, ta phải tìm thuật toán hữu hiệu hơn để sau một số bước làm việc ta biết được hai cây có tương đương với nhau hay không ? Đó là phương pháp tiên đề hóa trong lôgic toán.

2. Hệ tiên đề và quy tắc dẫn xuất của TREE

ĐỊNH NGHĨA 6 :

Ta xem "=" là một ký hiệu mới không có trong tập $N \cup I \cup \{<,>\}$ và giả sử $T_1, T_2 \in$ TREE khi đó dãy $T_1 = T_2$ được gọi là phương trình cây.

Ta ký hiệu phương trình cây trên TREE là EQU và định nghĩa :

$$EQU = \{T_1 = T_2 / T_1, T_2 \in TREE\}$$

Giả sử X là tập con của EQU ($X \subseteq$ EQU) và $T_1 = T_2 \in$ EQU.

ĐỊNH NGHĨA 7 :

Phương trình cây $T_1 = T_2$ dẫn được từ tập X (ký hiệu $X \vdash T_1 = T_2$) khi và chỉ khi $T_1 = T_2 \in X$ hoặc $T_1 = T_2$, suy ra từ các phần tử của X bằng cách áp dụng một số hữu hạn lần các quy tắc dẫn xuất sau :

Quy tắc 1 (R_1) : Nếu $T \in$ TREE thì $X \vdash T = T$ (phản xạ) ;

Quy tắc 2 (R_2) : Nếu $X \vdash T_1 = T_2$ thì $X \vdash T_2 = T_1$ (đối xứng) ;

Quy tắc 3 (R_3) : Nếu $X \vdash T_1 = T_2$ và $X \vdash T_2 = T_3$ thì $X \vdash T_1 = T_3$ (bắc cầu) ;

Quy tắc 4 (R_4) : Nếu $X \vdash T_1 = T_1'$ thì $X \vdash k < T_1, T_2 > = k < T_1', T_2 >$ (ghép trái) ;

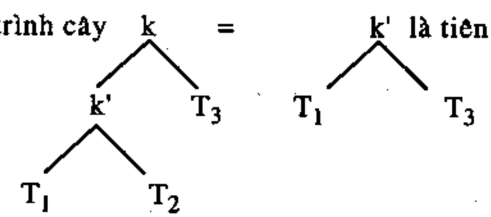
Quy tắc 5 (R_5) : Nếu $X \vdash T_2 = T_2'$ thì $X \vdash k < T_1, T_2 > = k < T_1, T_2' >$ (ghép phải).

Hệ tiên đề của TREE

Ta chọn hệ các tiên đề của TREE là các phương trình cây sau đây :

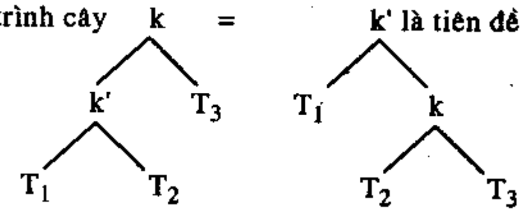
• *Tiên đề ax_1 :*

Phương trình cây



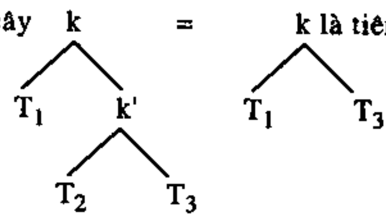
là tiên đề nếu $k' \geq k$

• *Tiên đề ax_2 :*

Phương trình cây 

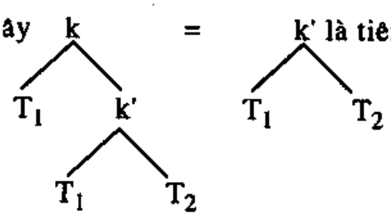
là tiên đề nếu $k' < k$

• *Tiên đề ax_3 :*

Phương trình cây 

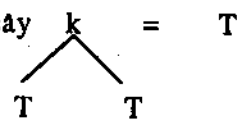
là tiên đề nếu $k \geq k'$

• *Tiên đề ax_4 :*

Phương trình cây 

là tiên đề nếu $k < k'$

• *Tiên đề ax_5 :*

Phương trình cây 

Đặt $AX = \{ax_1\} \cup \{ax_2\} \cup \{ax_3\} \cup \{ax_4\} \cup \{ax_5\} = \{ax_1, ax_2, ax_3, ax_4, ax_5\}$ và gọi AX là hệ tiên đề của TREE.

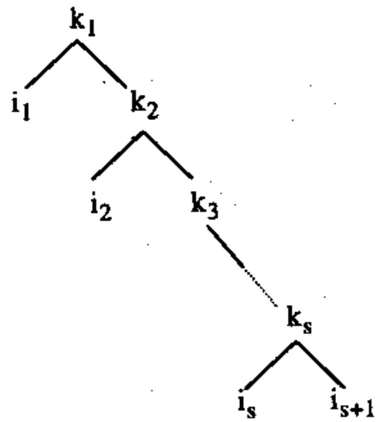
3. Dạng lệch phải của cây nhị nguyên

ĐỊNH NGHĨA 8 :

Một cây $L \in TREE$ được gọi là cây nhị nguyên lệch phải nếu :

a) $L \equiv i$ với mọi $i \in I$ hoặc

b) Nếu $L \not\equiv i$ thì $L \equiv k_1 < i_1, k_2 < i_2, ..., k_s < i_s, i_{s+1} > ... >$ hoặc



Ở đây $i_1, ..., i_{s+1} \in I$ và $i_j \neq i_{j+1}$ (j = 1, 2, ..., s) ; $k_1, k_2, ..., k_s \in N$ và $k_{i+1} - k_i > 0$ (i = 1, 2, ..., s − 1).

Định lý 4. (Tính duy nhất của dạng lệch phải)

Giả sử L_1, L_2 là hai cây lệch phải. $L_1 \approx L_2$ khi và chỉ khi $L_1 \equiv L_2$.

Định lý 5. *Với mọi $T \in TREE$ tồn tại duy nhất cây lệch phải L sao cho :*

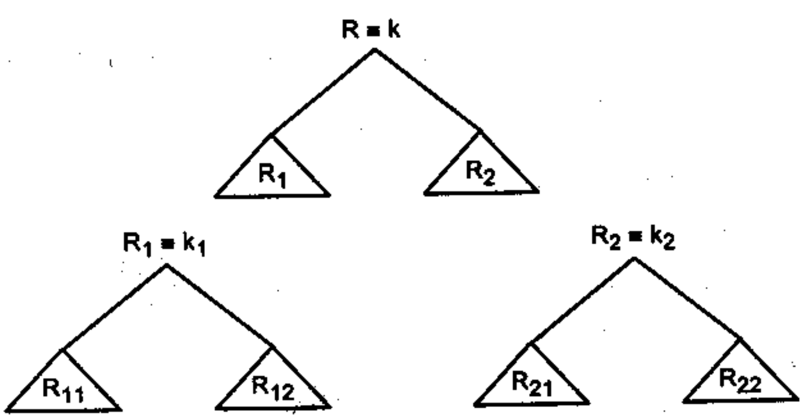
a) $T \approx L$;

b) $AX \vdash T = L$

4. Cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh

ĐỊNH NGHĨA 9 :

Cây nhị nguyên $R \in TREE$ được gọi là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh nếu : hoặc $R \equiv i$ với $i \in I$ hoặc



Với $k_1 < k < k_2$, $R_{11} \neq R_{12}$, $R_{21} \neq R_{22}$ và $|\gamma(i_n) - \gamma(i_m)| \leq 1$ ($n \neq m$) trong đó i_n, i_m là các thông tin ở lá của R.

Ở đây $\gamma(i) :=$ số các cung trong đường đi từ gốc đến đỉnh ngoài chứa thông tin i.

Với $|\gamma(i_n) - \gamma(i_m)| \leq 1$ có hai khả năng :

a) Nếu $|\gamma(i_n) - \gamma(i_m)| = 0$ với mọi cặp $i_n \neq i_m$ thì R gọi là cây đầy đủ hoàn chỉnh loại 1. Trường hợp này xảy ra khi dạng lệch phải của R có đúng 2^i đỉnh.

b) Nếu $|\gamma(i_n) - \gamma(i_m)| = 1$ đối với cặp $i_n \neq i_m$ nào đó thì R gọi là cây đầy đủ hoàn chỉnh loại 2. Trường hợp này xảy ra khi cây lệch phải R có số đỉnh ngoài $\neq 2^i$.

5. Thuật toán tìm cây nhị nguyên tối ưu với các thông tin chứa ở các lá

Vấn đề cây tối ưu trong phần này ta xét theo hai định nghĩa :

- Tối ưu theo cấu trúc (hay theo đỉnh) ;
- Tối ưu theo thời gian làm việc (tìm kiếm).

a) Tối ưu theo cấu trúc

ĐỊNH NGHĨA 10 :

Giả sử $T_o \in TREE$. T_o gọi là cây tối ưu theo cấu trúc nếu T_o thỏa mãn các điều kiện sau :

1. T_o là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh.

2. $\beta(T_o) = \min\{\beta(T)/T \in \text{TREE}$ và $T \approx T_o\}$

3. $h(T_o) = \min\{h(T)/T \in \text{TREE}$ và $T \approx T_o\}$.

4. Trong cây T, mã của đỉnh cha lớn hơn mã của đỉnh con bên trái và nhỏ hơn mã của đỉnh con bên phải.

• *Thuật toán tìm cây tối ưu theo cấu trúc :*

Cho cây $T \in$ TREE. Ta có thể tìm cây tối ưu theo cấu trúc T_o mà $T \approx T_o$ theo các bước sau đây :

– Bước 1 : Tìm dạng lệch phải L của T.

– Bước 2 : Tìm cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh R từ L bằng cách áp dụng tiên đề ax_2 một số hữu hạn lần. R chính là cây tối ưu theo cấu trúc cần tìm.

b) Tối ưu theo thời gian

Để định nghĩa khái niệm tối ưu theo thời gian, ta cần nhớ lại khi cho phần tử $l \in N$ vào cây $T \in$ TREE thì hàm ánh xạ $f(T, l)$ xác định duy nhất một đường đi từ đỉnh cây T đến một lá nào đó. Đường đi đó ta ký hiệu là $\omega(l)$.

Đặt $W(T) = \{\omega(l)/l \in N\}$ với cây $T \in$ TREE. Gọi F là ánh xạ đơn trị từ tập W(T) vào tập R^+ các số thực dương. Khi đó ta gọi $F(\omega(l))$ là thời gian xác định thông tin mà đường $f(T, l)$ dẫn tới trong cây T ứng với khóa là l. Tiếp theo ta đặt $\Delta(T, F, P) = \sum_{l \in M} P(l)F(\omega(l))$ và được gọi là thời gian trung bình (ứng với F, P) để xác định các thông tin chứa trong cây T ứng với tập các câu hỏi $M \subset N$. Ở đây P là phân bố xác suất rời rạc trên M, còn M là tập xác định.

ĐỊNH NGHĨA 11 :

Giả sử $T_1 \in$ TREE, T_1 được gọi là cây tối ưu theo thời gian nếu T_1 thỏa mãn các điều kiện sau :

1. T_1 là cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh.

2. $\Delta(T_1, F, P) = \min\{\Delta(T, F, P)/T \in \text{TREE và } T \underset{M}{\approx} T_1\}$.

3. Trong cây T, mã của đỉnh cha lớn hơn mã của đỉnh con bên trái và nhỏ hơn mã của đỉnh con bên phải.

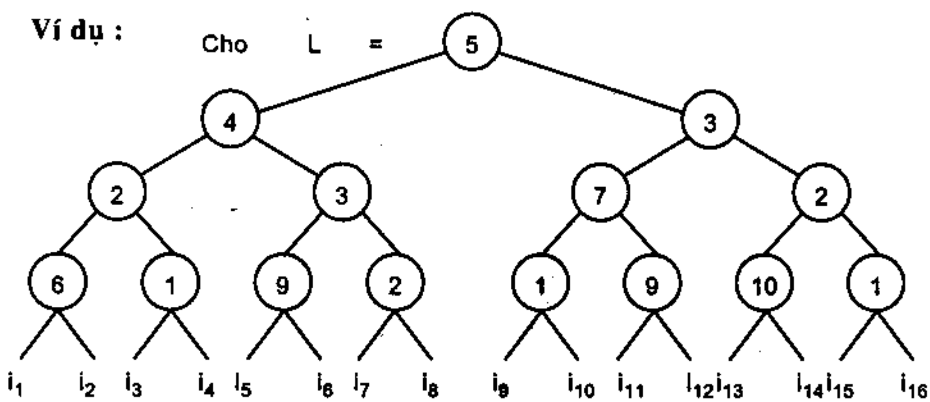
Thuật toán tìm cây tối ưu theo thời gian :

Với mỗi $T \in$ TREE, ta xây dựng được cây tối ưu theo thời gian T_1 mà $T_1 \approx T_2$ theo các bước sau :

– Bước 1 : Tìm cây lệch phải của T là L.

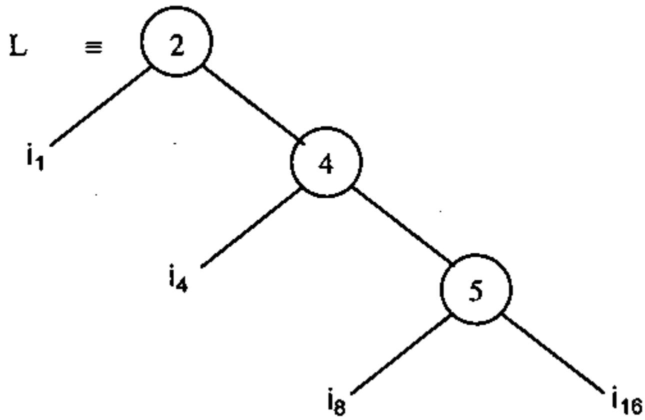
– Bước 2 : Từ L tìm cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh R và R chính là cây tối ưu theo thời gian.

Ví dụ :

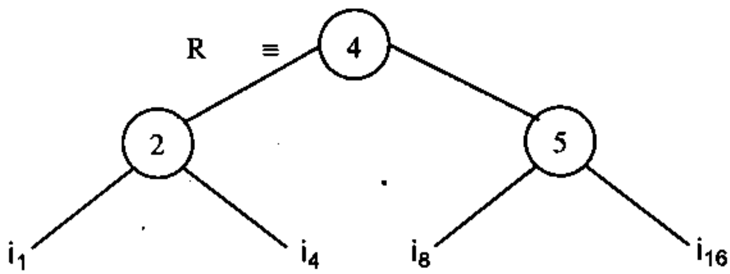


Với $i_n \neq i_{n+1}$ (n = 1, 2, ..., 15).

– *Bước 1 :* Tìm dạng lệch phải của T là :



– *Bước* 2 *:* Từ L tìm cây nhị nguyên đầy đủ là :



ở đây $T \underset{M}{\approx} L \underset{M}{\approx} R$; $M = \{2, 4, 5, 6\}$.

$F : W(T) \to R^+$ ta định nghĩa như sau : $F(\omega(l))$: = Số các cung của đường $\omega(l)$, $l \in M$.

Phân bố xác suất P trên M ta lấy là phân bố xác suất đều, tức là $P(l) = 1/4$ với mọi $l \in M$ hay $P(2) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/4$.

Với T ta tính được :

$$F(\omega(2)) = F(\omega(4)) = F(\omega(5)) = F(\omega(6)) = 4.$$

Vậy :

$$\Delta(T, F, P) = \sum_{l \in M} P(l)F(\omega(l) = 1/4 = \sum_{l \in M} F(\omega(l))$$

$$= 1/4(4 + 4 + 4 + 4) = 4$$

Đối với cây lệch phải L ta có :

$$F(\omega(2)) = 1,\ F(\omega(4)) = 2,\ F(\omega(5)) = F(\omega\ (6)) = 3.$$

$$\Delta\ (L, F, P) = 1/4(1 + 2 + 3 + 3) = 9/4$$

Đối với R ta có,: $F(\omega(2)) = F(\omega(4)) = F(\omega(5)) = F(\omega(6)) = 2$

$$\Delta(R,F, P) = 1/4(2 + 2 + 2 + 2) = 2.$$

Có thể chỉ ra với mọi cây $T' \in TREE$ mà $T' \underset{M}{\approx} R$.

$T' \notin \{T, L, R\}$ ta có :

$$\Delta'(T', F, P) = \sum_{l \in M} P(l)F(\omega(l)) \geq 9/4$$

Hay $\Delta(R, F, P) = \min\{\Delta(T, F, P)/T \in TREE \text{ và } T \approx R\}$ theo định nghĩa R là cây tối ưu theo thời gian.

Qua ví dụ trên ta thấy cây nhị nguyên đầy đủ hoàn chỉnh là tối ưu theo cấu trúc và cũng tối ưu theo thời gian.

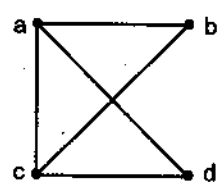
BÀI TẬP

A - Bài tập có lời giải

Bài 1. Dùng ma trận liền kề, hãy biểu diễn đồ thị trên hình 4.30.

Giải : Ta sắp xếp các đỉnh theo thứ tự a, b, c, d. Ma trận biểu diễn đồ thị này là :

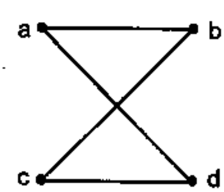
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Hình 4.30. Đồ thị đơn

Bài 2. Hãy vẽ đồ thị có ma trận liền kề theo thứ tự của các đỉnh là a, b, c, d ?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



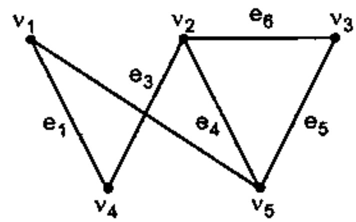
Hình 4.31. Đồ thị ứng với ma trận liền kề cho trước

Giải : Đồ thị ứng với ma trận liền kề này được biểu diễn trên hình 4.31.

Bài 3. Hãy biểu diễn đồ thị trên hình 4.32 bằng ma trận liên thuộc ?

Giải : Ma trận liên thuộc có dạng :

$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



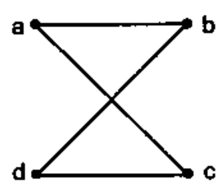
Hình 4.32. Đồ thị vô hướng

Bài 4. Có bao nhiêu đường đi độ dài 4 từ a tới d trong đồ thị đơn G trên hình 4.33 ? (sử dụng định lý sau)

Định lý : *Cho G là một đồ thị với ma trận liền kề A theo thứ tự các đỉnh $v_1, v_2, ..., v_n$.(với các cạnh vô hướng hoặc có hướng hay là cạnh bội, có thể có khuyên). Số các đường đi khác nhau độ dài r từ v_i tới v_j, trong đó r là một số nguyên dương, bằng giá trị của phần tử (i, j) của ma trận A^r.*

Giải : Ma trận liền kề của đồ thị G (theo thứ tự a, b, c, d) là :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Hình 4.33. Đồ thị G

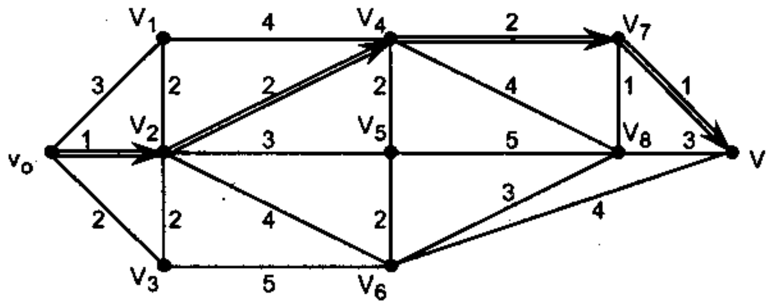
Vì thế, số đường đi độ dài 4 từ a tới d là giá trị của phần tử (i, j) của A^4. Vì

$$A^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

nên có đúng 8 đường đi độ dài 4 từ a tới d. Kiểm tra trực tiếp trên đồ thị ta được 8 đường đi độ dài 4 từ a tới d là : a, b, a, b, d ; a, b, a, c, d ; a, b, d, b, d ; a, b, d, c, d ; a, c, a, b, d ; a, c, a, c, d ; a, c, d, b, d ; và a, c, d, c, d.

Bài 5. Dùng thuật toán Dijsktra tìm đường đi ngắn nhất giữa hai đỉnh v_o và v trong đồ thị sau (hình 4.34).

Giải : Để thuận lợi, ta giải bài toán trên bảng như sau :

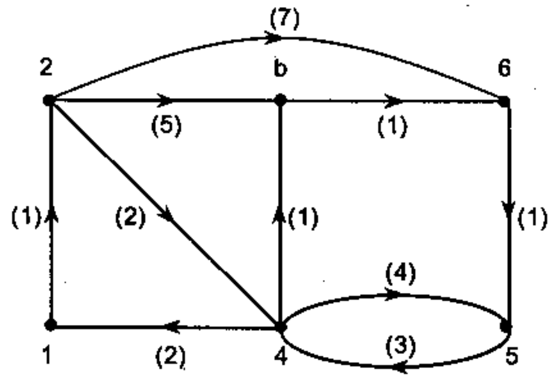


Hình 4.34

Bước	Đỉnh dán nhãn	Nhãn	Đỉnh trước
0	V_o	0	
1	V_1	3	V_o
2	V_2	1	V_o
3	V_3	2	V_o
4	V_4	$1 + 2 = 3$	V_2
5	V_5	$1 + 3 = 4$	V_2
6	V_6	$1 + 4 = 5$	V_2
7	V_7	$3 + 2 = 5$	V_4
8	V_8	$3 + 4 = 7$	V_4
9	V	$5 + 1 = 6$	V_7

Đường đi ngắn nhất là $V_o \to V_2 \to V_4 \to V_7 \to V$ (trọng số 6).

Bài 6. Tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh 1 đến các đỉnh còn lại của đồ thị ở hình 4.35.



Hình 4.35. Minh họa thuật toán Dijkstra

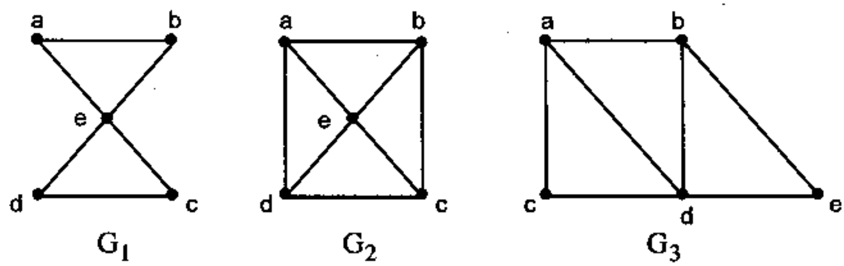
Giải : Kết quả tính toán theo thuật toán được trình bày trong bảng dưới đây. Quy ước viết hai thành phần của nhãn theo thứ tự d[v], Truoc[v]. Đỉnh được đánh dấu * là đỉnh được chọn để cố định nhãn ở bước lặp đang xét, nhãn của nó không biến đổi ở các bước tiếp theo, vì thế ta đánh dấu –.

Bước lặp	Đỉnh 1	Đỉnh 2	Đỉnh 3	Đỉnh 4	Đỉnh 5	Đỉnh 6
Khởi tạo	0, 1	1, 1*	∞, 1	∞, 1	∞, 1	∞, 1
1	–	–	6,2	3,2*	∞, 1	8,2
2	–	–	4,4*	–	7,4	8,2
3	–	–	–	–	7,4	5,3*
4	–	–	–	–	6,6*	–
5						

Bảng kết quả tính toán theo thuật toán Dijkstra

Bài 7. Đồ thị nào trên hình 4.36 có chu trình Euler ? Nếu không, liệu nó có đường đi Euler không ?

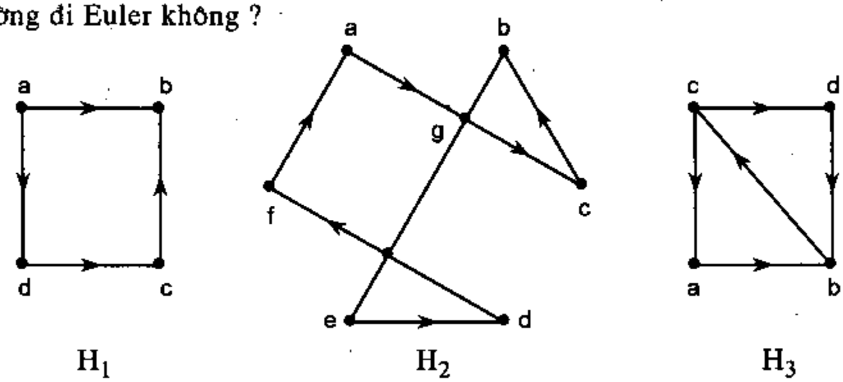
Giải : Đồ thị G_1 có chu trình Euler, ví dụ : a, e, c, d, e, b, a. Cả hai đồ thị G_2 và G_3 đều không có chu trình Euler.



Hình 4.36. Các đồ thị vô hướng G_1, G_2 và G_3

Tuy nhiên G_3 có đường đi Euler, cụ thể là a, c, d, e, b, d, a, b. G_2 không có đường đi Euler.

Bài 8. Đồ thị nào trên hình 4.37 có chu trình Euler ? Nếu không, liệu nó có đường đi Euler không ?

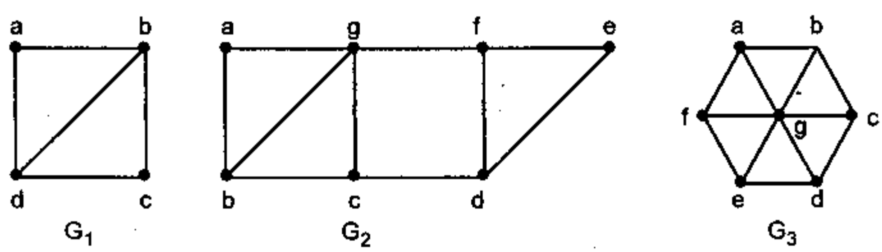


Hình 4.37. Các đồ thị có hướng H_1, H_2 và H_3.

Giải : Đồ thị H_2 có chu trình Euler, ví dụ : a, g, c, b, g, e, d, f, a. Cả hai đồ thị H_1 và H_3 đều không có chu trình Euler (độc giả tự kiểm tra lại điều này). H_3 có đường đi Euler, cụ thể là c, a, b, c, d, b, nhưng H_1 không có đường đi Euler (độc giả tự kiểm tra lại).

Định lý : Đa đồ thị liên thông có đường đi Euler nhưng không có chu trình Euler nếu và chỉ nếu nó có đúng hai đỉnh bậc lẻ.

Bài 9. Đồ thị nào trên hình 4.38 có đường đi Euler ?



Hình 4.38. Ba đồ thị vô hướng

2. Các tính chất của KVTH

Tính chất 1. KVTH của một hằng số C bằng chính nó :

$$E(C) = C$$

Chứng minh : Coi C như một ĐLNN đặc biệt nhận giá trị C với xác suất bằng 1, ta có

$$E(C) = C.1 = C$$

Tính chất 2. $E(CX) = CE(X)$

Chứng minh : $E(CX) = \sum_{i=1}^{n}(Cx_i)p_i = C\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = CE(X)$

Tính chất 3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Chứng minh : Ký hiệu $Z = X + Y$, Z là ĐLNN rời rạc nhận các giá trị $z_{ij} = x_i + y_j$ với xác suất $r_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$

$$p_i = p(X = x_i),\ p_j = p(Y = y_j)$$

$$E(Z) = E(X + Y) = \sum_i\sum_j (x_i + y_j)r_{ij} = \sum_i\sum_j x_i r_{ij} + \sum_i\sum_j y_j r_{ij}$$

$$= \sum_i x_i \sum_j r_{ij} + \sum_j y_j \sum_i r_{ij} = \sum_i x_i p_i + \sum_j y_j p_j = E(X) + E(Y)$$

Tính chất 4. Nếu X và Y là các ĐLNN độc lập thì :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Chứng minh : Ký hiệu $Z = X.Y$, $r_{ij} = p_i.p_j$ (do độc lập)

$$E(XY) = \sum_i\sum_j (x_i y_j) r_{ij} = \sum_i\sum_j x_i y_j p_i p_j = \sum_i x_i p_i . \sum_j y_j p_j =$$

$$= E(X).E(Y)$$

3. KVTH của hàm của ĐLNN

Giả sử X của ĐLNN có luật xác suất là $p_i = p(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ và $Y = \varphi(X)$ là hàm của X. Hãy tìm kỳ vọng của Y.

