xPhO Physics Club

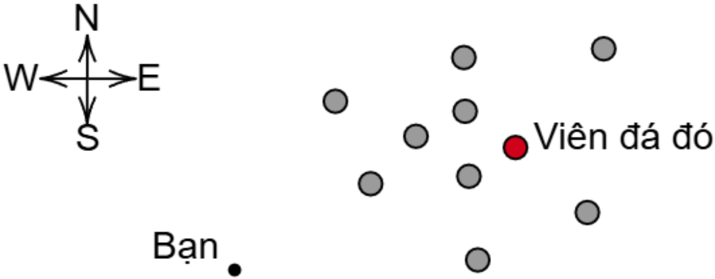
Vector và
Nhập môn Đại số tuyến tính

Người trình bày: Carina

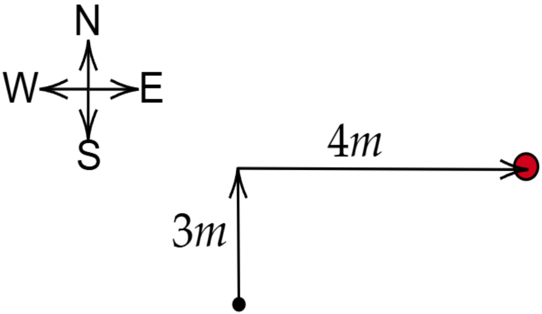
Mục lục

Khai báo vị trí viên đá

Làm thế nào để người khác biết vị trí của viên đá đặc biệt đó?

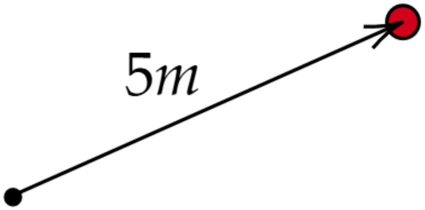


Cách 1



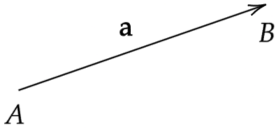
Cách 2

"Chỉ tay" và "khoảng cách"



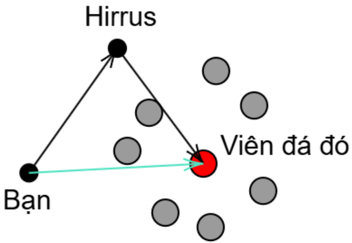
Định nghĩa

Vector AB (hình vẽ), kí hiệu là $\mathbf{AB}$, là một đại lượng biểu diễn bằng mũi tên tuân theo quy tắc hình bình hành được đặc trưng bởi độ dài a của nó (do đó còn được kí hiệu là $\mathbf{a}$) và hướng mà nó chỉ.

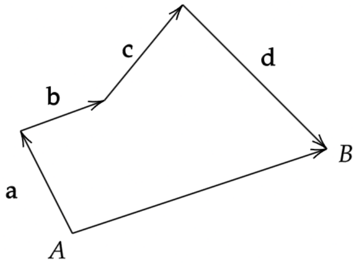


Mục lục

Để xác định vị trí của viên đá, thay vì xác định trực tiếp, ta sẽ để Hirrus xác định vị trí của viên đá, rồi ta sẽ xác định vị trí của Hirrus.



$\longrightarrow$ **Phép cộng vector**:

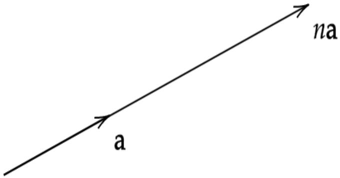


Hình: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{AB}$

Về tổng quát, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \neq a + b$.

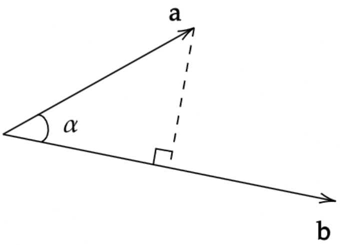
Phép nhân vector-vô hướng

- $|n\mathbf{a}| = |n||\mathbf{a}|$.
- $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$.
- $-1\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.



