xPhO Summer Course 2025

Trưởng nhóm: *Carina*

Mục lục

Lời mở đầu

Đây là phần mở đầu.

Tuần 1

Mở Đầu Về Giải Tích

- Rơi tự do là sự thay đổi vị trí theo thời gian, đường cong là một hình thay đổi hướng. Đây là hai loại thay đổi chính thúc đẩy sự phát triển của giải tích, một môn toán học xoay quanh hai phép toán là đạo hàm và tích phân.

- Sự ra đời và phát triển của nó xoay quanh hình học và vật lý với muôn vàn vấn đề thú vị mà có thể nói tóm gọn: *Giải tích là toán học của sự thay đổi*.

- Các nhà toán học cổ đại (chủ yếu làm việc với hình học) đã luôn đau đầu vì hai bài toán: *tìm tiếp tuyến của một đường cong bất kỳ*, và *tính diện tích dưới một đường cong*. Archimedes đã có một số kết quả nổi bật với phương pháp vét cạn. Nhưng phải cho tới thế kỉ XVII, với đại số của Viéte, hình học giải tích của Descartes và Fermat cùng với mối quan tâm dâng cao về chuyển động của các thiên thể mới thúc đẩy mạnh mẽ việc khai thác mảnh đất hoang này với đỉnh cao là các công trình của Newton và Leibniz.

- Như vậy, một cách tự nhiên để tiếp cận giải tích là thông qua hình học giải tích, tức là hình học với các toạ độ, phương trình thay vì các lập luận logic thuần tuý như trong hình học Euclid cổ điển. Cụ thể hơn, các đối tượng hình học như điểm, đường thẳng, đường cong,... sẽ được mô tả bởi các hàm số cùng phương trình qua đó ta có thể thực hiện các phép toán đại số.

- Khái niệm về giới hạn (hàm số) đã sớm nảy nở từ thời cổ đại thông qua bài toán nghịch lý Archilles và con rùa của Zeno đã quá đỗi nổi tiếng.

- Trong khi đó, ý tưởng căn bản của phép toán đạo hàm và vi phân là khảo sát sự thay đổi thông qua phân nhỏ một đại lượng hữu hạn (độ dài, thời gian,...) ra thành vô số khoảng nhỏ. Chia một thành hai phần, chia hai phần thành bốn phần và tiếp diễn như vậy vô hạn lần: các khoảng thu được là rất rất nhỏ, không bằng 0 nhưng nhỏ hơn bất cứ số thực dương nào.

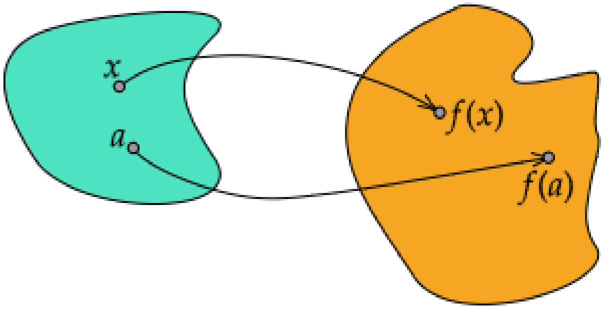
- Điều này lại có liên hệ gì với khái niệm giới hạn?

Trong tuần 1, chúng tôi sẽ trình bày nội dung về hàm số và giới hạn của hàm số, đạo hàm và vi phân cùng ứng dụng của chúng.

1.1 Hàm Số

Định nghĩa 1.1.1. *Hàm f là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x thuộc tập hợp X với một và chỉ một phần tử, kí hiệu $f(x)$, thuộc tập hợp Y.*

- X được gọi là tập hợp (miền) xác định của hàm f.
- Y được gọi là tập hợp giá trị của hàm f.
- Nếu X và Y là tập các số thực, khi đó hàm được gọi là hàm số.



$f : X \to Y$

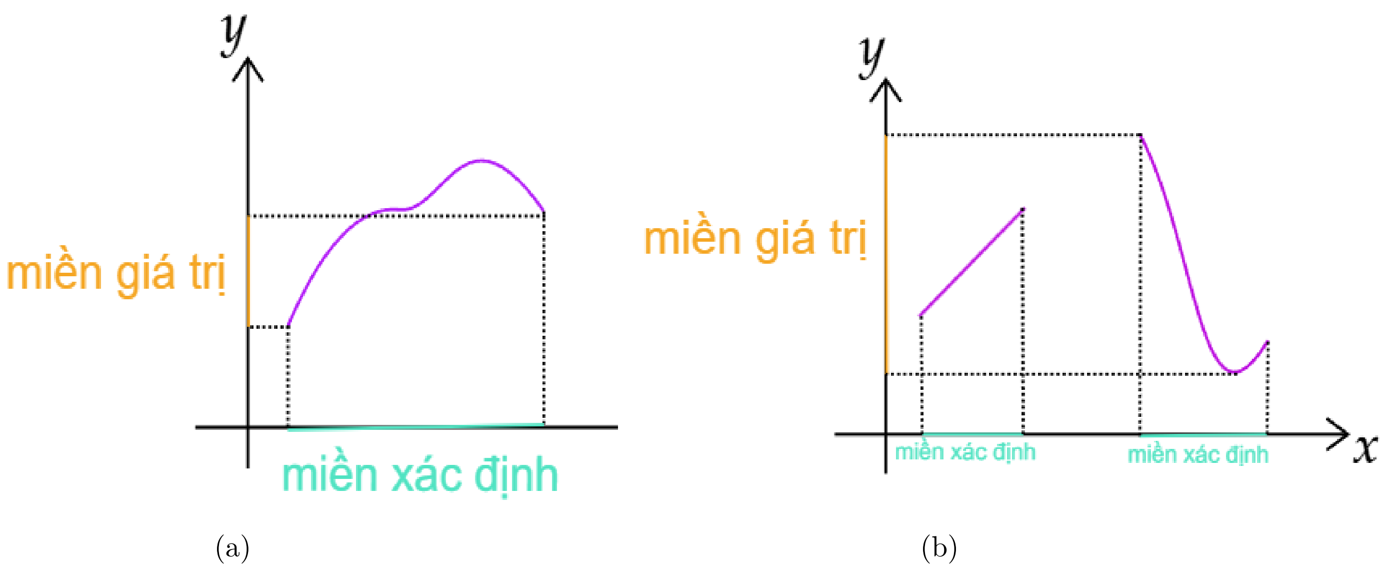
1.1.1 Đồ thị Hàm Số

Hàm số có thể được biểu diễn bằng công thức, bảng, đồ thị hoặc mô tả bằng lời nói. Trong đó trực quan nhất là biểu diễn thông qua đồ thị.

Định nghĩa 1.1.2. *Đồ thị của hàm số f có miền xác định X là tập hợp các cặp có thứ tự*

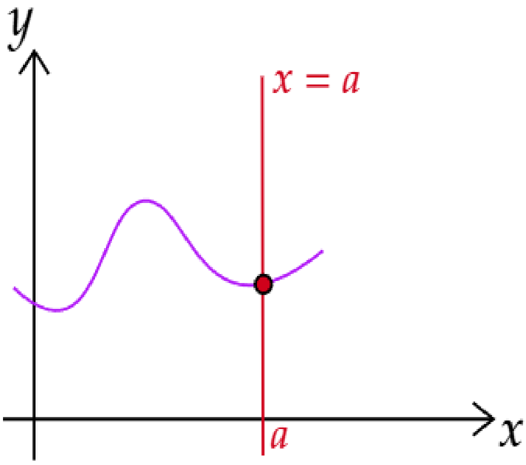
$$\{(x, f(x)) \,|x \in X\}.$$

Nói cách khác, đồ thị của f bao gồm mọi điểm (x, y) sao cho $y = f(x)$ với $x \in X$

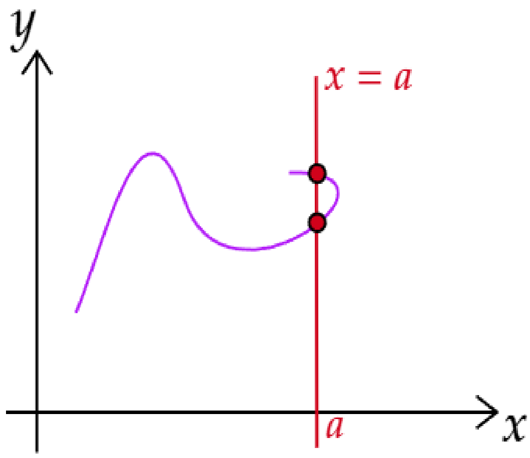


Hình 1.1: Ví dụ về đồ thị hàm số

Các điểm này có thể là vô số, tạo thành những đường cong hoặc đường thẳng trên mặt phẳng, liên tục hoặc rời rạc. Song không phải mọi đường bất kỳ đều là đồ thị của một hàm số nào đó. Để là đồ thị của một hàm số, mỗi hoành độ x phải tương ứng với một tung độ y duy nhất. Nghĩa là không được có hai điểm khác nhau trên đồ thị có cùng hoành độ nhưng khác tung độ. Một cách trực quan, *không có đường thẳng thẳng đứng (vuông góc với trục hoành) nào cắt đồ thị của một hàm số nhiều hơn một lần.* (xem 1.1)



(a) Đồ thị hàm số



(b) Không phải đồ thị hàm số

Hình 1.2: So sánh

1.1.2 Các hàm thông dụng

Trong khi xử lý các bài toán, chúng ta thường gặp các hàm số có dạng tổng quát. Các hàm này được phân loại theo dạng biểu thức của chúng. Dưới đây là một số loại hàm số cơ bản:

- Hàm *tuyến tính* có dạng $f(x) = ax + b$, với a và b là các hằng số. Đồ thị của hàm tuyến tính là một đường thẳng.
  Ví dụ: $2x + 3$.
- Hàm *đa thức* có dạng $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, với $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ là các hằng số và $n \in \mathbb{N}$ là bậc của đa thức.
  Ví dụ: $x^2 - 4x + 4; x^5 + 2x^2 - 5x + 1$; $3x + 2$.
- Hàm *luỹ thừa* có dạng $f(x) = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$ là một hằng số.
  Ví dụ: $x^2, x^{-3} = \frac{3}{x}, x^{5/2} = \sqrt{x^5} = (\sqrt{x})^5$.
- Hàm tỷ lệ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức. Ví dụ: $\frac{x^2+1}{x-2}$.

Trên đây được gọi chung là các hàm *đại số*, tức là các hàm có thể được biểu diễn bằng các toán tử đại số như cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa.
Ví dụ : $\frac{\left(x^5+x^3-x^2+4\right)^{3/2}}{x+\sqrt{x}}$.