Dễ thấy rằng Y là ĐLNN với luật xác suất là :

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_i)$
P	P_1	P_2	...	P_i

Vì vậy :

$$E(\varphi(X)) = \sum_{i} \varphi(x_i)p_i$$

Nếu X là ĐLNN liên tục với mật độ f(x) thì φ(x) có KVTH là

$$E[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$$

3.2. Phương sai

1. Khái niệm

Ví dụ mở đầu : Qua 5 kỳ kiểm tra, điểm toán của 2 sinh viên Hùng và Dũng là :

X_H (điểm toán của Hùng)	8	7	9	8	8
X_D (điểm toán của Dũng)	6	10	7	9	8

Qua bảng kết quả trên, thấy rằng điểm toán trung bình của Hùng và Dũng bằng nhau

$$\overline{x}_H = \frac{8+7+9+8+8}{5} = 8 = \overline{x}_D = \frac{6+10+7+9+8}{5}$$

Tuy nhiên nếu tính trung bình của bình phương độ lệch của các điểm kiểm tra so với điểm trung bình ta có :

$$S_H^2 = \frac{1}{5}[(8-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2 + (8-8)^2] = \frac{2}{5}$$

$$S_D^2 = \frac{1}{5}[(6-8)^2 + (10-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2] = \frac{10}{5} = 2$$

và như thế $S_H^2 < S_D^2$, ta nói rằng điểm kiểm tra toán của Hùng đều hơn điểm của Dũng.

ĐỊNH NGHĨA

Ta gọi phương sai của ĐLNN rời rạc X, ký hiệu bởi D(X) là đại lượng được định nghĩa theo biểu thức :

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(X)]^2 P_i$$

Nếu X là ĐLNN liên tục với hàm mật độ f(x) thì :

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx$$

Độ lớn của phương sai đặc trưng cho sự tản mát các giá trị của ĐLNN xung quanh kỳ vọng của X.

Độ lệch chuẩn của ĐLNN là $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

2. Tính chất của phương sai

Tính chất 1. Phương sai của một hằng số bằng 0 : $D(C) = 0$

Tính chất 2. $D(CX) = C^2D(X)$

Tính chất 3. Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

Chứng minh tính chất 3 :

* Trước hết, ta chứng minh rằng :

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Thật vậy :

$$D(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 p(x) = \sum_x [x^2 - 2xE(X) + (E(X))^2]p(x)$$

$$= \sum_x x^2p(x) - 2E(X)\sum_x xp(x) + [E(X)]^2\sum_x p(x) =$$

$$= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

* Tiếp đó sử dụng $(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$

$$D(X + Y) = E(X + Y)^2 - [E(X + Y)]^2 =$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - [(E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2]$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$= D(X) + D(Y)$$

với chú ý rằng $E(XY) - E(X)E(Y) = 0$

Ví dụ : Cho ĐLNN với dãy phân phối xác suất

x	2	3	4	6	7
p(x)	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Ta có : $E(X) = 2(0,1) + 3(0,2) + 4(0,3) + 6(0,2) + 7(0,2) = 4,6$

$E(X^2) = 2^2(0,1) + 3^2(0,2) + 4^2(0,3) + 6^2(0,2) + 7^2(0,2) = 24$

$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 24 - (4,6)^2 = 2,84$

$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2,84} = 1,685$

BÀI TẬP

A - Bài tập có lời giải

I – CÁC ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

Bài 1.

Gieo một con súc sắc đối xứng và đồng chất.

Tìm xác suất để được :

a) Mặt sáu chấm xuất hiện.

b) Mặt có số chẵn chấm xuất hiện.

Giải :

a) Gọi A là biến cố khi gieo con súc sắc thì mặt sáu chấm xuất hiện. Số kết cục duy nhất đồng khả năng n = 6. Số kết cục thuận lợi m = 1.

Vậy theo định nghĩa cổ điển về xác suất thì :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

b) gọi B là biến cố khi gieo con súc sắc thì mặt chẵn chấm xuất hiện. Lý giải tương tự ta có :

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0,5$$

Bài 2.

Thang máy của một tòa nhà 7 tầng xuất phát từ tầng một 3 khách. Tìm xác suất để :

a) Tất cả cùng ra ở tầng bốn.

b) Tất cả cùng ra ở một tầng.

c) Mỗi người ra ở một tầng khác nhau.

Giải :

Mỗi khách đều có 6 khả năng để ra ở 6 tầng còn lại của tòa nhà. Do đó số kết cục đồng khả năng n = $\overline{A}_6^3$ = 216. Gọi A là biến cố tất cả cùng ra ở tầng bốn, m = 1.

Vậy : $P(A) = \frac{1}{216}$

Lý luận tương tự như trên

$$P_b = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}\ ;\ P_c = \frac{A_6^3}{216} = \frac{5}{9}$$

II – CÁC ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT

Bài 3.

Cơ cấu chất lượng sản phẩm của một nhà máy như sau : Sản phẩm loại 1 : 40%, sản phẩm loại 2 : 50%, còn lại là phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy. Tính xác suất sản phẩm lấy ra thuộc loại 1 hoặc loại 2.

Giải :

Gọi A_1 là biến cố sản phẩm lấy ra thuộc loại 1.

Gọi A_2 là biến cố sản phẩm lấy ra thuộc loại 2.

Gọi A là biến cố sản phẩm lấy ra thuộc loại 1 hoặc loại 2

$$A = A_1 + A_2$$

Vì A_1 và A_2 xung khắc, do đó :

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0,4 + 0,5 = 0,9$$

Bài 4.

Hai người cùng bắn vào một mục tiêu. Khả năng bắn trúng của từng người là 0,8 và 0,9. Tìm xác suất :

a) Chỉ có một người bắn trúng mục tiêu.

b) Có người bắn trúng mục tiêu.

c) Cả hai người bắn trượt.

Giải : Gọi A_1 và A_2 tương ứng là biến cố người thứ nhất và thứ hai bắn trúng mục tiêu, A là biến cố chỉ có một người bắn trúng mục tiêu.

$$A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2 .$$

Các nhóm biến cố trên là xung khắc, trong mỗi nhóm các biến cố lại độc lập nhau, do đó.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = P(A_1)P_1(\overline{A}_2) + P_1(\overline{A}_1)P(A_2) \\ &= 0,8.0,1 + 0,2.0,9 = 0,26 \end{aligned}$$

Tương tự ta có :

$$P_b = 0,98 \ ; \ P_c = 0,02$$

Bài 5.

Xác suất để bắn một viên đạn trúng đích là 0,8. Hỏi phải bắn bao nhiêu viên đạn để với xác suất nhỏ hơn 0,4 có thể hy vọng rằng không có viên nào trượt.

Giải : Giả sử phải bắn n viên đạn. Gọi A_i ($i = \overline{1,n}$) là biến cố viên đạn thứ i trúng đích. Gọi A là biến cố không có viên nào trượt.

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Vì các biến cố là độc lập toàn phần nên :

$$P(A) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = (0,8)^n < 0,4$$

Từ đó $n > \dfrac{\lg 0,4}{\lg 0,8} \approx 5$. Phải bắn ít nhất 5 viên.

Bài 6. Có 30 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm được bỏ ngẫu nhiên vào 3 hộp với số lượng bằng nhau. Tìm xác suất để một hộp nào đó có 1 phế phẩm.

Giải : Gọi A_i (i = 1, 3) là biến cố hộp thứ i có 1 phế phẩm. Gọi A là biến cố một hộp nào đó có 1 phế phẩm

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

Các biến cố A_1, A_2, A_3 không xung khắc và phụ thuộc nhau, do đó :

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

Ta có :

$$P(A_i) = \frac{C_3^1.C_{18}^9.C_{20}^{10}.1}{C_{30}^{10}.C_{20}^{10}.1} = 0,468 \ ; \ i = \overline{1,3}$$

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j/A_i) = 0,468.0,526 = 0,2463 \ ; \ ij = \overline{1,3}$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) = 0,2463$$

Từ đó P(A) = 0,911.

III – ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

Bài 7. Một xí nghiệp có hai ôtô vận tải hoạt động. Xác suất trong ngày làm việc các ô tô bị hỏng tương ứng bằng 0,1 và 0,2. Gọi X là số ô tô bị hỏng trong thời gian làm việc.

a) Tìm quy luật phân phối xác suất của X.

b) Thiết lập hàm phân phối xác suất của X và vẽ đồ thị của nó.

Giải : a) Nếu gọi X là số ô tô bị hỏng trong thời gian làm việc thì X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị có thể có X = 0, 1, 2. Ta tìm xác suất P(X = 0). Biến cố (X = 0) xảy ra khi cả hai ô tô cùng hoạt động tốt. Do đó, theo định lý nhân xác suất

$$P(X = 0) = 0,9 \ . \ 0,8 = 0,72$$

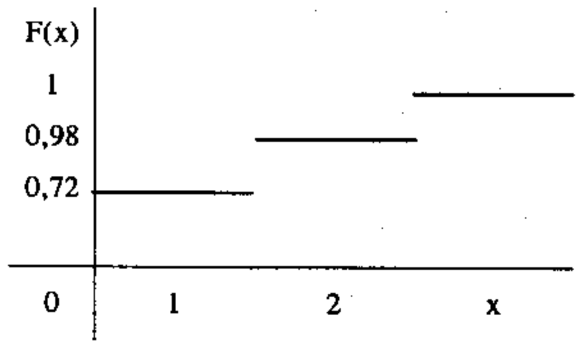
Lý giải tương tự ta có :

$$P(X = 1) = 0,1 . 0,8 + 0,9 . 0,2 = 0,26$$

$$P(X = 2) = 0,1 . 0,2 = 0,02$$

Vậy quy luật phân phối xác suất của X là :

X	0	1	2
P	0,72	0,26	0,02



Bài 8. Bảng phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X như sau :

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

a) Tính M(X) ; D(X) và σ_X

b) Tìm giá trị mốt X_o

Đáp số : M(X) = – 0,3

D(X) = 15,21 ; $\sigma_X = 3,9$

$X_o = -5$

Bài 9. Cho X_1 và X_2 là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập có bảng phân phối xác suất như sau :

X_1	2	3	5
P	0,3	0,5	0,2

X_2	1	4
P	0,2	0,8

a) Tính $M(X_1)$ và $M(X_2)$; $D(X_1)$ và $D(X_2)$

b) Tính $M(X_1 + X_2)$ và $D(X_1 + X_2)$

Đáp số : $M(X_1) = 3{,}1$; $M(X_2) = 3{,}4$

$D(X_1) = 1{,}09$; $D(X_2) = 1{,}44$;

$M(X_1 + X_2) = 6{,}5$; $D(X_1 + X_2) = 2{,}53$

Bài 10. Cho X_1, X_2, X_3 là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập và có bảng phân phối xác suất của chúng như sau :

X_1	0	1
P	0,6	0,4

X_2	1	2
P	0,4	0,6

X_3	0	2
P	0,8	0,2

Lập $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$. Tính $M(\bar{X})$ và $D(\bar{X})$

Đáp số : $M(\bar{X}) = 0{,}8$; $D(\bar{X}) = 0{,}12$

Bài 11. Hai đại lượng ngẫu nhiên X, Y độc lập

Tính D(Z) biết :

a) $Z = 2X + 3Y$; b) $Z = -3X$

Cho biết $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$

Đáp số : a) $D(Z) = 61$; b) $D(Z) = 36$

Bài 12. Đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất như sau :

$$f(x) = \begin{cases} k \text{ với } x \in (a, b) \\ 0 \text{ với } x \in (a, b) \end{cases}$$

a) Tìm hệ số k ; b) Tìm M(X) và D(X) ; c) Tìm hàm F(X)

Đáp số : a) $k = \dfrac{1}{b-a}$;

b) $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$; $D(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

c) $$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{với } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{với } a \le x \le b \\ 1 & \text{với } x > b \end{cases}$$

Bài 13. Đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất như sau :

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 2 \\ Cx - 1 & \text{với } 2 < x \le 4 \\ 1 & \text{với } x > 4 \end{cases}$$

a) Tìm hằng số C

b) Tìm M(X)

Giải :

a) Từ biểu thức của hàm phân phối xác suất suy ra hàm mật độ xác suất có dạng :

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{với } x \in (2, 4) \\ 0 & \text{với } x \notin (2, 4) \end{cases}$$

Theo tính chất của hàm mật độ xác suất

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_2^4 Cdx \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

b) Theo định nghĩa kỳ vọng toán học

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_2^4 \frac{1}{2}xdx = 3$$

Bài 14. Đại lượng ngẫu nhiên liên tục x có hàm mật độ xác suất :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2} & \text{với } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{với } x \notin (0, \pi) \end{cases}$$

a) Tìm hàm phân phối xác suất F(X)

b) Tìm $P(0 < X < \frac{\pi}{4})$

c) Tìm M(X)

Đáp số : a) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ \dfrac{1 - \cos x}{2} & \text{với } 0 < x \le \pi \\ 1 & \text{với } x > \pi \end{cases}$

b) $P(0 < X < \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $M(X) = \frac{\pi}{2}$

Bài 15. Hàm mật độ của ĐLNN X có dạng :

$$f(x) = \begin{cases} a\cos^2 x & |x| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Xác định hệ số a.

b) Tính xác suất để trong 2 thí nghiệm độc lập, ít nhất một lần ĐLNN có giá trị lớn hơn $\frac{\pi}{4}$.

Giải :

a) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2 x dx = 1 \Leftrightarrow a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$

$$\frac{a}{2}\left[x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{a}{2}[\pi] = \frac{a\pi}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\pi}$$

b) Gọi A là sự kiện cả 2 lần thí nghiệm X đều có giá trị $\le \frac{\pi}{4}$

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = [P(X \le \frac{\pi}{4})]^2$$

Gọi $\overline{A}$ là sự kiện ít nhất 1 lần ĐLNN có giá trị $> \frac{\pi}{4}$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - [P(X \le \frac{\pi}{4})]^2$$

$$P(X \le \frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\right] = \frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi} = \frac{3\pi+2}{4\pi}$$

$$[P(X \le \frac{\pi}{4})]^2 = \frac{(3\pi+2)^2}{16}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{16}$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHƯƠNG V

Bài 1. Một bộ đề thi có 150 câu, trong đó có 50 câu của chương I, 70 câu của chương II và 30 câu của chương III.

Lập một đề thi trắc nghiệm gồm 30 câu với 10 câu của chương I, 15 câu của chương II và 5 câu của chương III.

Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi ?

Giải :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_{50}^{10} = \frac{50!}{40!10!}, \quad C_{70}^{15} = \frac{70!}{55!15!}, \quad C_{30}^{5} = \frac{30!}{25!5!}$$

$$\sum = C_{50}^{10}.C_{70}^{15}.C_{30}^{5}$$

Bài 2. Ta mang về 50 bó hoa để cắm vào bàn tiệc. Xem kỹ thấy 20 bông có hương thơm và 35 bông hợp về màu và cỡ.

Ta quyết định bông hoa cắm được là bông thơm hoặc bông hợp về màu và cỡ. Rút ra từ bó hoa một cách ngẫu nhiên một bông.

Tính xác suất để lấy được một bông hoa cắm được, biết rằng có 15 bông hợp cả màu, cỡ và thơm.

Giải :

Đặt A là sự kiện rút được một bông hợp màu và cỡ, B là sự kiện rút ra 1 bông thơm.

Cần tính $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A) = \frac{35}{50} ; P(B) = \frac{20}{50} ; P(A \cap B) = \frac{15}{50}$$

Theo công thức cộng xác suất :

$$P(A \cup B) = \frac{35}{50} + \frac{20}{50} - \frac{15}{50} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

Bài 3. Người ta rút ra hai lần, mỗi lần một quân bài từ bộ tú lơ khơ 52 quân bài. Tìm xác suất để rút được 2 quân A trong các trường hợp sau :

a) Nếu quân bài đầu tiên trả lại trong bộ bài.

c) Nếu quân bài đầu tiên không trả lại.

Giải :

a) Gọi A_1 là biến cố rút được quân A ở lần 1

A_2 là biến cố rút được quân A ở lần 2

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2) = \frac{4}{52}.\frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

b) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{4}{52}.\frac{3}{52} = \frac{1}{221}$

Bài 4. Một cửa hàng điện ở chợ thường nhập về 50% bóng đèn ống của Điện quang, 30% bóng của Đài Loan, còn 20% bóng nhập của Thái Lan. Biết rằng tỷ lệ bóng hỏng (kém chất lượng) của Điện quang là 1,5% ; của Đài Loan là 1%, còn của Thái Lan là 3%. Bóng mua về để lẫn lộn. Có khách, người bán rút vội ra một chiếc để thử.

Tìm xác suất để bóng đó bị hỏng ?

Giải :

Gọi : A_1 là sự kiện lấy ra 1 bóng đèn ống của Điện quang

A_2 là sự kiện lấy ra 1 bóng đèn ống của Đài Loan

A_3 là sự kiện lấy ra 1 bóng đèn ống của Thái Lan

Gọi B là sự kiện lấy ngẫu nhiên ra 1 bóng. Tính xác suất để bóng đó là bóng bị hỏng.

Theo công thức xác suất toàn phần :

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3)$$

$$= \frac{50}{100}.\frac{3}{2}\% + \frac{30}{100}.1\% + \frac{20}{100}.3\% =$$

$$= \frac{75+30+60}{100}\% = \frac{165}{100} = 1,65\% = 0,0165$$

Bài 5. Trong các điều kiện của bài 4, lấy ra một bóng đèn. Sau khi thử biết bóng đèn đó bị hỏng.

Tìm xác suất để bóng đèn đó

a) Của Điện quang.

b) Của Đài Loan.

c) Của Thái Lan.

Giải : Theo công thức Bayes :

a) $P(A_1/B) = \dfrac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \dfrac{\frac{50}{100}\left(\frac{3}{2}\right)\%}{1,65\%} = \dfrac{0,75}{1,65} = \dfrac{75}{165}$

b) $P(A_2/B) = \dfrac{\frac{30}{100}(1\%)}{1,65\%} = \dfrac{30}{165}$

c) $P(A_3/B) = \dfrac{\frac{20}{100}.3\%}{1,65\%} = \dfrac{60}{165}$

Bài 6. Hàm mật độ xác suất của ĐLNN liên tục X cho bởi :

$$f(x) = \frac{c}{x^2+1} \qquad -\infty < x < +\infty$$

a) Tìm giá trị của c ;

b) Tìm $P(1/3 \le x^2 \le 1)$;

c) Xác định hàm phân phối F(x).

Đáp số : a) $c = \dfrac{1}{\pi}$; b) $p(1/3 \le x^2 \le x) = \dfrac{1}{6}$

c) $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\text{arctg}x$

Bài 7. Hàm phân phối của ĐLNN liên tục X là :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{với } x \ge 0 \\ 0 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

a) Thiết lập hàm mật độ xác suất f(x);

b) Tìm $P(X \ge 2)$;

c) Tìm $P(-3 \le X \le 4)$.

Đáp số : a) $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

b) $P(X \ge 2) = e^{-4}$; c) $P(-3 \le X \le 4) = 1 - e^{-8}$

Bài 8. Mật độ xác suất của một ĐLNN liên tục có dạng :

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{với } x \geq 0 \\ 0 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

Hãy đánh giá :

a) E(X) ; b) $E(X^2)$; c) D(X)

Đáp số : a) $E(X) = \dfrac{1}{2}$

b) $E(X^2) = 1$; c) $D(X) = \dfrac{3}{4}$

B - Bập tập tự giải

Bài 1. Có hai con súc sắc đều, giống nhau. Ta gieo hai con súc sắc một lần. Hãy tìm xác suất của sự kiện A : Tổng số chấm của cả 2 con là 7.

Đáp số : $P(A) = \dfrac{1}{6}$

Bài 2. Trong các điều kiện của bài 1, hãy tính xác suất để cho tổng số chấm của 2 con là 7 hoặc 8.

Đáp số : $P(A \cup B) = \dfrac{11}{36}$

Bài 3. Trong lớp học có 70 học sinh, trong đó có 30 em khá và giỏi Toán. Vào lớp thầy giáo tình cờ đọc tên 10 em. Tính xác suất để trong đó cỏ ít nhất một em khá hoặc giỏi toán.

Đáp số : $P(A) = 1 - \dfrac{C_{40}^{10}}{C_{70}^{10}}$

Bài 4. Lớp học có 70 em, trong đó có 40 em nữ. Trong lớp có 32 em giỏi Anh văn, trong đó có 20 nữ và 12 nam.

Hãy tính xác suất của sự kiện A gặp một em giỏi Anh văn, với điều kiện đó là em nữ (sự kiện B).

Đáp số : $P(A/B) = \dfrac{P(A.B)}{P(B)} = \dfrac{1}{2}$

Bài 5. Trong các điều kiện của ví dụ 4. Nếu giáo viên mở sổ điểm danh gọi một học sinh bất kỳ. Tìm xác suất để học sinh được gọi là một em nữ giỏi Anh văn.

Đáp số : $P(A.\ B) = \dfrac{2}{7}$.

Bài 6. Biết rằng $P_1 = 0{,}04$ là xác suất để mỗi sản phẩm được sản xuất ra từ dây chuyền I là phế phẩm ; $P_2 = 0{,}03$ đối với dây chuyền II ; $P_3 = 0{,}05$ đối với dây chuyền III ; $P_4 = 0{,}058$ đối với dây chuyền IV. Từ một lô gồm 8 sản phẩm của dây chuyền I, 12 sản phẩm của dây chuyền II, 10 sản phẩm của dây chuyền III và 5 sản phẩm của dây chuyền IV, lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm. Tìm xác suất của sự kiện B : nhận được sản phẩm xấu (tốt).

Đáp số : $P(B) = 0{,}42$, $P(\overline{B}) = 0{,}958$

Bài 7. Trong các điều kiện của bài 6, nếu giả sử đã biết sản phẩm nhận được là xấu (sự kiện B), hãy tìm xác suất để sản phẩm đó được sản xuất bởi dây chuyền I (sự kiện A_1), bởi dây chuyền II (sự kiện A_2), bởi dây chuyền III (sự kiện A_3), bởi dây chuyền IV (sự kiện (V).

Đáp số : $P(A_1/B) = 0{,}2177$; $B(A_2/B) = 0{,}2449$;

$P(A_3/B) = 0{,}340$; $P(A_4/B) = 0{,}1973$

Bài 8. Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân phối

X	–20	0	10	30	40
$P(X = x_i)$	0,20	0,15	0,30	0,20	0,15

a) Tính E(X) ; b) Tính D(X)

Đáp số : a) E(X) = 11

b) D(X) = 409

Chương 6
PHƯƠNG PHÁP TÍNH

I – SỐ XẤP XỈ VÀ SAI SỐ

1.1. Số xấp xỉ

Trong thực hành, giá trị của các đại lượng nhận được bằng phép đo, bằng thực nghiệm thường không được biết một cách chính xác. Vì vậy trong tính toán, chúng ta làm việc chủ yếu với giá trị xấp xỉ (còn gọi là giá trị gần đúng) của các đại lượng.

ĐỊNH NGHĨA 1

a gọi là số xấp xỉ của số đúng A, ký hiệu $a \approx A$, nếu a khác A không đáng kể và được dùng thay cho A trong tính toán.

Nếu $a < A$ thì a gọi là xấp xỉ thiếu của A. Nếu $a > A$ thì a gọi là xấp xỉ thừa của A.

Ví dụ 1. Đối với số π thì 3,14 là xấp xỉ thiếu của π, còn 3,15 là xấp xỉ thừa của π, vì dễ thấy rằng :

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$

1.2. Sai số tuyệt đối

ĐỊNH NGHĨA 2

Hiệu $\Delta a = A - a$ (hoặc $\Delta a = a - A$) gọi là sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a. Trị tuyệt đối :

$$\Delta = |\Delta a| = |A - a| \qquad (6.1)$$

gọi là sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a.

Thông thường, không biết số đúng A, do đó không xác định được sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a. Vì vậy, cùng với khái niệm sai số tuyệt đối, người ta đưa thêm vào khái niệm sai số tuyệt đối giới hạn.

ĐỊNH NGHĨA 3.

Sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a là số không nhỏ hơn sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a.

Do đó, nếu gọi Δ_a là sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a thì :

$$\Delta = |\Delta a| = |A - a| \leq \Delta_a \tag{6.2}$$

Từ đó, suy ra :

$$a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a \tag{6.3}$$

Vậy $a - \Delta_a$ là xấp xỉ thiếu của a, còn $a + \Delta_a$ là xấp xỉ thừa của A. Để đơn giản, thường quy ước viết (6.3) dưới dạng :

$$A = a \pm \Delta_a \tag{6.4}$$

Ví dụ 2. Xác định sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a = 3,14 thay cho số π.

Giải : Vì $3,14 < \pi < 3,15$ nên :

$$|a - \pi| < 0,01$$

và có thể chọn $\Delta_a = 0,01$.

Nếu chú ý rằng : $3,14 < \pi < 3,142$ thì :

$$|a - \pi| < 0,002$$

và do đó nhận được giá trị tốt hơn $\Delta_a = 0,002$...

Qua ví dụ trên, thấy rằng định nghĩa sai số tuyệt đối giới hạn không đơn trị : sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a là số bất kỳ trong tập vô hạn các số không âm Δ_a thỏa mãn (6.2). Vì vậy, trong thực hành, người ta thường chọn Δ_a là số nhỏ nhất có thể được, thỏa mãn (6.2).

1.3. Sai số tương đối

Sai số tuyệt đối hoặc sai số tuyệt đối giới hạn không thể hiện một cách đầy đủ mức độ chính xác của phép đo hoặc tính toán. Chẳng hạn, đo chiều dài của hai cái trục, nhận được những kết quả sau :

$$l_1 = 158,6 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$$

$$l_2 = 5,4 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$$

Tuy sai số tuyệt đối giới hạn của hai phép đo trên bằng nhau nhưng rõ ràng phép đo l_1 chính xác hơn phép đo l_2. Để thể hiện được điều đó, người ta đưa vào những khái niệm sau :

ĐỊNH NGHĨA 4.

Sai số tương đối của số xấp xỉ a, ký hiệu δ, là :

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} = \frac{|A - a|}{|A|} \tag{6.5}$$

với giả thiết $A \neq 0$. Từ đó : $\Delta = |A|.\delta$, ở đây A nói chung chưa biết.

ĐỊNH NGHĨA 5.

Sai số tương đối giới hạn của số xấp xỉ a, ký hiệu δ_a, là số được xác định như sau :

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|a|} \tag{6.6}$$

Từ đó, ta suy ra :

$$\Delta_a = |a|\delta_a \tag{6.7}$$

Chú ý rằng, sai số tuyệt đối và sai số tuyệt đối giới hạn có cùng thứ nguyên với số xấp xỉ, còn sai số tương đối và sai số tương đối giới hạn không có thứ nguyên.

Thay (6.7) vào (6.4), ta có :

$$A = a(1 \pm \delta_a) \tag{6.8}$$

Trở lại kết quả phép đo chiều dài của hai cái trục nêu trên, dễ thấy rằng sai số tương đối giới hạn của phép đo l_1 nhỏ hơn sai số tương đối giới hạn của phép đo l_2.

II – GIẢI GẦN ĐÚNG CÁC PHƯƠNG TRÌNH

Đối với những phương trình đại số bậc một và bậc hai ta có công thức tính chính xác nghiệm của chúng. Người ta cũng tìm ra những công thức tính chính xác nghiệm của các phương trình đại số bậc ba và bốn, nhưng việc sử dụng những công thức này không thật đơn giản. Còn đối với những phương trình đại số từ bậc năm trở lên thì không có cách nào để tính chính xác nghiệm. Hơn nữa, đối với những phương trình siêu việt dạng $f(x) = 0$ như : $\sin x - 1 + x = 0$ thì lại càng không có công thức để tính đúng nghiệm của chúng.

Nhờ phương pháp khảo sát hàm số, ta có thể tìm gần đúng nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ với độ chính xác tùy ý một cách khá đơn giản. Cơ sở của phương pháp này là định lý : "Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng kín $[a, b]$ và $f(a)$ khác dấu $f(b)$ thì trong khoảng (a, b) thế nào cũng có một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$". Về hình học, định lý này có nghĩa là một đường cong liên tục nối liền điểm A nằm phía dưới (hoặc phía trên) trục Ox với điểm B nằm phía trên (hoặc phía dưới) trục Ox bắt buộc phải cắt trục Ox ít nhất tại một điểm. Hoành độ của giao điểm ấy chính là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Ở đây ta xét ba phương pháp : phương pháp dây cung, phương pháp tiếp tuyến và phương pháp phối hợp. Trước khi dùng một trong ba phương pháp để giải phương trình : $f(x) = 0$ cần cô lập các nghiệm, nghĩa là tìm các khoảng $[a, b]$ thỏa mãn những điều kiện sau :

1. $f(a)$ khác dấu $f(b)$. Khi đó theo định lý vừa nêu, trong $[a,b]$ thế nào cũng có một điểm tại đó $f(x)$ triệt tiêu.