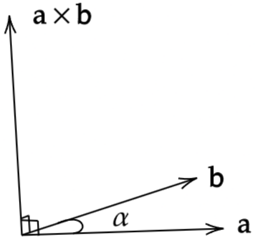
Hai phép nhân vector-vector

Phép nhân vô hướng hai vector



- Kết quả là một số vô hướng.
- $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \alpha$

Phép nhân có hướng hai vector



- Kết quả là một vector.
- $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \alpha$

Mục lục

Cơ sở vector trong mặt phẳng

Với $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ không nằm trên cùng một đường thẳng,

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2; \qquad \mathbf{w} = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2.$$

Tổng của hai vector này

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a + c)\mathbf{e}_1 + (b + d)\mathbf{e}_2.$$

Những vector trên có thể được viết thành

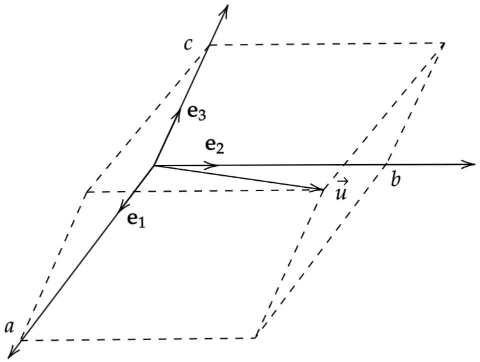
$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= (a, b), \\ \mathbf{w} &= (c, d), \\ \mathbf{v} + \mathbf{w} &= (a + c, b + d). \end{aligned}$$

- Toạ độ của **v** là $v_1 = a$ và $v_2 = b$.
- Toạ độ của **w** là $w_1 = c$ và $w_2 = d$.

Với $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ không cùng nằm trên một mặt phẳng,

$$\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 \qquad (1)$$

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) = (a, b, c).$$



Hình: Cơ sở $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

Định nghĩa

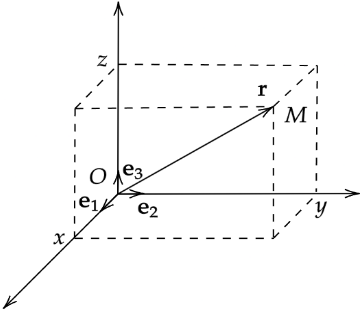
Một vector đơn vị là một vector có độ dài bằng 1:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \tag{2}$$

Vector này cùng hướng với **a**.

$\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ là một tập hợp các vector trực chuẩn (trực giao và chuẩn hoá):

$$\mathbf{r} = \mathbf{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = (x, y, z).$$



Hình: Hệ tọa độ Descartes *Oxyz*

Tính chất của hệ cơ sở trực chuẩn

Tích vô hướng của các vector cơ sở:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}.$$

Ký hiệu Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, nếu } i = j. \\ 0 & \text{, nếu } i \neq j. \end{cases}$$

Do đó,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (3)$$

Tích có hướng của các vector cơ sở:

$$\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_k \varepsilon_{ijk}.$$

Ký hiệu Levi-Civita:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, nếu } (i,j,k) = (1,2,3) \text{ hoặc } (2,3,1) \text{ hoặc } (3,1,2). \\ -1 & \text{, nếu } (i,j,k) = (1,3,2) \text{ hoặc } (2,1,3) \text{ hoặc } (3,2,1). \\ 0 & \text{, nếu } i = j \text{ hoặc } j = k \text{ hoặc } k = i. \end{cases}$$

Do đó,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k. \tag{4}$$

Mục lục

Cơ sở

Cho hai hệ cơ sở:

- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$
- $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$

$\implies \mathbf{v} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \gamma\mathbf{e}_3 + \sigma\mathbf{e}_4.$

Cho hai hệ cơ sở:

- $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$
- $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$

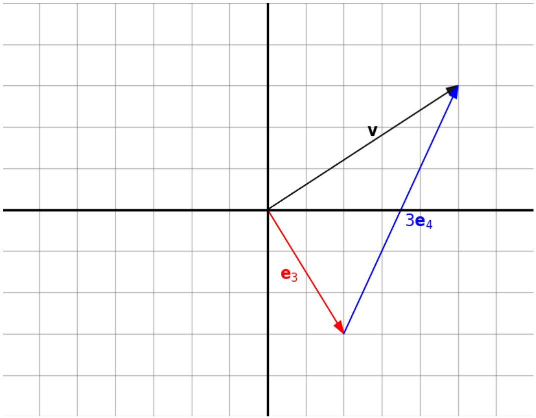
$\implies \mathbf{v} = \alpha\mathbf{e}_1 + \beta\mathbf{e}_2 = \gamma\mathbf{e}_3 + \sigma\mathbf{e}_4.$

Giả sử:

- $\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1 - 3\mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}_4 = \mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2,$
- $\alpha = 5, \beta = 3.$

$\implies \mathbf{v} = \mathbf{e}_3 + 3\mathbf{e}_4.$

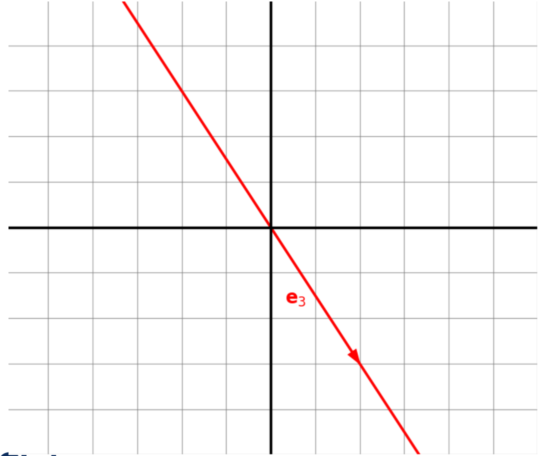
Nếu $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ trực chuẩn:



Nếu thay vì $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$, ta chọn $(\mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_3)$ thì sao?

