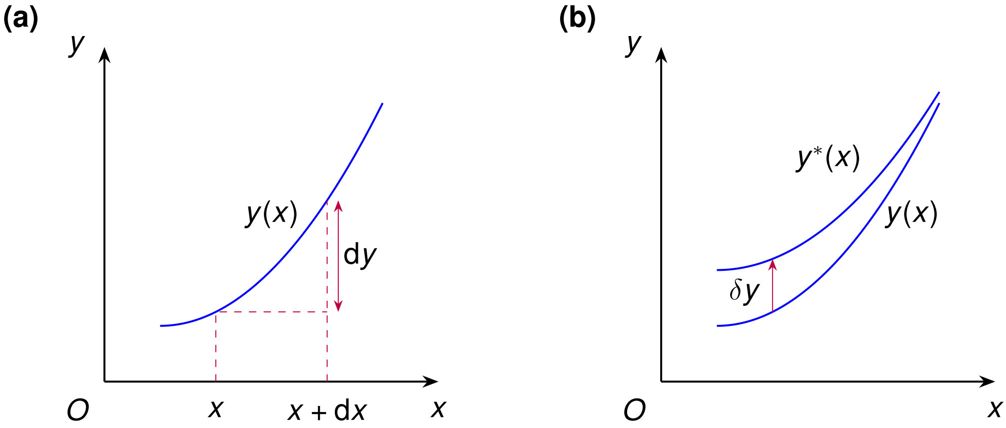
xPhO Physics Club

NHẬP MÔN CƠ HỌC GIẢI TÍCH

Người trình bày: Log

Mục lục

Biến phân khác gì với vi phân?



Hình: **(a)** Phép tính vi phân; **(b)** Phép tính biến phân. [1]

- Hàm tác dụng $S\left[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\right]$ là tối thiểu.

$$S\left[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} L\left[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t\right] \mathrm{d}t, \tag{1}$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} \right) \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Định lý Leibnitz cho biến phân $\delta \dot{\mathbf{q}} = \mathrm{d}\left(\delta \mathbf{q}\right) / \mathrm{d}t$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right) \delta \mathbf{q} \mathrm{d}t + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \right] \Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{3}$$

Hàm tác dụng S đạt cực tiểu khi $\mathbf{q}(t)$ thỏa mãn phương trình

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = 0. \tag{4}$$

- Tích phân Euler

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L \right) = 0. \tag{5}$$

Khi $\partial L / \partial t = 0$ thì

$$H = \dot{\mathbf{q}} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - L = \text{const}. \tag{6}$$

Thế năng trọng trường của dây xích

$$U = \int y\lambda g\sqrt{y'^2(x) + 1}\mathrm{d}x. \tag{7}$$

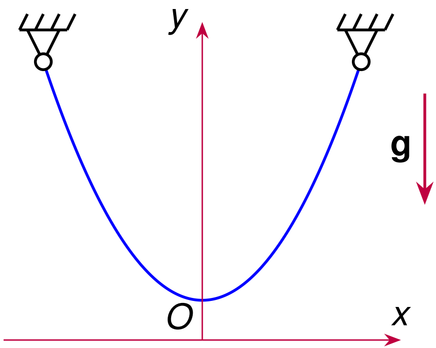
Nên Lagrangian của hệ

$$L = \lambda g y\sqrt{y'^2(x) + 1} \tag{8}$$

Giải phương trình Euler[a], ta được

$$y = A\cosh\left(\frac{x}{A}\right). \tag{9}$$

[a]Hoặc tích phân Euler [2].



Hình: Đường Catenary của một dây xích cố định hai đầu đặt trong trọng trường.

Thời gian ánh sáng truyền từ A đến B

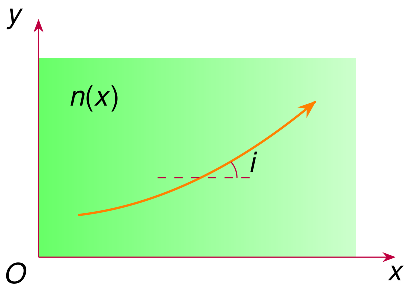
$$t = \int_A^B \frac{n}{c}\mathrm{d}s = \frac{1}{c}\int_A^B n(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x. \tag{10}$$

Nên Lagrangian của hệ

$$L = n(x)\sqrt{1+y'^2(x)}. \tag{11}$$

Giải phương trình Euler, ta được

$$n(x)\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const}. \tag{12}$$



Hình: Ánh sáng truyền trong môi trường có chiết suất biến thiên theo vị trí.

