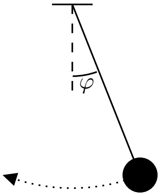
xPhO Physics Club

DAO ĐỘNG

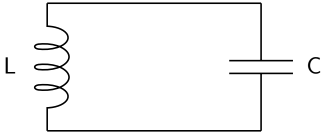
Người trình bày: Mino

Giới thiệu chung

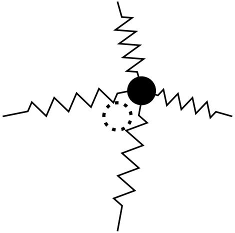
Dao động là một quy luật lặp lại ở một mức độ nào đó. Chuyển động con lắc, chuyển động lò xo,... cũng là một loại dao động. Ta phân biệt dao động dựa trên bản chất vật lý của quá trình lặp lại đó: dao động cơ, dao động điện, dao động nhiệt,...



(a) Dao động cơ



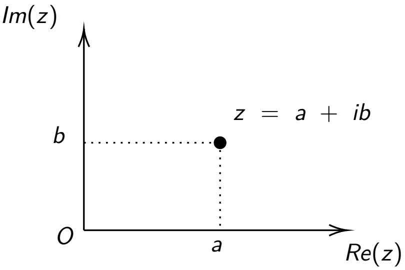
(b) Dao động điện



(c) Dao động nhiệt

Mục lục

Số phức



Số ảo **i** được định nghĩa [1]

$$i = \sqrt{-1}. \tag{1}$$

Không gian số phức là

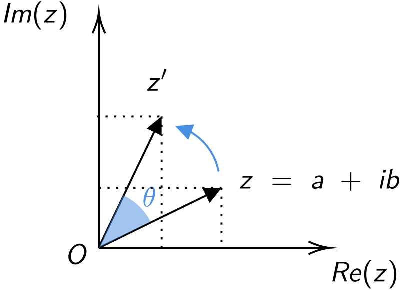
$$\mathcal{C} = (a, b)|a, b \in \mathcal{R}$$

Công thức euler gọi là phép quay một góc θ trong mặt phẳng phức.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{2}$$

Ví dụ: áp dụng phép quay θ cho số phức $z = a + ib$

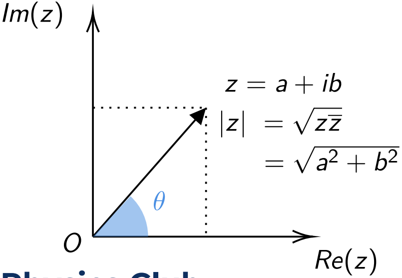
$$z' = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$
$$= (a+ib)e^{i\theta}$$



Công thức euler còn là cách biểu diễn khác của số phức.

$$z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{3}$$

Với $|z|$ là module của số phức z, θ là góc lệch của so với trục thực.



Liên hợp phức:

$$z = a + ib \rightarrow \bar{z} = a - ib. \quad (4)$$

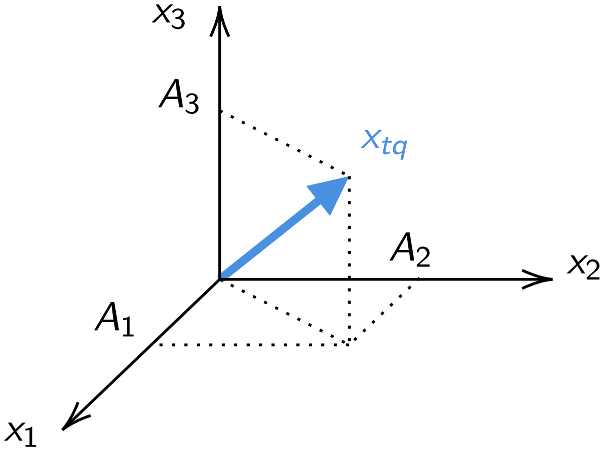
Phương trình vi phân tuyến tính là các phương trình chỉ bao gồm bậc nhất của các đạo hàm

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)} = C. \tag{5}$$

Khi chúng ta giải ra các nghiệm $(x_1, x_2, ..., x_n)$ thoả mãn phương trình vi phân tuyến tính. Thì ta nói, nghiệm tổng quát là tổ hợp tuyến tính của các nghiệm

$$x_{tq} = A_1 x_1 + A_2 + ... + A_n x_n. \tag{6}$$

Cộng dồn nghiệm



Ta gọi một PTVP là bậc 2 thuần nhất khi nó có dạng [2]

$$a_0 x + a_1 x' + a_2 x'' = 0. \tag{7}$$

Ta giả sử x có dạng $x = Ae^{\lambda t}$. Ta thế vào phương trình 7.

