



GIỚI THIỆU VÀ MỞ ĐẦU VỀ GIẢI TÍCH

Người trình bày: Võ Anh Tuệ



1. Mở đầu về giải tích

1.1 Tốc độ

1.2 Sơ lược lịch sử

2. Hàm số và Đồ thị

3. Đạo hàm



1. Mở đầu về giải tích

1.1 Tốc độ

1.2 Sơ lược lịch sử

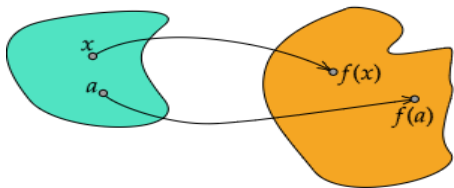
2. Hàm số và Đồ thị

3. Đạo hàm



Định nghĩa

Hàm f là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x thuộc tập hợp X với một và chỉ một phần tử, kí hiệu $f(x)$, thuộc một tập hợp Y .



$$f: X \rightarrow Y$$

Hàm số và Đồ thị

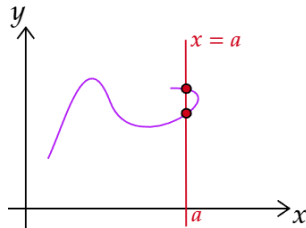
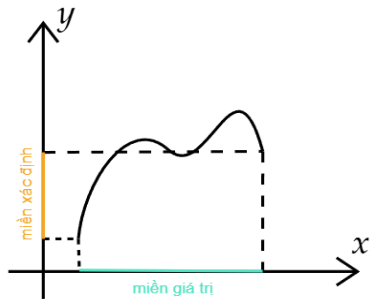
Đồ thị của f bao gồm mọi điểm (x, y) sao cho $y = f(x)$ với $x \in X$.

Một số hàm số quen thuộc:

► $y = \sin x : X = (-\infty, \infty), Y = [-1, 1]$

► $y = |x| : X = (-\infty, \infty), Y = (0, \infty)$

Chú ý, đây không phải là một hàm số:



1. Mở đầu về giải tích

1.1 Tốc độ

1.2 Sơ lược lịch sử

2. Hàm số và Đồ thị

3. Đạo hàm



Định nghĩa

Đạo hàm của hàm số f tại giá trị a , kí hiệu bởi $f'(a)$, là

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \quad (1)$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Các định lý của đạo hàm:

Định lý

Nếu f khả vi tại a , thì f liên tục tại a .

*Lưu ý: Mệnh đề đảo của định lý này là sai, có các hàm liên tục nhưng không khả vi.
Ví dụ, hàm $f(x) = |x|$ là hàm liên tục nhưng không khả vi.*

Định lý

Nếu f và g khả vi

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (fg)' = f'g + g'f, \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g + g'f}{g^2} \text{ với } g(x) \neq 0.$$

Định lý đạo hàm hợp

Nếu g khả vi tại x và f khả vi tại $g(x)$, thì hàm hợp $F = f \circ g \equiv f(g(x))$ khả vi tại x và F' được xác định bởi tích

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x) \quad (2)$$

Theo ký hiệu của Leibniz, nếu $y = f(u)$ và $u = g(x)$ đều là hàm khả vi, thì

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (3)$$

Tiếp tuyến và tốc độ biến thiên

Xét đường cát tuyến của đường cong có phương trình $y = f(x)$ đi qua 2 điểm $P(a, f(a))$ và $Q(x, f(x))$ với $x \neq a$. Hệ số góc của đường cát tuyến PQ:

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (4)$$

(Hình vẽ)



Định nghĩa

Tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm $P(a, f(a))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \quad (5)$$

Nếu giới hạn này tồn tại.

Đạo hàm $f'(a)$ chính là hệ số góc của đường tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại $x = a$.

Tiếp tuyến và tốc độ biến thiên

Giả sử y là đại lượng phụ thuộc vào một đại lượng khác x . Khi đó ta viết $y = f(x)$. Nếu x biến thiên từ x_1 đến x_2 tương ứng với y biến thiên từ y_1 đến y_2 , tỷ sai phân

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (6)$$

được gọi là **tốc độ biến thiên trung bình** của y tương ứng với x .

Giới hạn

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) \quad (7)$$

được gọi là **tốc độ biến thiên tức thời** của y tương ứng với x .



Đạo hàm $f'(a)$ là tốc độ biến thiên tức thời của $y = f(x)$ tại $x = a$.

Nếu $f(x)$ là quãng đường đi được của một vật, x là thời gian đi, đạo hàm $f'(a)$ chính là **vận tốc tức thời** của vật tại thời điểm $x = a$.

Đạo hàm của các hàm thông dụng

Đạo hàm của hàm đa thức:

Quy tắc lũy thừa

Nếu n là số thực tùy ý, thì

$$\frac{d}{dx} = nx^{n-1} \quad (8)$$

Đạo hàm của các hàm thông dụng

Đạo hàm của các hàm lượng giác:

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Đạo hàm của các hàm thông dụng

Đạo hàm hàm mũ

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} a^x &= a^x \ln a \\ \frac{d}{dx} \log_a x &= \frac{1}{x \ln a}\end{aligned}\tag{9}$$

Xấp xỉ tuyến tính và vi phân

Các giá trị của hàm $y = f(x)$ tại các điểm gần $P(a, f(a))$ rất gần với giá trị của hàm $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ là tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$ tại điểm P .

(Hình vẽ)



Định nghĩa

Phép tính xấp xỉ

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (10)$$

được gọi là **xấp xỉ tuyến tính**.

Hàm tuyến tính mà đồ thị của nó là tiếp tuyến này

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (11)$$

được gọi là **tuyến tính hóa** của f tại a .

Xấp xỉ tuyến tính và vi phân

Khi x càng tiến lại gần a :

$$f'(x)\Delta x \longrightarrow f(x) - f(a) \equiv \Delta y \quad (12)$$

Định nghĩa

Khi $\Delta x \rightarrow 0$, ta kí hiệu $\Delta x = dx$, lúc này, $f'(x)dx$ được gọi là **vi phân** của hàm f , kí hiệu:

$$dy = f'(x)dx \quad (13)$$



Định lý

Vi phân của hàm số phụ thuộc vào cách ta chọn biến độc lập:

$$df(g(x)) = (f \circ g)' dx = f'(g)g'(x)dx = f'(g)dg \quad (14)$$

Đạo hàm bậc cao

Nếu f là hàm khả vi, f' cũng là hàm khả vi, vậy có thể có đạo hàm của f' , được gọi là **đạo hàm bậc hai** của f , kí hiệu là f'' . Quá trình tương tự có thể tiếp diễn: **Đạo hàm bậc n** thường được kí hiệu là $f^{(n)}$ và thu được bằng cách lấy đạo hàm của f n lần.

Vi phân bậc cao

Nếu f là hàm khả vi, f' cũng là hàm khả vi, vậy $f'(x)dx$ có thể có vi phân của nó, được gọi là **vi phân bậc hai** của f , kí hiệu bằng d^2f . Quá trình tương tự có thể tiếp diễn: **vi phân bậc n** , thường được kí hiệu là $d^n f$ và thu được bằng cách lấy vi phân của f n lần, $d^n f = f^{(n)} df^n$.

Công thức Leibniz

...

Xấp xỉ tuyến tính của một số hàm thông dụng