Ta cũng liệt kê thêm một số hàm không thuộc loại trên.
Ví dụ như các hàm *siêu việt*:

- Hàm *lượng giác* là các hàm $\sin x, \cos x, \tan x, \ldots$ mà có thể được định nghĩa thông qua các điểm trên một đường tròn đơn vị.

- Hàm *mũ* và *lôgarit* lần lượt có dạng $f(x) = a^x$ và $f(x) = \log_a x$, với $a > 0$ là một hằng số. Cái sau là hàm *nghịch đảo* của cái trước, tức là $\log_a a^x = x$ và $a^{\log_a x} = x$.
  Ví dụ: 2^x và $\log_2 x$; e^x và $\ln x$.

Hay, hàm xác định từng phần là các hàm được xác định bởi các công thức khác nhau trên các miền khác nhau của tập xác định.
Ví dụ, hàm giá trị tuyệt đối $f(x) = |x|$ được định nghĩa:

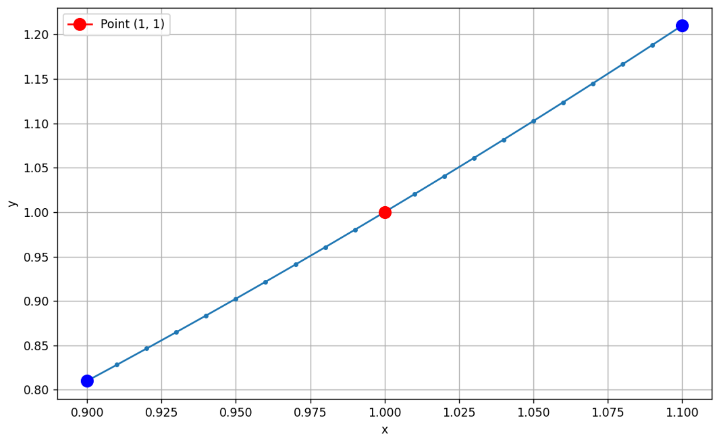
$$f(x) = \begin{Bmatrix} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{Bmatrix}.$$

Trong tất cả những hàm vừa liệt kê lại có một số hàm có tính chất chung. Chẳng hạn như tính chẵn lẻ, tính đồng biến nghịch biến, tính liên tục,...
Trước khi sang phần tiếp theo, hãy nói qua thêm một khái niệm nữa, đó là *hàm hợp*. Ta biết rằng hàm số là một thứ mà ta cho vào một giá trị và sẽ cho ra một giá trị nào đó. Trên cơ sở này, hàm hợp là một hàm số mà đầu vào của nó là đầu ra của một hàm số khác.
Xét hai hàm $f(x)$ và $g(x)$, hàm hợp của chúng được ký hiệu là $f(g(x))$ và được đọc là "hàm f của hàm g tại x". Hàm hợp này sẽ nhận đầu vào là giá trị của hàm $g(x)$ và trả về giá trị của hàm f tại điểm đó.
Ví dụ: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ vậy $f(g(x)) = f(\sin x) = \sin^2 x$.

1.2 Giới Hạn Hàm Số

1.2.1 Ví dụ về Giới Hạn

Xét hàm số $y = x^2$, phóng to đồ thị vào gần điểm $(1; 1)$:



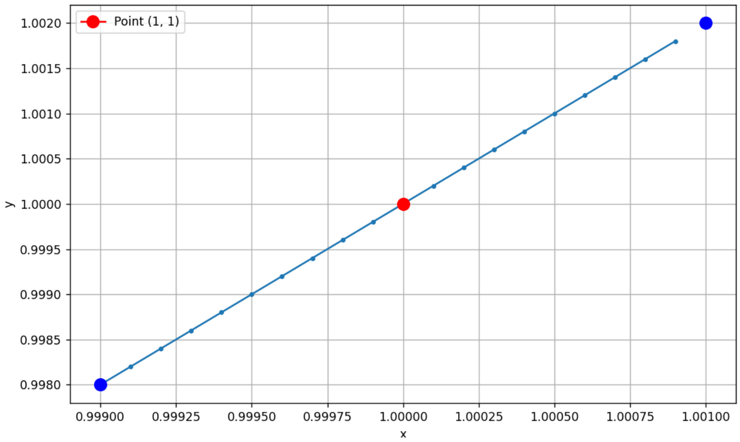
Hình 1.3: Đồ thị $y = x^2$ được phóng to trong khoảng $[0.9; 1.1]$

Hãy tưởng tượng có hai con bọ xuất phát từ hai điểm xanh và bò lại *gần* điểm màu đỏ trên con đường tạo thành từ đoạn đồ thị này. Để tiến tới đó, con bọ thứ nhất, xuất phát từ bên trái, phải đi qua các điểm nằm trong khoảng $[0.9; 0.999]$. Trong khi đó, con bọ thứ hai, xuất phát từ bên phải, phải trải qua các điểm nằm trong khoảng $[1.001; 1.1]$.
Ta thấy chúng quả thực đang tiến tới *gần* điểm $(1; 1)$ bởi không chỉ hoành độ mà tung độ của chúng cũng dần tiến đến giá trị bằng 1 (như được kiểm chứng trong bảng bên dưới).

Bảng 1.1: Bảng giá trị $y = x^2$ khi x tới gần 1

Bên trái		Bên phải	
x	y	x	y
0.900	0.8100	1.100	1.2100
0.925	0.8556	1.075	1.1556
0.950	0.9025	1.050	1.1025
0.975	0.9506	1.025	1.0506
0.990	0.9801	1.010	1.0201
0.995	0.9900	1.005	1.0100
0.999	0.9980	1.001	1.0020

Sau khi cả hai lần lượt tới điểm $(0.999; 0.9980)$ và $(1.001; 1.0020)$, chúng tiếp tục di chuyển và để quan sát quá trình tiếp theo, ta tiếp tục phóng to khoảng đồ thị nằm giữa chúng:



Hình 1.4: Khoảng $[0.999; 1.001]$ với hai vị trí ban đầu mới được đánh dấu

Như vậy sự phóng to này có thể tiếp tục vô hạn lần nữa trong khi khoảng cách giữa hai con bọ và điểm màu đỏ càng nhỏ dần. Dù vậy, ta biết rằng trong thực thế rồi chúng sẽ đến được điểm màu đỏ.[1]

Nhưng nếu giả sử tại hai điểm nào đó rất rất gần $(1; 1)$, đường bị gãy (và phía dưới chúng là vực sâu), hai chú bọ không thể tiến lên được nữa. Rồi vấn đề tiếp tục xảy đến rằng chỉ cần vị trí của các điểm này *luôn gần điểm* $(1; 1)$ *hơn chúng*, hai chú bọ đáng thương sẽ phải tiếp tục di chuyển với một quá trình "phóng to vô hạn" như vậy mãi mãi.

Định nghĩa 1.2.1. *Giả sử $f(x)$ xác định trong một khoảng (miền) giá trị nào đó của x có chứa a (có thể xác định hoặc không xác định tại a). Khi đó ta viết*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

và nói "giới hạn của $f(x)$, khi x tiến tới a, bằng L"
nếu chúng ta có thể lấy các giá trị $f(x)$ gần L một cách tuỳ ý bằng cách lấy các giá trị của x đủ gần a (từ bất cứ phía nào), nhưng không được bằng a.

Định nghĩa vừa đưa ra về giới hạn có vẻ khá trừu tượng và thiếu chặt chẽ. Dẫu thế trong khuôn khổ chương trình, ta sẽ không đào sâu vào vấn đề chặt chẽ trong lí luận giới hạn. Thay vào đó, hy vọng với ví dụ vừa rồi, các bạn có thể phần nào thu được trực giác về khái niệm này.

[1]Đoạn đường mà chúng trải qua sẽ nhỏ dần. Quãng đường chúng phải đi sẽ là một tổng có vô số hạng tử với các hạng tử phía sau ngày càng nhỏ mà may thay, tổng này có giá trị hữu hạn.

Định nghĩa 1.2.2. *Ta viết*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

để nói rằng giới hạn của $f(x)$ khi x tiến tới a từ phía bên trái (tức là x nhỏ hơn a) bằng L.

Tương tự, với $x > a$, ta viết

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Định lý 1.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L, \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Nghĩa là nếu giới hạn trái và phái khi $x \to a$ cùng bằng nhau thì giới hạn của hàm số tại điểm đó là tồn tại. Ta cũng thừa nhận nếu hàm số tồn tại giới hạn tại điểm nào đó, giới hạn đó là duy nhất. Như đã thể hiện thông qua ví dụ ở trên.

1.2.2 Giới Hạn ở vô cùng và một số quy tắc tính Giới Hạn

Định nghĩa 1.2.3. *Ta viết*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

nếu f(x) có thể nhận các giá trị lớn tuỳ ý khi cho x nhận các giá trị đủ gần a, nhưng không được bằng a.

Điều này dễ hiểu nếu xét hàm $1/x$ với $a = 0$: lấy 1 chia 100, rồi lấy 1 chia 10, chia $0.1, 0.01, ...$ kết quả thu được sẽ ngày càng lớn. Nếu lấy 1 chia $1/10^6$, sẽ có được 10^6. Và cứ thế. Chú ý rằng vô hạn không phải một con số. Nó, ở đây, là một giới hạn.
Ta cũng có thể có điều ngược lại:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

để diễn tả khi x nhận các giá trị lớn tuỳ ý (tiến tới vô cùng) thì $f(x)$ tiến tới gần giá trị xác định L một cách tuỳ ý. Trong trường hợp hàm số là $1/x$, ý của ta là tương đương với cho x nhận một giá trị nào đó đủ lớn $(10^2, 10^3, 10^4, 10^n ...)$ sao cho có thể coi $1/x = 10^{-n} \approx 0$.
Cũng có thể viết

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

để nói rằng $f(x)$ có thể nhận các giá trị lớn tuỳ ý khi x đủ lớn.