$$Ae^{\lambda t}(a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda_2) = 0$$
$$\Rightarrow a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Ta gọi phương trình đa thức bậc 2 ở trên là "phương trình đặc trưng".

$$\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2.$$

Trường hợp 1: $\Delta < 0$

Khi này, nghiệm λ sẽ có dạng

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1 \pm i\sqrt{4a_0a_2 - a_1^2}}{2} \equiv \alpha \pm i\beta.$$

Các nghiệm của PTVP lần lượt là

$$x_1 = e^{\lambda_1 t};\ x_2 = e^{\lambda_2 t}.$$

Nghiệm tổng quát

$$\begin{aligned} x_{tq} &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= e^{\alpha t}\left(A_1 e^{i\beta t} + A_2 e^{-i\beta t}\right). \end{aligned}$$

Các trường hợp

Do x_{tq} là hàm thực, nên ta có những điều kiện sau

$$\begin{cases} A_1 + A_2 & = & C\cos\phi \\ A_1 - A_2 & = & iC\sin\phi \end{cases}$$

Dựa vào công thức euler, ta sẽ thu được

$$x_{tq} = Ce^{\alpha t}\cos\left(\beta t + \varphi\right).$$

Trường hợp 2: $\Delta > 0$

Khi này, nghiệm λ sẽ có dạng

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2}.$$

Các nghiệm của PTVP lần lượt là

$$x_1 = e^{\lambda_1 t};\ x_2 = e^{\lambda_2 t}.$$

Nghiệm tổng quát

$$x_{tq} = A_1e^{\lambda_1 t} + A_2e^{\lambda_2 t}.$$

Trường hợp 3: $\Delta = 0$

Khi này, nghiệm λ sẽ có dạng

$$\lambda = -\frac{a_1}{2}.$$

Các nghiệm của PTVP lần lượt là

$$x_1 = e^{\lambda t};\ x_2 = te^{\lambda t}.$$

Nghiệm tổng quát

$$\begin{aligned} x_{tq} &= A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda t}(A_1 + A_2 t). \end{aligned}$$

Tổng kết

Trường hợp	Nghiệm
$\Delta < 0$ $\lambda = a + ib$	$x = Ce^{-at}\cos(bt + \varphi)$
$\Delta > 0$ $\lambda = \lambda_{1,2}$	$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$ $\lambda = a$	$x = e^{at}(A + Bt)$

PTVP bậc 2 không thuần nhất

Phương trình vi phân bậc 2 không thuần có dạng

$$a_0 x + a_1 x' + a_2 x'' = f(t) \tag{8}$$

Nghiệm tổng quát x_{tq} có dạng

$$x_{tq} = x_{tn} + x_r$$

Khi thế vào phương trình (8).

$$(a_0 x_{tn} + a_1 x'_{tn} + a_2 x''_{tn}) + (a_0 x_r + a_1 x'_r + a_2 x''_r) = 0 + f(t).$$

Giải nghiệm riêng

x_r tuân theo đặc trưng của $f(t)$.

- Nếu $f(t)$ là đa thức bậc n $\rightarrow$ x cũng có dạng đa thức bậc n.
- Nếu $f(t)$ là hàm $\cos()$ $\rightarrow$ x cũng có dạng $A_r \cos() + B_r \sin()$.

!!! Phải tìm những hệ số.

Giải nghiệm riêng

x_r tuân theo đặc trưng của $f(t)$.

- Nếu $f(t)$ là đa thức bậc n $\rightarrow$ x cũng có dạng đa thức bậc n.
- Nếu $f(t)$ là hàm $\cos()$ $\rightarrow$ x cũng có dạng $A_r \cos() + B_r \sin()$.

!!! Phải tìm những hệ số.

Ví dụ: tìm nghiệm riêng của $a_0 x + a_1 x' + a_2 x'' = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

x_r tuân theo đặc trưng của $f(t)$.

- Nếu $f(t)$ là đa thức bậc n $\rightarrow$ x cũng có dạng đa thức bậc n.
- Nếu $f(t)$ là hàm $\cos()$ $\rightarrow$ x cũng có dạng $A_r \cos() + B_r \sin()$.

!!! Phải tìm những hệ số.

