xPhO Physics Club

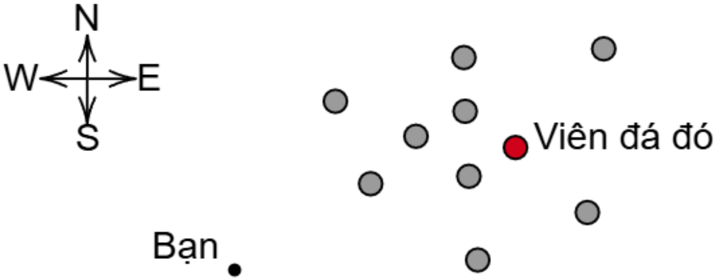
Vector và
Nhập môn Đại số tuyến tính

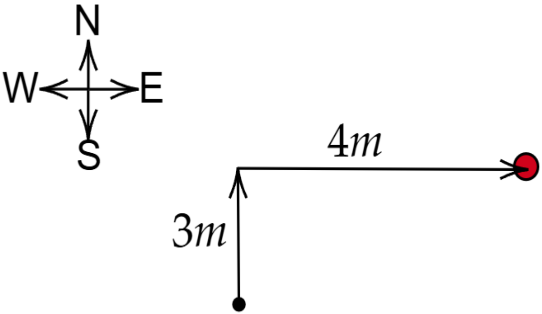
Người trình bày: Carina

Mục lục

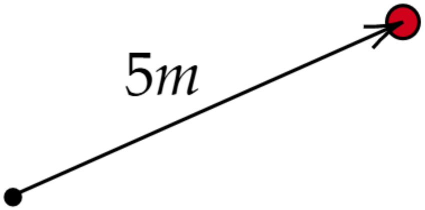
Khai báo vị trí viên đá

Làm thế nào để người khác biết vị trí của viên đá đặc biệt đó?



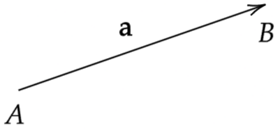

N
W
E
S
$4m$
$3m$

"Chỉ tay" và "khoảng cách"



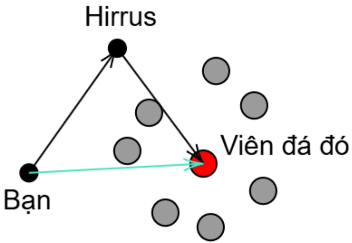
Định nghĩa

Vector AB (hình vẽ), kí hiệu là $\mathbf{AB}$, là một đại lượng biểu diễn bằng mũi tên tuân theo quy tắc hình bình hành được đặc trưng bởi độ dài a của nó (do đó còn được kí hiệu là $\mathbf{a}$) và hướng mà nó chỉ.

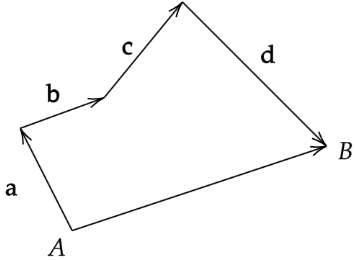


Mục lục

Để xác định vị trí của viên đá, thay vì xác định trực tiếp, ta sẽ để Hirrus xác định vị trí của viên đá, rồi ta sẽ xác định vị trí của Hirrus.



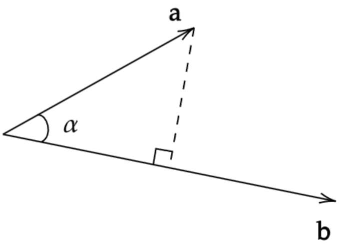
$\longrightarrow$ **Phép cộng vector**:



Hình: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{AB}$

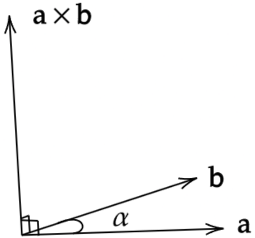
Về tổng quát, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \neq a + b$.

Phép nhân vô hướng hai vector



- Kết quả là một số vô hướng.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha$

Phép nhân có hướng hai vector



- Kết quả là một vector.
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \alpha$

Mục lục

Vector đơn vị

Định nghĩa

Một vector đơn vị là một vector có độ dài bằng 1. Ví dụ, nếu $\mathbf{a}$ là một vector bất kỳ, thì vector đơn vị theo hướng của $\mathbf{a}$ được tính bằng:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \tag{1}$$

Vector này có độ dài bằng 1 và cùng hướng với $\mathbf{a}$.

