



xPhO Physics Club



# DAO ĐỘNG

Người trình bày: Mino



## 1. Giới thiệu chung

## 2. Dao động một chất điểm

### 2.1 Dao động điều hoà

### 2.2 Dao động điều hoà có cản

Dao động có cản khô

Dao động có cản nhớt

### 2.3 Dao động cưỡng bức

### 2.4 Giải đồ Fresnel

## 3. Dao động liên kết

### 3.1 Hai khối lượng - ba lò xo

### 3.2 Ma trận ánh xạ định luật II Newton

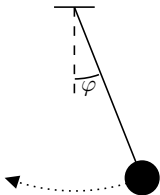
### 3.3 Toạ độ trực giao

### 3.4 Ý tưởng chính

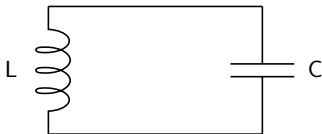
## 4. Mở rộng

# Giới thiệu chung

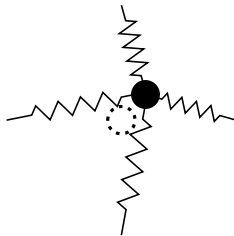
Dao động là một quy luật lặp lại ở một mức độ nào đó. Chuyển động con lắc, chuyển động lò xo,... cũng là một loại dao động. Ta phân biệt dao động dựa trên bản chất vật lý của quá trình lặp lại đó: dao động cơ, dao động điện, dao động nhiệt,...



(a) Dao động cơ



(b) Dao động điện



(c) Dao động nhiệt

## 1. Giới thiệu chung

## 2. Dao động một chất điểm

### 2.1 Dao động điều hoà

### 2.2 Dao động điều hoà có cản

Dao động có cản khô

Dao động có cản nhớt

### 2.3 Dao động cưỡng bức

## 2.4 Giải đề Fresnel

## 3. Dao động liên kết

### 3.1 Hai khối lượng - ba lò xo

### 3.2 Ma trận ánh xạ định luật II Newton

### 3.3 Toạ độ trực giao

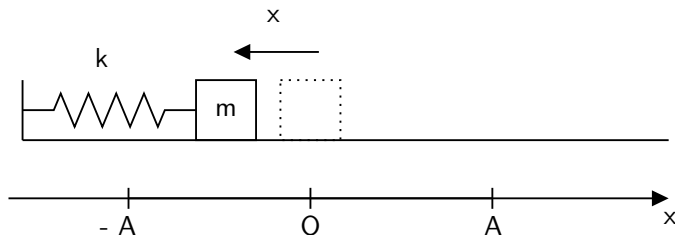
### 3.4 Ý tưởng chính

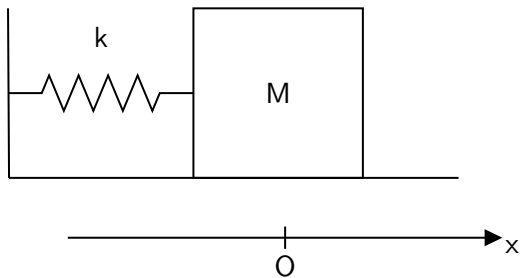
## 4. Mở rộng

# Phương trình dao động điều hoà

Phương trình dao động điều hoà

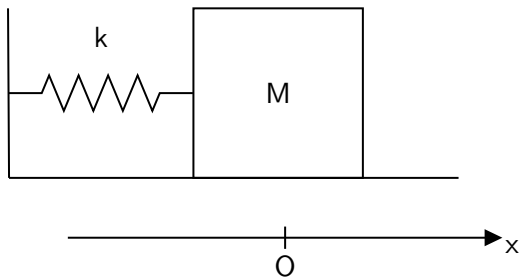
$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (1)$$





Tổng lực tác động lên vật (lúc này chỉ gồm lực lò xo)

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}.$$



Tổng lực tác động lên vật (lúc này chỉ gồm lực lò xo)

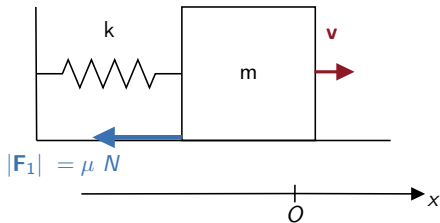
$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}.$$

Bản chất là đi giải phương trình vi phân:

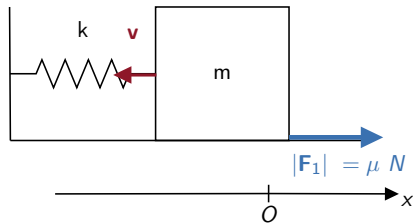
$$mx'' = -kx.$$

(2)

# Hệ ĐĐ có cản khô



(A)



(B)

Lúc này hệ chịu thêm một lực ma sát khô. Tổng lực tác động lên vật



Lúc này ta giải cùng lúc hai phương trình vi phân

$$\begin{cases} mx'' = -kx + \mu N \\ mx'' = -kx - \mu N \end{cases} \quad (3)$$

Đặt  $a = x - \mu N/k$  và  $b = x + \mu N/k$  ta có.

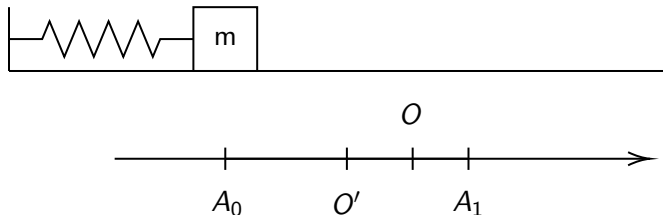
$$\begin{cases} a'' + \omega^2 a = 0 \\ b'' + \omega^2 b = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Ta có hai nghiệm:

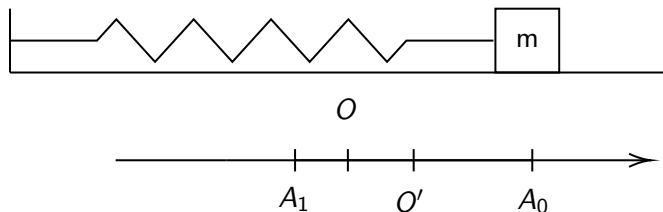
$$\begin{cases} a = x - \frac{\mu N}{k} = A \cos(\omega t + \varphi_a) \\ b = x + \frac{\mu N}{k} = B \cos(\omega t + \varphi_b) \end{cases} \quad (5)$$

Nghiệm *a* ứng với trường hợp vật đang đi cùng chiều dương. Nghiệm *b* ứng với trường hợp vật đang đi ngược chiều dương.

Trường hợp vật đi giống nghiệm *a*

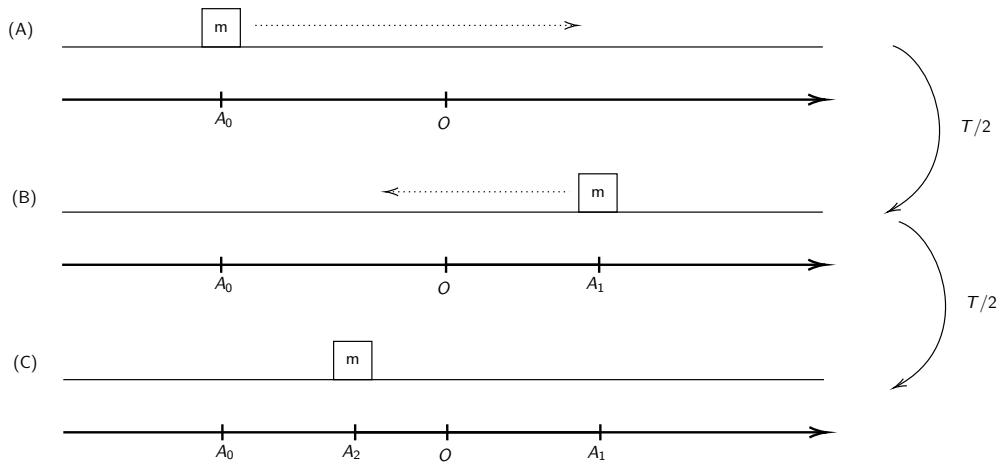


Trường hợp vật đi giống nghiệm  $b$



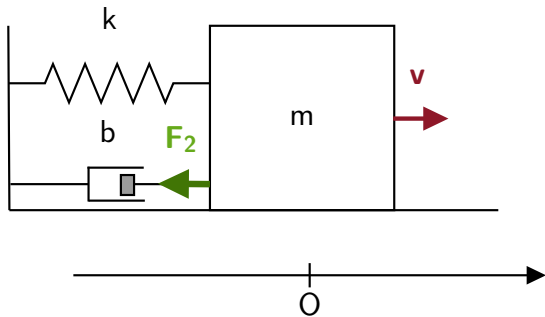
Trong một chu kỳ, vật tham gia lần lượt cả hai quy luật chuyển động. Lấy ví dụ sau.