Cơ sở

Nếu thay vì $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$, ta chọn $(\mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_3)$ thì sao?



Bao tuyến tính

Nếu $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ là một tập hợp n vector trong không gian, thì tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của chúng được gọi là bao tuyến tính của $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$, và được kí hiệu là $\text{span}(S)$.

Nếu span(S) chứa toàn bộ vector trong không gian, vậy ta gọi S là một hệ sinh cho không gian.

Định nghĩa

Độc lập tuyến tính

Một tập hợp các vector được gọi là *độc lập tuyến tính* với nhau nếu tổ hợp tuyến tính của chúng không bao giờ bằng $\mathbf{0}$ trừ khi **tất cả** các hệ số vô hướng đều bằng 0.

Hệ cơ sở

Một cơ sở của không gian là một tập hợp các vector trong không gian sao cho

- tạo thành hệ sinh cho không gian, và
- độc lập tuyến tính.

Ví dụ

Hệ sinh của mặt phẳng đã được đề cập:

- $S_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$,
- $S_2 = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$,
- $S_3 = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, 2\mathbf{e}_3\}$.

Nhưng,

- $(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, 2\mathbf{e}_3)$

không phải là một hệ cơ sở.

Hệ sinh của đường thẳng chứa $\mathbf{e}_3$:

- $S_1 = \{\mathbf{e}_3\}$,
- $S_2 = \{\mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_3\}$,
- $S_2 = \{\mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_3, \mathbf{0}\}$.

Nhưng,

- $(\mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_3)$, và
- $(\mathbf{e}_3, \mathbf{0})$

không phải là một hệ cơ sở.

Ví dụ

Vì:

- $-2\mathbf{e}_3 + 1(2\mathbf{e}_3) + 0\mathbf{e}_4 = \mathbf{0}$,
- $-2\mathbf{e}_3 + 1(2\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}$,
- $0\mathbf{e}_3 + 100(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Có một sự mập mờ khi sử dụng cụm từ "không gian" trong các phần trước!

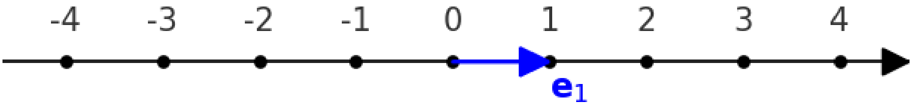
Không gian vector

Một không gian vector là một tập hợp mà các phần tử trong đó thoả mãn:

1. Với mọi $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$.
2. Với mọi $\mathbf{v} \in V, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha\mathbf{v} \in V$.
3. $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.
4. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.
5. Tồn tại một vector $\mathbf{0}$ sao cho $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.
6. Với mọi vector $\mathbf{v}$, tồn tại một vector $\mathbf{v}'$ sao cho $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$.
7. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.
8. $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$.
9. $\alpha(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$.
10. $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$.

Ví dụ 1

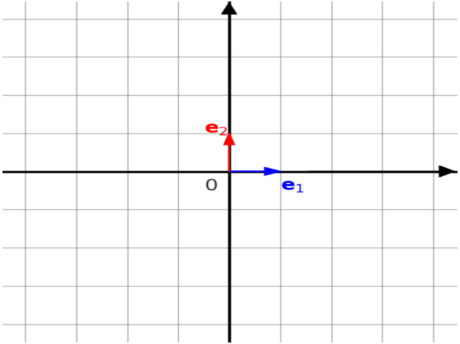
Tập hợp số thực: $\mathbb{R}^1$



Vector: $-1.9, 5, 2, 100, -\pi, e, \ldots$

Ví dụ 2

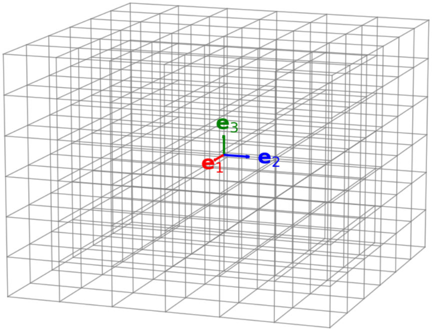
Mặt phẳng toạ độ: $\mathbb{R}^2$



Vector: $(1.23; 2), (\pi, e), (-111, -\pi), \ldots$

Ví dụ 3

Không gian hình học: $\mathbb{R}^3$



Vector: $(1;3;4), (100,0,0), \ldots$

Chiều của không gian vector

Chiều của một không gian là số lượng vector trong hệ cơ sở của không gian đó.