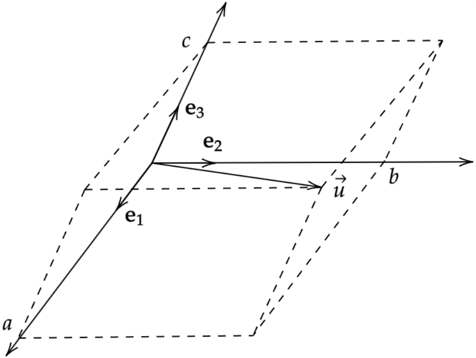
Cơ sở vector

Định nghĩa

Một vector cơ sở chuẩn hóa là một tập hợp các vector độc lập tuyến tính mà mọi vector trong không gian có thể được biểu diễn như một tổ hợp tuyến tính của các vector trong cơ sở đó.

Trong không gian ba chiều, một vector cơ sở chuẩn hóa là tập hợp của ba vector đơn vị không đồng phẳng. Một vector có thể được xác định bằng cách biểu diễn nó dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector đơn vị trong cơ sở.

$$\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 \qquad (2)$$



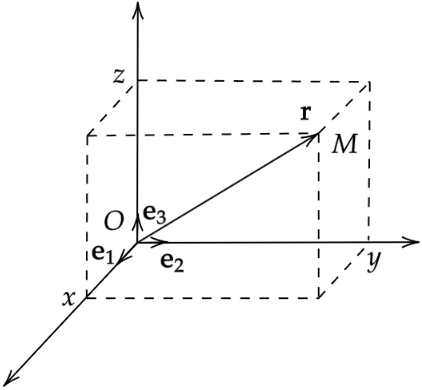
Hình: Cơ sở $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

Định nghĩa

Hệ tọa độ Descartes là một hệ tọa độ trực chuẩn, được xác định bởi một gốc tọa độ O và một vector cơ sở trực chuẩn $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Trong hệ tọa độ này, một điểm M trong không gian được xác định bởi ba tọa độ $(x, y, z) = (r_1, r_2, r_3)$,

$$\mathbf{r} = \mathbf{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{3}$$

Hệ tọa độ Descartes



Hình: Hệ tọa độ Descartes $Oxyz$

Mục lục

Cơ sở

Cho hai hệ cơ sở:

- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$
- $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$

$\implies \mathbf{v} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \gamma\mathbf{e}_3 + \sigma\mathbf{e}_4.$

Cho hai hệ cơ sở:

- $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$
- $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$

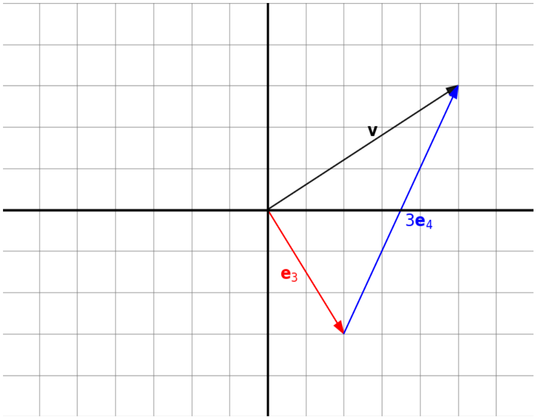
$\implies \mathbf{v} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \gamma\mathbf{e}_3 + \sigma\mathbf{e}_4.$

Giả sử:

- $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,$
- $\alpha = 5, \beta = 3.$

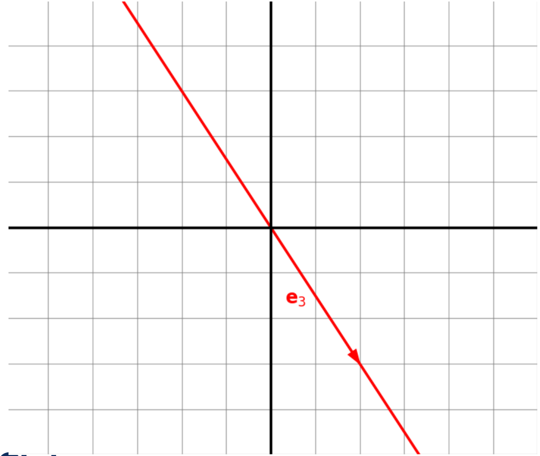
$\implies \mathbf{v} = \mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_4.$

Nếu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ trực chuẩn:



Nếu thay vì $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$, ta chọn $(\mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_3)$ thì sao?

Nếu thay vì $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$, ta chọn $(\mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_3)$ thì sao?



Bao tuyến tính

Nếu $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ là một tập hợp n vector trong không gian, thì tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của chúng được gọi là bao tuyến tính của $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$, và được kí hiệu là span(S).

