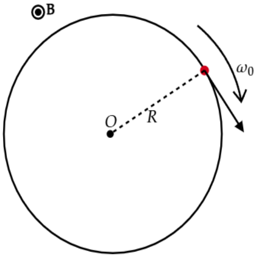
xPhO Physics Club

Bất Biến

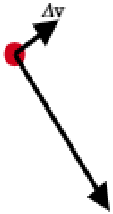
Người trình bày: Hirrus

Mục lục

Bài toán khởi động



Hình: Chuyển động ban đầu



Hình: Nhiễu động nhỏ

- $\mathbf{B} = \frac{B_0}{r^n}\hat{z}$.
- $\omega_0 = \frac{eB_0}{mR^n}$.
- $|\Delta\mathbf{v}| \ll \omega_0 R$.
- $r_{max} = R + \delta, \quad \delta \ll R$.

Lời giải

Từ định luật II Newton và định luật Lorentz:

$$m\mathbf{a} = e\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Kết quả thu được:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} \\ \ddot{z} \end{bmatrix} = \frac{eB_0}{m} \begin{bmatrix} r^{1-n}\dot{\phi} \\ -r^{-n}\dot{r} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Lời giải

Chú ý rằng,

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi}).$$

Kết hợp với phương trình (1), và thu được

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\phi} + \frac{1}{2-n}\frac{eB_0}{m}r^{2-n}\right) = 0.$$

Hay,

$$r^2\dot{\phi} + \frac{1}{2-n}\frac{eB_0}{m}r^{2-n} = const. \quad (!)$$

Kết quả cuối cùng:

$$r = R + \delta\cos\left(\omega_0\sqrt{1-n}t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Mục lục

Hệ chất điểm là tập hợp của N chất điểm M_i có khối lượng m_i và vận tốc $\mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$.
Ta định nghĩa khối tâm G của hệ chất điểm là điểm sao cho

$$\Sigma_i m_i \mathbf{GM_i} = 0. \tag{3}$$

Khi đó,

$$\mathbf{OG} = \frac{\Sigma_i m_i \mathbf{OM_i}}{m}. \tag{4}$$

và

$$\mathbf{p} = \Sigma_i m_i \mathbf{v}_i = m\mathbf{v_G}. \tag{5}$$

Trong đó $m = \Sigma_i m_i$ và $\mathbf{p}$ là khối lượng và động lượng toàn phần của hệ.

Định luật II Newton cho hệ chất điểm:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Sigma_i \mathbf{F}_i + \Sigma_i \Sigma_{j\neq i} \mathbf{f}_{ij}. \tag{6}$$

Trong đó $\mathbf{F}_i$ là ngoại lực tác dụng lên M_i, và $\mathbf{f}_{ij}$ là lực do M_j tác dụng lên M_i.
Số hạng thứ hai trong vế phải bằng 0 do định luật III Newton:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \Sigma_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a_G}. \tag{7}$$

Nếu tổng hợp lực ngoài tác dụng lên hệ bằng không, thì động lượng toàn phần của hệ được bảo toàn:

$$\mathbf{p} = \mathbf{const}. \tag{8}$$

Mô men động lượng

Mô men động lượng $\mathbf{L}$ của một hạt quanh một điểm O được định nghĩa bởi:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{9}$$

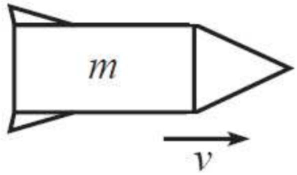
Trong đó $\mathbf{r}$ là toạ độ của hạt so với điểm O. Mô men động lượng của một hệ chất điểm là tổng mô men động lượng của các chất điểm trong đó:

$$\mathbf{L} = \Sigma_i \mathbf{r_i} \times \mathbf{p_i}. \tag{10}$$

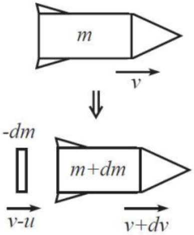
Nếu nội lực trong hệ do các chất điểm tác dụng lên nhau là lực xuyên tâm, và $\mathbf{r_i} \times \mathbf{F_i} = \mathbf{0}$, mô men động lượng của hệ được bảo toàn:

$$\mathbf{L} = \mathbf{const}. \tag{11}$$

Xét một tên lửa có tổng khối lượng m đang bay trong vũ trụ với vận tốc v. Nhiên liệu được phóng ra sau một cách từ từ với vận tốc u so với tên lửa. Tính độ tăng vận tốc của tên lửa sau khi nó xả được một khối lượng nhiên liệu Δm.