2. Đạo hàm cấp một $f'(x)$ không đổi dấu trong (a, b), tức là trong $[a, b]$ hàm số $y = f(x)$ chỉ tăng hoặc chỉ giảm, từ đó suy ra rằng (a, b) chỉ chứa một nghiệm của phương trình.

3. Đạo hàm cấp hai $f''(x)$ không đổi dấu trong (a, b), nghĩa là trong (a, b) đường cong không có điểm uốn. Điều kiện này làm ta nhanh chóng thu được những nghiệm ngày càng chính xác hơn.

Chú ý rằng, nếu ta đã tìm được $[a, b]$ sao cho $f(a)$ khác dấu $f(b)$ nhưng một trong hai đạo hàm $f'(x)$ và $f''(x)$ có dấu thay đổi trong (a, b) thì ta sẽ thu hẹp khoảng đó lại thành khoảng (c, d) $(a < c < d < b)$ sao cho $f(c)$ vẫn khác dấu $f(d)$ và $f'(x)$, $f''(x)$ có dấu không đổi trong (c, d).

Bây giờ ta xét cụ thể ba phương pháp.

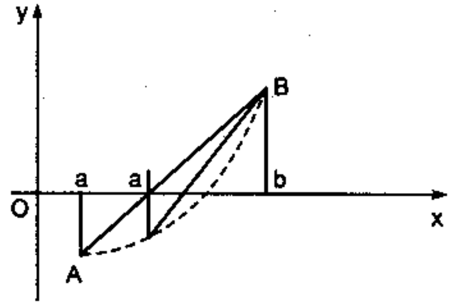
2.1. Phương pháp dây cung

Giả sử đã tìm được khoảng (a, b) thỏa mãn ba điều kiện (6 – 3) đã nêu ở trên của phương trình $f(x) = 0$ (6.9)

nghĩa là $f(a).f(b) < 0$; và $\forall x \in (a, b)$ thì $f'(x).f''(x)$ giữ nguyên một dấu. Nội dung của phương pháp dây cung là trong $[a, b]$ người ta thay đường cong $y = f(x)$ bởi dây cung của nó, nghĩa là xem nghiệm gần đúng của phương trình

$f(x) = 0$ trùng với hoành độ giao điểm x_1 của dây cung nối hai điểm $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$ với trục Ox (hình 6.1).

Phương trình dây cung AB là phương trình đường thẳng qua hai điểm nên có dạng :



$$\frac{y - f(x_o)}{f(d) - f(x_o)} = \frac{x - x_o}{d - x_o} \qquad (6.10)$$

Hình 6.1

trong đó x_o có thể lấy là a (hoặc b) thì d sẽ là b (hoặc a). Vì dây cung cắt trục Ox tại điểm $(x_1, 0)$ trong phương trình (6.10) cho $y = 0$ và $x = x_1$ ta được :

$$x_1 = x_o - \frac{d - x_o}{f(d) - f(x_o)} f(x_o) \qquad (6.11)$$

Để nhận được nghiệm chính xác hơn, ta lặp lại quá trình trên đối với khoảng (x_1, d) ; ta thu được :

$$x_2 = x_1 - \frac{d - x_1}{f(d) - f(x_1)} f(x_1) \text{ và...}$$

Người ta đã chứng minh được rằng : Dãy $x_o, x_1, x_2, \dots$ sẽ tiến dần đến nghiệm đúng của phương trình (6.9), nếu chọn x_o sao cho $f''(x)$ và $f(x_o)$ khác dấu nhau, tức là $f''(x).f(x_o) < 0$, và khi đó d sẽ là : $f(x_o).f(d) < 0$.

Ví dụ : Tìm nghiệm đúng của phương trình

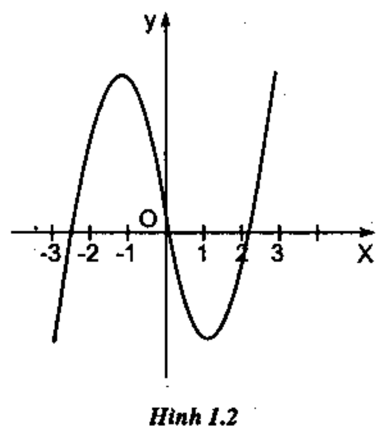
$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$

Giải : Bằng phương pháp khảo sát hàm số.

$y = x^3 - 6x + 2 = 0$ ta suy ra các đoạn $[-3, -2]$, $[0, 1]$ và $[2, 3]$ chứa nghiệm của phương trình.

Mặt khác ta lại có : $f'(x) = x^3 - 6x$; $f''(x) = 6x$ giữ nguyên một dấu trong các khoảng trên (thỏa mãn các điều kiện 1, 2, 3 ở phần Mở đầu).

Ta hãy tìm nghiệm gần đúng của phương trình trong khoảng $[0, 1]$.



Hình 1.2

Trong (0, 1) thì f" > 0 nên x_o được chọn : $x_o = 1$ (vì f(1) < 0) và d = 0.

Theo công thức (6.11) ta có :

$$x_1 = 1 - \frac{0-1}{2+3}(-3) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Vì $f(0,4) = (0,4)^3 - 6.0,4 + 2 = -0,336$; f(0) = 2 nên nghiệm phải tìm nằm trong khoảng [0 ; 0,4]. Áp dụng công thức (6.11) cho khoảng mới, ta có :

$$x_2 = 0,4 - \frac{0-0,4}{2+0,336}(-0,336) \approx 0,3424$$

Muốn thu được nghiệm chính xác hơn có thể áp dụng công thức (6.11) một vài lần nữa.

Bằng phương pháp tương tự, có thể tìm nghiệm của phương trình trong những khoảng còn lại.

2.2. Phương pháp tiếp tuyến (Niu–tơn)

Giả sử đã tìm được khoảng [a, b] thỏa mãn ba điều kiện nêu ở đoạn mở đầu. Nội dung của phương pháp tiếp tuyến là trong [a, b] người ta thay đường cong y = f(x) bởi tiếp tuyến của đường cong tại A bằng B, tức xem nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0 trùng với hoành độ giao điểm x_1 giữa tiếp tuyến của đường cong tại A hoặc B với trục Ox (đối với loại đường cong nào thì lấy tiếp tuyến tại A hoặc B sẽ trình bày sau).

Giả sử chọn $x_o = a$ thì tại $A(x_o, f(x_o))$ (hình 6.3), phương trình tiếp tuyến với đường cong y = f(x) tại điểm A sẽ là $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$. Vì tiếp tuyến cắt trục Ox tại điểm $(x_1, 0)$ nên tọa độ đó phải thỏa mãn phương trình tiếp tuyến :

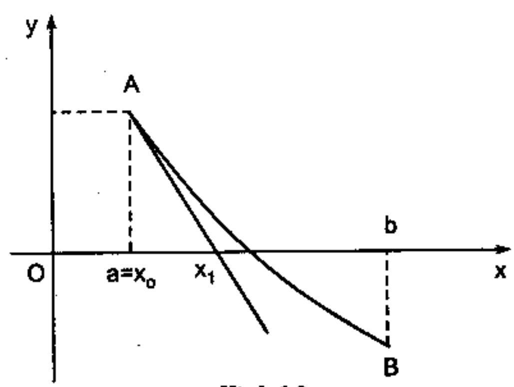
$$-f(x_o) = f'(x_o)(x_1 - x_o).$$

Từ đó ta có :

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} \qquad (6.12)$$

Để nhận được nghiệm chính xác hơn, lần nữa lặp lại quá trình trên đối với điểm $(x_1, f(x_1))$ ta thu được :

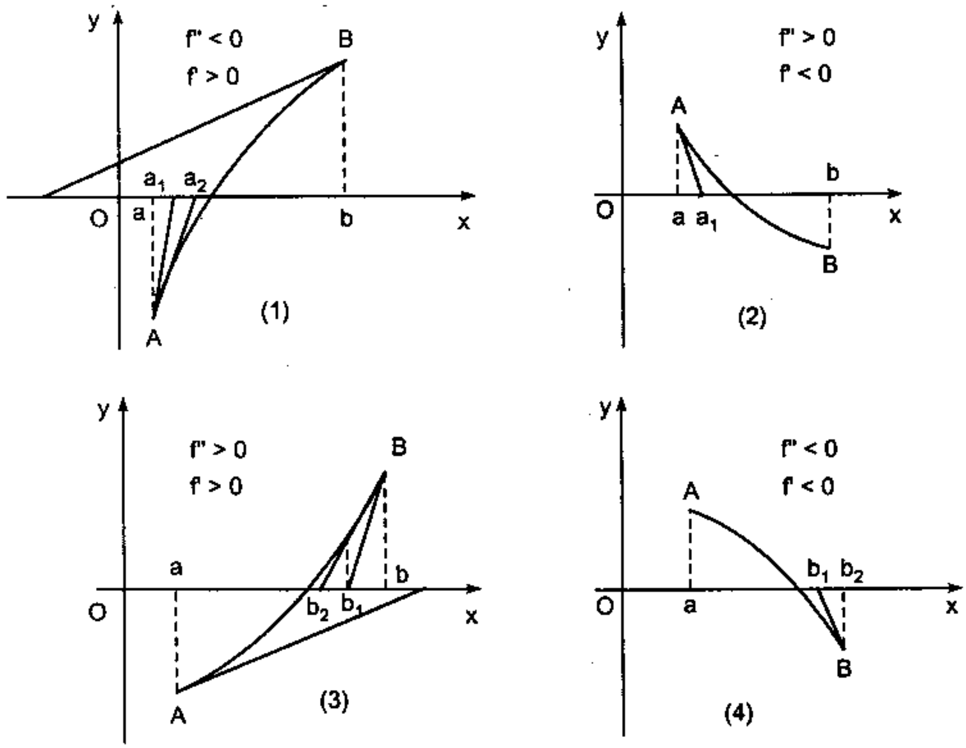
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{và...}$$



Hình 6.3

Bây giờ trở lại giải quyết vấn đề đối với dạng đường cong nào thì nên chọn x_o là a hay là b. Để việc chọn thích hợp xem hình 6.4. Từ hình vẽ ta thấy :

a) Nếu kẻ tiếp tuyến với đường cong tại mút bên trái của cung đối với trường hợp 1, 2 hoặc tại mút bên phải đối với trường hợp 3, 4 thì giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành sẽ nằm gần nghiệm hơn mút tương ứng với khoảng (a, b).



Hình 6.4

b) Nếu kẻ tiếp tuyến với đường cong tại các mút khác của cung thì giao điểm của tiếp tuyến và trục hoành có thể nằm ngoài khoảng [a, b].

Tóm lại : Do f"(x) giữ nguyên một dấu $\forall x \in (a, b)$ nên ta chọn x_0 là a hay b sao cho thỏa mãn điều kiện $f''(x)\, f(x_0) > 0$. (6.13)

Người ta cũng chứng minh được rằng với x_0 chọn theo công thức (6.13) thì ta thu được dãy x_o, x_1, x_2, ... hội tụ tới nghiệm đúng của phương trình f(x) = 0.

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của phương trình :

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$

trong khoảng [0,1] bằng phương pháp tiếp tuyến.

Ta có : $f'(x) = 3x^2 - 6$; $f'(0) = -6$

$f''(x) = 6x > 0$ trong [0, 1]

Theo điều kiện (6.13) ta chọn $x_o = 0$ vì $f(0) = 2 > 0$ cùng dấu với $f''(x)$.

Theo công thức (6.12) ta có :

$$x_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3}$$

Áp dụng công thức (6.12) một lần nữa, trong đó x_o thay bằng x_1 ta có :

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 6\frac{1}{3} + 2 = \frac{1}{27}$$

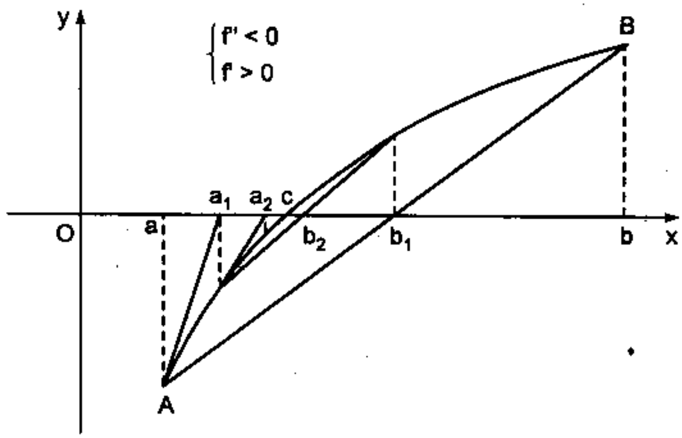
$$f'(x_1) = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6 = -\frac{17}{3}$$

Vậy :

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{27}}{-\frac{17}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9.17} = \frac{52}{153} \approx 0,3398.$$

2.3. Phương pháp phối hợp

Giả sử (a, b) là khoảng cô lập nghiệm α của phương trình $f(x) = 0$, nghĩa là : $f(a)f(b) < 0$; $f'(x)$; $f''(x)$ $\forall x \in (a, b)$ giữ nguyên 1 dấu. Với điều kiện đó, nếu áp dụng đồng thời hai phương pháp : Dây cung cho nghiệm gần đúng x_1, còn tiếp tuyến cho nghiệm gần đúng $\overline{x}_1$, thì x_1 và $\overline{x}_1$ sẽ nằm về hai phía của nghiệm (hình 6.5). Vì vậy, khoảng cô lập nghiệm sẽ được thu hẹp nhanh hơn. Lần nữa áp dụng đồng thời 2 phương pháp cho đoạn $[\overline{x}_1, x_1]$ (hình 6.5) ta được $[\overline{x}_2, x_2]$. Tiếp tục áp dụng quá trình trên cho đến khi hiệu số giữa 2 nghiệm gần đúng bên trái và bên phải có trị tuyệt đối bé hơn sai số cho phép thì dừng và chọn nghiệm gần đúng là trung bình cộng của chúng. Cách tìm nghiệm như vậy gọi là phương pháp phối hợp của phương pháp dây cung và tiếp tuyến.



Hình 6.5

Ví dụ 1 : Tìm nghiệm của phương trình :

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$

với độ chính xác đến 0,01 bằng phương pháp phối hợp.

Dựa vào những kết quả thu được trong hai ví dụ trên có thể lấy nghiệm gần đúng trong khoảng (0, 1) : bằng phương pháp tiếp tuyến : $\overline{x}_1 = \frac{1}{3}$ (bên trái), phương pháp dây cung : $x_1 = \frac{2}{5}$ (bên phải). Vì $x_1 - \overline{x}_1 = 0{,}4 - \frac{1}{3} \approx 0{,}067 > 0{,}01$ (chưa đạt được độ chính xác yêu cầu) nên phải tiếp tục tính nữa. Xem ($\frac{1}{3}$; 0,4) là khoảng chứa nghiệm mới, ta được :

– Theo phương pháp tiếp tuyến : Do f"(x) > 0 nên $\overline{x}_1$ chọn sao cho $f''(x)\,f(\overline{x}_1) > 0$, mà $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} > 0$ nếu chọn $\overline{x}_1 = \frac{1}{3}$. Vậy

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \frac{f(\overline{x}_1)}{f'(\overline{x}_1)} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{27}}{-\frac{17}{3}} = \frac{52}{153} \approx 0{,}3398.$$

– Theo phương pháp dây cung : do $f''(x_1) > 0$, x_1 chọn sao cho $f''_{(x)} f(x_1) < 0$ mà $f(0{,}4) = -0{,}336 < 0$ nên chọn $x_1 = 0{,}4$, khi đó $d_1 = \frac{1}{3}$.

Vậy : $x_2 = x_1 - \dfrac{d_1 - x_1}{f(d) - f(x_1)} f(x_1) = 0,4 - \dfrac{\frac{1}{3} - 0,4}{\frac{1}{27} + 0,336}(-0,336) \approx 0,3399$

Vì $x_2 - \overline{x}_2 = 0,3399 - 0,3398 = 0,0001 < 0,01$ (đạt được độ chính xác yêu cầu). Vì vậy có thể xem nghiệm gần đúng của phương trình là :

$$x = \frac{1}{2}(x_2 + \overline{x}_2) = \frac{1}{2}(0,3399 + 0,3398) = 0,33985$$

Ví dụ 2 : Tìm một nghiệm của phương trình :

$$F(x) = xe^x - 2 = 0$$

với độ chính xác đến 0,01 bằng phương pháp hỗn hợp.

Ta có : $f(0) = -2 < 0$; $f(1) = e - 2 > 0$

Hơn nữa : $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x) > 0, \forall x \in (0,1)$;

$f''(x) = e^x(1 + x) + e^x = e^x(x + 2) > 0, \forall x \in (0,1)$.

Vậy (0,1) là khoảng cô lập nghiệm. Do thỏa mãn 3 điều kiện 1, 2, 3 nên đồng thời áp dụng 2 phương pháp dây cung và tiếp tuyến.

Theo phương pháp dây cung : do $f''(x) > 0$ nên chọn x_o : $f''(x)f(x_o) < 0 \Rightarrow x_o = 0$ và do đó $d = 1$. Theo công thức (6.11) :

$$x_1 = x_o - \frac{d - x_o}{f(d) - f(x_o)} f(x_o) = 0 - \frac{1 - 0}{e - 2 + 2}(-2) = \frac{2}{e} \approx 0,7358$$

Theo phương pháp tiếp tuyến : Do $f''(x) > 0$ nên chọn $\overline{x}_o = 1$ vì $f(1) > 0$. Theo công thức (6.12) ta có :

$$\overline{x}_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = 1 - \frac{e - 2}{2e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e} \approx 0,8679$$

Vì $\overline{x}_1 - x_1 = 0,8679 - 0,7358 = 0,1321 > 0,01$ nên tiếp tục lần nữa 2 phương pháp trên trong (0,7358 ; 0,8679).

Theo phương pháp dây cung :

$$x_2 = x_1 - \frac{d_1 - x_1}{f(d_1) - f(x_1)} f(x_1) \qquad (\text{với } d_1 = 0,8679)$$

$$= 0,7358 - \frac{(0,8679 - 0,7358)(0,7358.e^{0,7358} - 2)}{(0,8679.e^{0,8679} - 2) - (0,7358.e^{0,7358} - 2)} \approx 0,8528$$

Theo phương pháp tiếp tuyến

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,8679 - \frac{0,8679.e^{0,8679} - 2}{e^{0,8679}(1 + 0,8679)} \approx 0,8534$$

Vì $\overline{x}_2 - x_2 = 0,8534 - 0,8528 = 0,0006 < 0,01$

Vậy có thể xem nghiệm gần đúng của phương trình là :

$$x = \frac{1}{2}(x_2 + \overline{x}_2) = \frac{1}{2}(0,8534 + 0,8528) = 0,8531.$$

III – GIẢI HỆ THỐNG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

3.1. Đặt vấn đề

Trong mục này, ta xét việc giải hệ thống phương trình đại số tuyến tính n phương trình n ẩn :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{cases} \qquad (6.14)$$

trong đó a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$ là những số đã biết, gọi là các hệ số của hệ thống phương trình (6.14) ; $a_{in+1}(i = \overline{1,n})$ cũng là những số đã biết, gọi là vế phải của hệ thống phương trình (6.14) ; x_i $(i = \overline{1,n})$ là các ẩn số phải tìm.

Ký hiệu :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gọi là ma trận hệ số của hệ thống phương trình (6.14)

$$b = \begin{pmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ . \\ a_{nn+1} \end{pmatrix} \qquad \text{và } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

gọi là vectơ vế phải và vectơ ẩn số của hệ thống phương trình (6.14). Hệ thống phương trình (6.14) có thể viết gọn dưới dạng :

$$Ax = b \qquad (6.15)$$

Nếu ma trận hệ số A không suy biến, nghĩa là :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

thì hệ thống phương trình (6.14) có nghiệm duy nhất.

Thật vậy, vì $\det A \neq 0$ nên tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}. Nhân bên trái hai vế của (6.15) với A^{-1}, nhận được :

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b \tag{6.16}$$

Như vậy, (6.16) cho ta nghiệm của hệ thống phương trình (6.14) và nghiệm ấy là duy nhất.

Ta đã biết phương pháp Crame giải đúng hệ thống phương trình (6.14) bằng công thức :

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, (i = \overline{1,n})$$

Trong đó : $\Delta = \det A$; Δ_i là định thức cấp n thu được từ Δ bằng cách thay cột thứ i của Δ bằng cột vế phải b của hệ thống phương trình (6.14).

3.2. Phương pháp trực tiếp : phương pháp Gaoxơ (hay phương pháp khử)

Phương pháp Gaoxơ là một phương pháp được dùng phổ biến để giải hệ thống phương trình (6.14) bằng cách khử dần các ẩn số, không phải tính một định thức nào.

1. Nội dung phương pháp

Để đơn giản việc trình bày, xét hệ thống 4 phương trình 4 ẩn số sau :

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + a_{14}^{(0)}x_4 = a_{15}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + a_{23}^{(0)}x_3 + a_{24}^{(0)}x_4 = a_{25}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)}x_1 + a_{32}^{(0)}x_2 + a_{33}^{(0)}x_3 + a_{34}^{(0)}x_4 = a_{35}^{(0)} \\ a_{41}^{(0)}x_1 + a_{42}^{(0)}x_2 + a_{43}^{(0)}x_3 + a_{44}^{(0)}x_4 = a_{45}^{(0)} \end{cases} \tag{6.17}$$

Nội dung cơ bản của phương pháp Gaoxơ là khử dần các ẩn số để đưa hệ (6.17) về hệ "tam giác" tương đương (ma trận hệ số của hệ là ma trận tam giác trên) :

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)} \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = a_{25}^{(2)} \\ \qquad\qquad x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 = a_{35}^{(3)} \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = a_{45}^{(4)} \end{cases} \tag{6.18}$$

sau đó giải hệ (6.18) từ dưới lên trên.

Quá trình đưa hệ (6.17) về hệ (6.18) gọi là quá trình thuận, quá trình giải hệ (6.18) gọi là quá trình ngược.

a) *Quá trình thuận*

Khử x_1. Giả sử $a_{11}^{(0)} \neq 0$ ($a_{11}^{(0)}$ gọi là trụ thứ nhất). Chia phương trình đầu của hệ (6.17) cho $a_{11}^{(0)}$, ta nhận được :

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)} \tag{6.19}$$

với $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$; $j = 2, 3, 4, 5$.

Dùng phương trình (6.19) khử x_1 trong ba phương trình còn lại của hệ (6.19). Muốn thế, đem phương trình thứ hai của hệ (6.17) trừ phương trình (6.19) đã nhân với $a_{21}^{(0)}$; đem phương trình thứ ba của hệ (6.17) trừ phương trình (6.19) đã nhân với $a_{31}^{(0)}$; đem phương trình thứ tư của hệ (6.17) trừ phương trình (6.19) đã nhân với $a_{41}^{(0)}$. Kết quả nhận được hệ ba phương trình sau :

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)} \end{cases} \tag{6.20}$$

với $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{i1}^{(0)}a_{1j}^{(1)}$; $i = 2, 3, 4$; $\qquad j = 2, 3, 4, 5$.

Khử x_2. Giả sử $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ($a_{22}^{(1)}$ gọi là trụ thứ hai). Chia phương trình đầu của hệ (6.20) cho $a_{22}^{(1)}$, ta được :

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = a_{25}^{(2)} \tag{6.21}$$

với $a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$; $j = 3, 4, 5$.

2. Các tính chất của KVTH

Tính chất 1. KVTH của một hằng số C bằng chính nó :

$$E(C) = C$$

Chứng minh : Coi C như một ĐLNN đặc biệt nhận giá trị C với xác suất bằng 1, ta có

$$E(C) = C.1 = C$$

Tính chất 2. $E(CX) = CE(X)$

Chứng minh : $E(CX) = \sum_{i=1}^{n}(Cx_i)p_i = C\sum_{i=1}^{n}x_ip_i = CE(X)$

Tính chất 3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

Chứng minh : Ký hiệu $Z = X + Y$, Z là ĐLNN rời rạc nhận các giá trị $z_{ij} = x_i + y_j$ với xác suất $r_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$

$$p_i = p(X = x_i),\ p_j = p(Y = y_j)$$

$$E(Z) = E(X + Y) = \sum_i\sum_j(x_i + y_j)r_{ij} = \sum_i\sum_j x_ir_{ij} + \sum_i\sum_j y_jr_{ij}$$

$$= \sum_i x_i\sum_j r_{ij} + \sum_j y_j\sum_i r_{ij} = \sum_i x_ip_i + \sum_j y_jp_j = E(X) + E(Y)$$

Tính chất 4. Nếu X và Y là các ĐLNN độc lập thì :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

Chứng minh : Ký hiệu $Z = X.Y$, $r_{ij} = p_i.p_j$ (do độc lập)

$$E(XY) = \sum_i\sum_j(x_iy_j)r_{ij} = \sum_i\sum_j x_iy_jp_ip_j = \sum_i x_ip_i.\sum_j y_jp_j =$$

$$= E(X).E(Y)$$

3. KVTH của hàm của ĐLNN

Giả sử X của ĐLNN có luật xác suất là $p_i = p(X = x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ và $Y = \varphi(X)$ là hàm của X. Hãy tìm kỳ vọng của Y.

Dễ thấy rằng Y là ĐLNN với luật xác suất là :

Y	$\varphi(x_1)$	$\varphi(x_2)$	...	$\varphi(x_i)$
P	P_1	P_2	...	P_i

Vì vậy :

$$E(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i)p_i$$

Nếu X là ĐLNN liên tục với mật độ f(x) thì φ(x) có KVTH là

$$E[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)f(x)dx$$

3.2. Phương sai

1. Khái niệm

Ví dụ mở đầu : Qua 5 kỳ kiểm tra, điểm toán của 2 sinh viên Hùng và Dũng là :

X_H (điểm toán của Hùng)	8	7	9	8	8
X_D (điểm toán của Dũng)	6	10	7	9	8

Qua bảng kết quả trên, thấy rằng điểm toán trung bình của Hùng và Dũng bằng nhau

$$\overline{x}_H = \frac{8+7+9+8+8}{5} = 8 = \overline{x}_D = \frac{6+10+7+9+8}{5}$$

Tuy nhiên nếu tính trung bình của bình phương độ lệch của các điểm kiểm tra so với điểm trung bình ta có :

$$S_H^2 = \frac{1}{5}[(8-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2 + (8-8)^2] = \frac{2}{5}$$

$$S_D^2 = \frac{1}{5}[(6-8)^2 + (10-8)^2 + (7-8)^2 + (9-8)^2 + (8-8)^2] = \frac{10}{5} = 2$$

và như thế $S_H^2 < S_D^2$, ta nói rằng điểm kiểm tra toán của Hùng đều hơn điểm của Dũng.

ĐỊNH NGHĨA

Ta gọi phương sai của ĐLNN rời rạc X, ký hiệu bởi D(X) là đại lượng được định nghĩa theo biểu thức :

$$D(X) = \sum_{i=1}^{m} [x_i - E(X)]^2 P_i$$

Nếu X là ĐLNN liên tục với hàm mật độ f(x) thì :

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x)dx$$

Độ lớn của phương sai đặc trưng cho sự tản mát các giá trị của ĐLNN xung quanh kỳ vọng của X.

Độ lệch chuẩn của ĐLNN là $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$

2. Tính chất của phương sai

Tính chất 1. Phương sai của một hằng số bằng 0 : D(C) = 0

Tính chất 2. $D(CX) = C^2D(X)$

Tính chất 3. Nếu X, Y là hai biến ngẫu nhiên độc lập thì

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

Chứng minh tính chất 3 :

* Trước hết, ta chứng minh rằng :

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Thật vậy :

$$D(X) = \sum_x [x - E(X)]^2 p(x) = \sum_x [x^2 - 2xE(X) + (E(X))^2]p(x)$$

$$= \sum_x x^2p(x) - 2E(X)\sum_x xp(x) + [E(X)]^2\sum_x p(x) =$$

$$= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

* Tiếp đó sử dụng $(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2$

$$D(X + Y) = E(X + Y)^2 - [E(X + Y)]^2 =$$

$$= E(X^2) + 2E(XY) + E(Y^2) - [(E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2]$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2 + E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$= D(X) + D(Y)$$

với chú ý rằng E(XY) – E(X)E(Y) = 0

Ví dụ : Cho ĐLNN với dãy phân phối xác suất

x	2	3	4	6	7
p(x)	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2

Ta có : $E(X) = 2(0,1) + 3(0,2) + 4(0,3) + 6(0,2) + 7(0,2) = 4,6$

$$E(X^2) = 2^2(0,1) + 3^2(0,2) + 4^2(0,3) + 6^2(0,2) + 7^2(0,2) = 24$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 24 - (4,6)^2 = 2,84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2,84} = 1,685$$

BÀI TẬP

A - Bài tập có lời giải

I – CÁC ĐỊNH NGHĨA XÁC SUẤT

Bài 1.

