xPhO Summer Course 2025

Trưởng nhóm: *Carina*

Mục lục

Lời mở đầu

Đây là phần mở đầu.

Tuần 1

Mở Đầu Về Giải Tích

- Rơi tự do là sự thay đổi vị trí theo thời gian, đường cong là một hình thay đổi hướng. Đây là hai loại thay đổi chính thúc đẩy sự phát triển của giải tích, một môn toán học xoay quanh hai phép toán là đạo hàm và tích phân.

- Sự ra đời và phát triển của nó xoay quanh hình học và vật lý với muôn vàn vấn đề thú vị mà có thể nói tóm gọn: *Giải tích là toán học của sự thay đổi.*

- Các nhà toán học cổ đại (chủ yếu làm việc với hình học) đã luôn đau đầu vì hai bài toán: *tìm tiếp tuyến của một đường cong bất kỳ*, và *tính diện tích dưới một đường cong.* Archimedes đã có một số kết quả nổi bật với phương pháp vét cạn. Nhưng phải cho tới thế kỉ XVII, với đại số của Viéte, hình học giải tích của Descartes và Fermat cùng với mối quan tâm dâng cao về chuyển động của các thiên thể mới thúc đẩy mạnh mẽ việc khai thác mảnh đất hoang này với đỉnh cao là các công trình của Newton và Leibniz.

- Như vậy, một cách tự nhiên để tiếp cận giải tích là thông qua hình học giải tích, tức là hình học với các toạ độ, phương trình thay vì các lập luận logic thuần tuý như trong hình học Euclid cổ điển. Cụ thể hơn, các đối tượng hình học như điểm, đường thẳng, đường cong,... sẽ được mô tả bởi các hàm số cùng phương trình qua đó ta có thể thực hiện các phép toán đại số.

- Khái niệm về giới hạn (hàm số) đã sớm nảy nở từ thời cổ đại thông qua bài toán nghịch lý Archilles và con rùa của Zeno đã quá đỗi nổi tiếng.

- Trong khi đó, ý tưởng căn bản của phép toán đạo hàm và vi phân là khảo sát sự thay đổi thông qua phân nhỏ một đại lượng hữu hạn (độ dài, thời gian,...) ra thành vô số khoảng nhỏ. Chia một thành hai phần, chia hai phần thành bốn phần và tiếp diễn như vậy vô hạn lần: các khoảng thu được là rất rất nhỏ, không bằng 0 nhưng nhỏ hơn bất cứ số thực dương nào.

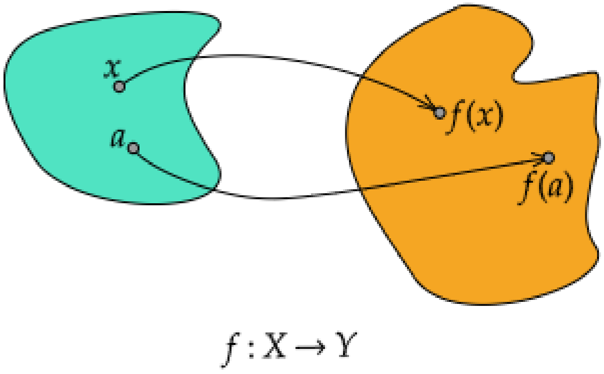
- Điều này lại có liên hệ gì với khái niệm giới hạn?

Trong tuần 1, chúng tôi sẽ trình bày nội dung về hàm số và giới hạn của hàm số, đạo hàm và vi phân cùng ứng dụng của chúng.

1.1 Hàm Số

Định nghĩa 1.1.1. *Hàm f là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x thuộc tập hợp X với một và chỉ một phần tử, kí hiệu $f(x)$, thuộc tập hợp Y.*

- X được gọi là tập hợp (miền) xác định của hàm f.
- Y được gọi là tập hợp giá trị của hàm f.
- Nếu X và Y là tập các số thực, khi đó hàm được gọi là hàm số.



1.1.1 Đồ thị hàm số

Hàm số có thể được biểu diễn bằng công thức, bảng, đồ thị hoặc mô tả bằng lời nói. Trong đó trực quan nhất là biểu diễn thông qua đồ thị.

Định nghĩa 1.1.2. *Đồ thị của hàm số f có miền xác định X là tập hợp các cặp có thứ tự*

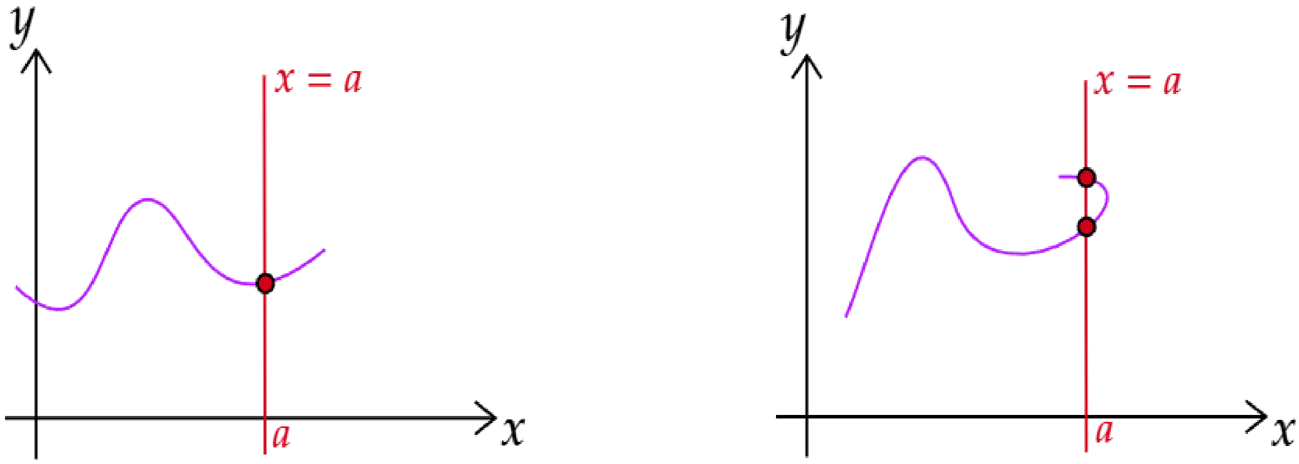
$$\{(x, f(x))\,|x \in X\}.$$

Nói cách khác, đồ thị của f bao gồm mọi điểm (x, y) sao cho $y = f(x)$ với $x \in X$

(a) (b)

Hình 1.1: Ví dụ về đồ thị hàm số

Các điểm này có thể là vô số, tạo thành những đường cong hoặc đường thẳng trên mặt phẳng, liên tục hoặc rời rạc. Song không phải mọi đường bất kỳ đều là đồ thị của một hàm số nào đó. Để là đồ thị của một hàm số, mỗi hoành độ x phải tương ứng với một tung độ y duy nhất. Nghĩa là không được có hai điểm khác nhau trên đồ thị có cùng hoành độ nhưng khác tung độ. Một cách trực quan, *không có đường thẳng thẳng đứng (vuông góc với trục hoành) nào cắt đồ thị của một hàm số nhiều hơn một lần.* (xem 1.1)



(a) Đồ thị hàm số (b) Không phải đồ thị hàm số

Hình 1.2: So sánh

1.1.2 Các hàm thông dụng

Trong khi xử lý các bài toán, chúng ta thường gặp các hàm số có dạng tổng quát. Các hàm này được phân loại theo dạng biểu thức của chúng. Dưới đây là một số loại hàm số cơ bản:

- Hàm *tuyến tính* có dạng $f(x) = ax + b$, với a và b là các hằng số. Đồ thị của hàm tuyến tính là một đường thẳng.
  Ví dụ: $2x + 3$.

- Hàm *đa thức* có dạng $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, với $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ là các hằng số và $n \in \mathbb{N}$ là bậc của đa thức.
  Ví dụ: $x^2 - 4x + 4$; $x^5 + 2x^2 - 5x + 1$; $3x + 2$.

- Hàm *luỹ thừa* có dạng $f(x) = x^\alpha$, với $\alpha \in \mathbb{R}$ là một hằng số.
  Ví dụ: $x^2, x^{-3} = \frac{1}{x^3}, x^{5/2} = \sqrt{x^5} = (\sqrt{x})^5$.

- Hàm tỷ lệ có dạng $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức. Ví dụ: $\frac{x^2+1}{x-2}$.

Trên đây được gọi chung là các hàm *đại số*, tức là các hàm có thể được biểu diễn bằng các toán tử đại số như cộng, trừ, nhân, chia và lũy thừa.
Ví dụ : $\frac{\left(x^5+x^3-x^2+4\right)^{3/2}}{x+\sqrt{x}}$.

Ta cũng liệt kê thêm một số hàm không thuộc loại trên.
Ví dụ như các hàm *siêu việt*:

- Hàm *lượng giác* là các hàm $\sin x, \cos x, \tan x, \ldots$ mà có thể được định nghĩa thông qua các điểm trên một đường tròn đơn vị.

- Hàm *mũ* và *lôgarit* lần lượt có dạng $f(x) = a^x$ và $f(x) = \log_a x$, với $a > 0$ là một hằng số. Cái sau là hàm *nghịch đảo* của cái trước, tức là $\log_a a^x = x$ và $a^{\log_a x} = x$.
  Ví dụ: 2^x và $\log_2 x$; e^x và $\ln x$.

Hay, hàm xác định từng phần là các hàm được xác định bởi các công thức khác nhau trên các miền khác nhau của tập xác định.
Ví dụ, hàm giá trị tuyệt đối $f(x) = |x|$ được định nghĩa:

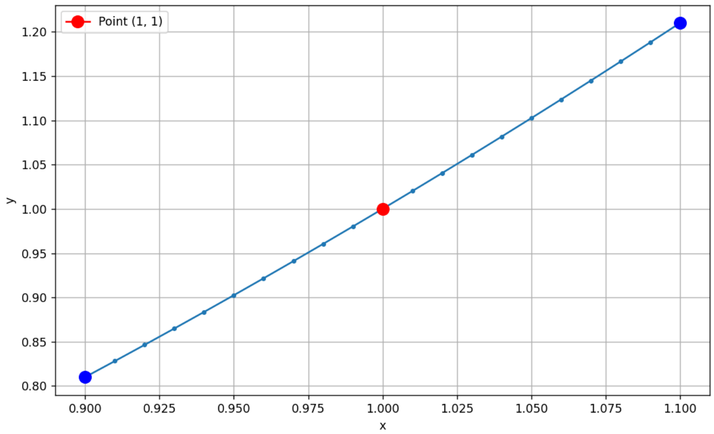
$$\begin{cases} x & \text{nếu } x \geq 0 \\ -x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$$

Trong tất cả những hàm vừa liệt kê lại có một số hàm có tính chất chung. Chẳng hạn như tính chẵn lẻ, tính đồng biến nghịch biến, tính liên tục,...
Trước khi sang phần tiếp theo, hãy nói qua thêm một khái niệm nữa, đó là *hàm hợp*. Ta biết rằng hàm số là một thứ mà ta cho vào một giá trị và sẽ cho ra một giá trị nào đó. Trên cơ sở này, hàm hợp là một hàm số mà đầu vào của nó là đầu ra của một hàm số khác.
Xét hai hàm $f(x)$ và $g(x)$, hàm hợp của chúng được ký hiệu là $f(g(x))$ và được đọc là "hàm f của hàm g tại x". Hàm hợp này sẽ nhận đầu vào là giá trị của hàm $g(x)$ và trả về giá trị của hàm f tại điểm đó.
Ví dụ: $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin x$ vậy $f(g(x)) = f(\sin x) = \sin^2 x$.

1.2 Giới Hạn Hàm Số

1.2.1 Một ví dụ về giới hạn

Xét hàm số $y = x^2$, phóng to đồ thị vào gần điểm $(1;1)$:



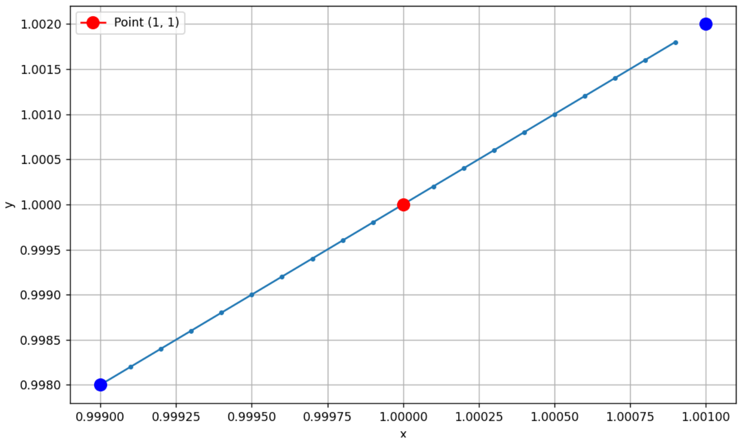
Hình 1.3: Đồ thị $y = x^2$ được phóng to trong khoảng $[0.9; 1.1]$

Hãy tưởng tượng có hai con bọ xuất phát từ hai điểm xanh và bò lại *gần* điểm màu đỏ trên con đường tạo thành từ đoạn đồ thị này. Để tiến tới đó, con bọ thứ nhất, xuất phát từ bên trái, phải đi qua các điểm nằm trong khoảng $[0.9; 0.999]$. Trong khi đó, con bọ thứ hai, xuất phát từ bên phải, phải trải qua các điểm nằm trong khoảng $[1.001; 1.1]$.
Ta thấy chúng quả thực đang tiến tới *gần* điểm $(1;1)$ bởi không chỉ hoành độ mà tung độ của chúng cũng dần tiến đến giá trị bằng 1 (như được kiểm chứng trong bảng bên dưới).

Bảng 1.1: Bảng giá trị $y = x^2$ khi x tới gần 1

Bên trái		Bên phải	
x	y	x	y
0.900	0.8100	1.100	1.2100
0.925	0.8556	1.075	1.1556
0.950	0.9025	1.050	1.1025
0.975	0.9506	1.025	1.0506
0.990	0.9801	1.010	1.0201
0.995	0.9900	1.005	1.0100
0.999	0.9980	1.001	1.0020

Sau khi cả hai lần lượt tới điểm $(0.999; 0.9980)$ và $(1.001; 1.0020)$, chúng tiếp tục di chuyển và để quan sát quá trình tiếp theo, ta tiếp tục phóng to khoảng đồ thị nằm giữa chúng:



Hình 1.4: Khoảng $[0.999; 1.001]$ với hai vị trí ban đầu mới được đánh dấu

Như vậy sự phóng to này có thể tiếp tục vô hạn lần nữa trong khi khoảng cách giữa hai con bọ và điểm màu đỏ càng nhỏ dần. Dù vậy, ta biết rằng trong thực tế rồi chúng sẽ đến được điểm màu đỏ.[1]

Nhưng nếu giả sử tại hai điểm nào đó rất rất gần $(1; 1)$, đường bị gãy (và phía dưới chúng là vực sâu), hai chú bọ không thể tiến lên được nữa. Rồi vấn đề tiếp tục xảy đến rằng chỉ cần vị trí của các điểm này *luôn gần điểm* $(1; 1)$ *hơn chúng*, hai chú bọ đáng thương sẽ phải tiếp tục di chuyển với một quá trình "phóng to vô hạn" như vậy mãi mãi.

Định nghĩa 1.2.1. *Giả sử $f(x)$ xác định trong một khoảng (miền) giá trị nào đó của x có chứa a (có thể xác định hoặc không xác định tại a). Khi đó ta viết*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

và nói "giới hạn của $f(x)$, khi x tiến tới a, bằng L"
nếu chúng ta có thể lấy các giá trị $f(x)$ gần L một cách tuỳ ý bằng cách lấy các giá trị của x đủ gần a (từ bất cứ phía nào), nhưng không được bằng a.

Định nghĩa vừa đưa ra về giới hạn có vẻ khá trừu tượng và thiếu chặt chẽ. Dẫu thế trong khuôn khổ phần này, ta sẽ không đào sâu vào vấn đề chặt chẽ trong lí luận giới hạn. Thay vào đó, hy vọng với ví dụ vừa rồi, các bạn có thể phần nào thu được trực giác về khái niệm này.

Định nghĩa 1.2.2. *Ta viết*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

để nói rằng giới hạn của $f(x)$ khi x tiến tới a từ phía bên trái (tức là x nhỏ hơn a) bằng L.

Tương tự, với $x > a$, ta viết

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L.$$

Định lý 1.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \leftrightarrow \lim_{x \to a^-} f(x) = L, \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

Nghĩa là nếu giới hạn trái và phái khi $x \to a$ cùng bằng nhau thì giới hạn của hàm số tại điểm đó là tồn tại. Ta cũng thừa nhận nếu hàm số tồn tại giới hạn tại điểm nào đó, giới hạn đó là duy nhất. Như đã thể hiện thông qua ví dụ ở trên.

[1] Đoạn đường mà chúng trải qua sẽ nhỏ dần. Quãng đường chúng phải đi sẽ là một tổng có vô số hạng tử với các hạng tử phía sau ngày càng nhỏ mà may thay, tổng này có giá trị hữu hạn.

1.2.2 Giới hạn ở vô cùng và một số quy tắc tính giới hạn

Định nghĩa 1.2.3. *Ta viết*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

nếu f(x) có thể nhận các giá trị lớn tuỳ ý khi cho x nhận các giá trị đủ gần a, nhưng không được bằng a.

Điều này dễ hiểu nếu xét hàm $1/x$ với $a = 0$: lấy 1 chia 100, rồi lấy 1 chia 10, chia 0.1, 0.01, ... kết quả thu được sẽ ngày càng lớn. Nếu lấy 1 chia $1/10^6$, sẽ có được 10^6. Và cứ thế. Chú ý rằng vô hạn không phải một con số. Nó, ở đây, là một giới hạn.
Ta cũng có thể có điều ngược lại:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

để diễn tả khi x nhận các giá trị lớn tuỳ ý (tiến tới vô cùng) thì $f(x)$ tiến tới gần giá trị xác định L một cách tuỳ ý. Trong trường hợp hàm số là $1/x$, ý của ta là tương đương với cho x nhận một giá trị nào đó đủ lớn $(10^2, 10^3, 10^4, 10^n...)$ sao cho có thể coi $1/x = 10^{-n} \approx 0$.
Cũng có thể viết

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

để nói rằng $f(x)$ có thể nhận các giá trị lớn tuỳ ý khi x đủ lớn.

Giả sử c và d là các hằng số,

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ và } \lim_{x \to a} g(x) = B,$$

ta thừa nhận những tính chất và quy tắc sau:

- *Tính chất tuyến tính:*
$$\lim_{x \to a} (cf(x) \pm dg(x)) = cA \pm dB.$$
- *Tính duy nhất:*
$$\text{Nếu } f(x) = g(x) \; khi \; x \neq a, \text{thì } A = B.$$
- *Quy tắc nhân:*
$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = AB.$$
- *Quy tắc chia:*
$$\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = A/B, B \neq 0.$$
- *Quy tắc luỹ thừa:*
$$\lim_{x \to a} (f(x))^{m/n} = A^{m/n}.$$

Định lý 2. *Định lý kẹp Xét các hàm số $g(x), f(x), h(x)$ xác định trên miền chứa a (có thể có hoặc không xác định tại a), với mọi x khác a:*

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x),$$

và giả sử

$$\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L.$$

Thì,

$$\lim_{x \to a} f(x) = L.$$

1.3 Đạo Hàm

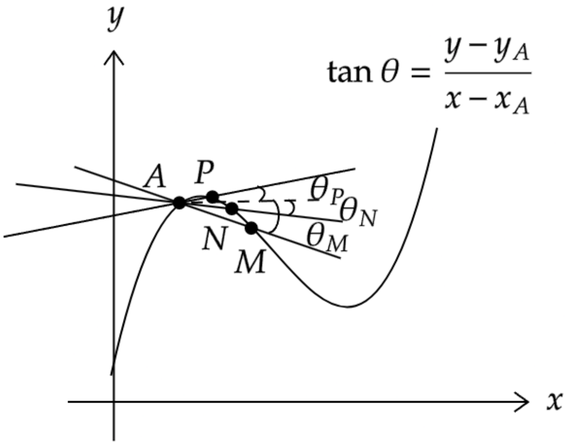
1.3.1 Khái niệm

Định nghĩa 1.3.1. ***Đạo hàm*** *của hàm số f tại giá trị a, kí hiệu bởi $f'(a)$, là*

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

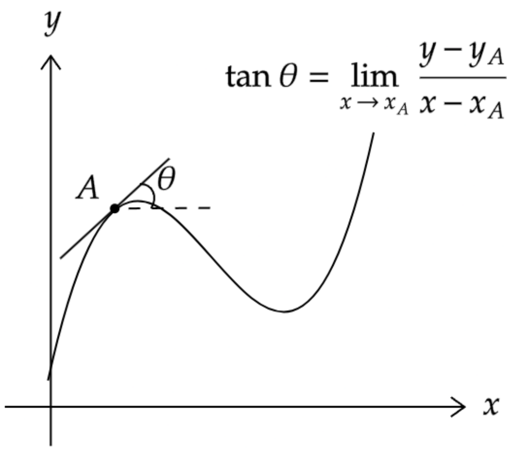
nếu giới hạn này tồn tại.

Ý nghĩa hình học trực quan của đạo hàm là nó thể hiện độ dốc của đồ thị và tốc độ biến thiên của hàm số. Ta xét độ dốc của các đường cát tuyến đi qua A:[2]



Hình 1.5: Độ dốc của các đường cát tuyến đi qua A (các góc θ_M, θ_N, θ_P)

Nếu các điểm M, N, P tiến gần đến điểm A, độ dốc của các đường cát tuyến này sẽ tiến gần đến một giá trị nhất định, chính là độ dốc của tiếp tuyến. Độ dốc này chính là đạo hàm của hàm số tại điểm A:



Hình 1.6: Liên hệ giữa đạo hàm và độ dốc (độ lớn góc θ) của đồ thị

Cũng từ hình vẽ trên, ta có thể thấy đạo hàm chính là hệ số góc của tiếp tuyến đồ thị. Vì thế, ta có thể biểu diễn phương trình của đường tiếp tuyến tại $x = a$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \tag{1.2}$$

[2] Ở đây góc θ_M và θ_N có giá trị âm.

1.3.2 Một số quy tắc đạo hàm

Dưới đây là đạo hàm của một số hàm thông dung:

- *Đạo hàm của hàm đa thức*:
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1} \tag{1.3}$$

- *Đạo hàm của các hàm lượng giác*:
$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x & \frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x & \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \end{aligned}$$

- *Đạo hàm của hàm mũ và hàm logarit*:
$$\frac{d}{dx}e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x} \tag{1.4}$$

Tương tự như giới hạn, đạo hàm cũng có một số tính chất quan trọng:

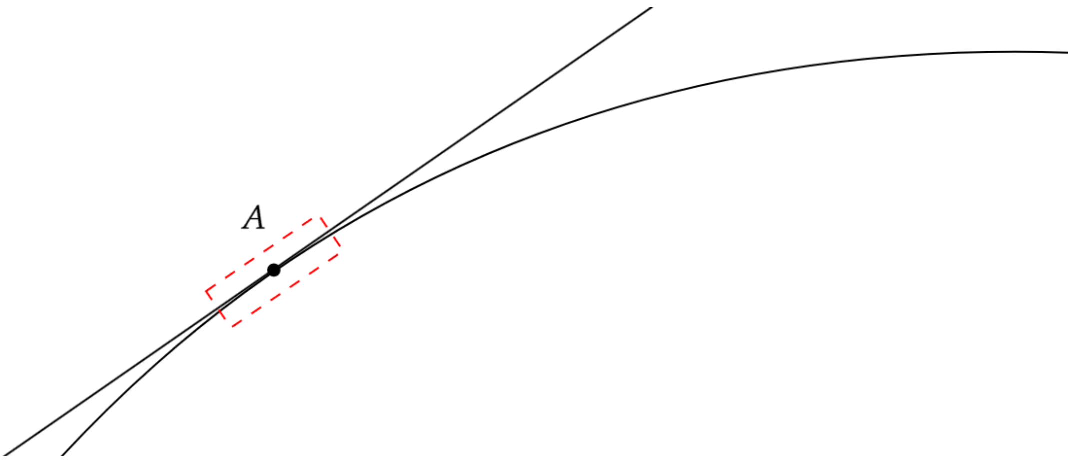
- *Tính chất tuyến tính*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, và c là một hằng số, thì
$$(cf + g)' = cf' + g' \tag{1.5}$$

- *Quy tắc nhân*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, thì
$$(fg)' = fg' + f'g \tag{1.6}$$

- *Quy tắc chia*: Nếu $f(x)$ và $g(x)$ là hai hàm số theo x, với $g(x) \neq 0$, thì
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \tag{1.7}$$

1.3.3 Xấp xỉ tuyến tính và vi phân

Tiếp theo ta sẽ nói về một ứng dụng quan trọng khác của đạo hàm. Nếu phóng to đồ thị tại điểm $x = a$, ta có thể thấy đồ thị hàm số trông khá gần với tiếp tuyến của nó tại điểm này.



Hình 1.7: Phóng to đồ thị hàm số tại điểm $x = a$

Từ quan sát trên, ta có thể nghĩ tới một phép xấp xỉ.

Định nghĩa 1.3.2. *Ở lân cận điểm $x = a$, ta có thể xấp xỉ hàm số $f(x)$ bằng phương trình đường tiếp tuyến tại điểm này:*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \tag{1.8}$$

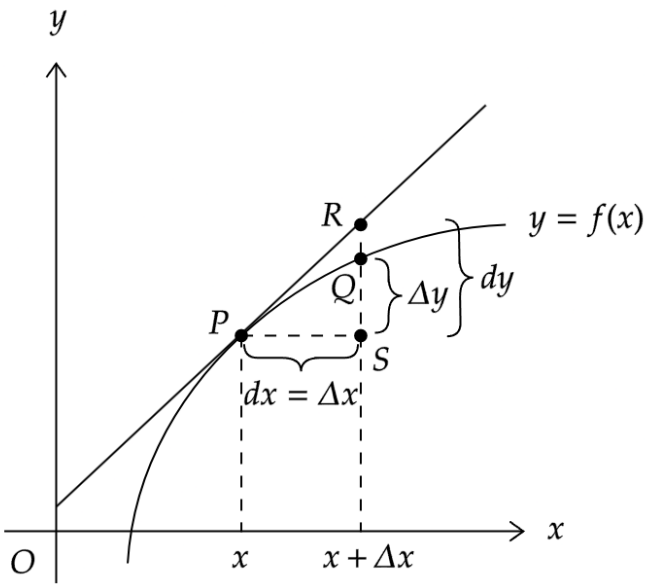
*đây được gọi là **xấp xỉ tuyến tính**.*

Ý tưởng đằng sau phép xấp xỉ tuyến tính đôi khi được phát biểu bằng **phép lấy vi phân**.

Định nghĩa 1.3.3. *Nếu $y = f(x)$, **vi phân** dx là một biến độc lập. Lúc đó **vi phân** dy được xác định theo dx bởi phương trình:*

$$dy = f'(x)dx \tag{1.9}$$

và **phép lấy vi phân** trên có ý nghĩa hình học như hình vẽ:



Hình 1.8: Ý nghĩa hình học của phép lấy vi phân

Từ kí hiệu bên trên, ta có thể viết lại đạo hàm theo cách khác:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{1.10}$$

Đây được gọi là **kí hiệu Leibniz cho đạo hàm**.

1.3.4 Quy tắc đạo hàm hợp

Đối với một hàm số $f(x)$ có dạng phức tạp theo x, ta có thể viết lại nó dưới dạng hàm hợp $f(g(x))$ sao cho $f(g)$ và $g(x)$ có dạng đơn giản hơn, sau đó áp dụng quy tắc sau để thực hiện phép đạo hàm:

Định lý 3. ***Quy tắc đạo hàm hợp**: Nếu f là hàm số có đạo hàm tại $g(x)$, và g là hàm số có đạo hàm tại x, thì đạo hàm của hàm hợp $f(g(x))$ được tính theo công thức:*

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) \tag{1.11}$$

Ví dụ: $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ có thể được viết lại dưới dạng hàm hợp $f(g(x))$ với $g(x) = x^2 + 1$.
Lưu ý: Quy tắc đạo hàm hợp không đơn giản chỉ là khử đi tử và mẫu số giống như phép nhân phân số vì ý nghĩa của kí hiệu Leibniz không hoàn toàn giống với phân số thông thường. Việc chứng minh quy tắc này sẽ phức tạp hơn và sẽ là nhiệm vụ của bạn trong bài tập ....

1.3.5 Về tính toán số

Giả sử ta muốn tính đạo hàm của $y(x)$ bằng các công cụ lập trình, sẽ là tự nhiên nếu sử dụng trực tiếp định nghĩa của đạo hàm:

$$y(x_0 + \epsilon) \approx y(x_0) + \epsilon y'(x_0).$$

Ở đây ϵ là một con số rất nhỏ, ví dụ như 0.01, hay nếu cần chính xác hơn, có thể là 0.001,v.v. Như vậy, việc ta cần làm chỉ là khai báo hàm $y(x)$ rồi chọn một bước nhảy thích hợp. Ta có thể làm điều tương tự đối với các đạo hàm cấp cao hơn:

$$y'(x_0 + \epsilon) \approx y'(x_0) + \epsilon y''(x_0).$$

1.4 Tốc Độ

Vật lý bắt đầu từ sự quan sát điều thay đổi và không thay đổi. Khi vị trí của hai thứ nào đó thay đổi, chúng ta, một cách tự nhiên, sẽ thấy vật nào hoàn thành sự thay đổi đó trước, hay sau. Ta cần một đại lượng đặc trưng cho sự so sánh này. Có một đại lượng như thế, đó là tốc độ (trung bình), được định nghĩa là tỷ số giữa khoảng cách di chuyển được và thời gian tương ứng, hay

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Khi đo tốc độ của một vật thể đang chuyển động trong một khoảng thời gian quanh một thời điểm nào đó, quãng đường mà nó di chuyển được cũng được đo, cùng với thời gian tương ứng và sai số không thể tránh khỏi của phép đo.

Hãy xem xét một ví dụ nhỏ. Giả sử bạn quan sát một vật di chuyển trên một quãng đường, ban đầu là $1000m$, rồi rút xuống còn $1m$, rồi đến $0.01m$. Ở cỡ $1000m$, các sai số cỡ $10m$, $10s$ là không đáng kể. Tốc độ trung bình phản ảnh tốt trạng thái chuyển động của vật. Nhưng với $1m$, sai lệch nhỏ cỡ $0.01s$ hay $0.05m$ cũng có thể làm thay đổi tốc độ trung bình một cách rõ rệt. Với các cỡ nhỏ, tinh vi hơn, giá trị đo càng bị ảnh hưởng mạnh bởi những nhiễu động bé nhỏ. Chẳng hạn, việc đo thời gian đi hết $1cm$ của một người đang chạy, cũng như vậy, là không có ý nghĩa bởi sự dao động dữ dội của giá trị đo.

Thành thử, ta cần một khái niệm, một đại lượng có thể tính được, không bị ràng buộc bởi những vấn đề đo lường(tức là thuần tuý toán học), và có thể phản ánh được trạng thái chuyển động của vật. Tức là với mọi sai số và bậc độ lớn mà ta quan tâm, ta đều có thể thu được sự chính xác cần thiết.

Định nghĩa 1.4.1. *Tốc độ tức thời của một vật tại một thời điểm là giới hạn của tốc độ trung bình khi khoảng thời gian tiến tới không.*

Nghĩa là, tốc độ tức thời tồn tại tại một thời điểm nào đó, ta luôn có thể tìm được một khoảng thời gian đo đủ nhỏ δ sao cho kết quả đo tốc độ trung bình trên khoảng đó sai số không quá ϵ so với tốc độ tức thời tại thời điểm được xét. Từ đây, ta đi tới một định nghĩa khác (chặt chẽ hơn) cho giới hạn:

Định nghĩa 1.4.2. *Ta nói rằng*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

nếu với mọi số thực dương ϵ nhỏ tuỳ ý, luôn tồn tại một số thực dương δ sao cho

$$0 < |x - a| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \delta.$$

Trong trường hợp đang bàn luận của chúng ta, x chính là t, a đại diện cho thời điểm đang được xét, $f(x)$ là tốc độ trung bình của vật trong khoảng thời gian $(t-\delta, t+\delta)$, và L là tốc độ tức thời tại thời điểm t.

Hơn nữa, từ định nghĩa 1.4.1, dễ thấy rằng tốc độ tức thời chính là đạo hàm của quãng đường theo thời gian tại thời điểm đó, hay

$$v(\tau) = \lim_{t\to\tau} \frac{\Delta s}{t-\tau} = \left.\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right|_{t=\tau}.$$

1.5 Các Ứng Dụng Khác Của Đạo Hàm Và Vi Phân

1.5.1 Giá trị cực đại và cực tiểu

Đạo hàm có một ứng dụng quan trọng trong việc xác định các **cực đại địa phương** và **cực tiểu địa phương**. Trước hết, ta sẽ tìm hiểu về hai khái niệm này.