Bài toán tên lửa



Áp dụng định luật bảo toàn động lượng:

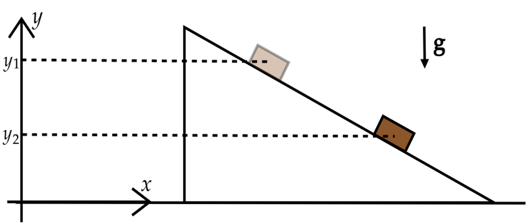
$$mv = (m + dm)(v + dv) + (-dm)(v - u).$$

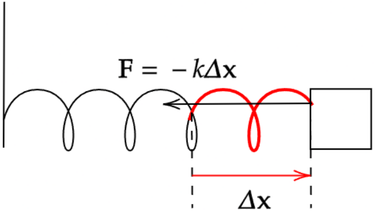
Ta suy ra được tích phân:

$$\int_{v}^{v+\Delta v} dv = -u \int_{m}^{m-\Delta m} \frac{dm}{m}. \tag{12}$$

Từ đó ta thu được Δv:

$$\Delta v = u \ln \frac{m}{m - \Delta m}. \tag{13}$$





$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} - mgy\right) = 0.$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2} + \frac{k(\Delta x)^2}{2}\right) = 0.$$

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \int_{y_1}^{y_2}(-mg)dy = 0.$$

$$\Delta\left(\frac{mv^2}{2}\right) - \int_{x_1}^{x_2}(-k\Delta x)dx = 0.$$

Động năng, công, và thế năng

- Đại lượng $K = \frac{mv^2}{2}$ được gọi là động năng.
- Đại lượng $A = \int_{q_1}^{q_2} F_q dq$ được gọi là công.
- Đại lượng $V(q) = -\int_{\mathcal{O}}^{q} F_q(q) dq$ được gọi là thế năng.

Định lý biến thiên động năng:

$$\frac{dK}{dt} = \sum \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}.$$

Nếu công của tất cả các lực tác dụng có thể được viết dưới dạng một hàm thế năng $V(q)$, thì *cơ năng* bảo toàn:

$$E = K + V = const.$$

Chú ý: Không phải công của mọi lực chỉ phụ thuộc vào toạ độ đều có thể viết dưới dạng thế năng.

Năng lượng của hệ

$$E = \sum_i \frac{m_i v_i^2}{2} + V.$$

$$V = V_{12} + V_{13} + \cdots + V_{V1N} + V_{23} + \cdots + V_{(N-1)N} = \sum_{i<j} V_{ij}.$$

Ta không biết được thế năng của các tương tác vi mô, do đó trong phần lớn trường hợp, phần năng lượng này không được tính vào sự bảo toàn cơ năng. Sự chuyển hoá năng lượng với các nguyên nhân không rõ ràng được gọi là tỏa nhiệt.

Sự bảo toàn năng lượng có phụ thuộc vào cách chọn hệ.

Mục lục

Xét hai vật có khối lượng m_1 và m_2 chuyển động với vận tốc v_1 và v_2. Tìm vận tốc sau va chạm v_1' và v_2' của chúng. Biết rằng va chạm là hoàn toàn đàn hồi.

Xét hai vật có khối lượng m_1 và m_2 chuyển động với vận tốc v_1 và v_2. Tìm vận tốc sau va chạm v_1' và v_2' của chúng. Biết rằng va chạm là hoàn toàn đàn hồi.

Định luật bảo toàn động lượng:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_1' - m_2 v_2'.$$

Định luật bảo toàn năng lượng:

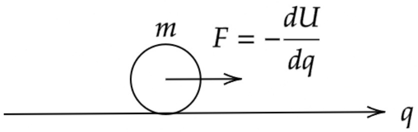
$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}.$$

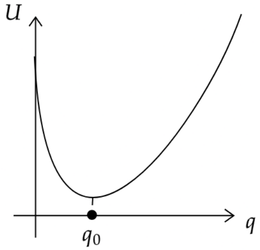
Giải hệ phương trình trên ta được:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \\ v_2' &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Dao động nhỏ

Xét một vật có khối lượng m chuyển động trong thế năng $U(q)$ với vị trí cân bằng tại q_0 (tức là $U'(q_0) = 0$). Nếu vật bị lệch một khoảng rất nhỏ $\eta = q - q_0$, vật sẽ dao động gần như điều hòa. Tìm tần số góc của dao động này.





Khai triển Taylor thế năng quanh vị trí cân bằng:

$$U(q) = U(q_0) + U'(q_0) + \frac{U''(q_0)}{2}(q - q_0)^2 + \dots$$

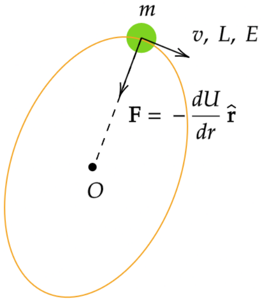
Số hạng đầu tiên là hằng số, có thể triệt tiêu tùy vào cách ta chọn mốc thế năng. Số hạng thứ hai bằng 0 do q_0 là vị trí cân bằng. Do đó, ta chỉ quan tâm đến số hạng bậc 2 của U:

$$U(q) \approx \frac{U''(q_0)}{2}(q - q_0)^2.$$

Số hạng này có dạng giống như thế năng của lò xo, với độ cứng $k = U''(q_0)$. Tần số góc của dao động nhỏ là:

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(q_0)}{m}}. \tag{15}$$

Một vật khối lượng m chuyển động trong một trường thế $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ với r là khoảng cách từ vật đến một điểm cố định O. Biết rằng tại một thời điểm nào đó, vật đang có mô men động lượng quanh O là L, cơ năng E ($E < 0$). Tìm bán kính nhỏ nhất và lớn nhất trong quỹ đạo của vật.



