xPhO Physics Club

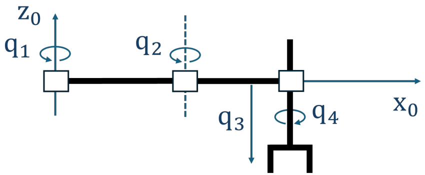
MA TRẬN TRONG CƠ HỌC VÀ MÔ PHỎNG CÁNH TAY ROBOT

Người trình bày: Nguyễn Thành Long

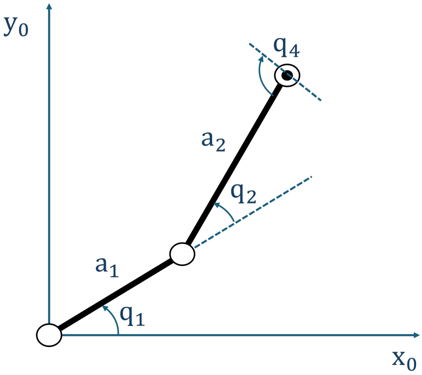
Mục lục

Robot Scara 4 bậc tự do

- Robot Scara có 4 bậc tự do biểu diễn qua các tọa độ: $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$.
- 3 khớp quay: q_1, q_2, q_4.
- 1 khớp tịnh tiến: q_3.



Hình: Mặt cắt phương xOz của Robot Scara.



Hình: Mặt cắt phương xOy của Robot Scara.

xPhO Physics Club

Phép toán cơ bản với ma trận

- Nhân một số với một ma trận.

$$P = a_1 \begin{bmatrix} \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) \\ \sin(q_1+q_2) \\ 0 \end{bmatrix} + q_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1\cos(q_1) + a_2\cos(q_1+q_2) \\ a_1\sin(q_1) + a_2\sin(q_1+q_2) \\ -q_3 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

- Nhân một ma trận với một ma trận.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot7+2\cdot9+3\cdot11 & 1\cdot8+2\cdot10+3\cdot12 \\ 4\cdot7+5\cdot9+6\cdot11 & 4\cdot8+5\cdot10+6\cdot12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 154 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

- Ma trận chuyển vị

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Ma trận Jacobian và liên hệ vận tốc giữa các tọa độ

- Cho hai hệ tọa độ: $q = [q_1, q_2, q_3]^T$ và $P = [x, y, z]^T$.
- Dựa vào phép đạo hàm toàn phần

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\dot{q}_3, \tag{4}$$

$$\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\dot{q}_3, \tag{5}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\dot{z}_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\dot{q}_3. \tag{6}$$

- Ma trận Jacobian

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial x}{\partial q_2} & \frac{\partial x}{\partial q_3} \\ \frac{\partial y}{\partial q_1} & \frac{\partial y}{\partial q_2} & \frac{\partial y}{\partial q_3} \\ \frac{\partial x}{\partial q_1} & \frac{\partial z}{\partial q_2} & \frac{\partial z}{\partial q_3} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

- Ứng dụng: $\dot{P} = J\dot{q}$.

- Ứng dụng cho Robot Scara.

$$\dot{x} = \left[-a_1 \sin\left(q_1\right) - a_2 \sin\left(q_1 + q_2\right)\right] \dot{q}_1 - a_2 \sin\left(q_1 + q_2\right) \dot{q}_2, \tag{8}$$

$$\dot{y} = \left[a_1 \cos\left(q_1\right) + a_2 \cos\left(q_1 + q_2\right)\right] \dot{q}_1 - a_2 \cos\left(q_1 + q_2\right) \dot{q}_2, \tag{9}$$

$$\dot{z} = -\dot{q}_3. \tag{10}$$

- Tính độ lớn vận tốc

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \dot{P}^T \dot{P} = \dot{q}^T \left(J^T J\right) \dot{q}. \tag{11}$$