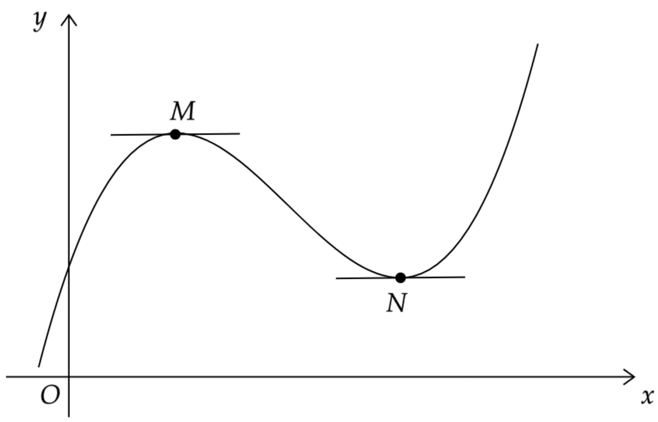
Định nghĩa 1.5.1. ***Cực đại địa phương*** *của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = a$ là giá trị $f(a)$ nếu tồn tại một khoảng mở $(a-\delta, a+\delta)$ với $\delta > 0$ sao cho:*

$$f(a) \geq f(x) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Định nghĩa 1.5.2. ***Cực tiểu địa phương*** *của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = a$ là giá trị $f(a)$ nếu tồn tại một khoảng mở $(a-\delta, a+\delta)$ với $\delta > 0$ sao cho:*

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in (a-\delta, a+\delta)$$

Và các điểm trên được gọi chung là **cực trị** của hàm số $f(x)$.

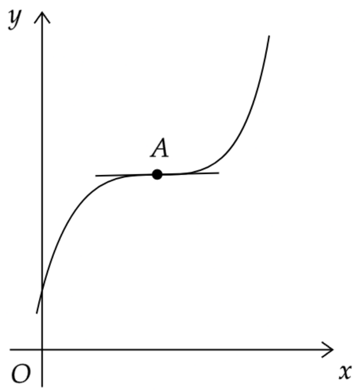


Hình 1.9: Cực đại địa phương (điểm M) và cực tiểu địa phương (điểm N)

Từ hình vẽ trên, ta có thể thấy tại các điểm cực trị, tiếp tuyến của đồ thị nằm ngang. Từ đó, ta có định lý sau:

Định lý 4. ***Định lý Fermat****: Nếu hàm số f có cực trị tại a, thì $f'(a) = 0$ nếu đạo hàm này tồn tại.*

Tuy nhiên, định lý đảo của định lý trên không đúng.



Hình 1.10: Điểm uốn A của đồ thị hàm số

Từ hình vẽ trên, ta có thể thấy đạo hàm của hàm số tại điểm A bằng 0 nhưng đây không phải là điểm cực trị. Điểm này được gọi là **điểm uốn** của đồ thị hàm số.
Một cách để xác định điểm cực trị là cực đại hay cực tiểu địa phương là sử dụng định lý sau:

Định lý 5. *Xét hàm f có đạo hàm bằng 0 tại điểm a, nếu:*

- $f''(a) > 0$, *thì $f(a)$ là cực tiểu địa phương.*
- $f''(a) < 0$, *thì $f(a)$ là cực đại địa phương.*

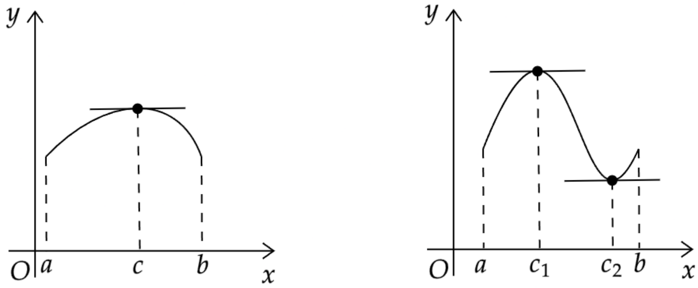
Nếu $f''(a) = 0$, ta không thể kết luận được gì về điểm này. Trong trường hợp đó, ta sẽ cần sử dụng các phương pháp sẽ được bàn luận trong các bài tập...

1.5.2 Định lý giá trị trung bình

Định lý giá trị trung bình là một trong những định lý quan trọng của giải tích. Nhưng trước khi đến với định lý này, ta sẽ cần giới thiệu một định lý khác:

Định lý 6. ***Định lý Rolle****: Nếu hàm số f là liên tục và khả vi trên khoảng $[a, b]$, và $f(a) = f(b)$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Chúng ta có thể nhìn vào đồ thị của các hàm số thỏa mãn điều kiện trên để thấy được ý nghĩa trực quan của điểm c:



Hình 1.11: Định lý Rolle

Việc chứng minh chặt chẽ sẽ là nhiệm vụ của bạn trong bài tập....
Định lý giá trị trung bình là một mở rộng của định lý Rolle. Định lý này phát biểu như sau:

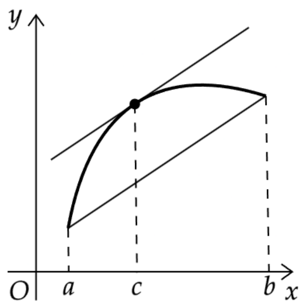
Định lý 7. ***Định lý giá trị trung bình***: *Nếu hàm số f là liên tục và khả vi trên khoảng $[a, b]$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{1.12}$$

hay

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{1.13}$$

Khi này, độ dốc của tiếp tuyến tại điểm c bằng với độ dốc của cát tuyến nối giữa hai điểm a và b:



Hình 1.12: Định lý giá trị trung bình

Chứng minh định lý này sẽ là nhiệm vụ của bạn trong bài tập....

1.5.3 Xấp xỉ đa thức của hàm số

Trong thực tế, chúng ta thường cần tính giá trị của một hàm số tại một điểm nào đó. Tuy nhiên, việc tính toán trực tiếp có thể phức tạp hoặc không khả thi. Do đó, chúng ta thường sử dụng các đa thức xấp xỉ để ước lượng giá trị của hàm số.

Định lý 8. *Nếu f có một khai triển bằng chuỗi lũy thừa tại a, tức là nếu*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \tag{1.14}$$

thì các hệ số của nó được cho bởi công thức sau

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{1.15}$$

trong đó $f^{(n)}(a)$ là đạo hàm bậc n của hàm số f tại điểm a.
Chuỗi lũy thừa này được gọi là ***chuỗi Taylor*** *của hàm số f tại điểm a.*

Khi ta chỉ lấy một vài số hạng của chuỗi, ta thu được một phép xấp xỉ:

Định nghĩa 1.5.3. ***Khai triển Taylor bậc** n* *của hàm số f tại điểm a:*

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \tag{1.16}$$

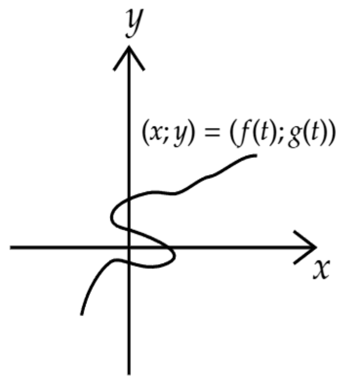
Càng lấy tới bậc càng cao, độ chính xác của phép xấp xỉ càng cao.

1.6 Phương Trình Tham Số

Định nghĩa 1.6.1. *Giả sử hai toạ độ x, y trên mặt phẳng toạ độ lần lượt là các hàm của một biến thứ ba, t (gọi là* tham số*) được biểu diễn qua các phương trình:*

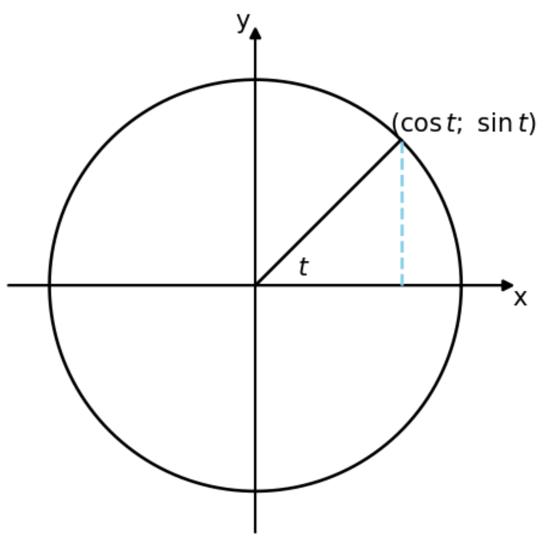
$$x = f(t),\ y = g(t),$$

gọi là các phương trình tham số*. Mỗi một giá trị của t xác định một điểm $(x; y)$. Khi tham số thay đổi, điểm $(x; y)$ thay đổi và vẽ ra một đường cong trên mặt phẳng toạ độ gọi là* đường cong tham số*.*

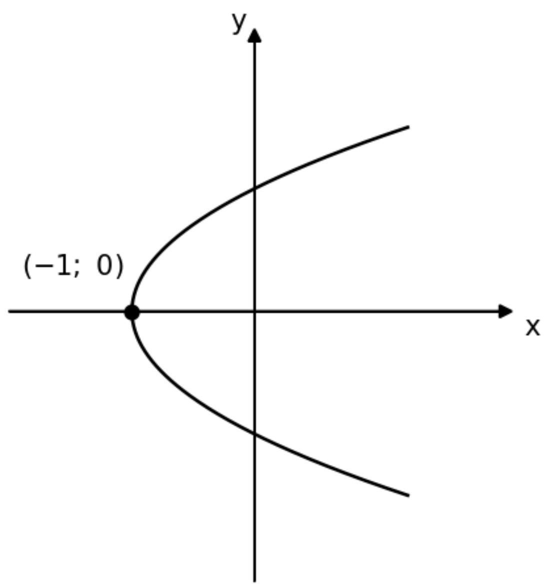


Hình 1.13: Đường cong tham số

Về tổng quát, đường cong với phương trình tham số $x = f(t), y = g(t), a \leq t \leq b$ có điểm đầu $(f(a), g(a))$ và điểm cuối $(f(b), g(b))$.
Sau đây là một số ví dụ cụ thể:

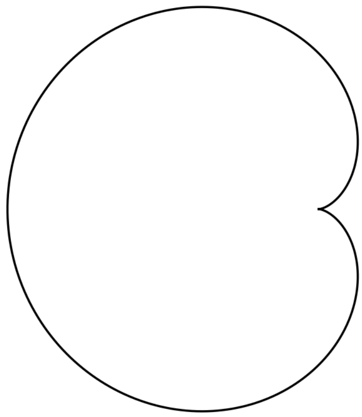


(a) Đường tròn đơn vị
$x = \cos t, \quad y = \sin t$
$0 \leq t \leq 2\pi$

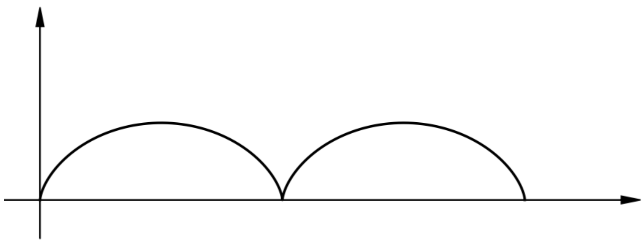


(b) Parabol nằm ngang
$x = t^2 - 1, \quad y = t$
$-1 \leq t \leq 1$

Hình 1.14



Hình 1.15: Đường Cardioid
$x = 2\cos t - \cos 2t, \quad y = 2\sin t - \sin 2t$



Hình 1.16: Đường Cycloid
$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t \quad (0 \leq t \leq 4\pi)$

Thông thường khi tiếp cận một bài toán chuyển động, tham số thường xuất hiện một cách tự nhiên qua các đại lượng vật lý mà điển hình là thời gian.
Xem xét một điểm chuyển động trên mặt phẳng toạ độ, hai toạ độ sẽ có dạng $x = x(t)$ và $y = y(t)$. Đây được gọi là các phương trình chuyển động, nếu biết chúng và điều kiện ban đầu sẽ có thể biết được các thông số động học của nó ở mọi thời điểm. Các thông số động học được đề cập ở đây là *vị trí*, *vận tốc*,... , trong đó ta định nghĩa:

- Vị trí của điểm $t = \tau$ được xác định bởi cặp số $(x(\tau), y(\tau))$.
- Vận tốc của điểm tại thời điểm $t = \tau$ được xác định bởi cặp số $(x'(\tau), y'(\tau))$.

1.7 Bài tập

Hàm số

Bài 1.1: Tìm miền xác định của các hàm số sau

(a) $\frac{x-2}{2x-1}$

(b) $\frac{\ln(1+x)}{x-1}$

(c) $\sqrt{1-2x} + 3\arcsin\left(\frac{3x-1}{2}\right) \qquad (\sin x = y \leftrightarrow x = \arcsin y)$

(d) $\frac{1}{xe^x}$

(e) $\ln(3x+1) + 2\ln(x+1)$

Bài 1.2: Tìm tập hợp giá trị của các hàm số sau

(a) $x^2 - 6x + 5$

(b) $2 + 3\sin x$

(c) $|x| + x + 1 = y + |y|$

(d) 4^{-x^2}

Bài 1.3: Chứng minh

(a) $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$.

(b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Gợi ý: Định lý Ptoleme

Vẽ đồ thị của hàm

Chú ý: Ta có thể vẽ đồ thị của hàm có dạng $y = Af(k(x-a)) + b$ theo đồ thị của hàm $f(x)$

- $y = f(x - a)$: đồ thị ban đầu được tịnh tiến theo trục Ox một đại lượng a.
- $y = f(x) + b$: đồ thị ban đầu được tịnh tiến theo trục Oy một đại lượng b.
- $y = Af(x)$: đồ thị xuất phát được giãn ra A lần theo trục Oy.
- $y = f(kx)$: đồ thị xuất phát được giãn ra $1/k$ lần theo trục Ox.

Bài 1.4: Vẽ đồ thị các hàm số trong **Bài 1.1** bằng
a. Desmos

b. Python (đối với hàm tuần hoàn thì vẽ trong khoảng $[-\pi;\pi]$; đối với các hàm khác, lựa chọn điểm đầu và cuối sao cho thu được mọi miền của hàm)

Bài 1.5: Giải các phương trình sau thông qua việc vẽ đồ thị bằng Python

(a) $\tan x = x$.

(b) $\ln x = x - 2$.

(c) $x^3 - 15x = 4$.

(d) $x^5 - 4x^2 + 3 = 0$.

Hàm hợp

Bài 1.6: Các hàm số trong **Bài 1.1** là hàm hợp của những hàm nào? Hãy phân tích cụ thể thứ tự của chúng.

Bài 1.7: Nguyên lý quy nạp

Cho S_n là một phát biểu về số nguyên dương n. Giả sử rằng:

- S_1 đúng.
- S_{k+1} đúng khi S_k đúng.

Khi đó S_n đúng với tất cả các số nguyên dương n.
Sử dụng điều này để giải các bài toán sau:

(a) Nếu $f_0(x) = x/(x+1)$ và $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$, tìm một công thức cho $f_n(x)$.

(b) Nếu $f_0(x) = x^2$ và $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ với $n = 0, 1, 2, \ldots$, tìm một công thức cho $f_n(x)$.

Phương trình hàm

Bài 1.8: Tìm hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sao cho

(a) $f(a+b) = f(a) + f(b)$

(b) $f(ab) = f(a)f(b)$

(c) $f(a+b) = f(a)f(b)$

(d) $f(ab) = f(a) + f(b)$

Giới hạn hàm số

Bài 1.9: Chứng minh

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2,71828....$$

(c)
$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^m - 1}{x} = m.$$

và vẽ đồ thị tương ứng để kiểm tra lại.

Bài 1.10: Tính các giới hạn sau

(a)
$$\lim_{x\to 4} \frac{5x+2}{2x+3}$$

(b)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{2x+7}$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$$

(d)
$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$$

(e)
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+8x+3} - \sqrt{x^2+4x+3}$$

(f)
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-3x}$$

(g)
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$$

(h)
$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$$

Bài 1.11: Sử dụng các kết quả trong **Bài 1.9** tính

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{x}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 5x}{x^2}$$

(c)
$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$$

(d)
$$\lim_{x\to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$$

So sánh các vô cùng bé

Giả sử $\alpha(x)$ và $\beta(x)$ là các vô cùng bé khi $x \to a$. Hay, $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$ và $\lim_{x\to a} \beta(x) = 0$.

- Nếu $\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = 0$, thì ta nói rằng α là vô cùng bé bậc cao so với β, kí hiệu $\alpha = o(\beta)$.
- Nếu $\lim_{x\to a} \frac{\alpha}{\beta} = m (m \neq 0)$, thì ta nói α và β là các vô cùng bé cùng bậc. Đặc biệt nếu $m = 1$, ta gọi chúng là các vô cùng bé tương đương, kí hiệu $\alpha \sim \beta$.
- Nếu α^k và β là các vô cùng bé cùng bậc, trong đó $k > 0$, ta nói rằng vô cùng bé β có bậc k so với α.

Ta chú ý một số tính chất của các đại lượng vô cùng bé:

- Tích hai vô cùng bé là vô cùng bé cấp cao so với các nhân thức.
- Các vô cùng bé là tương đương khi và chỉ khi hiệu của chúng là vô cùng bé cấp cao so với chúng.
- Nếu tỷ số của hai vô cùng bé có giới hạn, thì giới hạn này không đổi nếu ta thay mỗi vô cùng bé bằng một vô cùng bé tương đương.

Lưu ý sự tương đương của các đại lượng vô cùng bé sau đây: nếu $x \to 0$ thì

$$\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, (1+x)^m \sim 1+mx$$

Bài 1.12: Bằng cách thay tử và mẫu số bằng các vô cùng bé tương đương, tính

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-1}{\tan 3x}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$$

(c)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{3/5}-1}{(1+x)(1+x)^{2/3}-1}$$

Đạo hàm

Bài 1.13: Chứng minh quy tắc đạo hàm hàm hợp.

Bài 1.14: Tính $y'(x)$

(a)

$$y = \ln(x+\sqrt{x^2+1}).$$

(b)

$$y = \ln(\sqrt{2\sin x+1}+\sqrt{2\sin x-1}).$$

(c)

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+k}+\frac{k}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+k}).$$

(d)

$$y = \ln^2 \frac{\sqrt{4\tan x+1}-2\sqrt{\tan x}}{\sqrt{4\tan x+1}+2\sqrt{\tan x}}.$$

(e)

$$y = \frac{1}{2}[(x+\alpha)\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}+(\beta-\alpha^2)\ln(x+\alpha+\sqrt{x^2+2\alpha x+\beta})].$$

(f)

$$y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}.$$

Sau đó viết chương trình Python tính đạo hàm tại $x=1$ để kiểm tra kết quả.

Bài 1.15:

(a) Tìm góc giữa hai parabol $y = 8-x^2$ và $y = x^2$.

(b) Tìm vận tốc tại thời điểm $t_0 = 4$s của điểm có quy luật chuyển động $s(t) = 4t-5t^2+12$.

Phương pháp đạo hàm lấy lô-ga(tạm dịch)[3]

Bài 1.16: Tính

(a)
$$\frac{(2x-1)^3\sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2\sqrt[3]{1-x}}.$$

(b)
$$y = x^{x^2}.$$

Hàm logarit nói chung và hàm ln nói riêng đặc biệt có nhiều công dụng trong tính toán. Ta hãy liệt kê ra hai tính chất sẽ được bàn đến sau đây:

- $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
- $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$.

Tính chất đầu tiên là khả năng biến một tích thành một tổng, một thứ dễ tính hơn rất nhiều. Tính chất thứ hai lại có khả năng biến một hàm mũ phức tạp thành một tích rõ ràng hơn về sự phụ thuộc vào biến.
Xét hàm $y(x)$ có thể được viết thành tích của nhiều hàm số:

$$y = f_1^{\alpha_1}(x).f_2^{\alpha_2}(x)\dots f_n^{\alpha_n}(x) \implies \ln y = \alpha_1 \ln f_1 + \alpha_2 \ln f_2 + \dots + \alpha_n \ln f_n.$$

Đạo hàm hai vế,
$$\frac{y'}{y} = \alpha_1\frac{f_1'}{f_1} + \alpha_2\frac{f_2'}{f_2} + \dots + \alpha_n\frac{f_n'}{f_n}.$$

Hãy quay lại xử lý **Bài 1.15** với công cụ này.

Bài 1.17: Tính

(a)
$$y = x^{\ln x}.$$

(b)
$$y = \frac{x^2\sqrt{1+x}}{(x-1)^3\sqrt[5]{5x-1}}.$$

Phương pháp đạo hàm hàm ẩn

Từ một phương trình có dạng $F(x,y) = 0$, không phải lúc nào ta cũng tìm được dạng hiển của nó. Nghĩa là biểu diễn y theo x một cách tường minh. Song, ta vẫn có thể tính được y'_x thông qua đạo hàm phương trình $F(x,y) = 0$ theo biến x.

Bài 1.18: Tính y'_x, biết rằng

1. $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$.
2. $(x^2 + y^2 - 100)^3 - 10x^2y^3 = 0$.

[3]Đọc thêm tại Logarithmic differentiation

Xấp xỉ tuyến tính

Bài 1.19: Tính giá trị gần đúng của

(a) $\sqrt[4]{15.8}$

(b) $\tan 46°$

(c) Diện tích hình tròn bán kính 3.02 m

(d) Thể tích hình cầu bán kính 2.01 m. Biết thể tích hình cầu bán kính R bằng $\frac{4}{3}\pi R^3$

Ứng dụng của đạo hàm và vi phân

Bài 1.20:

Định lý 9. ***(Quy tắc L'Hospital)*** *Giả sử $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ hoặc $\pm\infty$, và tồn tại đạo hàm $f'(x)$, $g'(x)$ lân cận a, ngoại trừ có thể tại a; nếu*

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

tồn tại hoặc bằng $\pm\infty$, thì:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Với công cụ này, hãy tính lại các bài tập về giới hạn hàm số ở trên.

Bài 1.21: Các điểm $x = 0$ của các hàm dưới đây là cực đại, cực tiểu hay điểm uốn?

(a) $f(x) = 1 - 3x^2 + 2x^4$

(b) $f(x) = x^3 + x^5$

(c) $f(x) = x^6 + 2x^8 - 3x^{10}$

Bài 1.22: Chứng minh định lý Rolle.

Bài 1.23: Chứng minh định lý giá trị trung bình.

Bài 1.24: Chứng minh định lý 8.

Bài 1.25: Tìm chuỗi Taylor của các hàm sau tại điểm $x = 0$ (chuỗi Maclaurin):

(a) $f(x) = \sin x$

(b) $f(x) = \cos x$

(c) $f(x) = e^x$

(d) $f(x) = \ln(1 + x)$

(e) $f(x) = \sqrt{1 + x}$

Bài 1.26: Tính $\sqrt{e}$ chính xác đến $0,0001$.

Đạo hàm bằng tham số

Nếu hàm y của đối x được cho bởi các phương trình $x = f(t), y = g(t)$ thì

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} \text{ hay } \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Bài 1.27: Tìm $\frac{d\rho}{d\theta}$ nếu $\rho = \alpha\left(\frac{2}{3}\sqrt{\alpha}+1\right), \theta = \sqrt{\alpha}e^{\sqrt{\alpha}}$.

Vẽ hình bằng Python

Bài 1.28:Vẽ lại đường Cadioid bằng Python.

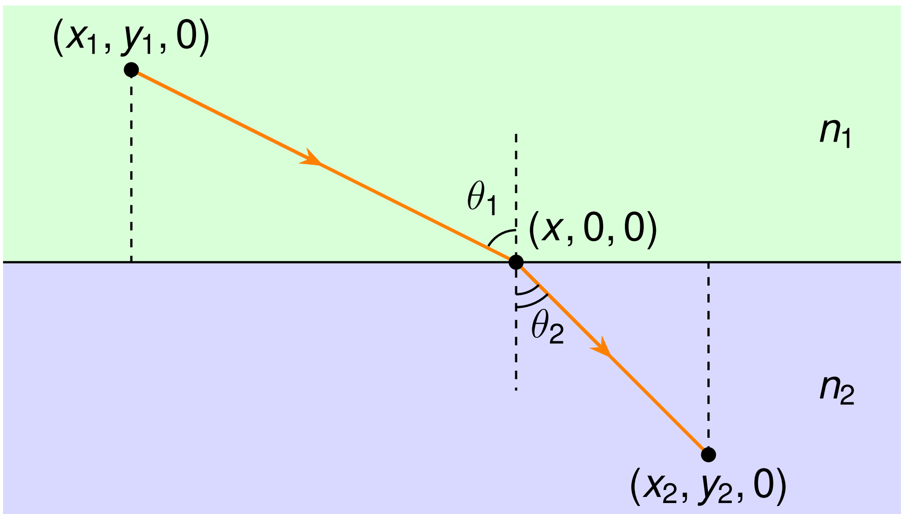
Bài 1.29: Vẽ một tam giác đều, và một ngũ giác đều bằng Python.

Bài 1.30: Dựng một đường tròn lớn, trong hình tròn tạo bởi đường tròn đó có 4 đường tròn nhỏ khác nhau, biết rằng mỗi đường tròn nhỏ lại tiếp xúc với hai đường tròn gần nó.

Bài 1.31: Dựng đường tròn nội tiếp của một tam giác bất kỳ.

Ứng dụng của đạo hàm trong vật lý

Bài 1.32: Nguyên lý Fermat và định luật Snellius Nguyên lý Fermat phát biểu rằng: "Trong số tất cả các đường đi từ một điểm đến một điểm khác, ánh sáng sẽ chọn đường đi sao cho thời gian truyền là ngắn nhất". Đây là nguyên lý nền tảng để phát triển các lý thuyết về quang hình học.
Chiết suất của một môi trường là tỷ số giữa tốc độ ánh sáng trong chân không và tốc độ ánh sáng trong môi trường đó, ký hiệu là n.
Xét một tia sáng truyền từ điểm $(x_1, y_1, 0)$ ở môi trường có chiết suất n_1 đến điểm $(x_2, y_2, 0)$ ở môi trường có chiết suất n_2. Giả sử rằng tia sáng truyền qua một mặt phẳng phân cách giữa hai môi trường tại điểm $(x, 0, 0)$.



Hình 1.17: Tia sáng truyền qua hai môi trường có chiết suất khác nhau.

(a) Chứng minh rằng thời gian truyền của tia sáng từ điểm $(x_1, y_1, 0)$ đến $(x_2, y_2, 0)$ được tính theo công thức:

$$t = \frac{n_1}{c}\sqrt{(x-x_1)^2+y_1^2} + \frac{n_2}{c}\sqrt{(x-x_2)^2+y_2^2},$$

(b) Tìm giá trị của x theo x_1, x_2, y_1, y_2, n_1 và n_2 sao cho thời gian truyền t là nhỏ nhất.

(c) Chứng minh định luật Snellius, tức là tỷ số giữa sin của góc tới và sin của góc khúc xạ là một hằng số:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

trong đó θ_1 là góc tới và θ_2 là góc khúc xạ.

1.8 Lời giải

Bài 1.1:

(a) Hàm số xác định nếu $2x - 1 \neq 0$, hay $x \neq \frac{1}{2}$. Vì vậy $X = (-\infty, 1/2) \cup (1/2, \infty)$.

(b) Hàm này xác định nếu $x - 1 \neq 0$ và $1 + x > 0$, hay $x \neq 1$ và $x > -1$. Vì vậy $X = (-1, 1) \cup (1, \infty)$.

(c) Số hạng thứ nhất nhận các giá trị thực khi $x \leq \frac{1}{2}$. Số hạng thứ hai nhận các giá trị thực khi $-1 \leq \frac{3x-1}{2} \leq 1$. Giải ra ta được $x \leq 1, x \geq -\frac{1}{3}$. Do đó miền xác định là đoạn $[-1/3, 1/2]$.

(d) Hàm số xác định với $x \neq 0$. Nên $X = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

(e) Điều kiện để hàm số xác định là $3x + 1 \geq 0$ và $x + 1 \geq 0$. Vậy $X = [-1/3, \infty)$.

Bài 1.2:

(a) Biến đổi, ta được $f(x) = (x-3)^2 - 4 \geq -4$. Do đó tập hợp giá trị của hàm là khoảng $Y = [-4, \infty)$.

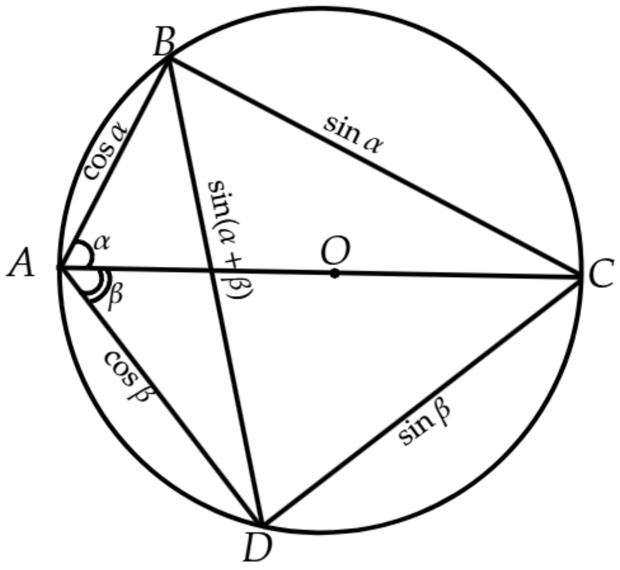
(b) Vì $-1 \leq \sin x \leq 1$, nên $-3 \leq \sin x \leq 3$. Do đó $-1 \leq f(x) \leq 5$ và $Y = [-1, 5]$.

(c) Ta xem xét hai trường hợp : $x < 0$ và $x > 0$.
Nếu $x < 0$, $y + |y| = 1$. Giá trị của y không thể nhỏ hơn 0 vì điều này tương đương với $y + |y| = 0$. Do đó $y = \frac{1}{2}$ trong trường hợp này.
Nếu $x > 0$, y chắc chắn lớn hơn 0 và do đó ta thu được hàm $y = x + \frac{1}{2}$.
Dễ thấy, miền giá trị $Y = [1/2, \infty)$.

(d) Miền giá trị của hàm là $Y = [0, 4]$.

Bài 1.3:

Xét đường tròn tâm O có đường kính AC với độ dài bằng 1 và tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường



tròn như hình bên.
Vì $|AC| = 1$ nên tất cả độ dài trong biểu đồ được kết nối với sine hoặc cosine, và chú ý rằng hai góc ở đỉnh B và D là các góc vuông.
Lúc này, theo định lý hàm sine trong tam giác, độ dài đoạn BD chính là $\sin(\alpha+\beta)$. Định lý Ptoleme lại cho biết rằng

$$|AC| \cdot |BD| = |AB|\dot{|}CD| + |BC|\dot{|}AD|.$$

và biểu thức này trở thành, sau khi ta thay các giá trị sine/cosine tương ứng:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha.\ (Q.E.D)$$

Sử dụng định lý Pythagoras, ta chứng minh được đẳng thức còn lại.

Bài 1.10:

(a) Hàm số liên tục tại $x = 4$. Vậy nên

$$\lim_{x\to 4}\frac{5x+2}{2x+3} = \frac{5\times 4+2}{2\times 4+3} = 2.$$

(b) Ta thấy hàm số có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$ khi $x \to \infty$. Một phương pháp điển hình để giải quyết tình huống này đó là chia bậc lớn nhất của x cho cả tử và mẫu, mà ở đây là bậc một. Khi đó,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7} = \lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{2+\frac{7}{x}} = \frac{3}{2}.$$

(c) Giới hạn của hàm số này cũng có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Tương tự, ta chia bậc lớn nhất của x cho cả tử và mẫu, mà ở đây là bậc ba. Khi đó,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x^3}}{4+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1}{4}.$$

(d) Ta cũng có dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$. Chia bậc lớn nhất x^4 cho cả tử và mẫu . Khi đó,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}} = \frac{3}{1} = 3.$$

(e) Ta có thể viết lại biểu thức này như sau:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2+8x+3)-(x^2+4x+3)}{\sqrt{x^2+8x+3}+\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

Khi đó, chia bậc lớn nhất x cho cả tử và mẫu, và thu được,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{8}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{2}=2.$$

(f) Giới hạn của hàm số này, nếu thay trực tiếp $x=3$ sẽ có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Một phương pháp điển hình để giải quyết tình huống này, nếu có thể, là khử đi các nhân tử chung trong tử và mẫu. Dễ thấy,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)x}=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{x}=6.$$

(g) Giới hạn của hàm số này, nếu thay trực tiếp, cũng có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Triển khai tương tự, ta thu được

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^2+2}=1.$$

(h) Để khử nhân tử chung, trước tiên, nhân liên hợp tử và mẫu với $\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{7+2x-x^2}$. Như vậy, ta có thể viết lại giới hạn này như sau:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(1+x+x^2)-(7+2x-x^2)}{(x^2-2x)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{7+2x-x^2})}.$$

Kết quả thu được là

$$\lim_{x\to 2}\frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-2)(\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{7+2x-x^2})}=\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Bài 1.11:

(a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}=m\lim_{x\to 0}\frac{\sin mx}{mx}=m.$$

(b) Sử dụng kết quả của **Bài 1.5**, ta có

$$\cos 5x=\cos^2\left(\frac{5x}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)=1-2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right).$$

Thay vào giới hạn, kết quả thu được là

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{x^2}=2\times\frac{25}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{\left(\frac{5x}{2}\right)^2}=\frac{25}{2}.$$

(c) Hướng giải quyết ở đây sẽ là đưa giới hạn hàm số này về giới hạn đáng nhớ (b):

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}\cdot\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{8x-3}{x^2-3x+7}\right)^{\frac{x^2-3x+7}{8x-3}}\right)^{\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7}}.$$

Dễ thấy,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-3x}{x^2-3x+7} = 8,$$

và

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3x+7}{8x-3} = \infty.$$

Thành thử, kết quả thu được là

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x = e^8.$$

(d) Tương tự, kết quả sẽ thu được là $\sqrt{e}$.