Giả sử c và d là các hằng số,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ và } \lim_{x \to a} g(x) = B,$$

ta thừa nhận những tính chất và quy tắc sau:

- *Tính chất tuyến tính:*
$$\lim_{x \to a} (cf(x) \pm dg(x)) = cA \pm dB.$$
- *Tính duy nhất:*
$$\text{Nếu } f(x) = g(x) \ khi \ x \neq a, \text{thì } A = B.$$
- *Quy tắc nhân:*
$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB.$$

- *Quy tắc chia:*
$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B, B \neq 0.$$

- *Quy tắc luỹ thừa:*
$$\lim_{x\to a}(f(x))^{m/n} = A^{m/n}.$$

Định lý 2. *Xét các hàm số $g(x), f(x), h(x)$ xác định trên miền chứa a (có thể có hoặc không xác định tại a), với mọi x khác a:*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

và giả sử
$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L.$$

Thì,
$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

1.3 Đạo Hàm

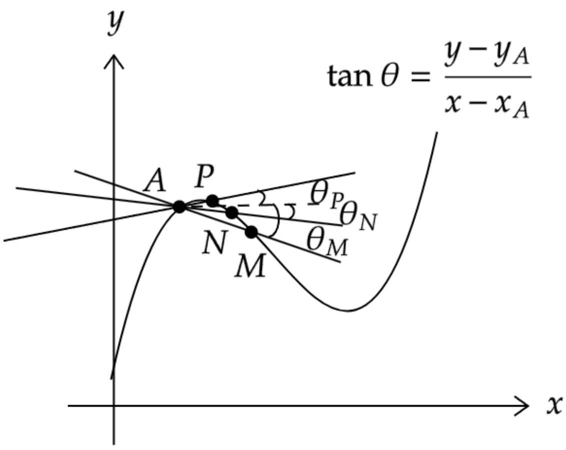
1.3.1 Khái niệm

Định nghĩa 1.3.1. ***Đạo hàm*** *của hàm số f tại giá trị a, kí hiệu bởi $f'(a)$, là*

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

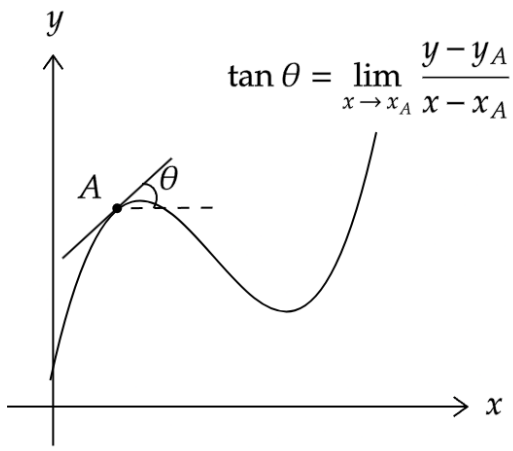
Ý nghĩa hình học trực quan của đạo hàm là nó thể hiện độ dốc của đồ thị và tốc độ biến thiên của hàm số. Ta xét độ dốc của các đường cát tuyến đi qua A:[2]



Hình 1.5: Độ dốc của các đường cát tuyến đi qua A (các góc θ_M, θ_N, θ_P)

Nếu các điểm M, N, P tiến gần đến điểm A, độ dốc của các đường cát tuyến này sẽ tiến gần đến một giá trị nhất định, chính là độ dốc của tiếp tuyến. Độ dốc này chính là đạo hàm của hàm số tại điểm A:

[2]Ở đây góc θ_M và θ_N có giá trị âm.



Hình 1.6: Liên hệ giữa đạo hàm và độ dốc (độ lớn góc θ) của đồ thị

Cũng từ hình vẽ trên, ta có thể thấy đạo hàm chính là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị. Vì thế, ta có thể biểu diễn phương trình của đường tiếp tuyến tại $x = a$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{1.2}$$

Một ví dụ Vật Lý có thể kể đến là chuyển động của một vật. Nếu ta xét hàm số $s(t)$ là quãng đường vật đi được theo thời gian t, thì đạo hàm của nó tại thời điểm t chính là vận tốc của vật tại thời điểm đó, kí hiệu là $v(t) = s'(t)$.

1.3.2 Một số quy tắc đạo hàm

Dưới đây là đạo hàm của một số hàm thông dung:

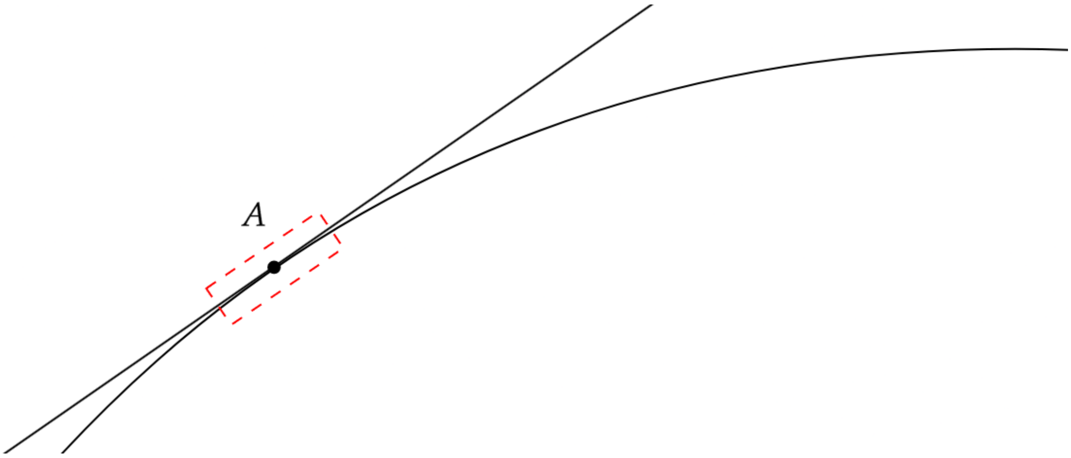
- *Đạo hàm của hàm đa thức*:
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \tag{1.3}$$
- *Đạo hàm của các hàm lượng giác*:
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x & \frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x & \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \end{aligned}$$
- *Đạo hàm của hàm mũ và hàm logarit*:
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \tag{1.4}$$

Tương tự như giới hạn, đạo hàm cũng có một số tính chất quan trọng:

- *Tính chất tuyến tính*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, và c là một hằng số, thì
$$(cf + g)' = cf' + g' \tag{1.5}$$
- *Quy tắc nhân*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, thì
$$(fg)' = fg' + f'g \tag{1.6}$$
- *Quy tắc chia*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, với $g(x) \neq 0$, thì
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{1.7}$$

1.3.3 Xấp xỉ tuyến tính và vi phân

Tiếp theo ta sẽ nói về một ứng dụng quan trọng khác của đạo hàm. Nếu phóng to đồ thị tại điểm $x = a$, ta có thể thấy đồ thị hàm số trông khá gần với tiếp tuyến của nó tại điểm này.



Hình 1.7: Phóng to đồ thị hàm số tại điểm $x = a$

Từ quan sát trên, ta có thể nghĩ tới một phép xấp xỉ.

Định nghĩa 1.3.2. *Ở lân cận điểm $x = a$, ta có thể xấp xỉ hàm số $f(x)$ bằng phương trình đường tiếp tuyến tại điểm này:*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \tag{1.8}$$

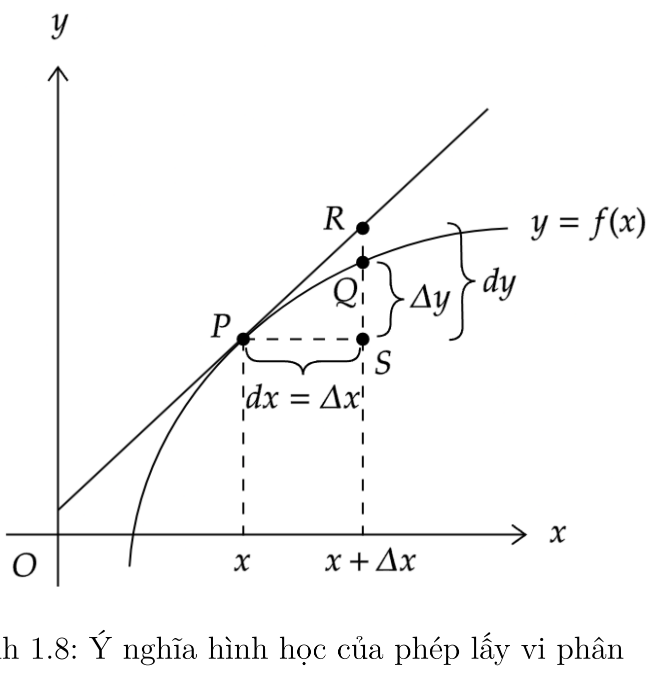
*đây được gọi là **xấp xỉ tuyến tính**.*

Ý tưởng đằng sau phép xấp xỉ tuyến tính đôi khi được phát biểu bằng **phép lấy vi phân**.

Định nghĩa 1.3.3. *Nếu $y = f(x)$, **vi phân** dx là một biến độc lập. Lúc đó **vi phân** dy được xác định theo dx bởi phương trình:*

$$dy = f'(x)dx \tag{1.9}$$

và **phép lấy vi phân** trên có ý nghĩa hình học như hình vẽ:



Hình 1.8: Ý nghĩa hình học của phép lấy vi phân

Từ kí hiệu bên trên, ta có thể viết lại đạo hàm theo cách khác:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{1.10}$$

Đây được gọi là **kí hiệu Leibniz cho đạo hàm**.

1.3.4 Quy tắc đạo hàm hợp

Đối với một hàm số $f(x)$ có dạng phức tạp theo x, ta có thể viết lại nó dưới dạng hàm hợp $f(g(x))$ sao cho $f(g)$ và $g(x)$ có dạng đơn giản hơn, sau đó áp dụng quy tắc sau để thực hiện phép đạo hàm:

Định lý 3. ***Quy tắc đạo hàm hợp***: *Nếu f là hàm số có đạo hàm tại $g(x)$, và g là hàm số có đạo hàm tại x, thì đạo hàm của hàm hợp $f(g(x))$ được tính theo công thức:*

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{1.11}$$

Ví dụ: $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ có thể được viết lại dưới dạng hàm hợp $f(g(x))$ với $g(x) = x^2+1$.
Lưu ý: Quy tắc đạo hàm hợp không đơn giản chỉ là khử đi tử và mẫu số giống như phép nhân phân số vì ý nghĩa của kí hiệu Leibniz không hoàn toàn giống với phân số thông thường. Việc chứng minh quy tắc này sẽ phức tạp hơn và sẽ là nhiệm vụ của bạn trong bài tập ....

1.4 Ứng Dụng Của Đạo Hàm Và Vi Phân

1.4.1 Giá trị cực đại và cực tiểu

Đạo hàm có một ứng dụng quan trọng trong việc xác định các **cực đại địa phương** và **cực tiểu địa phương**. Trước hết, ta sẽ tìm hiểu về hai khái niệm này.