Gieo một con súc sắc đối xứng và đồng chất.

Tìm xác suất để được :

a) Mặt sáu chấm xuất hiện.

b) Mặt có số chẵn chấm xuất hiện.

Giải :

a) Gọi A là biến cố khi gieo con súc sắc thì mặt sáu chấm xuất hiện. Số kết cục duy nhất đồng khả năng n = 6. Số kết cục thuận lợi m = 1.

Vậy theo định nghĩa cổ điển về xác suất thì :

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{6}$$

b) gọi B là biến cố khi gieo con súc sắc thì mặt chẵn chấm xuất hiện. Lý giải tương tự ta có :

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0,5$$

Bài 2.

Thang máy của một tòa nhà 7 tầng xuất phát từ tầng một 3 khách. Tìm xác suất để :

a) Tất cả cùng ra ở tầng bốn.

b) Tất cả cùng ra ở một tầng.

c) Mỗi người ra ở một tầng khác nhau.

Giải :

Mỗi khách đều có 6 khả năng để ra ở 6 tầng còn lại của tòa nhà. Do đó số kết cục đồng khả năng $n = \overline{A}_6^3 = 216$. Gọi A là biến cố tất cả cùng ra ở tầng bốn, m = 1.

Vậy : $P(A) = \frac{1}{216}$

Lý luận tương tự như trên

$$P_b = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}\ ;\ P_c = \frac{A_6^3}{216} = \frac{5}{9}$$

II – CÁC ĐỊNH LÝ XÁC SUẤT

Bài 3.

Cơ cấu chất lượng sản phẩm của một nhà máy như sau : Sản phẩm loại 1 : 40%, sản phẩm loại 2 : 50%, còn lại là phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên một sản phẩm của nhà máy. Tính xác suất sản phẩm lấy ra thuộc loại 1 hoặc loại 2.

Giải :

Gọi A_1 là biến cố sản phẩm lấy ra thuộc loại 1.

Gọi A_2 là biến cố sản phẩm lấy ra thuộc loại 2.

Gọi A là biến cố sản phẩm lấy ra thuộc loại 1 hoặc loại 2

$$A = A_1 + A_2$$

Vì A_1 và A_2 xung khắc, do đó :

$$P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) = 0,4 + 0,5 = 0,9$$

Bài 4.

Hai người cùng bắn vào một mục tiêu. Khả năng bắn trúng của từng người là 0,8 và 0,9. Tìm xác suất :

a) Chỉ có một người bắn trúng mục tiêu.

b) Có người bắn trúng mục tiêu.

c) Cả hai người bắn trượt.

Giải : Gọi A_1 và A_2 tương ứng là biến cố người thứ nhất và thứ hai bắn trúng mục tiêu, A là biến cố chỉ có một người bắn trúng mục tiêu.

$$A = A_1\overline{A}_2 + \overline{A}_1A_2 .$$

Các nhóm biến cố trên là xung khắc, trong mỗi nhóm các biến cố lại độc lập nhau, do đó.

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = P(A_1)P_1(\overline{A}_2) + P_1(\overline{A}_1)P(A_2) \\ &= 0,8.0,1 + 0,2.0,9 = 0,26 \end{aligned}$$

Tương tự ta có :

$$P_b = 0,98 \; ; P_c = 0,02$$

Bài 5.

Xác suất để bắn một viên đạn trúng đích là 0,8. Hỏi phải bắn bao nhiêu viên đạn để với xác suất nhỏ hơn 0,4 có thể hy vọng rằng không có viên nào trượt.

Giải : Giả sử phải bắn n viên đạn. Gọi A_i $(i = \overline{1,n})$ là biến cố viên đạn thứ i trúng đích. Gọi A là biến cố không có viên nào trượt.

$$A = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

Vì các biến cố là độc lập toàn phần nên :

$$P(A) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) = (0,8)^n < 0,4$$

Từ đó $n > \frac{\lg 0,4}{\lg 0,8} \approx 5$. Phải bắn ít nhất 5 viên.

Bài 6. Có 30 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm được bỏ ngẫu nhiên vào 3 hộp với số lượng bằng nhau. Tìm xác suất để một hộp nào đó có 1 phế phẩm.

Giải : Gọi A_i (i = 1, 3) là biến cố hộp thứ i có 1 phế phẩm. Gọi A là biến cố một hộp nào đó có 1 phế phẩm

$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

Các biến cố A_1, A_2, A_3 không xung khắc và phụ thuộc nhau, do đó :

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3)$$

Ta có :

$$P(A_i) = \frac{C_3^1.C_{18}^9.C_{20}^{10}.1}{C_{30}^{10}.C_{20}^{10}.1} = 0,468 \text{ ; } i = \overline{1,3}$$

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j/A_i) = 0,468.0,526 = 0,2463 \text{ ; } ij = \overline{1,3}$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1A_2) = 0,2463$$

Từ đó P(A) = 0,911.

III – ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN

Bài 7. Một xí nghiệp có hai ôtô vận tải hoạt động. Xác suất trong ngày làm việc các ô tô bị hỏng tương ứng bằng 0,1 và 0,2. Gọi X là số ô tô bị hỏng trong thời gian làm việc.

a) Tìm quy luật phân phối xác suất của X.

b) Thiết lập hàm phân phối xác suất của X và vẽ đồ thị của nó.

Giải : a) Nếu gọi X là số ô tô bị hỏng trong thời gian làm việc thì X là đại lượng ngẫu nhiên rời rạc với các giá trị có thể có X = 0, 1, 2. Ta tìm xác suất P(X = 0). Biến cố (X = 0) xảy ra khi cả hai ô tô cùng hoạt động tốt. Do đó, theo định lý nhân xác suất

$$P(X = 0) = 0,9 \,.\, 0,8 = 0,72$$

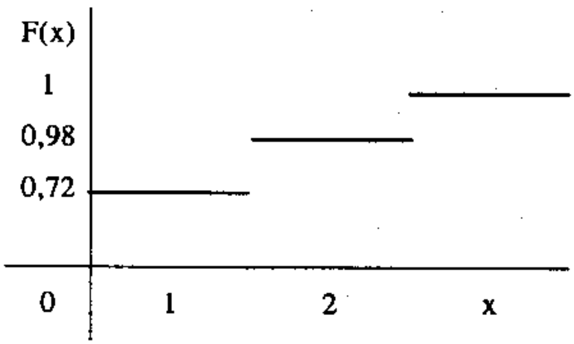
Lý giải tương tự ta có :

$$P(X = 1) = 0,1 . 0,8 + 0,9 . 0,2 = 0,26$$

$$P(X = 2) = 0,1 . 0,2 = 0.02$$

Vậy quy luật phân phối xác suất của X là :

X	0	1	2
P	0,72	0,26	0,02



Bài 8. Bảng phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X như sau :

X	–5	2	3	4
P	0,4	0,3	0,1	0,2

a) Tính M(X) ; D(X) và σ_x

b) Tìm giá trị mốt X_o

Đáp số : $M(X) = -0,3$

$D(X) = 15,21$; $\sigma_x = 3,9$

$X_o = -5$

Bài 9. Cho X_1 và X_2 là hai đại lượng ngẫu nhiên độc lập có bảng phân phối xác suất như sau :

X_1	2	3	5
P	0,3	0,5	0,2

X_2	1	4
P	0,2	0,8

a) Tính $M(X_1)$ và $M(X_2)$; $D(X_1)$ và $D(X_2)$

b) Tính $M(X_1 + X_2)$ và $D(X_1 + X_2)$

Đáp số : $M(X_1) = 3,1$; $M(X_2) = 3,4$

$D(X_1) = 1,09$; $D(X_2) = 1,44$;

$M(X_1 + X_2) = 6,5$; $D(X_1 + X_2) = 2,53$

Bài 10. Cho X_1, X_2, X_3 là các đại lượng ngẫu nhiên độc lập và có bảng phân phối xác suất của chúng như sau :

X_1	0	1
P	0,6	0,4

X_2	1	2
P	0,4	0,6

X_3	0	2
P	0,8	0,2

Lập $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$. Tính $M(\overline{X})$ và $D(\overline{X})$

Đáp số : $M(\overline{X}) = 0,8$; $D(\overline{X}) = 0,12$

Bài 11. Hai đại lượng ngẫu nhiên X, Y độc lập

Tính D(Z) biết :

a) $Z = 2X + 3Y$; b) $Z = -3X$

Cho biết $D(X) = 4$, $D(Y) = 5$

Đáp số : a) $D(Z) = 61$; b) $D(Z) = 36$

Bài 12. Đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có hàm mật độ xác suất như sau :

$$f(x) = \begin{cases} k \text{ với } x \in (a, b) \\ 0 \text{ với } x \in (a, b) \end{cases}$$

a) Tìm hệ số k ; b) Tìm M(X) và D(X) ; c) Tìm hàm F(X)

Đáp số : a) $k = \dfrac{1}{b - a}$;

b) $M(X) = \dfrac{a + b}{2}$; $D(X) = \dfrac{(b - a)^2}{12}$

c) $F(X) = \begin{cases} 0 & \text{với } x < a \\ \dfrac{x - a}{b - a} & \text{với } a \le x \le b \\ 1 & \text{với } x > b \end{cases}$

Bài 13. Đại lượng ngẫu nhiên liên tục X có hàm phân phối xác suất như sau :

$$F(X) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 2 \\ Cx - 1 & \text{với } 2 < x \le 4 \\ 1 & \text{với } x > 4 \end{cases}$$

a) Tìm hằng số C

b) Tìm M(X)

Giải :

a) Từ biểu thức của hàm phân phối xác suất suy ra hàm mật độ xác suất có dạng :

$$f(x) = \begin{cases} C & \text{với } x \in (2, 4) \\ 0 & \text{với } x \notin (2, 4) \end{cases}$$

Theo tính chất của hàm mật độ xác suất

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_2^4 Cdx \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

b) Theo định nghĩa kỳ vọng toán học

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_2^4 \frac{1}{2}xdx = 3$$

Bài 14. Đại lượng ngẫu nhiên liên tục x có hàm mật độ xác suất :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2} & \text{với } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{với } x \notin (0, \pi) \end{cases}$$

a) Tìm hàm phân phối xác suất F(X)

b) Tìm $P(0 < X < \frac{\pi}{4})$

c) Tìm M(X)

Đáp số : a) $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{với } x \le 0 \\ \dfrac{1 - \cos x}{2} & \text{với } 0 < x \le \pi \\ 1 & \text{với } x > \pi \end{cases}$$

b) $P(0 < X < \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$

c) $M(X) = \frac{\pi}{2}$

Bài 15. Hàm mật độ của ĐLNN X có dạng :

$$f(x) = \begin{cases} a\cos^2 x & |x| \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & |x| > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Xác định hệ số a.

b) Tính xác suất để trong 2 thí nghiệm độc lập, ít nhất một lần ĐLNN có giá trị lớn hơn $\dfrac{\pi}{4}$.

Giải :

a) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a\cos^2 x dx = 1 \Leftrightarrow a\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx =$$

$$\frac{a}{2}\left[x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right] = \frac{a}{2}[\pi] = \frac{a\pi}{2} = 1 \Rightarrow a = \frac{2}{\pi}$$

b) Gọi A là sự kiện cả 2 lần thí nghiệm X đều có giá trị $\le \dfrac{\pi}{4}$

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = [P(X \le \frac{\pi}{4})]^2$$

Gọi $\overline{A}$ là sự kiện ít nhất 1 lần ĐLNN có giá trị $> \dfrac{\pi}{4}$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - [P(X \le \frac{\pi}{4})]^2$$

$$P(X \le \frac{\pi}{4}) = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4}\sin 2x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\right] = \frac{3}{4}+\frac{1}{2\pi} = \frac{3\pi+2}{4\pi}$$

$$[P(X \le \frac{\pi}{4})]^2 = \frac{(3\pi+2)^2}{16}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - \frac{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2}{16}$$

BÀI TẬP TỔNG HỢP CHƯƠNG V

Bài 1. Một bộ đề thi có 150 câu, trong đó có 50 câu của chương I, 70 câu của chương II và 30 câu của chương III.

Lập một đề thi trắc nghiệm gồm 30 câu với 10 câu của chương I, 15 câu của chương II và 5 câu của chương III.

Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề thi ?

Giải :

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$C_{50}^{10} = \frac{50!}{40!10!}, \quad C_{70}^{15} = \frac{70!}{55!15!}, \quad C_{30}^{5} = \frac{30!}{25!5!}$$

$$\Sigma = C_{50}^{10}.C_{70}^{15}.C_{30}^{5}$$

Bài 2. Ta mang về 50 bó hoa để cắm vào bàn tiệc. Xem kỹ thấy 20 bông có hương thơm và 35 bông hợp về màu và cỡ.

Ta quyết định bông hoa cắm được là bông thơm hoặc bông hợp về màu và cỡ. Rút ra từ bó hoa một cách ngẫu nhiên một bông.

Tính xác suất để lấy được một bông hoa cắm được, biết rằng có 15 bông hợp cả màu, cỡ và thơm.

Giải :

Đặt A là sự kiện rút được một bông hợp màu và cỡ, B là sự kiện rút ra 1 bông thơm.

Cần tính $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A) = \frac{35}{50}\ ;\ P(B) = \frac{20}{50}\ ;\ P(A \cap B) = \frac{15}{50}$$

Theo công thức cộng xác suất :

$$P(A \cup B) = \frac{35}{50} + \frac{20}{50} - \frac{15}{50} = \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

Bài 3. Người ta rút ra hai lần, mỗi lần một quân bài từ bộ tú lơ khơ 52 quân bài. Tìm xác suất để rút được 2 quân A trong các trường hợp sau :

a) Nếu quân bài đầu tiên trả lại trong bộ bài.

c) Nếu quân bài đầu tiên không trả lại.

Giải :

a) Gọi A_1 là biến cố rút được quân A ở lần 1

A_2 là biến cố rút được quân A ở lần 2

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)\,P(A_2) = \frac{4}{52}.\frac{4}{52} = \frac{1}{169}$$

b) $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2/A_1) = \frac{4}{52}.\frac{3}{52} = \frac{1}{221}$

Bài 4. Một cửa hàng điện ở chợ thường nhập về 50% bóng đèn ống của Điện quang, 30% bóng của Đài Loan, còn 20% bóng nhập của Thái Lan. Biết rằng tỷ lệ bóng hỏng (kém chất lượng) của Điện quang là 1,5% ; của Đài Loan là 1%, còn của Thái Lan là 3%. Bóng mua về để lẫn lộn. Có khách, người bán rút vội ra một chiếc để thử.

Tìm xác suất để bóng đó bị hỏng ?

Giải :

Gọi : A_1 là sự kiện lấy ra 1 bóng đèn ống của Điện quang

A_2 là sự kiện lấy ra 1 bóng đèn ống của Đài Loan

A_3 là sự kiện lấy ra 1 bóng đèn ống của Thái Lan

Gọi B là sự kiện lấy ngẫu nhiên ra 1 bóng. Tính xác suất để bóng đó là bóng bị hỏng.

Theo công thức xác suất toàn phần :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + P(A_3)P(B/A_3) \\ &= \frac{50}{100}.\frac{3}{2}\% + \frac{30}{100}.1\% + \frac{20}{100}.3\% = \\ &= \frac{75+30+60}{100}\% = \frac{165}{100} = 1,65\% = 0,0165 \end{aligned}$$

Bài 5. Trong các điều kiện của bài 4, lấy ra một bóng đèn. Sau khi thử biết bóng đèn đó bị hỏng.

Tìm xác suất để bóng đèn đó

a) Của Điện quang.

b) Của Đài Loan.

c) Của Thái Lan.

Giải : Theo công thức Bayes :

a) $P(A_1/B) = \dfrac{P(A_1)P(B/A_1)}{P(B)} = \dfrac{\dfrac{50}{100}\left(\dfrac{3}{2}\right)\%}{1,65\%} = \dfrac{0,75}{1,65} = \dfrac{75}{165}$

b) $P(A_2/B) = \dfrac{\dfrac{30}{100}(1\%)}{1,65\%} = \dfrac{30}{165}$

c) $P(A_3/B) = \dfrac{\dfrac{20}{100}.3\%}{1,65\%} = \dfrac{60}{165}$

Bài 6. Hàm mật độ xác suất của ĐLNN liên tục X cho bởi :

$$f(x) = \frac{c}{x^2+1} \qquad -\infty < x < +\infty$$

a) Tìm giá trị của c ;

b) Tìm $P(1/3 \leq x^2 \leq 1)$;

c) Xác định hàm phân phối F(x).

Đáp số : a) $c = \dfrac{1}{\pi}$; b) $p(1/3 \leq x^2 \leq x) = \dfrac{1}{6}$

c) $F(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\text{arctg}x$

Bài 7. Hàm phân phối của ĐLNN liên tục X là :

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & \text{với } x \geq 0 \\ 0 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

a) Thiết lập hàm mật độ xác suất f(x);

b) Tìm $P(X \geq 2)$;

c) Tìm $P(-3 \leq X \leq 4)$.

Đáp số : a) $f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

b) $P(X \geq 2) = e^{-4}$; c) $P(-3 \leq X \leq 4) = 1 - e^{-8}$

Bài 8. Mật độ xác suất của một ĐLNN liên tục có dạng :

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & \text{với } x \geq 0 \\ 0 & \text{với } x < 0 \end{cases}$$

Hãy đánh giá :

a) $E(X)$; b) $E(X^2)$; c) $D(X)$

Đáp số : a) $E(X) = \frac{1}{2}$

b) $E(X^2) = 1$; c) $D(X) = \frac{3}{4}$

B - Bập tập tự giải

Bài 1. Có hai con súc sắc đều, giống nhau. Ta gieo hai con súc sắc một lần. Hãy tìm xác suất của sự kiện A : Tổng số chấm của cả 2 con là 7.

Đáp số : $P(A) = \frac{1}{6}$

Bài 2. Trong các điều kiện của bài 1, hãy tính xác suất để cho tổng số chấm của 2 con là 7 hoặc 8.

Đáp số : $P(A \cup B) = \frac{11}{36}$

Bài 3. Trong lớp học có 70 học sinh, trong đó có 30 em khá và giỏi Toán. Vào lớp thầy giáo tình cờ đọc tên 10 em. Tính xác suất để trong đó cỗ ít nhất một em khá hoặc giỏi toán.

Đáp số : $P(A) = 1 - \frac{C_{40}^{10}}{C_{70}^{10}}$

Bài 4. Lớp học có 70 em, trong đó có 40 em nữ. Trong lớp có 32 em giỏi Anh văn, trong đó có 20 nữ và 12 nam.

Hãy tính xác suất của sự kiện A gặp một em giỏi Anh văn, với điều kiện đó là em nữ (sự kiện B).

Đáp số : $P(A/B) = \frac{P(A.B)}{P(B)} = \frac{1}{2}$

Bài 5. Trong các điều kiện của ví dụ 4. Nếu giáo viên mở sổ điểm danh gọi một học sinh bất kỳ. Tìm xác suất để học sinh được gọi là một em nữ giỏi Anh văn.

Đáp số : $P(A.\ B) = \frac{2}{7}$.

Bài 6. Biết rằng $P_1 = 0,04$ là xác suất để mỗi sản phẩm được sản xuất ra từ dây chuyền I là phế phẩm ; $P_2 = 0,03$ đối với dây chuyền II ; $P_3 = 0,05$ đối với dây chuyền III ; $P_4 = 0,058$ đối với dây chuyền IV. Từ một lô gồm 8 sản phẩm của dây chuyền I, 12 sản phẩm của dây chuyền II, 10 sản phẩm của dây chuyền III và 5 sản phẩm của dây chuyền IV, lấy ngẫu nhiên ra 1 sản phẩm. Tìm xác suất của sự kiện B : nhận được sản phẩm xấu (tốt).

Đáp số : $P(B) = 0,42$, $P(\overline{B}) = 0,958$

Bài 7. Trong các điều kiện của bài 6, nếu giả sử đã biết sản phẩm nhận được là xấu (sự kiện B), hãy tìm xác suất để sản phẩm đó được sản xuất bởi dây chuyền I (sự kiện A_1), bởi dây chuyền II (sự kiện A_2), bởi dây chuyền III (sự kiện A_3), bởi dây chuyền IV (sự kiện (V).

Đáp số : $P(A_1/B) = 0,2177$; $B(A_2/B) = 0,2449$;

$P(A_3/B) = 0,340$; $P(A_4/B) = 0,1973$

Bài 8. Cho X là biến ngẫu nhiên rời rạc có phân phối

X	–20	0	10	30	40
$P(X = x_i)$	0,20	0,15	0,30	0,20	0,15

a) Tính E(X) ; b) Tính D(X)

Đáp số : a) E(X) = 11

b) D(X) = 409

Chương 6
PHƯƠNG PHÁP TÍNH

I – SỐ XẤP XỈ VÀ SAI SỐ

1.1. Số xấp xỉ

Trong thực hành, giá trị của các đại lượng nhận được bằng phép đo, bằng thực nghiệm thường không được biết một cách chính xác. Vì vậy trong tính toán, chúng ta làm việc chủ yếu với giá trị xấp xỉ (còn gọi là giá trị gần đúng) của các đại lượng.

ĐỊNH NGHĨA 1

a gọi là số xấp xỉ của số đúng A, ký hiệu $a \approx A$, nếu a khác A không đáng kể và được dùng thay cho A trong tính toán.

Nếu $a < A$ thì a gọi là xấp xỉ thiếu của A. Nếu $a > A$ thì a gọi là xấp xỉ thừa của A.

Ví dụ 1. Đối với số π thì 3,14 là xấp xỉ thiếu của π, còn 3,15 là xấp xỉ thừa của π, vì dễ thấy rằng :

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15$$

1.2. Sai số tuyệt đối

ĐỊNH NGHĨA 2

Hiệu $\Delta a = A - a$ (hoặc $\Delta a = a - A$) gọi là sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a. Trị tuyệt đối :

$$\Delta = |\Delta a| = |A - a| \qquad (6.1)$$

gọi là sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a.

Thông thường, không biết số đúng A, do đó không xác định được sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a. Vì vậy, cùng với khái niệm sai số tuyệt đối, người ta đưa thêm vào khái niệm sai số tuyệt đối giới hạn.

ĐỊNH NGHĨA 3.

Sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a là số không nhỏ hơn sai số tuyệt đối của số xấp xỉ a.

Do đó, nếu gọi Δ_a là sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a thì :

$$\Delta = |\Delta a| = |A - a| \le \Delta_a \tag{6.2}$$

Từ đó, suy ra :

$$a - \Delta_a \le A \le a + \Delta_a \tag{6.3}$$

Vậy $a - \Delta_a$ là xấp xỉ thiếu của a, còn $a + \Delta_a$ là xấp xỉ thừa của A. Để đơn giản, thường quy ước viết (6.3) dưới dạng :

$$A = a \pm \Delta_a \tag{6.4}$$

Ví dụ 2. Xác định sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a = 3,14 thay cho số π.

Giải : Vì $3,14 < \pi < 3,15$ nên :

$$|a - \pi| < 0,01$$

và có thể chọn $\Delta_a = 0,01$.

Nếu chú ý rằng : $3,14 < \pi < 3,142$ thì :

$$|a - \pi| < 0,002$$

và do đó nhận được giá trị tốt hơn $\Delta_a = 0,002$...

Qua ví dụ trên, thấy rằng định nghĩa sai số tuyệt đối giới hạn không đơn trị : sai số tuyệt đối giới hạn của số xấp xỉ a là số bất kỳ trong tập vô hạn các số không âm Δ_a thỏa mãn (6.2). Vì vậy, trong thực hành, người ta thường chọn Δ_a là số nhỏ nhất có thể được, thỏa mãn (6.2).

1.3. Sai số tương đối

Sai số tuyệt đối hoặc sai số tuyệt đối giới hạn không thể hiện một cách đầy đủ mức độ chính xác của phép đo hoặc tính toán. Chẳng hạn, đo chiều dài của hai cái trục, nhận được những kết quả sau :

$$l_1 = 158,6 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$$

$$l_2 = 5,4 \text{ cm} \pm 0,1 \text{ cm}$$

Tuy sai số tuyệt đối giới hạn của hai phép đo trên bằng nhau nhưng rõ ràng phép đo l_1 chính xác hơn phép đo l_2. Để thể hiện được điều đó, người ta đưa vào những khái niệm sau :

ĐỊNH NGHĨA 4.

Sai số tương đối của số xấp xỉ a, ký hiệu δ, là :

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|} = \frac{|A - a|}{|A|} \tag{6.5}$$

với giả thiết $A \neq 0$. Từ đó : $\Delta = |A|.\delta$, ở đây A nói chung chưa biết.

ĐỊNH NGHĨA 5.

Sai số tương đối giới hạn của số xấp xỉ a, ký hiệu δ_a, là số được xác định như sau :

$$\delta_a = \frac{\Delta a}{|a|} \tag{6.6}$$

Từ đó , ta suy ra :

$$\Delta_a = |a|\delta_a \tag{6.7}$$

Chú ý rằng, sai số tuyệt đối và sai số tuyệt đối giới hạn có cùng thứ nguyên với số xấp xỉ, còn sai số tương đối và sai số tương đối giới hạn không có thứ nguyên.

Thay (6.7) vào (6.4), ta có :

$$A = a(1 \pm \delta_a) \tag{6.8}$$

Trở lại kết quả phép đo chiều dài của hai cái trục nêu trên, dễ thấy rằng sai số tương đối giới hạn của phép đo l_1 nhỏ hơn sai số tương đối giới hạn của phép đo l_2.

II – GIẢI GẦN ĐÚNG CÁC PHƯƠNG TRÌNH

Đối với những phương trình đại số bậc một và bậc hai ta có công thức tính chính xác nghiệm của chúng. Người ta cũng tìm ra những công thức tính chính xác nghiệm của các phương trình đại số bậc ba và bốn, nhưng việc sử dụng những công thức này không thật đơn giản. Còn đối với những phương trình đại số từ bậc năm trở lên thì không có cách nào để tính chính xác nghiệm. Hơn nữa, đối với những phương trình siêu việt dạng $f(x) = 0$ như : $\sin x - 1 + x = 0$ thì lại càng không có công thức để tính đúng nghiệm của chúng.

Nhờ phương pháp khảo sát hàm số, ta có thể tìm gần đúng nghiệm của phương trình $f(x) = 0$ với độ chính xác tùy ý một cách khá đơn giản. Cơ sở của phương pháp này là định lý : "Nếu hàm số $f(x)$ liên tục trong khoảng kín $[a, b]$ và $f(a)$ khác dấu $f(b)$ thì trong khoảng (a, b) thế nào cũng có một nghiệm của phương trình $f(x) = 0$". Về hình học, định lý này có nghĩa là một đường cong liên tục nối liền điểm A nằm phía dưới (hoặc phía trên) trục Ox với điểm B nằm phía trên (hoặc phía dưới) trục Ox bắt buộc phải cắt trục Ox ít nhất tại một điểm. Hoành độ của giao điểm ấy chính là nghiệm của phương trình $f(x) = 0$.

Ở đây ta xét ba phương pháp : phương pháp dây cung, phương pháp tiếp tuyến và phương pháp phối hợp. Trước khi dùng một trong ba phương pháp để giải phương trình : $f(x) = 0$ cần cô lập các nghiệm, nghĩa là tìm các khoảng $[a, b]$ thỏa mãn những điều kiện sau :

1. $f(a)$ khác dấu $f(b)$. Khi đó theo định lý vừa nêu, trong $[a,b]$ thế nào cũng có một điểm tại đó $f(x)$ triệt tiêu.

2. Đạo hàm cấp một $f'(x)$ không đổi dấu trong (a, b), tức là trong $[a, b]$ hàm số $y = f(x)$ chỉ tăng hoặc chỉ giảm, từ đó suy ra rằng (a, b) chỉ chứa một nghiệm của phương trình.

3. Đạo hàm cấp hai $f''(x)$ không đổi dấu trong (a, b), nghĩa là trong (a, b) đường cong không có điểm uốn. Điều kiện này làm ta nhanh chóng thu được những nghiệm ngày càng chính xác hơn.

Chú ý rằng, nếu ta đã tìm được $[a, b]$ sao cho $f(a)$ khác dấu $f(b)$ nhưng một trong hai đạo hàm $f'(x)$ và $f''(x)$ có dấu thay đổi trong (a, b) thì ta sẽ thu hẹp khoảng đó lại thành khoảng (c, d) $(a < c < d < b)$ sao cho $f(c)$ vẫn khác dấu $f(d)$ và $f'(x)$, $f''(x)$ có dấu không đổi trong (c, d).