Nếu span(S) chứa toàn bộ vector trong không gian, vậy ta gọi S là một hệ sinh cho không gian.

Độc lập tuyến tính

Một tập hợp các vector được gọi là *độc lập tuyến tính* với nhau nếu tổ hợp tuyến tính của chúng không bao giờ bằng $\mathbf{0}$ trừ khi **tất cả** các hệ số vô hướng đều bằng 0.

Định nghĩa

Hệ cơ sở

Một cơ sở của không gian là một tập hợp các vector trong không gian sao cho

- tạo thành hệ sinh cho không gian, và
- độc lập tuyến tính.

Ví dụ

Hệ sinh của mặt phẳng đã được đề cập:

- $S_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$,
- $S_2 = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$,
- $S_3 = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, 2\mathbf{e}_3\}$.

Nhưng,

- $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, 2\mathbf{e}_3)$

không phải là một hệ cơ sở.

Hệ sinh của đường thẳng chứa $\mathbf{e}_3$:

- $S_1 = \{\mathbf{e}_3\}$,
- $S_2 = \{\mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_3\}$,
- $S_2 = \{\mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_3, \mathbf{0}\}$.

Nhưng,

- $(\mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_3)$, và
- $(\mathbf{e}_3, \mathbf{0})$

không phải là một hệ cơ sở.

Ví dụ

Vì:

- $-2\mathbf{e}_3 + 1(2\mathbf{e}_3) + 0\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$,
- $-2\mathbf{e}_3 + 1(2\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$,
- $0\mathbf{e}_3 + 100(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Không gian vector

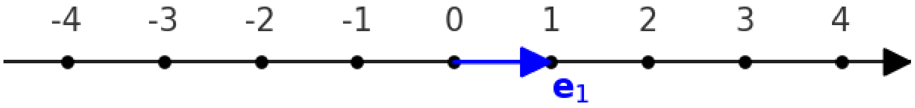
Có một sự mập mờ khi sử dụng cụm từ "không gian" trong các phần trước!

Không gian vector

Một không gian vector là một tập hợp mà các phần tử trong đó thoả mãn:

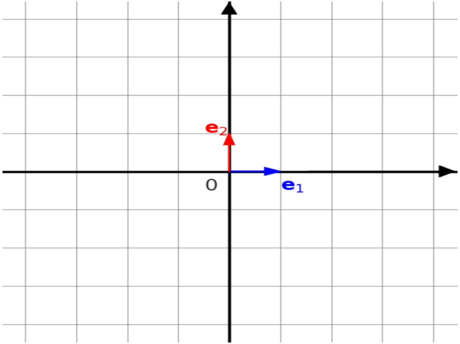
1. Với mọi $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$.
2. Với mọi $\mathbf{v} \in V, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha\mathbf{v} \in V$.
3. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
4. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.
5. Tồn tại một vector $\mathbf{0}$ sao cho $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.
6. Với mọi vector $\mathbf{v}$, tồn tại một vector $\mathbf{v}'$ sao cho $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$.
7. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.
8. $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$.
9. $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$.
10. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$.

Tập hợp số thực: $\mathbb{R}^1$



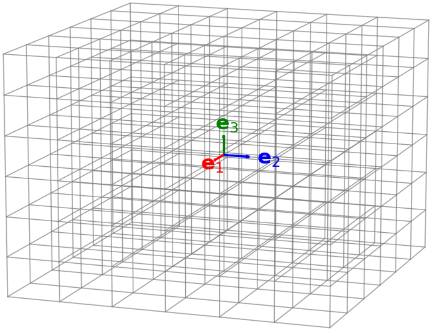
Vector: $-1.9, 5, 2, 100, -\pi, e, \ldots$

Mặt phẳng toạ độ: $\mathbb{R}^2$



Vector: $(1.23; 2), (\pi, e), (-111, -\pi), \ldots$

Không gian hình học: $\mathbb{R}^3$



Vector: $(1;3;4), (100,0,0), \ldots$

Chiều của không gian vector

Chiều của một không gian là số lượng vector trong hệ cơ sở của không gian đó.

Chiều của không gian vector

Chiều của một không gian là số lượng vector trong hệ cơ sở của không gian đó.

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ đã được đề cập. Vậy $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \cdots$ thì sao?

Vector trong $\mathbb{R}^4$: Mảng số có 4 thành phần.
Vector trong $\mathbb{R}^5$: Mảng số có 5 thành phần.

...