Bài 1.12:

(a) $\frac{1}{3}$

(b) $-\frac{1}{2}$

(c) $\frac{9}{25}$

Bài 1.14:

(a)
$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(b)
$$y' = \frac{\cos x}{\sqrt{4\sin^2 x-1}}.$$

(c)
$$y' = \sqrt{x^2+k}.$$

(d)
$$y' = \frac{\tan^2 x+1}{\sqrt{\tan x(4\tan x+1)}}\ln\left(8\tan x+4\sqrt{\tan x(4\tan x+1)}+1\right).$$

(e)
$$y' = \sqrt{x^2+2\alpha x+\beta}.$$

(f)
$$y' = \frac{4\sqrt{x\left(x+\sqrt{x}\right)}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)(x+\sqrt{x})x}}.$$

Tài liệu tham khảo

[1] Đêmiđôvic. *Bài tập Giải tích toán học tập I*. Trans. by Võ Đức Tôn Nguyễn Hữu Ngự. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1975.

[2] Riley Hobson. *Mathmatical Methods for Physics and Engineering*. 2nd. Cambridge University Press, 2011.

[3] P.E.Đankô. *Bài tập toán học cao cấp phần I*. Trans. by Hoàng Đức Nguyên. Mir, Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1983.

[4] Nguyễn Vĩnh Phú. *Toán Học Chân Phương*. 2024.

[5] James Stewart. *Calculus 1*. 7th. Cengage Learning, 2012.

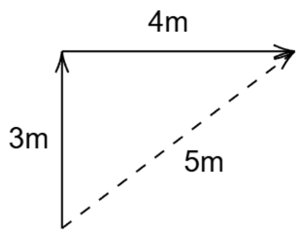
Tuần 2

Vector & Đại Số Tuyến Tính

2.1 Vector

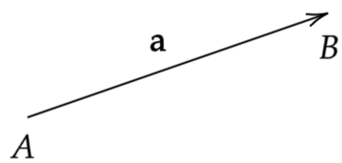
2.1.1 Giới thiệu về vector

Giả sử bạn cần mô tả cho người khác vị trí của một hòn đá. Lấy vị trí của bạn làm gốc, vị trí đó có thể được mô tả bởi một cặp số $(3; 4)$, nghĩa là từ chỗ bạn đi $3m$ về hướng Bắc, rồi $4m$ về hướng Đông sẽ đến được chỗ hòn đá. Hoặc, bạn có thể chỉ tay vào hòn đá và nói "Hòn đá kia cách tôi $5m$" (nếu trước nó có một hòn đá khác cách bạn $4.5m$, chẳng hạn).



Như vậy nhằm truyền tải những thông tin như vị trí của một vật, ta cần một mảng số (trong trường hợp vừa rồi là một mảng số có hai thành phần), hoặc một cách khác, là *chỉ* về vật thể và xác định rõ ràng khoảng cách. Rõ ràng là kiểu thông tin này không giống với "quãng đường cần đi là 7m", hay "nhiệt độ hôm nay là 30 độ C", được truyền tải thông qua chỉ một con số (và dơn vị). Ta cần một đại lượng có khả năng truyền tải nhiều thông tin hơn để mô tả những dạng thông tin phức tạp hơn vậy. Nó được gọi là **vector**.

Định nghĩa 2.1.1. *Vector AB (hình vẽ), kí hiệu là* **AB**, *là một đại lượng biểu diễn bằng mũi tên tuân theo quy tắc hình bình hành được đặc trưng bởi độ dài a của nó (do đó còn được kí hiệu là $\vec{a}$) và hướng mà nó chỉ.*



Đây là một định nghĩa thuần tuý hình học, nhưng sẽ ổn nếu bắt đầu với nó. Một mũi tên chỉ hướng với độ dài xác định là tương đương với một mảng số, như được trình bày trong ví dụ trên. Trong phần này, ta sẽ chủ yếu tập trung vào ý nghĩa hình học của vector , trực quan và không đi sâu vào khía cạnh toán. Chỉ với định nghĩa này, các đại lượng phức tạp như lực, vận tốc cũng đã có thể được mô tả. Rõ ràng, chúng không thể được xác định chỉ với một con số như khối lượng hay nhiệt độ; vận tốc, lực, hay bất kỳ một đại lượng vector nào khác trong vật lý đều có *hướng* và *độ lớn*. Sau đây ta cũng thống nhất sẽ kí hiệu vector là $\mathbf{a}$ thay vì $\vec{a}$.

Để so sánh hai vector, ta dựa trên các tiêu chí sau:

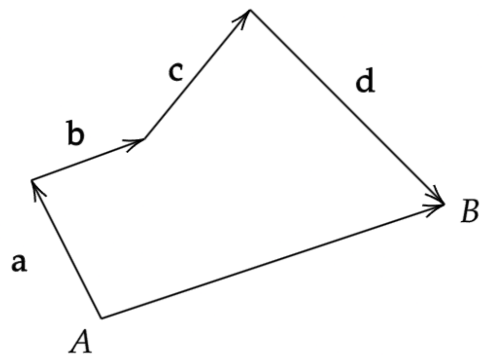
- Hai vector $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ được coi là bằng nhau nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng, kí hiệu là $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.
- Hai vector $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ là đồng phương nếu chúng song song.
- Hai vector $\mathbf{a}$ và $\mathbf{b}$ có cùng giá nếu chúng cùng nằm trên một đường thẳng, và là đồng phẳng nếu cùng nằm trên một mặt phẳng.

Ngoài ra, để kí hiệu độ lớn của một vector, ta viết $|\mathbf{a}|$, ngắn gọn là a nếu không có gì nhầm lẫn.

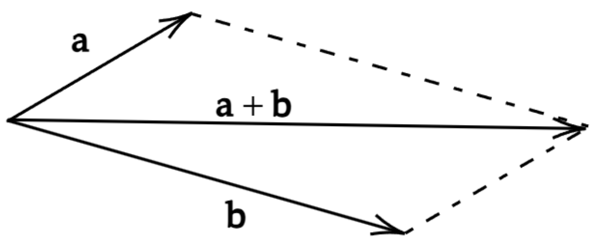
2.1.2 Các phép toán trên vector

Phép cộng vector

Tưởng tượng để xác định vị trí của viên đá, thay vì xác định trực tiếp, bạn xác định vị trí của Hirrus, và Hirrus xác định vị trí của viên đá. Từ đó, vị trí của nhân vật này được xác định bởi một vector có gốc ở vị trí của ta, đầu ở chỗ của Hirrus; vị trí của viên đá đối với Hirrus lại được xác định bởi một mũi tên có gốc đặt tại chỗ của Hirrus, đầu ở chỗ của viên đá. Đồng thời, vị trí của viên đá đối với bạn được xác định bởi một mũi tên có gốc ở vị trí của bạn, đầu ở chỗ của viên đá. Mũi tên này là kết quả của phép cộng hai mũi tên trước đó, và được gọi là **phép cộng vector**.



Hình 2.1: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{AB}$



Hình 2.2: Quy tắc hình bình hành

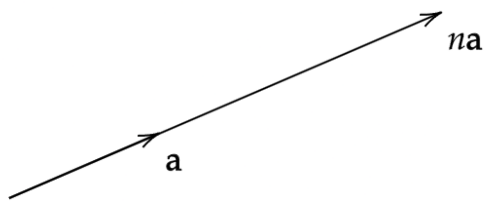
Chú ý rằng, về tổng quát, $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \neq a+b$. Cụ thể,

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \geq a+b$$

, đây chính là bất đẳng thức tam giác.

Tích một vector với một đại lượng vô hướng

Khi nhân một vector với một đại lượng vô hướng, độ dài của vector sẽ được nhân lên với hệ số bằng đại lượng đó, trong khi hướng của vector không đổi nếu số đó là số dương, đảo chiều nếu số đó là số âm. Đặc biệt, nếu một vector nhân với 0, kết quả là vector $\mathbf{0} = \mathbf{a} + (-\mathbf{a})$.



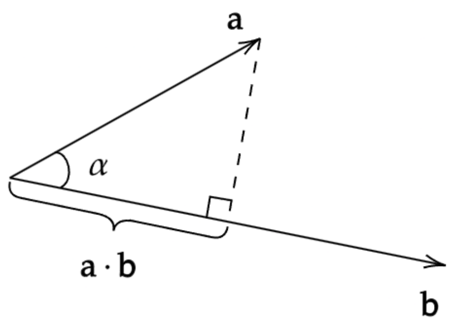
Hình 2.3: phép nhân vector với một đại lượng vô hướng

Tích vô hướng hai vector

Phép nhân vô hướng hai vector **a** và **b** có kết quả là một đại lượng vô hướng có giá trị bằng:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{2.1}$$

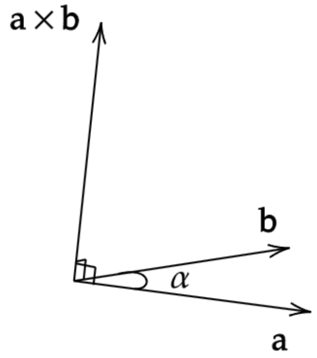
Trong đó, $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ chỉ góc giữa hai vector **a** và **b**. Phép nhân vô hướng được thể hiện như hình vẽ:



Hình 2.4: phép nhân vô hướng hai vector

Tích có hướng hai vector

Phép nhân có hướng hai vector **a** và **b** có kết quả là một vector hướng vuông góc với mặt phẳng chứa hai vector này:

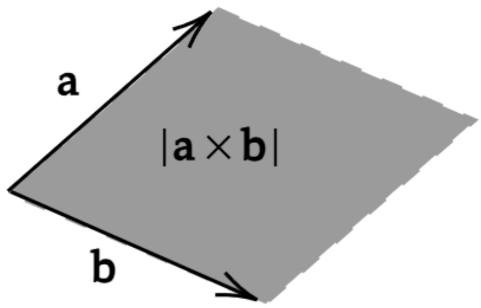


Hình 2.5: phép nhân có hướng hai vector

Vector này có độ lớn bằng

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{2.2}$$

với chiều, theo quy ước, được xác định bằng quy tắc bàn tay phải, hoặc quy tắc vặn nút chai (như hình vẽ). Ngoài ra, độ lớn của tích có hướng chính là diện tích của hình bình hành tạo bởi hai vector.



2.1.3 Đạo hàm vector

Định nghĩa 2.1.2. *Cho $\mathbf{u}(t)$ là một hàm vector. Đạo hàm của hàm vector này tại điểm t_0 được định nghĩa là:*

$$\mathbf{u}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t_0)}{t - t_0} \tag{2.3}$$

Cũng giống như đạo hàm của một hàm số, đạo hàm của một hàm vector cũng có một số tính chất đặc biệt:

- Nếu $\mathbf{w}(t) = a(t)\mathbf{u}(t)$, thì $\dfrac{d\mathbf{w}}{dt} = a'(t)\mathbf{u}(t) + a(t)\dfrac{d\mathbf{u}}{dt}$
- Nếu $\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)$, thì $\dfrac{d\mathbf{w}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} + \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$
- Nếu $\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)$, thì $\dfrac{d\mathbf{w}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$
- Nếu $\mathbf{w}(t) = \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)$, thì $\dfrac{d\mathbf{w}}{dt} = \dfrac{d\mathbf{u}}{dt} \times \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \times \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$

2.1.4 Cơ sở vector

Vector đơn vị

Một vector đơn vị là một vector có độ dài bằng 1. Vector đơn vị thường được sử dụng để biểu diễn hướng của một vector khác. Ví dụ, nếu $\mathbf{a}$ là một vector bất kỳ, thì vector đơn vị theo hướng của $\mathbf{a}$ được tính bằng:

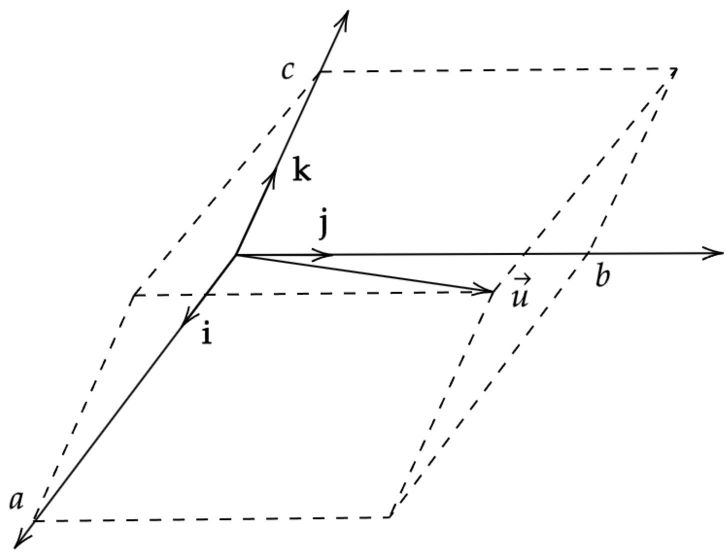
$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \tag{2.4}$$

Vector này có độ dài bằng 1 và cùng hướng với $\mathbf{a}$.

Cơ sở vector

Trong không gian ba chiều, một vector cơ sở chuẩn hóa là tập hợp của ba vector đơn vị không đồng phẳng. Một vector có thể được xác định bằng cách biểu diễn nó dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector đơn vị trong cơ sở.

$$\mathbf{u} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 \tag{2.5}$$



Hình 2.6: Cơ sở $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

Tương tự, trong không gian hai chiều, một vector cơ sở chuẩn hóa là tập hợp của hai vector đơn vị không nằm trên cùng một đường thẳng. Một vector trong mặt phẳng có thể được biểu diễn dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các vector đơn vị trong cơ sở:

$$\mathbf{v} = a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2.$$

Xét một vector khác, $\mathbf{w} = c\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_2$, vậy

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a + c)\mathbf{e}_1 + (b + d)\mathbf{e}_2.$$

Điều này nghĩa là, để đến vị trí được xác định bởi vector $\mathbf{v} + \mathbf{w}$, ta đi từ vị trí ban đầu theo hướng của $\mathbf{e}_1$ một khoảng bằng $a+c$, rồi theo hướng của $\mathbf{e}_2$ một khoảng bằng $b+d$. Quay lại ví dụ ban đầu, ta thấy rằng nếu biết sẵn thông tin của $\mathbf{e}_1$ và $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ được xác định qua mảng số $(a+c, b+d)$; tương tự, có thể viết $\mathbf{v} = (a, b)$ hay $\mathbf{w} = (c, d)$ để $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (a+c, b+d)$. a và b

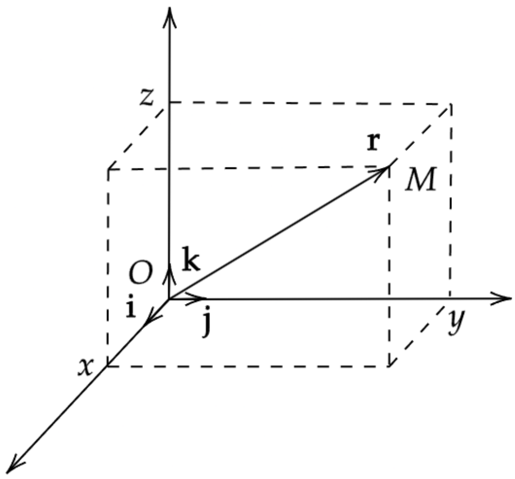
được gọi là các *toạ độ* của vector $\mathbf{v}$, cũng như c và d được gọi là các toạ độ của $\mathbf{w}$. Với trường hợp ba chiều, một vector có thể được biểu diễn bằng mảng số (a, b, c).

Chú ý rằng các vector cơ sở cũng có toạ độ. Cụ thể, $(1, 0)$ là toạ độ của $\mathbf{e}_1$, và $(0, 1)$ là toạ độ của $\mathbf{e}_2$. Trong trường hợp ba chiều, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, và $\mathbf{e}_3$ có toạ độ lần lượt là $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$.

2.1.5 Hệ tọa độ Descartes

Định nghĩa 2.1.3. *Hệ tọa độ Descartes là một hệ tọa độ trực chuẩn, được xác định bởi một gốc tọa độ O và một vector cơ sở trực chuẩn ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$). Trong hệ tọa độ này, một điểm M trong không gian được xác định bởi ba tọa độ $(x, y, z) = (r_1, r_2, r_3)$,*

$$\mathbf{r} = \mathbf{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3. \tag{2.6}$$



Hình 2.7: Hệ tọa độ Descartes

Trực chuẩn có nghĩa là các vector trong vector cơ sở có độ dài bằng 1 và vuông góc lẫn nhau. Nói cách khác,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \tag{2.7}$$

Trong đó,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{, nếu } i = j. \\ 0 & \text{, nếu } i \neq j. \end{cases}$$

được gọi là ký hiệu Kronecker. Như vậy, tích vô hướng của hai vector $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ và $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ trong hệ tọa độ Descartes có thể được tính bằng công thức:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \tag{2.8}$$

Dễ thấy, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i = a_i$, nghĩa là thành phần thứ i của vector $\mathbf{a}$ chính là tích vô hướng của $\mathbf{a}$ với vector cơ sở thứ i. Đồng thời, ta cũng có

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{0}, & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_3, & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{0}, & \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1, \\ \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_1, & \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Tổng quát, tích có hướng của hai vector **a** và **b** bất kỳ có thể được viết thành

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \mathbf{e}_k. \tag{2.9}$$

Trong đó, ε_{ijk} là ký hiệu Levi-Civita, được định nghĩa như sau:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{, nếu } (i,j,k) = (1,2,3) \text{ hoặc } (2,3,1) \text{ hoặc } (3,1,2). \\ -1 & \text{, nếu } (i,j,k) = (1,3,2) \text{ hoặc } (2,1,3) \text{ hoặc } (3,2,1). \\ 0 & \text{, nếu } i = j \text{ hoặc } j = k \text{ hoặc } k = i. \end{cases}$$

Đơn giản hơn,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} a_j b_k.$$

Hay,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\mathbf{e}_3. \tag{2.10}$$

2.2 Nhập môn Đại số tuyến tính

2.2.1 Không gian vector

Tiếp tục đào sâu vào một khía cạnh của các khái niệm đã được nhắc tới, ta sẽ phát hiện thêm nhiều điều kỳ thú. Sau đây chính là một minh chứng.

Cơ sở

Dựa theo định nghĩa, một hệ vector cơ sở là hệ vector sao cho mọi vector trong không gian đều có thể được phân tích thành một *tổ hợp tuyến tính* của chúng. Nói cách khác, giả sử ta có hai vector cơ sở $\mathbf{e}_i$ và $\mathbf{e}_j$, một vector **v** bất kỳ có thể được viết thành

$$\mathbf{v} = \alpha \mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_2.$$

Ta lại xét một hệ cơ sở khác gồm hai vector $\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$, lúc này

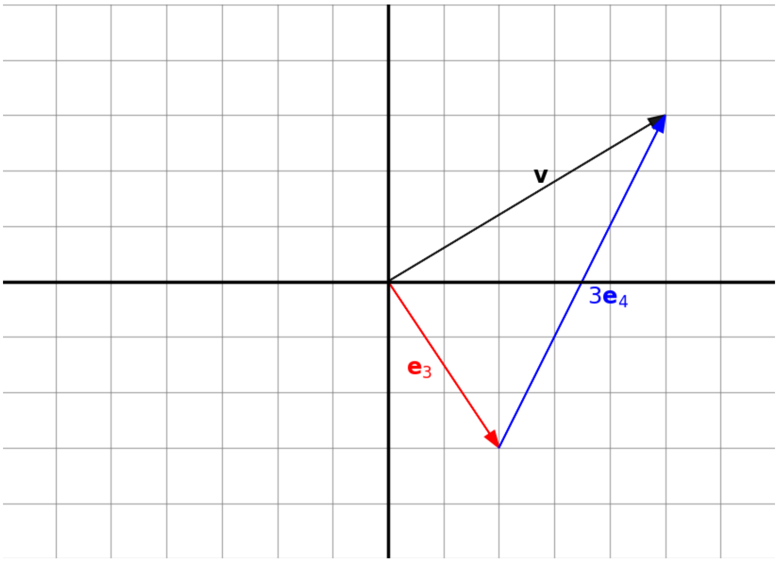
$$\mathbf{v} = \gamma \mathbf{e}_3 + \sigma \mathbf{e}_4.$$

Một ví dụ minh hoạ điều này:

$$\mathbf{v} = (5;3) = 5(1;0) + 3(0;1) = 1(2;-3) + 3(1;2).$$

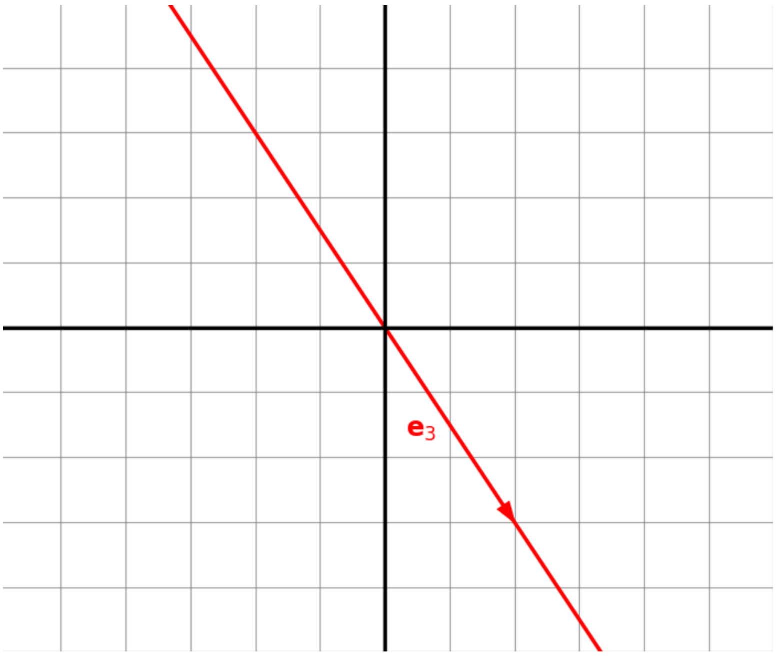
Vector **v** đầu tiên được phân tích thành hai vector cơ sở trực chuẩn, rồi sau đó lại được phân tích thành hai vector

$$\mathbf{e}_3 = (2;-3), \qquad \text{và } \mathbf{e}_4 = (1;2).$$



Lúc này hai vector cơ sở 3,4 không trực chuẩn và được viết trong toạ độ tạo bởi hai vector cơ sở trực chuẩn 1,2- hai vector được chọn để có toạ độ $(1, 0)$ và $(0, 1)$.

Một tổ hợp tuyến tính của hai vector nói rằng ta đã kéo giãn mỗi vector theo một hệ số nào đó và sau đó cộng chúng với nhau. Đặc biệt, đối với hai vector mới được chọn, bằng cách lựa chọn một bộ hệ số vô hướng thích hợp, ta có thể biểu diễn mọi vector trên mặt phẳng thành một tổ hợp tuyến tính của chúng (do đó ta chọn chúng làm cơ sở, như đã đề cập). Mặt khác, nếu hai vector ta chọn chỉ là $\mathbf{e}_3$ và, chẳng hạn, $2\mathbf{e}_3$, những vector có thể được biểu diễn bởi hệ vector (không phải cơ sở) này chỉ có những vector nằm trên cùng một đường thẳng với $\mathbf{e}_3$. Nhưng đồng thời, nếu ta chỉ quan tâm tới những thứ xảy ra trên đường thẳng đó, thì bất kỳ một (và chỉ một) vector nào nằm trên đó đều là cơ sở cho *không gian*(đường thẳng) mà ta quan tâm.



Một cách tự nhiên, ta đi tới những khái niệm sau:

Định nghĩa 2.2.1 (Bao tuyến tính)**.** *Nếu $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ là một tập hợp n vector trong không gian, thì tập hợp tất cả các tổ hợp tuyến tính của chúng được gọi là bao tuyến tính của $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots \mathbf{u}_n$, và được kí hiệu là span(S).*

Nếu span(S) chứa toàn bộ vector trong không gian, vậy ta gọi S là một hệ sinh cho không gian.

Định nghĩa 2.2.2 (Độc lập tuyến tính)**.** *Một tập hợp các vector được gọi là* độc lập tuyến tính *với nhau nếu tổ hợp tuyến tính của chúng không bao giờ bằng* $\mathbf{0}$ *trừ khi* ***tất cả*** *các hệ số vô hướng đều bằng* 0*.*

Định nghĩa 2.2.3 (Hệ cơ sở)**.** *Một cơ sở của không gian là một tập hợp các vector trong không gian sao cho*

- *tạo thành hệ sinh cho không gian, và*
- *độc lập tuyến tính.*[1]

Trong ví dụ cụ thể ta đã lấy ở trên, không gian của ta (một mặt phẳng) có hai hệ sinh là $S_1 = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, và $S_2 = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4\}$. Đồng thời, hai cặp vector tạo thành hai hệ sinh này cũng là các cơ sở khác nhau. Ngoài ra cũng chú ý rằng, $S_3 = \{\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, 2\mathbf{e}_3\}$ cũng là một hệ sinh cho mặt phẳng này nhưng tập hợp ba vector này không phải là một hệ cơ sở, vì nó không độc lập tuyến tính (phụ thuộc tuyến tính). Cụ thể, dễ thấy rằng

$$-2\mathbf{e}_3 + 1(2\mathbf{e}_3) + 0\mathbf{e}_4 = \mathbf{0},$$

nhưng ta lại có các hệ số khác 0 là -2 và 1. Ngoài ra, bất kỳ một tập hợp vector nào chứa vector $\mathbf{0}$ đều không độc lập tuyến tính, và do đó không phải là một hệ cơ sở.

Không gian vector

Khi đề cập đến vector, ta không tránh khỏi đề cập đến từ "không gian". Trong phần 2.1, từ này được hiểu là không gian ba chiều mà ta sinh hoạt, có trên dưới, phải trái, trước sau; tức là không gian hình học. Song, trong phần vừa rồi, từ "không gian" được dùng một cách nhập nhằng, tối nghĩa. Thoạt đầu là nghĩa ở 2.1. Rồi trong các phần định nghĩa mới được đưa ra, nó dường như cũng chỉ để chỉ mặt phẳng toạ độ Oxy, chỉ chứa các vector có hai thành phần toạ độ. Số vector cơ sở cho không gian này cũng chỉ là 2 mà không phải 3. Việc nói rằng "bởi vì vector đại diện cho trên dưới lúc này bằng $\mathbf{0}$ nên không được xét vào" là vô nghĩa và không đúng với các định nghĩa được đưa ra. Thành thử, cần làm rõ nghĩa của cụm "không gian chứa các vector".

Định nghĩa 2.2.4. *Một không gian vector V là một tập hợp mà các phần tử trong đó, được gọi là vector thoả mãn*

(i) *Với mọi* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \mathbf{v} + \mathbf{w} \in V$.

(ii) *Với mọi* $\mathbf{v} \in V, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha\mathbf{v} \in V$.

(iii) $\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$.

(iv) $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$.

(v) *Tồn tại một vector* $\mathbf{0}$ *sao cho* $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$.

(vi) *Với mọi vector* $\mathbf{v}$*, tồn tại một vector* $\mathbf{v}'$ *sao cho* $\mathbf{v} + \mathbf{v}' = \mathbf{0}$.

(vii) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

(viii) $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$.

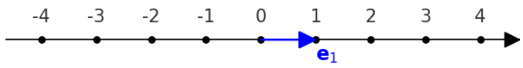
[1] Có thể chứng minh rằng mỗi vector trong không gian tương ứng với duy nhất một tổ hợp tuyến tính của cùng một hệ cơ sở. Đây là một bài tập cho các bạn.

(ix) $\alpha(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \alpha\mathbf{v} + \alpha\mathbf{w}$.

(x) $(\alpha+\beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$.

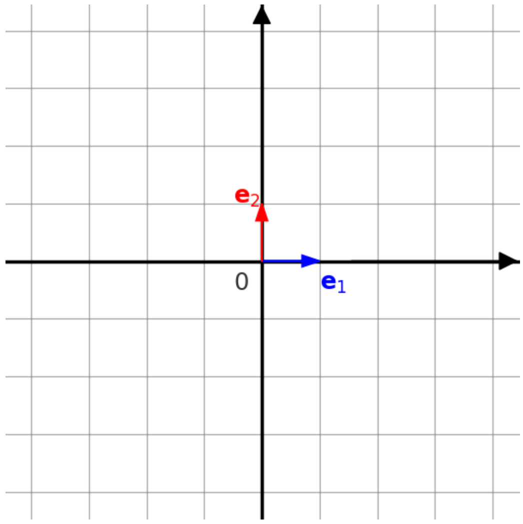
Dưới góc nhìn của một tập hợp, ta quay lại với ba ví dụ quen thuộc cho không gian vector:

(a) Trục số thực: $\mathbb{R}^1$



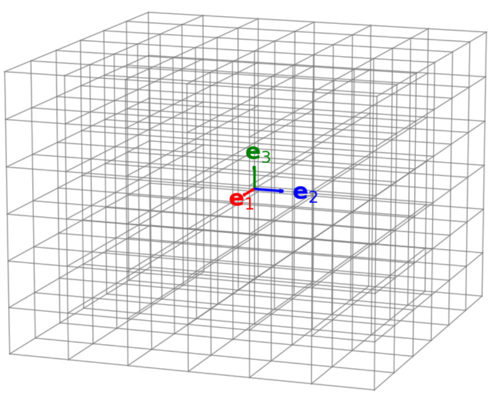
Rõ ràng, tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ cũng là một không gian vector với duy nhất một vector cơ sở là 1 (hoặc bất kỳ số thực nào khác). Mỗi vector có thể được biểu diễn bằng một toạ độ -một điểm trên trục số, và từ đó là toàn bộ hệ sinh.

(b) Mặt phẳng toạ độ: $\mathbb{R}^2$



Với không gian vector quen thuộc này, ta kí hiệu nó là $\mathbb{R}^2$. Hai cơ sở quen thuộc là $(1;0)$ và $(0;1)$, với mỗi vector được biểu diễn bằng hai toạ độ, và do đó là một nút của hai đường thẳng vuông góc với trục tung, trục hoành. Rồi từ đó là toàn bộ hệ sinh.

(c) Không gian hình học: $\mathbb{R}^3$

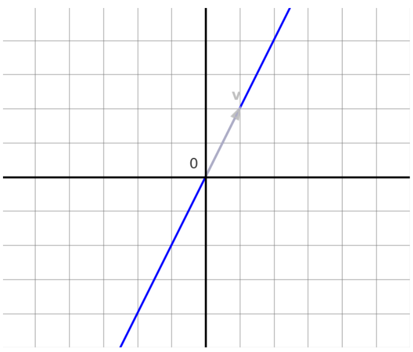


Với trường hợp này, ta cần ba vector cơ sở và tương ứng là ba toạ độ cho mỗi vector. Hệ sinh của không gian được minh hoạ như trong hình.

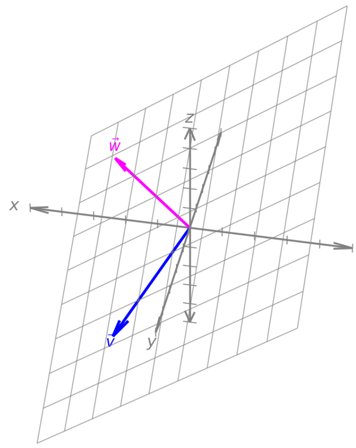
Nhận thấy rằng các trường hợp trên khác nhau bởi số lượng của vector cơ sở[2], **khái niệm *chiều* của một không gian vector vì vậy được định nghĩa là số lượng của các vector cơ sở trong hệ cơ sở của không gian đó**. Các trường hợp có chiều là $1, 2, 3$ đã được đề cập. Vậy $4, 5, \ldots n$ thì sao? Ta không thể minh hoạ được các ví dụ này, nhưng có thể biểu diễn các vector trong, không gian vector $\mathbb{R}^4$ bằng một vector có bốn toạ độ là, chẳng hạn, $(1, 2, 3, 4)$, tức là một mảng số một chiều có bốn thành phần. Tương tự, n toạ độ cho $\mathbb{R}^n$.