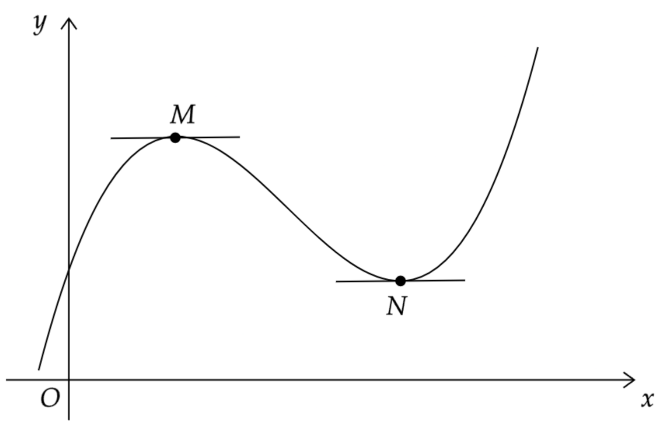
Định nghĩa 1.4.1. ***Cực đại địa phương*** *của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = a$ là giá trị $f(a)$ nếu tồn tại một khoảng mở $(a-\delta, a+\delta)$ với $\delta > 0$ sao cho:*

$$f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Định nghĩa 1.4.2. ***Cực tiểu địa phương*** *của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = a$ là giá trị $f(a)$ nếu tồn tại một khoảng mở $(a-\delta, a+\delta)$ với $\delta > 0$ sao cho:*

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Và các điểm trên được gọi chung là **cực trị** của hàm số $f(x)$.

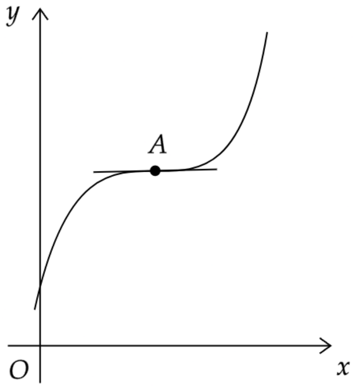


Hình 1.9: Cực đại địa phương (điểm M) và cực tiểu địa phương (điểm N)

Từ hình vẽ trên, ta có thể thấy tại các điểm cực trị, tiếp tuyến của đồ thị nằm ngang. Từ đó, ta có định lý sau:

Định lý 4. ***Định lý Fermat***: *Nếu hàm số f có cực trị tại a, thì $f'(a) = 0$ nếu đạo hàm này tồn tại.*

Tuy nhiên, định lý đảo của định lý trên không đúng.



Hình 1.10: Điểm uốn A của đồ thị hàm số

Từ hình vẽ trên, ta có thể thấy đạo hàm của hàm số tại điểm A bằng 0 nhưng đây không phải là điểm cực trị. Điểm này được gọi là **điểm uốn** của đồ thị hàm số.
Một cách để xác định điểm cực trị là cực đại hay cực tiểu địa phương là sử dụng định lý sau:

Định lý 5. *Xét hàm f có đạo hàm bằng 0 tại điểm a, nếu:*

- $f''(a) > 0$, *thì $f(a)$ là cực tiểu địa phương.*
- $f''(a) < 0$, *thì $f(a)$ là cực đại địa phương.*

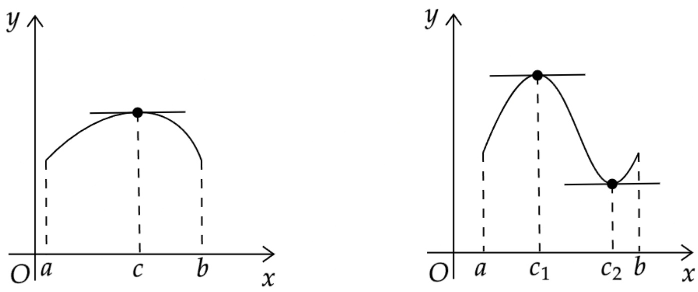
Nếu $f''(a) = 0$, ta không thể kết luận được gì về điểm này. Trong trường hợp đó, ta sẽ cần sử dụng các phương pháp sẽ được bàn luận trong các bài tập...

1.4.2 Định lý giá trị trung bình

Định lý giá trị trung bình là một trong những định lý quan trọng của giải tích. Nhưng trước khi đến với định lý này, ta sẽ cần giới thiệu một định lý khác:

Định lý 6. ***Định lý Rolle***: *Nếu hàm số f là liên tục và khả vi trên khoảng $[a, b]$, và $f(a) = f(b)$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Chúng ta có thể nhìn vào đồ thị của các hàm số thỏa mãn điều kiện trên để thấy được ý nghĩa trực quan của điểm c:



Hình 1.11: Định lý Rolle

Việc chứng minh chặt chẽ sẽ là nhiệm vụ của bạn trong bài tập....
Định lý giá trị trung bình là một mở rộng của định lý Rolle. Định lý này phát biểu như sau:

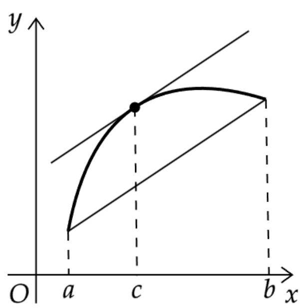
Định lý 7. ***Định lý giá trị trung bình***: *Nếu hàm số f là liên tục và khả vi trên khoảng $[a, b]$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1.12}$$

hay

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{1.13}$$

Khi này, độ dốc của tiếp tuyến tại điểm c bằng với độ dốc của cát tuyến nối giữa hai điểm a và b:



Hình 1.12: Định lý giá trị trung bình

Chứng minh định lý này sẽ là nhiệm vụ của bạn trong bài tập....

1.4.3 Xấp xỉ đa thức của hàm số

Trong thực tế, chúng ta thường cần tính giá trị của một hàm số tại một điểm nào đó. Tuy nhiên, việc tính toán trực tiếp có thể phức tạp hoặc không khả thi. Do đó, chúng ta thường sử dụng các đa thức xấp xỉ để ước lượng giá trị của hàm số.

Định lý 8. *Nếu f có một khai triển bằng chuỗi lũy thừa tại a, tức là nếu*

$$f(x) = \Sigma_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \tag{1.14}$$

thì các hệ số của nó được cho bởi công thức sau

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{1.15}$$

trong đó $f^{(n)}(a)$ là đạo hàm bậc n của hàm số f tại điểm a.
Chuỗi lũy thừa này được gọi là ***chuỗi Taylor*** *của hàm số f tại điểm a.*

Khi ta chỉ lấy một vài số hạng của chuỗi, ta thu được một phép xấp xỉ:

Định nghĩa 1.4.3. ***Khai triển Taylor bậc*** *n của hàm số f tại điểm a:*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{1.16}$$

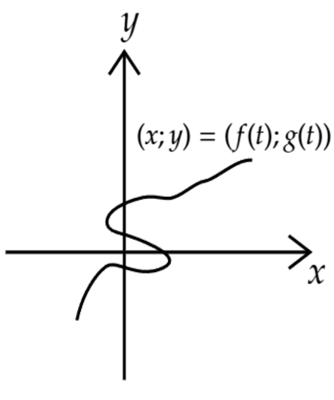
Càng lấy tới bậc càng cao, độ chính xác của phép xấp xỉ càng cao.

1.5 Phương Trình Tham Số

Định nghĩa 1.5.1. *Giả sử hai toạ độ x, y trên mặt phẳng toạ độ lần lượt là các hàm của một biến thứ ba, t (gọi là* tham số*) được biểu diễn qua các phương trình:*

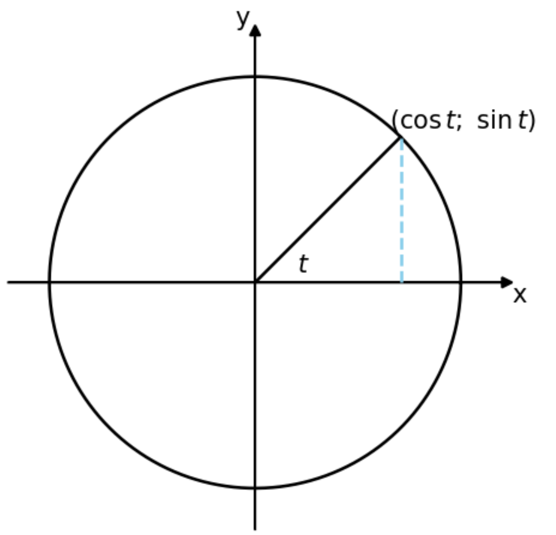
$$x = f(t),\ y = g(t),$$

gọi là các phương trình tham số*. Mỗi một giá trị của t xác định một điểm $(x; y)$. Khi tham số thay đổi, điểm $(x; y)$ thay đổi và vẽ ra một đường cong trên mặt phẳng toạ độ gọi là* đường cong tham số.

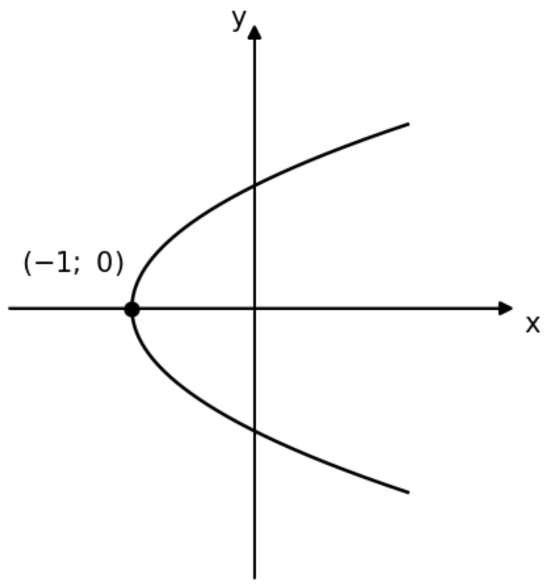


Hình 1.13: Đường cong tham số

Về tổng quát, đường cong với phương trình tham số $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$ có điểm đầu $(f(a), g(a))$ và điểm cuối $(f(b), g(b))$.
Sau đây là một số ví dụ cụ thể:

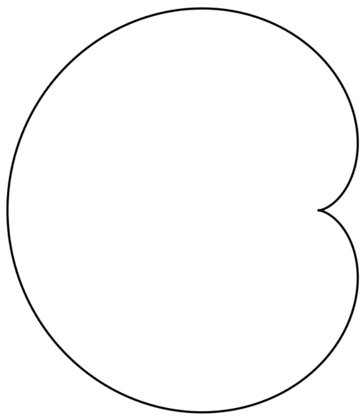


(a) Đường tròn đơn vị
$x = \cos t, \quad y = \sin t$
$0 \leq t \leq 2\pi$

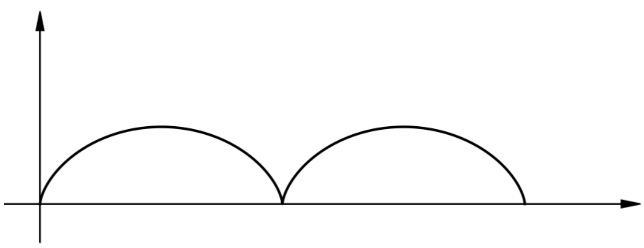


(b) Parabol nằm ngang
$x = t^2 - 1, \quad y = t$
$-1 \leq t \leq 1$

Hình 1.14



Hình 1.15: Đường Cardioid
$x = 2\cos t - \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t$



Hình 1.16: Đường Cycloid
$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq 4\pi)$

Thông thường khi tiếp cận một bài toán chuyển động, tham số thường xuất hiện một cách tự nhiên qua các đại lượng vật lý mà điển hình là thời gian.