Ví dụ: tìm nghiệm riêng của $a_0 x + a_1 x' + a_2 x'' = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Giải

Giả sử $x_r = Ax^2 + Bx + C$, thế vô PTVP ta sẽ có dạng

$$()x^2 + ()x + () = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

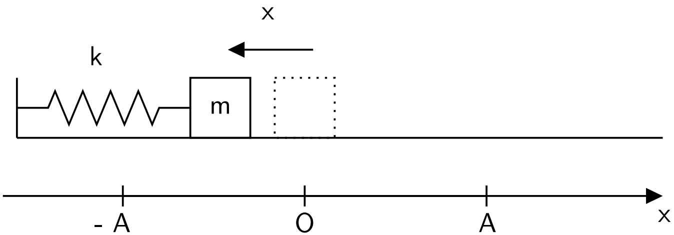
Đồng nhất hai vế

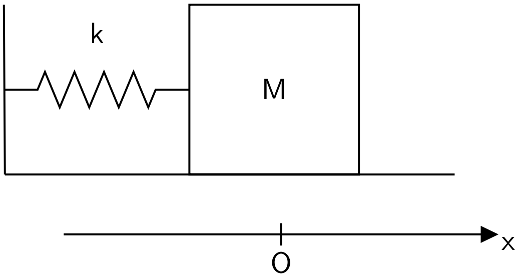
$$\begin{cases} a_0 A & = & \alpha \\ 2a_1 A + a_0 B & = & \beta \\ 2a_2 A + a_1 B + a_0 C & = & \gamma \end{cases}$$

Mục lục

Phương trình dao động điều hoà

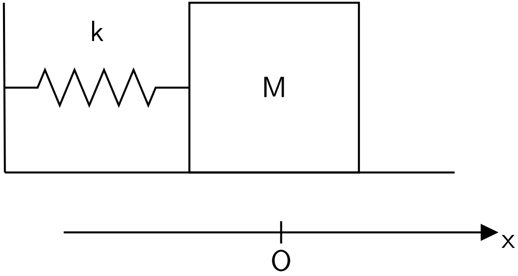
$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi\right) \tag{9}$$





Tổng lực tác động lên vật (lúc này chỉ gồm lực lò xo)

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}.$$



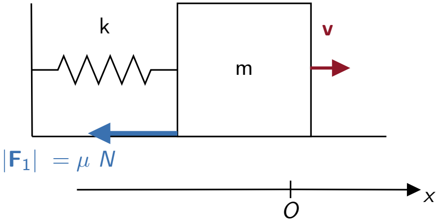
Tổng lực tác động lên vật (lúc này chỉ gồm lực lò xo)

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x}.$$

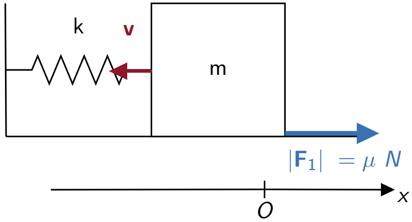
Bản chất là đi giải phương trình vi phân:

$$mx'' = -kx. \tag{10}$$

Hệ DĐ có cản khô



(A)



(B)

Lúc này hệ chịu thêm một lực ma sát khô. Tổng lực tác động lên vật

Lúc này ta giải cùng lúc hai phương trình vi phân

$$\begin{cases} mx'' = -kx + \mu N \\ mx'' = -kx - \mu N \end{cases} \tag{11}$$

Đặt $a = x - \mu N/k$ và $b = x + \mu N/k$ ta có.

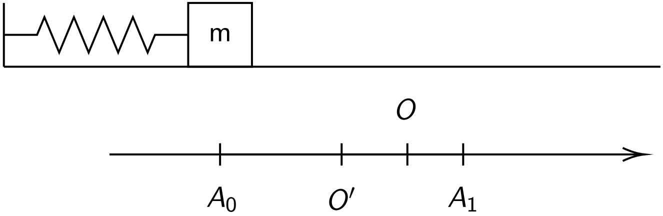
$$\begin{cases} a'' + \omega^2 a = 0 \\ b'' + \omega^2 b = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Ta có hai nghiệm:

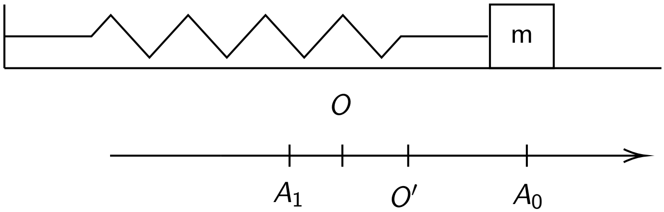
$$\begin{cases} a = x - \dfrac{\mu N}{k} = A\cos(\omega t + \varphi_a) \\ b = x + \dfrac{\mu N}{k} = B\cos(\omega t + \varphi_b) \end{cases} \tag{13}$$

Nghiệm *a* ứng với trường hợp vật đang đi cùng chiều dương. Nghiệm *b* ứng với trường hợp vật đang đi ngược chiều dương.