Ký hiệu $\mathbb{R}^n$ chỉ rằng các vector trong không gian này có thành phần là các số thực. Điều này có thể được mở rộng sang số phức, và thậm chí còn đối với các đối tượng không phải là số. Đến lúc này, ta cần nhìn lại rằng vector là gì? Vật lý giới thiệu đến cho ta những mũi tên có thể được mô tả bởi một mảng số. Nhưng không còn mũi tên nào có thể được tưởng tượng đối với $\mathbb{R}^4$ và cao hơn, thay vào đó là các mảng số. Vậy có phải vector là các mảng số nhưng được minh hoạ bằng các mũi tên? Ở phần 2.2.5, ta thấy rằng vector cũng có thể được hiểu là hàm số, với các thành phần là các luỹ thừa của biến. Thực ra điều này không quan trọng. Ta không cần phải biết vector, một cách tường minh, là cái gì hay là những cái gì. Ta chỉ đơn giản là gọi những đối tượng thuộc về cùng một tập hợp nào đó thoả mãn các tiên đề trong định nghĩa 2.2.4 là vector. Cũng dựa vào đó, các phép toán mang tính khái quát cao, gắn liền với khái niệm vector được xây dựng, áp dụng cho nhiều đối tượng; tất cả được gói gọn trong một khái niệm trừu tượng.

Không gian con



(a) Đường thẳng (đi qua gốc toạ độ) trên mặt phẳng



(b) Mặt phẳng (đi qua gốc toạ độ) trong không gian

Đây là hai ví dụ cho khái niệm *không gian con*. Đầu tiên là một đường thẳng trong không gian $\mathbb{R}^2$, mọi vector nằm trên đường thẳng này đều là tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{v}$. Tiếp theo là một mặt phẳng trong không gian $\mathbb{R}^3$, mọi vector trên mặt phẳng này đều là một tổ hợp tuyến tính của $\mathbf{v}$ và $\mathbf{w}$, hai vector độc lập tuyến tính nằm trên mặt phẳng. Cả hai tập hợp các vector này đều thoả mãn các tiên đề trong định nghĩa 2.2.4, nên chúng đều là các không gian vector.

Định nghĩa 2.2.5. *Một không gian con S trong một không gian vector V là một tập hợp các vector trong V sao cho chúng thoả mãn các tiên đề trong định nghĩa 2.2.4.*

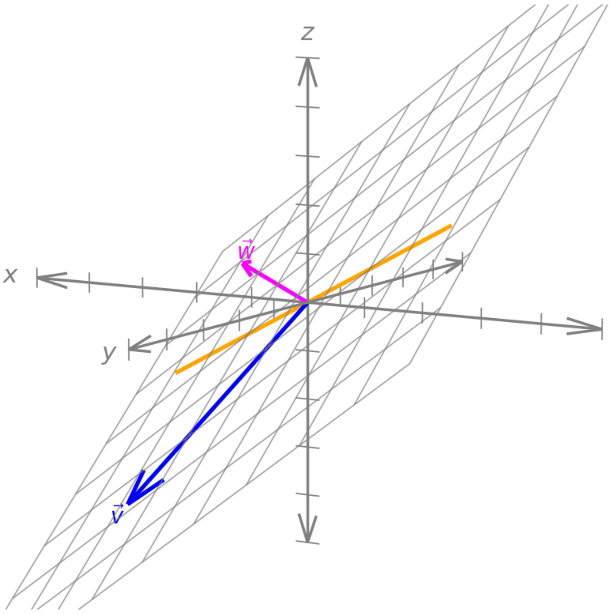
Nghĩa là mọi tổ hợp tuyến tính của các vector trong không gian con S đều nằm trong không gian con đó, và nằm trong cả V.

[2] Có thể chứng minh rằng số lượng vector cơ sở cho cùng một không gian là duy nhất. Xem *Chapter 3. Introduction to Linear Algebra. Gilbert Strange. 5th* cho một chứng minh với các vector thực.

Định nghĩa 2.2.6. *Một cơ sở cho một không gian con S của $\mathbb{R}^n$ là một tập hợp các vector trong S sao cho*

1. *tạo thành S, và*
2. *là độc lập tuyến tính.*

Hai không gian vector trong ví dụ trên đều là không gian con của $\mathbb{R}^3$. Tương tự, nếu ta xét một đường thẳng đi qua gốc toạ độ nằm trên mặt phẳng trong ví dụ, đường thẳng này cũng là một không gian con của mặt phẳng, và đồng thời là một không gian con của $\mathbb{R}^3$. Hơn nữa, vector $\mathbf{0}$ tự nó tạo thành một không gian vector, và là không gian con của chính nó cùng các không gian $\mathbb{R}^n$ khác. Đây là lý do cần có điều kiện "đi qua gốc toạ độ".



2.2.2 Giới thiệu về ma trận

Một cái nhìn toàn cảnh về vector mang đến một trực giác về vị trí chung nhất của từng khái niệm trong bức tranh rộng lớn. Nhưng sự tương quan giữa chúng thì sao? Những liên kết, biến đổi giữa chúng thì sao? Để bắt đầu khảo sát, trước tiên hay làm quen với một công cụ truyền tải thông tin mạnh mẽ hơn mảng một chiều-ma trận.

Ta xét bảng số- mảng số hai chiều sau:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 12 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}.$$

Đây là một ô vuông có kích thước 3×3, tức là có 3 *hàng* và 3 *cột*. Hàng được đọc từ trên xuống và cột được đọc từ trái sang. Mỗi một phần tử trong 9 phần tử của bảng số này được xác định với một cặp số duy nhất của hàng và cột. Ví dụ, số 4 nằm ở hàng thứ hai và cột thứ ba. Các số $12, 4, 9$ đều nằm ở cột thứ ba và các số $3, 0, 4$ đều nằm ở hàng thứ hai.
Hay ta cũng có thể lấy thêm một bảng số khác, chẳng hạn

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1.3 & 0.6 \\ 20.4 & 5.5 \\ 9.7 & -6.2 \end{bmatrix}$$

Đây là một bảng số với 3 hàng và 2 cột. Nếu vẫn giữ nguyên cách đọc bảng số trước đó, thì số 9.7 có vị trí là hàng thứ ba, cột thứ nhất.
Vậy ý nghĩa của những bảng số (ma trận) vừa rồi là gì? Ta hãy cùng xem xét thêm một ví dụ: hai bảng số có 3 hàng và 1 cột,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} c \\ d \\ f \end{bmatrix}.$$

Điều đáng chú ý ở đây là ta có thể gọi $\mathbf{v}$ và $\mathbf{w}$ là các *vector*. Thật vậy, nếu ta để chúng tuân theo các quy tắc của vector, các thành phần của hai bảng số vừa rồi sẽ giống như là các thành phần của một vector. Nghĩa là,

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \\ c+f \end{bmatrix},$$

hay

$$4 \cdot \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4a \\ 4b \\ 4c \end{bmatrix}.$$

Về cơ bản, đây chỉ là một sự thay đổi về cách viết. Cụ thể là thay vì viết (a, b, c), ta viết $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$.
Như vậy chuyện gì xảy ra với $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$? Chúng cũng là các vector (theo nghĩa trừu tượng hơn), nhưng tạm thời ta có thể chỉ cần nhìn nhận theo khía cạnh: *các cột của chúng là các vector.*

Ma trận là một mảng chữ nhật hoặc hình vuông (ma trận vuông) chứa các số hoặc những đối tượng toán học khác, mà có thể định nghĩa một số phép toán như cộng hoặc nhân trên các ma trận.

Một ma trận $\mathbf{A}$ có m hàng và n cột được gọi là một ma trận $m \times n$, điều này xác dịnh độ lớn của ma trận. Ta viết $\mathbf{A}_{m\times n}$ để chỉ ma trận A có kích thước $m \times n$. Chú ý rằng ta đọc hàng trước cột.

Về tổng quát, một ma trận $m \times n$ có dạng

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1j} & \cdots & \mathbf{A}_{1n} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2j} & \cdots & \mathbf{A}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i2} & \cdots & \mathbf{A}_{ij} & \cdots & \mathbf{A}_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m1} & \mathbf{A}_{m2} & \cdots & \mathbf{A}_{mj} & \cdots & \mathbf{A}_{mn} \end{bmatrix}.$$

2.2.3 Các phép toán trên ma trận

Cũng như với các số và vector, ta có thể thực hiện phép cộng, trừ với các ma trận, cũng có thể nhân một số với ma trận và cuối cùng là nhân ma trận với ma trận, ma trận với vector.

Phép cộng hai ma trận. Xét hai ma trận $\mathbf{A}$ và $\mathbf{B}$ có kích thước $m \times n$, tổng của hai ma trận là một ma trận $m \times n$ được định nghĩa là

$$\mathbf{A}_{ij} \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{B}_{ij} \in \mathbb{R}, \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} = \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij}. \tag{2.11}$$

Chú ý rằng ta viết $\mathbf{A}_{ij}$ để chỉ phần tử nằm ở hàng thứ i và cột thứ j của $\mathbf{A}$, và tương tự $(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij}$ để chỉ phần tử nằm ở hàng thứ i và cột thứ j của ma trận đó. Vậy, để cộng hai ma trận, ta cộng từng phần tử lại với nhau. Điều này tương tự như phép cộng các vector. Tương tự, chúng ta có thể nhân ma trận với một hằng số $c \in \mathbb{R}$:

$$(c\mathbf{A})_{ij} = c\mathbf{A}_{ij}. \tag{2.12}$$

Điều này tương tự như phép nhân vô hướng với một vector. Khi $c = -1$, ta thu được ma trận $-\mathbf{A}$ sao cho $\mathbf{A} + (-\mathbf{A}) = \mathbf{0}$; $\mathbf{0}$ là ma trận kích thước $m \times n$ với mọi phần tử trong đó đều bằng 0.

Ví dụ.

$$4\begin{bmatrix}0 & 3\\2 & -6\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 12\\8 & -24\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & -2\\0 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 10\\8 & -19\end{bmatrix}.$$

Phép nhân ma trận-vector. Ta hãy bắt đầu với một ví dụ. Giả sử ta có vector

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}+2\\+5\\-4\end{bmatrix},$$

vector này có thể được phân tích thành một tổ hợp tuyến tính của một hệ cơ sở nào đó, chẳng hạn

$$\begin{bmatrix}2\\5\\-4\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-3)\begin{bmatrix}0\\2\\-5\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\11\\-19\end{bmatrix}.$$

Bằng cách định nghĩa một phép toán mới, ta có thể viết lại thành dạng

$$\begin{bmatrix}2\\5\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 11\\0 & -5 & -19\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Ta đã đặt các vector cơ sở vào cột của ma trận 3×3 vừa rồi, và các hệ số của tổ hợp tuyến tính vào một vector cột. Về tổng quát, một phép nhân ma trận $m \times n$ với một vector $n \times 1$ sẽ cho ra một vector $m \times 1$, và phần tử thứ i được tính bởi

$$(\mathbf{A}\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j. \tag{2.14}$$

Cũng có thể viết thành, trong trường hợp $n = 3$,

$$\begin{bmatrix}| & | & |\\\mathbf{A}_{i1} & \mathbf{A}_{i2} & \mathbf{A}_{i3}\\| & | & |\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}|\\\mathbf{A}_{i1}\\|\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}|\\\mathbf{A}_{i2}\\|\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}|\\\mathbf{A}_{i1}\\|\end{bmatrix}.$$

Vector mới là một tổ hợp tuyến tính của các cột của ma trận $\mathbf{A}$ với các hệ số là các phần tử của vector $\mathbf{x}$. Cũng dễ thấy rằng, phần tử thứ i của vector này là tích vô hướng của hàng thứ i của $\mathbf{A}$ với vector $\mathbf{x}$. Nghĩa là, chẳng hạn,

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\\11\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix} = 0 \times 2 + 2 \times (-3) + 11 \times 1 = 5.$$

Vì tích vô hướng có tính phân phối là $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$, phép nhân ma trận-vector cũng có tính chất tương tự:

$$\mathbf{A}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b}.$$

Phép nhân ma trận với ma trận. Ta bắt đầu với việc biểu diễn các vector cơ sở được nhắc tới vừa rồi thông qua một hệ cơ sở khác.

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}0.5\\-1\\0\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0.75\\1\\-2\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}-1\\-1\\4\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0\\2\\-5\end{bmatrix} = -1.625\begin{bmatrix}0.5\\-1\\0\end{bmatrix} - 1.75\begin{bmatrix}0.75\\-1\\0\end{bmatrix} - 2.125\begin{bmatrix}-1\\-1\\4\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0\\11\\-19\end{bmatrix} = -7.875\begin{bmatrix}0.5\\-1\\0\end{bmatrix} - 3.25\begin{bmatrix}0.75\\-1\\0\end{bmatrix} - 6.375\begin{bmatrix}-1\\-1\\4\end{bmatrix}.$$

Các tổng này, như đã biết, có thể được viết thành tích của một ma trận và một vector:

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5 & 0.75 & -1\\-1 & 1 & -1\\0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix}0\\2\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5 & 0.75 & -1\\-1 & 1 & -1\\0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.625\\-1.75\\-2.125\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0\\11\\-19\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.5 & 0.75 & -1\\-1 & 1 & -1\\0 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7.875\\-3.25\\-6.375\end{bmatrix}.$$

Gọi ma trận 3×3 ở vế phải là $\mathbf{B}$, thay vào (2.13),

$$\begin{bmatrix}2\\5\\-4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{B}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} & \mathbf{B}\begin{bmatrix}-1.625\\-1.75\\-2.125\end{bmatrix} & \mathbf{B}\begin{bmatrix}-7.875\\-3.25\\-6.375\end{bmatrix}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}.$$

Quan sát phương trình này, ta nhận thấy sự lặp của $\mathbf{B}$; điều này liên tưởng ta đến một phép nhân. Tức là, ta có thể viết

$$\begin{bmatrix}2\\5\\-4\end{bmatrix} = \mathbf{B}\begin{bmatrix}1 & -1.625 & -7.875\\2 & -1.75 & -3.25\\1 & -2.125 & -6.375\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}, \tag{2.15}$$

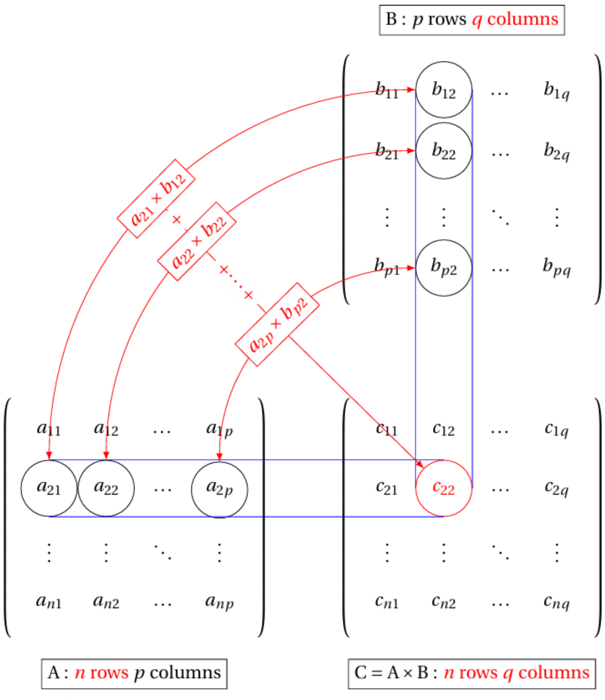
bằng cách định nghĩa một phép nhân mới, và ta gọi phép nhân này là một phép nhân ma trận với ma trận.

Xét một ma trận $\mathbf{A}_{m\times n}$ và một ma trận $\mathbf{B}_{n\times p}$, *tích của của chúng là một ma trận* $\mathbf{C}_{m\times p}$*; các cột của ma trận này là các vector, bằng với tích ma trận-vector của ma trận* $\mathbf{A}$ *và các cột tương ứng của ma trận* B.

Đồng thời, ta cũng nhận thấy rằng tích ma trận-vector cũng là một tích ma trận-ma trận, vì vector là một ma trận có một cột. Do đó, để tổng quát, ta định nghĩa phép nhân ma trận với ma trận như sau:

$$\mathbf{C}_{ij} = (\mathbf{AB})_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{A}_{ik}\mathbf{B}_{kj}. \tag{2.16}$$

Hay, nói cách khác, phần tử thứ (i, j) của $\mathbf{C}$ bằng tích vô hướng của hàng thứ i của ma trận $\mathbf{A}$ với cột thứ j của ma trận $\mathbf{B}$.



Một đẳng thức vector mà ta thường gặp tương đương với ba (hoặc hai) đẳng thức đại số. Còn, như ta đã thấy, hệ hai đẳng thức (2.15) và (2.13) tương đương với bốn đẳng thức vector, tức là tận 12 đẳng thức đại số. Điều này chứng tỏ khả năng nén thông tin của ma trận. Một lượng rất lớn thông tin có thể được nén lại trong một ma trận, và ta có thể thực hiện các phép toán trên đó để đồng thời xử lý chúng.

Để kết thúc phần này, ta hãy xét thêm một ví dụ. Hãy tính tích

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

theo hai cách: (2.16) và bằng góc nhìn của phép nhân vector.
Giải. Theo (2.16), tích này bằng

$$\begin{bmatrix} (1 \cdot 2 + 5 \cdot 0) & (1 \cdot -1 + 5 \cdot 3) \\ (3 \cdot 2 + 2 \cdot 0) & (3 \cdot -1 + 2 \cdot 3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Theo góc nhìn của phép nhân vector, tích này tương đương với

$$\left[\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right].$$

Dễ thấy,

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Các quy tắc cho các phép toán trên ma trận. Ta tổng kết lại các quy tắc chung nhất. Tiếp tục xét các ma trận $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, và $\mathbf{C}$ có kích thước phù hợp-hai ma trận để cộng được với nhau cần có cùng kích thước, để nhân được với nhau cần có số cột của ma trận bên trái bằng với số hàng của ma trận bên phải:

(a) Quy luật giao hoán: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

(b) Quy luật phân phối: $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.

(c) Quy luật liên kết: $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

(d) Quy luật liên kết: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$.

(e) Quy luật phân phối (trái): $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

(f) Quy luật phân phối (phải): $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$.

(g) Quy luật giao hoán: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$.

Chú ý quy luật cuối cùng, tích ma trận không mang tính giao hoán.

Ma trận chuyển vị.

Định nghĩa 2.2.7. *Ma trận chuyển vị của ma trận $\mathbf{A}$, ký hiệu là $\mathbf{A}^T$, là ma trận có các thành phần sao cho*

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = \mathbf{A}_{ji}.$$

Ví dụ:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \implies \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ta thấy các thành phần nằm trên đường chéo của ma trận sẽ vẫn giữ nguyên vị trí sau chuyển vị. Phép chuyển vị có một tính chất quan trọng là đổi thứ tự của phép nhân ma trận, cụ thể

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T.$$

Đồng thời, đối với một các vector được biểu diễn trong (và chỉ trong) một hệ cơ sở trực chuẩn, tích vô hướng giữa hai vector chính là phép nhân ma trận giữa một trong hai vector đó với chuyển vị của vector còn lại. Thật vậy,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{v}^T\mathbf{u} = \mathbf{u}^T\mathbf{v}.$$

Ví dụ:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = 5.$$

2.2.4 Phép biến đổi tuyến tính

Vector, và rồi ma trận đã được giới thiệu cùng cách chúng vận hành. Vậy liệu có một ý nghĩa cốt lõi nào đó nằm đằng sau tất cả những biểu thức toán đó?

Hệ phương trình tuyến tính

Đây là một hệ hai phương trình tuyến tính ở dạng tổng quát:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{aligned}$$

Một cách viết tương đương tận dụng vector là

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix} x_2 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

hay,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Phương trình này có thể được viết lại thành thành

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Đồng thời, sau khi giải hệ phương trình kia, nghiệm thu được sẽ có dạng

$$\begin{aligned} x_1 = a_{11}^{-1}b_1 + a_{12}^{-1}b_2, \\ x_2 = a_{21}^{-1}b_1 + a_{22}^{-1}b_2. \end{aligned}$$

Với a_{ij}^{-1} là một con số nào đó có vị trí tương ứng với a_{ij}; và hệ này cũng tương đương Với

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & a_{12}^{-1} \\ a_{21}^{-1} & a_{22}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Nói cách khác,

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}.$$

Ta gọi $\mathbf{A^{-1}}$ là ma trận nghịch đảo của $\mathbf{A}$. Dễ thấy, nghịch đảo của nghịch đảo của một ma trận là chính nó, điều này nghĩa là

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

Ma trận $\mathbf{I}$ được gọi là ma trận đơn vị, tất cả phần tử trong ma trận vuông này đều bằng 0, trừ các phần tử nằm trên đường chéo, bằng nhau và bằng 1. Đặc tính của nó là

$$\mathbf{Ix} = \mathbf{x}.$$

Một số ví dụ cho $\mathbf{I}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ngoài ra, có thể dễ dàng chứng minh rằng

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} \implies \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}.$$

Đây sẽ là một bài tập nhỏ.

Toán tử tuyến tính

Từ những gì mới biết được, hãy làm một so sánh nhỏ:

	Ma trận	Hàm số
Dạng chuẩn	$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	$f(x) = y$
Nghịch đảo	$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$	$x = f^{-1}(y)$

Như vậy thì việc nhân một ma trận với một vector là tương đồng với đặt vector đó làm đầu vào của một hàm, và đầu ra của một hàm như vậy là một vector khác. Tuy nhiên, thay vì dùng từ *hàm*, một thuật ngữ mới được sử dụng: *biến đổi*. Đối với một vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, một biến đổi T[3] biến nó thành một vector mới $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$. Ngược lại, một biến đổi T^{-1} sẽ trả $\mathbf{v}$ trở lại $\mathbf{u}$. Nhưng có phải ta luôn có

$$\mathbf{Ax} = T(\mathbf{x})$$

không? Không. Giả sử xét một biến đổi

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix},$$

ta sẽ không thể tìm thấy một ma trận nào làm được điều này cả. Và hoá ra là bảng so sánh của ta thiếu một số thứ quan trọng:

	Ma trận	Hàm số
Dạng chuẩn	$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$	$f(x) = y$
Nghịch đảo	$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$	$x = f^{-1}(y)$
Tính tuyến tính	$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mathbf{Ax}_1 + \mathbf{Ax}_2$	$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
Tính đồng nhất	$\mathbf{A}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{Ax}$	$f(\alpha x) = \alpha f(x)$

Một hàm số có đầy đủ tính chất như trong bảng đề cập được gọi là một hàm tuyến tính; do đó, phép biến đổi mà ta cần quan tâm đến cũng phải là một biến đổi tuyến tính. Vì vậy, ma trận được gọi là một ***toán tử tuyến tính***.

Định nghĩa 2.2.8. *Một biến đổi tuyến tính*[4] *là biến đổi $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ thoả mãn hai đặc tính:*

$$\textit{tuyến tính:} \quad L(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = L(\mathbf{u}) + L(\mathbf{v}),$$

$$\textit{tuyến tính:} \quad L(\alpha\mathbf{v}) = \alpha L(\mathbf{v}).$$

Từ đây dễ dàng chứng minh được hai hệ quả quan trọng:

1. $L(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
2. $L(\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n) = \alpha_1 L(\mathbf{e}_1) + \alpha_2 L(\mathbf{e}_2) + \cdots + \alpha_n L(\mathbf{e}_n)$.

Hệ quả 2 nói rằng nếu $\mathbf{x}$ là một tổ hợp tuyến tính của một tập hợp các vector, $L(\mathbf{x})$ vẫn là chính tổ hợp tuyến tính đó của tập hợp chính các vector đó sau biến đổi. Đồng thời có thể viết lại hệ quả 2 theo ngôn ngữ ma trận:

$$L(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ L(\mathbf{e}_1) & L(\mathbf{e}_2) & \cdots & L(\mathbf{e}_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

[3] T: transformation=map
[4] L: linear transformation

hay

$$L(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

A được gọi là ma trận chuẩn của biến đổi L. Hãy lấy ví dụ đơn giản cho một biến đổi kéo với

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Áp dụng biến đổi này lên hai vector đơn vị $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ và $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$:

$$\mathbf{e}_1 \to (1, 0), \qquad \mathbf{e}_2 \to (2, 1).$$

Với một vector $\mathbf{x} = (1, 1)$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \to 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sự kết hợp các biến đổi tuyến tính

Một sự gợi nhắc về hàm hợp cho ta liên tưởng đến trường hợp tương tự cho phép biến đổi hợp. Nói cách khác, một phép biến đổi hợp là một phép biến đổi lấy đều vào là đầu ra của một phép biến đổi khác:

$$L_2(L_1(\mathbf{v})) = L(\mathbf{v}) = \mathbf{w}.$$

Trong ngữ cảnh của toán tử tuyến tính tương ứng với phép biến đổi tuyến tính, điều này chính là một phép nhân ma trận của các ma trận chuẩn

$$\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = (\mathbf{B}\mathbf{A})\mathbf{x}.$$

Với sự chồng chập của liên tiếp 3 biến đổi tuyến tính,

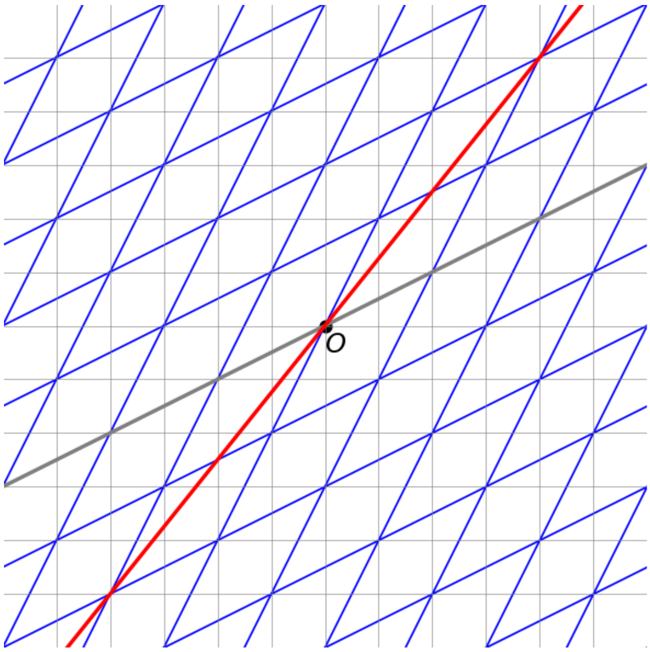
$$L_3(L_2(L_1(\mathbf{v}))) = L(\mathbf{v}) = \mathbf{C}(\mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x})).$$

Từ đây ta dễ dàng chứng minh quy luật liên kết

$$\mathbf{C}(\mathbf{B}\mathbf{A}) = (\mathbf{C}\mathbf{B})\mathbf{A} = (\mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{A}).$$

Minh hoạ cho phép biến đổi tuyến tính

Có thể thấy rằng một phép biến đổi $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ có toán tử tuyến tính tương ứng là một ma trận $m \times n$; nhưng sau đây ta sẽ chủ yếu minh hoạ cho trường hợp $m = n$, tức ma trận chuẩn là một ma trận vuông $n \times n$, do đó phép biến đổi giữ nguyên chiều của không gian vector.



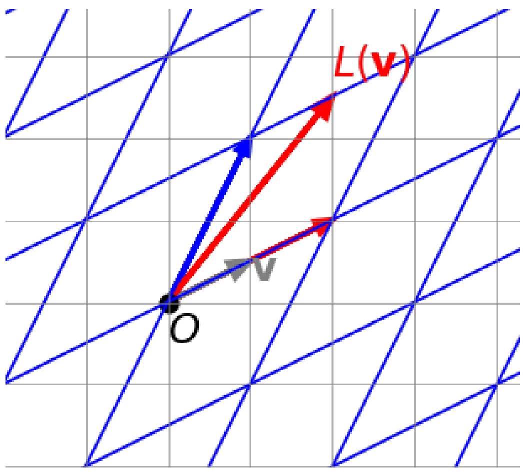
Hình 2.9: Một phép biến đổi tuyến tính

Hình 2.9 là một minh hoạ cho phép biến đổi tuyến tính ứng với ma trận

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

các nút của lưới màu xanh thể hiện cho các vector sau biến đổi, điểm O vẫn ở nguyên chỗ (hệ quả 1), đường thẳng màu đỏ là đường thẳng màu xám sau biến đổi. Ta tổng kết các tiêu chí cho hình ảnh của "lưới" sau một phép biến đổi tuyến tính[5]:

- Điểm O giữa nguyên vị trí.
- Các đường kẻ của lưới song song và cách đều nhau.
- Một đường thẳng vẫn là một đường thẳng.



Hình 2.10

[5]Xem trong 3Blue1Brown cho các hình ảnh về phép biến đổi phi tuyến

Vẫn xét biến đổi đó, hình 2.10 thể hiện sự biến đổi của vector $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} \to L \to L(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \end{bmatrix}.$$

Nhắc lại, ta đạt được điều này bằng cách nhân $\mathbf{v}$ với ma trận chuẩn $\mathbf{A}$, đây đơn giản là lấy 1 nhân với $L(\mathbf{e}_1)$ (cột thứ nhất của $\mathbf{A}$) rồi cộng với 0.5 nhân $L(\mathbf{e}_2)$ (cột thứ hai của $\mathbf{A}$). Để biến đổi ngược từ "lưới" hiện tại về "lưới" vuông đằng sau, ta chỉ cần áp dụng một biến đổi với ma trận $\mathbf{A}^{-1}$ là ma trận nghịch đảo của $\mathbf{A}$.

Vậy là ta đã có một hình ảnh trực quan về phép biến đổi tuyến tính. Tiếp đến sẽ là một số phép biến đổi điển hình.

Phép biến đổi cắt.
Phương trình cho một biến đổi cắt 2D là

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + \lambda x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ hoặc } \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \lambda x_1 + x_2 \end{bmatrix}.$$

Tương ứng, ma trận đặc trưng là

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

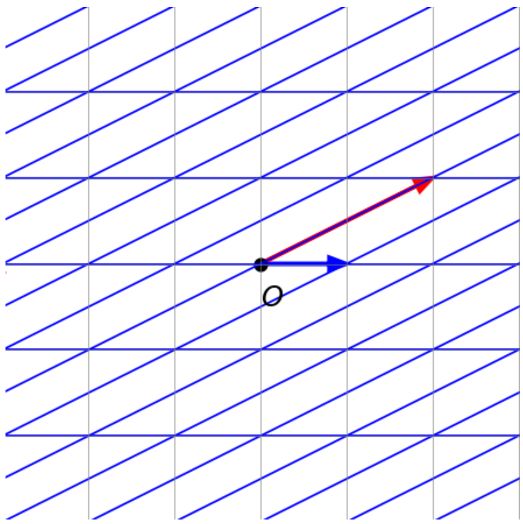
hoặc

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{bmatrix}.$$

Rõ ràng ở trên ta đã có một ví dụ với ma trận

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

dễ thấy rằng cơ sở thứ nhất được giữ nguyên, chỉ có cơ sở thứ hai được kéo chéo sang phải; và minh hoạ cho nó là



Nếu hình ảnh này trông quen thuộc, bạn có thể đã đoán được phần nào: phép biến đổi được thể hiện trong Hình 2.9 chính là kết hợp của hai phép biến đổi cắt và gần giống cắt. Thực vậy,

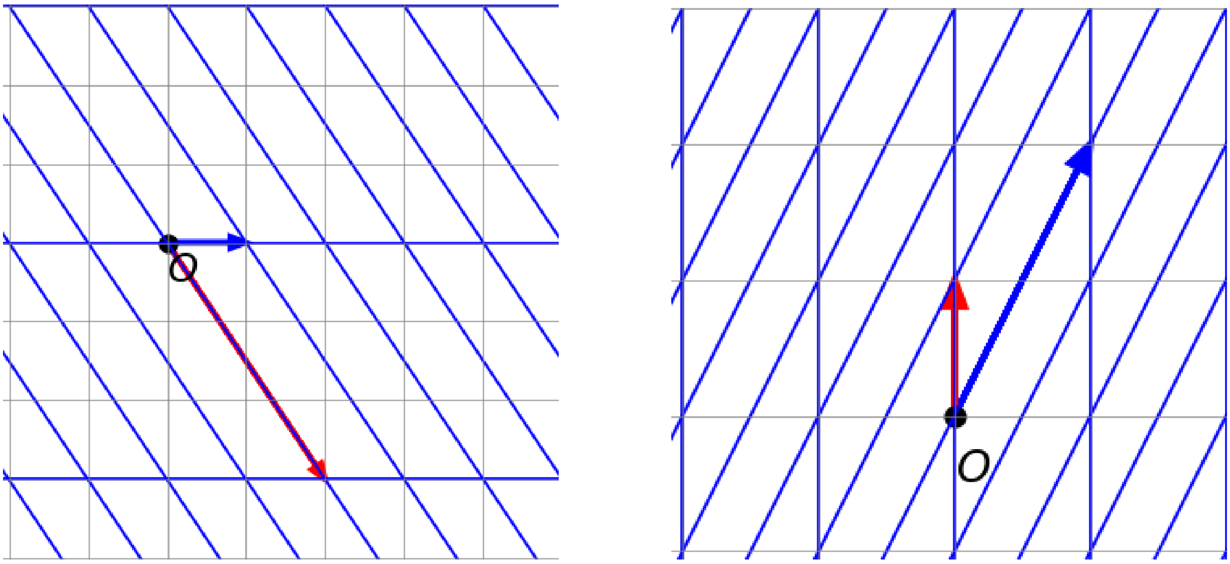
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Nghĩa là ta trước tiên áp dụng ma trận biến đổi

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

rồi lại biến đổi thông qua ma trận

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$



(a) Phép biến đổi của $\mathbf{A}_1$ (b) Phép biến đổi của $\mathbf{A}_2$

Ta có thể đọc thấu đáo sự kết hợp này: $\mathbf{A}_1$ chỉ thay đổi $\mathbf{e}_2$ về cột thứ hai của $\mathbf{A}_2$, rồi tiếp đó $\mathbf{A}_2$ chỉ thay đổi $\mathbf{e}_1$ về cột thứ nhất của $\mathbf{A}$.