Xem xét một điểm chuyển động trên mặt phẳng toạ độ, hai toạ độ sẽ có dạng $x = x(t)$ và $y = y(t)$. Đây được gọi là các phương trình chuyển động, nếu biết chúng và điều kiện ban đầu sẽ có thể biết được các thông số động học của nó ở mọi thời điểm. Các thông số động học được đề cập ở đây là *vị trí*, *vận tốc*,... , trong đó ta định nghĩa:

- Vị trí của điểm $t = \tau$ được xác định bởi cặp số $(x(\tau), y(\tau))$.
- Vận tốc của điểm tại thời điểm $t = \tau$ được xác định bởi cặp số $(x'(\tau), y'(\tau))$.

1.6 Hướng Dẫn Học

1.7 Bài tập

Hàm số

Bài 1.1: Tìm miền xác định của các hàm số sau

(a) $\frac{x-2}{2x-1}$

(b) $\frac{\ln(1+x)}{x-1}$

(c) $\sqrt{1-2x} + 3\arcsin\left(\frac{3x-1}{2}\right) \qquad (\sin x = y \leftrightarrow x = \arcsin y)$

(d) $\frac{1}{xe^x}$

(e) $\ln(3x+1) + 2\ln(x+1)$

Bài 1.2: Tìm tập hợp giá trị của các hàm số sau

(a) $x^2 - 6x + 5$

(b) $2 + 3\sin x$

(c) $|x| + x + 1 = y + |y|$

(d) 4^{-x^2}

Bài 1.3: Chứng minh

(a) $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

(b) $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Gợi ý: Định lý Ptoleme

Vẽ đồ thị của hàm

Chú ý: Ta có thể vẽ đồ thị của hàm có dạng $y = Af(k(x-a)) + b$ theo đồ thị của hàm $f(x)$

- $y = f(x-a)$: đồ thị ban đầu được tịnh tiến theo trục Ox một đại lượng a.
- $y = f(x) + b$: đồ thị ban đầu được tịnh tiến theo trục Oy một đại lượng b.
- $y = Af(x)$: đồ thị xuất phát được giãn ra A lần theo trục Oy.

- $y = f(kx)$: đồ thị xuất phát được giãn ra $1/k$ lần theo trục Ox.

Bài 1.4: Vẽ đồ thị các hàm số trong hai bài tập ở trên bằng
a. Desmos

b. Python (đối với hàm tuần hoàn thì vẽ trong khoảng $[-\pi; \pi]$; đối với các hàm khác, lựa chọn điểm đầu và cuối sao cho thu được mọi miền của hàm)

Bài 1.5: Vẽ một hình tam/tứ/ngũ/lục giác đều bằng Desmos và Python.

Bài 1.6: Giải các phương trình sau thông qua việc vẽ đồ thị bằng Python

(a) $\tan x = x$.

(b) $\ln x = x - 2$.

(c) $x^3 - 15x = 4$.

(d) $x^5 - 4x^2 + 3 = 0$.

Hàm hợp

Bài 1.7: Các hàm số trong **Bài 1.1** là hàm hợp của những hàm nào? Hãy phân tích cụ thể thứ tự của chúng.

Bài 1.8: Nguyên lý quy nạp

Cho S_n là một phát biểu về số nguyên dương n. Giả sử rằng:

- S_1 đúng.
- S_{k+1} đúng khi S_k đúng.

Khi đó S_n đúng với tất cả các số nguyên dương n.
Sử dụng điều này để giải các bài toán sau:

(a) Nếu $f_0(x) = x/(x+1)$ và $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$, tìm một công thức cho $f_n(x)$.

(b) Nếu $f_0(x) = x^2$ và $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$, tìm một công thức cho $f_n(x)$.

Phương trình hàm

Bài 1.9: Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

(a) $f(a + b) = f(a) + f(b)$

(b) $f(ab) = f(a)f(b)$

(c) $f(a + b) = f(a)f(b)$

(d) $f(ab) = f(a) + f(b)$

Giới hạn hàm số

Bài 1.10: Chứng minh

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e=2,71828....$$

(c)
$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m.$$

và vẽ đồ thị tương ứng để kiểm tra lại.

Bài 1.11: Tính các giới hạn sau

(a)
$$\lim_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3}$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7}$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$$

(d)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$$

(e)
$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}$$

(f)
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$$

(g)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$$

(h)
$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$$

Bài 1.12: Sử dụng các kết quả trong **Bài 1.10** tính

(a)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1=\cos 5x}{x^2}$$

(c)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$$

(d)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$$

So sánh các vô cùng bé

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các vô cùng bé khi $x\to a$. Hay, $\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$ và $\lim_{x\to a}\beta(x)=0$.

- Nếu $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=0$, thì ta nói rằng α là vô cùng bé bậc cao so với β, kí hiệu $\alpha=o(\beta)$.
- Nếu $\lim_{x\to a}\frac{\alpha}{\beta}=m(m\neq 0)$, thì ta nói α và β là các vô cùng bé cùng bậc. Đặc biệt nếu $m=1$, ta gọi chúng là các vô cùng bé tương đương, kí hiệu $\alpha\sim\beta$.
- Nếu α^k và β là các vô cùng bé cùng bậc, trong đó $k>0$, ta nói rằng vô cùng bé β có bậc k so với α.

Ta chú ý một số tính chất của các đại lượng vô cùng bé:

- Tích hai vô cùng bé là vô cùng bé cấp cao so với các nhân thức.
- Các vô cùng bé là tương đương khi và chỉ khi hiệu của chúng là vô cùng bé cấp cao so với chúng.
- Nếu tỷ số của hai vô cùng bé có giới hạn, thì giới hạn này không đổi nếu ta thay mỗi vô cùng bé bằng một vô cùng bé tương đương.

Lưu ý sự tương đương của các đại lượng vô cùng bé sau đây: nếu $x\to 0$ thì

$$\sin x\sim x, \tan x\sim x, \arcsin x\sim x, \arctan x\sim x, \ln(1+x)\sim x$$

Bài 1.13: Bằng cách thay tử và mẫu số bằng các vô cùng bé tương đương, tính

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-1}{\tan 3x}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{3/5}-1}{(1+x)(1+x)^{2/3}-1}$$

Đạo hàm

Bài 1.14: Chứng minh quy tắc đạo hàm hàm hợp.

Bài 1.15: Tính $y'(x)$

(a)
$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

(b)
$$y = \ln(\sqrt{2\sin x + 1} + \sqrt{2\sin x - 1}).$$

(c)
$$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + k} + \frac{k}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 + k}).$$

(d)
$$y = \ln^2 \frac{\sqrt{4\tan x + 1} - 2\sqrt{\tan x}}{\sqrt{4\tan x + 1} + 2\sqrt{\tan x}}.$$

(e)
$$y = \frac{1}{2}[(x + \alpha)\sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta} + (\beta - \alpha^2)\ln(x + \alpha + \sqrt{x^2 + 2\alpha x + \beta})].$$

(f)
$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}.$$

Sau đó viết chương trình Python tính đạo hàm tại $x = 1$ để kiểm tra kết quả.

Bài 1.16:

(a) Tìm góc giữa hai parabol $y = 8 - x^2$ và $y = x^2$.

(b) Tìm vận tốc tại thời điểm $t_0 = 4$s của điểm có quy luật chuyển động $s(t) = 4t - 5t^2 + 12$.

Phương pháp đạo hàm lấy lô-ga(tạm dịch)[3]

Bài 1.17: Tính

(a)
$$\frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}.$$

(b)
$$y = x^{x^2}.$$

Hàm logarit nói chung và hàm ln nói riêng đặc biệt có nhiều công dụng trong tính toán. Ta hãy liệt kê ra hai tính chất sẽ được bàn đến sau đây:

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
- $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$.

[3]Đọc thêm tại Logarithmic differentiation

Tính chất đầu tiên là khả năng biến một tích thành một tổng, một thứ dễ tính hơn rất nhiều. Tính chất thứ hai lại có khả năng biến một hàm mũ phức tạp thành một tích rõ ràng hơn về sự phụ thuộc vào biến.
Xét hàm $y(x)$ có thể được viết thành tích của nhiều hàm số:

$$y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)\dots f_n^{\alpha_n}(x) \implies \ln y = \alpha_1 \ln f_1 + \alpha_2 \ln f_2 + \cdots + \alpha_n \ln f_n.$$

Đạo hàm hai vế,

$$\frac{y'}{y} = \alpha_1 \frac{f_1'}{f_1} + \alpha_2 \frac{f_2'}{f_2} + \cdots + \alpha_n \frac{f_n'}{f_n}.$$

Hãy quay lại xử lý **Bài 1.15** với công cụ này.

Bài 1.18: Tính

(a)
$$y = x^{\ln x}.$$

(b)
$$y = \frac{x^2\sqrt{1+x}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}.$$

Xấp xỉ tuyến tính

Bài 1.19: Tính giá trị gần đúng của

(a) $\sqrt[4]{15.8}$

(b) $\tan 46^\circ$

(c) Diện tích hình tròn bán kính $3.02\,\mathrm{m}$

(d) Thể tích hình cầu bán kính $2.01\,\mathrm{m}$. Biết thể tích hình cầu bán kính R bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$

Ứng dụng của đạo hàm và vi phân

Bài 1.20: Các điểm $x = 0$ của các hàm dưới đây là cực đại, cực tiểu hay điểm uốn?