Trường hợp vật đi giống nghiệm *a*

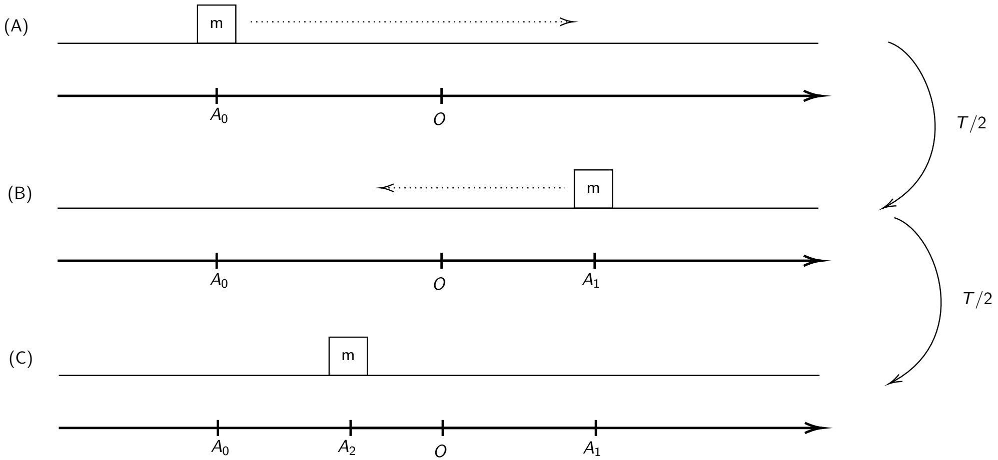


Trường hợp vật đi giống nghiệm b



Trong một chu kỳ, vật tham gia lần lượt cả hai quy luật chuyển động. Lấy ví dụ sau.

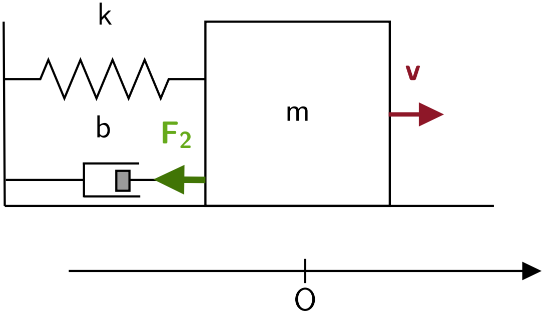
Hệ DĐ có cản khô - Biên độ



xPhO Physics Club

Công thức liên hệ giữa hai biên độ liên tiếp là

$$A_{k+1} = A_k - 2\mu mg/k \tag{14}$$



Lúc này hệ sẽ chịu thêm một lực ma sát nhớt $\mathbf{F_2}$. Tổng lực tác động lên vật

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} - b\mathbf{x}'. \tag{15}$$

Lúc này ta sẽ đi giải phương trình vi phân

$$mx'' = -kx - bx'. \tag{16}$$

Ta đặt $\omega^2 = k/m$, $2\gamma = b/m$, ta có phương trình

$$x'' + 2\gamma x' + \omega^2 x = 0.$$

Phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0. \tag{17}$$

Δ của phương trình đặc trưng

$$\Delta = 4(\gamma^2 - \omega^2) \tag{18}$$

Trường hợp 1: $\Delta < 0$

Ta giải λ

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}.$$

Nghiệm tổng quát

$$\begin{aligned} x &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ &= e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\ t} + Be^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\ t}\right). \end{aligned} \tag{19}$$

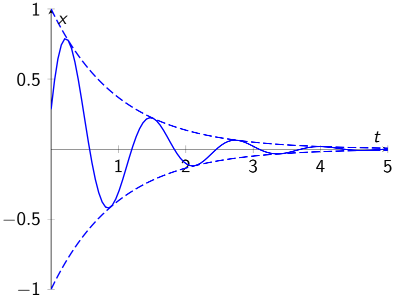
Để x là một hàm thuần thực thì

$$\begin{cases} A + B &= C\cos\phi \\ A - B &= iC\sin\phi \end{cases}$$

Trường hợp 1: $\Delta < 0$

Ta đặt

$$x = Ce^{-\gamma t}\cos\left(\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\,t+\phi\right). \tag{20}$$