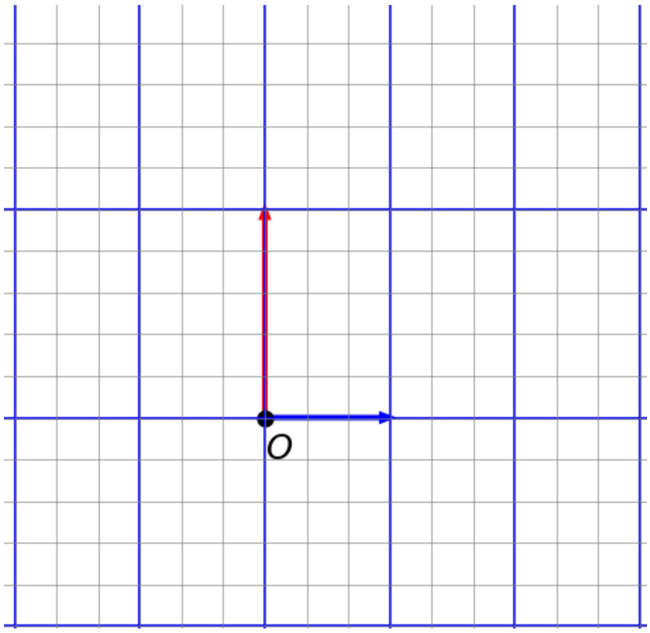
Phép giãn nở.
Biến đổi cho một giãn nở 2D là

$$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \lambda_2 x_2 \end{bmatrix}.$$

Như vậy ma trận chuẩn cho phép biến đổi này là một ma trận đường chéo, có dạng

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

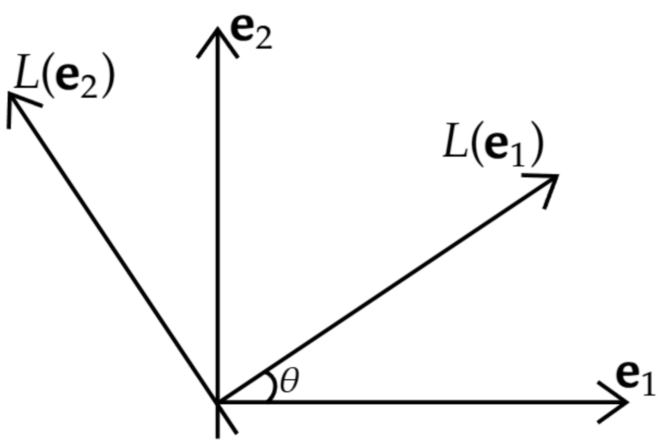
Sau đây là ví dụ cho $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 5$:



Chú ý rằng,

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} \end{bmatrix}.$$

Phép quay.
Đây là một biến đổi đặc biệt. Các vector sau biến đổi giữ nguyên độ lớn, nhưng đầu mút được quay đi một góc θ bất kỳ nào đó.



Ma trận chuẩn cho phép quay 2D là

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

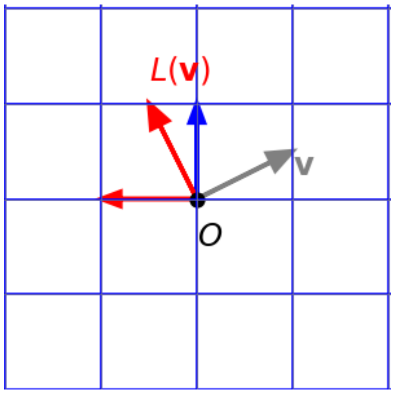
Đối với các cơ sở trực chuẩn, có một tính chất đặc biệt cần lưu ý là

$$\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T.$$

Một số ví dụ cụ thể:

1. Phép quay 90 độ theo chiều dương

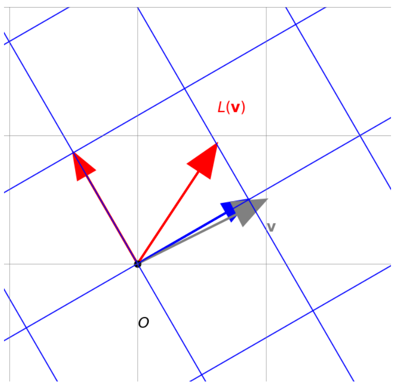
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



2. Phép quay 90 độ theo chiều âm:

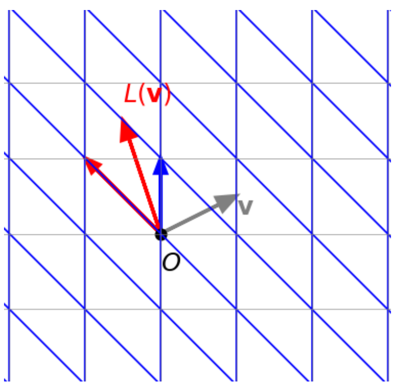
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Phép quay 30 độ theo chiều dương:



4. Kéo rồi quay 90 độ:

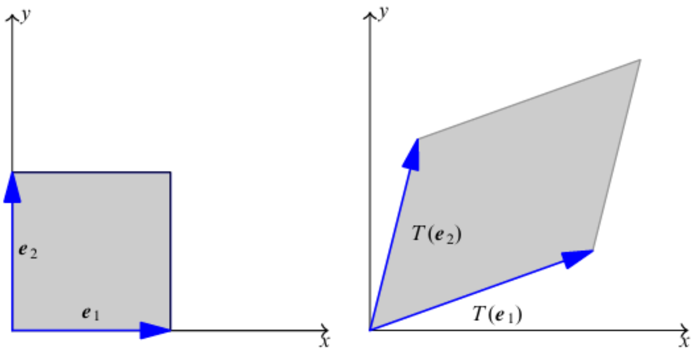
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Hãy xem 3Blue1Brown cho một trực quan hoá biến đổi tuyến tính 3D.

Định thức

Một điều hữu dụng bất ngờ khi nghiên cứu một phép biến đổi là đánh giá rằng một phép biến đổi như thế đã kéo giãn hay ép nhỏ một thứ đi bao nhiêu; cụ thể với trường hợp 2D, đó là nghiên cứu tỷ lệ đặc trưng của sự tăng hay giảm của diện tích một vùng trên mặt phẳng.



Hình 2.12

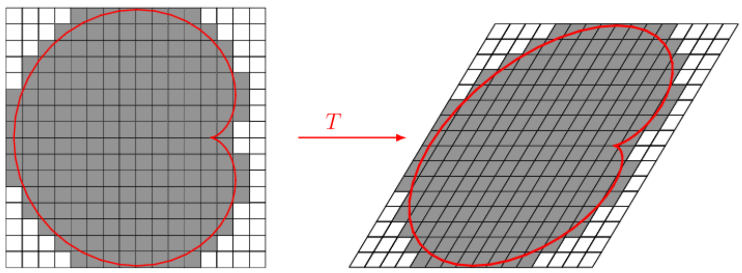
Ta xét một phép biến đổi tuyến tính L với ma trận biến đổi tổng quát

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Dưới phép biến đổi này, hai vector đơn vị trở thành $L(\mathbf{e}_1) = (a, c)$ và $L(\mathbf{e}_2) = (b, c)$; chúng tạo thành hình bình hành trong hình 2.12. Đây sẽ là một bài tập nhỏ: Chứng minh rằng diện tích hình bình hành đó được tương đương với

$$ad - bc.$$

Vì vậy bất cứ hình vuông đơn vị (có diện tích bằng 1 đơn vị diện tích) nào trong mặt phẳng cũng bị biến đổi thành một hình bình hành có diện tích $ad - bc$. Còn hình vuông 2×2 thì sao? Nó được biến đổi thành một hình bình hành có diện tích $4(ad - bc)$. Vì vậy, $ad - bc$ chính là tỷ lệ phóng to/thu nhỏ của phép biến đổi. Nhưng với một miền cong trong mặt phẳng thì sao? Phép toán tích phân được giới thiệu trong tuần 3 nói rằng diện tích bất kỳ một hình nào đều có thể được tính bởi tổng diện tích của vô số hình vuông vô cùng bé. Do đó tất cả các hình nằm trên mặt phẳng đều bị thu phóng với tỷ lệ $ad - bc$ sau phép biến đổi. Tỷ lệ này được gọi là *định thức của ma trận biến đổi*, ký hiệu $\det(\mathbf{A})$ hoặc $|\mathbf{A}|$.



Vậy định thức cho một không gian ba chiều được nhìn nhận như thế nào? Vấn đề này sẽ được để lại cho độc giả với vài gợi ý nhỏ đính kèm:

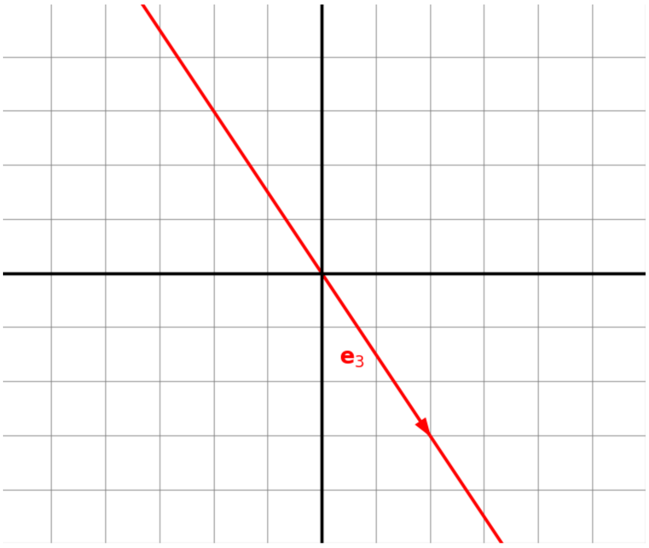
1. Đại lượng đặc trưng cho độ lớn của một vùng trong không gian ba chiều là gì?

2. Hình khối tạo bởi ba vector không đồng phẳng gọi là gì?

3. Ý nghĩa đằng sau việc một phép nhân có hướng của hai vector có thể được biểu diễn bởi một định thức; nghĩa là
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Các tính chất của định thức có thể được suy ra đơn thuần bằng trực giác về một phép biến đổi tuyến tính. Chẳng hạn,
$$\det(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1) = \det(\mathbf{A}_2)\det(\mathbf{A}_1).$$

Nhưng vai trò của định thức là gì trong ngữ cảnh này? Mọi thứ hoá ra đều gắn với liệu định thức của một ma trận bằng hay khác 0. Chuyện gì xảy ra khi định thức của một ma trận bằng 0? Hoặc, câu hỏi trực quan hơn là biến đổi tuyến tính của một ma trận có định thức bằng 0 mang đến một hình ảnh như thế nào. Diện tích của các hình sau biến đổi bằng 0? Đúng, nhưng như vậy nói lên điều gì? Rõ ràng sẽ thật tầm thường nếu ta đang đề cập tới một ma trận có toàn bộ phần tử đều bằng 0. Câu trả lời có thể được tìm thấy ở hình ảnh quen thuộc sau:



Bạn còn nhớ ví dụ về hai vector $\mathbf{e}_3$ và $2\mathbf{e}_3$ chứ? Cho chúng vào trong một ma trận
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -6 \end{bmatrix},$$

và không ngoài dự đoán $\det(\mathbf{A}) = 0$. Tất cả các vector nằm trên mặt phẳng đều bị ép vào trong đường thẳng màu đỏ, diện tích của bất cứ vùng nào sau biến đổi đều bằng 0. Đối với một phép biến đổi như thế, ta sẽ không thể tìm được một phép biến đổi ngược lại nào đưa mọi thứ về như cũ. Nghĩa là
$$\det(\mathbf{A}) = 0 \implies \mathbf{A}^{-1} \text{ không tồn tại.}$$

Bởi, điều đó là nằm ngoài khả năng của một hàm, giống như bất cứ số nào nhân với 0 đều bằng 0, nhưng sẽ không có phép toán nào làm điều ngược lại, từ 0 lấy ra tất cả các con số khác. Thành thử, một ma trận có thể nghịch đảo khi và chỉ khi định thức của nó khác 0. Cuối cùng, hãy nhớ rằng
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0} \implies \det(\mathbf{A}) = 0.[6]$$

[6] Vì sao?

Chuyển cơ sở

2.2.5 Một số ví dụ khác về không gian vector

Tài liệu tham khảo

[1] 3Blue1Brown. *Linear Algebra*. URL: https://www.3blue1brown.com/lessons/linear-algebra.

[2] Jean - Marie Brébec. *PFIEV Cơ học 1*. NXB Giáo dục, 2015.

[3] Văn Như Cương. *Hình học giải tích*. Nhà xuất bản Đại học Sư phạm, 2009.

[4] Riley Hobson. *Mathmatical Methods for Physics and Engineering*. 2nd. Cambridge University Press, 2011.

[5] I.V.Savelyev. *Giáo trình vật lý đại cương tập 1*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1988.

[6] Introduction to Linear Algebra. *Gilbert Strange*. 5th. Prentice Hall, 2023.

[7] Nguyễn Vĩnh Phú. *Toán Học Chân Phương*. 2024.

[8] James Stewart. *Calculus 1*. 7th. Cengage Learning, 2012.

Tuần 3

Động Học Chất Điểm

3.1 Nguyên hàm và Tích phân

3.1.1 Ý tưởng

3.1.2 Định lý cơ bản của giải tích

3.2 Hệ toạ độ

3.2.1 Toạ độ cong

3.2.2 Các hệ toạ độ thông dụng

Hệ toạ độ Descartes

Hệ toạ độ cực

Hệ toạ độ trụ

Hệ toạ độ cầu

3.3 Hệ quy chiếu

3.3.1 Các thông số động học

3.3.2 Định lý cộng vận tốc và gia tốc

3.3.3 Bàn về hệ quy chiếu

Tài liệu tham khảo

[1] Jean - Marie Brébec. *PFIEV Cơ học 1*. NXB Giáo dục, 2015.

[2] Riley Hobson. *Mathmatical Methods for Physics and Engineering*. 2nd. Cambridge University Press, 2011.

[3] I.V.Savelyev. *Giáo trình vật lý đại cương tập 1*. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1988.

[4] David Morin. *Introduction to classical mechanics: with problems and solutions*. Cambridge University Press, 2008.

[5] James Stewart. *Calculus 1*. 7th. Cengage Learning, 2012.

Tuần 4

Cơ Động Lực Học Chất Điểm

Động học mô tả sự chuyển động của vật nhưng chưa đề cập đến nguồn cơn của những chuyển động đó. Động lực học nghiên cứu sự chuyển động của vật liên hệ với các nguyên nhân (các tương tác giữa các vật) gây ra một đặc trưng nào đó của chuyển động.

Ba định luật động lực học được Newton trình bày vào năm 1687 dựa trên sự tổng kết một loạt các kết quả thực nghiệm tuy còn nhiều hạn chế nhưng đã thành công trong ứng dụng ở một phạm vi rất lớn các hiện tượng quen thuộc trong đời sống -những vật thể lớn hơn nhiều so với kích thước của các nguyên tử và có vận tốc nhỏ hơn nhiều so với vận tốc ánh sáng. Đây chính là cơ sở của cơ học cổ điển.

4.1 Ba Định Luật Newton

4.1.1 Định luật thứ nhất

4.1.2 Định luật thứ hai

4.1.3 Định luật thứ ba

4.1.4 Một số "loại" động lượng khác

4.2 Nguyên lý tương đối Galileo

4.2.1 Phép biến đổi Galileo

4.2.2 Luận bàn

4.3 Các lực cơ học

4.4 Liên kết

4.4.1 Các ràng buộc hình học

4.4.2 Vai trò của các loại lực liên kết

4.5 Phương pháp tiếp cận một bài toán động lực học

Tuần 5

Dao Động

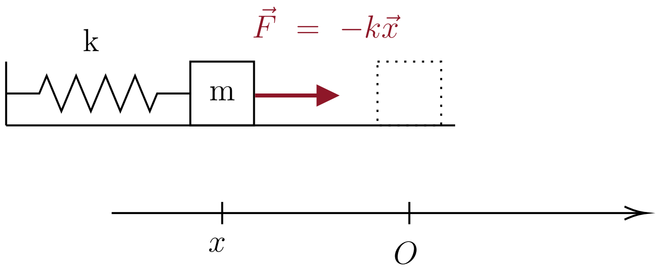
Trong phần này, chúng ta sẽ tìm hiểu về chuyển động dao động. Bắt đầu từ những thứ cơ bản nhất như con lắc đơn, đến những hệ phức tạp như dao động liên kết giữa các vật.

5.1 Số phức và phương trình vi phân tuyến tính

5.2 Dao động hệ 1 chất điểm

5.2.1 Dao động điều hoà

Đầu tiên chúng ta xem xét hệ cơ bản nhất của dao động. Chỉ bao gồm duy nhất 1 chất điểm có khối lượng m. Trong quá trình chuyển động của chất điểm, nó phải chịu một lực có dạng $F = -kx$. Lực này có đặc điểm luôn hướng về vị trí có $x = 0$.



Hình 5.1

Ta sẽ dễ dàng viết được phương trình vi phân chuyển động (Hay nói cách khác chính là phương trình định luật II Newton).

$$m\ddot{x} = -kx. \tag{5.1}$$

Từ các phương pháp giải phương trình vi phân, ta có thể thu được nghiệm của phương trình trên.

$$x = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{5.2}$$

Với A là biên độ; $\omega = \sqrt{k/m}$ là tần số góc; φ góc thể hiện vị trí ban đầu.

Ta có nhiều cách để biểu diễn một phương trình dao động tương tự như phương trình 5.2. Ta có thể biểu diễn phương trình dao động bằng số phức.

$$x^* = Ae^{i(\omega t+\varphi)}. \tag{5.3}$$

Cách này không làm thay đổi tính đúng đắn của phương trình dao động và hoàn toàn tương đương phương trình 5.2. Để giải thích, ta sử dụng công thức Euler.

$$x^* = A\cos(\omega t + \varphi) + iA\sin(\omega t + \varphi).$$

Ta thấy rằng phương trình 5.2 là phần thực của phương trình 5.3. Ta có liên hệ

$$x = Re(x^*). \tag{5.4}$$

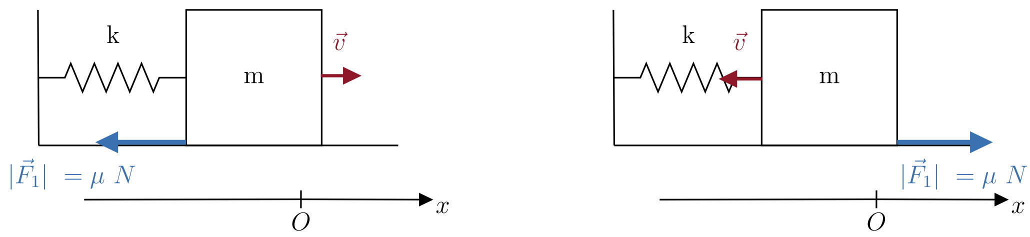
5.2.2 Dao động có cản

Ở hệ dao động trên, chỉ có lực dạng lực lò xo tác dụng lên vật. Vật sẽ chuyển động điều hoà vĩnh viễn. Nhưng trong thực tế, luôn tồn tại những lực ma sát làm suy giảm chuyển động của hệ.

Lực ma sát khô (ma sát trượt)

Lực ma sát khô (hay ma sát trượt) là lực có dạng sau. Lực này có đặc điểm luôn ngược chiều với xu hướng chuyển động của hệ vật. Hay nói chính xác hơn là lực này ngược chiều với chiều vận tốc hệ vật. Độ lớn của lực thường là hằng số trong các trường hợp cơ bản.

$$\begin{aligned} &F_1 = -\mu N \quad \text{Hoặc} \quad \vec{F_1} = -\mu N\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \\ &\text{Với } N = mg \end{aligned} \tag{5.5}$$



(A) (B)

Hình 5.2

Ta thấy rằng, hướng của lực ma sát bị thay đổi trong quá trình chuyển động. Một cách tổng quát, ta có thể sử dụng dạng vector của lực ma sát. Nhưng như thế thì khá khó để giải quyết. Ta sẽ chia thành 2 quá trình, quá trình (1) là khi vật đang đi theo chiều dương; quá trình (2) là khi vật đang đi theo chiều âm.

Quá trình (1): chuyển động theo chiều dương.

Khi này, lực ma sát sẽ luôn hướng theo chiều âm trong cả quá trình. Ta viết được phương trình vi phân chuyển động

$$m\ddot{x} = -kx - \mu mg. \tag{5.6}$$

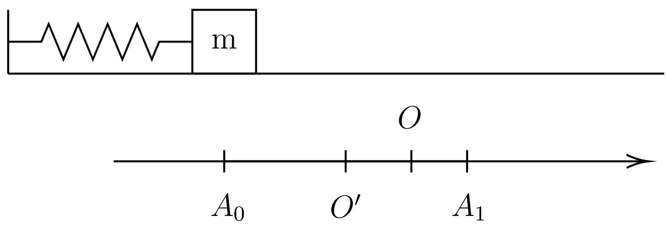
Để giải phương trình vi phân này, ta sẽ đặt biến là $u = x + \mu mg/k$. Thực hiện việc đổi biến, ta thu được phương trình

$$\ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0.$$

Từ đó ta thu được nghiệm có dạng

$$\begin{aligned} u &= A_n\cos\left(\sqrt{k/m}\,t + \varphi\right) \\ \Rightarrow x &= A_n\cos\left(\sqrt{k/m}\,t + \varphi\right) - \frac{\mu mg}{k}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Phương trình này giống hệ như một phương trình dao động điều hoà. Nhưng vị trí cân bằng bị lệch đi một đoạn $OO' = \mu mg/k$, O' là vị trí cân bằng mới. Điểm O' bị lệch về phía chiều âm so với O.



Hình 5.3

Ta sẽ suy ra được một số điều sau

1. $O'A_0 = O'A_1 = \alpha$.
2. $\begin{cases} OA_0 &= \alpha + \mu mg/k. \\ OA_1 &= \alpha - \mu mg/k. \end{cases}$

   Hay sau mỗi $T/2$ thì biên độ mới và cũ sẽ có sự chênh lệch $OA_1 = OA_0 - 2\mu mg/k$.

Quá trình (2): chuyển động theo chiều âm.

Khi này, lực ma sát sẽ luôn hướng theo chiều âm trong cả quá trình. Ta viết được phương trình vi phân chuyển động

$$m\ddot{x} = -kx + \mu mg. \tag{5.8}$$

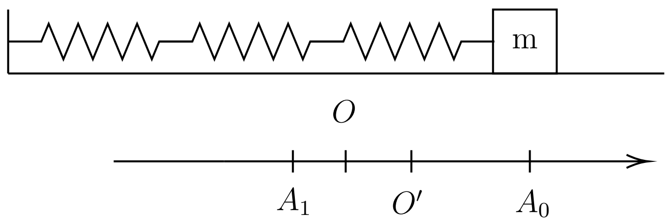
Tương tự với quá trình (1), ta đặt biến là $v = x - \mu mg/k$. Ta thu được phương trình

$$\ddot{v} + \frac{k}{m}v = 0.$$

Từ đó ta thu được nghiệm có dạng

$$\begin{aligned} v &= B_n \cos\left(\sqrt{k/m}\, t + \varphi\right) \\ \Rightarrow x &= B_n \cos\left(\sqrt{k/m}\, t + \varphi\right) + \frac{\mu mg}{k}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Phương trình này cũng tương tự như phương trình dao động. Nhưng ở trường hợp này thì vị trí cân bằng bị lệch về phía chiều dương so với O, $OO' = \mu mg/k$.



Hình 5.4

Ta sẽ suy ra được một số điều sau

1. $O'A_0 = O'A_1 = A$.

2. $\begin{cases} OA_0 &= A + \mu mg/k. \\ OA_1 &= A - \mu mg/k. \end{cases}$

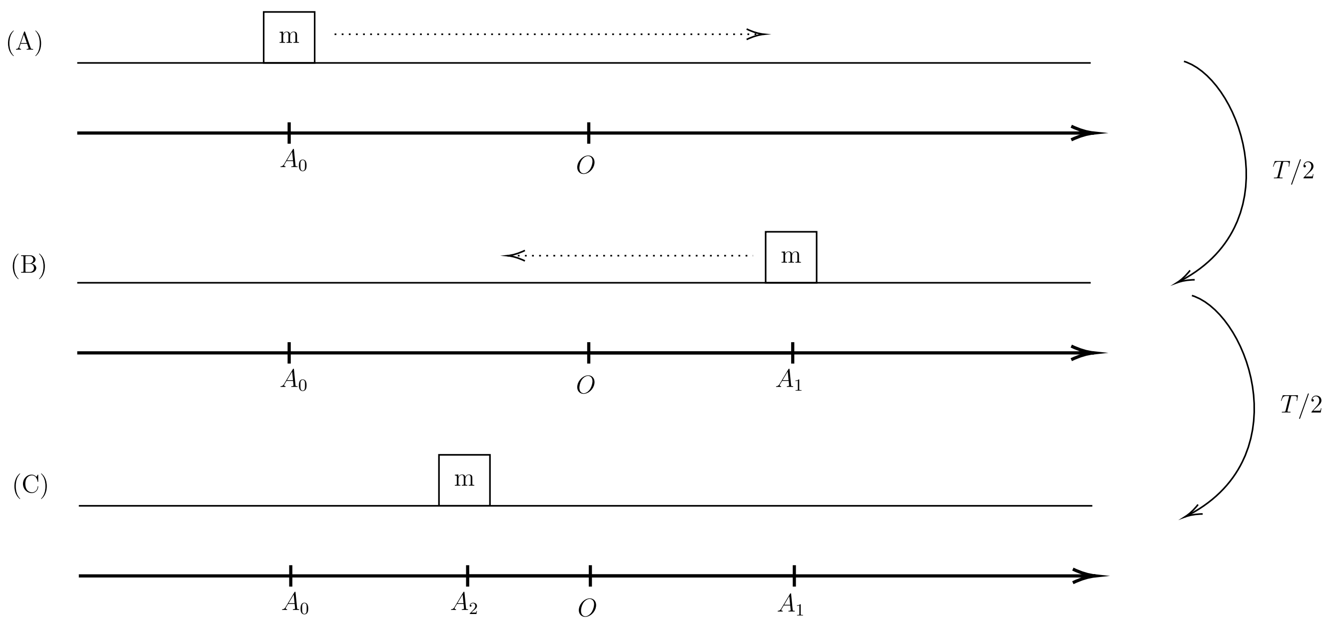
   Hay sau mỗi $T/2$ thì biên độ mới và cũ sẽ có sự chênh lệch $OA_1 = OA_0 - 2\mu mg/k$.

**Lý do tại sao phải ghi rõ là biên độ thứ n, bởi vì biên độ của vật sẽ giảm dần và khác nhau biệt lẫn nhau. Biên độ sẽ bị thay đổi ở mỗi "nửa" chu kỳ.

Ví dụ trực quan

Chúng ta sẽ xét một ví dụ đơn giản (hình 5.5) để có thể hiểu tốt phần này. Ta thả một vật cách vị trí lò xo đang co và cách vị trí không giãn một đoạn A_0.

- Khi từ trạng thái (A) sang trạng thái (B). Thì biên độ của vật giảm $2\mu mg/k$. Hay $A_0 - A_1 = 2\mu mg/k$. Quá trình này tốn nửa chu kỳ.
- Khi đi từ trạng thái (B) sang trạng thái (C). Thì biên độ của vật cũng giảm $2\mu mg/k$. Hay $A_1 - A_2 = 2\mu mg/k$. Quá trình này tốn nửa chu kỳ.



Hình 5.5

Vậy thì ta có công thức liên hệ giữa các biên độ liền kề nhau.

$$A_{k+1} = A_k - 2\mu mg/k. \tag{5.10}$$

Lực ma sát nhớt

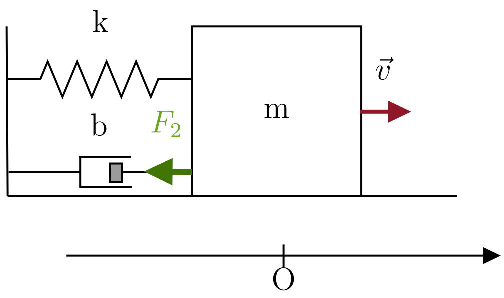
Lực ma sát nhớt sẽ bị phụ vào độ lớn và hướng của vận tốc hệ vật theo biểu thức sau. Ở đây lực ma sát nhớt mà chúng ta khảo sát là lực phụ thuộc bậc 1 vào vận tốc hệ vật[1].

$$\vec{F}_2 = -b\vec{v}. \tag{5.11}$$

Ta có thể viết được phương trình vi phân chuyển động của nó.

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}.$$

[1] Tồn tại lực ma sát nhớt phụ thuộc bậc 2 vào vận tốc vật. Nhưng trong bài toán này ta không xét tới.



Hình 5.6

Đây chính là phương trình vi phân bậc 2, để trở thành đúng dạng đã học thì ta sẽ ghi thành

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \tag{5.12}$$

Ta giả sử $x = Ae^{\lambda t}$. Thay nó vào phương trình 5.12. Ta đặt $b/m = 2\gamma$, $\omega = \sqrt{k/m}$.

$$\lambda^2 + (2\gamma)\lambda + \omega^2 = 0.$$

Tính Δ của phương trình bậc 2, ta thu được

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega^2 \tag{5.13}$$

Trường hợp (1): $\Delta < 0$ - Lực cản nhỏ

Ta thu được λ và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân.

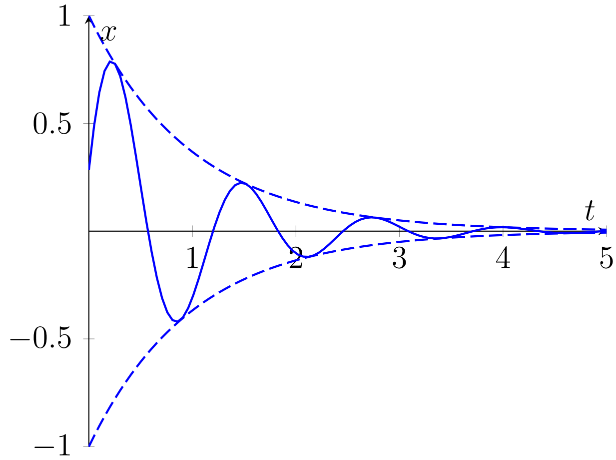
$$\begin{cases} \lambda &= & -\gamma \pm i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \\ x &= & e^{-\gamma t}\left(Ae^{i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\ t} + Be^{-i\sqrt{\omega^2-\gamma^2}\ t}\right). \end{cases} \tag{5.14}$$

Nhưng kết quả ta thu được buộc phải là số thực, vậy nên các hằng số A, B sẽ đảm bảo cho x là một số thực. Cụ thể thì A và B phải có liên hệ

$$\begin{cases} A + B &= & C\cos\phi \\ A - B &= & iC\sin\phi \end{cases}$$

Vậy thì ta sẽ thu được nghiệm tổng quát x như sau

$$x = e^{-\gamma t}C\cos\left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}\ t + \phi\right) \tag{5.15}$$



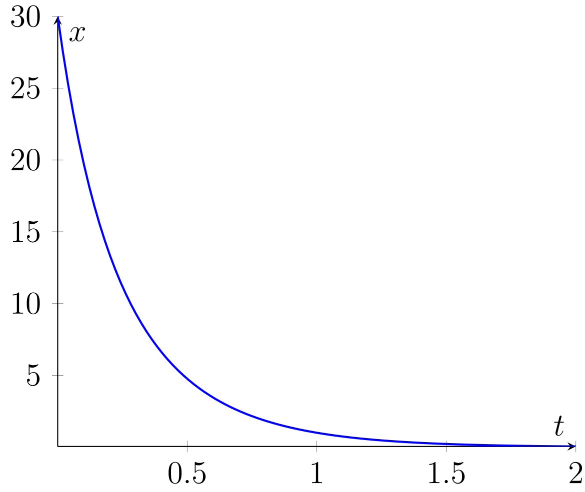
Hình 5.7: Hàm $e^{-t}\cos(5t+5)$

Trường hợp (2): Δ > 0 - Lực cản lớn

Ta thu được λ và nghiệm tổng quát của phương trình vi phân.

$$\begin{cases} \lambda &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2-\omega^2} \\ x &= Ae^{-\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t} + Be^{-\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2}\right)t}. \end{cases} \tag{5.16}$$

Trong trường hợp lực cản lớn, vật sẽ không thực hiện quá trình dao động. Mà bị tắt dần (nhưng chậm).