Chiều của không gian vector

Chiều của một không gian là số lượng vector trong hệ cơ sở của không gian đó.

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ đã được đề cập. Vậy $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \cdots$ thì sao?

Chiều

Vector trong $\mathbb{R}^4$: Mảng số có 4 thành phần.
Vector trong $\mathbb{R}^5$: Mảng số có 5 thành phần.
...
Vector trong $\mathbb{R}^{100}$: Mảng số có 100 thành phần.
Vector trong $\mathbb{R}^n$: Mảng số có n thành phần!

$$1 \to (1;2) \to (1;2;3) \to (1;2;3;4) \to \cdots \to \underbrace{(1;2;\ \dots;100)}_{100}$$

Mũi tên hay mảng số?

Từ $\mathbb{R}^4$ trở đi, không còn mũi tên nào cả.

$$\overset{?}{=} \quad (\ldots;\ \ldots;\ \ldots)$$

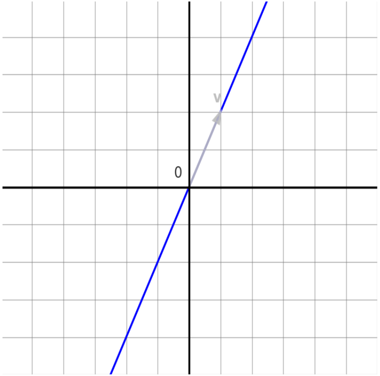
Vector?

- $\mathbb{C}^n : (1 + 2i; 0.76 - 100i; i; e + \pi i; \ldots)$.

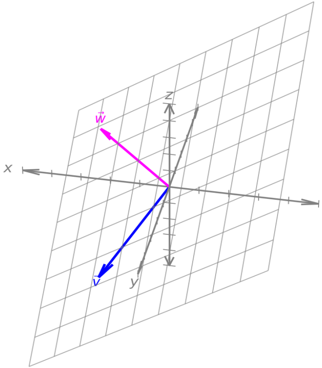
Vector?

- $\mathbb{C}^n : (1 + 2i; 0.76 - 100i; i; e + \pi i; \dots)$.
- $f(x) = 1 + 2x^2 - 3x^3 + 42x^4$.
- $g(x) = \sin x$.
- $\dots$

Quay trở lại với các vector thực



(a) Đường thẳng (đi qua gốc toạ độ) trên mặt phẳng



(b) Mặt phẳng (đi qua gốc toạ độ) trong không gian

Không gian con

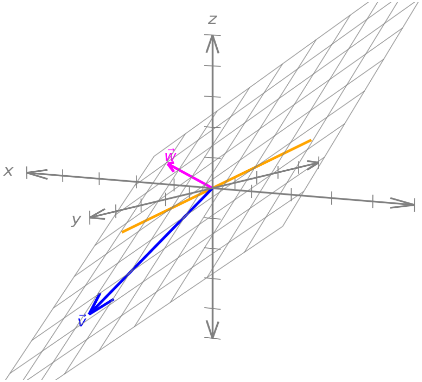
Một không gian con S trong một không gian vector V là một tập hợp các vector trong V sao cho chúng thoả mãn 10 tiên đề của vector.

Cơ sở của không gian con

Một cơ sở cho một không gian con S của $\mathbb{R}^n$ là một tập hợp các vector trong S sao cho

1. tạo thành S, và
2. là độc lập tuyến tính.

Một đường thẳng đi qua gốc toạ độ trên một mặt phẳng trong không gian:



Mục lục

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.6 \\ 20.4 & 5.5 \\ 9.7 & -6.2 \end{bmatrix}$$

Quy tắc đọc: hàng trước cột sau.

$\mathbf{A}_{21} = 3$.

$\mathbf{B}_{32} = -6.2$.