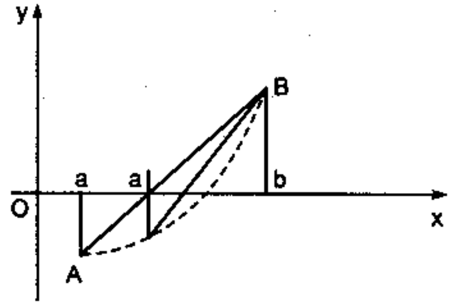
Bây giờ ta xét cụ thể ba phương pháp.

2.1. Phương pháp dây cung

Giả sử đã tìm được khoảng (a, b) thỏa mãn ba điều kiện $(6 - 3)$ đã nêu ở trên của phương trình $f(x) = 0$ (6.9)

nghĩa là $f(a).f(b) < 0$; và $\forall x \in (a, b)$ thì $f'(x).f''(x)$ giữ nguyên một dấu. Nội dung của phương pháp dây cung là trong $[a, b]$ người ta thay đường cong $y = f(x)$ bởi dây cung của nó, nghĩa là xem nghiệm gần đúng của phương trình

$f(x) = 0$ trùng với hoành độ giao điểm x_1 của dây cung nối hai điểm A[a, f(a)], B[b, f(b)] với trục Ox (hình 6.1).



Hình 6.1

Phương trình dây cung AB là phương trình đường thẳng qua hai điểm nên có dạng :

$$\frac{y - f(x_o)}{f(d) - f(x_o)} = \frac{x - x_o}{d - x_o} \qquad (6.10)$$

trong đó x_o có thể lấy là a (hoặc b) thì d sẽ là b (hoặc a). Vì dây cung cắt trục Ox tại điểm $(x_1, 0)$ trong phương trình (6.10) cho $y = 0$ và $x = x_1$ ta được :

$$x_1 = x_o - \frac{d - x_o}{f(d) - f(x_o)} f(x_o) \qquad (6.11)$$

Để nhận được nghiệm chính xác hơn, ta lặp lại quá trình trên đối với khoảng (x_1, d) ; ta thu được :

$$x_2 = x_1 - \frac{d - x_1}{f(d) - f(x_1)} f(x_1) \text{ và...}$$

Người ta đã chứng minh được rằng : Dãy x_o, x_1, x_2, ... sẽ tiến dần đến nghiệm đúng của phương trình (6.9), nếu chọn x_o sao cho $f''(x)$ và $f(x_o)$ khác dấu nhau, tức là $f''(x).f(x_o) < 0$, và khi đó d sẽ là : $f(x_o).f(d) < 0$.

Ví dụ : Tìm nghiệm đúng của phương trình

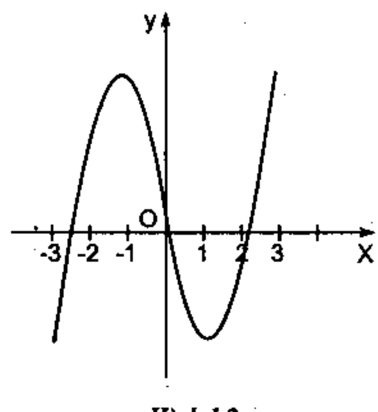
$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$

Giải : Bằng phương pháp khảo sát hàm số.

$y = x^3 - 6x + 2 = 0$ ta suy ra các đoạn [–3, –2], [0, 1] và [2, 3] chứa nghiệm của phương trình.

Mặt khác ta lại có : $f'(x) = x^3 - 6x$; $f''(x) = 6x$ giữ nguyên một dấu trong các khoảng trên (thỏa mãn các điều kiện 1, 2, 3 ở phần Mở đầu).

Ta hãy tìm nghiệm gần đúng của phương trình trong khoảng [0, 1].



Hình 1.2

Trong (0, 1) thì f" > 0 nên x_o được chọn : $x_o = 1$ (vì $f(1) < 0$) và d = 0.

Theo công thức (6.11) ta có :

$$x_1 = 1 - \frac{0-1}{2+3}(-3) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Vì $f(0,4) = (0,4)^3 - 6.0,4 + 2 = -0,336$; $f(0) = 2$ nên nghiệm phải tìm nằm trong khoảng [0 ; 0,4]. Áp dụng công thức (6.11) cho khoảng mới, ta có :

$$x_2 = 0,4 - \frac{0-0,4}{2+0,336}(-0,336) \approx 0,3424$$

Muốn thu được nghiệm chính xác hơn có thể áp dụng công thức (6.11) một vài lần nữa.

Bằng phương pháp tương tự, có thể tìm nghiệm của phương trình trong những khoảng còn lại.

2.2. Phương pháp tiếp tuyến (Niu–tơn)

Giả sử đã tìm được khoảng [a, b] thỏa mãn ba điều kiện nêu ở đoạn mở đầu. Nội dung của phương pháp tiếp tuyến là trong [a, b] người ta thay đường cong y = f(x) bởi tiếp tuyến của đường cong tại A bằng B, tức xem nghiệm gần đúng của phương trình f(x) = 0 trùng với hoành độ giao điểm x_1 giữa tiếp tuyến của đường cong tại A hoặc B với trục Ox (đối với loại đường cong nào thì lấy tiếp tuyến tại A hoặc B sẽ trình bày sau).

Giả sử chọn $x_o = a$ thì tại $A(x_o, f(x_o))$ (hình 6.3), phương trình tiếp tuyến với đường cong y = f(x) tại điểm A sẽ là $y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)$. Vì tiếp tuyến cắt trục Ox tại điểm $(x_1, 0)$ nên tọa độ đó phải thỏa mãn phương trình tiếp tuyến :

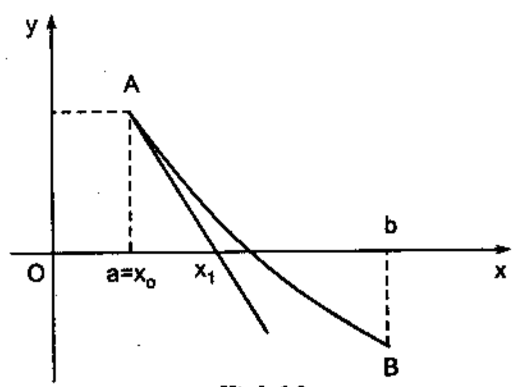
$$-f(x_o) = f'(x_o)(x_1 - x_o).$$

Từ đó ta có :

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} \qquad (6.12)$$

Để nhận được nghiệm chính xác hơn, lần nữa lặp lại quá trình trên đối với điểm $(x_1, f(x_1))$ ta thu được :

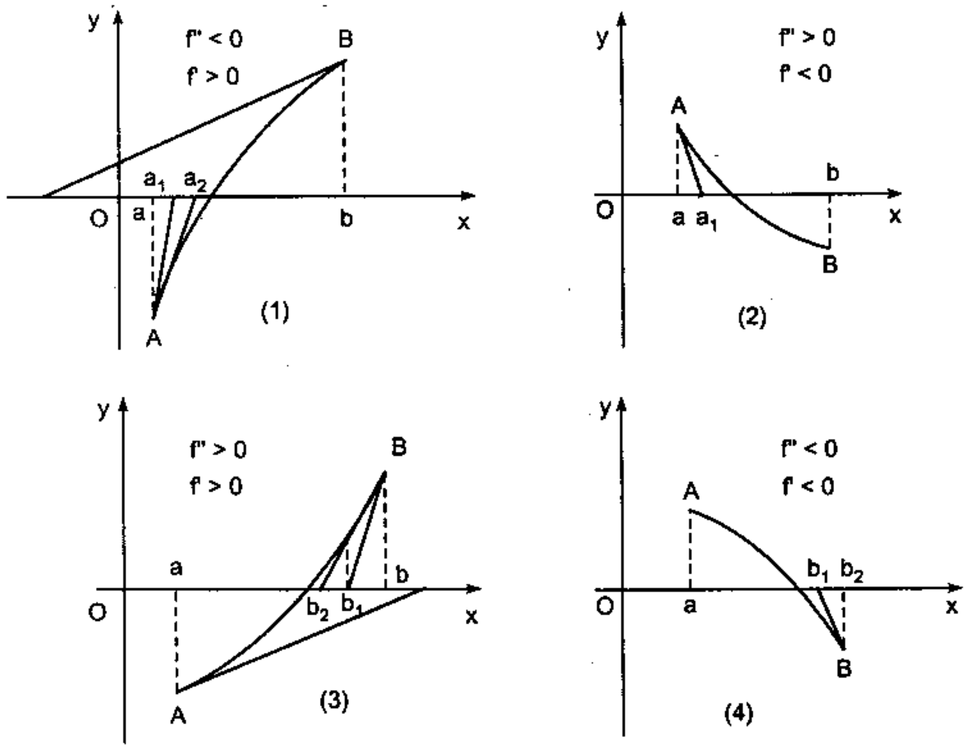
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{và...}$$



Hình 6.3

Bây giờ trở lại giải quyết vấn đề đối với dạng đường cong nào thì nên chọn x_o là a hay là b. Để việc chọn thích hợp xem hình 6.4. Từ hình vẽ ta thấy :

a) Nếu kẻ tiếp tuyến với đường cong tại mút bên trái của cung đối với trường hợp 1, 2 hoặc tại mút bên phải đối với trường hợp 3, 4 thì giao điểm của tiếp tuyến với trục hoành sẽ nằm gần nghiệm hơn mút tương ứng với khoảng (a, b).



Hình 6.4

b) Nếu kẻ tiếp tuyến với đường cong tại các mút khác của cung thì giao điểm của tiếp tuyến và trục hoành có thể nằm ngoài khoảng [a, b].

Tóm lại : Do f"(x) giữ nguyên một dấu $\forall x \in (a, b)$ nên ta chọn x_o là a hay b sao cho thỏa mãn điều kiện $f''(x)\, f(x_o) > 0$. (6.13)

Người ta cũng chứng minh được rằng với x_o chọn theo công thức (6.13) thì ta thu được dãy $x_o, x_1, x_2, \ldots$ hội tụ tới nghiệm đúng của phương trình f(x) = 0.

Ví dụ : Tìm nghiệm gần đúng của phương trình :

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$

trong khoảng [0,1] bằng phương pháp tiếp tuyến.

Ta có : $f'(x) = 3x^2 - 6$; $f'(0) = -6$

$f''(x) = 6x > 0$ trong [0, 1]

Theo điều kiện (6.13) ta chọn $x_o = 0$ vì $f(0) = 2 > 0$ cùng dấu với $f''(x)$.

Theo công thức (6.12) ta có :

$$x_1 = 0 - \frac{2}{-6} = \frac{1}{3}$$

Áp dụng công thức (6.12) một lần nữa, trong đó x_o thay bằng x_1 ta có :

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 6\frac{1}{3} + 2 = \frac{1}{27}$$

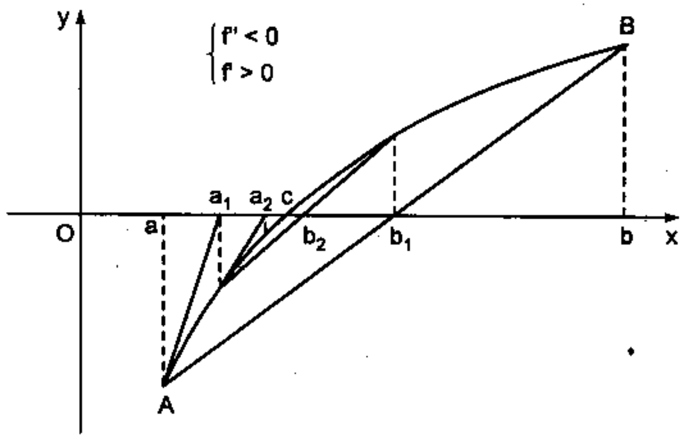
$$f'(x_1) = f'\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 6 = -\frac{17}{3}$$

Vậy :

$$x_2 = \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{27}}{-\frac{17}{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9.17} = \frac{52}{153} \approx 0,3398.$$

2.3. Phương pháp phối hợp

Giả sử (a, b) là khoảng cô lập nghiệm α của phương trình $f(x) = 0$, nghĩa là : $f(a)f(b) < 0$; $f'(x)$; $f''(x)$ $\forall x \in (a, b)$ giữ nguyên 1 dấu. Với điều kiện đó, nếu áp dụng đồng thời hai phương pháp : Dây cung cho nghiệm gần đúng x_1, còn tiếp tuyến cho nghiệm gần đúng $\overline{x}_1$, thì x_1 và $\overline{x}_1$ sẽ nằm về hai phía của nghiệm (hình 6.5). Vì vậy, khoảng cô lập nghiệm sẽ được thu hẹp nhanh hơn. Lần nữa áp dụng đồng thời 2 phương pháp cho đoạn $[\overline{x}_1, x_1]$ (hình 6.5) ta được $[\overline{x}_2, x_2]$. Tiếp tục áp dụng quá trình trên cho đến khi hiệu số giữa 2 nghiệm gần đúng bên trái và bên phải có trị tuyệt đối bé hơn sai số cho phép thì dừng và chọn nghiệm gần đúng là trung bình cộng của chúng. Cách tìm nghiệm như vậy gọi là phương pháp phối hợp của phương pháp dây cung và tiếp tuyến.



Hình 6.5

Ví dụ 1 : Tìm nghiệm của phương trình :

$$f(x) = x^3 - 6x + 2 = 0$$

với độ chính xác đến 0,01 bằng phương pháp phối hợp.

Dựa vào những kết quả thu được trong hai ví dụ trên có thể lấy nghiệm gần đúng trong khoảng (0, 1) : bằng phương pháp tiếp tuyến : $\overline{x}_1 = \dfrac{1}{3}$ (bên trái), phương pháp dây cung : $x_1 = \dfrac{2}{5}$ (bên phải). Vì $x_1 - \overline{x}_1 = 0{,}4 - \dfrac{1}{3} \approx 0{,}067 > 0{,}01$ (chưa đạt được độ chính xác yêu cầu) nên phải tiếp tục tính nữa. Xem $(\dfrac{1}{3}\ ;\ 0{,}4)$ là khoảng chứa nghiệm mới, ta được :

– Theo phương pháp tiếp tuyến : Do $f''(x) > 0$ nên $\overline{x}_1$ chọn sao cho $f''(x)\,f(\overline{x}_1) > 0$, mà $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27} > 0$ nếu chọn $\overline{x}_1 = \dfrac{1}{3}$. Vậy

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \frac{f(\overline{x}_1)}{f'(\overline{x}_1)} = \frac{1}{3} - \frac{\frac{1}{27}}{-\frac{17}{3}} = \frac{52}{153} \approx 0{,}3398.$$

– Theo phương pháp dây cung : do $f''(x_1) > 0$, x_1 chọn sao cho $f''_{(x)}f(x_1) < 0$ mà $f(0{,}4) = -0{,}336 < 0$ nên chọn $x_1 = 0{,}4$, khi đó $d_1 = \dfrac{1}{3}$.

Vậy : $x_2 = x_1 - \dfrac{d_1 - x_1}{f(d) - f(x_1)} f(x_1) = 0,4 - \dfrac{\frac{1}{3} - 0,4}{\frac{1}{27} + 0,336}(-0,336) \approx 0,3399$

Vì $x_2 - \overline{x}_2 = 0,3399 - 0,3398 = 0,0001 < 0,01$ (đạt được độ chính xác yêu cầu). Vì vậy có thể xem nghiệm gần đúng của phương trình là :

$$x = \frac{1}{2}(x_2 + \overline{x}_2) = \frac{1}{2}(0,3399 + 0,3398) = 0,33985$$

Ví dụ 2 : Tìm một nghiệm của phương trình :

$$F(x) = xe^x - 2 = 0$$

với độ chính xác đến 0,01 bằng phương pháp hỗn hợp.

Ta có : $f(0) = -2 < 0$; $f(1) = e - 2 > 0$

Hơn nữa : $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x) > 0, \forall x \in (0,1)$;

$f''(x) = e^x(1 + x) + e^x = e^x(x + 2) > 0, \forall x \in (0,1)$.

Vậy (0,1) là khoảng cô lập nghiệm. Do thỏa mãn 3 điều kiện 1, 2, 3 nên đồng thời áp dụng 2 phương pháp dây cung và tiếp tuyến.

Theo phương pháp dây cung : do $f''(x) > 0$ nên chọn x_o : $f''(x)f(x_o) < 0 \Rightarrow x_o = 0$ và do đó $d = 1$. Theo công thức (6.11) :

$$x_1 = x_o - \frac{d - x_o}{f(d) - f(x_o)} f(x_o) = 0 - \frac{1 - 0}{e - 2 + 2}(-2) = \frac{2}{e} \approx 0,7358$$

Theo phương pháp tiếp tuyến : Do $f''(x) > 0$ nên chọn $\overline{x}_o = 1$ vì $f(1) > 0$. Theo công thức (6.12) ta có :

$$\overline{x}_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = 1 - \frac{e - 2}{2e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e} \approx 0,8679$$

Vì $\overline{x}_1 - x_1 = 0,8679 - 0,7358 = 0,1321 > 0,01$ nên tiếp tục lần nữa 2 phương pháp trên trong (0,7358 ; 0,8679).

Theo phương pháp dây cung :

$$x_2 = x_1 - \frac{d_1 - x_1}{f(d_1) - f(x_1)} f(x_1) \qquad (\text{với } d_1 = 0,8679)$$

$$= 0,7358 - \frac{(0,8679 - 0,7358)(0,7358.e^{0,7358} - 2)}{(0,8679.e^{0,8679} - 2) - (0,7358.e^{0,7358} - 2)} \approx 0,8528$$

Theo phương pháp tiếp tuyến

$$\overline{x}_2 = \overline{x}_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0,8679 - \frac{0,8679.e^{0,8679} - 2}{e^{0,8679}(1+0,8679)} \approx 0,8534$$

Vì $\overline{x}_2 - x_2 = 0,8534 - 0,8528 = 0,0006 < 0,01$

Vậy có thể xem nghiệm gần đúng của phương trình là :

$$x = \frac{1}{2}(x_2 + \overline{x}_2) = \frac{1}{2}(0,8534 + 0,8528) = 0,8531.$$

III – GIẢI HỆ THỐNG PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

3.1. Đặt vấn đề

Trong mục này, ta xét việc giải hệ thống phương trình đại số tuyến tính n phương trình n ẩn :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = a_{1n+1} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = a_{2n+1} \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = a_{nn+1} \end{cases} \qquad (6.14)$$

trong đó a_{ij} $(i, j = \overline{1,n})$ là những số đã biết, gọi là các hệ số của hệ thống phương trình (6.14) ; $a_{in+1}(i = \overline{1,n})$ cũng là những số đã biết, gọi là vế phải của hệ thống phương trình (6.14) ; x_i $(i = \overline{1,n})$ là các ẩn số phải tìm.

Ký hiệu :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gọi là ma trận hệ số của hệ thống phương trình (6.14)

$$b = \begin{pmatrix} a_{1n+1} \\ a_{2n+1} \\ . \\ a_{nn+1} \end{pmatrix} \qquad \text{và } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

gọi là vectơ vế phải và vectơ ẩn số của hệ thống phương trình (6.14). Hệ thống phương trình (6.14) có thể viết gọn dưới dạng :

$$Ax = b \qquad (6.15)$$

Nếu ma trận hệ số A không suy biến, nghĩa là :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

thì hệ thống phương trình (6.14) có nghiệm duy nhất.

Thật vậy, vì $\det A \neq 0$ nên tồn tại ma trận nghịch đảo A^{-1}. Nhân bên trái hai vế của (6.15) với A^{-1}, nhận được :

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

$$x = A^{-1}b \qquad (6.16)$$

Như vậy, (6.16) cho ta nghiệm của hệ thống phương trình (6.14) và nghiệm ấy là duy nhất.

Ta đã biết phương pháp Crame giải đúng hệ thống phương trình (6.14) bằng công thức :

$$X_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, (i = \overline{1, n})$$

Trong đó : $\Delta = \det A$; Δ_i là định thức cấp n thu được từ Δ bằng cách thay cột thứ i của Δ bằng cột vế phải b của hệ thống phương trình (6.14).

3.2. Phương pháp trực tiếp : phương pháp Gaoxơ (hay phương pháp khử)

Phương pháp Gaoxơ là một phương pháp được dùng phổ biến để giải hệ thống phương trình (6.14) bằng cách khử dần các ẩn số, không phải tính một định thức nào.

1. Nội dung phương pháp

Để đơn giản việc trình bày, xét hệ thống 4 phương trình 4 ẩn số sau :

$$\begin{cases} a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 + a_{14}^{(0)}x_4 = a_{15}^{(0)} \\ a_{21}^{(0)}x_1 + a_{22}^{(0)}x_2 + a_{23}^{(0)}x_3 + a_{24}^{(0)}x_4 = a_{25}^{(0)} \\ a_{31}^{(0)}x_1 + a_{32}^{(0)}x_2 + a_{33}^{(0)}x_3 + a_{34}^{(0)}x_4 = a_{35}^{(0)} \\ a_{41}^{(0)}x_1 + a_{42}^{(0)}x_2 + a_{43}^{(0)}x_3 + a_{44}^{(0)}x_4 = a_{45}^{(0)} \end{cases} \qquad (6.17)$$

Nội dung cơ bản của phương pháp Gaoxơ là khử dần các ẩn số để đưa hệ (6.17) về hệ "tam giác" tương đương (ma trận hệ số của hệ là ma trận tam giác trên) :

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)} \\ \quad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = a_{25}^{(2)} \\ \quad\quad x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 = a_{35}^{(3)} \\ \quad\quad\quad x_4 = a_{45}^{(4)} \end{cases} \qquad (6.18)$$

sau đó giải hệ (6.18) từ dưới lên trên.

Quá trình đưa hệ (6.17) về hệ (6.18) gọi là quá trình thuận, quá trình giải hệ (6.18) gọi là quá trình ngược.

a) *Quá trình thuận*

Khử x_1. Giả sử $a_{11}^{(0)} \neq 0$ ($a_{11}^{(0)}$ gọi là trụ thứ nhất). Chia phương trình đầu của hệ (6.17) cho $a_{11}^{(0)}$, ta nhận được :

$$x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)} \qquad (6.19)$$

với $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}^{(0)}/a_{11}^{(0)}$; j = 2, 3, 4, 5.

Dùng phương trình (6.19) khử x_1 trong ba phương trình còn lại của hệ (6.19). Muốn thế, đem phương trình thứ hai của hệ (6.17) trừ phương trình (6.19) đã nhân với $a_{21}^{(0)}$; đem phương trình thứ ba của hệ (6.17) trừ phương trình (6.19) đã nhân với $a_{31}^{(0)}$; đem phương trình thứ tư của hệ (6.17) trừ phương trình (6.19) đã nhân với $a_{41}^{(0)}$. Kết quả nhận được hệ ba phương trình sau :

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)}x_4 = a_{25}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)}x_4 = a_{35}^{(1)} \\ a_{42}^{(1)}x_2 + a_{43}^{(1)}x_3 + a_{44}^{(1)}x_4 = a_{45}^{(1)} \end{cases} \qquad (6.20)$$

với $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}^{(0)} - a_{i1}^{(0)}a_{1j}^{(1)}$; i = 2, 3, 4 ; j = 2, 3, 4, 5.

Khử x_2. Giả sử $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ($a_{22}^{(1)}$ gọi là trụ thứ hai). Chia phương trình đầu của hệ (6.20) cho $a_{22}^{(1)}$, ta được :

$$x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = a_{25}^{(2)} \qquad (6.21)$$

với $a_{2j}^{(2)} = a_{2j}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$; j = 3, 4, 5.

Đem phương trình thứ hai của hệ (6.20) trừ phương trình (6.21) đã nhân với $a_{32}^{(1)}$; đem phương trình thứ ba của hệ (6.20) trừ phương trình (6.21) đã nhân với $a_{42}^{(1)}$. Kết quả nhận được hệ hai phương trình sau :

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + a_{34}^{(2)}x_4 = a_{35}^{(2)} \\ a_{43}^{(2)}x_3 + a_{44}^{(2)}x_4 = a_{45}^{(2)} \end{cases} \tag{6.22}$$

với $a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}a_{2j}^{(2)}$; $i = 3, 4$; $j = 3, 4, 5$.

Khử x_3. Giả sử $a_{33}^{(2)} \neq 0$ ($a_{33}^{(2)}$ gọi là trụ thứ ba). Chia phương trình đầu của hệ (6.22) cho $a_{33}^{(2)}$ và đem phương trình thứ hai của hệ (6.22) trừ phương trình vừa nhận được đã nhân với $a_{43}^{(2)}$, ta được :

$$x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 = a_{35}^{(3)} \tag{6.23}$$

$$a_{44}^{(3)}x_4 = a_{45}^{(3)} \tag{6.24}$$

với $a_{3j}^{(3)} = a_{3j}^{(2)}/a_{33}^{(2)}$, $a_{4j}^{(3)} = a_{4j}^{(2)} - a_{43}^{(2)}a_{3j}^{(3)}$, $j = 4, 5$.

Cuối cùng, nếu $a_{44}^{(3)} \neq 0$ ($a_{44}^{(3)}$ gọi là trụ thứ tư), ta chia phương trình (6.24) cho $a_{44}^{(3)}$, phương trình (6.24) có dạng :

$$x_4 = a_{45}^{(4)} \tag{6.25}$$

với $$a_{45}^{(4)} = a_{45}^{(3)}/a_{44}^{(3)}.$$

Rõ ràng là nếu các phần tử trụ $a_{11}^{(0)}$, $a_{22}^{(1)}$, $a_{33}^{(2)}$ và $a_{44}^{(3)}$ khác không thì hệ thống phương trình (6.17) tương đương với hệ thống phương trình "tam giác" sau :

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + a_{14}^{(1)}x_4 = a_{15}^{(1)} \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + a_{24}^{(2)}x_4 = a_{25}^{(2)} \\ \qquad\qquad x_3 + a_{34}^{(3)}x_4 = a_{35}^{(3)} \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = a_{45}^{(4)} \end{cases} \tag{6.26}$$

b) *Quá trình ngược*

Giải hệ thống (6.26) từ dưới lên ta có :

$$x_4 = a_{45}^{(4)}$$

$$x_3 = a_{35}^{(3)} - a_{34}^{(3)}x_4$$

$$x_2 = a_{25}^{(2)} - a_{23}^{(2)}x_3 - a_{24}^{(2)}x_4 \qquad (6.27)$$

$$x_1 = a_{15}^{(1)} - a_{12}^{(1)}x_2 - a_{13}^{(1)}x_3 - a_{14}^{(1)}x_4$$

2. Sơ đồ tính

Phân tích quá trình áp dụng phương pháp Gaoxơ ở mục 1 ta thấy : để đưa hệ thống (6.17) về hệ thống "tam giác" tương đương (6.26), chỉ cần tính các hệ số $a_{ij}^{(1)}$ ($j = \overline{2,5}$), $a_{ij}^{(1)}$ ($i = \overline{2,4}; j = \overline{2,5}$), $a_{2j}^{(2)}$ ($j = \overline{3,5}$), $a_{ij}^{(2)}$ ($i = 3, 4$; $j = \overline{3,5}$), $a_{3j}^{(3)}$, $a_{4j}^{(3)}$ ($j = 4, 5$) và $a_{45}^{(4)}$. Kết quả tính, trong trường hợp không dùng máy tính điện tử, thường được ghi thành bảng, gọi là sơ đồ Gaoxơ, trong đó cột $\sum$ dùng để kiểm tra quá trình tính.