Hình 5.8: Hàm $20e^{-(5-2)t} + 10e^{-(5+2)t}$

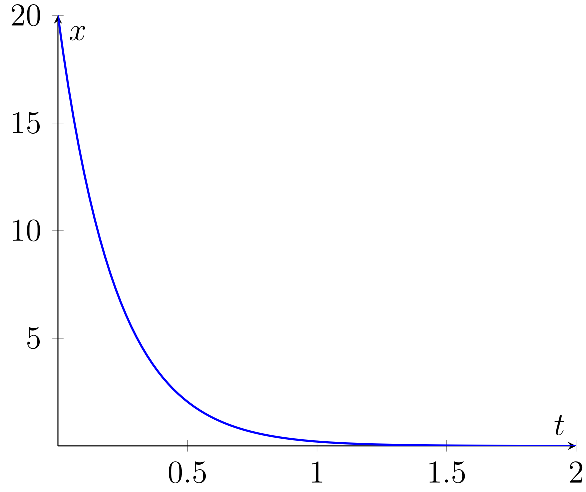
Trường hợp (3): Δ = 0 - Tới hạn

Trong trường hợp này, khi ta giải phương trình bậc 2 nó sẽ bị trùng nghiệm. Và ta sẽ không thể áp dụng cách đã làm với trường hợp (1) và (2) vào đây được. Lúc này, dựa vào lý thuyết để giải phương trình vi phân, ta sẽ biết dạng tổng quát của x. Chuyển động sẽ tắt dần rất nhanh.

$$\begin{cases} \lambda &= \omega = \gamma \\ x &= e^{-\gamma t}(A+Bt). \end{cases} \tag{5.17}$$

Tóm lại, với trường hợp có lực cản nhớt trong hệ thì ta có một vài trường hợp xảy ra. Từ đấy, ta tổng hợp thành một bảng. Xét phương trình đặc trưng của phương trình vi phân bậc 2 là:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$



Hình 5.9: Hàm $e^{-5t}(20+10t)$

Bảng 5.1: Tóm tắt nghiệm

Trường hợp	Nghiệm tổng quát
Vô nghiệm	$x = C \exp\left(-\frac{b}{2a}t\right)\cos\left(\sqrt{4ac - b^2}\, t + \phi\right)$
2 nghiệm phân biệt $\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$
1 nghiệm duy nhất $\lambda = -\frac{b}{2a}$	$x = e^{-\lambda t}(A+Bt)$

**Trong đó, A, B, C, ϕ là những hằng số dựa vào những điều kiện biên đề cho.

5.2.3 Dao động có lực cưỡng bức

Khi này, hệ vật chịu thêm một lực từ một nguồn khác. Lực này có dạng là một dạng lực điều hoà.

$$F(t) = F_0 \cos(\Omega t + \phi). \tag{5.18}$$

Lực này cưỡng bức vật và khiến cho chuyển động theo có xu hướng theo chu kỳ của lực cưỡng bức. Ta viết phương trình vi phân chuyển động của hệ.

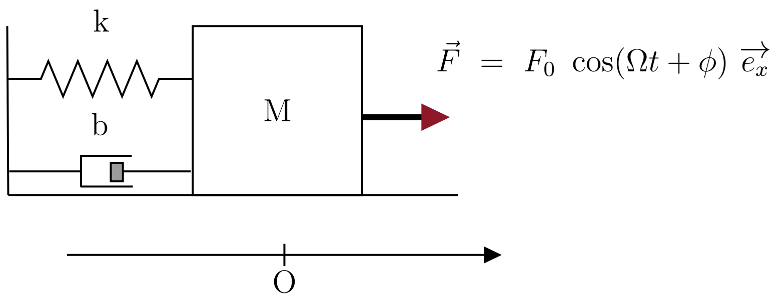
$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \cos(\Omega t + \phi). \tag{5.19}$$

Để giải quyết phương trình này, ta sẽ giải lần lượt nghiệm thuần nhất và nghiệm riêng của nó.

Nghiệm thuần nhất

Đặt nghiệm thuần nhất là x_{tn}. Ta sẽ giải phương trình sau.

$$\ddot{x}_{tn} + \frac{b}{m}\dot{x}_{tn} + \frac{k}{m}x_{tn} = 0. \tag{5.20}$$



Hình 5.10

Phương trình này sẽ được giải quyết giống như mục (5.2.2).

Nghiệm riêng

Đặt nghiệm riêng là x_r. Nghiệm riêng sẽ mang đặc trưng của lực cưỡng bức. Hiểu đơn giản là nếu thế x_r vào vế trái phương trình 5.19 nó sẽ thu gọn thành vế phải. Vì x_r mang đặc trưng của hàm lực cưỡng bức nên ta giả sử x_r có dạng sau.

$$x_r = A\cos(\Omega t + \phi) + B\sin(\Omega t + \phi). \tag{5.21}$$

Thế phương trình 5.21 vào phương trình 5.19. Rồi ta đồng nhất hai vế. Ở đây, đồng nhất hai vế là hệ số đi với cos() ở hai vế sẽ bằng nhau; hệ số đi với sin() ở hai vế sẽ bằng nhau.

$$\left(-A\Omega^2 + \frac{b}{m}B\Omega + \frac{k}{m}A\right)\cos(\Omega t + \phi) + \left(-B\Omega^2 - \frac{b}{m}A\Omega + \frac{k}{m}B\right)\sin(\Omega t + \phi) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t + \phi).$$

Đồng nhất ta có

$$\begin{cases} -A\Omega^2 + \dfrac{b}{m}B\Omega + \dfrac{k}{m}A &= \dfrac{F_0}{m} \\ -B\Omega^2 - \dfrac{b}{m}A\Omega + \dfrac{k}{m}B &= 0. \end{cases}$$

Để dễ biểu diễn, ta đặt $c = b/m; \omega^2 = k/m$

$$\begin{aligned} A &= \frac{F_0}{m}\frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}. \\ B &= \frac{F_0}{m}\frac{c\Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (c\Omega)^2}. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Vậy ta sẽ tìm được dạng của nghiệm riêng khi thế A, B vào phương trình 5.21.

Nghiệm tổng quát

Đặt nghiệm tổng quát là x, ta sẽ tính được nghiệm tổng quát bằng biểu thức

$$x = x_{tn} + x_r. \tag{5.23}$$

Đây là lý thuyết trong việc giải các phương trình vi phân. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân tuyến tính sẽ là tổng các nghiệm. Một chú thích của mình để khiến cho các bạn đọc thấy được điều này một các trực quan hơn

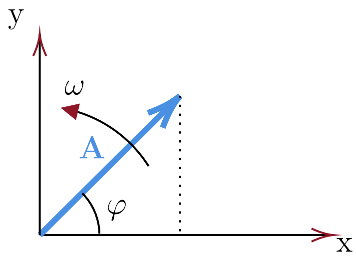
$$m(\ddot{x}_{tn} + \ddot{x}_r) + b(\dot{x}_{tn} + \dot{x}_r) + k(x_{tn} + x_r) = F_0\cos(\Omega t + \phi).$$

$$\Leftrightarrow \left(\ddot{x}_{tn} + \frac{b}{m}\dot{x}_{tn} + \frac{k}{m}x_{tn}\right) + \left(\ddot{x}_r + \frac{b}{m}\dot{x}_r + \frac{k}{m}x_r\right) = 0 + \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t + \phi).$$

Thành phần thuần nhất sẽ bằng 0 còn thành phần riêng sẽ tạo ra hàm lực cưỡng bức.

5.2.4 Giản đồ Fresnel

Giản đồ Fresnel là cách biểu diễn một phương trình dao động trên một mặt phẳng Oxy. Trên



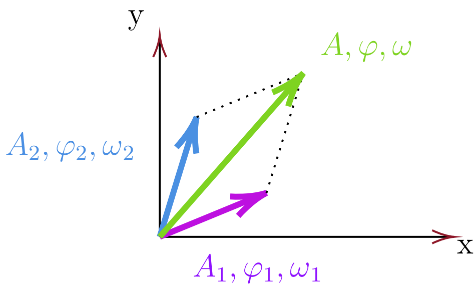
Hình 5.11

giản đồ, vector biểu diễn sự dao động của hệ sẽ xoay quanh gốc toạ độ với vận tốc góc ω, độ dài vector là A.

Nếu vật thể là tổng hợp của nhiều dao động điều hoà

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n$$

Thì trên giản đồ, vector biểu diễn cho x sẽ là tổng vector các thành phần dao động điều hoà.



Hình 5.12

5.2.5 Toạ độ suy rộng (giới thiệu)

Trong các cơ hệ, biến của phương trình vi phân không nhất thiết là toạ độ dịch chuyển x. Nó có thể là các đại lượng khác như

θ	góc lệch
$x_1 + x_2$	tổng hợp các dao động thành phần (giống hình 5.12)

Ta gọi chung các toạ độ suy rộng là q. Nếu lúc đấy ta phương trình vi phân sau, thì ta vẫn nói hệ tuân theo quy luật dao động điều hoà.

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0. \tag{5.24}$$

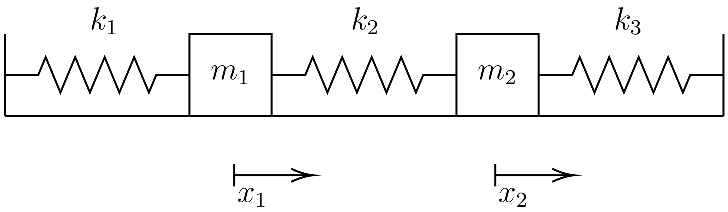
****Tìm một ví dụ cho toạ độ suy rộng $x_1 + x_2$ dao động điều hoà trong trường hợp của hình 5.12.*

5.3 Dao động hệ nhiều chất điểm liên kết

Bây giờ hệ sẽ không chỉ gồm một chất điểm duy nhất dao động. Hệ có thể bao gồm 2, 3 hoặc nhiều chất điểm dao động hơn. Điểm khác biệt dễ thấy nhất là không chỉ có 1 phương trình động lực học, nhưng bây giờ sẽ là một hệ phương trình vi phân gồm n ẩn.

Ta sẽ đi từ những ví dụ đơn giản, nơi mà chúng ta sẽ dùng trực quan toán học và vật lý để giải quyết. Sau đó, ta sẽ nói về các phương pháp dùng để giải quyết một các (tương đối) tổng quát.

5.3.1 Hệ 2 chất điểm 3 lò xo



Hình 5.13

Trong hệ này ta có các khối lượng m_1, m_2 được liên kết với nhau bằng lò xo k_2. Coi như hệ lý tưởng và tại vị trí như hình 5.13 các lo xò đang ở trạng thái tự nhiên. Ta xét trường hợp cơ bản với các giả thiết sau: $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_3$.

Phương trình động lực học cho từng chất điểm là

$$\begin{aligned} m_1 : \quad m\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_2(x_2 - x_1) \\ m_2 : \quad m\ddot{x}_2 &= -k_3x_2 - k_2(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Để giải quyết phương trình này, ta lần lượt cộng 2 phương trình; trừ 2 phương trình với nhau.

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) &= \quad -k_1(x_1 + x_2). \\ m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) &= -(k_1 + 2k_2)(x_1 + x_2). \end{cases} \tag{5.25}$$

Như mục 5.2.5, ta đặt $q_1 = x_1 + x_2$ và $q_2 = x_1 - x_2$. Ta sẽ có hệ phương trình.

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 &= 0 \quad \text{, với } \omega_1^2 = k_1/m \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 &= 0 \quad \text{, với } \omega_2^2 = (k_1 + 2k_2)/m \end{cases} \tag{5.26}$$

Sau đấy ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} q_1 = x_1 + x_2 &= A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ q_2 = x_1 - x_2 &= B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} \tag{5.27}$$

Tương đương

$$\begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}\left(A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right) \\ \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - B\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\right) \end{cases} \tag{5.28}$$

Nhận xét: ở đây ta có thể thấy rằng toạ độ x_1 là tổng hợp của hai dao động điều hoà q_1, q_2 (tương tự với x_2).

5.3.2 Toạ độ trực giao

Chúng ta đã giải quyết bài toán dao động liên kết ở trên bằng một số mẹo toán học. Ta nhận thấy rằng, nếu chỉ xét riêng toạ độ x_1 hoặc x_2 thì hệ sẽ không tạo nên một dao động điều hoà cơ bản. Nhưng nếu ta sử dụng toạ độ suy rộng q_1, q_2 thì ta lại có thể giải quyết được. Người ta gọi các toạ độ thoả tính chất giống q_1, q_2 là các toạ độ trực giao trong dao động liên kết.

Các toạ độ trực giao sẽ khiến phương trình vi phân trở thành dạng như phương trình 5.24.

Tuần 6

Phương Pháp Số Trong Mô Phỏng

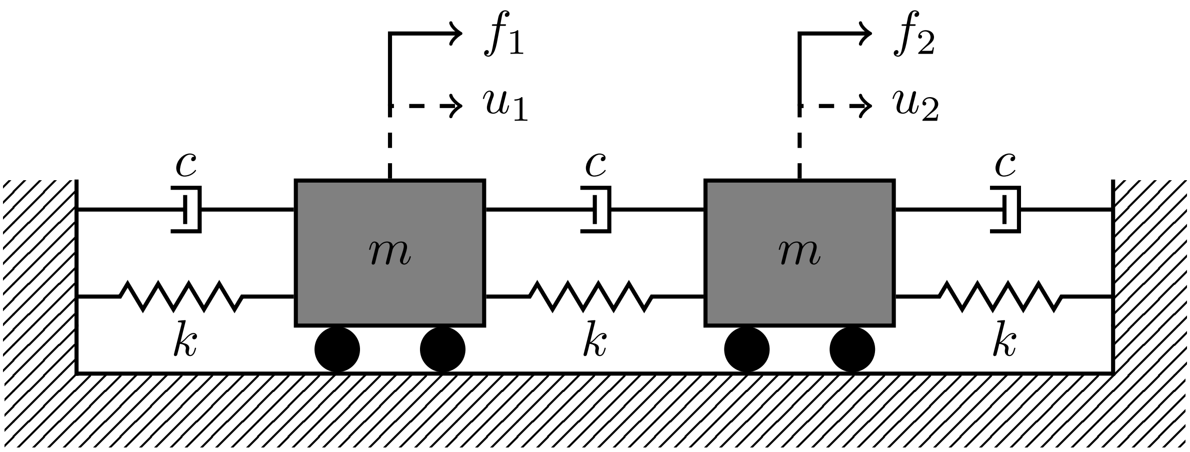
6.1 Ứng dụng ma trận trong vật lý và cơ học

Mục tiêu của phần này là sử dụng các tính chất của ma trận để tìm lại các kết quả đã trình bày trong tuần trước. Các kết quả trình bày dưới đây hoàn toàn có thể áp dụng được cho các hệ thống dao động phức tạp có nhiều bậc tự do hơn. Về mặt toán học hệ dao động 2 bậc tự do với các hệ dao động có 3,4,5 hoặc thậm chí 100 bậc tự do là tương tự.

6.1.1 Làm quen với ma trận trong cơ học

Dao động tự do

Để làm quen với các khái niệm mới và ôn lại các phép toán ma trận, chúng ta sẽ sử dụng lại ví dụ về hệ dao động 2 bậc tự do đã trình bày trong tuần trước fig. 6.1.



Hình 6.1: 2 dofs system

Điều đầu tiên trong khảo sát một hệ thống dao động như trên hình đó là xác định các modes dao động riêng của hệ. Các modes dao động riêng của hệ là các modes mà ở đó tất cả các bậc tự do biến thiên theo thời gian với cùng tần số. Vì đây là một hệ thống tuyến tính nên nghiệm tổng quát (bất kỳ chuyển động nào của hai khối lượng) sẽ được thể hiện dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các nghiệm liên quan đến từng chế độ. Để xác định các modes dao động riêng, ta bắt đầu với việc khảo sát hệ trong chế độ dao động tự do. Có nghĩa là $c = 0$ và $f_1 = f_2 = 0$. Ta có phương trình cân bằng cho hệ bên trên.

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + 2ku_1 - ku_2 = 0 \\ m\ddot{u}_2 + 2ku_2 - ku_1 = 0 \end{cases} \tag{6.1}$$

Biểu diễn dưới dạng mà trận

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{u}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{O}} \tag{6.2}$$

Các bậc tự do dao động với cùng sự phụ thuộc theo thời gian nên chúng ta có:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{X}cos(\Omega t) \tag{6.3}$$

Thay vào PT eq. (6.2) ta có:

$$\mathbf{KX} - \Omega^2\mathbf{MX} = 0 \Leftrightarrow (\mathbf{K} - \mathbf{\Omega^2}\mathbf{M})\mathbf{X} = 0 \tag{6.4}$$

Đây là một hệ phương trình tuyến tính với vế trái bằng 0. Để có nghiệm khác không, ma trận $\mathbf{K} - \mathbf{\Omega^2 M}$ phải suy biến. Nghĩa là định thức của nó phải bằng 0:

$$det(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}) = 0 \tag{6.5}$$

Đây là bài toán tìm trị riêng và vector riêng cua ma trận. Ta có thể giải bài toán này bằng cách sử dụng các hàm của Python như **numpy.linalg.eig** hoặc **scipy.linalg.eig**. Tuy nhiên vì đây là một ma trận 2×2 nên ta có thể giải trực tiếp. Trị riêng (hay là tần số riêng) của ma trận này là nghiệm của phương trình bậc 2:

$$\Omega^2 = \Omega_1^2 = \frac{k}{m} \quad \text{va} \quad \Omega^2 = \Omega_2^2 = \frac{3k}{m} \tag{6.6}$$

Vector riêng của hệ là

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{và} \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

Nghiệm tổng quát của hệ là tổ hợp tuyến tính của hai modes này. Ta có thể viết lại nghiệm tổng quát của hệ như sau:

$$\mathbf{u} = \underbrace{(A_1\cos(\Omega_1 t) + B_1\sin(\Omega_1 t))\,\mathbf{X}_1}_{\text{Mode 1}} + \underbrace{(A_2\cos(\Omega_2 t) + B_2\sin(\Omega_2 t))\,\mathbf{X}_2}_{\text{Mode 2}} \tag{6.8}$$

Các hằng số A_1, B_1, A_2, B_2 được xác định từ các điều kiện ban đầu của hệ. Ví dụ nếu ta biết vận tốc và vị trí ban đầu của hai khối lượng thì ta có thể xác định được các hằng số này.

Dao động cưỡng bức - Không có giảm chấn

Xét trường hợp $f_1 = F_1\cos(\omega t)$ va $f_2 = F_2\cos(\omega t)$. Đặt $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}\cos(\omega t) = \mathbf{F}\cos(\omega t)$. Nghiệm của PT lúc này có dạng $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}\cos(\omega t) = \mathbf{U}\cos(\omega t)$. Thay vào PT eq. (6.2), ta có:

$$-\omega^2\mathbf{MU} + \mathbf{KU} = \mathbf{F} \Rightarrow \mathbf{U} = (-\omega^2\mathbf{M} + \mathbf{K})^{-1}\mathbf{F} \tag{6.9}$$

Ta tìm được giá trị của U_1 va U_2

$$U_1 = \frac{F_1(2k - m\omega^2) + F_2 k}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)} \quad \text{và} \quad U_2 = \frac{F_1 k + F_2(2k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)(3k - m\omega^2)} \tag{6.10}$$

Dao động cưỡng bức - có giảm chấn

Trường hợp hệ số giảm chấn $c \neq 0$, phương trình cân bằng được viết lại như sau:

$$\begin{cases} m\ddot{u}_1 + 2c\dot{u}_1 - c\dot{u}_2 + 2ku_1 - ku_2 = f1 \\ m\ddot{u}_2 + 2c\dot{u}_2 - c\dot{u}_1 + 2ku_2 - ku_1 = f2 \end{cases} \tag{6.11}$$

Dạng ma trận của phương trình này là:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\ddot{\mathbf{u}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{u}}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} \tag{6.12}$$

Để giải phương trình này, chúng ta sẽ viết nó về dạng số phức. Vector ngoại lực $\mathbf{f}$ lúc này sẽ được biểu diễn ở dạng phức $\mathbf{f} = \mathbf{F}e^{j\omega t}$. Nghiệm của phương trình sẽ có dạng $\mathbf{u} = \mathbf{U}e^{j\omega t}$.
Thay vào phương trình eq. (6.12) ta có (việc biến đổi để suy ra nghiệm dưới đây là một bài tập dành cho các bạn):

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{(2F_1 + F_2)\,k - F_1 m\omega^2 + jc\,(2F_1 + F_2)\,\omega}{(jc\omega + k - m\omega^2)\,(3jc\omega + 3k - m\omega^2)} \\ U_2 &= \frac{(F_1 + 2F_2)\,k - F_2 m\omega^2 + jc\,(F_1 + 2F_2)\,\omega}{(jc\omega + k - m\omega^2)\,(3jc\omega + 3k - m\omega^2)} \end{aligned} \tag{6.13}$$

Câu hỏi: chúng ta sẽ giải quyết bài toán như thế nào nếu f có dạng $\mathbf{f} = \mathbf{F}_1 \cos(\omega_1 t) + \mathbf{F}_2 \sin(\omega_2 t)$?

6.2 Phương pháp số trong mô phỏng

Phần này có mục đích giới thiệu một số phương pháp số thường được sử dụng trong mô phỏng vật lý (phương pháp sai phân hữu hạn và phương pháp phần tử hữu hạn). Mục đích của các phương pháp số là xấp xỉ nghiệm của các bài toán điều kiện biên mà trong đó việc giải trực tiếp phương trình vi phân là không thể. Một bài toán điều kiện biên thường được biểu diễn bằng một phương trình đạo hàm riêng và các điều kiện biên đi kèm. Phương trình Poisson 1D trong eq. (6.14) là một ví dụ của bài toán điều kiện biên. Bài toán này có thể giải một cách trực tiếp nếu hàm $f(x)$ là một hàm đơn giản và có thể tích phân. Tuy nhiên trong thực tế, một hàm như vậy không tồn tại nhiều. Vì vậy các phương pháp số đã được phát triển để giải quyết vấn đề này.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x) \quad x \in (0, L) \\ u(0) &= u_0 \quad \text{(điều kiện biên Dirichlet)} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(L) &= u'_L \quad \text{(điều kiện biên Neumann)} \end{aligned} \tag{6.14}$$

Trong phần còn lại, để đơn giản việc trình bày, chúng ta sẽ chọn $f(x) = x$, $u_0 = 2$ và $u'_L = 1$. Tập xác định của phương trình là $(0, 1)$ (eq. (6.15)). Điều này không làm mất đi tính tổng quát của các phương pháp số, bởi vì việc áp dụng các phương pháp là như nhau cho bất kỳ bài toán điều kiện biên nào.

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= x \quad x \in (0,1) \\ u(0) &= 2 \quad \text{(điều kiện biên Dirichlet)} \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1) &= 1 \quad \text{(điều kiện biên Neumann)} \end{aligned} \tag{6.15}$$

Với phương trình eq. (6.15), chúng ta có thể xác định được nghiệm chính xác của nó:

$$u(x) = \frac{-x^3 + 9x + 12}{6} \tag{6.16}$$

Các phương pháp số sẽ được áp dụng để giải eq. (6.15) và so sánh với nghiệm chính xác của nó (eq. (6.16)).

6.2.1 Phương trình vi phân

Trước khi tìm hiểu các phương pháp số chúng ta cần tìm hiểu một số các biểu diễn các phương trình vi phân, bởi vì với mỗi phương pháp được trình bày sẽ tiếp cận một dạng khác nhau của phương trình.

Phương trình dạng mạnh

Phương trình vi phân dạng mạnh là các phương trình mô tả các hiện tương vật lý mà trong đó nghiệm của phương trình thỏa mãn với mọi điểm trong miền xác định. Phương trình Poisson trong eq. (6.15) là một phương trình dạng mạnh.

Phương trình dạng yếu

Phương trình dạng yếu được biểu diễn dưới dạng tích phân của tích phương trình dạng mạnh với một hàm thử trên miền xác định. Ý tưởng là xấp xỉ nghiệm của phương trình dạng mạnh bằng một hàm đơn giản hơn mà việc xác định nó không yêu cầu giải trực tiếp bài toán điều kiện biên. Một trong nhưng phương pháp để biến đổi phương trình dạng mạnh về phương trình dạng yếu đó là phương pháp Ritz-Galerkin.
Chúng ta sẽ bắt đầu bằng việc xấp xỉ nghiệm u của phương trình eq. (6.15) bằng một nghiệm u^h. Nghiệm xấp xỉ này sẽ thỏa mãn điều kiện Dirichlet (ie. $u^h(0) = 2$). Vì đây là nghiệm xấp xỉ nên hiển nhiên rằng nghiệm này sẽ không thỏa mãn phương trình vi phân cũng như điều kiện biên Neumann. Vì vậy chúng ta có:

$$\begin{aligned} R_\Omega &= -\frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2} - x \neq 0 \quad x \in (0,1) \\ R_{\partial\Omega} &= \frac{\partial u^h}{\partial x}(1) - 1 \neq 0 \end{aligned} \tag{6.17}$$

Ý tưởng của phương pháp Ritz-Galerkin là nhân các phương trình trong eq. (6.17) với một hàm thử v và tích phân trên toàn miền bài toán để tìm nghiệm. Hàm thử này phải thỏa mãn điều kiện Dirichlet **đồng nhất** $v(0) = 0$. Vì vậy chúng ta có:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 v R_\Omega dx + v(1) R_{\partial\Omega} = 0 \\ \Rightarrow & \int_0^1 v \left(-\frac{\partial^2 u^h}{\partial x^2} - x \right) dx + v(1) \left(\frac{\partial u^h}{\partial x}(1) - 1 \right) = 0 \end{aligned} \tag{6.18}$$

Sử dụng tích phân từng phần để biến đổi, chúng ta có:

$$\int_0^1 \frac{\partial u^h}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx - v(1) - \int_0^1 vxdx = 0 \tag{6.19}$$

Phương trình eq. (6.19) được gọi là phương trình dạng yếu. Theo nguyên lý Bubnov-Galerkin, hàm thử v sẽ được chọn sao cho nó có cùng hàm nội suy với nghiệm xấp xỉ u^h. Việc xác định các hàm nội suy sẽ được trình bày trong phần phương pháp phần tử hữu hạn.

6.2.2 Phương pháp số

Phương pháp sai phân hữu hạn

Phương pháp sai phân hữu hạn là phương pháp xấp xỉ nghiệm trực tiếp từ phương trình dạng mạnh. Ý tưởng của phương pháp này là sử dụng chuỗi Taylor để xấp xỉ các đạo hàm và thay vào phương trình vi phân.

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 + \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_1)}{4!}h^4 + \ldots \\ f(x-h) &= f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2!}h^2 - \frac{f'''(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_2)}{4!}h^4 + \ldots \end{aligned} \tag{6.20}$$

Từ đây, chúng ta có các cách để xấp xỉ đạo hàm bậc nhất như sau:

$$\begin{aligned} f'(x) &\approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \text{sai phân tiến} \\ f'(x) &\approx \frac{f(x)-f(x-h)}{h} \quad \text{sai phân lùi} \\ f'(x) &\approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \quad \text{sai phân trung tâm} \end{aligned} \tag{6.21}$$

Chứng minh rằng sai số của sai phân trung tâm thì bé hơn sai phân tiến và sai phân lùi. Tương tự, ta có thể xấp xỉ đạo hàm bậc 2:

$$f''(x) \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \tag{6.22}$$

Áp dụng cho ví dụ của chúng ta. Giả sử ta chia miền $x \in (0, 1)$ thành $N = 3$ điểm lưới đều với khoảng cách giữa các điểm là $h = \frac{1}{N-1}$. Ta có thể xấp xỉ đạo hàm bậc 2 của hàm u tại điểm x_2 như sau:

$$-\frac{u_1 - 2u_2 + u_3}{h^2} = x_2 \tag{6.23}$$

Điều kiện biên Neumann được xấp xỉ bằng cách sử dụng sai phân lùi:

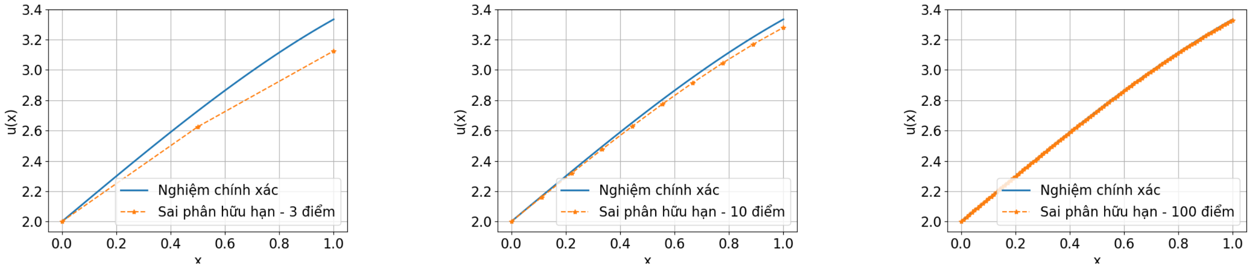
$$\frac{u_3 - u_2}{h} = 1 \tag{6.24}$$

Kết hợp 2 PT trên và điều kiện biên Dirichlet, ta có hệ phương trình:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/h^2 & -2/h^2 & 1/h^2 \\ 0 & -1/h^2 & 1/h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.25}$$

Giải phương trình tuyến tính trên ta sẽ thu được giá trị tại các nút. Kết quả của phương pháp này phụ thuộc vào độ mịn của lưới chia. Nếu lưới chia quá thô thì kết quả sẽ không chính xác.

Tuy nhiên nếu lưới chia quá mịn thì sẽ dẫn đến việc tính toán tốn thời gian và tài nguyên máy tính. Số lượng nút chia lưới sẽ ảnh hưởng đến độ chính xác của phương pháp này. Với 3 nút thì kết quả thu được có sai số khá lớn so với nghiệm chính xác. Tuy nhiên nếu tăng số lượng nút lên thì kết quả sẽ gần với nghiệm chính xác hơn (xem fig. 6.2).



(a) 3 nút (b) 10 nút (c) 100 nút

Hình 6.2: Nghiệm của PT Poisson bằng phương pháp sai phân hữu hạn với (a) 3 nút, (b) 10 nút, (c) 100 nút.