Vector trong $\mathbb{R}^{100}$: Mảng số có 100 thành phần.
Vector trong $\mathbb{R}^{n}$: Mảng số có n thành phần!

$$1 \to (1;2) \to (1;2;3) \to (1;2;3;4) \to \quad \cdots \quad \to \underbrace{(1;2;\ \ldots;100)}_{100}$$

Mũi tên hay mảng số?

Từ $\mathbb{R}^4$ trở đi, không còn mũi tên nào cả.

$$\stackrel{?}{=} \quad (\ldots;\ \ldots;\ \ldots)$$

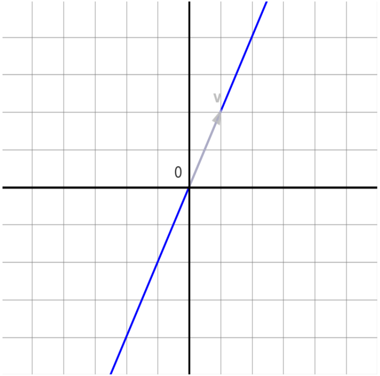
Vector?

- $\mathbb{C}^n : (1 + 2i; 0.76 - 100i; i; e + \pi i; \dots).$

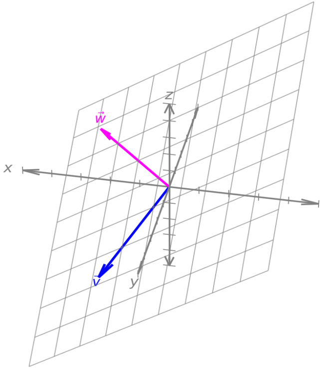
Vector?

- $\mathbb{C}^n : (1 + 2i; 0.76 - 100i; i; e + \pi i; \dots)$.
- $f(x) = 1 + 2x^2 - 3x^3 + 42x^4$.
- $g(x) = \sin x$.
- $\dots$

Quay trở lại với các vector thực



(a) Đường thẳng (đi qua gốc toạ độ) trên mặt phẳng



(b) Mặt phẳng (đi qua gốc toạ độ) trong không gian

Không gian con

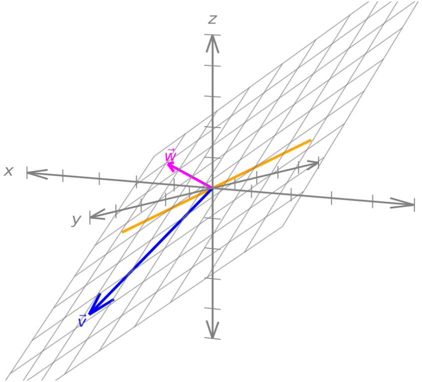
Một không gian con S trong một không gian vector V là một tập hợp các vector trong V sao cho chúng thoả mãn 10 tiên đề của vector.

Cơ sở của không gian con

Một cơ sở cho một không gian con S của $\mathbb{R}^n$ là một tập hợp các vector trong S sao cho

1. tạo thành S, và
2. là độc lập tuyến tính.

Một đường thẳng đi qua gốc toạ độ trên một mặt phẳng trong không gian:



Mục lục

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.6 \\ 20.4 & 5.5 \\ 9.7 & -6.2 \end{bmatrix}$$

Quy tắc đọc: hàng trước cột sau.
$\mathbf{A}_{21} = 3.$
$\mathbf{B}_{32} = -6.2.$

Ví dụ:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ f \end{bmatrix}.$$

Ví dụ:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ f \end{bmatrix}.$$

Nếu,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \\ c + f \end{bmatrix}, \qquad n \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} na \\ nb \\ nc \end{bmatrix}.$$

$$\Longrightarrow \text{Vector}$$

Chuyển đổi ký hiệu

$$(a, b, c) \to \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$(1, 2, 3, 4, \ \dots, 100) \longrightarrow \left.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 100 \end{bmatrix}\right\} 100$$

Một ma trận m hàng n cột về tổng quát có dạng:

$$\mathbf{A}_{m\times n}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1n}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2j} & \cdots & \mathbf{A}_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i2} & \cdots & \mathbf{A}_{ij} & \cdots & \mathbf{A}_{in}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \cdots & \mathbf{A}_{mj} & \cdots & \mathbf{A}_{mn}\end{bmatrix}.$$

Các phép toán trên ma trận

Phép cộng ma trận.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}.$$

Phép nhân ma trận với một số.

$$(c\mathbf{A})_{ij} = c\mathbf{A}_{ij}.$$

Ví dụ:

$$4\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = ??$$

Phép cộng ma trận.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij}=\mathbf{A}_{ij}+\mathbf{B}_{ij}.$$

Phép nhân ma trận với một số.

$$(c\mathbf{A})_{ij}=c\mathbf{A}_{ij}.$$

Ví dụ:

$$4\begin{bmatrix}0 & 3\\ 2 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 12\\ 8 & -24\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2\\ 0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 10\\ 8 & -19\end{bmatrix}.$$

Cho

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} +2 \\ +5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Phân tích trong một hệ cơ sở ngẫu nhiên,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Cho

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} +2 \\ +5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Phân tích trong một hệ cơ sở ngẫu nhiên,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Tính được $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -3, 1)$.