Sơ đồ Gaoxơ

x_1	x_2	x_3	x_4	**Số hạng tự do**	$\sum$	**Quá trình**
$a_{11}^{(0)}$	$a_{12}^{(0)}$	$a_{13}^{(0)}$	$a_{14}^{(0)}$	$a_{15}^{(0)}$	$a_{16}^{(0)}$	Quá trình thuận
$a_{21}^{(0)}$	$a_{22}^{(0)}$	$a_{23}^{(0)}$	$a_{24}^{(0)}$	$a_{25}^{(0)}$	$a_{26}^{(0)}$	
$a_{31}^{(0)}$	$a_{32}^{(0)}$	$a_{33}^{(0)}$	$a_{34}^{(0)}$	$a_{35}^{(0)}$	$a_{36}^{(0)}$	
$a_{41}^{(0)}$	$a_{42}^{(0)}$	$a_{43}^{(0)}$	$a_{44}^{(0)}$	$a_{45}^{(0)}$	$a_{46}^{(0)}$	
1	$a_{12}^{(1)}$	$a_{13}^{(1)}$	$a_{14}^{(1)}$	$a_{15}^{(1)}$	$a_{16}^{(1)}$	
	$a_{22}^{(1)}$	$a_{23}^{(1)}$	$a_{24}^{(1)}$	$a_{25}^{(1)}$	$a_{26}^{(1)}$	
	$a_{32}^{(1)}$	$a_{33}^{(1)}$	$a_{34}^{(1)}$	$a_{35}^{(1)}$	$a_{36}^{(1)}$	
	$a_{42}^{(1)}$	$a_{43}^{(1)}$	$a_{44}^{(1)}$	$a_{45}^{(1)}$	$a_{46}^{(1)}$	
	1	$a_{23}^{(2)}$	$a_{24}^{(2)}$	$a_{25}^{(2)}$	$a_{26}^{(2)}$	
		$a_{33}^{(2)}$	$a_{34}^{(2)}$	$a_{35}^{(2)}$	$a_{36}^{(2)}$	
		$a_{43}^{(2)}$	$a_{44}^{(2)}$	$a_{45}^{(2)}$	$a_{46}^{(2)}$	
		1	$a_{34}^{(3)}$	$a_{35}^{(3)}$	$a_{36}^{(3)}$	
			$a_{44}^{(3)}$	$a_{45}^{(3)}$	$a_{46}^{(3)}$	
			1	$a_{45}^{(4)}$	$a_{46}^{(4)}$	
			1	x_4	$\bar{x}_4$	Quá trình ngược
		1		x_3	$\bar{x}_3$	
	1			x_2	$\bar{x}_2$	
1				x_1	$\bar{x}_1$	

Chú ý : Phương pháp Gaoxơ có thể được dùng để tính định thức vì khi đã chuyển định thức về dạng tam giác trên thì định thức sẽ bằng tích của các phần tử trên đường chéo chính.

Ví dụ : Dùng phương pháp Gaoxơ giải hệ thống phương trình sau :

$$\begin{cases} 2,0x_1 + 1,0x_2 - 0,1x_3 + 1,0x_4 = 2,7 \\ 0,4x_1 + 0,5x_2 + 4,0x_3 - 8,5x_4 = 21,9 \\ 0,3x_1 - 1,0x_2 + 1,0x_3 + 5,2x_4 = -3,9 \\ 1,0x_1 + 0,2x_2 + 2,5x_3 - 1,0x_4 = 9,9 \end{cases} \qquad (6.28)$$

Giải : Kết quả tính toán được ghi trong bảng 3.1. Từ bảng 3.1, ta nhận được nghiệm của hệ thống (6.28) là :

$$x_1 = 1,00000 \; ; \; x_2 = 2,00000 \; ; \; x_3 = 3,00000 \; ; \; x_4 = -1,00000$$

Bảng 3.1

x_1	x_2	x_3	x_4	**Số hạng tự do**	Σ	**Quá trình**
2,0	1,0	-0,1	1,0	2,7	6,6	Quá trình thuận
0,4	0,5	4,0	-8,5	21,9	18,3	
0,3	-1,0	1,0	5,2	-3,9	1,6	
1,0	0,2	2,5	-1,0	9,9	12,6	
1	0,50	-0,05	0,50	1,35	3,30	
	0,30	4,02	-8,70	21,36	16,98	
	-1,15	1,015	5,05	-4,305	0,610	
	-0,30	2,55	-1,50	8,55	9,30	
	1	13,40	-29,00	71,20	56,60	
		16,425	-28,300	77,575	65,700	
		6,570	-10,200	29,910	26,280	
		1	-1,72298	4,72298	4,00000	
			1,11998	-1,11998	0,00000	
			1	-1,00000	0,00000	
			1	-1,00000	0,00000	Quá trình ngược
		1		3,00000	4,00000	
	1			2,00000	3,00000	
1				1,00000	2,00000	

IV – ĐA THỨC NỘI SUY

4.1. Đa thức nội suy

Trong thực tế, nhiều khi gặp những hàm số $y = f(x)$ mà không biết biểu thức giải tích cụ thể f của chúng, ta chỉ biết các giá trị $y_o, y_1, ..., y_n$ của hàm số tại các điểm khác nhau $x_o, x_1, ..., x_n$ của đoạn [a, b]. Các giá trị này có thể nhận được thông qua thí nghiệm, đo đạc, ... Khi sử dụng những hàm số trên, ta cần biết các giá trị của chúng tại các điểm không trùng với x_i ($i = 0, 1, 2, ..., n$). Muốn thế, ta tìm cách xây dựng một đa thức :

$$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

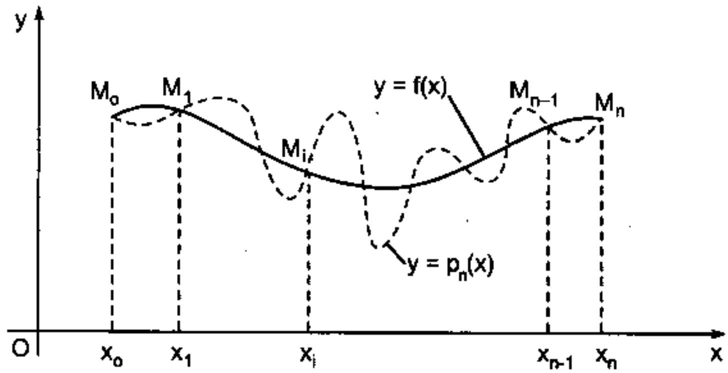
thỏa mãn :

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = 0, 1, 2, ..., n \tag{6.29}$$

$P_n(x)$ gọi là đa thức nội suy của hàm $f(x)$, các điểm x_i, $i = \overline{0,n}$ gọi là các nút nội suy. Về hình học, có nghĩa là tìm đường cong :

$$y = P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

đi qua các điểm $M_i(x_i, y_i)$ đã biết ($i = \overline{0,n}$) của đường cong $y = f(x)$ (hình 6.6).



Hình 6.6

Sau đó, ta dùng đa thức $P_n(x)$ thay cho hàm số $f(x)$ để tính gần đúng giá trị của hàm số $f(x)$ tại các điểm $x \neq x_i (i = \overline{0,n})$. Nếu điểm $x \in (x_o, x_n)$ thì phép tính trên gọi là phép tính nội suy. Nếu điểm $x \notin (x_o, x_n)$ (x ở ngoài (x_o, x_n)) thì phép tính trên gọi là phép tính ngoại suy.

Sở dĩ ta chọn đa thức $P_n(x)$ vì trong tính toán, đa thức là hàm số dễ tính nhất.

Nhằm giảm bớt khối lượng tính, người ta cũng dùng đa thức nội suy $P_n(x)$ thay cho hàm số f(x) để tính gần đúng giá trị của hàm số f(x) tại các điểm $x \neq x_i (i = \overline{0,n})$ trong trường hợp biểu thức giải tích cụ thể của hàm số f(x) đã biết nhưng tương đối phức tạp, nhất là khi phải tính nhiều giá trị.

Về sự duy nhất của đa thức nội suy, ta có định lý sau :

Định lý 1. Đa thức nội suy $P_n(x)$ của hàm số f(x), nếu có, thì chỉ có một mà thôi.

Chứng minh : Giả sử từ những điều kiện (6.29), ta xây dựng được hai đa thức nội suy khác nhau $P_n(x)$ và $Q_n(x)$ với :

$$P_n(x_i) = y_i \ ; \qquad Q_n(x_i) = y_i \ (i = \overline{0,n})$$

Khi đó $P_n(x) - Q_n(x)$ là một đa thức bậc không lớn hơn n, nhưng lại triệt tiêu tại n + 1 điểm x_i khác nhau vì :

$$P_n(x_i) - Q_n(x_i) = y_i - y_i = 0 \ (i = \overline{0,n})$$

Vậy : $P_n(x) - Q_n(x) = 0$ (nghĩa là $P_n(x) - Q_n(x)$ bằng không với mọi x), hay : $P_n(x) = Q_n(x)$. Đó là điều phải chứng minh.

4.2. Tính giá trị của đa thức : sơ đồ Hoócne

Cho đa thức bậc n :

$$P_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

với hệ số thực a_k (k = 0, 1, 2, ..., n), cần tính giá trị của đa thức tại x = c :

$$P_n(c) = a_o c^n + a_1 c^{n-1} + ... + a_{n-1} c + a_n \qquad (6.30)$$

Cách tính $P_n(c)$ tiết kiệm nhất về số phép tính như sau : ta viết (6.30) dưới dạng :

$$P_n(c) = (...((((a_o c + a_1)c + a_2)c + a_3)c + ... + a_{n-1})c + a_n)$$

Vậy để tính $P_n(c)$, chỉ cần tính lần lượt các số :

$$b_o = a_o$$

$$b_1 = a_1 + b_oc$$

$$b_2 = a_2 + b_1c$$

$$b_3 = a_3 + b_2c$$

...

$$b_n = a_n + b_{n-1}c = P_n(c)$$

Để tiện tính toán, người ta thường dùng sơ đồ sau, gọi là sơ đồ Hoócne :

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & a_o & a_1 & a_2 & \cdots & a_n & c \\ + & & b_oc & b_1c & \cdots & b_{n-1}c & \\ \hline & b_o & b_1 & b_2 & \cdots & b_n = P_n(c) & \end{array}$$

Ví dụ 1. Dùng sơ đồ Hoócne, tính giá trị của :

$$P_3(x) = 3x^3 + 2x^2 - 5x + 7$$

tại x = 3.

Giải : Ta có

$$\begin{array}{cccccc|c} & 3 & 2 & -5 & 7 & & 3 \\ + & & 9 & 33 & 84 & & \\ \hline & 3 & 11 & 28 & 91 = P_3(3) & & \end{array}$$

4.3. Đa thức nội suy Lagrăng

1. Thành lập đa thức nội suy Lagrăng

Giả sử trên [a, b] cho n + 1 giá trị khác nhau của đối số : $x_o, x_1, \ldots, x_n$ và biết, đối với hàm số y = f(x), những giá trị tương ứng :

$$f(x_i) = y_i,\ i = \overline{0, n}$$

Bây giờ ta xây dựng đa thức nội suy $L_n(x)$, bậc không cao hơn n, thỏa mãn điều kiện :

$$L_n(x_i) = y_i,\ i = \overline{0,n}$$

theo cách của Lagrăng.

Trước hết, xây dựng đa thức $l_i(x)$ thỏa mãn điều kiện :

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1 \text{ nếu } j = i \\ 0 \text{ nếu } j \neq i \end{cases} \tag{6.31}$$

Vì đa thức $l_i(x)$ phải tìm triệt tiêu tại n điểm $x_o, x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n$ nên $l_i(x)$ có thể viết dưới dạng :

$$l_i(x) = C_i(x - x_o)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n) \tag{6.32}$$

trong đó C_i là hằng số phải tìm.

Đặt $x = x_i$ trong (6.32) và để ý đến điều kiện (6.32), ta có :

$$l_i(x_i) = C_i(x_i - x_o)(x_i - x_1) ... (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) ... (x_i - x_n)$$

Từ đó :

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_o)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)}$$

Thay vào (6.32), ta có :

$$l_i(x) = \frac{(x - x_o)(x - x_1)...(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})...(x - x_n)}{(x_i - x_o)(x_i - x_1)...(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})...(x_i - x_n)} \tag{6.33}$$

Đa thức $l_i(x)$ bậc n được gọi là đa thức Lagrăng cơ bản.

Bây giờ, ta xét đa thức sau :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)y_i \tag{6.34}$$

Dễ thấy rằng bậc của đa thức $L_n(x)$ không cao hơn n, và do điều kiện (6.31), có :

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x_j)y_i = l_j(x_j)y_j = y_i\ ;\ j = \overline{0,n}$$

Vậy đa thức $L_n(x)$, xác định bởi (6.34), là đa thức nội suy phải tìm. Thay biểu thức của $l_i(x)$ từ (6.34) vào (6.34), nhận được :

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_o)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_o)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)} y_i \quad (6.35)$$

Đây là đa thức nội suy Lagrăng.

Sau đây ta sẽ xét hai trường hợp hay sử dụng của đa thức nội suy Lagrăng.

a) *Nội suy bậc nhất hay nội suy tuyến tính*

Khi n = 1, ta có hai nút nội suy x_o và x_1, và :

$$L_1(x) = \frac{x-x_1}{x_o-x_1} y_o + \frac{x-x_o}{x_1-x_o} y_1 \quad (6.36)$$

Phương trình $y = L_1(x)$ chính là phương trình đường thẳng đi qua hai điểm $M_o(x_o, y_o)$ và $M_1(x_1, y_1)$.

b) *Nội suy bậc hai*

Khi n = 2, ta có ba nút nội suy x_o, x_1, x_2 và :

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_o-x_1)(x_o-x_2)} y_o + \frac{(x-x_o)(x-x_2)}{(x_1-x_o)(x_1-x_2)} y_1 + \frac{(x-x_o)(x-x_1)}{(x_2-x_o)(x_2-x_1)} y_2 \quad (6.37)$$

Phương trình $y = L_2(x)$ chính là phương trình đường parabol đi qua ba điểm $M_o(x_o, y_o)$, $M_1(x_1, y_1)$ và $M_2(x_2, y_2)$.

Ví dụ 2. Hãy xây dựng đa thức nội suy Lagrăng của hàm số $y = \sin\pi x$, chọn các nút nội suy là : $x_o = 0$, $x_1 = \frac{1}{6}$ và $x_2 = \frac{1}{2}$.

Giải : Ta có : $y_o = \sin 0 = 0$; $y_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; $y_2 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$. Áp dụng công thức (6.37), nhận được :

$$L_2(x) = \frac{\left(x-\frac{1}{6}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)} \times 0 + \frac{x\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\right)} \times \frac{1}{2} + \frac{x\left(x-\frac{1}{6}\right)}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)} \times 1 = \frac{7}{2}x - 3x^2$$

Ví dụ 3. Cho bảng giá trị của hàm số $y = \log_{10}x$

x	300	304	305	307
y	2,4771	2,4829	2,4843	2,4871

Tính gần đúng $\log_{10}301$ bằng đa thức nội suy Lagrăng.

Giải : Dùng (6.35) với n = 3, ta có :

$$\mathrm{Log}_{10}301 \approx \frac{(-3)(-4)(-6)}{(-4)(-5)(-7)} \times 2,4771 + \frac{1(-4)(-6)}{4(-1)(-3)} \times 2,4829$$

$$+ \frac{1(-3)(-6)}{5(1)(-2)} \times 2,4843 + \frac{1(-3)(-4)}{7(3)(2)} \times 2,4871$$

$$= 1,2739 + 4,9658 - 4,4717 + 0,7106 = 2,4786$$

2. Đánh giá sai số

Để đánh giá độ lệch giữa đa thức nội suy Lagrăng $L_n(x)$ và hàm số f(x) tại các điểm $x \neq x_i$ ($i = \overline{0,n}$) ta xét định lý sau :

Định lý 2. Nếu hàm số y = f(x) liên tục trên [a, b] và có đạo hàm liên tục đến cấp n + 1 trong (a, b) thì sai số nội suy $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$ có dạng sau :

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x) \tag{6.38}$$

trong đó c phụ thuộc x và ∈ [a, b], $\pi_{n+1}(x) = (x - x_o)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$.

Chứng minh : Xét hàm số phụ sau :

$$u(x) = f(x) - L_n(x) - k\pi_{n+1}(x) \tag{6.39}$$

trong đó k là hằng số sẽ lựa chọn sau.

Hàm số u(x) có n + 1 nghiệm tại các điểm $x_o, x_1, \ldots, x_n$. Bây giờ ta chọn k sao cho hàm số u(x) có nghiệm thứ n + 2 tại một điểm bất kỳ nhưng cố định $\overline{x}$ của [a,b], không trùng với các nút nội suy. Muốn thế, chỉ cần cho :

$$f(\overline{x}) - L_n(\overline{x}) - k\pi_{n+1}(\overline{x}) = 0$$

Vì $\pi_{n+1}(\overline{x}) \neq 0$, nên :

$$k = \frac{f(\overline{x}) - L_n(\overline{x})}{\pi_{n+1}(\overline{x})} \tag{6.40}$$

Với giá trị k vừa chọn, hàm số u(x) bằng 0 tại n + 2 điểm : x_0, x_1, x_2, ..., x_n, $\overline{x}$ trên [a, b]. Áp dụng định lý Rôn, thấy rằng đạo hàm u'(x) có không ít hơn n + 1 nghiệm trên [a,b]. Lại áp dụng định lý Rôn vào đạo hàm u'(x), thấy rằng đạo hàm cấp hai u"(x) có không ít hơn n nghiệm trên [a, b]. Tiếp tục lập luận như trên, thấy rằng trên [a,b] đạo hàm $u^{(n+1)}(x)$ có ít nhất một nghiệm c, nghĩa là :

$$u^{(n+1)}(c) = 0$$

Vì $L_n^{(n+1)}(x) = 0$ và $\pi_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n+1)\,!$ Nên theo (6.39) có :

$$u^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - k(n+1)\,!$$

Tại x = c, nhận được :

$$u^{(n+1)}(c) = f^{(n+1)}(c) - k(n+1)\,! = 0$$

hay

$$k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \tag{6.41}$$

Từ (6.40) và (6.41) suy ra :

$$\frac{f(\overline{x}) - L_n(\overline{x})}{\pi_{n+1}(\overline{x})} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

và :

$$f(\overline{x}) - L_n(\overline{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(\overline{x}) \tag{6.42}$$

Vì $\overline{x}$ là một điểm bất kỳ của [a, b] không trùng với các nút nội suy, nên có thể viết lại (6.42) dưới dạng :

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\pi_{n+1}(x) \tag{6.43}$$

trong đó: c phụ thuộc x và nằm trên [a, b]. Đó là công thức xác định số hạng dư của đa thức nội suy $L_n(x)$.

Chú ý rằng (6.43) đúng đối với mọi điểm của [a, b], kể cả những điểm nút nội suy.

Đặt $M_{n+1} = \max\limits_{a \le x \le b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|$, nhận được đánh giá sau đối với sai số tuyệt đối của đa thức nội suy Lagrăng :

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\pi_{n+1}(x)\right| \tag{6.44}$$

Ví dụ 4 : Cho bảng giá trị của hàm số y = sin x như sau :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	0,707	1

Tính gần đúng $\sin\frac{\pi}{3}$ bằng đa thức nội suy Lagrăng và đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được.

Giải : Dùng (6.37), ta có :

$$\sin\frac{\pi}{3} \approx \frac{\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)} \times 0{,}707 + \frac{\frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)} = 0{,}851$$

Để đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được, ta dùng (6.44).

Vì $M_3 = \max\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \left|(\sin x)'''\right| = 1$, nên :

$$\left|R_2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right| \le \frac{1}{3!} \times \frac{\pi}{3} \times \frac{\pi}{12} \times \frac{\pi}{6} = 0{,}024$$

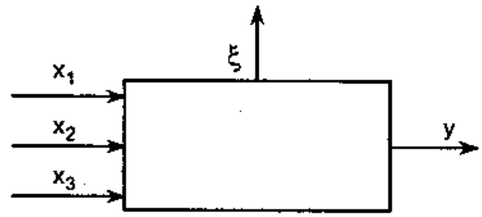
và $\quad \sin\frac{\pi}{3} = 0{,}85 \pm 0{,}03.$

V – PHƯƠNG PHÁP BÌNH PHƯƠNG CỰC TIỂU

Phương pháp bình phương cực tiểu (viết tắt BPCT) là một phương pháp rất cơ bản và hiệu lực để xử lý các số liệu thực nghiệm và xây dựng mô hình thống kê cho một lớp khá rộng lớn các đối tượng nghiên cứu thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau. Lời giải của phương pháp BPCT là một mô hình toán học biểu diễn một cách gần đúng đối tượng thực. Vì vậy nó cần phải được đánh giá về mặt sai số – nghĩa là cần phải có những kết luận thống kê về lời giải đó.

5.1. Đặt bài toán

Giả sử ta cần nghiên cứu một đại lượng y trong một hệ thống nào đó. Thông thường, trong hệ thống ấy một mặt y phụ thuộc vào các biến số độc lập $x_1, x_2, ..., x_k$ – có thể điều khiển được, mặt khác y còn bị ảnh hưởng của tác động ngẫu nhiên ξ – thường xuyên và không điều khiển được. $x_1, x_2, ..., x_k$ gọi là các biến vào hay các nhân tố, biến ngẫu nhiên ξ gọi là nhiễu, y gọi là cái ra.



Vấn đề là phải tìm quan hệ giữa y và $(x_1, ..., x_k)$. Thông thường thì ít nhiều có trước một thông tin tiên nghiệm về hệ thống đang xét. Bởi vậy người ta thường giả thiết mối quan hệ giữa y và $(x_1, ..., x_k)$ có dạng :

$$y = f(x_1, ..., x_k ; \theta_1, ..., \theta_m) + \xi \tag{6.45}$$

trong đó dạng của hàm f đã biết, nhưng còn m tham số $\theta_1, ..., \theta_m$ chưa biết. Nếu ta còn giả thiết thêm rằng : $E\xi = 0$, $D\xi = \sigma^2$ nghĩa là : $\xi \sim N(0, \sigma)$ và ký hiệu :

$$\bar{y} = Ey$$

thì từ (6.45) ta có :

$$\bar{y} = Ey = f(x_1, x_2, ..., x_k ; \theta_1, ..., \theta_m) \tag{6.46}$$

$$Dy = \sigma^2 \tag{6.47}$$

Hàm số $\bar{y}$ gọi là hàm phản hồi của y. Phương trình (6.46) gọi là phương trình hồi quy lí thuyết của y theo $x_1, ..., x_k$.

Để tìm mối quan hệ "thật" giữa y và $x_1, ..., x_k$ người ta tiến hành N thí nghiệm và lập một bảng :

N_i	x_1	x_2	...	x_k	y
1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}	y_1
2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	y_2
N	x_{N1}	x_{N2}	...	x_{Nk}	y_N

Điểm $x^i = (x_{i1}, ..., x_{ik}) \in R^k$, $(i = \overline{1,N})$ gọi là một điểm thí nghiệm. R^k gọi là không gian nhân tố.

Đối với mỗi bài toán cụ thể, các điểm thí nghiệm chỉ có thể chạy trên một miền xác định $X \in R^k$, X gọi là miền thí nghiệm. Bài toán đặt ra là : Trên cơ sở các số liệu thu được, hãy tìm một hàm số :

$$\hat{y} = \hat{f}(x_1, x_2, ..., x_k) \qquad (6.48)$$

Biểu diễn gần đúng tốt nhất hàm $\tilde{y}$ và tìm một ước lượng tốt nhất cho σ^2.

Hàm số $\hat{y}$ được coi là mô hình thống kê của hệ thống thực ta đang nghiên cứu. Phương trình (6.48) được gọi là phương trình hồi quy thực nghiệm.

Để giải quyết bài toán này người ta thường dùng phương pháp BPCT. Ưu điểm nổi bật của nó là không cần biết tới luật phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên y. Theo phương pháp BPCT, bài toán dẫn về việc xác định các tham số $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ sao cho tổng bình phương sau đạt min :

$$\sum_{i=1}^{N}(y_i - \tilde{y}_i)^2 \rightarrow \min \qquad (6.49)$$

Trong đó

$y_i = (i = \overline{1,N})$ – các kết quả thí nghiệm.

$\tilde{y}_i = f(x_{i1}, ..., x_{ik}, \theta_1, ..., \theta_m)$, $(i = \overline{1,N})$ – các giá trị lý thuyết.

Vì các tham số $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ còn chưa biết nên tổng bình phương trong (6.49) là một hàm số của các tham số đó, ta ký hiệu là $S(\theta_1, ..., \theta_m)$.

Gọi $\xi_i = y_i - \tilde{y}_i$, ta có :

$$S(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m) = \sum_{i=1}^{N}\xi_i^2 \rightarrow \min \qquad (6.50)$$

Chú ý :

1. Trường hợp riêng hay gặp của (6.46) là :

$$\tilde{y} = \theta_1 g_1(x_1, ..., x_k) + ... + \theta_m g_m(x_1, ..., x_k) \qquad (6.51)$$

Trong đó $g_1(x_1, ..., x_k), ..., g_m(x_i, ..., x_k)$ là những hàm số đã biết :

Các dạng của (6.51) có thể là :

$$\tilde{y} = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + ... + \theta_k x_k + \theta_o \qquad (6.52)$$

$$\tilde{y} = \theta_o + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_1 x_2 + \theta_4 x_1^2 + \theta_5 x_2^2 \qquad (6.53)$$

(6.52) chính là một hàm tuyến tính k biến cố với m = k + 1

(6.53) là một đa thức bậc hai hoàn chỉnh với k = 2, m = 6.

2. Có thể xảy ra trường hợp, hàm phản hồi $\tilde{y}$ là một trong các hàm số sau :

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{y} = f_1(x, \theta^1) \\ \tilde{y} = f_2(x, \theta^2) \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{y} = f_s(x, \theta^s) \end{array}\right\} \qquad (6.54)$$

Trong đó $f_1, f_2, ..., f_s$ là các hàm số đã biết dạng, nhưng còn vectơ tham số $\theta^1, ..., \theta^s$ chưa biết. Trên cơ sở các số liệu đã thu được, cần phải xác định xem hàm nào trong các hàm (6.54) là phù hợp nhất với hệ thống thực và tìm ước lượng của vectơ tham số của hàm đó.

5.2. Trường hợp tuyến tính

1. Phát biểu bài toán

Giả sử :

$$y = \theta_o + \theta_1 x_1 + ... \theta_k x_k + \xi$$

$$\xi \sim N(0, \sigma)$$

$$\tilde{y} = Ey = \theta_o + \theta_1 x_1 + ... + \theta_k x_k$$

Lập bảng : quy ước $x_o = 1$

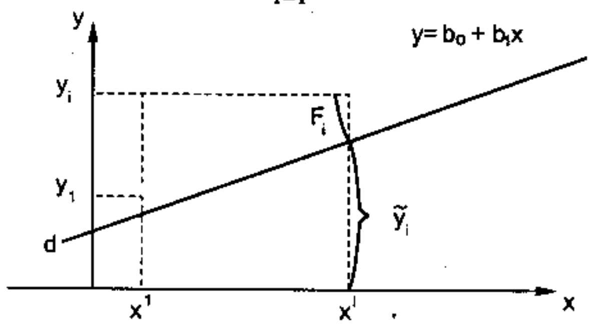
N_i	x_o	x_1	x_2	...	x_k	y
1	1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1k}	y_1
2	1	x_{21}	x_{22}	...	x_{2k}	y_2
N	1	x_{N1}	x_{N2}	...	x_{Nk}	y_N

Bài toán đặt ra :

Xác định $\theta_j = b_j$ sao cho :

$$S(\theta_o, \theta_1, ..., \theta_k) = \sum_{i=1}^{N}(y_i - \tilde{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{N}(y_i - \sum_{j=0}^{k}\theta_j x_{ij})^2$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\xi_i^2 \to \min$$



Hình 6.7

Tìm một đường thẳng d (hình 6.7) sao cho : Tổng bình phương các độ lệch giữa tung độ của đường thí nghiệm với đường thẳng đó là bé nhất.

Dựa vào điều kiện cần của cực trị :

$$\frac{\partial s}{\partial \theta_j} = 0, j = \overline{O,K}$$

Ta có $\dfrac{\partial s}{\partial \theta_j} = 2\sum_{i=1}^{N}\left[(y_i - \sum_{j=0}^{k}\theta_j x_{ij}) - x_{ij}\right] = 0, \quad j = \overline{O,K}$

$$\sum_{i=1}^{N}\left[(y_i - \sum_{j=0}^{k}\theta_j x_{ij})x_{ij}\right] = 0, \qquad j = \overline{O,K} \tag{6.55}$$

(Công thức 6.55) là hệ k + 1 phương trình và k + 1 ẩn $\theta_o, \theta_1, ..., \theta_k$.

Ta giải (6.55) bằng phương pháp ma trận. Ký hiệu :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & ... & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & ... & x_{2k} \\ . & . & . & & \\ . & . & . & & \\ . & . & . & & \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & ... & x_{Nk} \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_N \end{pmatrix} \tilde{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{y}_N \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ . \\ . \\ . \\ \xi_N \end{pmatrix} \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_o \\ \theta_1 \\ . \\ . \\ . \\ \theta_k \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_o \\ b_1 \\ . \\ . \\ . \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$Y = X\theta + \Delta \tag{6.56}$$

$$\tilde{Y} = X\theta \tag{6.57}$$

$$S = (Y - \tilde{Y})^T(Y - \tilde{Y}) = \Delta^T\Delta \tag{6.58}$$

$$X^T(Y - X\theta) = 0 \tag{6.59}$$

$$X^TX\theta = X^TY \tag{6.59'}$$

Bài toán trở thành tìm vectơ $\theta = B$ thỏa mãn (6.56), (6.57) và (6.59'). Khi đó S bé nhất.