Hình: Hàm $e^{-t}\cos(5t+5)$

Trường hợp 2: $\Delta > 0$

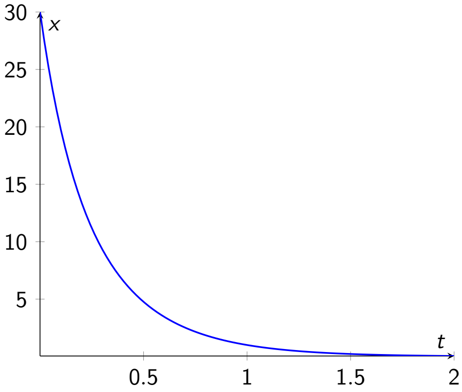
Ta giải λ

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}.$$

Nghiệm tổng quát:

$$\begin{aligned} x &= Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \\ &= e^{-\gamma t}\left(Ae^{\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\ t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\ t}\right). \end{aligned} \tag{21}$$

Trường hợp 2: $\Delta > 0$



Hình: Hàm $20e^{-(5-2)t} + 10e^{-(5+2)t}$

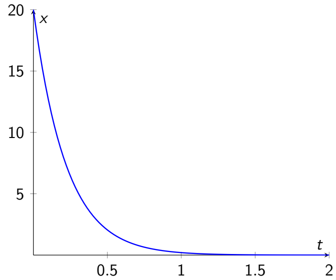
Trường hợp 3: $\Delta = 0$

Ta giải λ

$$\lambda = -\gamma.$$

Nghiệm tổng quát

$$x = e^{-\gamma t}\left(A + Bt\right). \tag{22}$$



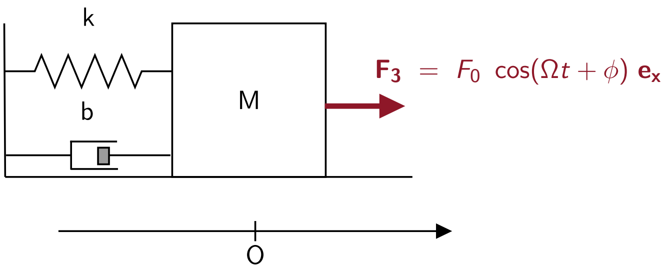
Hình: Hàm $e^{-5t}\left(20 + 10t\right)$

Với $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$. Xét phương trình đặc trưng

$$\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0.$$

Trường hợp	Nghiệm
$\Delta < 0$ $\lambda = a + ib$	$x = Ce^{-at}\cos(bt + \varphi)$
$\Delta > 0$ $\lambda = \lambda_{1,2}$	$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
$\Delta = 0$ $\lambda = a$	$x = e^{at}(A + Bt)$

Hệ DĐ cưỡng bức



Lúc này hệ sẽ chịu thêm một lực cưỡng bức $\mathbf{F_3}$. Tổng lực tác động lên vật

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{x} - b\mathbf{x}' + F_0 \cos(\Omega t + \phi)\mathbf{e_x}. \tag{23}$$

Lúc này ta sẽ đi giải phương trình vi phân

$$mx'' = -kx - bx' + F_0 \cos(\Omega t + \phi) \tag{24}$$

Cụ thể, ta sẽ đi giải lần lượt nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng.

$$x = x_0 + x_r.$$

Để giải nghiệm thuần nhất, ta đi giải phương trình vi phân sau

$$x''_{tn} + \frac{b}{m}x'_{tn} + \frac{k}{m}x'_{tn} = 0.$$

Nghiệm riêng

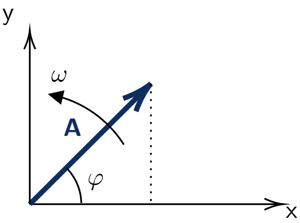
Ta đặt

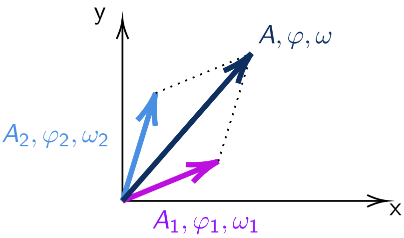
$$x_r = A\cos(\Omega t + \phi) + B\sin(\Omega t + \phi)$$

Thế vào phương trình vi phân, ta đồng nhất sin () và cos () hai vế, ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_0}{m}\frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}. \\ B &= \frac{F_0}{m}\frac{c\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}. \end{aligned} \tag{25}$$

Giản đồ Fresnel

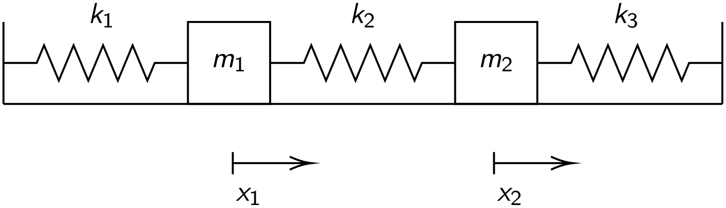




Ta có thể biểu diễn phương trình dao động như một vector với giản đồ Fresnel.

