



Tính toán trong cơ học giải tích

Người trình bày: Nguyễn Thành Long



1. Liên kết động học

1.1 Liên kết, hệ tọa độ và số bậc tự do

1.2 Jacobian và liên hệ vận tốc giữa các hệ tọa độ

2. Động lực học robot

2.1 Động năng và ma trận quán tính

2.2 Phương trình động lực học đầy đủ và ma trận Christoffel

2.3 Mô phỏng chuyển động bằng phương pháp số

3. Ma trận còn có thể làm những gì trong cơ học?

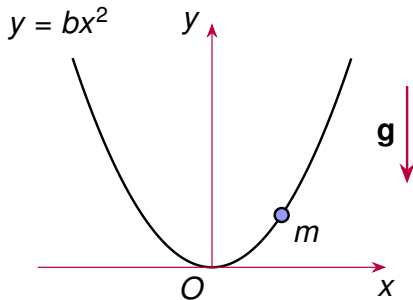
3.1 Bảng Denavit–Hartenberg

3.2 Thay thế ma trận Christoffel?

Liên kết Holonomic và phi Holonomic

► Liên kết Holonomic

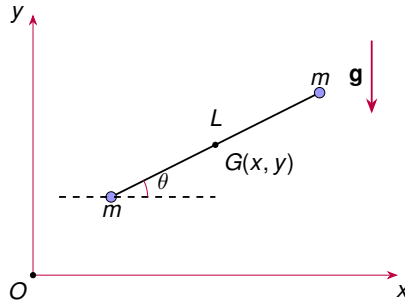
$$f(\mathbf{q}, t) = 0. \quad (1)$$



Hình: Một hạt chuyển động trên bề mặt parabol dưới tác dụng của trọng lực.

► Liên kết phi Holonomic

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0. \quad (2)$$



Hình: Một thanh chuyển động dưới tác dụng của trọng trường.

► Số bậc tự do

= số tọa độ suy rộng – số liên kết.

► Ví dụ: con lắc kép.

Cách 1: Sử dụng 4 tọa độ suy rộng (x_A, y_A, x_B, y_B) .

Các liên kết:

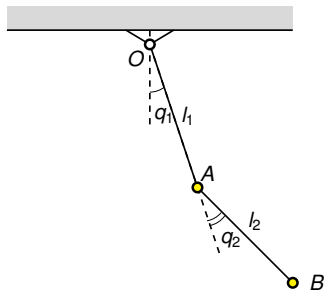
$$f_1 = x_A^2 + y_A^2 - l_1^2 = 0, \quad (3)$$

$$f_2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 - l_2^2 = 0. \quad (4)$$

Suy ra số bậc tự do: $4 - 2 = 2$

Cách 2: Sử dụng 2 tọa độ suy rộng (q_1, q_2) , không có liên kết giữa q_1 và q_2 .

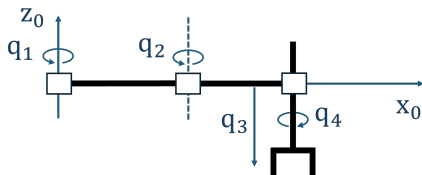
Suy ra số bậc tự do: $2 - 0 = 2$



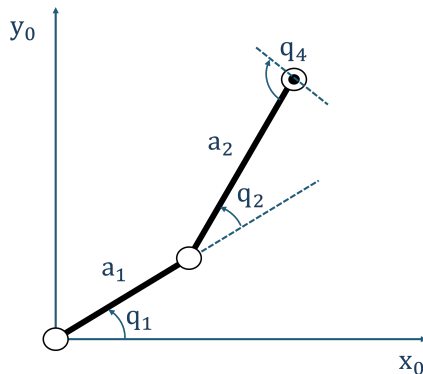
Hình: Con lắc kép.

Robot Scara 4 bậc tự do

- ▶ Robot Scara có 4 bậc tự do biểu diễn qua các tọa độ: $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$.
- ▶ 3 khớp quay: q_1, q_2, q_4 .
- ▶ 1 khớp tịnh tiến: q_3 .



Hình: Mặt cắt phương xOz của Robot Scara.



Hình: Mặt cắt phương xOy của Robot Scara.

Ma trận Jacobian và liên hệ vận tốc giữa các tọa độ

- ▶ Cho hai hệ tọa độ: $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ và $P = [x, y, z]^T$.
- ▶ Dựa vào phép đạo hàm toàn phần

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3} \dot{q}_3, \quad (5)$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3} \dot{q}_3, \quad (6)$$

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3} \dot{q}_3. \quad (7)$$

- ▶ Ma trận Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial z}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

- ▶ Ứng dụng: $\dot{P} = J\dot{q}$.