Giả sử $(X^TX)^{-1} \neq 0 \Rightarrow \theta = B = (X^TX)^{-1}(X^TY)$ (6.60)

2. Ví dụ

Tìm mô hình biểu diễn sự phụ thuộc giữa y và hai biến x_1, x_2 trên cơ sở bảng quan sát sau :

(Thí nghiệm lặp lại n = 6, dùng cho việc kiểm định mà ở đây không xét)

N°	x_1	x_2	y(1)	y(2)	y(3)	y(4)	y(5)	y(6)	y
1	2	1	10,5	9,5	9	11	10,6	9,4	10
2	2	2	13	11	11,5	12,5	12,2	11,8	12
3	8	10	18	16	16,6	17,4	17	17	17
-4	2	4	13	12,5	13	13,5	14	12	13
5	6	8	15	15	14,5	15,5	14	16	15
6	3	4	10,5	9,5	10	11	10	9	10
7	5	7	14,2	13,8	13,6	14,4	15	13	14
8	3	3	12,5	11,5	11	13	12,2	11,8	12
9	9	10	17	15,6	15	16,4	16,5	15,5	16
10	10	11	19	17	17,5	18,5	18,2	17,8	18

Như vậy

$$Y = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ . \\ . \\ . \\ 16 \\ 18 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$X^TX = \begin{bmatrix} 1 & 1 & . & . & . & 1 & 1 \\ 2 & 2 & . & . & . & 9 & 10 \\ 1 & 2 & . & . & . & 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 50 & 60 \\ 50 & 336 & 398 \\ 60 & 398 & 480 \end{bmatrix}$$

$$X^TY = \begin{bmatrix} 1 & 2 & . & . & . & 1 & 1 \\ 2 & 2 & . & . & . & 9 & 10 \\ 1 & 2 & . & . & . & 10 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \\ . \\ . \\ . \\ 16 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 137 \\ 756 \\ 908 \end{bmatrix}$$

Ký hiệu $C = X^TX$

$$C^{-1} = (X^TX)^{-1} = \frac{1}{7160}\begin{bmatrix} 2876 & -120 & -260 \\ -120 & 1200 & -980 \\ -260 & -980 & 960 \end{bmatrix}$$

$$B = (X^TX)^{-1}X^TY = \frac{1}{7160}\begin{bmatrix} 2876 & -120 & -260 \\ -120 & 1200 & -980 \\ -260 & -980 & 960 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 137 \\ 756 \\ 908 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,3871 \\ 0,1286 \\ 0,6174 \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình hồi quy có dạng :

$$\hat{y} = 9,3871 + 0,1286x_1 + 0,6174x_2$$

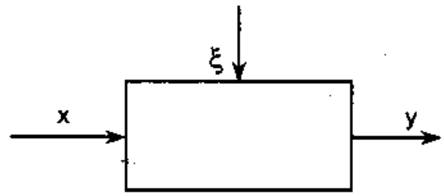
ÁP DỤNG CHO HÀM MỘT BIẾN

1. Hàm tuyến tính

Giả thiết :

$$y = \theta_o + \theta_1 x + \xi$$

$$\xi \sim N(0, \sigma)$$



Làm N thí nghiệm, ta lập được bảng sau :

N	x_o	x	y
1	1	x_1	y_1
2	1	x_2	y_2
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N	1	x_N	y_N

Tính toán b_j

Ta có thể tính B bằng cách giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{N} [y_i - (\theta_o + \theta_1 x_i)] x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{N} [y_i - (\theta_o + \theta_1 x_i)] = 0 \end{cases}$$

Theo phương pháp bình phương cực tiểu :

$$C = X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 1 & x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_i & \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = (X^TX)^{-1} = \frac{1}{N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} x_i^2 & -\sum_{i=1}^{N} x_i \\ -\sum_{i=1}^{N} x_i & N \end{pmatrix}$$

$$X^TY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} & y_i \\ \sum_{i=1}^{N} & x_i y_i \end{pmatrix}$$

$$B = (X^TX)^{-1}(X^TY) \Rightarrow b_o = \frac{\sum_{i=1}^{N} y_i \sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} x_i y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

$$b_1 = \frac{N\sum_{i=1}^{N} x_i y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

Để dễ tính toán ta lập bảng sau :

N^0	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	x_1	y_1	x_1^2	$x_1 y_1$
2	x_2	y_2	x_2^2	$x_2 y_2$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
N	x_N	y_N	x_N^2	$x_N y_N$
Cộng	Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	$\Sigma x_i y_i$

Ví dụ. Tìm công thức liên hệ độ bền của sợi và độ ẩm của không khí.

Độ ẩm K^2x			Độ bền của sợi y					Độ bền TB
		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
(1)	36	2	2,1	2,1	1,9	2	1,9	2
(2)	38	2,4	2,6	2,5	2,5	2,4	2,6	2,5
(3)	40	2,2	2,4	2,2	2,4	2,3	2,3	2,3
(4)	58	2,8	2,9	3,0	2,6	2,7	2,8	2,8
(5)	70	3,0	3,1	3,1	3,2	3,1	3,1	3,1
(6)	80	3,1	3,3	3,1	3,1	3,1	2,9	3,1
(7)	82	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2	3,2
(8)	93	2,9	2,9	3,0	3,1	3,0	3,1	3,0

Từ đây ta lập được bảng :

	x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i
	36	2	1296	72,0
	38	2,5	1444	95,0
	40	2,3	1600	92,0
	58	2,8	3364	162,4
	70	3,1	4900	217,0
	80	3,1	6400	248,0
	82	3,2	6724	262,4
	93	3,0	8649	279,0
$\sum =$	497	22,0	34377	1427,8

$$b_o = \frac{22 \times 34\,377 - 497 \times 1427{,}8}{8 \times 34\,377 - (497)^2} = \frac{756\,294 - 709\,616{,}6}{275\,016 - 247\,009} = \frac{46\,677{,}4}{28\,007} = 1{,}667$$

$$b_1 = \frac{8 \times 1427{,}8 - 497 \times 22}{8 \times 34\,377 - (497)^2} = \frac{11\,422{,}4 - 10\,934}{28\,007} = \frac{488{,}4}{28\,007} = 0{,}0174$$

Vậy $\hat{y} = 1{,}667 + 0{,}0174x$.

2. Tuyến tính hóa một số hàm phi tuyến

a) Hàm số mũ : $y = ab^x + \xi$

$\bar{y} = ab^x$. Hãy xác định a,b.

$\lg \bar{y} = \lg a + x\lg b$. Đặt $\theta_o = \lg a$, $\theta_1 = \lg b$, ta có :

$Y = \theta_o + \theta_o X$

Áp dụng mục 5.1 để tìm b_o, $b_1 \Rightarrow a = 10^{b_o}$, $b = 10^{b_1}$.

Chú ý : Khi tính toán phải cần bảng số liệu để có ma trận X, Y

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ . & . \\ . & . \\ . & . \\ 1 & x_N \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} \lg y_1 \\ \lg y_t \\ . \\ . \\ . \\ \lg y_N \end{pmatrix}$$

N^0	x	y	X = x	Y = lgy
1	x_1	y_1	x_1	$\lg y_1$
2	x_2	y_2	x_2	$\lg y_2$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
N	x_N	y_N	x_N	$\lg y_N$

Tính được $B = \begin{pmatrix} b_o \\ b_1 \end{pmatrix} = (X^T X)^{-1}(X^T Y)$.

Có thể giải trực tiếp hệ phương trình :

$$\lg b \sum_{i=1}^{N} x_i^2 + \lg a \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i \lg y_i \qquad (6.61)$$

$$\lg b \sum_{i=1}^{N} x_i + N \lg a = \sum_{i=1}^{N} \lg y_i$$

Giải hệ phương trình (6.61), ta được lga, lgb ; từ đây xác định hệ số a, b.

b) $\tilde{y} = \theta_o + \theta_1 x + \theta_2 x^2$

Phương pháp 1 : Tuyến tính hóa

– Đặt $Y = \tilde{y}$, $X_1 = x$, $X_2 = x^2$, $Y = \theta_o + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_2$

Áp dụng mục 5.2 với k = 2 biến, tính được b_o, b_1, b_2

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ . & . & \\ . & . & \\ . & . & \\ 1 & x_N & x_N^2 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_N \end{pmatrix}$$

Phương pháp 2 : Áp dụng trực tiếp phương pháp BPCT ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} b_2\sum_{i=1}^{N} x_i^4 + b_1\sum_{i=1}^{N} x_i^3 + b_o\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 y_i \\ b_2\sum_{i=1}^{N} x_i^3 + b_1\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b_o\sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \\ b_2\sum_{i=1}^{N} x_i^2 + b_1\sum_{i=1}^{N} x_i + b_o N = \sum_{i=1}^{N} y_i \end{cases} \qquad (6.62)$$

Giải hệ (6.62) ta tìm được b_o, b_1, b_2.

c) $y = ax^b + \xi$

Hàm phản hồi có dạng :

$$\tilde{y} = ax^b \qquad (6.63)$$

Giả sử a > 0, x > 0, ta lấy logarit cơ số 10 của hai vế

$$\lg\tilde{y} = \lg a + b\lg x$$

Đặt :

$$\left.\begin{aligned} y' &= \lg y \\ x' &= \lg x \\ \theta_o &= \lg a \\ \theta_1 &= b \end{aligned}\right\} \qquad (6.64)$$

và ta đi tìm hàm phản hồi của hệ (x', y') ở dạng :

$$\bar{y}' = \theta_o + \theta_1 x'$$

Do đó, ta có hai dạng tuyến tính. Sử dụng các thuật toán của mục 5.1, ta tìm được ước lượng bình phương bé nhất b_o, b_1 của θ_o, θ_1. Theo (6.64), ta chọn làm ước lượng của $\hat{a}, \hat{b}$ là :

$$\left\{\begin{matrix} \hat{a} & 10^{\hat{b}_o} \\ \hat{b} & \hat{b}_1 \end{matrix}\right\} \qquad (6.65)$$

và khi đó ước lượng của (6.63) là :

$$\hat{y} = \hat{a}x^{\hat{b}} \qquad (6.66)$$

Ví dụ : Giả sử hàm phản hồi có dạng (6.63). Qua kết quả của bảy thí nghiệm, ta có hai cột đầu của bảng sau :

x	y	x' = lgx	y' = lgy
2,2	3,6	0,3424	0,5563
3,8	5,0	0,5798	0,6990
7,0	7,0	0,8451	0,8451
7,7	7,7	0,8865	0,8865
11,5	9,3	1,0607	0,9685
15,2	11,3	1,1818	1,0531
18,0	12,2	1,2553	1,0864

Từ đó tìm được $\hat{b}_o = 0{,}3654$, $\hat{b}_1 = 0{,}5759$. Do đó :

$$\hat{a} = 10^{0{,}3654} = 2{,}315$$

$$\hat{b} = 0{,}5759$$

Cuối cùng ta có phương trình hồi quy phi tuyến :

$$\hat{y} = 2{,}315.x^{0{,}5759}$$

d) Hàm phản hồi có dạng :

$$\tilde{y} = \frac{x}{ax + b} \tag{6.67}$$

Ta có : $\dfrac{1}{\tilde{y}} = a + b\dfrac{1}{x}$

Đặt $y' = \dfrac{1}{y}$ $\qquad x' = \dfrac{1}{x}$

$$\theta_o = a, \theta_1 = b$$

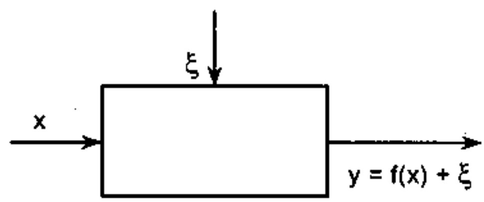
thì : $\hat{a} = \hat{b}_o, \hat{b} = \hat{b}_1$

$$\hat{y} = \frac{x}{\hat{a}x + \hat{b}} \tag{6.68}$$

Chú ý rằng (6.66 và 6.68) không phải là ước lượng BP bé nhất của (6.63) và (6.67) tương ứng :

3. Tổng quát của mô hình một biến

– Trong trường hợp đã biết dạng của f(x) thì đưa về các trường hợp đã làm ở trên.



– Trường hợp không biết dạng của f(x) thì với một số giả thiết nào đó của f(x) ta xấp xỉ nó bằng khai triển Taylo – lấy k + 1 số hạng

$$f(x) = \theta_o + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + ... + \theta_k x^k \tag{6.69}$$

(giả thiết f(x) có đạo hàm đến cấp k + 1)

Vậy có thể giả thiết :

$$\text{(i) } y = \beta_o + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + ... + \beta_k x^k + \xi \tag{6.70}$$

(k chưa biết, β_i chưa biết)

$$\text{(ii) } \xi \sim N(0, \sigma)$$

giải quyết hai vấn đề : xác định β_i và xác định k.

(Để đa thức thu được phù hợp với đối tượng nghiên cứu, số lượng thực nghiệm đã thu được).

VI – TÍNH GẦN ĐÚNG ĐẠO HÀM VÀ TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH

6.1. Tính gần đúng đạo hàm

1. Đặt vấn đề

Trong chương trình toán ở phổ thông ta đã biết cách tính đạo hàm của hàm số y = f(x), nếu biểu thức giải tích của hàm số f(x) đã biết. Nhưng trong thực tế, thường phải tính đạo hàm của hàm số y = f(x) khi biểu thức giải tích của hàm số f(x) không biết, mà chỉ biết một số cặp giá trị tương ứng của x và y hoặc biểu thức của hàm số quá phức tạp. Trong những trường hợp ấy, người ta tính gần đúng đạo hàm bằng cách thay hàm số f(x) trên [a,b] bằng đa thức nội suy $P_n(x)$ và lấy $P_n'(x)$ làm giá trị gần đúng của f'(x) :

$$f'(x) \approx P_n'(x) \text{ với } x \in [a,b]$$

Vì : $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$, nên sai số của đạo hàm sẽ là :

$$r_n(x) = R_n'(x) = f'(x) - P_n'(x)$$

Đối với đạo hàm cấp cao của hàm số f(x), làm tương tự.

2. Công thức tính gần đúng đạo hàm cấp một

a) Trường hợp hai nút nội suy : x_o và x_1

Giả sử biết $y_o = f(x_o)$, $y_1 = f(x_1)$ với $x_1 = x_o + h$ (h là hằng số > 0). Để tính gần đúng đạo hàm f'(x) tại các nút nội suy x_o và x_1, ta thay hàm số y = f(x) bằng đa thức nội suy Niutơn bậc một xuất phát từ nút x_o :

$$f(x) = P_1(x) + R_1(x) \text{ với } x = x_o + ht$$

$$f(x) = y_o + t\Delta y_o + \frac{h^2}{2}f''(c)t(t-1)$$

Đạo hàm hai vế theo x, ta có :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(y_o + t\Delta y_o + \frac{h^2}{2}f''(c)t(t-1)\right) \\ &= \frac{d}{dt}\left(y_o + t\Delta y_o + \frac{h^2}{2}f''(c)t(t-1)\right)\frac{dt}{dx} \\ &= \frac{1}{h}\left(\Delta y_o + \frac{h^2}{2}f''(c)\frac{d}{dt}(t(t-1)) + \frac{h^2}{2}t(t-1)\frac{d}{dt}(f''(c)\right) \end{aligned}$$

(chú ý rằng nói chung c phụ thuộc x, do đó c cũng phụ thuộc t).

Với giả thiết $\frac{d}{dt}(f''(c))$ bị chặn, $x = x_o$ và $t = 0$, ta có :

$$f'(x_o) = \frac{y_1 - y_o}{h} - \frac{h}{2}f''(c_o) \tag{6.71}$$

nghĩa là : $f'(x_o) \approx \frac{y_1 - y_o}{h}$ với sai số $-\frac{h}{2}f''(c_o)$, $c_o \in [x_o, x_1]$

Nếu $x = x_1$ và $t = 1$, ta có :

$$f'(x_1) = \frac{y_1 - y_o}{h} + \frac{h}{2}f''(c_1) \tag{6.72}$$

nghĩa là : $f'(x_1) \approx \frac{y_1 - y_o}{h}$ với sai số $\frac{h}{2}f''(c_1)$, $c_1 \in [x_o, x_1]$

b) Trường hợp ba nút nội suy : x_o, x_1 và x_2

Giả sử biết $y_i = f(x_i)$; $i = 0, 1, 2$ với $x_1 = x_o + h$, $x_2 = x_o + 2h$ (h là hằng số > 0). Để tính gần đúng đạo hàm $f'(x)$ tại các nút nội suy x_o, x_1 và x_2, ta thay hàm số $y = f(x)$ bằng đa thức nội suy Niutơn bậc hai xuất phát từ nút x_o và làm hoàn toàn tương tự trường hợp a, ta nhận được công thức tính gần đúng đạo hàm sau :

$$f'(x_o) = \frac{1}{2h}(-3y_o + 4y_1 - y_2) + \frac{h^2}{3}f'''(c_o) \tag{6.73}$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}(-y_o + y_2) - \frac{h^2}{6}f'''(c_1) \tag{6.74}$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}(y_o - 4y_1 + 3y_2) + \frac{h^2}{3}f'''(c_2) \tag{6.75}$$

trong đó $c_o, c_1, c_2 \in [x_o, x_2]$.

Ví dụ. Tính gần đúng y'(50) của hàm số y = lgx dựa vào bảng giá trị đã cho sau :

x	50	55	60
y = lgx	1,6990	1,7404	1,7782

Giải : Ở đây h = 5.

Áp công thức (6.73), ta có :

$$y'(50) = \frac{1}{10}(-3.1,6990 + 4.1,7404 - 1,7782) = 0,00864$$

Để đánh giá sai số của giá trị gần đúng nhận được, ta tính :

$$y'(x) = (\lg x)' = \frac{1}{x\ln 10} ;$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln 10} ; \qquad y'''(x) = \frac{2}{x^3 \ln 10}$$

$$\max_{x\in[50,60]} y'''(x) = \frac{2}{50^3 \ln 10}$$

Vậy : $|y'(50) - 0{,}00864| \le \frac{5^2}{3}\cdot\frac{2}{50^3 \ln 10} = 0{,}0000579 \approx 0{,}00006$

6.2. Tính gần đúng tích phân xác định

1. Đặt vấn đề

Trong chương trình toán ở phổ thông ta đã biết rằng nếu hàm số f(x) liên tục trên [a, b] và F(x) là một nguyên hàm của hàm số f(x) trên [a, b] thì ta có công thức Niutơn – Lepnit sau :

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

trong đó : $F'(x) = f(x)$.

Nếu không tìm được nguyên hàm của f(x) ở dạng sơ cấp hoặc nguyên hàm đó quá phức tạp thì dưới đây sẽ trình bày hai công thức tính tích phân xác định là công thức hình thang và công thức Simsơn.

Giống trường hợp tính gần đúng đạo hàm, để tính gần đúng tích phân xác định trên [a, b], ta thay hàm số dưới dấu tích phân f(x) bằng đa thức nội suy $P_n(x)$, và coi rằng :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)dx$$

2. Công thức hình thang và sai số

Để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$ ta thay hàm số dưới dấu tích phân f(x) bằng đa thức nội suy Niutơn bậc một (đi qua hai điểm A(a, f(a)) và B(b, f(b)) xuất phát từ nút trùng với cận dưới a, và có :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$

Để tính tích phân xác định ở vế phải, ta đổi biến số :

$$x = a + (b - a)t$$

Khi đó : $dx = (b - a)dt$, t biến thiên từ 0 đến 1, và :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx = \int_0^1 (y_o + t\Delta y_o)(b-a)dt$$

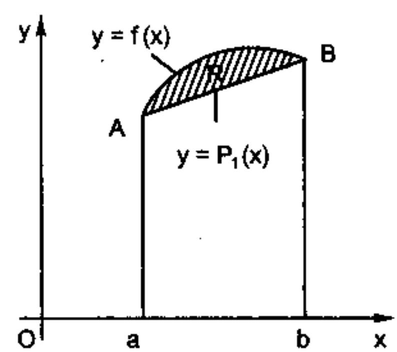
$$= (b-a)\left(y_o t + \Delta y_o \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=1}$$

trong đó : $y_o = f(a)$; $\Delta y_o = y_i - y_o = f(b) - f(a)$

Vậy :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)) \tag{6.76}$$

Về mặt hình học, (6.76) có nghĩa là diện tích hình thang cong aABb (AB là cung đường cong y = f(x) đi qua hai điểm A và B) được thay xấp xỉ bằng diện tích hình thang thẳng a$\overline{AB}$b ($\overline{AB}$ là dây cung $y = P_1(x)$ nối hai điểm A và B). Nói khác đi, đường cong y = f(x) nối hai điểm A và B được thay xấp xỉ bằng đường thẳng $y = P_1(x)$ đi qua hai điểm A và B (hình 6.8).



Hình 6.8

Công thức (6.76) gọi là công thức hình thang. Để xác định sai số :

$$R = \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

ta giả thiết rằng hàm số y = f(x) có đạo hàm cấp hai liên tục trên [a, b]. Xem R là hàm số của h = b − a :

$$R = R(h) = \int_a^{a+h} f(x)dx - \frac{h}{2}[f(a) + f(a+h)]$$

Đạo hàm hai lần theo h đẳng thức trên, ta có :

$$R'(h) = f(a + h) - \frac{1}{2}[f(a) + f(a + h)] - \frac{h}{2}f'(a + h)$$

$$= \frac{1}{2}[f(a + h) - f(a)] - \frac{h}{2}f'(a + h)$$

và :

$$R''(h) = \frac{1}{2}f'(a + h) - \frac{1}{2}f'(a + h) - \frac{h}{2}f''(a + h) = -\frac{h}{2}f''(a + h)$$

Ngoài ra : $R(0) = 0$; $R'(0) = 0$.

Từ đó, áp dụng định lý trung bình thứ hai của tích phân xác định, ta nhận được :

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{1}{2}\int_0^h tf''(a + t)dt$$

$$= -\frac{1}{2}f''(c_1)\int_0^h tdt = -\frac{h^2}{4}f''(c_1);\ c_1 \in (a, a + h)$$

và :

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{4}\int_0^h t^2 f''(c_1)dt$$

$$= -\frac{1}{4}f''(c)\int_0^h t^2 dt = -\frac{h^3}{12}f''(c);\ c \in (a, a + h)$$

Tóm lại, với giả thiết hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $[a, b]$, ta có công thức hình thang sau :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] - \frac{h^3}{12}f''(c) \tag{6.77}$$

với $h = b - a$ và $c \in (a, b)$

3. Công thức hình thang tổng quát và sai số

Để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$, ta chia $[a, b]$ thành n đoạn bằng nhau (n là số nguyên, dương, chẵn hoặc lẻ đều được) :

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$$

có độ dài là : $h = \dfrac{b-a}{n}$ bởi các điểm chia :

$$x_o = a \text{ ; } x_i = a + ih \ (i = \overline{1, n-1}) \text{ ; } x_n = b$$

Ký hiệu : $y_i = f(x_i)$ $(i = \overline{0, n})$, khi đó :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_o}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + ... + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \qquad (6.78)$$

Đối với mỗi tích phân xác định ở vế phải của (6.78), ta tính gần đúng bằng công thức hình thang (6.76), nhận được :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}(y_o + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + ... + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

hay : $$\int_a^b f(x)dx \approx h\left(\frac{y_o + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}\right) \qquad (6.79)$$

Công thức (6.79) được gọi là công thức hình thang tổng quát.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $[a, b]$ thì do (6.77), sai số của công thức hình thang tổng quát là :

$$R = \int_{x_o}^{x_n} f(x)dx - \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}(y_{i-1} + y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{2}(y_{i-1} + y_i)\right) = -\frac{h^3}{12}\sum_{i=1}^{n} f''(c_i) \qquad (6.80)$$

với $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Xét trung bình cộng : $\mu = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f''(c_i)$. Rất rõ μ gồm giữa giá trị nhỏ nhất m_2 và giá trị lớn nhất M_2 của đạo hàm cấp hai $f''(x)$ trên $[a,b]$, nghĩa là :

$$m_2 \le \mu \le M_2$$

Vì theo giả thiết, $f''(x)$ liên tục trên $[a, b]$ nên nó nhận mọi giá trị trung gian giữa m_2 và M_2. Do đó, tìm được điểm $c \in [a,b]$ sao cho $\mu = f''(c)$, hay :

$$\sum_{i=1}^{n} f''(c_i) = n\mu = nf''(c)$$

Thay vào (6.80), nhận được :

$$R = -\frac{nh^3}{12} f''(c) = -\frac{(b-a)h^2}{12} f''(c) \text{ , } c \in [a, b] \qquad (6.81)$$

Tóm lại, với giả thiết hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai liên tục trên $[a, b]$ và chia đoạn lấy tích phân $[a, b]$ thành n đoạn bằng nhau, có độ dài $h = \frac{b-a}{n}$, ta có công thức hình thang tổng quát sau :

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_o + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}\right) - \frac{(b-a)h^2}{12} f''(c)$$

$$c \in [a,b] \qquad (6.82)$$

4. Công thức Simsơn và sai số

Để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$, ta chia $[a,b]$ thành hai đoạn bằng nhau bởi các điểm chia $x_o = a$; $x_1 = a + \frac{b-a}{2} = a + h$, $x_2 = b = a + 2h$ và thay hàm số dưới dấu tích phân $f(x)$ bằng đa thức nội suy Niutơn bậc hai (đi qua ba điểm $A(x_o = a, y_o = f(x_o))$, $C(x_1 = a + h, y_1 = f(x_1))$ và $B(x_2 = a + 2h = b, y_2 = f(x_2))$ có hoành độ cách đều nhau) xuất phát từ nút trùng với cận dưới $a = x_o$, và có :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_o}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_o}^{x_2} P_2(x)dx$$

Để tính tích phân xác định ở vế phải, ta đổi biến số $x = x_o + ht$. Khi đó : $dx = hdt$, t biến thiên từ 0 đến 2 và :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_o}^{x_2} f(x)dx \approx \int_0^2 \left(y_o + t\Delta y_o + \frac{t(t-1)}{2}\Delta^2 y_o\right)hdt$$

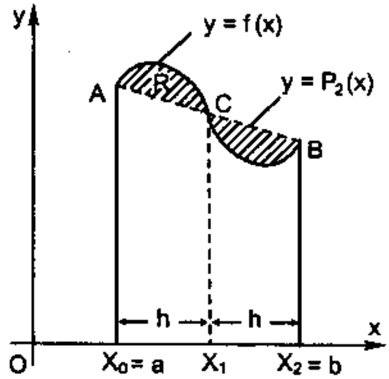
$$= h\left(y_o t + \Delta y_o \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2}\Delta^2 y_o\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right)\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2}$$

trong đó : $\Delta y_o = y_1 - y_o$;

$$\Delta^2 y_o = \Delta y_1 - \Delta y_o = y_2 - y_1 - (y_1 - y_o) = y_2 - 2y_1 + y_o$$

Vậy : $$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_o}^{x_2} f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_o + 4y_1 + y_2) \qquad (6.83)$$

Về mặt hình học, (6.83) có nghĩa là diện tích hình thang cong aACBb (ACB là cung đường cong $y = f(x)$ đi qua ba điểm A, C và B) được thay xấp xỉ bằng diện tích hình thang cong aACBb (ACB là cung parabol $y = P_2(x)$ đi qua ba điểm A, C và B). Nói khác đi, đường cong $y = f(x)$ đi qua ba điểm A, C và B được thay xấp xỉ bằng đường parabol $y = P_2(x)$ đi qua ba điểm A, C và B (hình 6.9).