Ví dụ:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ f \end{bmatrix}.$$

Ví dụ:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ f \end{bmatrix}.$$

Nếu,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \\ c+f \end{bmatrix}, \qquad n \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} na \\ nb \\ nc \end{bmatrix}.$$

$$\implies \text{Vector}$$

Chuyển đổi ký hiệu

$$(a, b, c) \to \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$(1, 2, 3, 4, \ \ldots, 100) \longrightarrow \left.\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ 100 \end{bmatrix}\right\} 100$$

Một ma trận m hàng n cột về tổng quát có dạng:

$$\mathbf{A}_{m\times n}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2j} & \cdots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i2} & \cdots & \mathbf{A}_{ij} & \cdots & \mathbf{A}_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \cdots & \mathbf{A}_{mj} & \cdots & \mathbf{A}_{mn} \end{bmatrix}.$$

Phép cộng ma trận.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}.$$

Phép nhân ma trận với một số.

$$(c\mathbf{A})_{ij} = c\mathbf{A}_{ij}.$$

Ví dụ:

$$4\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = ??$$

Phép cộng ma trận.

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_{ij} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}.$$

Phép nhân ma trận với một số.

$$(c\mathbf{A})_{ij} = c\mathbf{A}_{ij}.$$

Ví dụ:

$$4\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 8 & -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 8 & -19 \end{bmatrix}.$$

Cho

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} +2 \\ +5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Phân tích trong một hệ cơ sở ngẫu nhiên,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Cho

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} +2 \\ +5 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Phân tích trong một hệ cơ sở ngẫu nhiên,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

Tính được $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, -3, 1)$.

Phép nhân ma trận-vector.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & -5 & -19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Phép nhân ma trận-vector.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 11 \\ 0 & -5 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Một ma trận $m \times n$ nhân với một vector n thành phần = một vector m thành phần; phần tử thứ i của vector:

$$(\mathbf{Ax})_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j. \tag{6}$$

Phép nhân ma trận-vector

Phần tử thứ i của vector này là tích vô hướng của hàng thứ i của $\mathbf{A}$ với vector $\mathbf{x}$. Chẳng hạn,

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \times 2 + 2 \times (-3) + 11 \times 1 = 5.$$

Tóm gọn:

$$\begin{bmatrix} | & | & | \\ \mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i2} & \mathbf{A}_{i3} \\ | & | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{A}_{i1} \\ | \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{A}_{i2} \\ | \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} | \\ \mathbf{A}_{i1} \\ | \end{bmatrix}.$$

Tính phân phối:

$$\mathbf{A}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b}.$$

Phép nhân ma trận với ma trận

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}0.5\\-1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0.75\\1\\-2\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-1\\-1\\4\end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5 & 0.75 & -1\\-1 & 1 & -1\\0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Phép nhân ma trận với ma trận

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = -1.625 \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1.75 \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2.125 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.625 \\ -1.75 \\ -2.125 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix} = -7.875 \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 3.25 \begin{bmatrix} 0.75 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 6.375 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 11 \\ -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7.875 \\ -3.25 \\ -6.375 \end{bmatrix}.$$

Đặt

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.75 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \mathbf{B}.$$

Thay 3 đẳng thức trên vào 5,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} & \mathbf{B}\begin{bmatrix} -1.625 \\ -1.75 \\ -2.125 \end{bmatrix} & \mathbf{B}\begin{bmatrix} -7.875 \\ -3.25 \\ -6.375 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sự lặp lại của **B**(!)

Phép nhân ma trận với ma trận

Tạo ra một phép toán mới để:

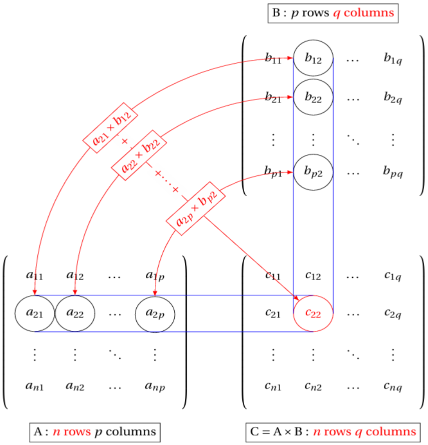
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -4 \end{bmatrix} = \mathbf{B} \begin{bmatrix} 1 & -1.625 & -7.875 \\ 2 & -1.75 & -3.25 \\ 1 & -2.125 & -6.375 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Xét một ma trận $\mathbf{A}_{m\times n}$ và một ma trận $\mathbf{B}_{n\times p}$, *tích của của chúng là một ma trận* $\mathbf{C}_{m\times p}$*; các cột của ma trận này là các vector, bằng với tích ma trận-vector của ma trận* $\mathbf{A}$ *và các cột tương ứng của ma trận* B.

Tương đương điều này,

$$\mathbf{C}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}. \tag{8}$$

Phép nhân ma trận với ma trận



Ví dụ

Tính tích

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

theo hai cách: (8) và bằng góc nhìn của phép nhân vector.