# Hệ ĐĐ có cản khô - Biên độ



Công thức liên hệ giữa hai biên độ liên tiếp là

$$A_{k+1} = A_k - 2\mu mg/k \quad (6)$$



Lúc này hệ sẽ chịu thêm một lực ma sát nhớt  $\mathbf{F}_2$ . Tổng lực tác động lên vật

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} - b\mathbf{x}'.$$
(7)

Lúc này ta sẽ đi giải phương trình vi phân

$$mx'' = -kx - bx'. \quad (8)$$

Ta đặt  $\omega^2 = k/m$ ,  $2\gamma = b/m$ , ta có phương trình

$$x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = 0.$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0. \quad (9)$$

$\Delta$  của phương trình đặc trưng

$$\Delta = 4(\gamma^2 - \omega^2) \quad (10)$$

## Trường hợp 1: $\Delta < 0$

Ta giải  $\lambda$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}.$$

Nghiệm tổng quát

$$\begin{aligned} x &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ &= e^{-\gamma t} \left( Ae^{i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} + Be^{-i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Để  $x$  là một số thuần thực thì

$$\begin{cases} A + B = C \cos \phi \\ A - B = iC \sin \phi \end{cases}$$



## Trường hợp 1: $\Delta < 0$

Ta đặt

$$x = Ce^{-\gamma t} \cos \left( \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \phi \right). \quad (12)$$



## Trường hợp 2: $\Delta > 0$

Ta giải  $\lambda$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}.$$

Nghiệm tổng quát:

$$\begin{aligned} x &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ &= e^{-\gamma t} \left( Ae^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

## Trường hợp 2: $\Delta > 0$



## Trường hợp 3: $\Delta = 0$

Ta giải  $\lambda$

$$\lambda = -\gamma.$$

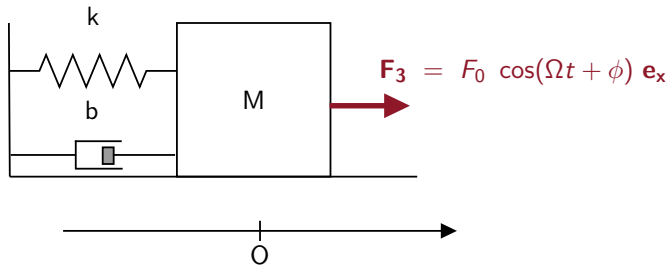
Nghiệm tổng quát

$$x = e^{-\gamma t} (A + Bt). \quad (14)$$

Với  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ . Xét phương trình đặc trưng

$$\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0.$$

Trường hợp	Nghiệm
$\Delta < 0$ $\lambda = a + ib$	$x = Ce^{-at} \cos(bt + \varphi)$
$\Delta > 0$ $\lambda = \lambda_{1,2}$	$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$ $\lambda = a$	$x = e^{at}(A + Bt)$



Lúc này hệ sẽ chịu thêm một lực cưỡng bức  $\mathbf{F}_3$ . Tổng lực tác động lên vật

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} - b\mathbf{x}' + F_0 \cos(\Omega t + \phi)\mathbf{e}_x. \quad (15)$$

Lúc này ta sẽ đi giải phương trình vi phân

$$mx'' = -kx - bx' + F_0 \cos(\Omega t + \phi) \quad (16)$$

Cụ thể, ta sẽ đi giải lần lượt nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng.

$$x = x_0 + x_r.$$

Để giải nghiệm thuần nhất, ta đi giải phương trình vi phân sau

$$x''_{tn} + \frac{b}{m}x'_{tn} + \frac{k}{m}x_{tn} = 0.$$

Ta đặt

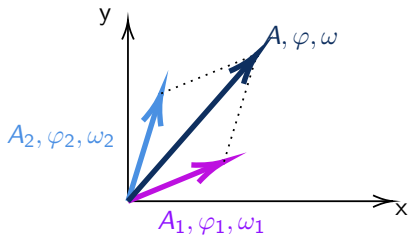
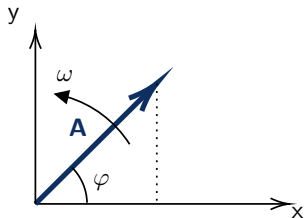
$$x_r = A \cos(\Omega t + \phi) + B \sin(\Omega t + \phi)$$

