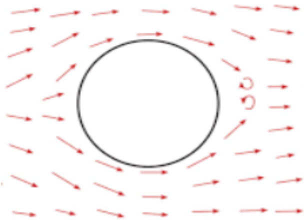
xPhO Physics Club

Trường & Giải tích

Người trình bày: Carina

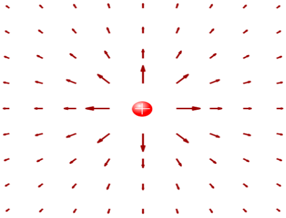
Mục lục

Mục lục



Hình: Trường vận tốc của chất lưu

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = \mathbf{v}(r, \theta)$$



Hình: Trường tĩnh điện của điện tích điểm

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(r)$$

Trường (lực) thế

1. Giá trị của tích phân đường (công) chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối:

$$-\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2).$$

2. Lưu số trên một đường cong kín là bằng không:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

3. Trường lực thế có thể biểu diễn dưới dạng gradient của một hàm vô hướng:

$$\mathbf{F} = -\nabla V.$$

Ví dụ về các lực thế: lực hấp dẫn, lực đàn hồi, ...

Quan hệ giữa các tính chất của trường thế

Từ tính chất thứ nhất,

$$-\mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}V.$$

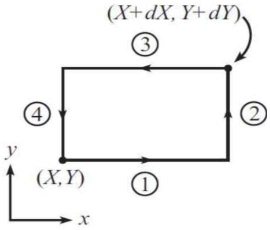
Do đó,

$$-(F_x \mathrm{d}x + F_y \mathrm{d}y + F_z \mathrm{d}z) = \partial_x V \mathrm{d}x + \partial_y V \mathrm{d}y + \partial_z V \mathrm{d}z.$$

Đồng nhất hai vế,

$$\mathbf{F} = -\nabla V.$$

Từ tính chất thứ hai (xét trên mặt phẳng xy),



$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}X\mathrm{d}Y \left(\partial_x F_y - \partial_y F_x\right) = 0.$$

Tương tự cho các mặt phẳng khác,

$$\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z \left(\partial_y F_z - \partial_z F_y\right) = 0.$$
$$\mathrm{d}X\mathrm{d}Z \left(\partial_z F_x - \partial_x F_z\right) = 0.$$

Curl và định lý Curl (Stokes)

Curl của **F** được định nghĩa là

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \det\left(\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}\right).$$

Định lý Stokes tổng quát hoá cho mọi bề mặt:

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{da} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}.$$

Chú ý, $\mathcal{C}$ là đường biên của bề mặt $\mathcal{S}$. Số hạng ở vế phải được gọi là *lưu số* của trường **F** trên đường cong kín $\mathcal{C}$.

Curl của một trường thế bằng không nên **F** phải có dạng $-\nabla V$ vì

$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \quad \forall V.$$

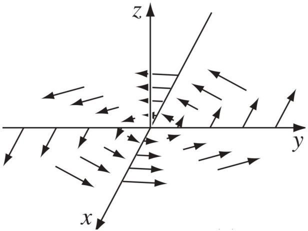
Cụ thể,

$$\begin{aligned} \partial_{xy} V &= \partial_{yx} V, \\ \partial_{yz} V &= \partial_{zy} V, \\ \partial_{zx} V &= \partial_{xz} V. \end{aligned}$$

Tóm lại, điều kiện cần và đủ của một trường thế là

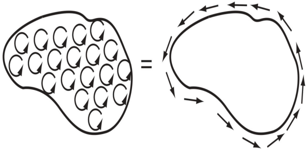
$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

Minh hoạ cho dòng chảy xoáy

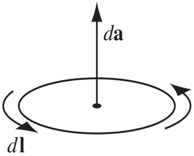


$$\mathbf{v} = -y\hat{x} + x\hat{y},$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\hat{z}.$$