Cách 1:

$$\begin{bmatrix} (1 \cdot 2 + 5 \cdot 0) & (1 \cdot -1 + 5 \cdot 3) \\ (3 \cdot 2 + 2 \cdot 0) & (3 \cdot -1 + 2 \cdot 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Cách 2: Theo góc nhìn của phép nhân vector, tích này tương đương với

$$\left[\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}\right].$$

Dễ thấy,

$$\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 0\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}14\\ 3\end{bmatrix}.$$

Các phép toán trên ma trận

Các quy tắc cho các phép toán trên ma trận. Ta tổng kết lại các quy tắc chung nhất.

1. Quy luật giao hoán: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
2. Quy luật phân phối: $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.
3. Quy luật liên kết: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.
4. Quy luật liên kết: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.
5. Quy luật phân phối (trái): $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.
6. Quy luật phân phối (phải): $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.
7. Quy luật giao hoán: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Chú ý quy luật cuối cùng, tích ma trận không mang tính giao hoán.

Ma trận chuyển vị của ma trận $\mathbf{A}$, ký hiệu là $\mathbf{A}^T$, là ma trận có các thành phần sao cho

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{ji}.$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Tính chất của ma trận chuyển vị

1. Chuyển vị của phép nhân ma trận

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

2. Tích vô hướng của hai vector được biểu diễn trong hệ cơ sở trực chuẩn

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{v}^T\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}.$$

Ví dụ.

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} = 5.$$

Mục lục

Một hệ hai phương trình tuyến tính ở dạng tổng quát:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Tương đương với,

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Hệ phương trình tuyến tính được gói gọn thành

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính đó ở dạng tổng quát:

$$x_1 = a_{11}^{-1} b_1 + a_{12}^{-1} b_2,$$
$$x_2 = a_{21}^{-1} b_1 + a_{22}^{-1} b_2.$$

Viết lại trong ngôn ngữ của vector:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

$$\implies \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

$\mathbf{A}^{-1}$ được gọi là ma trận nghịch đảo của $\mathbf{A}$.

Phép biến đổi

	Ma trận	Hàm số
Dạng chuẩn	$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	$f(x) = y$
Nghịch đảo	$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$	$x = f^{-1}(y)$

Phép biến đổi

	Ma trận	Hàm số
Dạng chuẩn	$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	$f(x) = y$
Nghịch đảo	$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$	$x = f^{-1}(y)$

Hàm của vector? Phép biến đổi.

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

$$\mathbf{u} \to T(\mathbf{u}) = \mathbf{v}.$$

Vậy là, ta luôn có

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}?$$

Phép biến đổi

Câu trả lời là khôn, với một phép biến đổi phi tuyến, chẳng hạn:

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}.$$

Phép biến đổi tuyến tính

	Ma trận	Hàm số
Dạng chuẩn	$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$	$f(x) = y$
Nghịch đảo	$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$	$x = f^{-1}(y)$
Tính tuyến tính	$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{A}\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}\mathbf{x}_2$	$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
Tính đồng nhất	$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{A}\mathbf{x}$	$f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Phép biến đổi tuyến tính

Định nghĩa

Một biến đổi tuyến tính là biến đổi $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ thoả mãn hai đặc tính:

$$\text{tuyến tính:} \quad L(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}),$$

$$\text{tuyến tính:} \quad L(\alpha \mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{v}).$$

1. $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. $L(\alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n) = \alpha_1 L(\mathbf{e}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{e}_2) + \cdots + \alpha_n L(\mathbf{e}_n)$.

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ L(\mathbf{e}_1) & L(\mathbf{e}_2) & \cdots & L(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Rút gọn,

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

với **A** được gọi là ma trận chuẩn của phép biến đổi.

Ví dụ

Tìm ma trận của phép biến đổi

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

và tính toạ độ $\mathbf{x} = (1, 1)$ sau phép biến đổi.

Ví dụ

Áp dụng biến đổi này lên hai vector đơn vị $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ và $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$:

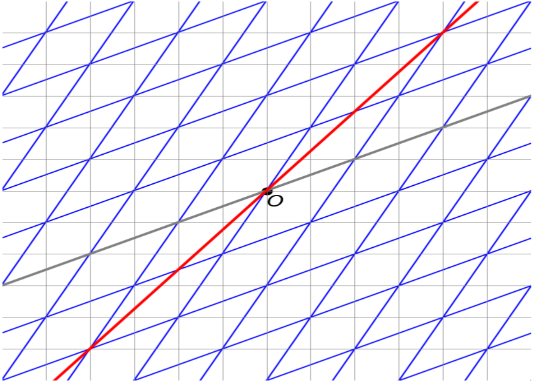
$$\mathbf{e}_1 \to (1, 0), \qquad \mathbf{e}_2 \to (2, 1).$$