Phương pháp phần tử hữu hạn

Ý tưởng của phương pháp này là chia miền xác định thành các miền con Ω_e không giao nhau gọi là các phần tử (chia lưới). Các phần tử liên kết với nhau tại các nút đặt tại các đỉnh của phần tử. Đối với miền 1D thì phần tử là các đoạn thẳng có các nút ở 2 đầu. Miền 2D thì phần tử là các đa giác (thường là tam giác hoặc tứ giác với nút đặt tại các đỉnh).
Xét bài toán 1D, miền xác định được chia thành m miền con, số nút tương ứng là $n = m+1$,mỗi nút có tọa độ x_i, mỗi phần tử giới hạn bởi $\Omega_e = [x_i, x_{i+1}]$. Mỗi nút liên kết với 1 hàm dạng (hàm nội suy) $N_i(x)$. Hàm dạng thường là các hàm đa thức thỏa mãn tính chất $N_i(x_i) = 1$ và $N_i(x_j) = 0$ với $j \neq i$.
Nghiệm xấp xỉ theo phương pháp phần tử hữu hạn lúc này sẽ được biểu diễn bởi

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x)u_i = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1(x) \dots N_n(x) \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(x)} \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} \tag{6.26}$$

Vector $\mathbf{u}$ chứa các phần tử là giá trị của $u^h(x)$ tại các nút và được gọi là bậc tự do của bài toán. Chia lưới càng mịn thì sẽ dẫn đến số lượng bậc tự do sẽ tăng lên càng nhiều nhưng kết quả sẽ càng chính xác.
Theo nguyên lý Bubnov-Galerkin, hàm thử v sẽ được chọn sao cho nó có cùng hàm nội suy với nghiệm xấp xỉ u^h. Vì vậy ta có:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x)v_i = \mathbf{N}(x)\mathbf{v} \tag{6.27}$$

Thay các xấp xỉ này vào eq. (6.19), ta có:

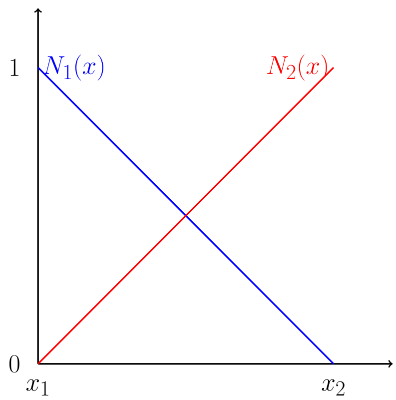
$$\mathbf{v}^T \left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} dx \right) \mathbf{u} - \mathbf{v}^T [\mathbf{N}(1)]^T - \mathbf{v}^T \int_0^1 [\mathbf{N}(x)]^T x dx = 0 \tag{6.28}$$

Rút gọn PT trên, ta có:

$$\underbrace{\left(\int_0^1 \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} dx\right)}_{\mathbf{K}} \mathbf{u} = \underbrace{[\mathbf{N}(1)]^T + \int_0^1 [\mathbf{N}(x)]^T x dx}_{\mathbf{F}} \tag{6.29}$$

Giải PT eq. (6.29), chúng ta sẽ tìm được giá trị của vector bac tu do. $\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F}$.
Việc còn lại bây giờ là xác định các hàm dạng $N_i(x)$ và ma trận **K**, **F**. Các hàm dạng này sẽ được xác định dựa trên hình dạng của phần tử. Đối với miền 1D, các phần tử là các đoạn thẳng nối các nút với nhau. Hàm dạng sẽ là các hàm nội suy tuyến tính. Hàm dạng tuyến tính 1D được biểu diễn như sau (eq. (6.30) and fig. 6.3):

$$\begin{aligned} N_1(x) &= \frac{1}{x_2 - x_1}(x_2 - x) \\ N_2(x) &= \frac{1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \end{aligned} \tag{6.30}$$



Hình 6.3: Ham noi suy 1D

Chúng ta có thể thấy rằng các hàm dạng là như nhau đối với các phần tử có hình dạng giống nhau. Đây là điểm đặc biệt của phương pháp phần tử hữu hạn. Giả sử miền tích phân được chia thành 100 phần tử với 101 nút thì chúng ta không cần phải tích phân để tìm từng phần tử trong ma trận **K**, mà thay vào đó chúng ta xác định ma trận $\mathbf{K}_e$ của từng phần tử và **lắp ráp** chúng vào ma trận **K**. Ví dụ sau đây sẽ minh họa cách lắp ráp ma trận **K** từ ma trận $\mathbf{K}_e$ của từng phần tử.
Quay lại với phương trình Poisson 1D, chúng ta sẽ xác định ma trận $\mathbf{K}_e$ của một phần tử giới hạn bởi $[x_1, x_2]$. Đặt $L_e = x_2 - x_1$, ta có:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_e &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right)^T \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix} dx = \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} \frac{-1}{L_e} \\ \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-1}{L_e} & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e^2} & \frac{-1}{L_e^2} \\ \frac{-1}{L_e^2} & \frac{1}{L_e^2} \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_e} & \frac{-1}{L_e} \\ \frac{-1}{L_e} & \frac{1}{L_e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{6.31}$$

Số hạng $\int_0^1 [\mathbf{N}(x)]^T x dx$ cũng được tính bằng cách tương tự:

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}[\mathbf{N}(x)]^T x dx &= \int_{x_1}^{x_2}\begin{bmatrix}N_1\\N_2\end{bmatrix} x dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2}\begin{bmatrix}\frac{x_2-x}{L_e}\\\frac{x-x_1}{L_e}\end{bmatrix} x dx = \begin{bmatrix}\frac{x_2^3-3x_2x_1^2+2x_1^3}{6L_e}\\\frac{2x_2^3-3x_1x_2^2+x_1^3}{6L_e}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}F_1\\F_2\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{6.32}$$

Chúng ta đã xác định được ma trận $\mathbf{K}_e$ và vector $\mathbf{F}_e$ cho một phần tử. Bây giờ chúng ta sẽ lắp ráp chúng để có ma trận toàn cục $\mathbf{K}$ và vector $\mathbf{F}$.
Giả sử miền tích phân được chia thành 2 phần tử $e1$ và $e2$ với các nút lần lượt là $x_1 = 0$, $x_2 = 0.5$, $x_3 = 1$. Vector bậc tự do của chúng ta sẽ là $\mathbf{u} = [u_1\ u_2\ u_3]^T$. Trong đó nút 2 sẽ là điểm kết nối giữa 2 phần tử, vì vậy $u_2 = u_2^{e1} + u_2^{e2}$. Ta có:

$$\mathbf{K}_{e1}\mathbf{u}_{e1} = \begin{bmatrix}K_{11}^{e1} & K_{12}^{e1}\\K_{21}^{e1} & K_{22}^{e1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2^{e1}\end{bmatrix} \quad \text{va} \quad \mathbf{K}_{e2}\mathbf{u}_{e2} = \begin{bmatrix}K_{22}^{e2} & K_{23}^{e2}\\K_{32}^{e2} & K_{33}^{e2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2^{e2}\\u_3\end{bmatrix} \tag{6.33}$$

Kết hợp 2 PT trên với lưu ý rằng $u_2 = u_2^{e1} + u_2^{e2}$, ta có:

$$\mathbf{Ku} = \begin{bmatrix}K_{11}^{e1} & K_{12}^{e1} & 0\\K_{21}^{e1} & K_{22}^{e1}+K_{22}^{e2} & K_{23}^{e2}\\0 & K_{32}^{e2} & K_{33}^{e2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} \tag{6.34}$$

làm tương tự với tích phân $\int_0^1[\mathbf{N}(x)]^T x dx$, ta có:

$$\int_0^1[\mathbf{N}(x)]^T x dx = \begin{bmatrix}F_1^{e1}\\F_2^{e1}+F_2^{e2}\\F_3^{e2}\end{bmatrix} \tag{6.35}$$

Thay vào phương trình eq. (6.29), ta có:

$$\begin{bmatrix}K_{11}^{e1} & K_{12}^{e1} & 0\\K_{21}^{e1} & K_{22}^{e1}+K_{22}^{e2} & K_{23}^{e2}\\0 & K_{32}^{e2} & K_{33}^{e2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}F_1^{e1}\\F_2^{e1}+F_2^{e2}\\F_3^{e2}\end{bmatrix} \tag{6.36}$$

Thay số cụ thể vào, ta có:

$$\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\-2 & 2+2 & -2\\0 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/24\\1/12+1/6\\5/24+1\end{bmatrix} \tag{6.37}$$

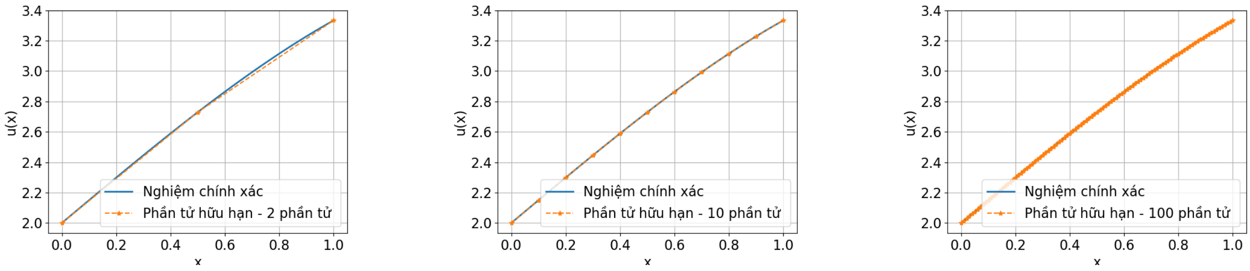
Phương trình tuyến tính trên không thể giải được vì định thức của ma trận $\mathbf{K}$ là bằng 0. Điều này xảy ra do điều kiện biên Dirichlet chưa được. Để giải quyết vấn đề này, chúng ta cần loại bỏ một bậc tự do bằng cách áp dụng điều kiện biên Dirichlet ban đầu.

$$\begin{bmatrix}-2 & 4 & -2\\0 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\u_2\\u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/4\\29/24\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}4 & -2\\-2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\u_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1/4\\29/24\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-2\\0\end{bmatrix} \tag{6.38}$$

Giải phương trình tìm u_2 va u_3. Chúng ta thu được:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix}2\\131/48\\10/3\end{bmatrix} \tag{6.39}$$

Dưới đây là các kết quả thu được với số phần tử thay đổi fig. 6.4:



(a) (b) (c)

Hình 6.4: Nghiệm của PT Poisson bằng phương pháp phần tử hữu hạn: (a) 2 phần tử, (b) 10 phần tử, (c) 100 phần tử.

Cau hoi: Đưa ra một số nhận xét về các phương pháp đã trình bày? (ưu điểm, nhược điểm, độ chính xác, xem xét đến khả năng của mỗi phương pháp trong các miền 2D, 3D, etc.)

6.2.3 Tích phân số theo thời gian

Phương trình Poisson khảo sát bên trên là một phương trình không phụ thuộc vào thời gian. Câu hỏi đặt ra là nếu với những bài toán có phụ thuộc vào thời gian thì các phương pháp bên trên có giải được không. Câu trả lời là hoàn toàn có thể. Ý tưởng chung là miền tích phân thời gian cũng sẽ được rời rạc hóa thành các bước thời gian $t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_n$ với $\Delta t = (t_n - t_0)/n$. Với phương pháp sai phân hữu hạn chúng ta sẽ xấp xỉ đạo hàm theo thời gian bằng các sai phân. Lúc này ngoài việc giải phương trình tuyến tính để tìm giá trị tại các nút thì chúng ta còn cần sử dụng các vòng lặp để tính giá trị tại các bước thời gian tiếp theo (VD: phương pháp Euler, phương pháp Crank-Nicolson, etc.). Phần này sẽ không được trình bày trong bài viết này, tuy nhiên nếu bạn muốn tìm hiểu thêm thì có thể tham khảo các tài liệu về phương pháp sai phân hữu hạn theo thời gian.

Đối với phương pháp phần tử hữu hạn ngoài ma trận $\mathbf{K}$ và vector $\mathbf{F}$ bên trên, chúng ta còn cần một ma trận $\mathbf{M}$ để mô tả khối lượng của hệ thống. Phương trình phần tử hữu hạn tổng quát lúc này sẽ có dạng:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \tag{6.40}$$

Chúng ta dễ dàng nhận thấy rằng phương trình này có dạng tương tự như phương trình của bài toán dao động điều hòa 2 bậc tự do mà chúng ta đã học ở trên !!!.

Một trong những phương pháp số để tính toán phương trình dạng này là phương pháp Runge-Kutta. Phương pháp này là một phương pháp lặp để giải phương trình đạo hàm bậc nhất.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{u}), \quad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0 \tag{6.41}$$

Trên python, phương pháp này có sẵn trong thư viện **scipy.integrate**. Để sử dụng chúng ta dùng hàm **odeint**. Trong tài liệu này chúng ta sẽ không đi sâu vào phương pháp Runge-Kutta, tuy nhiên bạn có thể tham khảo thêm trong các tài liệu về phương pháp số hoặc tài liệu của thư viện **scipy.integrate**. Thay vào đó chúng ta sẽ tìm hiểu về cách áp dụng phương pháp này để giải phương trình phần tử hữu hạn.

Một điểm cần lưu ý là phương pháp này giải phương trình đạo hàm bậc 1 theo thời gian. Còn phương trình của chúng ta là phương trình đạo hàm bậc 2 theo thời gian. Để giải quyết vấn đề này chúng ta cần thực hiện một thao tác đổi biến.

Bước đầu tiên là biến đổi phương trình eq. (6.40) về dạng phương trình đạo hàm bậc nhất. Để làm được điều này, chúng ta sẽ định nghĩa các biến mới: $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}$ và $\mathbf{u}_2 = \dot{\mathbf{u}}$. Do đó ta có: $\dot{\mathbf{u}}_1 = \dot{\mathbf{u}}$ va $\dot{\mathbf{u}}_2 = \ddot{\mathbf{u}}$.
Thay các biến mới vào phương trình eq. (6.40), ta có:

$$
\begin{aligned}
&\begin{cases} \dot{\mathbf{u}}_1 &= \mathbf{u}_2 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 &= \mathbf{M}^{-1}\left(-\mathbf{K}\mathbf{u}_1 - \mathbf{C}\mathbf{u}_2 + \mathbf{F}\right) \end{cases} \\
\Rightarrow &\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_1 \\ \dot{\mathbf{u}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F} \end{bmatrix} \\
\Leftrightarrow &\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{B}
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

Từ đây chúng ta có thể sử dụng hàm **odeint** để giải phương trình đạo hàm bậc nhất này và tìm các giá trị của **U** theo từng bước thời gian.
Phương pháp Runge-Kutta là một phương pháp mạnh mẽ và linh hoạt để tính tích phân số. Tuy nhiên nó có một nhược điểm khi áp dụng cho phương trình phần tử hữu hạn. Đó là việc áp dụng phương pháp Runge-Kutta sẽ làm tăng bậc tự do của phương trình. Trong phương trình phần tử hữu hạn, số lượng bậc tự do phụ thuộc vào số lượng phần tử và có thể lên đến hàng nghìn hoặc hàng triệu. Vì vậy, Runge-Kutta không phải là một phương pháp tối ưu trong trường hợp này.
Thay vào đó, chúng ta sẽ sử dụng phương pháp Newmark để giải phương trình phần tử hữu hạn. Phương pháp Newmark là một phương pháp tích phân số theo thời gian được sử dụng rộng rãi trong cơ học tính toán. Nó cho phép tính toán các giá trị của **u** và $\dot{\mathbf{u}}$ tại các bước thời gian tiếp theo dựa trên các giá trị tại bước thời gian trước đó. Nguyên lý của phương pháp này là xấp xỉ các đạo hàm bậc nhất và bậc 2 của nghiệm theo thời gian như sau:

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{u}}_{n+1} &\approx \dot{\mathbf{u}}_n + (1-\gamma)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_n + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \\
\mathbf{u}_{n+1} &\approx \mathbf{u}_n + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2\ddot{\mathbf{u}}_n + \beta(\Delta t)^2\ddot{\mathbf{u}}_{n+1}
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

(γ, β) là các tham số Newmark. Một vài giá trị thường được sử dụng là $(1/2, 1/4)$, $(1/2, 1/6)$, $(1/2, 0)$.
Thay PT eq. (6.43) vào eq. (6.40), ta có:

$$
\begin{aligned}
\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} = \mathbf{S}^{-1}\left[\mathbf{F}_{n+1} - \left[\mathbf{C}\left(\dot{\mathbf{u}}_n\right.\right.\right. &+ (1-\gamma)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_n) \\
&\left.\left. - \mathbf{K}\left(\mathbf{u}_n + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2\ddot{\mathbf{u}}_n\right)\right]\right]
\end{aligned}
\tag{6.44}
$$

Với $\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{C}\gamma\Delta t + \mathbf{K}\beta(\Delta t)^2$.
Để thực hiện tích phân số chúng ta làm như sau. Ở thời điểm ban đầu $t_0 = 0$, chúng ta đã biết $\mathbf{u}_0$ và $\dot{\mathbf{u}}_0$. Chúng ta có thể tính được $\ddot{\mathbf{u}}_0$ từ phương trình eq. (6.40). Từ đó, chúng ta tìm được $\ddot{\mathbf{u}}_1$. $\mathbf{u}_1$ và $\dot{\mathbf{u}}_1$ được suy ra từ eq. (6.43). Tiếp tục như vậy, chúng ta sẽ tìm được tất cả các giá trị tại thời điểm tiếp theo.

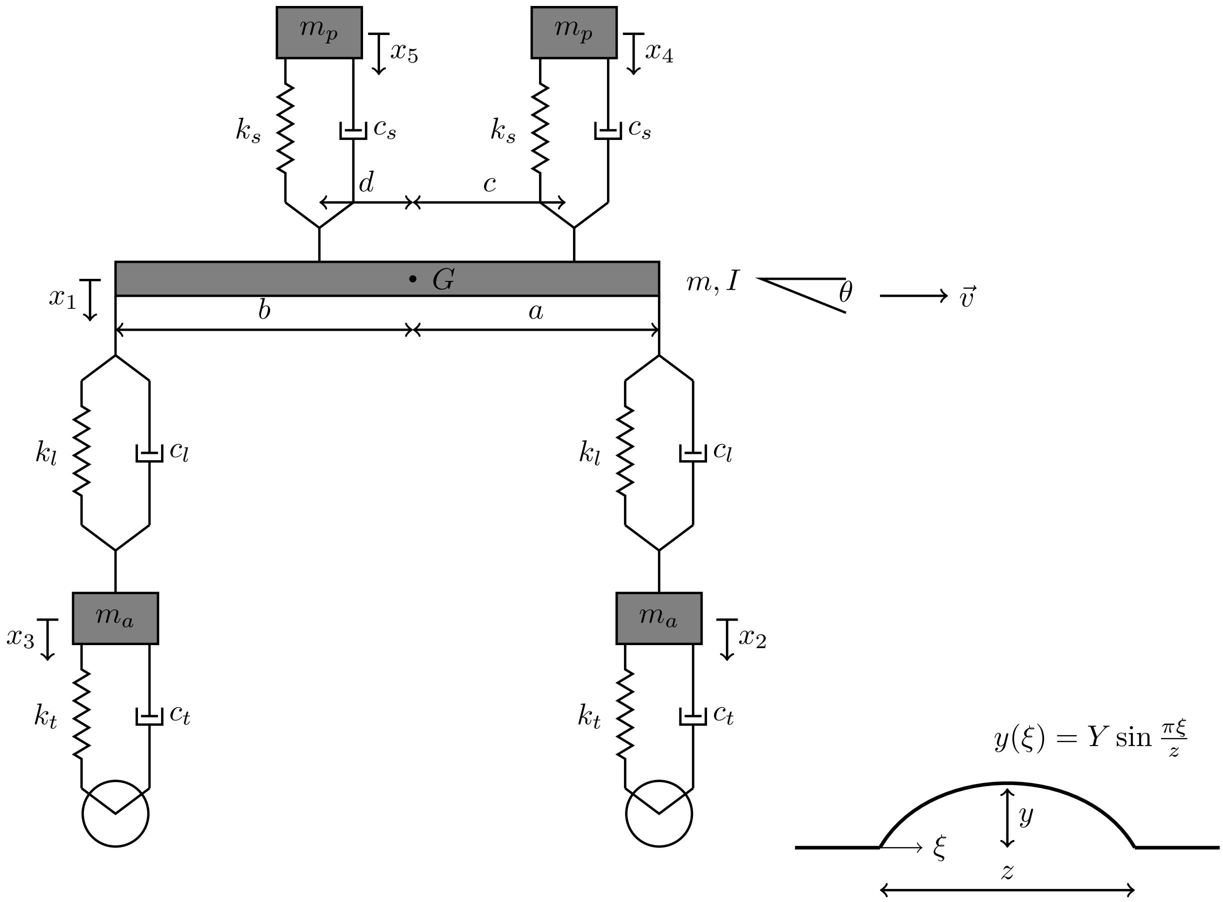
6.3 Bài tập

Bài 1: Sử dụng lại phương trình Poisson bên trên. Khảo sát các phương pháp số bằng cách thay đổi số nút và số phần tử của lưới để tìm ra ảnh hưởng của chúng đến độ chính xác. Ứng với mỗi phương pháp, xác định số nút và số phần tử tối uu để đạt được độ chính xác mong muốn. Vẽ đồ thị thể hiện sự phụ thuộc của sai số vào số nút và số phần tử.

Bài 2: Giải phương trình sau bằng các phương pháp số đã trình bày

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0 \quad & x \in (0,1) \\ u(0) = 1 \quad & (\text{điều kiện biên Dirichlet}) \end{aligned} \tag{6.45}$$

Bài 3: Hệ dao động 6 bậc tự do Hình dưới là một mô hình tối giản của một ô tô. Hệ này có 6 bậc tư do như trên hình. Mục đích của bài tập này là mô phỏng chuyển động của các bộ phận khi ô tô chuyển động và gặp một vật cản trên đường fig. 6.5.



Hình 6.5: Hệ dao động 6 bậc tự do

Cho các giá trị sau:

$$\begin{array}{ccc} m = 1000\,\mathrm{kg} & k_l = 120\,000\,\mathrm{N\,m^{-1}} & a = 1.8\,\mathrm{m} \\ m_a = 150\,\mathrm{kg} & k_t = 80\,000\,\mathrm{N\,m^{-1}} & b = 2.0\,\mathrm{m} \\ m_p = 60\,\mathrm{kg} & k_s = 200\,000\,\mathrm{N\,m^{-1}} & c = 0.6\,\mathrm{m} \\ I = 360\,\mathrm{kg\,m^2} & v = 40\,\mathrm{m\,s^{-1}} & d = 0.4\,\mathrm{m} \end{array}$$

Vector bậc tự do được biễu diễn như sau: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \theta & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T$

a) Chứng minh rằng ma trận độ cứng, ma trận giảm chấn và ma trận khối lượng của hệ dao động này có dạng:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (a^2+b^2)\,k_l + (c^2+d^2)\,k_s & (a-b)k_l + (c-d)k_s & -ak_l & bk_l & -ck_s & dk_s \\ (a-b)k_l + (c-d)k_s & 2\,(k_l+k_s) & -k_l & -k_l & -k_s & -k_s \\ -ak_l & -k_l & k_l+k_t & 0 & 0 & 0 \\ bk_l & -k_l & 0 & k_l+k_t & 0 & 0 \\ -ck_s & -k_s & 0 & 0 & -ck_s & 0 \\ dk_s & -k_s & 0 & 0 & 0 & -k_s \end{bmatrix} \tag{6.46}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} (a^2+b^2)\,c_l + (c^2+d^2)\,c_s & (a-b)c_l + (c-d)c_s & -ac_l & bc_l & -cc_s & dc_s \\ (a-b)c_l + (c-d)c_s & 2\,(c_l+c_s) & -c_l & -c_l & -c_s & -c_s \\ -ac_l & -c_l & c_l+c_t & 0 & 0 & 0 \\ bc_l & -c_l & 0 & c_l+c_t & 0 & 0 \\ -cc_s & -c_s & 0 & 0 & -cc_s & 0 \\ dc_s & -c_s & 0 & 0 & 0 & -c_s \end{bmatrix} \tag{6.47}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_p \end{bmatrix} \tag{6.48}$$

b) Xác định các mode dao động riêng của hệ. Tính tần số dao động riêng của hệ.
c) Áp dụng phương pháp tích phân số để mô tả chuyển động của hệ. Chúng ta lấy giá trị của ma trận giảm chấn $\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ với $\alpha = 0$ và $\beta = 5 * 10^{-4}$.

Tài liệu tham khảo

[1] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences. Johns Hopkins University Press, 2013. ISBN: 9781421407944. URL: https://books.google.fr/books?id=X5YfsuCWpxMC.

[2] H.P. Langtangen and S. Linge. *Finite Difference Computing with PDEs: A Modern Software Approach*. Texts in Computational Science and Engineering. Springer International Publishing, 2017. ISBN: 9783319554563. URL: https://books.google.fr/books?id=NNpCDwAAQBAJ.

[3] Anders Logg, Garth N. Wells, and Johan Hake. "DOLFIN: a C++/Python Finite Element Library". In: *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*. Ed. by Anders Logg, Kent-Andre Mardal, and Garth N. Wells. Vol. 84. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. Springer, 2012. Chap. 10.

[4] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, and J.Z. Zhu. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2005. ISBN: 9780080472775. URL: https://books.google.fr/books?id=YocoaH8lnx8C.

Tuần 7

Mở Đầu Về Giải Tích Vector & Các Định Luật Bảo Toàn

Các định luật bảo toàn có vai trò quan trọng trong vật lý. Mỗi một định luật đều gắn với một đại lượng mang tính đặc trưng cho trạng thái của một hệ. Đồng thời, chương này cũng giới thiệu một mảng toán quan trọng là giải tích vector.

7.1 Động lực học hệ chất điểm

7.1.1 Hệ chất điểm

7.1.2 Động lượng

7.1.3 Momen động lượng

7.1.4 Sự bảo toàn động lượng và momen động lượng

7.2 Giải tích vector

7.3 Về lực hấp dẫn

Tuần 8

Năng Lượng

Tuần 9

Nhập Môn Cơ Học Giải Tích

Thống nhất các định luật để đưa về một quy luật chung cơ bản nhất là khát vọng của các nhà vật lý. Các lý thuyết về nguyên lý tác dụng tối thiểu, cơ học Lagrange và cơ học Hamilton được xem là những lý thuyết tiềm năng, cho phép mô tả các định luật về cơ học, thuyết tương đối, trường điện từ, cơ học lượng tử, v.v.
Trong giới hạn của cơ học cổ điển, các lý thuyết này có thể được xem là tương đương với cơ học Newton. Tuy nhiên, chúng có những ưu điểm riêng biệt, đặc biệt là trong việc giải quyết các bài toán liên quan đến chuyển động của hệ nhiều vật thể với hệ thống lực liên kết phức tạp.

9.1 Nguyên lý tác dụng tối thiểu

Theo nguyên lý tác dụng tối thiểu, các hệ vật lý luôn tuân theo một quy luật có hàm tác dụng S là cực tiểu.
Trên thực tế, ta có thể hiểu nguyên lý này là một hướng phát triển lý thuyết. Nói theo cách khác, nguyên lý này không phải là một định luật vật lý, mà là một phương pháp để xây dựng các định luật vật lý. Trong trường hợp một định luật vật lý mới khiến cho nguyên lý này không còn phù hợp, các nhà vật lý sẽ xem xét và hiệu chỉnh lại hàm tác dụng S để nó phù hợp với định luật mới.
Sự tiện lợi của nguyên lý biến phân và phương trình Euler-Lagrange là một động lực lớn để nguyên lý tác dụng tối thiểu tiếp tục được duy trì và phát triển trong quá trình xây dựng các lý thuyết vật lý mới.

9.1.1 Nguyên lý biến phân

9.1.2 Phương trình Euler

Xét một phiếm hàm S phụ thuộc vào một hàm số $\mathbf{q}(t)$ và đạo hàm theo biến t của nó $\dot{\mathbf{q}}$ với điều kiện biên xác định tại t_1 và t_2 theo biểu thức

$$S\left[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} L\left[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t\right] \mathrm{d}t, \tag{9.1}$$

trong đó $L\left[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), t\right]$ là một hàm phụ thuộc vào hàm số $\mathbf{q}(t)$, đạo hàm của nó $\dot{\mathbf{q}}(t)$ và biến thời gian t, được gọi là hàm Lagrange.
Với điều kiện biên xác định tại t_1 và t_2, việc hàm tác dụng S đạt cực tiểu phụ thuộc vào dạng hàm $\mathbf{q}(t)$. Lấy biến phân của hàm tác dụng S, ta có

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} \right) \mathrm{d}t. \tag{9.2}$$

Áp dụng định lý Leibniz cho biến phân $\delta\dot{\mathbf{q}} = \mathrm{d}\,(\delta\mathbf{q})\,\mathrm{d}t$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta\mathbf{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\mathbf{q}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\delta\mathbf{q}. \tag{9.3}$$

Thế vào phương trình (9.2), ta có

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right)\delta\mathbf{q}\mathrm{d}t + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\mathbf{q}\right]\Big|_{t_1}^{t_2}. \tag{9.4}$$

Vì $\delta S = 0$ với mọi hàm $\delta\mathbf{q}$ đạt điều kiện biên xác định tại t_1 và t_2, nên ta có

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = 0. \tag{9.5}$$

Phương trình (9.5) được gọi là phương trình Euler, hay phương trình Euler-Lagrange, Lagrange loại 2 (đối với cơ học).
Như vậy, phiếm hàm S đạt cực tiểu khi và chỉ khi hàm số $\mathbf{q}(t)$ thỏa mãn phương trình Euler-Lagrange (9.5).

9.1.3 Phương trình tích phân Euler

Xét hàm Lagrange L phụ thuộc vào một hàm số $\mathbf{q}(t)$, đạo hàm theo biến t của nó $\dot{\mathbf{q}}(t)$ và biến t, đạo hàm toàn phần của hàm Lagrange theo biến t là

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{q}}}{\mathrm{d}t}. \tag{9.6}$$

Mặt khác

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \frac{\mathrm{d}\dot{\mathbf{q}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right). \tag{9.7}$$

Kết hợp hai biểu thức trên, ta có

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial t} - \dot{\mathbf{q}}\left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right]. \tag{9.8}$$

Từ phương trình Euler-Lagrange (9.5), thu gọn biểu thức trên, ta có

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} - \frac{\partial L}{\partial t}. \tag{9.9}$$

hay

$$\frac{\partial L}{\partial t} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L - \dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) = 0. \tag{9.10}$$

Trong trường hợp hàm Lagrange không phụ thuộc vào biến thời gian t, tức là $\partial L/\partial t = 0$, ta tìm được một đại lượng bảo toàn

$$H = L - \dot{\mathbf{q}}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \tag{9.11}$$

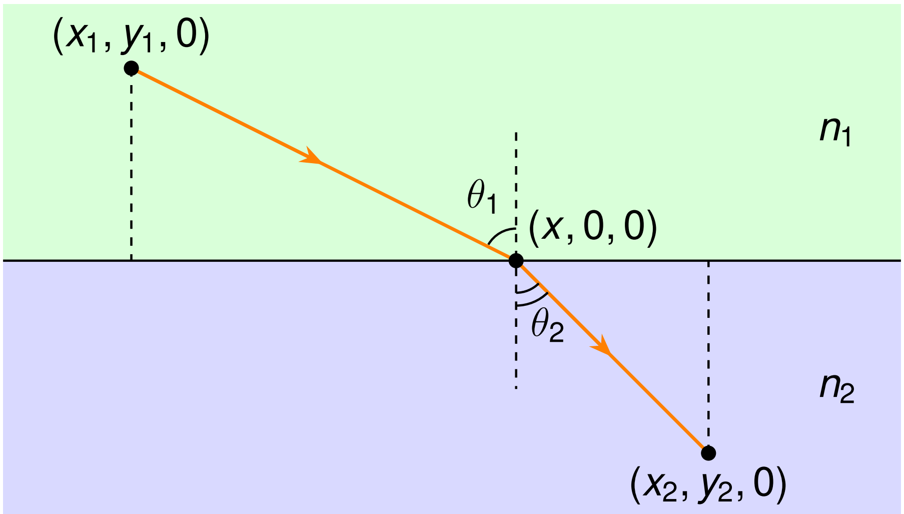
Đại lượng này được gọi là tích phân Euler, hay trong cơ học giải tích là hàm Hamilton của hệ.

9.1.4 Ứng dụng phương trình Euler: Nguyên lý Fermat trong quang học

Nguyên lý Fermat trong quang học phát biểu rằng ánh sáng sẽ đi theo đường đi có thời gian truyền ánh sáng ngắn nhất giữa hai điểm. Để mô tả nguyên lý này bằng phương trình Euler, ta cần xác định hàm Lagrange cho hệ thống.
Giả sử ánh sáng truyền trong môi trường có chiết suất n, thì thời gian truyền ánh sáng từ điểm A đến điểm B được tính bằng

$$t = \int_A^B \frac{1}{cn} \mathrm{d}s, \tag{9.12}$$

trong đó c là tốc độ ánh sáng trong chân không và $\mathrm{d}s$ là độ dài vi phân của đường đi ánh sáng.
Ví dụ 9.1: Định luật Snell. Xét một tia sáng truyền qua một mặt phẳng từ điểm A đến điểm B với góc tới θ_1 và góc khúc xạ θ_2. Chiết suất của môi trường trước mặt phẳng là n_1 và sau mặt phẳng là n_2.



Hình 9.1: Tia sáng truyền qua hai môi trường có chiết suất khác nhau.