Mục lục

Động năng và ma trận quán tính

- Động năng:

$$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} {v_i}^T m_i v_i + \sum_{j=1}^{M} \frac{1}{2} \omega_j I_j \omega = \frac{1}{2} \dot{q}^T \left(\sum_{k=1}^{L} J_k^T m_k J_k \right) \dot{q} = \frac{1}{2} \dot{q}^T H \dot{q}. \quad (12)$$

- Ma trận quán tính

$$H = \sum_{k=1}^{L} J_k^T m_k J_k. \quad (13)$$

Phương trình động lực học và ma trận Christoffel

- Hàm Lagrangian: $L = K - U$
- Phương trình Euler Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \tag{14}$$

Phân tách hàm Lagrangian và bổ sung lực suy rộng

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + F_i. \tag{15}$$

- Lời giải tổng quát

$$H(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} = -\nabla U(q) + F. \tag{16}$$

- Phần tử hàng i cột j của ma trận Chrisoffel

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial H_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial H_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial H_{ij}}{\partial q_k}\right)\dot{q}_k. \tag{17}$$

- Hệ phương trình vi phân

$$\frac{d}{dt}q = \dot{q}, \tag{18}$$
$$\frac{d}{dt}\dot{q} = H(q)^{-1}\left[-C(q,\dot{q})\dot{q} - \nabla U(q) + F\right]. \tag{19}$$

- Lấy sai phân, rời rạc hóa biểu thức trong mô phỏng số

$$q|_{t+\Delta t} = q|_t + \dot{q}\Delta t, \tag{20}$$
$$\dot{q}|_{t+\Delta t} = \dot{q}|_t + H(q)^{-1}\left[-C(q,\dot{q})\dot{q} - \nabla U(q) + F\right]\Delta t. \tag{21}$$

- Chọn Δt rất nhỏ và tiến hành rất nhiều vòng lặp, thu được đồ thị của q và $\dot{q}$ theo thời gian.

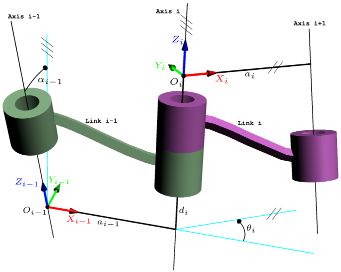
Mục lục

Bảng: Tham số Denavit–Hartenberg.

Khớp	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1	d_1	a_1	α_1
2	θ_2	d_2	a_2	α_2
3	θ_3	d_3	a_3	α_3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	θ_n	d_n	a_n	α_n

$$T_i^{i-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \cos\alpha_i & \sin\theta_i \sin\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \sin\alpha_i & a_i \sin\theta_i \\ 0 & \sin\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

$$\left[P_x^i, P_y^i, P_z^i, 1\right]^T = T_i^{i-1} \left[P_x^{i-1}, P_y^{i-1}, P_z^{i-1}, 1\right]^T \tag{23}$$



Hình: Các tham số biến khớp để xây dựng bảng Denavit-Hartenberg [1].

Thay thế ma trận Christoffel?

- Phương trình động lực học tổng quát sử dụng tích Kronecker [2]:

$$H(q)\ddot{q} + C(q)\dot{q} \otimes \dot{q} = -\nabla U + F. \tag{24}$$

- Ma trận hướng tâm/Coriolis $C(q)$ được tính bằng biểu thức

$$C(q) = \frac{\partial H(q)}{\partial q} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{vec}(H)}{\partial q}\right)^T. \tag{25}$$

Tài liệu tham khảo I

[1] J. Craig, R. Siegwart, I. Nourbakhsh, and D. Scaramuzza, "Introduction to robotics: Mechanics and control,", 2011.

[2] N. T. M. Tuan, P. T. Chung, D. D. Khoa, and P. D. Phong, "Kinematic and dynamic analysis of multibody systems using the kronecker product," *Vietnam Journal of Science and Technology*, vol. 57, no. 1, pp. 112–127, 2019. DOI: 10.15625/2525-2518/57/1/12285. [Online]. Available: https://vjs.ac.vn/index.php/jst/article/view/12285.