Với vector $\mathbf{x} = (1, 1)$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Mục lục

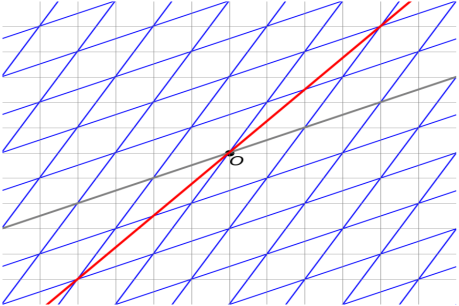
Minh hoạ cho phép biến đổi tuyến tính



$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

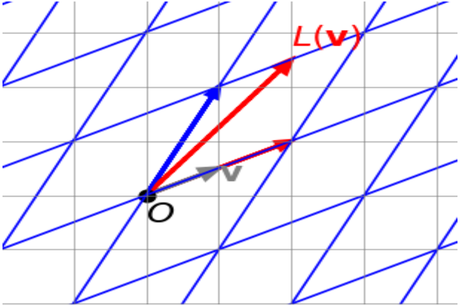
Tiêu chí cho hình ảnh của lưới cho một phép biến đổi tuyến tính

- Điểm O giữa nguyên vị trí.
- Các đường kẻ của lưới song song và cách đều nhau.
- Một đường thẳng vẫn là một đường thẳng.



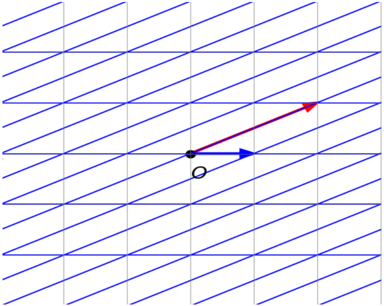
Minh hoạ cho một phép biến đổi tuyến tính

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \to L \to L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \end{bmatrix}.$$



Phép biến đổi cắt

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Phép biến đổi cắt

Phương trình cho một biến đổi cắt 2D :

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ hoặc } \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Ma trận biến đổi đặc trưng

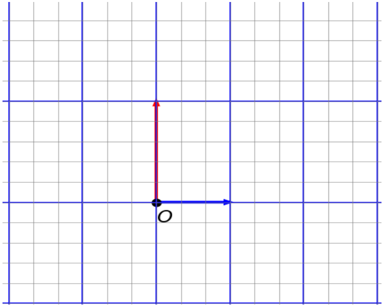
$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

hoặc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Phép giãn nở

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$



Biến đổi cho một giãn nở 2D là

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{bmatrix}.$$

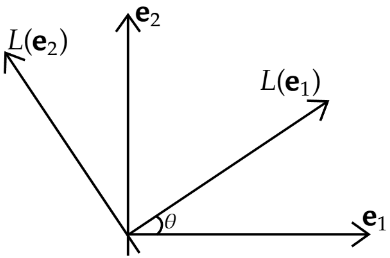
Ma trận biến đổi là một ma trận đường chéo:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

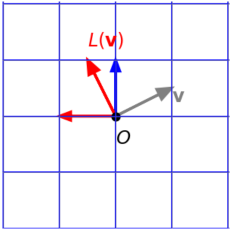
Chú ý,

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

Phép quay

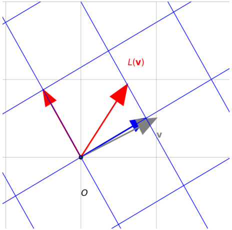


$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T.$$



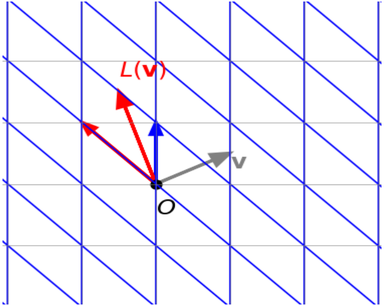
Phép quay 90 độ theo chiều dương

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Phép quay 30 độ theo chiều dương

Phép quay



Kéo rồi quay 90 độ:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Mục lục

Chuyển cơ sở

Hai hệ cơ sở:

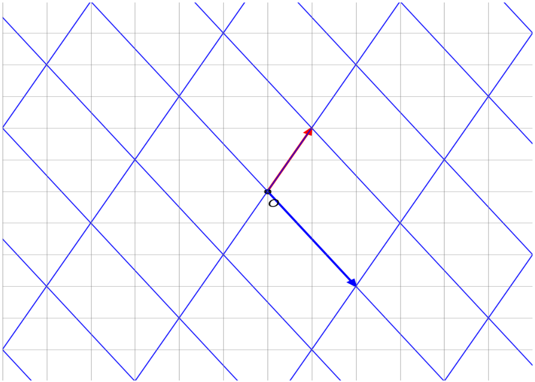
- Hệ $\mathcal{A}$: $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$
- Hệ $\mathcal{B}$: $\{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$

