xPhO Physics Club

ĐỘNG HỌC CHẤT ĐIỂM

Người trình bày: Hirrus

Mục lục

Ý nghĩa của phương trình vi phân trong bài toán chuyển động

$$\begin{tikzcd} y(x) \arrow[r, "\text{Đạo hàm}"] & y'(x) \arrow[l, bend left, "???"] \end{tikzcd}$$

Giải phương trình vi phân

$$y'(x) = f(x).$$

Sử dụng

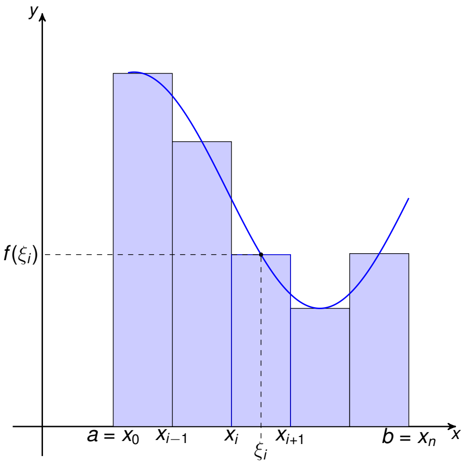
$$dy = f(x)dx.$$

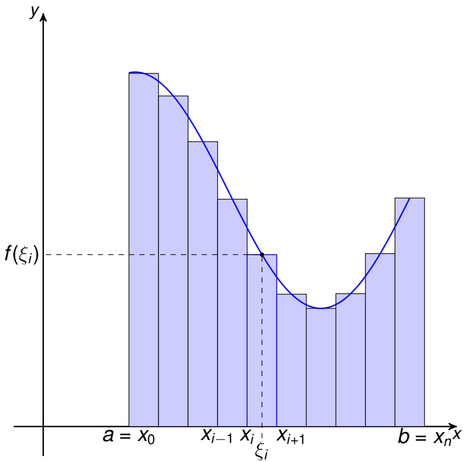
Ta định nghĩa một phép toán ngược quá trình đạo hàm. Ký hiệu là "$\int$". Sao cho

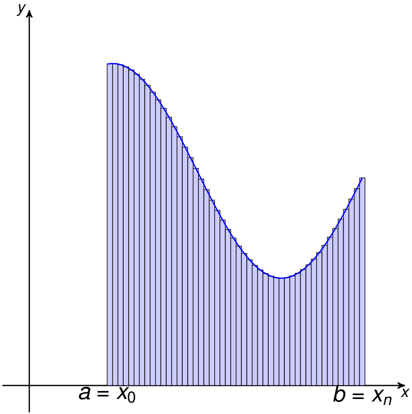
$$\int f(x)dx = y(x) + C \quad \text{,Với } C \text{ là hằng số.} \tag{1}$$

Ta gọi phép toán ở (1) là nguyên hàm.

Bài toán diện tích và phương pháp vét cạn







Hình: Khi ta chia đủ nhỏ

Diện tích

$$S \simeq \sum_{i=0}^{n} f(\xi_i)\Delta x \qquad (2)$$

$$\text{Với} \begin{cases} \Delta x & = & x_{i+1} - x_i \\ \xi_i & \in & [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

Đây là công thức tổng Riemann để xấp xỉ diện tích bên dưới đồ thị.

Mối liên hệ nguyên hàm - tích phân

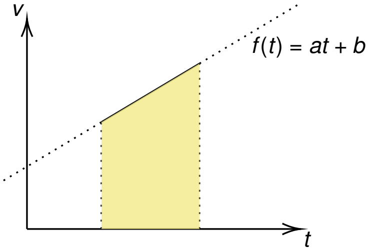
Ở công thức (2), ta có thể chọn tuỳ ý ξ_i. Nên ta chọn $\xi_i = x_i$. Lúc này

$$S \simeq \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Nếu ta lấy giới hạn sao cho các cột diện tích đủ nhỏ thì ta sẽ có

$$\Delta x \to dx \text{ thì } \sum_{i=0}^{n} \to \int_a^b \tag{3}$$

Cho một vật di chuyển với đồ thị vận tốc $v = f(t) = at + b$. Tìm quãng đường nó di chuyển được trong thời gian $t \in [c, d]$. Tìm diện tích trong khoảng $t \in [c, d]$.