- $n(x)\sin(i) = \text{const}$ (định luật Snell).

Mục lục

Nguyên lý D'Alembert về công ảo

- Nguyên lý công ảo
$$\sum_i (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0. \tag{13}$$
- Biến đổi sang tọa độ suy rộng
$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \tag{14}$$
- Lực suy rộng
$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i^A \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \tag{15}$$
- Động lượng
$$\dot{\mathbf{p}}_i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}\right) = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}\right] \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \tag{16}$$
- Nguyên lý D'Alembert
$$\sum_j \left[Q_j - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_j}\right] \delta q_j = 0. \tag{17}$$

Ta thu được phương trình Euler-Lagrange

$$Q_j = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \tag{18}$$

- Tăng thêm tọa độ suy rộng cho cơ hệ thay thế cho liên kết động học? [3]

Lagrangian:

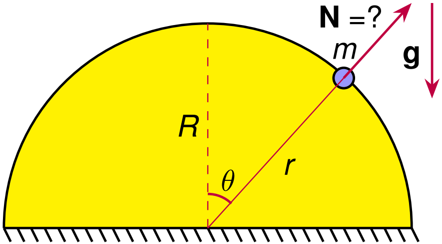
$$L = \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \dot{\theta}^2 r^2 \right) - mgr \cos(\theta) . \quad (19)$$

Phương trình Euler-Lagrange

$$N = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - m\dot{\theta}^2 r + mg \cos(\theta) . \quad (20)$$

Tại $r = R$ không đổi

$$N = -m\dot{\theta}^2 R + mg \cos(\theta) . \quad (21)$$



Hình: Lực liên kết bị động **N** được tính nhờ khảo sát tọa độ suy rộng r.

- Lagrangian:

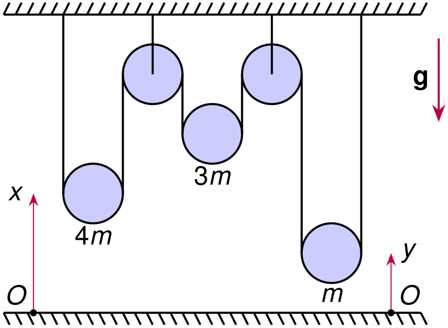
$$L = \frac{7}{2}m\dot{x}^2 + 3m\dot{x}\dot{y} + 2m\dot{y}^2 - mg(x - 2y). \tag{22}$$

Với phép biến đổi: $x \to x_0 + \epsilon, y \to y_0 + 2\epsilon$ thì thành phần thế năng $-mg(x_0 - 2y_0)$ không phụ thuộc vào ϵ, nên $\partial L/\partial\epsilon = 0$

- Động lượng suy rộng

$$p_\epsilon = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\frac{\partial x}{\partial \epsilon} + \frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\frac{\partial y}{\partial \epsilon} \tag{23}$$

$$= 17m\dot{x} + 10m\dot{y} = \text{const}.$$



Hình: Hệ thống ròng rọc có động lượng suy rộng bảo toàn.

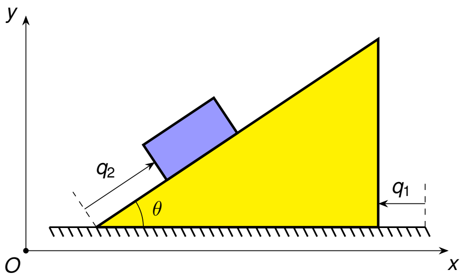
- Lagrangian: $L = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\left[\dot{q}_2^2 + \dot{q}_1^2 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2\cos(\theta)\right] - m_2 g q_2\sin(\theta)$.

Phương trình Euler-Lagrange với q_1, q_2

$$\begin{aligned} m_1\ddot{q}_1 + m_2\left[\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2\cos(\theta)\right] &= 0, \\ m_2\left[\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1\sin(\theta)\right] &= -m_2 g\sin(\theta). \end{aligned} \tag{24}$$

Hai phương trình trên có thể tìm được từ đâu?

- Bảo toàn động lượng phương nằm ngang.
- Định luật II Newton cho khối m_2 chiếu theo phương song song mặt nghiêng.