Mục lục

Hệ dao động liên kết cơ bản đầu tiên chúng ta tìm hiểu là hệ 2 khối lượng 3 lò xo. Bỏ qua độ dài tự nhiên của lò xo.



Tổng hợp lực tác dụng lên m_1 và m_2 là

$$\begin{cases} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_3 x_2 + k_2(x_1 - x_2). \end{cases} \tag{26}$$

2 khối lượng - 3 lò xo

Ta xét trường hợp đơn giản $k_1 = k_3$, $m_1 = m_2 = m$.
Thay trường hợp trên vào, ta thu được hệ

$$\begin{cases} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' &= -k_1 x_2 + k_2(x_1 - x_2). \end{cases} \tag{27}$$

Để giải hệ phương trình trên, ta lấy lần lượt tính $(x_1'' - x_2'')$ và $(x_1'' + x_2'')$.

$$\begin{cases} m(x_1'' + x_2'') &= -k_1(x_1 + x_2) \\ m(x_1'' - x_2'') &= -(k_1 + 2k_2)(x_1 - x_2). \end{cases} \tag{28}$$

Đặt $q_1 = x_1 + x_2$ và $q_2 = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} q_1'' + \omega_1^2 q_1 = 0 & \text{, với } \omega_1^2 = k_1/m \\ q_2'' + \omega_2^2 q_2 = 0 & \text{, với } \omega_2^2 = (k_1 + 2k_2)/m \end{cases} \tag{29}$$

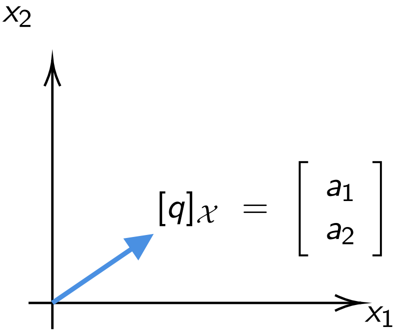
Như vậy, ta giải được

$$\begin{cases} q_1 = x_1 + x_2 & = & A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ q_2 = x_1 - x_2 & = & B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \tag{30}$$

Biến đổi ta được

$$\begin{cases} x_1 & = & \frac{1}{2}\left(A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right) \\ \\ x_2 & = & \frac{1}{2}\left(A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right) \end{cases} \tag{31}$$

Không gian $\mathcal{X}$



Gọi q là một vector trong không gian $\mathcal{X}$. q là một tổ hợp tuyến tính

$$q = \sum_{i=1}^{2} a_i x_i. \tag{32}$$

Ma trận của định luật II

Xét hệ phương trình từ định luật II Newton

$$\begin{cases} m_1 x_1'' &= -(k_1+k_2)x_1 &+ & k_2 x_2 \\ m_2 x_2'' &= k_2 x_1 &+ & -(k_1+k_2)x_2 \end{cases}$$

Ta có thể viết hệ phương trình thành

$$\begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 \\ k_2 & -(k_1+k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} \tag{33}$$

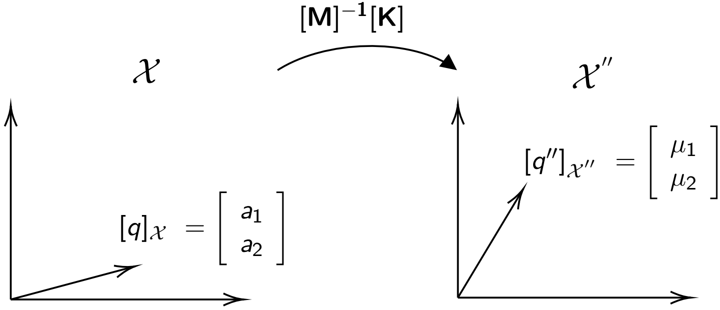
Hay ta có thể viết

$$[\mathbf{K}] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = [\mathbf{M}] \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} \tag{34}$$

Ma trận của định luật II

Vậy $[\mathbf{K}] \in L : \mathcal{X} \to \mathcal{X}''$. Còn $[\mathbf{M}]$ là ma trận đường chéo. Gọi vector $q \in \mathcal{X}$ và $q'' \in \mathcal{X}''$. Liên hệ giữa chúng là