Thế vào phương trình vi phân, ta đồng nhất  $\sin()$  và  $\cos()$  hai vế, ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_0}{m} \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} \\ B &= \frac{F_0}{m} \frac{c\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (c\Omega)^2} \end{aligned} \tag{17}$$



# Giản đồ Fresnel

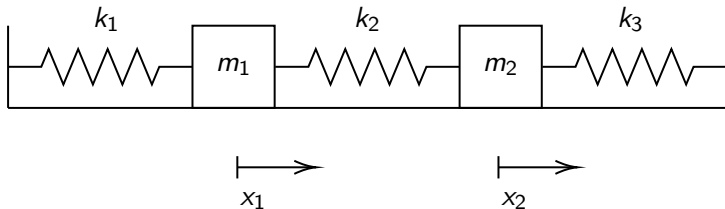


Ta có thể biểu diễn phương trình dao động như một vector với giản đồ Fresnel.

- 1. Giới thiệu chung
- 2. Dao động một chất điểm
  - 2.1 Dao động điều hoà
  - 2.2 Dao động điều hoà có cản
    - Dao động có cản khô
    - Dao động có cản nhớt
  - 2.3 Dao động cưỡng bức
  - 2.4 Giải đề Fresnel
- 3. Dao động liên kết
  - 3.1 Hai khối lượng - ba lò xo
  - 3.2 Ma trận ánh xạ định luật II Newton
  - 3.3 Toạ độ trực giao
  - 3.4 Ý tưởng chính
- 4. Mở rộng

## 2 khối lượng - 3 lò xo

Hệ dao động liên kết cơ bản đầu tiên chúng ta tìm hiểu là hệ 2 khối lượng 3 lò xo. Bỏ qua độ dài tự nhiên của lò xo.



Tổng hợp lực tác dụng lên  $m_1$  và  $m_2$  là

$$\begin{cases} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_3 x_2 + k_2 (x_1 - x_2). \end{cases} \quad (18)$$

## 2 khối lượng - 3 lò xo

Ta xét trường hợp đơn giản  $k_1 = k_3$ ,  $m_1 = m_2 = m$ .

Cách 1: Thay trường hợp trên vào, ta thu được hệ

$$\begin{cases} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_1 x_2 + k_2 (x_1 - x_2). \end{cases} \quad (19)$$

Để giải hệ phương trình trên, ta lấy lần lượt tính  $(x_1'' - x_2'')$  và  $(x_1'' + x_2'')$ .

$$\begin{cases} m(x_1'' + x_2'') &= -k_1(x_1 + x_2) \\ m(x_1'' - x_2'') &= -(k_1 + k_2)(x_1 - x_2). \end{cases} \quad (20)$$



# Ma trận của định luật II

Xét hệ phương trình từ định luật II Newton

$$\begin{cases} m_1 x_1'' &= -(k_1 + k_2)x_1 &+ k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' &= k_2 x_1 &+ -(k_1 + k_3)x_2 \end{cases}$$

Ta có thể viết hệ phương trình thành

$$\begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -(k_1 + k_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} \quad (21)$$

Hay ta có thể viết

$$[\mathbf{K}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} \quad (22)$$

## Ma trận của định luật II

Vậy  $[\mathbf{K}] \in L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}''$ . Còn  $[\mathbf{M}]$  là ma trận đường chéo.

Gọi vector  $q \in \mathcal{X}$  và  $q'' \in \mathcal{X}''$ . Liên hệ giữa chúng là

$$[\mathbf{K}]q = [\mathbf{M}]q''. \quad (23)$$

- 1. Giới thiệu chung
- 2. Dao động một chất điểm
  - 2.1 Dao động điều hoà
  - 2.2 Dao động điều hoà có cản
    - Dao động có cản khô
    - Dao động có cản nhớt
  - 2.3 Dao động cưỡng bức
  - 2.4 Giải đồ Fresnel
- 3. Dao động liên kết
  - 3.1 Hai khối lượng - ba lò xo
  - 3.2 Ma trận ánh xạ định luật II Newton
  - 3.3 Toạ độ trực giao
  - 3.4 Ý tưởng chính
- 4. Mở rộng