Phép nhân ma trận-vector.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & -5 & -19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Phép nhân ma trận-vector.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & -5 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Một ma trận $m \times n$ nhân với một vector n thành phần $=$ một vector m thành phần; phần tử thứ i của vector:

$$(\mathbf{Ax})_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j. \tag{5}$$

Phép nhân ma trận-vector

Phần tử thứ i của vector này là tích vô hướng của hàng thứ i của $\mathbf{A}$ với vector $\mathbf{x}$. Chẳng hạn,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \times 2 + 2 \times (-3) + 11 \times 1 = 5.$$

Phép nhân ma trận-vector

Tóm gọn:

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i2} & \mathbf{A}_{i3} \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{A}_{i1} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{A}_{i2} \\ | \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{A}_{i1} \\ | \end{bmatrix}.$$

Tính phân phối:

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b}.$$

Phép nhân ma trận với ma trận

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}0.5\\-1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0.75\\1\\-2\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-1\\-1\\4\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5 & 0.75 & -1\\-1 & 1 & -1\\0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = -1.625 \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1.75 \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2.125 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.625 \\ -1.75 \\ -2.125 \end{bmatrix}.$$

Phép nhân ma trận với ma trận

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix} = -7.875 \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3.25 \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 6.375 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.875 \\ -3.25 \\ -6.375 \end{bmatrix}.$$

Phép nhân ma trận với ma trận

Đặt

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Thay 3 đẳng thức trên vào 4,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \left[\mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} \begin{bmatrix} -1.625 \\ -1.75 \\ -2.125 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} \begin{bmatrix} -7.875 \\ -3.25 \\ -6.375 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sự lặp lại của $\mathbf{B}$(!)

Tạo ra một phép toán mới để:

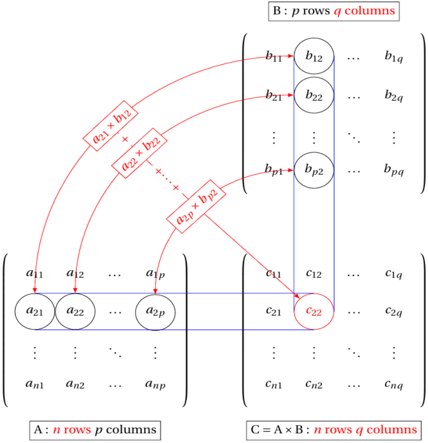
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 & -1.625 & -7.875 \\ 2 & -1.75 & -3.25 \\ 1 & -2.125 & -6.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Xét một ma trận $\mathbf{A}_{m\times n}$ và một ma trận $\mathbf{B}_{n\times p}$, *tích của của chúng là một ma trận* $\mathbf{C}_{m\times p}$*; các cột của ma trận này là các vector, bằng với tích ma trận-vector của ma trận* $\mathbf{A}$ *và các cột tương ứng của ma trận* B.

Tương đương điều này,

$$\mathbf{C}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}. \tag{7}$$

Phép nhân ma trận với ma trận



Ví dụ

Tính tích

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

theo hai cách: (7) và bằng góc nhìn của phép nhân vector.

Ví dụ- Giải

Cách 1:

$$\begin{bmatrix} (1 \cdot 2 + 5 \cdot 0) & (1 \cdot -1 + 5 \cdot 3) \\ (3 \cdot 2 + 2 \cdot 0) & (3 \cdot -1 + 2 \cdot 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cách 2: Theo góc nhìn của phép nhân vector, tích này tương đương với

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Dễ thấy,

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Các quy tắc cho các phép toán trên ma trận. Ta tổng kết lại các quy tắc chung nhất.

1. Quy luật giao hoán: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
2. Quy luật phân phối: $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.
3. Quy luật liên kết: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.
4. Quy luật liên kết: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.
5. Quy luật phân phối (trái): $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.
6. Quy luật phân phối (phải): $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.
7. Quy luật giao hoán: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Chú ý quy luật cuối cùng, tích ma trận không mang tính giao hoán.

Mục lục

Mục lục