GIẢI TÍCH I
BÀI 15
§3.3. CỰC TRỊ CỦA HÀM NHIỀU BIẾN SỐ (TT)

III. Cực trị có điều kiện
Đặt vấn đề

• Ta thường gặp bài toán tìm cực trị của biểu thức với điều kiện ràng buộc nào đó đối với các biến

• Tuy nhiên việc thay các điều kiện ràng buộc vào hàm ban đầu để đưa về bài toán đã biết không phải luôn thuận lợi. Ta cần khắc phục như thế nào?

• Phương pháp nhân tử Lagrange đã khắc phục được khó khăn trên, đây là công cụ quan trọng trong kinh tế, hình học vi phân và lý thuyết cơ học nâng cao.

1. Cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện $g(x, y) = 0$

Tìm giá trị cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ với ràng buộc $g(x, y) = 0$.

Đặt $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$

Ta có $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$, ở đó biến λ được gọi là biến Lagrange.

Như vậy bài toán tìm cực trị $z = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $g(x,y)=0$ được chuyển về bài toán cực trị của hàm $L(x, y, \lambda)$. Đây là phương pháp nhân tử Lagrange.

Phương pháp nhân tử Lagrange rất quan trọng trong lý thuyết, ngoài ra trong thực hành có ưu điểm sau:

• Không phải băn khoăn về tính đối xứng trong bài toán vì có thể lựa chọn một biến độc lập bất kì.

• Việc đưa thêm vào λ như một biến khác sẽ khử đi một ràng buộc

• Dễ dàng mở rộng cho trường hợp nhiều biến hơn và nhiều ràng buộc hơn

Ví dụ 1. Tìm cực trị có điều kiện

a) $z = x^2 + y^2,\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ **b)** $z = x + 2y,\ x^2 + y^2 = 5$

c) $z = xy,\ x + y = 1$ **d)** $z = xy,\ x^2 + y^2 = 2x$

e) $z = x^m + y^m\ (m > 1),\quad x + y = 2,\ (x, y > 0)$

f) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y},\quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$

2) Cực trị của hàm số $u = f(x, y, z)$ với điều kiện $g(x, y, z) = 0$

Tìm cực trị của hàm $w = f(x, y, z)$, với điều kiện $g(x, y, z) = 0$.

Đặt $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$

Có $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$

Như vậy bài toán tìm cực trị của hàm $w = f(x, y, z)$ với điều kiện $g(x, y, z) = 0$ được chuyển về bài toán tìm cực trị của hàm: $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$.

Ví dụ 2. Tìm cực trị có điều kiện

a) $u = xy^2z^3,\ \ x + y + z = a,\ \ (x > 0, y > 0, z > 0, a > 0)$

b) $u = x^2 + y^2 + z^2,\ \ \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{2} + z^2 = 1$

c) $u = \sin x \sin y \sin z,\ \ x + y + z = \dfrac{\pi}{2}\ \ (x > 0, y > 0, z > 0)$

d) $u = xyz,\ \ xy + yz + zx = 8,\ \ (x, y, z > 0)$

e) $u = x + y + z,\ \ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$

f) $u = x - 2y + 2z,\ \ x^2 + y^2 + z^2 = 9$

g) $u = \dfrac{x^n + y^n + z^n}{3},\ \ x + y + z = s\ \ (x > 0, y > 0, z > 0, s > 0), n > 1$

3) Cực trị của hàm $u = f(x, y, z)$ với các điều kiện $g(x, y, z) = 0$, $h(x, y, z) = 0$

Tương tự đặt $L = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$ có

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0, \frac{\partial L}{\partial z} = 0, \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0, \frac{\partial L}{\partial \mu} = 0$$

Bài toán tìm cực trị với hai điều kiện ràng buộc nói trên chuyển về bài toán tìm cực trị của hàm $L(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z)$