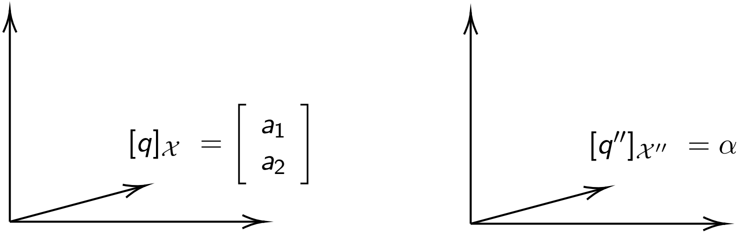
$$[\mathbf{K}]q = [\mathbf{M}]q''. \tag{35}$$



Ý tưởng chính

Để nó có thể xuất hiện phương trình giống với phương trình dao động, ta mong muốn ánh xạ $[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]$ sẽ "bảo toàn hệ số".

$$\mathcal{X} \xrightarrow{[\mathbf{M}]^{-1}[\mathbf{K}]} \mathcal{X}''$$



$$[q]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad [q'']_{\mathcal{X}''} = \alpha \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$$

Ý tưởng chính

Bây giờ, ta sẽ giả sử những điều sau

- $x_1 = Ae^{\lambda t};\ x_2 = Be^{\lambda t} \Rightarrow [q]_{\mathcal{X}} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ [2] [3]
- Thoả điều kiện "bảo toàn hệ số".

Nếu thoả điều kiện hai, thì ta có thể viết

$$[q'']_{\mathcal{X}''} = \lambda^2 \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Đưa vào phương trình (35), ta có

$$\left([\mathbf{K}] - \lambda^2[\mathbf{M}]\right) \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0. \tag{37}$$

Ta tìm hiểu về khái niệm Eigenvalue và Eigenvector. [1]

Cho phép toán sau, với $[\mathbf{A}]$ là ma trận ánh xạ tuyến tính; $\mathbf{v}$ là vector

$$[\mathbf{A}]\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \quad \text{Hay} \quad \Big([\mathbf{A}] - \lambda[\mathbf{E}]\Big)\mathbf{v} = 0 \tag{38}$$

Eigenvector, là những vector $\mathbf{v}$ thoả phương trình trên; Eigenvalue, là những giá trị λ tương ứng với vector $\mathbf{v}$ là Eigenvector.

Bước 1: Tìm giá trị λ thoả (tính chất nghiệm không tầm thường)

$$\det\Big([\mathbf{A}] - \lambda[\mathbf{E}]\Big) = 0. \tag{39}$$

Bước 2: Thay các giá trị λ vào phương trình (???) để tìm eigenvector $\mathbf{v}$.

Bước 3: Ta thu được λ_1, λ_2 và các vector $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$. Ta sẽ viết được

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{v_1} \;\; \mathbf{v_2}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [\mathbf{v_1} \;\; \mathbf{v_2}]^{-1} \tag{40}$$

Ví dụ: Chéo hoá ma trận $[\mathbf{B}]$.

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Bước 2: Thay các giá trị λ vào phương trình (???) để tìm eigenvector $\mathbf{v}$.

Bước 3: Ta thu được λ_1, λ_2 và các vector $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$. Ta sẽ viết được

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{v_1}\ \ \mathbf{v_2}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [\mathbf{v_1}\ \ \mathbf{v_2}]^{-1} \tag{40}$$

Ví dụ: Chéo hoá ma trận $[\mathbf{B}]$.

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Giải

B1: giải $\det\left([\mathbf{B}] - \lambda[\mathbf{E}]\right) = 0$, ta có $\lambda = 2, -3$.

B2: Với $\lambda = 2$, ta giải hệ

$$\begin{bmatrix} 3-2 & -3 \\ 2 & -4-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

$$\rightarrow \mathbf{v_1} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Bước 2: Thay các giá trị λ vào phương trình (???) để tìm eigenvector $\mathbf{v}$.

Bước 3: Ta thu được λ_1, λ_2 và các vector $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$. Ta sẽ viết được

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} [\mathbf{v_1}\ \mathbf{v_2}]^{-1} \tag{41}$$

Ví dụ: Chéo hoá ma trận $[\mathbf{B}]$.

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Giải

B1: giải $\det\left([\mathbf{B}] - \lambda[\mathbf{E}]\right) = 0$, ta có $\lambda = 2, -3$.

B2: Tương tự, với $\lambda = -3$ thì

$$\mathbf{v_2} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

B3:

$$[\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$$

Chúng ta sẽ tìm λ để thoả mãn phương trình (37), ta có tính chất nghiệm không tầm thường

$$\det\left([\mathbf{K}] - \lambda^2[\mathbf{M}]\right) = 0. \tag{42}$$

Sau giải ra được λ, ta thế chúng ngược lại để tìm vector q tương ứng. Những vector q được gọi là *toạ độ trực giao*. Hoặc còn gọi là các **mode dao động**.