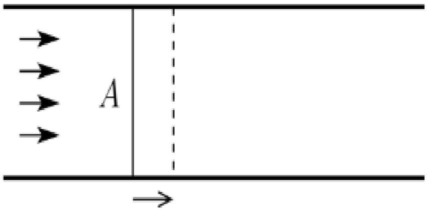


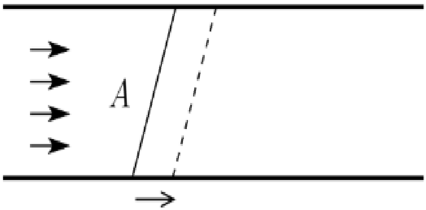
Hình: Định lý Stokes



Hình: Chiều của vector pháp tuyến

Thông lượng chất lỏng



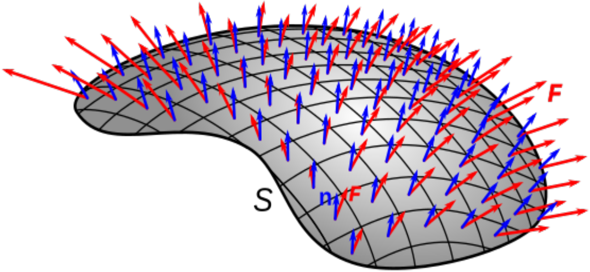


Lượng nước đi qua tiết diện $= \mathbf{v} \cdot \hat{n} A \Delta t.$

Nếu tiết diện gấp khúc: $\sum_{i}^{n} \mathbf{v} \cdot \hat{n}_i A_i \Delta t.$

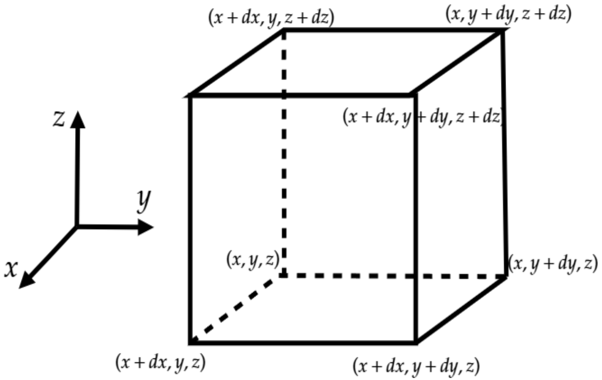
Nếu tiết diện là một mặt cong liên tục: $\lim_{n \to \infty} \sum_{i}^{n} \mathbf{v} \cdot \hat{n}_i A_i \Delta t.$

Tích phân mặt và thông lượng



$$\phi = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}.$$

ϕ được gọi là *thông lượng* của trường **F** qua bề mặt $\mathcal{S}$.



$$\begin{aligned}\delta\phi =&(F_x(x+dx) - F_x(x))dydz\\ &+(F_y(y+dy) - F_y(y))dxdz\\ &+(F_z(z+dz) - F_z(z))dxdy\\ &=(\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z)dxdydz.\end{aligned}$$

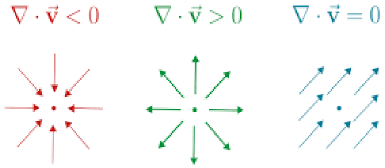
Với $\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$,

$$\delta\phi = \nabla \cdot \mathbf{F} d\tau.$$

Định lý Divergence phát biểu rằng

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{da} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F} d\tau.$$

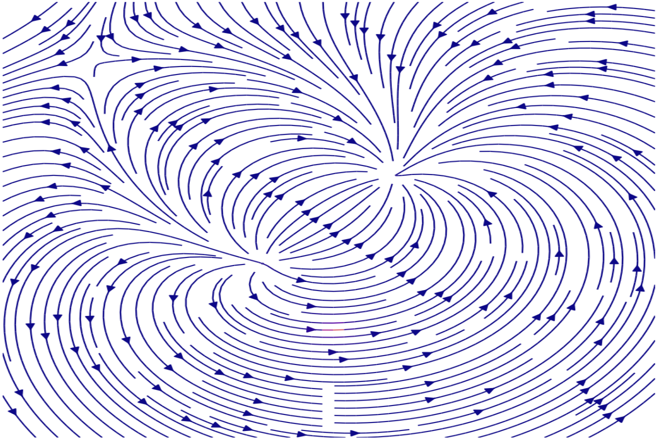
Nguồn và giếng, phương trình liên tục



$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{da} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}\tau = 0.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Hình ảnh ví dụ cho một trường vector với các xoáy, nguồn, và giếng