Hình 6.9

Công thức (6.83) được gọi là công thức Simsơn. Để xác định sai số :

$$R = \int_a^b f(x)dx - \frac{h}{3}(y_o + 4y_1 + y_2)$$

ta giả thiết rằng hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp bốn liên tục trên [a, b]. Cố định điểm giữa x_1 và xem R là hàm số của h ($h \geq 0$) :

$$R = R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} f(x)dx - \frac{h}{3}[f(x_1 - h) + 4f(x_1) + f(x_1 + h)]$$

Đạo hàm ba lần theo h đẳng thức trên, ta có :

$$R'(h) = f(x_1 + h) + f(x_1 - h) - \frac{1}{3}[f(x_1 - h) + 4f(x_1) + f(x_1 + h)] -$$

$$- \frac{h}{3}[-f'(x_1 - h) + f'(x_1 + h)]$$

$$= \frac{2}{3}[f(x_1 - h) + f(x_1 + h)] - \frac{4}{3}f(x_1) - \frac{h}{3}[-f'(x_1 - h) + f'(x_1 + h)]$$

$$R''(h) = \frac{2}{3}[-f'(x_1 - h) + f'(x_1 + h)] - \frac{1}{3}[-f'(x_1 - h) + f'(x_1 + h)] -$$

$$- \frac{h}{3}[-f''(x_1 - h) + f''(x_1 + h)]$$

$$= \frac{1}{3}[-f'(x_1 - h) + f'(x_1 + h)] - \frac{h}{3}[f''(x_1 - h) + f''(x_1 + h)]$$

$$R'''(h) = \frac{1}{3}[f''(x_1 - h) + f''(x_1 + h)] - \frac{1}{3}[f''(x_1 - h) + f''(x_1 + h)] -$$

$$- \frac{h}{3}[-f'''(x_1 - h) + f'''(x_1 + h)]$$

$$= -\frac{h}{3}[f'''(x_1 + h) - f'''(x_1 - h)]$$

Áp dụng công thức số gia hữu hạn (công thức Lagrăng) đối với f'''(x), ta có :

$$R'''(h) = -\frac{2h^2}{3}f^{(4)}(c_3),\ c_3 \in (x_1 - h, x_1 + h)$$

Ngoài ra : $R(0) = 0$; $R'(0) = 0$; $R''(0) = 0$.

Từ đó, áp dụng định lý trung bình thứ hai của tích phân xác định, ta nhận được :

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t)dt = -\frac{2}{3}\int_0^h t^2 f^{(4)}(c_3)dt$$

$$= -\frac{2}{3}f^{(4)}(c_2)\int_0^h t^2dt = -\frac{2}{9}h^3 f^{(4)}(c_2)\ ;\ c_2 \in (x_1 - h, x_1 + h)$$

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)dt = -\frac{2}{9}\int_0^h t^3 f^{(4)}(c_2)dt$$

$$= -\frac{2}{9}f^{(4)}(c_1)\int_0^h t^3dt = -\frac{1}{18}h^4 f^{(4)}(c_1)\ ;\ c_1 \in (x_1 - h, x_1 + h)$$

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{18}\int_0^h t^4 f^{(4)}(c_1)dt$$

$$= \frac{1}{18}f^{(4)}(c)\int_0^h t^4 = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(c)\ ;\ c \in (x_1 - h, x_1 + h)$$

Tóm lại, với giả thiết hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp bốn liên tục trên $[a, b]$ ta có công thức Simsơn sau :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right] - \frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(c) \qquad (6.84)$$

với $h = \frac{b-a}{2}$, $c \in (a, b)$.

Từ (6.84) dễ thấy rằng công thức Simsơn không những hoàn toàn đúng với f(x) là một đa thức bậc hai đối với x, mà còn hoàn toàn đúng cả trong trường hợp f(x) là một đa thức bậc ba đối với x.

5. Công thức Simsơn tổng quát và sai số

Để tính gần đúng $\int_a^b f(x)dx$, ta chia [a, b] thành $n = 2m$ đoạn bằng nhau (nghĩa là n là số nguyên, dương và chẵn) :

$$[x_o, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{2m-2}, x_{2m-1}], [x_{2m-1}, x_{2m}]$$

có độ dài là : $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$ bởi các điểm chia : $x_o = a$; $x_i = a + ih$ $(i = \overline{1, 2m-1})$, $x_n = x_{2m} = b$.

Ký hiệu : $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$, khi đó :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_o}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + ... + \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \qquad (6.85)$$

Đối với mỗi tích phân xác định ở vế phải của (6.85), ta tính gần đúng bằng công thức Simsơn (6.83) và nhận được :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_o + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + ... +$$

$$+ \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_o + y_{2m}) + 4(y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}) +$$

$$+ 2(y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2})]$$

hay :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[(y_o + y_{2m}) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2] \qquad (6.86)$$

trong đó : $\sigma_1 = y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}$; $\sigma_2 = y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}$.

Công thức (6.86) được gọi là công thức Simsơn tổng quát.

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp bốn liên tục trên [a,b] thì do (6.84), sai số của công thức Simsơn tổng quát là :

$$R = \int_{x_o}^{x_{2m}} f(x)dx - \frac{h}{3}\sum_{k=1}^{m}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx - \frac{h}{3}(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k})\right) = -\frac{h^5}{90}\sum_{k=1}^{m} f^{(4)}(c_k) \quad (6.87)$$

với $c_k \in (x_{2k-2}, x_{2k})$.

Lập luận tương tự trường hợp công thức hình thang tổng quát, vì theo giả thiết $f^{(4)}(x)$ liên tục trên [a, b], nên tìm được điểm $c \in [a,b]$ sao cho :

$$f^{(4)}(c) = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f^{(4)}(c_k)$$

Thay vào (6.87), nhận được :

$$R = -\frac{mh^5}{90}f^{(4)}(c) = -\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(c)\,,\ c \in [a, b] \qquad (6.88)$$

Tóm lại, với giả thiết hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp bốn liên tục trên $[a,b]$ và chia đoạn lấy tích phân $[a, b]$ thành $n = 2m$ đoạn bằng nhau, có độ dài $h = \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{2m}$, ta có công thức Simsơn tổng quát sau :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}[y_o + y_{2m}) + 4\sigma_1 + 2\sigma_2] - \frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(c),$$

$$c \in [a,b] \qquad (6.89)$$

trong đó : $\sigma_1 = y_1 + y_3 + ... + y_{2m-1}$; $\sigma_2 = y_2 + y_4 + ... + y_{2m-2}$.

Nhận xét :

1. Từ (6.82) và (6.89) dễ thấy rằng công thức Simsơn tổng quát có độ chính xác cao hơn công thức hình thang tổng quát, nếu bước h chọn như nhau.

2. Tính sai số của công thức Simsơn tổng quát bằng (6.89) đòi hỏi phải biết $f^{(4)}(x)$, nghĩa là phải biết biểu thức giải tích của hàm số $y = f(x)$. Nhưng trong thực hành, thường chỉ biết hàm số $y = f(x)$ dưới dạng bảng, do đó người ta thường xác định gần đúng sai số của công thức Simsơn tổng quát như sau : giả sử trên $[a, b]$, đạo hàm $f^{(4)}(x)$ ít biến đổi, do (6.89), nhận được biểu thức gần đúng của sai số phải tìm là : $R = Mh^4$, trong đó M xem là hằng số. Gọi $I_s(h)$ và $I_s\left(\frac{h}{2}\right)$ là giá trị gần đúng của $I = \int_a^b f(x)dx$ nhận được từ công thức Simsơn tổng quát với bước h và bước $\frac{h}{2}$, ta có :

$$I = I_s(h) + Mh^4$$

$$I = I_s\left(\frac{h}{2}\right) + M\left(\frac{h}{2}\right)^4$$

Từ đó : $I_s\left(\frac{h}{2}\right) - I_s(h) = \frac{15}{16}Mh^4$, và :

$$\left|I - I_s\left(\frac{h}{2}\right)\right| \approx \frac{1}{15}\left|I_s\left(\frac{h}{2}\right) - I_s(h)\right| \qquad (6.90)$$

Lập luận hoàn toàn tương tự, đối với công thức hình thang tổng quát, với giả thiết đạo hàm f"(x) ít biến đổi trên [a, b], ta có công thức thực hành tính sai số :

$$\left|I - I_T\left(\frac{h}{2}\right)\right| \approx \frac{1}{3}\left|I_T\left(\frac{h}{2}\right) - I_T(h)\right| \tag{6.91}$$

trong đó $I_T(h)$ và $I_T\left(\frac{h}{2}\right)$ là giá trị gần đúng của $I = \int_a^b f(x)dx$ nhận được từ công thức hình thang tổng quát với bước h và bước $\frac{h}{2}$.

Ví dụ. Dùng công thức hình thang tổng quát và công thức Simsơn tổng quát với n = 10, tính gần đúng :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$$

Đánh giá sai số của những giá trị gần đúng nhận được.

Giải : Ta có :

$$h = \frac{1-0}{10} = 0{,}1$$

Kết quả tính toán xem trong bảng sau :

i	x_i	y_{2j-1}	y_{2j}
0	0		$\boxed{y_o = 1{,}00000}$
1	0,1	0,90909	
2	0,2		0,83333
3	0,3	0,76923	
4	0,4		0,71429
5	0,5	0,66667	
6	0,6		0,62500
7	0,7	0,58824	
8	0,8		0,55556
9	0,9	0,52632	
10	1,0		$\boxed{y_{10} = 0{,}50000}$
Σ		$\sigma_1 = 3{,}45955$	$\sigma_2 = 2{,}72818$

Theo công thức hình thang tổng quát (6.79), ta có :

$$I \approx 0,1\ (\frac{1,00000 + 0,50000}{2} + 0,90909 + 0,83333 + 0,76923 + 0,71429 +$$

$$+ 0,66667 + 0,62500 + 0,58824 + 0,55556 + 0,52632)$$

$$= 0,69377$$

Sai số R được xác định bởi (6.81). Ta có :

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1 + x)^{-1}$$

$$f'(x) = -(1 + x)^{-2}$$

$$f''(x) = (-1)(-2)(1 + x)^{-3} = \frac{2}{(1+x)^3}$$

Từ đó : $\max\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)| = 2$ và $|R| \le \frac{(b-a)h^2}{12}\max\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)|$,

$$|R| \le \frac{2.(0,1)^2}{12}(1-0) = 0,00167 \approx 0,002$$

Vậy : $I = 0,694 \pm 0,002$

Nếu dùng công thức Simsơn tổng quát (6.86), ta có :

$$I \approx \frac{0,1}{3}(1,00000 + 0,50000 + 4.3,45955 + 2.2,72818) = 0,69315$$

Sai số R được xác định bởi (6.88). Vì :

$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)(1 + x)^{-4}$$

$$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)(1 + x)^{-5} = \frac{24}{(1+x)^5}$$

nên : $\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f^{(4)}(x)\right| = 24$ và $|R| \le \frac{(b-a)h^4}{180}\max\limits_{x\in[0,1]}\left|f^{(4)}(x)\right|$

$$|R| \le \frac{24.(0,1)^4}{180}(1-0) = 1,3.10^{-5} \approx 0,00002$$

Vậy : $I = 0,69315 \pm 0,00002$.

BÀI TẬP

A – Bài tập có lời giải

Bài 1.

Dùng phương pháp tiếp tuyến tìm nghiệm của phương trình

$$f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$$

biết khoảng cách ly nghiệm là (1,1 ; 1,4)

Giải :

$$f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x - 0{,}2$$

$$f''(x) = 6x - 0{,}4 > 0,\ \forall x \in (1{,}1\ ;\ 1{,}4).$$

vì f(1,4) = 0,872 cùng dấu với f"(x) > 0 nên ta chọn $x_o = 1{,}4$; ta có f'(1,4) = 5,12.

$$x_1 = x_o - \frac{f(x_o)}{f'(x_o)} = 1{,}22969$$

$$f(x_1) = 0{,}11109,\quad f'(x_1) = 3{,}84454$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1{,}20079$$

Bài 2.

Dùng phương pháp dây cung tìm nghiệm gần đúng của phương trình $f(x) = x^3 - 0{,}2x^2 - 0{,}2x - 1{,}2 = 0$. Biết khoảng cách ly nghiệm là [1,1 ; 1,4)

Giải :

Ta có :

$$f(1{,}1) = -0{,}331 < 0 \text{ và } f(1{,}4) = 0{,}872$$

Ngoài ra : $f'(x) = 3x^2 - 0{,}4x - 0{,}2$

$$f''(x) = 6x - 0{,}4$$

$$f'(x) > 0 \text{ và } f''(x) > 0 \text{ với mọi } x \in (1{,}1\ ;\ 1{,}4)$$

cho d = 1,4 $\quad x_o = 1{,}1$

$$x_1 = 1{,}1 - \frac{f(1{,}1)(1{,}4 - 1{,}1)}{f(1{,}4) - f(1{,}1)} = 1{,}1 - \frac{(-0{,}331)(0{,}3)}{0{,}872 - (-0{,}331)} = 1{,}18254$$

$$f(x_1) = -0{,}06252$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(d - x_1)}{f(d) - f(x_1)}$$

$$= 1{,}18254 - \frac{(-0{,}06252)(1{,}4 - 1{,}18254)}{0{,}872 - (-0{,}06252)} = 1{,}19709$$

$$f(x_2) = -0{,}01056$$

Bài 3.

Giải hệ phương trình sau bằng phương pháp Gausse.

$$\langle I\rangle \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 & (1) \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 & (2) \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 5 & (3) \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 1 & (4) \end{cases}$$

Giải :

Nhân phương trình (1) với – 2 rồi cộng vào phương trình (2).

Cộng phương trình (1) vào phương trình (3).

Nhân phương trình (1) với – 3 rồi cộng vào phương trình (4) ta có hệ mới :

$$\langle II\rangle \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 & (1) \\ 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 7 & (2) \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 & (3) \\ 7x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -2 & (4) \end{cases}$$

Trong hệ mới, ta đổi phương trình (2) và (3) cho nhau

$$\langle III\rangle \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 & (1) \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 & (2) \\ 5x_2 - x_3 + 3x_4 = 7 & (3) \\ 7x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -2 & (4) \end{cases}$$

Trong hệ <III>, ta nhân phương trình (2) với – 5 rồi cộng vào phương trình (3) và nhân phương trình (2) với – 7 cộng vào (4), ta có :

$$\langle IV\rangle \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 & (1) \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 & (2) \\ -16x_3 + 8x_4 = -8 & (3) \\ -26x_3 + 11x_4 = -15 & (4) \end{cases}$$

Trong hệ (IV) chia phương trình (3) cho – 16, ta có :

$$\langle V\rangle \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 & (1) \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 & (2) \\ x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} & (3) \\ -26x_3 - 11x_4 = -15 & (4) \end{cases}$$

Trong hệ (V) nhân phương trình (3) với 26 cộng vào phương trình (4), ta có :

$$\langle VI\rangle \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = -2 & (1) \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 3 & (2) \\ x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{1}{2} & (3) \\ -2x_4 = -2 & (4) \end{cases}$$

Từ phương trình (4) ta có $x_4 = 1$. Thay vào (3) ta được $x_3 = 1$ thay tiếp vào (2) ta có $x_2 = 1$, cuối cùng thay vào (1) ta được $x_1 = 1$. Vậy nghiệm của hệ đã cho là :

$$x_1 = 1 \ ; \ x_2 = 1 \ ; \ x_3 = 1 \ ; \ x_4 = 1$$

Trình bày tóm tắt trong bảng sau :

x_1	x_2	x_3	x_4	:	β	
1	−2	1	−2	:	−2	$\Rightarrow x_1 = -2 + 2x_4 - x_3 + 2x_2 = 1$
2	1	1	−1	:	3	
−1	3	2	1	:	5	
3	1	−2	−1	:	1	
0	5	−1	3	:	7	
0	1	3	−1	:	3	
0	7	−5	5	:	7	
	1	3	−1	:	3	$\Rightarrow x_2 = 3 - 3x_3 + x_4 = 1$
	0	−16	8	:	−8	
	0	−26	11	:	−15	
	0	1	$-\frac{1}{2}$	:	$\frac{1}{2}$	$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x_4 = 1$
	0	0	−2	:	−2	$\Rightarrow -2x_4 = -2 \Rightarrow x_4 = 1$

Bài 4.

Số liệu thống kê về tổng sản phẩm nông nghiệp y_i và tổng giá trị tài sản cố định x_i của 10 nông trại (tính trên 100 ha) như sau :

x_i	11,3	12,9	13,6	16,8	18,8	22,0	22,2	23,7	26,2	27,5
y_i	13,2	15,6	17,2	18,8	20,2	23,9	22,4	23,0	24,4	24,6

Xác định đường hồi quy tuyến tính mẫu của y theo x ; sau đó tìm phương sai sai số thực nghiệm vào khoảng tin cậy 95% cho hệ số góc đường hồi quy trên.

Giải : Bảng tính toán như sau (n = 10)

x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	$\hat{y}_i = \hat{a}x_i + \hat{b}$	$y_i - \hat{y}_i$	$(y_i - \hat{y})^2$
11,3	13,2	149,16	127,69	14,751	−1,551	2,4056
12,9	15,6	201,24	166,41	15,823	−0,223	0,0497
13,6	17,2	233,93	184,96	16,292	0,908	0,8245
16,8	18,8	315,84	282,24	18,436	0,364	0,1325
18,8	20,2	379,76	353,44	19,776	0,424	0,1798
22,0	23,9	525,80	484,00	21,920	1,980	3,9204
22,2	22,4	497,28	492,84	22,054	0,346	0,1197
23,7	23,0	545,10	561,69	23,059	−0,059	0,0035
26,6	24,4	649,04	707,56	25,002	−0,602	0,3624
27,5	24,6	676,50	756,25	25,605	−1,005	1,0100
195,4	203,3	4173,64	4117,08			9,0081

Trong bảng trên từ cột 1 và 2 ta có :

$$\overline{X} = \frac{1}{10}\sum x_i = 19,54 \ ; \ \overline{Y} = \frac{1}{10}\sum y_i = 20,33 \ ;$$

từ cột 3 và 4 ta có

$$\hat{a} = \frac{n\sum x_iy_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{10.4173,64 - 195,4.203,3}{10.4117,08 - 195,4^2} = 0,6728$$

$$\hat{b} = \overline{Y} - \hat{a}\overline{X} = 20,33 - 0,6728.19,54 = 7,1835$$

Đường hồi quy tuyến tính thực nghiệm là :

$$y = 0,6728x + 7,1835$$

Dùng $\hat{a} \approx 0,67; \hat{b} \approx 7,18$ để tính các cột 5,6 và 7 trong bảng tính, ta có :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{8}\Sigma(y_i - \hat{y}_i)^2 = \frac{9,0081}{8} \approx 1,126$$

Để xác định khoảng tin cậy 95% cho hệ số a, ta cần tính :

$$\hat{\sigma} = 1,0611; \qquad \sqrt{\Sigma(x_i - \overline{X})^2} = 54,6776$$

Từ đó khoảng tin cậy cần tìm (với $t_{0,975}(8) = 2,306$) :

$$\left(\hat{a} - 2,306 \times \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\Sigma(x_1 - \bar{X})^2}} ; \hat{a} + 2,306 \times \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{(x_1 - \bar{X})^2}}\right) = (0,6280 ; 0,7176)$$

Bài 5.

Tính tích phân xác định : $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$

1. Bằng công thức hình thang.
2. Bằng công thức Simsơn.

Giải :

1. Bằng công thức hình thang

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} \qquad a = 0 ; b = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

n = 10 : chia [0,1] thành 10 phần ; h = 0,1.

$x_i = a + ih = 0 + 0,1i$

$\rightarrow x_i = 0,1i$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y = f(x_i) = \frac{1}{1 + x_i^2}$	1	0,9900990	0,9615385	0,9174312	0,8620690	0,8	0,7352941	0,6711409	0,6097861	0,552462	0,5

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = I_T = h.\left[\frac{y_o + y_{10}}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_9\right]$$

$$= 0,7849815$$

➤ *Chú ý :* $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = 0,78539816.$

2. Bằng công thức Simsơn

$$I = 2h\left[\frac{A}{3}(x_1 + h)^2 + (x_1 + h)(x_1 - h) + (x_1 - h)^2 + \frac{B}{2}2x_1 + C\right]$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} \qquad n = 10 = 2.5 \rightarrow p = 5$$

$$I \approx \frac{h}{3}[y_o + y_{10} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)]$$

$$= 0{,}78539815.$$

B - Bài tập tự giải

1. Dùng phương pháp tiếp tuyến, tính nghiệm thực của các phương trình sau :

   a) $x^3 - 2x - 5 = 0$; b) $2^x = 4x$.

   Đáp số : a) 2,09 ; b) 0,31 và 4

2. Chứng minh rằng phương trình $x^5 + 5x + 1 = 0$ có một nghiệm thực đơn duy nhất trong khoảng $[-1, 0]$ và tính nghiệm này chính xác đến 0,01 bằng phương pháp hỗn hợp.

   Đáp số : $-0{,}20 < x \leq -0{,}19$

3. Tìm nghiệm gần đúng của phương trình $x^2 \operatorname{arctg} x = 1$ với độ chính xác đến 0,001 bằng phương pháp hỗn hợp.

   Đáp số : Phương trình có 1 nghiệm thực duy nhất
   $1{,}096 < x < 1{,}097$

4. Bằng phương pháp dây cung tìm nghiệm dương của phương trình :

   $x^4 - 2x - 4 = 0$ (tính 3 bước và lấy đến 3 số lẻ sau dấu phẩy).

   Đáp số : $x_3 \approx 1{,}642$

5. Bằng phương pháp tiếp tuyến giải phương trình :

   $x^4 - 2x - 4 = 0$ (tính 3 bước và lấy với 3 số lẻ).

   Đáp số : $x_3 \approx 1{,}642$

6. Phối hợp 2 phương pháp tìm nghiệm gần đúng của phương trình :

   $x^3 + x^2 - 11 = 0$ trong khoảng $(1, 2)$ với độ chính xác là 0,001.

   Đáp số : $x \approx \dfrac{\overline{x}_2 + x_2}{2} = 1{,}936$

7. Dùng phương pháp Gaoxơ giải hệ phương trình

$$\text{a) } \begin{cases} 1{,}5x_1 - 0{,}2x_2 + 0{,}1x_3 = 0{,}4 \\ -0{,}1x_1 + 1{,}5x_2 - 0{,}1x_3 = 0{,}8 \\ -0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 - 0{,}5x_3 = 0{,}2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 8{,}3x_1 + 2{,}62x_2 + 4{,}1x_3 + 1{,}9x_4 = -10{,}65 \\ 3{,}92x_1 + 8{,}45x_2 + 7{,}78x_3 + 2{,}46x_4 = 12{,}21 \\ 3{,}77x_1 + 7{,}21x_2 + 8{,}04x_3 + 2{,}28x_4 = 15{,}45 \\ 2{,}21x_1 + 3{,}65x_2 + 1{,}69x_3 + 6{,}99x_4 = -8{,}35 \end{cases}$$

8. Cho bảng các giá trị

x	2	4	6	8	10	12
y	7,32	8,24	9,20	10,19	11,01	12,05

Dùng phương pháp bình phương cực tiểu, hãy tìm công thức thực nghiệm có dạng y = a + bx.

9. Cho bảng các giá trị

x	0,78	1,56	2,34	3,12	3,81
y	2,5	1,2	1,12	2,25	4,28

Hãy tìm công thức nghiệm có dạng $y = a + bx + cx^2$

10. Tìm mô hình biểu diễn sự phụ thuộc giữa y và hai biến x_1, x_2 trên cơ sở bảng quan sát sau : (giả sử mô hình có dạng tuyến tính)

N⁰	x_1	x_2	x_3
1	1,8	12	4,5
2	1,6	11	4,9
3	1,5	11	5,1
4	1,5	11	4,8
5	1,8	10	4,8
6	1,5	10	4,4
7	1,7	8,3	4,9
8	2,0	9	4,4
9	2,0	8,6	3,9

11. Tính gần đúng tích phân xác định bằng công thức hình thang

$I = \int_{0,1}^{1,1} \frac{dx}{(1+4x)^2}$ chia đoạn [0,1 ; 1,1] thành 10 đoạn bằng nhau.

12. Tính gần đúng tích phân xác định bằng công thức Simsơn

$$I = \int_{2}^{3,5} \frac{1+x}{1-x} dx$$

chia đoạn [2 ; 3,5] thành 12 đoạn bằng nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. J. A. Anderson *Discrete Mathematis*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458.
2. Trần Bình *Giải tích 1* NXB Khoa học kỹ thuật, Hà Nội 1998.
3. Bùi Công Cường, Bùi Minh Trí *Giáo trình Xác suất và Thống kê ứng dụng* NXB Giao thông vận tải, Hà Nội 1997.
4. David C. Lay *Linear algebra and its application* Addision - Wesley Publishing company.
5. Trần Tuấn Điệp, Lý Hoàng Tú *Giáo trình Lý thuyết xác suất và thống kê toán học* NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, Hà Nội 1979.
6. Tạ Văn Đĩnh, Trần Xuân Hiển, Lê Trọng Vinh, Dương Thuỷ Vỹ *Toán cao cấp* (dùng cho các trường Cao đẳng kỹ thuật công nghiệp) ĐHBK, Hà Nội 1994.
7. Đỗ Đức Giáo *Toán học rời rạc* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội 2000.
8. Kenneth H. Rosen *Toán học rời rạc ứng dụng trong Tin học* NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội 1998.
9. Nguyễn Đức Nghĩa, Nguyễn Tô Thành *Toán học rời rạc* NXB Đại học Quốc gia, Hà Nội 2001.
10. Nguyễn Đình Trí và các tác giả khác *Toán học cao cấp* tập I, II, III. NXB Giáo dục, Hà Nội 2001.
11. Bùi Minh Trí, Bùi Tuấn Khang *Đại số* NXB Thống kê, Hà Nội 2001.
12. Bùi Minh Trí, Nguyễn Định Thành *Giải tích toán học* NXB Thống kê, Hà Nội 2001.
13. Bùi Minh Trí *Tối ưu hoá tổ hợp* NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội 2003.
14. Dương Thuỷ Vỹ *Giáo trinh Phương pháp tính* NXB Khoa học và kỹ thuật, Hà Nội 1999
15. Volkov E. A. Numerical methods. Mir Publishers, Moskow 1986.

MỤC LỤC

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI

Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập VŨ DƯƠNG THỤY

Biên tập nội dung :

TRẦN NGỌC KHÁNH – NGÔ THANH BÌNH

Trình bày bìa :

TÀO THANH HUYỀN

Sửa bản in :

NGUYỄN THU HẰNG

Chế bản :

MINH CHÂU

GIÁO TRÌNH TOÁN ỨNG DỤNG TRONG TIN HỌC

Mã số : 6H154M4

In 3.000 cuốn, khổ 16 x 24 cm, tại Nhà in Đại học Quốc gia Hà Nội

Số XB: 65/110-04 CXB.

In xong và nộp lưu chiểu tháng 8 năm 2011

TÌM ĐỌC GIÁO TRÌNH DÙNG CHO CÁC TRƯỜNG ĐÀO TẠO HỆ TRUNG HỌC CHUYÊN NGHIỆP - DẠY NGHỀ CỦA NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

(NGÀNH ĐIỆN TỬ - TIN HỌC)

1.	**Linh kiện điện tử và ứng dụng**	*TS. Nguyễn Viết Nguyên*
2.	**Điện tử dân dụng**	*ThS. Nguyễn Thanh Trà*
3.	**Điện tử công suất**	*Trần Trọng Minh*
4.	**Mạch điện tử**	*TS. Đặng Văn Chuyết*
5.	**Kĩ thuật số**	*TS. Nguyễn Viết Nguyên*
7.	**Kĩ thuật điều khiển**	*.Vũ Quang Hồi*
8.	**Kỹ thuật xung - số**	*TS. Lương Ngọc Hải*
9.	**Điện tử công nghiệp**	*Vũ Quang Hồi*
10.	**Toán ứng dụng trong tin học**	*PGS. TS. Bùi Minh Trí*
11.	**Nhập môn tin học**	*Tô Văn Nam*
12.	**Cấu trúc máy vi tính và vi xử lý**	*Lê Hải Sâm - Phạm Thanh Liêm*
13.	**Hệ các chương trình ứng dụng (Window, Word, Excel)**	*GVC. Trần Viết Thường - Tô Văn Nam*
14.	**Cơ sở dữ liệu**	*Tô Văn Nam*
15.	**Lập trình C**	*GVC Tiêu Kim Cương*
16.	**Cấu trúc dữ liệu và giải thuật**	*PGS.TS. Đỗ Xuân Lôi*
17.	**Cài đặt và điều hành mạng**	*TS. Nguyễn Vũ Sơn*
18.	**Phân tích thiết kế hệ thống**	*GVC. Tô Văn Nam*
19.	**ACCESS và ứng dụng**	*TS. Huỳnh Quyết Thắng*
20.	**Sử dụng Corel Draw**	*Nguyễn Phú Quảng*
21.	**Bảo trì và quản lí phòng máy tính**	*Phạm Thanh Liêm*
22.	**Kinh tế và quản trị doanh nghiệp (kinh tế và TCQLSX)**	*TS. Ngô Xuân Bình - TS. Hoàng Văn Hải*

Bạn đọc có thể tìm mua tại các Công ti Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các Cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục:

Tại Hà Nội : ***25 Hàn Thuyên, 81 Trần Hưng Đạo, 187 Giảng Võ, 23 Tràng Tiền.***
Tại Đà Nẵng : ***15 Nguyễn Chí Thanh.***
Tại Thành phố Hồ Chí Minh : ***104 Mai Thị Lựu, Quận 1.***

8 934980 420027

Giá : 23. 500 đ