Trong hệ $\mathcal{A}$,

$$\mathbf{v}_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Trong hệ $\mathcal{B}$,

$$\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$



Biết rằng

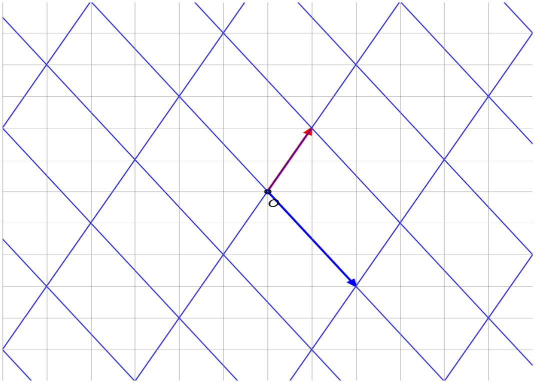
$$\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1 + (-3)\mathbf{e}_4, \quad \mathbf{e}_4 = 1\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2.$$

Ta thu được gì?

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

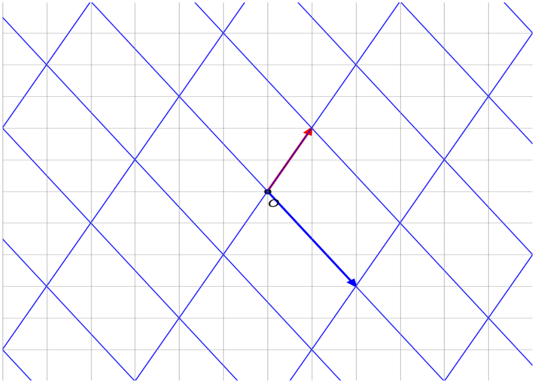
tức là

$$\mathbf{P}\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{v}_{\mathcal{A}}.$$



Chuyển cơ sở

$$\mathbf{P}(\mathbf{e}_1)_{\mathcal{A}} = \mathbf{P}(\mathbf{e}_3)_{\mathcal{B}} = (\mathbf{e}_3)_{\mathcal{A}},$$
$$\mathbf{P}(\mathbf{e}_2)_{\mathcal{A}} = \mathbf{P}(\mathbf{e}_4)_{\mathcal{B}} = (\mathbf{e}_4)_{\mathcal{A}}.$$



Chuyển cơ sở

$$\mathbf{P}\mathbf{v}_{\mathcal{B}} = \mathbf{v}_{\mathcal{A}}.$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{v}_{\mathcal{A}} = \mathbf{v}_{\mathcal{B}}.$$

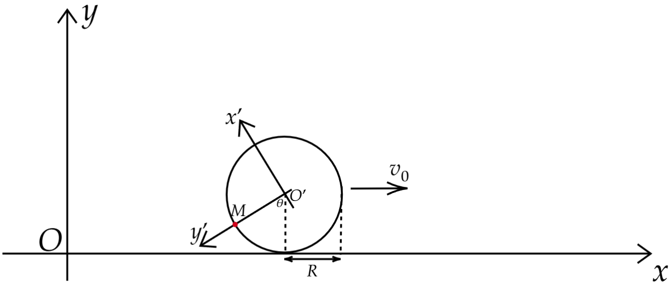
Lưới của $\mathcal{A} \rightarrow$ Lưới của $\mathcal{B}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Ngôn ngữ của $\mathcal{A} \leftarrow$ Ngôn ngữ của $\mathcal{B}$

Ví dụ

Một đường tròn bán kính R lăn không trượt với tốc độ không đổi, nghĩa là toạ độ của tâm đường tròn được cho bởi $(R\theta, R)$. Hãy xác định toạ độ của điểm M trong hệ toạ độ Oxy, biểu diễn kết quả theo tham số θ.



Giải

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} R\theta \\ R \end{bmatrix},$$

với $\phi = \pi - \theta$. Như vậy,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} \theta - \sin\theta \\ 1 - \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Quỹ đạo của điểm M chính là đường Cycloid.

Tài liệu tham khảo I

[1] 3Blue1Brown, *Linear algebra*, [Online]. Available: `https://www.3blue1brown.com/lessons/linear-algebra`.

[2] I.V.Savelyev, *Giáo trình vật lý đại cương tập 1*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1988.

[3] V. N. Cương, *Hình học giải tích*. Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2009.

[4] G. Strange, *Introduction to Linear Algebra*, 5th. Prentice Hall, 2023.