Nghiệm tổng quát

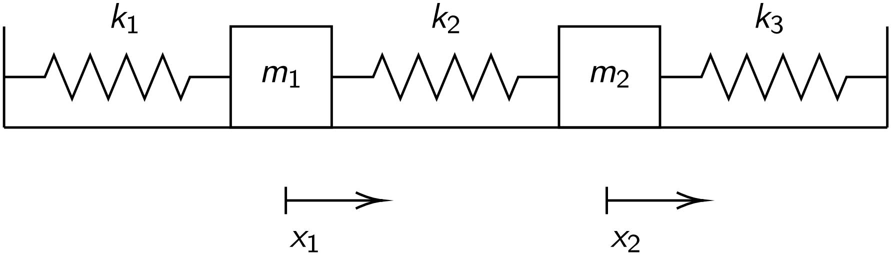
Giả sử ta tìm được n vector q, ứng với mỗi vector q_i có k_i trị riêng λ (eigenvalue). λ_{ij} là trị riêng thứ j ứng với vector q_i.

$$q_{tq} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = q_1 \sum_{i=0}^{k_1} A_{1i} e^{\lambda_{1i} t} + \ldots + q_n \sum_{i=1}^{k_n} A_{ni} e^{\lambda_{ni} t} \tag{43}$$

Mục lục

Bài 1

Giải lại hệ sau bằng phương pháp chéo hoá. Với $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_3 = 2k_2$.



Từ phương trình (34), ta có ma trận

$$\begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 \\ k_2 & -(k_1+k_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix}$$

Dựa vào giả thiết $m_1 = m_2 = m$ và $k_1 = k_3 = 2k_2$, ta tính định thức sau

$$\det\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} - \frac{m}{k_2}\lambda^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Ta giải ra

$$\frac{m}{k_2}\lambda^2 = -2 \quad \text{hoặc} \quad \frac{m}{k_2}\lambda^2 = -4$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{2k_2}{m}} \quad \text{hoặc} \quad \lambda = \pm i\sqrt{\frac{4k_2}{m}}$$

Với $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{2k_2}{m}}$

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2$$

Vậy vector riêng tương ứng là

$$q_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Với $\lambda = \pm i\sqrt{\dfrac{4k_2}{m}}$

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2$$

Vậy vector riêng tương ứng là

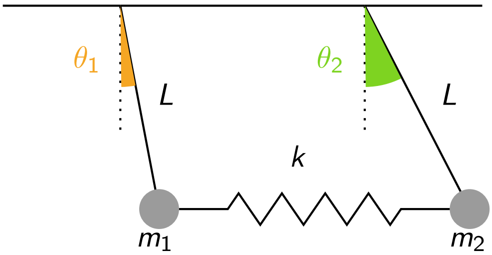
$$q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Nghiệm tổng quát

$$q_{tq} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(A_1 e^{i\sqrt{\frac{2k_2}{m}}t} + A_2 e^{-i\sqrt{\frac{2k_2}{m}}t} \right) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left(A_3 e^{i\sqrt{\frac{4k_2}{m}}t} + A_4 e^{-i\sqrt{\frac{4k_2}{m}}t} \right)$$

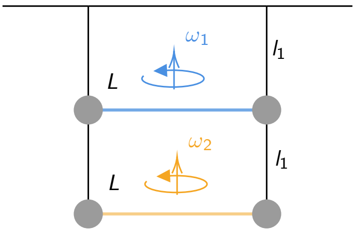
Bài 2

Cho hệ con lắc, chúng được nối bởi một lò xo có độ cứng k. Biết hệ dao động nhỏ và $m_1 = m_2 = m$.

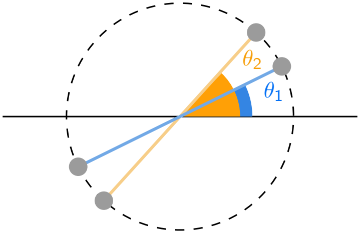


Bài 3

Cho hệ như hình, thanh nối nằm ngang giữa các khối lượng coi như rất nhẹ. Các vật có khối lượng bằng nhau và bằng m. Cho hệ dao động như hình, dao động đủ nhỏ để ta xem các thanh coi như các thanh không bị dịch chuyển theo phương thẳng đứng.



Nhìn ngang



Nhìn từ trên xuống

Tài liệu tham khảo I

[1] S. Gilbert, *Introduction to Linear Algebra, 4th Edition*. WELLESLEY - CAMBRIDGE PRESS, 2009.

[2] D. Morin, *Introduction to classical mechanics: with problems and solutions*. Cambridge University Press, 2008.

[3] R. John, *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.