Ma trận Jacobian và liên hệ vận tốc giữa các tọa độ

- Ứng dụng cho Robot Scara.

$$\dot{x} = [-a_1 \sin(q_1) - a_2 \sin(q_1 + q_2)] \dot{q}_1 - a_2 \sin(q_1 + q_2) \dot{q}_2, \quad (9)$$

$$\dot{y} = [a_1 \cos(q_1) + a_2 \cos(q_1 + q_2)] \dot{q}_1 - a_2 \cos(q_1 + q_2) \dot{q}_2, \quad (10)$$

$$\dot{z} = -\dot{q}_3. \quad (11)$$

- Tính độ lớn vận tốc

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \dot{P}^T \dot{P} = \dot{q}^T (J^T J) \dot{q}. \quad (12)$$

1. Liên kết động học

1.1 Liên kết, hệ tọa độ và số bậc tự do

1.2 Jacobian và liên hệ vận tốc giữa các hệ tọa độ

2. Động lực học robot

2.1 Động năng và ma trận quán tính

2.2 Phương trình động lực học đầy đủ và ma trận Christoffel

2.3 Mô phỏng chuyển động bằng phương pháp số

3. Ma trận còn có thể làm những gì trong cơ học?

3.1 Bảng Denavit–Hartenberg

3.2 Thay thế ma trận Christoffel?

Động năng và ma trận quán tính

- ▶ Động năng:

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} v_i^T m_i v_i + \sum_{j=1}^M \frac{1}{2} \omega_j^T I_j \omega_j = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{k=1}^L J_k^T m_k J_k \right) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q}. \quad (13)$$

- ▶ Ma trận quán tính

$$H = \sum_{k=1}^L J_k^T m_k J_k. \quad (14)$$

Phương trình động lực học và ma trận Christoffel

► Hàm Lagrangian: $L = T - U$

► Phương trình Euler Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (15)$$

Phân tách hàm Lagrangian và bổ sung lực suy rộng

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + F_i. \quad (16)$$

► Lời giải tổng quát

$$H(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} = -\nabla U(q) + F. \quad (17)$$

► Phần tử hàng i cột j của ma trận Christoffel

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2} \left(\frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k. \quad (18)$$



Mô phỏng hệ Robotic bằng phương pháp số

- ▶ Hệ phương trình vi phân

$$\frac{d}{dt}q = \dot{q}, \quad (19)$$

$$\frac{d}{dt}\dot{q} = H(q)^{-1} [-C(q, \dot{q})\dot{q} - \nabla U(q) + F]. \quad (20)$$

- ▶ Lấy sai phân, rời rạc hóa biểu thức trong mô phỏng số

$$q|_{t+\Delta t} = q|_t + \dot{q}\Delta t, \quad (21)$$

$$\dot{q}|_{t+\Delta t} = \dot{q}|_t + H(q)^{-1} [-C(q, \dot{q})\dot{q} - \nabla U(q) + F] \Delta t. \quad (22)$$

- ▶ Chọn Δt rất nhỏ và tiến hành rất nhiều vòng lặp, thu được đồ thị của q và \dot{q} theo thời gian.



1. Liên kết động học

1.1 Liên kết, hệ tọa độ và số bậc tự do

1.2 Jacobian và liên hệ vận tốc giữa các hệ tọa độ

2. Động lực học robot

2.1 Động năng và ma trận quán tính

2.2 Phương trình động lực học đầy đủ và ma trận Christoffel

2.3 Mô phỏng chuyển động bằng phương pháp số

3. Ma trận còn có thể làm những gì trong cơ học?

3.1 Bảng Denavit–Hartenberg

3.2 Thay thế ma trận Christoffel?

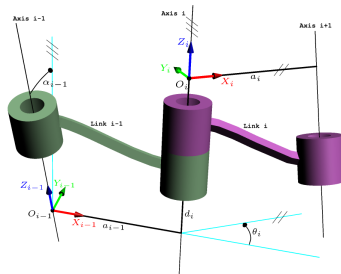
Bảng Denavit–Hartenberg

Bảng: Tham số Denavit–Hartenberg.

Khớp	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	a_1	α_1
2	θ_2	d_2	a_2	α_2
3	θ_3	d_3	a_3	α_3
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	θ_n	d_n	a_n	α_n

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\sin \theta_i \cos \alpha_i & \sin \theta_i \sin \alpha_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \theta_i \cos \alpha_i & -\cos \theta_i \sin \alpha_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} P_x^i & P_y^i & P_z^i & 1 \end{bmatrix}^T = T_i^{i-1} \begin{bmatrix} P_x^{i-1} & P_y^{i-1} & P_z^{i-1} & 1 \end{bmatrix}^T \quad (24)$$



Hình: Các tham số biến khớp để xây dựng bảng Denavit-Hartenberg [1].

Thay thế ma trận Christoffel?

- ▶ Phương trình động lực học tổng quát sử dụng tích Kronecker [2]:

$$H(q)\ddot{q} + C(q)\dot{q} \otimes \dot{q} = -\nabla U + F. \quad (25)$$

- ▶ Ma trận hướng tâm/Coriolis $C(q)$ được tính bằng biểu thức

$$C(q) = \frac{\partial H(q)}{\partial q} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \text{vec}(H)}{\partial q} \right)^T. \quad (26)$$

- [1] J. Craig, R. Siegwart, I. Nourbakhsh, and D. Scaramuzza, "Introduction to robotics: Mechanics and control," , 2011.
- [2] N. T. M. Tuan, P. T. Chung, D. D. Khoa, and P. D. Phong, "Kinematic and dynamic analysis of multibody systems using the kronecker product," *Vietnam Journal of Science and Technology*, vol. 57, no. 1, pp. 112–127, 2019. DOI: 10.15625/2525-2518/57/1/12285. [Online]. Available: <https://vjs.ac.vn/index.php/jst/article/view/12285>.