Ví dụ 3. Tìm cực trị với điều kiện

a) $u = xy + xz,\ \ x^2 + y^2 = 2,\ \ x + z = 2\ \ (x > 0, y > 0, z > 0)$

b) $u = xyz,\ \ x + y + z = 5,\ \ xy + yz + zx = 8$

Chú ý: Trong kinh tế, phương pháp nhân tử Lagrange được sử dụng để giải quyết bài toán tối đa hoá tổng sản lượng của một công ty, phụ thuộc vào ràng buộc của tài nguyên sẵn có cố định, chẳng hạn: $P = f(x, y) = Ax^{\alpha}y^{\beta}$, với điều kiện $\alpha + \beta = 1$, ở đó P là sản lượng (tính bằng đô la) biểu diễn qua x đơn vị của vốn và y đơn vị của lao động.

IV. Giá trị lớn nhất, bé nhất

Cách tìm.

1° Tìm các điểm dừng (trong miền mở và trên biên)

2° So sánh giá trị của hàm số tại các điểm dừng

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất, bé nhất

a) $z = x^2y, x^2 + y^2 \le 1$

b) $z = x^2 + y^2 - 2x - y, x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 2$

c) $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y), 0 \le x, y \le \pi/2$

d) $u = x + y + z, x^2 + y^2 \le z \le 1$

e) Tìm hình hộp chữ nhật có thể tích lớn nhất nội tiếp trong ellipsoide

f) Tìm điểm trên mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ mà tổng bình phương các khoảng cách từ điểm đó đến ba điểm $M_1(1\ ;\ 2\ ;\ 0)$, $M_2(2\ ;\ 0\ ;\ 1)$, $M_3(0\ ;\ 1\ ;\ 2)$ là bé nhất

g) Tìm ellipsoide $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ đi qua (1 ; 2 ; 3) và có thể tích bé nhất

$(a=\frac{b}{2}=\frac{c}{3})$

h) Tìm các điểm trên ellip $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ gần nhất, xa nhất tới đường thẳng $3x-y-9=0$

i)(K52) **1.** $z=xy(3-x-y)$, $0\le x\le 2$, $0\le y\le 2$ (max z = 1, min z = – 4)

2. $z=x^2+y^2+x+y$, $x+y+2=0$, $x=0$, $y=0$ (max z = 2, min z = $-\frac{1}{2}$)

k)(K54)

1. $z=x^2-9y^2$, trong miền đóng $\frac{x^2}{9}+y^2\le 1$ (max z = 9, min z = –9)

2. $z=4x^2-y^2$, trong miền đóng $x^2+\frac{y^2}{4}\le 1$ (max z = 4, min z = –4)

l) Tìm các bán trục của Ellipse: $5x^2+8xy+5y^2=9$

m)(K57)

1) $z=\cos x+\cos y-\cos(x+y)$, $0\le x,y\le\frac{\pi}{2}$ $(\mathrm{Max}\,z=\frac{3}{2},\ \mathrm{Min}\,z=1)$

2) $z=\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{y}{2}+\sin\frac{x+y}{2}$, $0\le x,y\le\pi$ $(\mathrm{Max}\,z=\frac{3\sqrt{3}}{2},\ \mathrm{Min}\,z=1)$

n)(K58)

1) Tìm điểm thuộc $y^2=2x$ sao cho nó gần điểm A(1,4) nhất. (M(2,2))

2) Tìm điểm thuộc ellipse $4x^2+y^2=4$ sao cho nó xa điểm A(1,0) nhất.

$(M(-\frac{1}{8},\frac{3}{8}\sqrt{63}),N(-\frac{1}{8},-\frac{3}{8}\sqrt{63}))$.

o)(K61)

Tìm GTLN, GTBN của $z=x^2+y^2+xy-7x-8y$ trong miền ΔOAB, O(0;0), A(6,0), B(0;6). $(Maxz(0;0)=0; Minz(2;3)=-19)$

Thank you and Good bye!