Hình: Nêm trượt trên nêm.

Mục lục

Có những nền tảng cơ học giải tích nào?

- Cơ học Lagrange
- Cơ học Hamilton
- Cơ học Routhian: kết hợp Lagrange và Hamilton.
- Nguyên lý Gauss: Hàm cưỡng bức liên kết tối thiểu.
- Phương trình Appell: cho cơ hệ phi Holonom.
- Koopman–von Neumann: Cơ học lượng tử cổ điển.

Cơ học Hamilton

- Biến đổi Legendre: $H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$.
- Phương trình Hamilton:

$$\dot{q}_i = +\frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{25}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{27}$$

- Phương trình Hamilton-Jacobi:

$$H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{28}$$

- Liên hệ trực tiếp với hàm tác dụng S

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}. \tag{29}$$

Độ cưỡng bức

$$Z = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left|\mathbf{a}_i - \frac{\mathbf{F}_i}{m_i}\right|^2. \tag{30}$$

đạt cực tiểu (tức là $\delta Z = 0, \delta^2 Z > 0$).

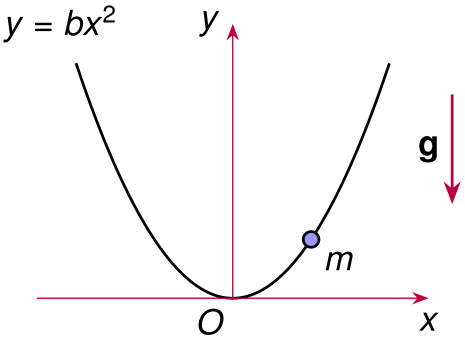
Ví dụ: $Z = m\left[(\ddot{x})^2 + (\ddot{y}+g)^2\right]$.

$$\delta\ddot{y} = 2bx\delta\ddot{x} \tag{31}$$

$$\delta Z = 2m\left(\ddot{x}\delta\ddot{x} + (\ddot{y}+g)\,\delta\ddot{y}\right) = 0 \tag{32}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2bx\left(\ddot{y}+g\right) = 0 \tag{33}$$

$$\Rightarrow \left(1+4b^2x^2\right)\ddot{x} + 4b^2x\dot{x}^2 + 2bxg = 0. \tag{34}$$



Hình: Chuyển động của một hạt trên rãnh parabol dưới tác dụng của trọng lực.

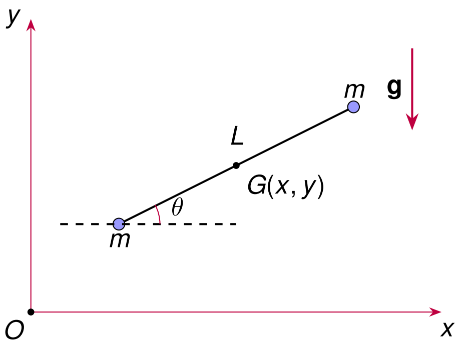
Năng lượng gia tốc

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \left|\ddot{\mathbf{r}}_i\right|^2 . \qquad (35)$$

Ví dụ: $S = m\left[\ddot{\pi}^2 + L^2\left(\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4\right)\right]$ với á vận tốc: $\dot{\pi} = \dot{x}/\cos(\theta) = \dot{y}/\sin(\theta)$.
Biến phân công: $\delta A = Q_\pi \delta\pi + Q_\theta \delta\theta$ với $Q_\pi = -2mg\sin(\theta)$, $Q_\theta = 0$.
Phương trình Appell

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\pi}} = Q_\pi, \quad \frac{\partial S}{\partial \ddot{\theta}} = Q_\theta \qquad (36)$$

$$\Rightarrow m\ddot{\pi} = -2mg\sin(\theta), \quad mL^2\ddot{\theta} = 0. \qquad (37)$$



Hình: Một thanh chuyển động dưới tác dụng của trọng trường.

Tài liệu tham khảo I

[1] N. V. Đạo, "Cơ học giải tích," *NXB Đại học quốc gia, Hà nội*, 2002.

[2] D. Cline, *Variational principles in classical mechanics*. University of Rochester River Campus Librarie, 2017.

[3] D. Morin, *Introduction to classical mechanics: with problems and solutions*. Cambridge University Press, 2008.