(a) $f(x) = 1 - 3x^2 + 2x^4$

(b) $f(x) = x^3 + x^5$

(c) $f(x) = x^6 + 2x^8 - 3x^{10}$

Bài 1.21: Chứng minh định lý Rolle.

Bài 1.22: Chứng minh định lý giá trị trung bình.

Bài 1.23: Chứng minh định lý 8.

Bài 1.24: Tìm chuỗi Taylor của các hàm sau tại điểm $x = 0$ (chuỗi Maclaurin):

(a) $f(x) = \sin x$

(b) $f(x) = \cos x$

(c) $f(x) = e^x$

(d) $f(x) = \ln(1 + x)$

(e) $f(x) = \sqrt{1 + x}$

Bài 1.25: Tính $\sqrt{e}$ chính xác đến $0,0001$.

1.8 Lời giải

Bài 1.1:

(a) Hàm số xác định nếu $2x-1\neq 0$, hay $x\neq \frac{1}{2}$. Vì vậy $X=(-\infty,1/2)\cup(1/2,\infty)$.

(b) Hàm này xác định nếu $x-1\neq 0$ và $1+x>0$, hay $x\neq 1$ và $x>-1$. Vì vậy $X=(-1,1)\cup(1,\infty)$.

(c) Số hạng thứ nhất nhận các giá trị thực khi $x\leq \frac{1}{2}$. Số hạng thứ hai nhận các giá trị thực khi $-1\leq \frac{3x-1}{2}\leq 1$. Giải ra ta được $x\leq 1, x\geq -\frac{1}{3}$. Do đó miền xác định là đoạn $[-1/3,1/2]$.

(d) Hàm số xác định với $x\neq 0$. Nên $X=(-\infty,0)\cup(0,\infty)$.

(e) Điều kiện để hàm số xác định là $3x+1\geq 0$ và $x+1\geq 0$. Vậy $X=[-1/3,\infty)$.

Bài 1.2:

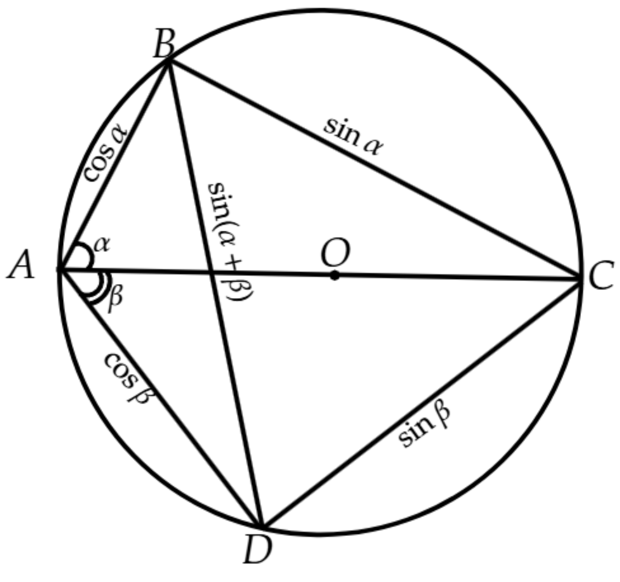
(a) Biến đổi, ta được $f(x)=(x-3)^2-4\geq -4$. Do đó tập hợp giá trị của hàm là khoảng $Y=[-4,\infty)$.

(b) Vì $-1\leq \sin x\leq 1$, nên $-3\leq \sin x\leq 3$. Do đó $-1\leq f(x)\leq 5$ và $Y=[-1,5]$.

(c) Ta xem xét hai trường hợp : $x<0$ và $x>0$.
Nếu $x<0$, $y+|y|=1$. Giá trị của y không thể nhỏ hơn 0 vì điều này tương đương với $y+|y|=0$. Do đó $y=\frac{1}{2}$ trong trường hợp này.
Nếu $x>0$, y chắc chắn lớn hơn 0 và do đó ta thu được hàm $y=x+\frac{1}{2}$.
Dễ thấy, miền giá trị $Y=[1/2,\infty)$.

(d) Miền giá trị của hàm là $Y=[0,4]$.

Bài 1.3:
Xét đường tròn tâm O có đường kính AC với độ dài bằng 1 và tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường



tròn như hình bên.
Vì $|AC|=1$ nên tất cả độ dài trong biểu đồ được kết nối với sine hoặc cosine, và chú ý rằng hai góc ở đỉnh B và D là các góc vuông.

Lúc này, theo định lý hàm sine trong tam giác, độ dài đoạn BD chính là $\sin(\alpha+\beta)$. Định lý Ptoleme lại cho biết rằng

$$|AC| \cdot |BD| = |AB|\dot{|}CD| + |BC|\dot{|}AD|.$$

và biểu thức này trở thành, sau khi ta thay các giá trị sine/cosine tương ứng:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.\ (Q.E.D)$$

Sử dụng định lý Pythagoras, ta chứng minh được đẳng thức còn lại.

Bài 1.4:

Tài liệu tham khảo

[1] Albert Einstein. "On the Electrodynamics of Moving Bodies". In: *Annalen der Physik* 17 (1905), pp. 891–921.

[2] Donald E. Knuth. *The TeXbook*. Addison-Wesley, 1984.

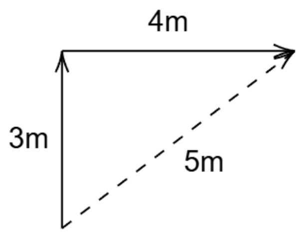
Tuần 2

Vector & Đại Số Tuyến Tính

2.1 Vector

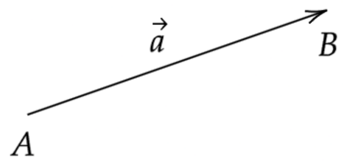
2.1.1 Giới thiệu về vector

Xét một tình huống mà ở đó bạn di chuyển 3m về phía Bắc, sau đó đi tiếp 4m về phía Đông. Nếu như bạn chỉ quan tâm đến quãng đường mình đã đi được, ta chỉ đơn giản là lấy $3 + 4 = 7$m. Tuy nhiên, khi ta xét đến **Độ rời** hay khoảng cách giữ 2 điểm đầu và cuối, kết quả sẽ là $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$m. Như vậy, ta có thể thấy rằng việc chỉ xét đến độ dài của đoạn đường là không đủ, mà cần phải xét đến cả phương và chiều của đoạn đường đó.



Chúng ta sẽ làm việc với những bài toán như vậy khá nhiều, vì vậy sẽ là cần thiết để định nghĩa một đối tượng toán học có thể mô tả cả độ lớn và hướng. Đối tượng này được gọi là **vector**.

Định nghĩa 2.1.1. *Vector AB (hình vẽ), kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, là một mũi tên được đặc trưng bởi độ dài a của nó (do đó còn được kí hiệu là $\overrightarrow{a}$) và hướng mà nó chỉ.*



Như vậy, các đại lượng được có hướng như vận tốc, lực có thể được định nghĩa bởi một vector, còn các đại lượng vô hướng như khôi lượng, nhiệt độ thì không.
Ta sẽ tiếp tục với một số định nghĩa liên quan đến vector.

Định nghĩa 2.1.2. *So sánh hai vector:*

- *Hai vector $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ được coi là bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng, kí hiệu là $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$.*

- *Hai vector $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ có cùng phương nếu chúng song song.*
- *Hai vector $\overrightarrow{a}$ và $\overrightarrow{b}$ có cùng giá nếu chúng cùng nằm trên một đường thẳng.*

Để hiểu được vì sao vector lại quan trọng, ta sẽ tìm hiểu các phép toán với vector.

2.1.2 Các phép toán với vector

2.2 Động Học

2.2.1 Toạ độ cong

2.2.2 Các thông số Động Học

2.3 Nhập môn Đại Số Tuyến Tính

2.3.1 Giới thiệu về ma trận

Ta xét bảng số sau:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Đây là một ô vuông có kích thước 3×3, tức là có 3 *hàng* và 3 *cột*. Hàng được đọc từ trên xuống và cột được đọc từ trái sang. Mỗi một phần tử trong 9 phần tử của bảng số này được xác định với một cặp số duy nhất của hàng và cột. Ví dụ, số 4 nằm ở hàng thứ hai và cột thứ ba. Các số $12, 4, 9$ đều nằm ở cột thứ ba và các số $3, 0, 4$ đều nằm ở hàng thứ hai.
Hay ta cũng có thể lấy thêm một bảng số khác, chẳng hạn

$$B = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.6 \\ 20.4 & 5.5 \\ 9.7 & -6.2 \end{bmatrix}$$

Đây là một bảng số với 3 hàng và 2 cột. Nếu vẫn giữ nguyên cách đọc bảng số trước đó, thì số 9.7 có vị trí là hàng thứ ba, cột thứ nhất.
Vậy ý nghĩa của những bảng số (A và B) vừa rồi là gì? Ta hãy cùng xem xét thêm một ví dụ: hai bảng số có 3 hàng và 1 cột,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ f \end{bmatrix}.$$

Điều đáng chú ý ở đây là ta có thể gọi $\mathbf{v}$ và $\mathbf{w}$ là các *vector*. Thật vậy, nếu ta để chúng tuân theo các quy tắc của vector, các thành phần của hai bảng số vừa rồi sẽ giống như là các thành phần của một vector. Nghĩa là,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \\ c + f \end{bmatrix},$$

hay

$$4 \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4a \\ 4b \\ 4c \end{bmatrix}.$$

Về cơ bản, đây chỉ là một sự thay đổi về cách viết. Cụ thể là thay vì viết (a, b, c), ta viết $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.

Như vậy chuyện gì xảy ra với A và B? Chúng cũng là các vector (theo nghĩa trừu tượng hơn), nhưng tạm thời ta có thể chỉ cần nhìn nhận theo khía cạnh: *các cột của chúng là các vector.*

Định nghĩa 2.3.1. Ma trận *là một mảng chữ nhật hoặc hình vuông (ma trận vuông) chứa các số hoặc những đối tượng toán học khác, mà có thể định nghĩa một số phép toán như cộng hoặc nhân trên các ma trận.*

Một ma trận A có m hàng và n cột được gọi là một ma trận $m \times n$, điều này xác dịnh độ lớn của ma trận. Ta viết $A_{m\times n}$ để chỉ ma trận A có kích thước $m \times n$. Chú ý rằng ta đọc hàng trước cột.

2.3.2 Phép biến đổi tuyến tính

2.3.3 Các phép toán trên ma trận

Tài liệu tham khảo

[1] Unknown Author. *Extra Book Not Cited*. Unknown Publisher, 2000.

[2] Introduction to Linear Algebra. *Gilbert Strange*. Addison-Wesley, 2000.