Giải

Quãng đường:

$$\Delta x = \int_c^d f(t)dt = \frac{a}{2}(d^2 - c^2) + b(d - c).$$

Diện tích: Đây là diện tích hình thang vuông.

$$\Delta S = \frac{1}{2}\left(f(d) + f(c)\right)(d - c)$$
$$= \frac{a}{2}(d^2 - c^2) + b(d - c).$$

Định lý Leibniz–Newton

Nếu nguyên hàm của $f(x)$ là $F(x)$ thì

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{4}$$

Giải phương trình vi phân: phân ly biến số

Phương pháp phân ly biến số dùng để giải quyết các phương trình vi phân cơ bản.

$$f(x, y, y') = 0.$$

Tách biến có nghĩa là mỗi vế của phương trình sẽ chỉ chứa một biến

$$f(x, y, y') = 0 \longrightarrow h(y)y' = g(x) \Longrightarrow h(y)dy = g(x)dx \tag{5}$$

Ví dụ: Cho phương trình vi phân

$$\frac{dv}{dt} = -bv$$

Phương pháp phân ly biến số dùng để giải quyết các phương trình vi phân cơ bản.

$$f(x, y, y') = 0.$$

Tách biến có nghĩa là mỗi vế của phương trình sẽ chỉ chứa một biến

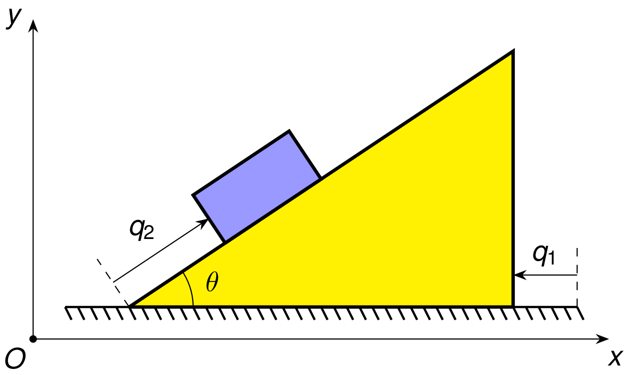
$$f(x, y, y') = 0 \longrightarrow h(y)y' = g(x) \Longrightarrow h(y)dy = g(x)dx \tag{5}$$

Ví dụ: Cho phương trình vi phân

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= -bv & \Longrightarrow \quad \int_{v_0}^{v(t)} \frac{dv}{v} &= -\int_0^t bdt \\ \Longrightarrow \quad \frac{dv}{v} &= -bdt & \Longrightarrow \quad \ln(v(t)/v_0) &= -bt \end{aligned}$$

Mục lục

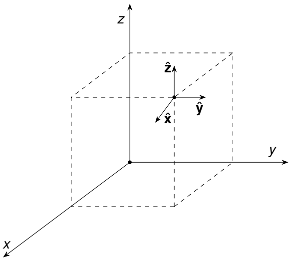
- Xác định vị trí các vật trong không gian.
- Các trục, biến tọa độ được tùy chọn phù hợp với từng ví dụ.
- Các hệ tọa độ trực giao thường được ưu tiên sử dụng với các hệ phức tạp.



Hình: Nhiều hệ tọa độ khác nhau cho bài toán nêm trượt trên nêm

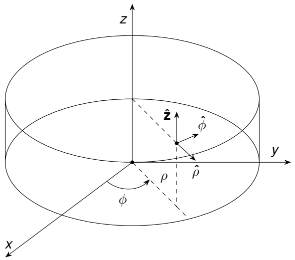
Các hệ tọa độ 3 chiều phổ biến

- Hệ tọa độ Dercates



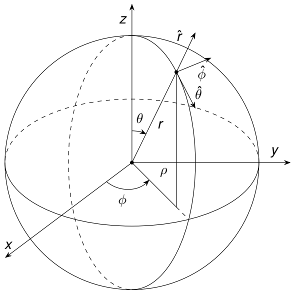
Hình: Hệ tọa độ Decartes.

- Hệ tọa độ trụ



Hình: Hệ tọa độ trụ.

- Hệ tọa độ cầu



Hình: Hệ tọa độ cầu.

Tọa độ Frenet - Serret

Tên gọi

- Vector đơn vị tiếp tuyến **T**.
- Vector đơn vị pháp tuyến **N**.
- Vector đơn vị trực chuẩn **B**.

- Độ cong κ.
- Bán kính cong $R_c = 1/\kappa$.
- Độ xoắn đường cong không gian τ.