Tại điểm cực cận và cực viễn của quỹ đạo, vận tốc của vật vuông góc với **r**.
Định luật bảo toàn mô men động lượng quanh O:

$$mvr = const = L.$$

Định luật bảo toàn cơ năng:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{r} = const = E.$$

Giải hệ phương trình trên, ta thu được phương trình bậc 2 của r:

$$-Er^2 - \alpha r + \frac{L^2}{2m} = 0.$$

Từ đó, ta tìm được bán kính cực cận và cực viễn:

$$r_{min,max} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2EL^2/m}}{-2E}. \tag{16}$$

Mục lục

Đơn cực từ

Xét sự chuyển động của một điện tích điểm q_e, khối lượng m trong từ trường của một đơn cực từ giả tưởng nằm yên tại gốc toạ độ:

$$\mathbf{B} = k\frac{q_m}{r^2}\hat{r}.$$

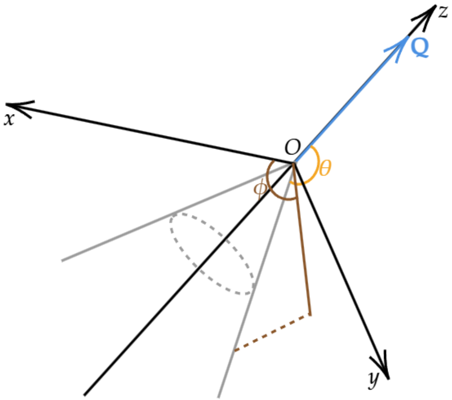
- Phương trình động lực học: $m\mathbf{a} = q_e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.
- Công suất của lực từ bằng 0: $|\mathbf{v}| = const$.

Chứng minh được rằng, đại lượng

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L} - kq_eq_m\hat{r}$$

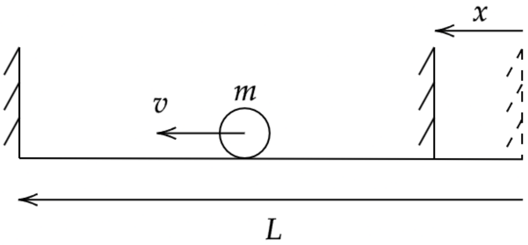
là một hằng số chuyển động (bất biến).

Đơn cực từ



- $\mathbf{Q} \cdot \hat{\phi} = mr^2\dot{\theta} = 0 \implies \theta = const.$
- $\mathbf{Q} \cdot \hat{r} = Q\cos\theta = -kq_e q_m \implies |\mathbf{Q}| = const.$
- $r(\phi) = \frac{Q\sin\theta}{mv\cos((\phi - \phi_0)\sin\theta)}.$

Một vật nhỏ có khối lượng m chuyển động và va chạm đàn hồi với hai vạch tường cách nhau một khoảng L. Dịch chuyển vách tường bên phải lại một cách rất chậm. Tìm liên hệ giữa vận tốc v của vật và độ dịch chuyển x của tường.



Bất biến đoạn nhiệt

Sau mỗi va chạm, tường truyền cho vật một động lượng $\Delta p = 2mv$.
Tường giống như tác dụng một "lực" F lên vật:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv}{\frac{2(L-x)}{v}}.$$

Định lí công - động năng:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Fdx = \frac{mv^2}{L-x}dx.$$

Chuyển vế và nguyên hàm, ta thu được:

$$v(L-x) = const. \tag{17}$$

Một "nghịch lý"

Một quả tên lửa có thể cung cấp vận tốc u, tức năng lượng bằng $\frac{mu^2}{2}$ cho đầu đạn sau khi đốt hết nhiên liệu. Vậy nếu như tên lửa được phóng từ một máy bay đang bay với vận tốc v, vận tốc của đầu đạn sẽ là $v+u$. Như vậy động năng tổng cộng của đầu đạn lúc này là

$$\frac{m(v+u)^2}{2} > \frac{mu^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Trong khi ta biết rằng tổng hoá năng của nhiên liệu là không đổi trong cả hai trường hợp, vậy lượng năng lượng này từ đâu r? Coi rằng tổng khối lượng của nhiên liệu là rất nhỏ so với khối lượng của đầu đạn.

Tài liệu tham khảo I

[1] I.V.Savelyev, *Giáo trình vật lý đại cương tập 1*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1988.

[2] D. Morin, *Introduction to classical mechanics: with problems and solutions*. Cambridge University Press, 2008.

[3] J. .-. M. Brébec, *PFIEV Cơ học 1*. NXB Giáo dục, 2015.

[4] J. .-. M. Brébec, *PFIEV Cơ học 2*. NXB Giáo dục, 2015.