Tuần 3

Chuyển Động Của Chất Điểm Trong Mặt Phẳng

3.1 Tích phân

3.1.1 Ý tưởng

3.1.2 Định lý cơ bản của giải tích

3.2 Phương trình vi phân (thường)

3.3 Chuyển động trong mặt phẳng

3.3.1 Bài toán ném xiên

3.3.2 Định lý cộng vận tốc giữa các hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến so với nhau

3.3.3 Định lý cộng gia tốc giữa các hệ quy chiếu chuyển động tịnh tiến so với nhau

3.3.4 Tiếp cận bài toán chuyển động

Tuần 4

Cơ Động Lực Học Chất Điểm

4.1 Ba Định Luật Newton

4.1.1 Định luật thứ nhất

4.1.2 Định luật thứ hai

4.1.3 Định luật thứ ba

4.1.4 Một số "loại" động lượng khác

4.2 Nguyên lý tương đối Galileo

4.2.1 Phép biến đổi Galileo

4.2.2 Luận bàn

4.3 Các lực cơ học

4.4 Liên kết

4.4.1 Các ràng buộc hình học

4.4.2 Vai trò của các loại lực liên kết

4.5 Phương pháp tiếp cận một bài toán động lực học

Tuần 5

Dao Động

Tuần 6

Phương Pháp Số Trong Mô Phỏng

Tuần 7

Mở Đầu Về Giải Tích Vector & Các Định Luật Bảo Toàn

Tuần 8

Năng Lượng

Tuần 9

Nhập Môn Cơ Học Giải Tích

9.1 Liên kết động học

Phần lớn các học sinh bắt đầu khảo sát các liên kết chuyển động dựa trên những trực giác mơ hồ, các nhận định cảm tính các phương pháp đổi hệ quy chiếu. Thoạt đầu, sự thông minh và sự nhạy bén về khả năng tưởng tượng hình học giúp cho nhiều học sinh nhanh chóng giải quyết được vấn đề một cách hiệu quả. Song, với các cơ hệ phức tạp bao gồm nhiều liên kết chuyển động, các vật chuyển động trong không gian 3 chiều, những quan sát cảm tính thường xuyên mang đến những kết luận sai. Các lý thuyết về liên kết động học, ứng dụng giải tích trong khảo sát các liên hệ về tọa độ, lực, gia tốc mang đến sự chặt chẽ. Không những giúp cho chúng ta có một lời giải chắc chắn, các lý thuyết về liên kết là một đường lối chuẩn mực cho lời giải các bài toán cơ học, giúp không chỉ con người với trí khả năng tư duy trừu tượng sâu sắc, mà ngay cả các hệ thống máy tính, lập trình cũng có thể tự thiết lập được các phương trình vi phân mô tả chuyển động.
Trong mục này, chúng ta sẽ khảo sát các liên kết chuyển động dựa trên hệ thống các bậc tự do, hệ tọa độ suy rộng, phân biệt các loại liên kết và ứng dụng lý thuyết giải tích trong tính toán các vận tốc, gia tốc trong hệ cơ học.

9.1.1 Bậc tự do

Tập hợp các thông số **đủ** để xác định được vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu xác định, được gọi là các tọa độ suy rộng của cơ hệ.
Các tọa độ suy rộng được kí hiệu là $q_1, q_2, \ldots, q_m$. Các tọa độ suy rộng có thể là các tọa độ Đề các của các chất điểm thuộc cơ hệ, có thể là góc quay, các tọa độ cong...
Bản chất vật lý của tọa độ suy rộng là bất kỳ, do đó thứ nguyên của nó có thể không phải là độ dài như tọa độ Đề các.[1]
Vị trí của cơ hệ được xác định nhờ tọa độ suy rộng, nên các tọa độ Decartes của các chất điểm của cơ hệ có thể biểu diễn qua các tọa độ suy rộng:

$$\begin{aligned} x_k &= x_k(t, q_1, q_2, \ldots, q_m) \\ y_k &= y_k(t, q_1, q_2, \ldots, q_m) \\ z_k &= z_k(t, q_1, q_2, \ldots, q_m) \end{aligned}$$

Hoặc viết ở dạng rút gọn:

$$\mathbf{r_k} = \mathbf{r_k}(t, q_1, q_2, \ldots, q_m)$$

[1] Dựa theo quyển sách "Bài tập Cơ học Tập 2: Động lực học" của giáo sư Đỗ Sanh.

Ta xét trường hợp con lắc đôi, để xác định vị trí của con lắc ta có những tọa độ sau: (ĐANG CẬP NHẬT HÌNH MINH HỌA)

$$(x_A, y_A, x_B, y_B)$$
$$(\theta, \phi)$$

Nhận thấy trong hai tập hợp nêu trên, tập hợp đầu tiên các thông số không độc lập với nhau, quả thực vậy đối với tập hợp thứ nhất:

$$x_A{}^2 + y_B{}^2 = l_1{}^2; (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l_2{}^2$$

với tập hợp thứ hai, các tọa độ đề các của các chất điểm của cơ hệ được biểu diễn bằng các hệ thức sau:

$$\begin{aligned}
x_A &= OA\cos\theta,\\
y_A &= OA\sin\theta,\\
x_B &= OA\cos\theta + AB\cos\phi,\\
y_B &= OA\sin\theta + AB\sin\phi.
\end{aligned}$$

Vậy tập hợp (θ, ϕ) là các tọa độ suy rộng **đủ** của hệ con lắc. Còn (x_A, y_A, x_B, y_B) là các tọa độ suy rộng **dư**.

9.1.2 Liên kết Holonom và liên kết phi Holonom

Một phương trình liên kết động học thông thường sẽ có dạng

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0. \tag{9.1}$$

Với $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$ và $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n]$ là các tọa độ, tọa độ suy rộng của cơ hệ và đạo hàm bậc nhất (vận tốc) của chúng.
Từ phương trình liên kết trên, ta có thể phân loại các cơ hệ thành một số loại như sau [2]:

- **Liên kết holonom (honomic)**, hay còn được gọi là **liên kết hình học**, **liên kết hữu hạn**, là các liên hệ không phụ thuộc vào các đạo hàm bậc nhất của các tọa độ, tức là

$$f(\mathbf{q}, t) = 0.$$

  và ngược lại là **liên kết phi holonom (nonholonomic)**.

- **Liên kết scleronom (scleronomous)**, hay còn được gọi là **liên kết dừng**, là các liên kết không phụ thuộc tường minh vào thời gian (tức là $\partial\mathbf{q}/t = 0$), ngược lại với nó là **liên kết Rheonom (Rheonomous)**, hay còn được gọi là **liên kết không dừng**.

- Liên kết giữ và không giữ...

Trong các ứng dụng kỹ thuật, các cánh tay robot, các cơ cấu tay chi tiết máy thường là các liên kết holonom. Còn các liên kết phi holonom thường xuất hiện trong các hệ mobile robot, máy bay, drone,... Để xác định tọa độ qua các liên kết holonom, ta chỉ cần xác định thông qua các tính chất hình học. Trong khi đó, với các hệ liên kết phi holonom, việc xác định tọa độ của các vật thể trở nên tương đối phức tạp, đòi hỏi ta phải ứng dụng các kỹ thuật định vị ngoài cơ học như sử dụng các cảm biến, sóng điện từ, radar,... Trong tài liệu này, ta sẽ chỉ tập trung vào lĩnh vực cơ lý thuyết, vì vậy, cụ thể ta sẽ chỉ phân tích về các cơ hệ có các liên kết holonom.

[2]Dựa theo quyển sách "Cơ học giải tích" của giáo sư Nguyễn Quang Đạo.

9.1.3 Ứng dụng đạo hàm toàn phần và ma trận Jacobian trong tính toán vận tốc, gia tốc các điểm của cơ hệ Holonom

Giả sử trong một cơ hệ có n bậc tự do với các tọa độ suy rộng tương ứng là $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$. Với một tọa độ bất kỳ nào đó có liên kết phụ thuộc vào các tọa độ suy rộng kia theo dạng có thể tách biến được:

$$x = f(\mathbf{q})$$

Ta sẽ có thể tìm vận tốc, tức là đạo hàm bậc nhất của x theo thời gian t theo công thức của đạo hàm toàn phần:

$$x = \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial t}. \tag{9.2}$$

Đối với các liên kết Holonom $\partial f/\partial t = 0$, nên

$$x = \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}. \tag{9.3}$$

9.1.4 Lực bị động trong bài toán liên kết Holonom

9.2 Cơ học Lagrange

9.2.1 Nguyên lý tác dụng tối thiểu

9.2.2 Phương trình Lagrange loại II

9.2.3 Phương trình Lagrange loại I

9.2.4 Động lượng suy rộng

9.2.5 Định lý Noether

9.2.6 Giải phương trình chuyển động bằng phương pháp Runge-Kutta 4

9.2.7 Tính toán lực bị động dựa trên phương trình Lagrange loại 2

9.3 Các lý thuyết cơ học giải tích khác

9.3.1 Cơ học Hamilton

9.3.2 Nguyên lý Gauss về liên kết tối thiểu

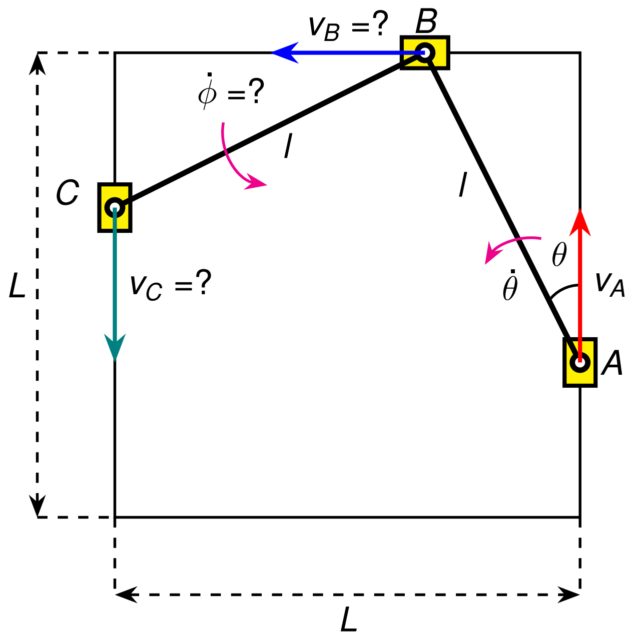
9.3.3 Phương trình Appell cho cơ hệ phi Holonom

9.4 Bài tập

Chuyển động liên kết

Bài 9.1: Va chạm vuông vắn (Hướng tới VPhO 43)
Hai thanh thẳng đồng chất, cứng, dài l được nối với nhau bằng một bản lề ở đầu thanh. Các đầu của hai thanh cứng này trượt trên khung hình vuông, đặt cố định trong mặt phẳng nằm

ngang, có độ dài cạnh là L (với $\frac{\sqrt{3}}{2}l < L < 2l$). Ta lần lượt gọi 3 điểm đầu các thanh là A, B, C (như hình 9.1). Góc tạo bởi thanh AB và cạnh khung hình vuông có chứa đầu A là θ. Bỏ qua ma sát ở khung vuông, thanh trượt và các bản lề.