Định nghĩa:

$$\mathbf{T} := \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}, \tag{6}$$

$$\mathbf{N} := \frac{\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}s}{\|\mathrm{d}\mathbf{T}/\mathrm{d}s\|}, \tag{7}$$

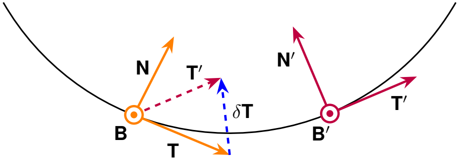
$$\mathbf{B} := \mathbf{T} \times \mathbf{N}. \tag{8}$$

Công thức Frenet Serret

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}s} = \kappa\mathbf{N}, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{N}}{\mathrm{d}s} = -\kappa\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{B}}{\mathrm{d}s} = -\tau\mathbf{N}. \tag{11}$$



Hình: Các vector đơn vị trên hệ tọa độ cong.

Độ cong:

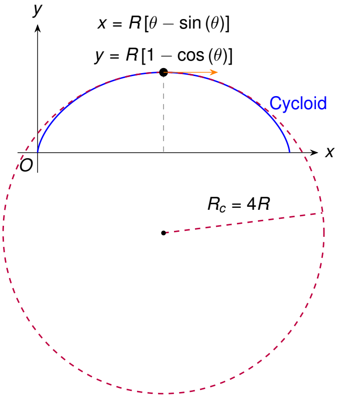
$$\kappa = \frac{d\phi}{ds} = \frac{x'y" - y'x"}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \qquad (12)$$

Bán kính cong $R_c = 1/\kappa$, tính toán với đường cycloid

$$R_c = 4R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right). \qquad (13)$$

Tại điểm cao nhất, $\theta = 0$, $R_c = 4R$.

- Bán kính cong là bán kính của đường tròn khớp nhất so với quỹ đạo tại điểm được khảo sát. [1]



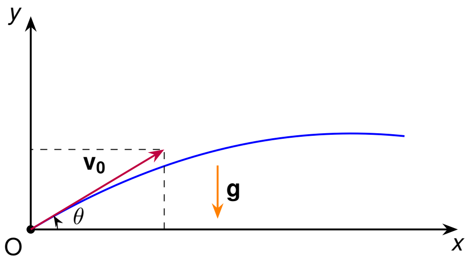
Hình: Quỹ đạo Cycloid và bán kính cong tại điểm cao nhất trên quỹ đạo.

- Điều kiện đầu:
  $x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha,$
  $\dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha.$
- Phương trình vi phân chuyển động:
  $\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = -g.$
- Nghiệm:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha)\, t, \tag{14}$$

$$y(t) = v_0 \sin(\alpha)\, t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{15}$$

$$y(x) = x \tan(\alpha) - \frac{v_0^2}{2g\cos^2(\alpha)} x^2. \tag{16}$$



Hình: Bài toán chuyển động ném xiên, các điều kiện đầu và quỹ đạo của vật.

- Bài tập: Xác định độ cong và bán kính cong của quỹ đạo tại thời điểm t.

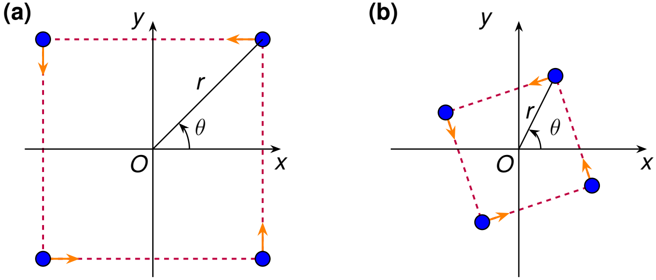
Giải

$$r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}r} = -1$$

$$\int_{a/\sqrt{2}}^{r} \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\int_{\pi/4}^{\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{2}} \exp\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right).$$

- Tỷ lệ vàng!!!



