xPhO Physics Club

GIỚI THIỆU VÀ MỞ ĐẦU VỀ GIẢI TÍCH

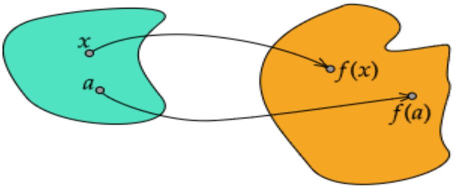
Người trình bày: Võ Anh Tuệ

Mục lục

Mục lục

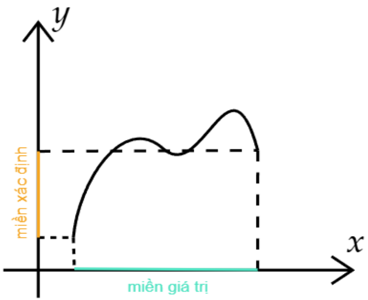
Định nghĩa

Hàm f là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x thuộc tập hợp X với một và chỉ một phần tử , kí hiệu $f(x)$, thuộc một tập hợp Y.



$f : X \to Y$

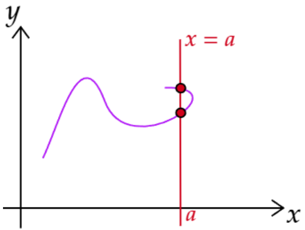
Đồ thị của f bao gồm mọi điểm (x, y) sao cho $y = f(x)$ với $x \in X$.



Một số hàm số quen thuộc:

- $y = \sin x : X = (-\infty, \infty), Y = [-1, 1]$
- $y = |x| : X = (-\infty, \infty), Y = (0, \infty)$

Chú ý, đây không phải là một hàm số:



Mục lục

Định nghĩa

Đạo hàm của hàm số f tại giá trị a, kí hiệu bởi $f'(a)$, là

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{1}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Các định lý của đạo hàm:

Định lý

Nếu f khả vi tại a, thì f liên tục tại a.

Lưu ý: Mệnh đề đảo của định lý này là sai, có các hàm liên tục khưng không khả vi. Ví dụ, hàm $f(x) = |x|$ là hàm liên tục nhưng không khả vi.

Đạo hàm

Định lý

Nếu f và g khả vi

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + g'f, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g + g'f}{g^2} \text{ với } g(x) \neq 0.$$

Định lý đạo hàm hợp

Nếu g khả vi tại x và f khả vi tại $g(x)$, thì hàm hợp $F = f \circ g \equiv f(g(x))$ khả vi tại x và F' được xác định bởi tích

$$F'(x) = f'(g(x))\dot{g}'(x) \tag{2}$$

Theo ký hiệu của Leibniz, nếu $y = f(u)$ và $u = g(x)$ đều là hàm khả vi, thì

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{3}$$

Xét đường cát tuyến của đường cong có phương trình $y = f(x)$ đi qua 2 điểm $P(a, f(a))$ và $Q(x, f(x))$ với $x \neq a$. Hệ số góc của đường cát tuyến PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \tag{4}$$

(Hình vẽ)

Định nghĩa

Tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $P(a, f(a)$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \tag{5}$$

Nếu giới hạn này tồn tại.

Đạo hàm $f'(a)$ chính là hệ số góc của đường tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại $x = a$.

Tiếp tuyến và tốc độ biến thiên

Giả sử y là đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng khác x. Khi đó ta viết $y = f(x)$. Nếu x biến thiên từ x_1 đến x_2 tương ứng với y biến thiên từ y_1 đến y_2, tỷ sai phân

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \tag{6}$$

được gọi là **tốc độ biến thiên trung bình** của y tương ứng với x.

Giới hạn

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) \tag{7}$$

được gọi là **tốc độ biến thiên tức thời** của y tương ứng với x.

Đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ biến thiên tức thời của $y = f(x)$ tại $x = a$.

Nếu $f(x)$ là quãng đường đi được của một vật, x là thời gian đi, đạo hàm $f'(a)$ chính là **vận tốc tức thời** của vật tại thời điểm $x = a$.

Đạo hàm của hàm đa thức:

Quy tắc lũy thừa

Nếu n là số thực tùy ý, thì

$$\frac{d}{dx} = nx^{n-1} \tag{8}$$

Đạo hàm của các hàm thông dụng

Đạo hàm của các hàm lượng giác:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Đạo hàm hàm mũ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}a^x &= a^x \ln a \\ \frac{d}{dx}\log_a x &= \frac{1}{x \ln a} \end{aligned} \tag{9}$$

Các giá trị của hàm $y = f(x)$ tại các điểm gần $P(a, f(a))$ rất gần với giá trị của hàm $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ là tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm P.
(Hình vẽ)

Xấp xỉ tuyến tính và vi phân

Định nghĩa

Phép tính xấp xỉ

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \tag{10}$$

được gọi là **xấp xỉ tuyến tính**.
Hàm tuyến tính mà đồ thị của nó là tiếp tuyến này

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{11}$$

được gọi là **tuyến tính hóa** của f tại a.

Khi x càng tiến lại gần a:

$$f'(x)\Delta x \longrightarrow f(x) - f(a) \equiv \Delta y \tag{12}$$

Định nghĩa

Khi $\Delta x \to 0$, ta kí hiệu $\Delta x = dx$, lúc này, $f'(x)dx$ được gọi là **vi phân** của hàm f, kí hiệu:

$$dy = f'(x)dx \tag{13}$$

Định lý

Vi phân của hàm số phụ thuộc vào cách ta chọn biến độc lập:

$$df(g(x)) = (f \circ g)'dx = f'(g)g'(x)dx = f'(g)dg \tag{14}$$

Đạo hàm bậc cao

Nếu f là hàm khả vi, f' cũng là hàm khả vi, vậy có thể có đạo hàm của f', được gọi là **đạo hàm bậc hai** của f, kí hiệu là f''. Quá trình tương tự có thể tiếp diễn: **Đạo hàm bậc** n thường được kí hiệu là $f^{(n)}$ và thu được bằng cách lấy đạo hàm của f n lần.

Đạo hàm và vi phân bậc cao

Vi phân bậc cao

Nếu f là hàm khả vi, f' cũng là hàm khả vi, vậy $f'(x)dx$ có thể có vi phân của nó, được gọi là **vi phân bậc hai** của f, kí hiệu bằng d^2f. Quá trình tương tự có thể tiếp diễn: **vi phân bậc** n, thường được kí hiệu là d^nf và thu được bằng cách lấy vi phân của f n lần, $d^nf = f^{(n)}df^n$.

Công thức Leibniz

...

Tài liệu tham khảo I