Hình 9.1: Khung và các thanh quay.

1. Tìm vận tốc của B, C và vận tốc góc của thanh BC theo θ và vận tốc góc $\dot{\theta}$ của thanh AB.

2. Tại một thời điểm A có vận tốc là v, gia tốc là a, góc $\theta = \theta_0$ thì gia tốc của B là bao nhiêu?

Bài 9.2: Cơ cấu tay quay con trượt (VPhO 2020)
Một cơ cấu cơ khí thanh truyền tay quay (như hình 9.2). Tay quay OA có chiều dài r và quay đều với vận tốc góc ω quanh trục quay cố định O, chiều quay cùng chiều kim đồng hồ. Thanh truyền AB có chiều dài l và điểm B ở đầu thanh gắn với con trượt luôn chuyển động thẳng trên một rãnh nằm ngang. Xét trong hệ quy chiếu gắn với mặt đất, ta cần xác định các đặc trưng động học của thanh AB.

1. Tại thời điểm tay quay OA tới vị trí góc $\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2}$, hãy xác định:

   a, Vận tốc $\mathbf{v_B}$ của đầu B.

   b, Vận tốc góc ω_{AB} của thanh AB.

   c, Gia tốc $\vec{a}_B$ của đầu B và gia tốc góc γ_{AB} của thanh AB.

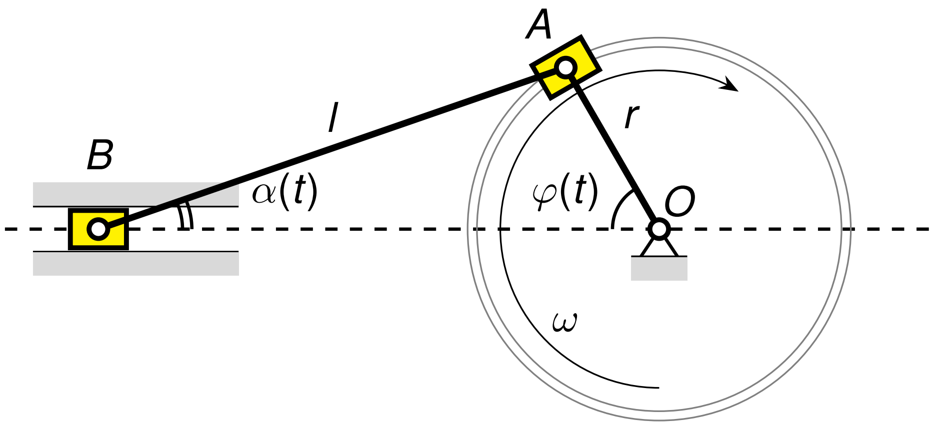
   Áp dụng bằng số tính v_B, ω_{AB}, a_B, γ_{AB} với các giá trị $r = 10\,\text{cm}$, $\omega = 5\,\text{rad/s}$, $l = 30\,\text{cm}$.

2. Khi tay quay OA tới vị trí ứng với góc $\varphi = \widehat{BOA} = \dfrac{\pi}{2}$, hãy xác định:

   a, Gia tốc $\vec{a}_B$ của đầu B.

   b, Gia tốc góc γ_{AB} của thanh AB.

   c, Ví trí M và N trên thanh AB tương ứng với điểm có gia tốc lớn nhất và gia tốc nhỏ nhất. Xác định gia tốc của các điểm đó.



Hình 9.2: Cơ cấu tay quay - con trượt.

3. Khảo sát chuyển động của đầu B của thanh AB theo thời gian t:

   a, Viết phương trình vận tốc v_B của điểm B theo thời gian t với $0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega}$, chọn gốc thời gian $t = 0$ khi $\varphi(0) = 0$.

   b, Cơ cấu cơ khí trên cần có điều kiện gì để con trượt dao động điều hòa?

Cơ học Lagrange

9.5 Lời giải

Bài 9.1:

1. Các tọa độ và vận tốc lần lượt được biểu diễn theo θ và $\dot{\theta}$ dưới dạng:

$$x_A = L - l\cos\theta \Rightarrow v_A = \dot{\theta} l \sin\theta.$$
$$x_B = l\sin\theta \Rightarrow v_B = \dot{\theta} l \cos\theta.$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{L - l\sin\theta}{l}\right) \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\theta}\frac{l\cos\theta}{\sqrt{l^2 - (L - l\sin\theta)^2}}.$$
$$x_C = \sqrt{l^2 - (L - l\sin\theta)^2} \Rightarrow v_C = \dot{\theta}\frac{(L - l\sin\theta)l\cos\theta}{\sqrt{l^2 - (L - l\sin\theta)^2}}.$$

2. Tại thời điểm $v_A = v$ và $a_A = a$, ta có thể tìm lại $\dot{\theta}$ và $\ddot{\theta}$ theo các bước:

$$v = \dot{\theta} l \sin\theta \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{l\sin\theta}. \tag{9.4}$$

Đạo hàm $v = \dot{\theta} l \sin\theta$ theo thời gian, ta được

$$a = \ddot{\theta} l \sin\theta + \dot{\theta}^2 l \cos\theta = \ddot{\theta} l \sin\theta + \frac{v^2}{l}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{a}{l\sin\theta} - \frac{v^2}{l^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}. \tag{9.5}$$

Đạo hàm biểu thức v_B ta tìm được ở phần **a,** theo thời gian

$$a_B = \ddot{\theta} l \cos\theta - \dot{\theta}^2 l \sin\theta. \tag{9.6}$$

Thế $\dot{\theta}$ và $\ddot{\theta}$ từ phương trình trên vào, thay $\theta = \theta_0$, ta tìm được gia tốc của B

$$a_B = \frac{1}{\tan\theta_0}a - \frac{v^2}{l\sin^3\theta_0}. \tag{9.7}$$

Bài 9.2:

Tuần 10

Bàn Về Giải Một Bài Toán Cơ Học

10.1 Động lực học hệ 1 bậc tự do

10.1.1 "Khối lượng hiệu dụng" trong hệ 1 bậc tự do

10.1.2 Thành phần "gia tốc hướng tâm" đối với hệ tọa độ suy rộng

10.2 Động lực học hệ đa bậc tự do và Robotic

10.2.1 Ma trận quán tính

10.2.2 Phương trình tổng quát trong điều khiển hệ đa vật và ma trận Christoffel

10.3 Điều khiển Robot công nghiệp

10.3.1 Mô phỏng và giải hệ phương trình vi phân trong Robotic

10.3.2 Điều khiển Robot bằng thuật toán PID bù trọng trường

10.4 Động học Robotic

10.4.1 Động học thuận và bảng Denavit-Hartenberg

Bảng 10.1: Tham số Denavit–Hartenberg.

Khớp	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	a_1	α_1
2	θ_2	d_2	a_2	α_2
3	θ_3	d_3	a_3	α_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	θ_n	d_n	a_n	α_n

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{10.1}$$

10.4.2 Động học nghịch Robotic

10.4.3 Thay thế ma trận Christoffel bằng ma trận hướng tâm/Coriolis - Tích Kronecker

- Phương trình động lực học tổng quát sử dụng tích Kronecker

$$H(q)\ddot{q} + C(q)\dot{q} \otimes \dot{q} = -\nabla U + F. \tag{10.2}$$

- Ma trận hướng tâm/Coriolis $C(q)$ được tính bằng biểu thức

$$C(q) = \frac{\partial H(q)}{\partial q} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{vec}(H)}{\partial q}\right)^T. \tag{10.3}$$

10.4.4 Bài tập

10.4.5 Lời giải

Tuần 11

Đo Lường & Xử Lý Số Liệu

11.1 Phân tích thứ nguyên và dự đoán quy luật vật vật lý

11.2 Bài toán hồi quy và hồi quy tuyến tính

11.2.1 Bài toán hồi quy trong học máy

11.2.2 Hồi quy hàm đơn biến, hàm mất mát và hệ số tương quan

11.2.3 Hồi quy hàm đa biến

11.2.4 Hồi quy đa thức

11.3 Tối ưu hàm mất mát

11.3.1 Thuật toán Gradient descent

11.3.2 Các thuật toán tối ưu khác: Newton, Gauss-Newton, Lenvenberg-Marquardt

11.4 Học sâu và mạng Neural

11.4.1 Bài toán phân loại trong học máy

11.4.2 Mô hình mạng Neural

11.4.3 Thuật toán lan truyền ngược

Tuần 12

Tổng Kết

A

Python Cơ Bản

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Giới thiệu

Python là một ngôn ngữ lập trình phổ biến, được tạo ra bởi Guido van Rossum. Với tính đơn giản và dễ đọc, đây là ngôn ngữ thích hợp để nhập môn lập trình. Để bắt đầu, ta có thể tải trực tiếp Python từ trang chủ:Python Download . Sau khi cài đặt, ta có thể sử dụng Python thông qua các IDE như PyCharm, Visual Studio Code hoặc đơn giản là sử dụng terminal. Chi tiết, hãy tra mạng.
Các bạn có thể dễ dàng tự học Python thông qua các tài nguyên có sẵn trực tuyến như các khoá học trên Youtube hay qua các trang web,chẳng hạn như,W3School . Các bạn cũng có thể tham khảo các khoá học trên Udemy, Coursera, edX,... hay đọc sâu thêm trên SciPy.

B

Phân Tích Thứ Nguyên

Nam dui ligula, fringilla a, euismod sodales, sollicitudin vel, wisi. Morbi auctor lorem non justo. Nam lacus libero, pretium at, lobortis vitae, ultricies et, tellus. Donec aliquet, tortor sed accumsan bibendum, erat ligula aliquet magna, vitae ornare odio metus a mi. Morbi ac orci et nisl hendrerit mollis. Suspendisse ut massa. Cras nec ante. Pellentesque a nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Aliquam tincidunt urna. Nulla ullamcorper vestibulum turpis. Pellentesque cursus luctus mauris.