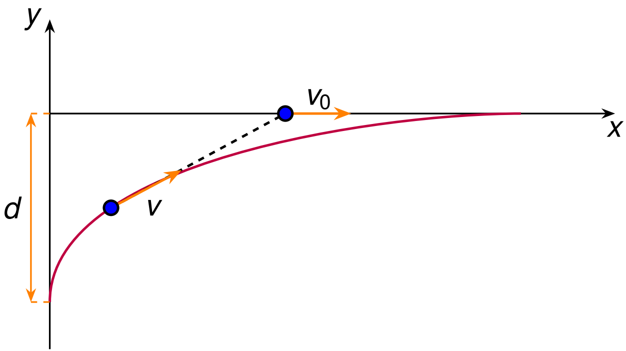
Hình: 4 con rùa đuổi bắt: **(a)** Thời điểm ban đầu, **(b)** Tại một thời điểm bất kỳ

Bài toán đuổi bắt - 2: Chó đuổi thỏ

Viết phương trình vi phân đối với hai hệ tọa độ khác nhau:

- Tọa độ Decartes (x, y).
- Toạ độ cực (r, θ). [2]

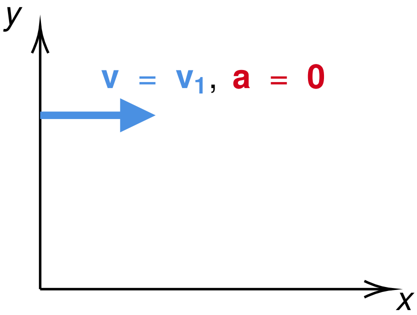
Giải phương trình vi phân của bài toán này sẽ là một câu chuyện khác...



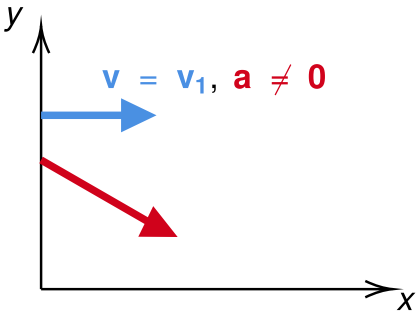
Hình: Chó vận tốc v đuổi theo thỏ chuyển động thẳng vận tốc v_0.

Mục lục

Hệ quy chiếu

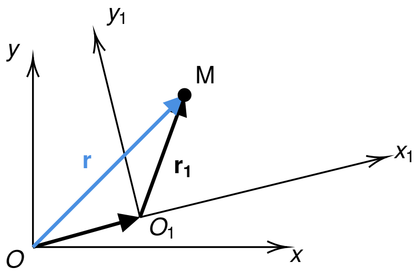


Hình: Hệ quy chiếu quán tính



Hình: Hệ quy chiếu phi quán tính

Xét một điểm M trong hệ quy chiếu O_1. Ta sẽ biểu diễn toạ độ, vận tốc, gia tốc của M trong hệ quy chiếu O.



Hình

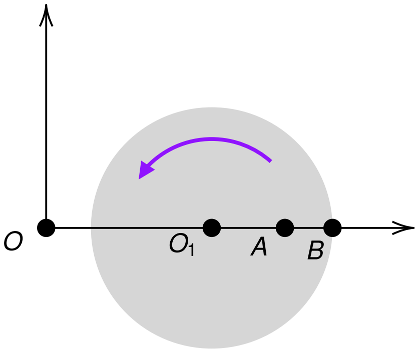
Toạ độ $\begin{cases} (O_1): & \mathbf{r_1} \\ (O): & \mathbf{r} = \mathbf{OO_1} + \mathbf{r_1} \end{cases}$

Vận tốc $\begin{cases} (O_1): & \dot{\mathbf{r}}_1 \\ (O): & \dot{\mathbf{r}} = \dfrac{d}{dt}\mathbf{OO}_1 + \dot{\mathbf{r}}_1 \end{cases}$

Gia tốc $\begin{cases} (O_1): & \ddot{\mathbf{r}}_1 \\ (O): & \ddot{\mathbf{r}} = \dfrac{d^2}{dt^2}\mathbf{OO}_1 + \ddot{\mathbf{r}}_1 \end{cases}$

Ví dụ

Cho một bánh quay (tâm O_1 cố định), ta đặt hệ quy chiếu ở các điểm O, O_1, A, B. Bánh quay với vận tốc góc ω, bán kính R.



Hình

$$\mathbf{v_{O_1/B}} = \omega \times \mathbf{BO_1}$$

$$\mathbf{v_{B/A}} = \omega \times \mathbf{BA}$$

$$\mathbf{v_{B/O}} = (-\omega) \times \mathbf{BO}$$

Tài liệu tham khảo I

[1] P. V. Thiều, *Bồi Dưỡng Học Sinh Giỏi Vật Lí THPT: Những Bài Toán Tổng Hợp - Phân Tích Và Lời Giải*. Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2005.

[2] J.-M. Brébec, *PFIEV Cơ học 1*, Vietnamese. Nhà xuất bản Giáo dục, 2005.