1. $\nabla \times (\nabla V) = 0$ với mọi hàm vô hướng V.
2. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ với mọi hàm vector $\mathbf{F}$.
3. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$, với ∇^2 là toán tử Laplace, được định nghĩa

$$\nabla^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2.$$

Ta cũng có thể viết

$$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F}.$$

Ngoài ra,

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{F}$$

biểu thị xấp xỉ tuyến tính cho "vi phân" của $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) - \mathbf{F}(\mathbf{r}) \approx (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{F}.$$

Một hệ quả quan trọng của định lý Divergence, với một vô hướng T, là

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla T) \mathrm{d}\tau = \oint_{\mathcal{S}} T \mathrm{d}\mathbf{a}.$$

Với áp suất p trong chất lỏng, phương trình thu được là

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla p) \mathrm{d}\tau = \oint_{\mathcal{S}} p \mathrm{d}\mathbf{a}.$$

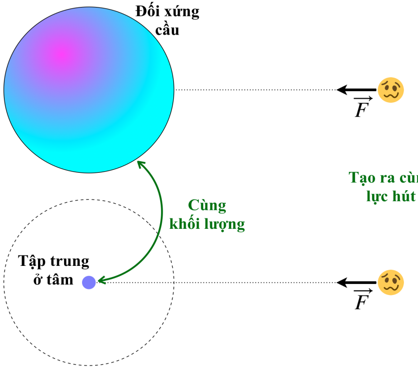
Như vậy,

$$-\nabla p + \mathbf{f}_V = \mathbf{0},$$

với $\mathbf{f}_V$ là lực thể tích. Trong trường trường hợp của trọng trường,

$$\nabla p = \rho \mathbf{g}.$$

Lực hấp dẫn của một khối/vỏ cầu đồng nhất



$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 F_r) = -4\pi G\rho.$$

$$\implies (\mathbf{F}\cdot\hat{r})\oint_{\mathcal{S}} da = -4\pi G\rho \times \frac{4\pi}{3}R^3.$$

$$\implies F_r = -\frac{4\pi G\rho}{3}\frac{R^3}{r^2}.$$

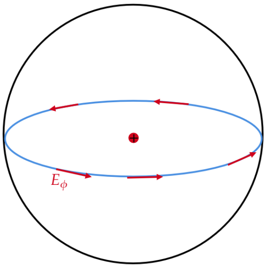
$$\implies F_r = -\frac{GM}{r^2}$$

Với $M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$. Ở đây ta đã đặt $m = 1kg$.

Bốn phương trình Maxwell trong chân không

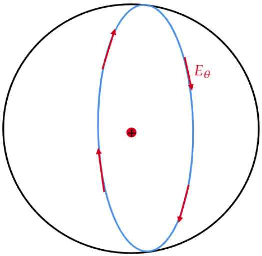
1. Định lý Gauss
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1}\rho.$$
2. Định lý về sự không tồn tại của đơn cực từ
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$
3. Định luật Faraday
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}.$$
4. Định lý Ampere-Maxwell
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}.$$

Điện trường của điện tích điểm



$$E_\phi 2\pi r = 0.$$

$$\implies E_\phi = 0.$$



$$E_\theta 2\pi r = 0.$$

$$\implies E_\theta = 0.$$

Trong tĩnh điện, $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$.
Thành thử,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot \mathbf{dl} = 0. \implies \mathbf{E} = \mathbf{E}_r \hat{r}.$$

Điều kiện biên:

$$\lim_{r \to \infty} \mathbf{E}(r) \to \mathbf{0}.$$

Định lý Gauss:

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{r} \; da = \varepsilon_0^{-1} q.$$

Như vậy,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$

Tài liệu tham khảo I

[1] D. Morin, *Introduction to classical mechanics: with problems and solutions*. Cambridge University Press, 2008.

[2] J. Stewart, *Calculus 2*, 7th. Cengage Learning, 2012.

[3] 3Blue1Brown, *Divergence and curl: The language of maxwell's equations, fluid flow, and more*, [Online]. Available: https://youtu.be/rB83DpBJQsE?si=p7fj_iWCeCR2G_VJ.

[4] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023.