Chứng minh rằng tia sáng đi theo đường đi có thời gian truyền ánh sáng ngắn nhất giữa hai điểm A và B theo định luật Snell:

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2. \tag{9.13}$$

Giải:
Thời gian truyền ánh sáng từ điểm A đến điểm B được tính bằng

$$t = \frac{1}{c}\int_A^B n(x,y,z)\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2}\,\mathrm{d}y. \tag{9.14}$$

Hay cụ thể trong bài toán này

$$t = \frac{1}{c}\left[\int_{y_1}^0 n_1\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2}\mathrm{d}y + \int_0^{-y_2} n_2\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2}\mathrm{d}y\right]. \tag{9.15}$$

Do biểu thức này không phụ thuộc tường minh vào x và z mà chỉ phụ thuộc vào đạo hàm bậc nhất của chúng theo y là x' và z', áp dụng phương trình Euler, ta có

$$0 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[n_1\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}} + n_2\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}}\right] = 0. \tag{9.16}$$

Dựa vào các công thức hình học lượng giác, ta biết rằng $\sin(\theta_1) = \dfrac{x'}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}}$ với tại môi trường n_1 và $\sin(\theta_2) = \dfrac{z'}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}}$ tại môi trường n_2. Do đó, ta có

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2\right] = 0 \Rightarrow n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2 = \text{const.} \tag{9.17}$$

Ta nhớ rằng, tại $n_1 = n_2$ thì tia sáng truyền thẳng, tức là $\theta_1 = \theta_2$, nên hằng số ở vế phải của biểu thức phải bằng 0. Do đó, ta có

$$n_1\sin\theta_1 = n_2\sin\theta_2. \tag{9.18}$$

Đây chính là biểu thức của định luật khúc xạ Snell, mô tả sự khúc xạ của tia sáng khi truyền qua hai môi trường có chiết suất khác nhau.
Tổng quát hơn, với một môi trường có chiết suất n_y biến đổi liên tục theo tọa độ y, ta có thể viết lại hàm Lagrange cho thời gian truyền ánh sáng như sau

$$L = n(y)\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)^2}. \tag{9.19}$$

Áp dụng phương trình Euler-Lagrange, ta có

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right) = 0. \tag{9.20}$$

hay

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[n(y)\frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+z'^2}}\right] = 0 \Rightarrow n(y)\sin\theta = \text{const.} \tag{9.21}$$

Ví dụ 9.2: Chiết suất biến đổi cầu. Một môi trường có chiết suất đối xứng cầu biến đổi theo bán kính $n(r)$. Chứng minh rằng quỹ đạo của tia sáng tuân theo phương trình

$$n(r)r\sin(i) = \text{const.} \tag{9.22}$$

với i là góc tạo bởi tia tới và đường bán kính tại vị trí cách tâm r.

9.1.5 Ứng dụng phương trình Euler: Các hệ cân bằng tĩnh tại vị trí có thế năng cực tiểu

Ta biết rằng, khi một hệ cơ học cân bằng tĩnh, thế năng của hệ đạt cực tiểu. Ở các cơ hệ chứa các phần tử phân bố theo tọa độ, ta thường quan sát thấy thế năng được viết dưới dạng một phiếm hàm tích phân phụ thuộc vào hàm phân bố của các phần tử trong hệ. Tức là

$$U = \int L\mathrm{d}x, \tag{9.23}$$

trong đó L là hàm Lagrange phụ thuộc vào hàm phân bố của các phần tử trong hệ và các đạo hàm của nó theo biến x.
Ví dụ 9.3: Catenary. Xét một dây treo giữa hai điểm A và B với chiều dài dây là L và khoảng cách giữa hai điểm là d. Chứng minh rằng hình dạng của dây treo là một đường cong catenary, tức là đường cong có phương trình

$$y = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right), \tag{9.24}$$

trong đó a là một hằng số phụ thuộc vào chiều dài dây và khoảng cách giữa hai điểm.
Ví dụ 9.4: Mặt bong bóng (TST 2012)

9.2 Cơ học Lagrange

9.2.1 Nguyên lý D'Alembert về công ảo

9.2.2 Động lượng suy rộng

9.2.3 Giải phương trình chuyển động bằng phương pháp Runge-Kutta 4

9.2.4 Tính toán lực bị động dựa trên phương trình Lagrange loại 2

9.3 Định lý Noether

9.4 Các lý thuyết cơ học giải tích khác

9.4.1 Cơ học Hamilton

9.4.2 Nguyên lý Gauss về liên kết tối thiểu

9.4.3 Phương trình Appell cho cơ hệ phi Holonom

9.5 Bài tập

Bài 9.1: Xét một hàm tác dụng S phụ thuộc vào một hàm số $\mathbf{q}(t)$ và các đạo hàm theo biến t của nó $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\ddot{\mathbf{q}}(t)$, ..., $\mathbf{q}^{(n)}(t)$ với điều kiện biên xác định tại t_1 và t_2 theo biểu thức

$$S\left[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ldots, \mathbf{q}^{(n)}(t)\right] = \int_{t_1}^{t_2} L\left[\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \ldots, \mathbf{q}^{(n)}(t), t\right] \mathrm{d}t, \tag{9.25}$$

chứng minh rằng hàm tác dụng S đạt cực tiểu khi và chỉ khi hàm số $\mathbf{q}(t)$ thỏa mãn phương trình Euler-Lagrange tổng quát

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{\mathbf{q}}}\right) - \cdots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^{(n)}}\right) = 0. \tag{9.26}$$

Bài 9.2: Xét một cơ hệ có hàm Lagrange $L(q, \ddot{q}, t)$ có dạng

$$L = -\frac{1}{2}mq\ddot{q} - \frac{1}{2}kq^2, \tag{9.27}$$

Xác định phương trình chuyển động của cơ hệ này bằng phương pháp Euler-Lagrange.
Bài 9.3: (Bài 2 Rudolf Ortvay Competition in Physics 2022) Giải phương trình quỹ đạo của một hệ có hàm Lagrange

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}) = x^2y^2\dot{z}^2 + \frac{x^2\dot{y}^2}{1-y^2} + \dot{x}^2. \tag{9.28}$$

Liệu có hệ vật lý nào được mô tả bởi hàm Lagrange như trên không?

9.6 Lời giải

Tài liệu tham khảo

[1] Douglas Cline. *Variational principles in classical mechanics*. University of Rochester River Campus Librarie, 2017.

[2] Nguyễn Văn Đạo. "Cơ học giải tích". In: *NXB Đại học quốc gia, Hà nội* (2002).

[3] Aleksandr Solomonovich Kompaneyets. *Theoretical physics*. Courier Corporation, 2013.

[4] David Morin. *Introduction to classical mechanics: with problems and solutions*. Cambridge University Press, 2008.

Tuần 10

Tính toán trong cơ học giải tích

Qua các phần trước, người đọc đã hoàn toàn có đầy đủ các công cụ để giải bất cứ một bài toán cơ học nào. Với các định nghĩa về liên kết cơ học và các công cụ tính toán mạnh mẽ, ở chương này, chúng ta sẽ phân tích các cơ hệ một cách sâu sắc hơn, cho phép dễ dàng xử lý các cơ hệ phức tạp, nhiều bậc tự do, các cơ hệ chuyển động trong không gian 3 chiều.

10.1 Liên kết động học

Phần lớn các học sinh bắt đầu khảo sát các liên kết chuyển động dựa trên những trực giác mơ hồ, các nhận định cảm tính các phương pháp đổi hệ quy chiếu. Thoạt đầu, sự thông minh và sự nhạy bén về khả năng tưởng tượng hình học giúp cho nhiều học sinh nhanh chóng giải quyết được vấn đề một cách hiệu quả. Song, với các cơ hệ phức tạp bao gồm nhiều liên kết chuyển động, các vật chuyển động trong không gian 3 chiều, những quan sát cảm tính thường xuyên mang đến những kết luận sai. Các lý thuyết về liên kết động học, ứng dụng giải tích trong khảo sát các liên hệ về tọa độ, lực, gia tốc mang đến sự chặt chẽ. Không những giúp cho chúng ta có một lời giải chắc chắn, các lý thuyết về liên kết là một đường lối chuẩn mực cho lời giải các bài toán cơ học, giúp không chỉ con người với trí khả năng tư duy trừu tượng sâu sắc, mà ngay cả các hệ thống máy tính, lập trình cũng có thể tự thiết lập được các phương trình vi phân mô tả chuyển động.
Trong mục này, chúng ta sẽ khảo sát các liên kết chuyển động dựa trên hệ thống các bậc tự do, hệ tọa độ suy rộng, phân biệt các loại liên kết và ứng dụng lý thuyết giải tích trong tính toán các vận tốc, gia tốc trong hệ cơ học.

10.1.1 Bậc tự do

Tập hợp các thông số **đủ** để xác định được vị trí của cơ hệ trong một hệ quy chiếu xác định, được gọi là các tọa độ suy rộng của cơ hệ.
Các tọa độ suy rộng được kí hiệu là $q_1, q_2, \dots, q_m$. Các tọa độ suy rộng có thể là các tọa độ Đề các của các chất điểm thuộc cơ hệ, có thể là góc quay, các tọa độ cong...
Bản chất vật lý của tọa độ suy rộng là bất kỳ, do đó thứ nguyên của nó có thể không phải là độ dài như tọa độ Decartes.[1]
Vị trí của cơ hệ được xác định nhờ tọa độ suy rộng, nên các tọa độ Decartes của các chất điểm của cơ hệ có thể biểu diễn qua các tọa độ suy rộng:

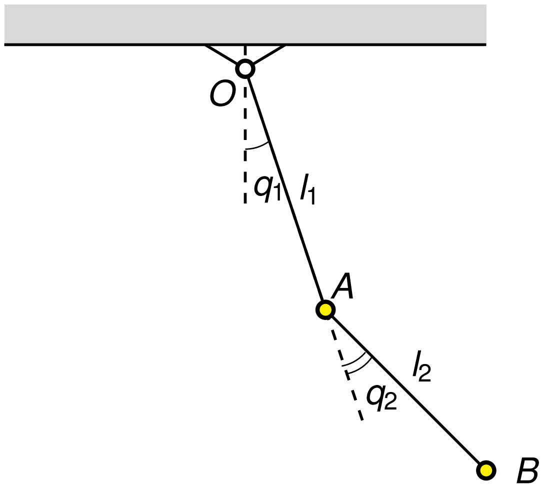
$$x_k = x_k(t, q_1, q_2, \dots, q_m)$$
$$y_k = y_k(t, q_1, q_2, \dots, q_m)$$
$$z_k = z_k(t, q_1, q_2, \dots, q_m)$$

[1]Dựa theo quyển sách "Bài tập Cơ học Tập 2: Động lực học" của giáo sư Đỗ Sanh.

Hoặc viết ở dạng rút gọn:

$$\mathbf{r_k} = \mathbf{r_k}(t, q_1, q_2, \ldots, q_m)$$

Ví dụ 10.1: Cho một hệ con lắc kép với độ dài hai con lắc là l_1 và l_2 (hình 10.1). Xác định số bậc tự do của hệ con lắc kép này và các tọa độ suy rộng của nó.



Hình 10.1: Con lắc kép.

$$(x_A, y_A, x_B, y_B)$$
$$(\theta, \phi)$$

Nhận thấy trong hai tập hợp nêu trên, tập hợp đầu tiên các thông số không độc lập với nhau, quả thực vậy đối với tập hợp thứ nhất:

$$x_A{}^2 + y_A{}^2 = l_1{}^2; (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l_2{}^2$$

với tập hợp thứ hai, các tọa độ đề các của các chất điểm của cơ hệ được biểu diễn bằng các hệ thức sau:

$$\begin{aligned}
x_A &= l_1 \cos(q_1), \\
y_A &= -l_1 \sin(q_1), \\
x_B &= l_1 \cos(q_1) + l_2 \cos(q_1 + q_2), \\
y_B &= l_1 \sin(q_1) - l_2 \sin(q_1 + q_2).
\end{aligned}$$

Vậy tập hợp (θ, ϕ) là các tọa độ suy rộng **đủ** của hệ con lắc. Còn (x_A, y_A, x_B, y_B) là các tọa độ suy rộng **dư**.

10.1.2 Liên kết Holonom và liên kết phi Holonom

Một phương trình liên kết động học thông thường sẽ có dạng

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0. \tag{10.1}$$

Với $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$ và $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n]$ là các tọa độ, tọa độ suy rộng của cơ hệ và đạo hàm bậc nhất (vận tốc) của chúng.
Từ phương trình liên kết trên, ta có thể phân loại các cơ hệ thành một số loại như sau[2]:

[2] Dựa theo quyển sách "Cơ học giải tích" của giáo sư Nguyễn Quang Đạo.

- **Liên kết holonom (honomic)**, hay còn được gọi là **liên kết hình học**, **liên kết hữu hạn**, là các liên hệ không phụ thuộc vào các đạo hàm bậc nhất của các tọa độ, tức là

$$f(\mathbf{q}, t) = 0.$$

  và ngược lại là **liên kết phi holonom (nonholonomic)**.

- **Liên kết scleronom (scleronomous)**, hay còn được gọi là **liên kết dừng**, là các liên kết không phụ thuộc tường minh vào thời gian (tức là $\partial \mathbf{q}/t = 0$), ngược lại với nó là **liên kết Rheonom (Rheonomous)**, hay còn được gọi là **liên kết không dừng**.

- Liên kết giữ và không giữ...

Trong các ứng dụng kỹ thuật, các cánh tay robot, các cơ cấu tay chi tiết máy thường là các liên kết holonom. Còn các liên kết phi holonom thường xuất hiện trong các hệ mobile robot, máy bay, drone,... Để xác định tọa độ qua các liên kết holonom, ta chỉ cần xác định thông qua các tính chất hình học. Trong khi đó, với các hệ liên kết phi holonom, việc xác định tọa độ của các vật thể trở nên tương đối phức tạp, đòi hỏi ta phải ứng dụng các kỹ thuật định vị ngoài cơ học như sử dụng các cảm biến, sóng điện từ, radar,... Trong tài liệu này, ta sẽ chỉ tập trung vào lĩnh vực cơ lý thuyết, vì vậy, cụ thể ta sẽ chỉ phân tích về các cơ hệ có các liên kết holonom.

10.1.3 Ứng dụng đạo hàm toàn phần và ma trận Jacobian trong tính toán vận tốc, gia tốc các điểm của cơ hệ Holonom

Giả sử trong một cơ hệ có n bậc tự do với các tọa độ suy rộng tương ứng là $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$. Với một tọa độ bất kỳ nào đó có liên kết phụ thuộc vào các tọa độ suy rộng kia theo dạng có thể tách biến được:

$$x = f(\mathbf{q}) \tag{10.2}$$

Ta sẽ có thể tìm vận tốc, tức là đạo hàm bậc nhất của x theo thời gian t theo công thức của đạo hàm toàn phần:

$$x = \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial t}. \tag{10.3}$$

Đối với các liên kết Holonom $\partial f/\partial t = 0$, nên

$$x = \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}. \tag{10.4}$$

Tổng quát hơn, khi ta muốn biểu diễn đạo hàm theo thời gian của một hệ tọa độ $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_m]^T$, ta có thể biểu diễn dưới dạng

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial q_1} & \frac{\partial x_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}. \tag{10.5}$$

Biểu thức (10.5) là mối quan hệ giữa các vận tốc của hệ tọa độ $\mathbf{x}$ theo các vận tốc của hệ tọa độ suy rộng $\mathbf{q}$. Trong đó, ma trận Jacobian được định nghĩa là ma trận đạo hàm riêng bậc nhất của các tọa độ suy rộng theo các tọa độ suy rộng:

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{q}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial q_1} & \frac{\partial x_m}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial q_n} \end{bmatrix}. \tag{10.6}$$

Qua đó, ta rút gọn biểu thức (10.5) thành

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}. \tag{10.7}$$

Đạo hàm hai vế của biểu thức (10.7) theo thời gian, ta có thể tìm được gia tốc của các tọa độ suy rộng:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \left(\sum_1^n \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial q_i}\dot{q}_i\right)\dot{\mathbf{q}}. \tag{10.8}$$

hay

$$\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\ddot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{q}}\right)(\dot{\mathbf{q}} \otimes \dot{\mathbf{q}}). \tag{10.9}$$

trong đó:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial \mathbf{q}}\right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial J_{11}}{\partial q_1} & \frac{\partial J_{11}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial J_{11}}{\partial q_n} & \frac{\partial J_{12}}{\partial q_1} & \frac{\partial J_{12}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial J_{12}}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial J_{1n}}{\partial q_1} & \frac{\partial J_{1n}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial J_{1n}}{\partial q_n} \\ \frac{\partial J_{21}}{\partial q_1} & \frac{\partial J_{21}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial J_{21}}{\partial q_n} & \frac{\partial J_{22}}{\partial q_1} & \frac{\partial J_{22}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial J_{22}}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial J_{2n}}{\partial q_1} & \frac{\partial J_{2n}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial J_{2n}}{\partial q_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial J_{m1}}{\partial q_1} & \frac{\partial J_{m1}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial J_{m1}}{\partial q_n} & \frac{\partial J_{m2}}{\partial q_1} & \frac{\partial J_{m2}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial J_{m2}}{\partial q_n} & \cdots & \frac{\partial J_{mn}}{\partial q_1} & \frac{\partial J_{mn}}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial J_{mn}}{\partial q_n} \end{bmatrix}. \tag{10.10}$$

Phép toán $\otimes$ ở đây được gọi là tích Kronecker. Phép tích Kronecker của hai ma trận **A** và **B** được định nghĩa là ma trận có kích thước bằng tích của hai ma trận **A** và **B**, với các phần tử được tính theo công thức:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & \cdots & A_{11}B_{1n} \\ A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} & \cdots & A_{12}B_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}B_{11} & A_{m1}B_{12} & \cdots & A_{m1}B_{1n} \\ A_{m2}B_{11} & A_{m2}B_{12} & \cdots & A_{m2}B_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{mn}B_{11} & A_{mn}B_{12} & \cdots & A_{mn}B_{1n} \end{bmatrix}. \tag{10.11}$$

Trong phạm vi ứng dụng đối với học sinh, sinh viên, phần lớn các bài toán giải trong phòng thi thường được giới hạn dưới 3 bậc tự do và cách biểu diễn các phép toán ma trận trên không thực sự phổ biến và không mang lại hiệu quả cao. Tuy nhiên, trong các bài toán nghiên cứu rộng hơn, ứng dụng thực tế cho các cánh tay robot, hệ thống nhiều bậc tự do phức tạp, các biểu thức tổng quát trên đóng vai trò quan trọng trong việc thiết lập thuật toán trên các công cụ lập trình, mô phỏng chuyển động của các cơ hệ.

Trong bài toán yêu cầu tính cụ thể độ lớn của vận tốc, gia tốc, ta chọn **x** là hệ tọa độ Decartes. Khi đó, độ lớn vận tốc của một chất điểm trong cơ hệ được tính theo công thức[3]:

$$v^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \cdots + \dot{x}_m^2 = \dot{\mathbf{x}}^T\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{q}}^T \left(\mathbf{J}^T\mathbf{J}\right) \dot{\mathbf{q}}. \tag{10.12}$$

Tương tự, độ lớn gia tốc của một chất điểm trong cơ hệ được tính theo công thức:

$$a^2 = \ddot{\mathbf{x}}^T\ddot{\mathbf{x}}. \tag{10.13}$$

Ví dụ 10.2 Chứng minh rằng vận tốc v của một chất điểm chuyển động trong hệ tọa độ cầu (r, θ, φ) có độ lớn thỏa mãn:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\dot{\varphi}^2.$$

Ví dụ 10.3 Tính toán vận tốc và gia tốc của đầu B trong bài toán con lắc kép (hình 10.1).

10.1.4 Lực bị động trong bài toán liên kết Holonom

10.2 Động lực học giải tích

10.2.1 Ma trận quán tính

Động năng của một cơ hệ được định nghĩa là tổng động năng của tất cả các chất điểm trong cơ hệ, tức là

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k}{2} v_k^2. \tag{10.14}$$

Trong đó, m_k là khối lượng của chất điểm thứ k, v_k là vận tốc của chất điểm thứ k. Áp dụng công thức tính vận tốc theo các Jacobian và vector tọa độ suy rộng, ta có thể viết lại động năng của cơ hệ theo các tọa độ suy rộng:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \left(\sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k\right) \dot{\mathbf{q}}. \tag{10.15}$$

Để thuận tiện cho việc phân tích các số hạng trong bài toán cơ học, ta định nghĩa ma trận quán tính **H** của cơ hệ là ma trận có kích thước bằng số bậc tự do của cơ hệ, với các phần tử được định nghĩa theo công thức:

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^{n} m_k \mathbf{J}_k^T \mathbf{J}_k, \tag{10.16}$$

tức là động năng của cơ hệ có thể được viết lại dưới dạng:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{H} \dot{\mathbf{q}}. \tag{10.17}$$

Ma trận quán tính **H** là ma trận đối xứng xác định dương, tức là các phần tử của nó được tính theo công thức:

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}. \tag{10.18}$$

Việc hiểu ý nghĩa của từng số hạng trong ma trận quán tính là một cơ hội để người đọc có thể kiểm soát từng tính toán, dễ dàng phát hiện lỗi biến đổi toán học trong quá trình giải bài toán cơ học.

Quan trọng hơn, ma trận quán tính là một bước để tiếp cận việc giải các bài toán cơ học bằng công cụ lập trình, mô phỏng.

[3]Trong cơ hệ cổ điển thông thường, không gian có 3 chiều và $m = 3$, song, ở đây, tác giả quyết định viết tổng quát nhất có thể.

10.2.2 Phương trình tổng quát trong điều khiển hệ đa vật và ma trận Christoffel

Trong cơ học giải tích, phương trình tổng quát của một cơ hệ có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\mathbf{H}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\left(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}\right) \otimes \dot{\mathbf{q}} = -\nabla U + \mathbf{F}. \tag{10.19}$$

Trong đó, $\mathbf{H}$ là ma trận quán tính, $\mathbf{C}$ là ma trận hướng tâm/Coriolis, ∇U là gradient của thế năng, và $\mathbf{F}$ là lực tác dụng lên cơ hệ. Ma trận hướng tâm/Coriolis $\mathbf{C}$ được định nghĩa là ma trận có kích thước bằng số bậc tự do của cơ hệ, với các phần tử được tính theo công thức:

$$C_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_{ij}}{\partial q_j} + \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_i} - \frac{\partial H_{ii}}{\partial q_j}\right). \tag{10.20}$$

Ma trận hướng tâm/Coriolis là ma trận đối xứng.

10.3 Động học Robotic

10.3.1 Động học thuận và bảng Denavit-Hartenberg

Bảng 10.1: Tham số Denavit–Hartenberg.[1]

Khớp	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	a_1	α_1
2	θ_2	d_2	a_2	α_2
3	θ_3	d_3	a_3	α_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	θ_n	d_n	a_n	α_n

$$\mathbf{T}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i\cos\alpha_i & \sin\theta_i\sin\alpha_i & a_i\cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i\cos\alpha_i & -\cos\theta_i\sin\alpha_i & a_i\sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{10.21}$$

10.3.2 Động học nghịch Robotic

10.3.3 Thay thế ma trận Christoffel bằng ma trận hướng tâm/Coriolis - Tích Kronecker

- Phương trình động lực học tổng quát sử dụng tích Kronecker [2]

$$\mathbf{H}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \otimes \dot{\mathbf{q}} = -\nabla U + \mathbf{F}. \tag{10.22}$$

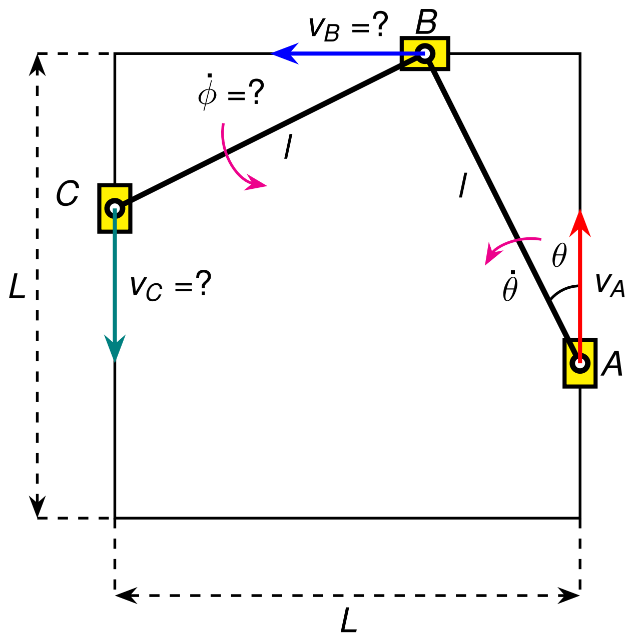
- Ma trận hướng tâm/Coriolis $\mathbf{C}(\mathbf{q})$ được tính bằng biểu thức

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{vec}(\mathbf{H})}{\partial \mathbf{q}}\right)^T. \tag{10.23}$$

10.3.4 Bài tập

Chuyển động liên kết

Bài 10.1: Va chạm vuông vắn (Hướng tới VPhO 43)
Hai thanh thẳng đồng chất, cứng, dài l được nối với nhau bằng một bản lề ở đầu thanh. Các đầu của hai thanh cứng này trượt trên khung hình vuông, đặt cố định trong mặt phẳng nằm ngang, có độ dài cạnh là L (với $\frac{\sqrt{3}}{2}l < L < 2l$). Ta lần lượt gọi 3 điểm đầu các thanh là A, B, C (như hình 10.2). Góc tạo bởi thanh AB và cạnh khung hình vuông có chứa đầu A là θ. Bỏ qua ma sát ở khung vuông, thanh trượt và các bản lề.



Hình 10.2: Khung và các thanh quay.

1. Tìm vận tốc của B, C và vận tốc góc của thanh BC theo θ và vận tốc góc $\dot{\theta}$ của thanh AB.

2. Tại một thời điểm A có vận tốc là v, gia tốc là a, góc $\theta = \theta_0$ thì gia tốc của B là bao nhiêu?

Bài 10.2: Cơ cấu tay quay con trượt (VPhO 2020)
Một cơ cấu cơ khí thanh truyền tay quay (như hình 10.3). Tay quay OA có chiều dài r và quay đều với vận tốc góc ω quanh trục quay cố định O, chiều quay cùng chiều kim đồng hồ. Thanh truyền AB có chiều dài l và điểm B ở đầu thanh gắn với con trượt luôn chuyển động thẳng trên một rãnh nằm ngang. Xét trong hệ quy chiếu gắn với mặt đất, ta cần xác định các đặc trưng động học của thanh AB.

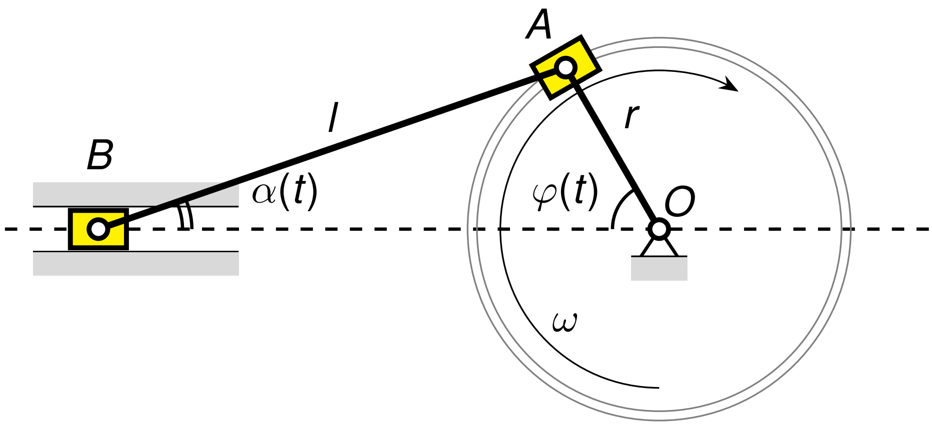
1. Tại thời điểm tay quay OA tới vị trí góc $\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2}$, hãy xác định:

   a, Vận tốc $\mathbf{v_B}$ của đầu B.

   b, Vận tốc góc ω_{AB} của thanh AB.

   c, Gia tốc $\vec{a}_B$ của đầu B và gia tốc góc γ_{AB} của thanh AB.

   Áp dụng bằng số tính v_B, ω_{AB}, a_B, γ_{AB} với các giá trị $r = 10\,\text{cm}$, $\omega = 5\,\text{rad/s}$, $l = 30\,\text{cm}$.



Hình 10.3: Cơ cấu tay quay - con trượt.

2. Khi tay quay OA tới vị trí ứng với góc $\varphi = \widehat{BOA} = \frac{\pi}{2}$, hãy xác định:

   a, Gia tốc $\vec{a}_B$ của đầu B.

   b, Gia tốc góc γ_{AB} của thanh AB.

   c, Ví trí M và N trên thanh AB tương ứng với điểm có gia tốc lớn nhất và gia tốc nhỏ nhất. Xác định gia tốc của các điểm đó.

3. Khảo sát chuyển động của đầu B của thanh AB theo thời gian t:

   a, Viết phương trình vận tốc v_B của điểm B theo thời gian t với $0 \le t \le \frac{2\pi}{\omega}$, chọn gốc thời gian $t = 0$ khi $\varphi(0) = 0$.

   b, Cơ cấu cơ khí trên cần có điều kiện gì để con trượt dao động điều hòa?

10.4 Lời giải

Bài 10.1:
1. Các tọa độ và vận tốc lần lượt được biểu diễn theo θ và $\dot{\theta}$ dưới dạng:

$$x_A = L - l\cos\theta \Rightarrow v_A = \dot{\theta} l \sin\theta.$$
$$x_B = l\sin\theta \Rightarrow v_B = \dot{\theta} l \cos\theta.$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{L - l\sin\theta}{l}\right) \Rightarrow \dot{\varphi} = \dot{\theta}\frac{l\cos\theta}{\sqrt{l^2 - (L - l\sin\theta)^2}}.$$
$$x_C = \sqrt{l^2 - (L - l\sin\theta)^2} \Rightarrow v_C = \dot{\theta}\frac{(L - l\sin\theta) l\cos\theta}{\sqrt{l^2 - (L - l\sin\theta)^2}}.$$

2. Tại thời điểm $v_A = v$ và $a_A = a$, ta có thể tìm lại $\dot{\theta}$ và $\ddot{\theta}$ theo các bước:

$$v = \dot{\theta} l \sin\theta \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{l\sin\theta}. \tag{10.24}$$

Đạo hàm $v = \dot{\theta} l \sin\theta$ theo thời gian, ta được

$$a = \ddot{\theta} l \sin\theta + \dot{\theta}^2 l \cos\theta = \ddot{\theta} l\sin\theta + \frac{v^2}{l}\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{a}{l\sin\theta} - \frac{v^2}{l^2}\frac{\cos\theta}{\sin^3\theta}. \tag{10.25}$$

Đạo hàm biểu thức v_B ta tìm được ở phần **a,** theo thời gian

$$a_B = \ddot{\theta} l \cos\theta - \dot{\theta}^2 l \sin\theta. \tag{10.26}$$

Thế $\dot{\theta}$ và $\ddot{\theta}$ từ phương trình trên vào, thay $\theta = \theta_0$, ta tìm được gia tốc của B

$$a_B = \frac{1}{\tan\theta_0} a - \frac{v^2}{l \sin^3\theta_0}. \tag{10.27}$$

Bài 10.2:

Tài liệu tham khảo

[1] JJ Craig et al. "Introduction to Robotics: Mechanics and Control". In: (2011).

[2] Nguyễn Văn Đạo. "Cơ học giải tích". In: *NXB Đại học quốc gia, Hà nội* (2002).

[3] Nguyen Thai Minh Tuan, Pham Thanh Chung, Phan Dang Phong, et al. "Kinematic and dynamic analysis of multibody systems using the Kronecker product". In: *Vietnam Journal of Science and Technology* 57.1 (2019), pp. 112–127.

Tuần 11

Đo Lường & Xử Lý Số Liệu

11.1 Phân tích thứ nguyên và dự đoán quy luật vật vật lý

11.2 Bài toán hồi quy và hồi quy tuyến tính

11.2.1 Bài toán hồi quy trong học máy

11.2.2 Hồi quy hàm đơn biến, hàm mất mát và hệ số tương quan

11.2.3 Hồi quy hàm đa biến

11.2.4 Hồi quy đa thức

11.3 Tối ưu hàm mất mát

11.3.1 Thuật toán Gradient descent

11.3.2 Các thuật toán tối ưu khác: Newton, Gauss-Newton, Lenvenberg-Marquardt

11.4 Học sâu và mạng Neural

11.4.1 Bài toán phân loại trong học máy

11.4.2 Mô hình mạng Neural

11.4.3 Thuật toán lan truyền ngược

Tài liệu tham khảo

[1] Don S. Lemons. *A Student's Guide to Dimensional Analysis*. Student's Guides. Cambridge University Press, 2017.

[2] Richard W Robinett. *Dimensional Analysis Across the Landscape of Physics: Classic Results, Textbook Examples, and Exploration of Research*. Oxford University Press, 2025.

Tuần 12

Tổng Kết

A

Phân Tích Thứ Nguyên

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetuer adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetuer id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.