xPhO Physics Club

GIỚI THIỆU
VÀ MỞ ĐẦU VỀ GIẢI TÍCH

Người trình bày: Hirrus

Mục lục

Tốc Độ

Tốc độ trung bình:

$$\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Đo tốc độ:

- Quãng đường
- Thời gian
- Sai số

Sai số của phép đo ứng với: 1000m $\rightarrow$ 1m $\rightarrow$ 1cm.
Ví dụ: Thời gian đi hết 1cm của một người đang chạy.

Vai trò của giải tích

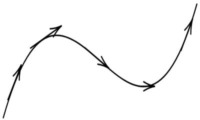
Sự cần thiết của một đại lượng:

- Có thể tính được (dựa trên mô hình toán học)
- Thuần tuý toán học (không bị ràng buộc bởi thực nghiệm)
- Phản ảnh quy luật chuyển động của vật

$\Longrightarrow$ Tốc độ tức thời và Giải tích

Giới thiệu

(a) Rơi tự do



(b) Một đường cong

Hình: Hai thay đổi điển hình-thời gian,và hướng.

Giải tích là toán học nghiên cứu sự thay đổi.

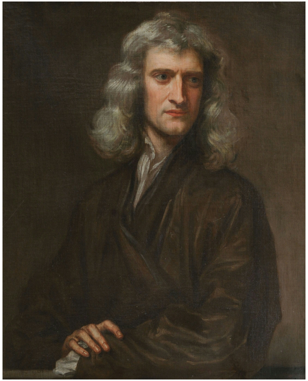
(a) Francois Viete (1540-1603)

(b) René Descartes (1596-1650)

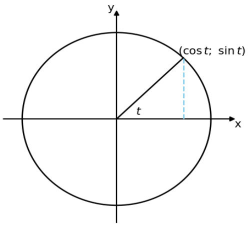
Hình: Sự phát triển của đại số và hình học giải tích.

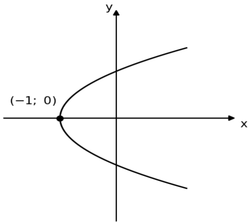
Sơ lược lịch sử

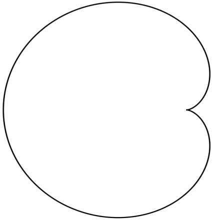
(a) G.W.Leibniz (1646-1716)

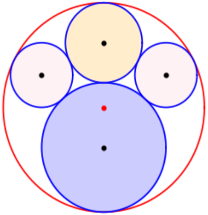


(b) Isaac Newton (1642-1727)


y
(cos t; sin t)
t
x


y
(−1; 0)
x



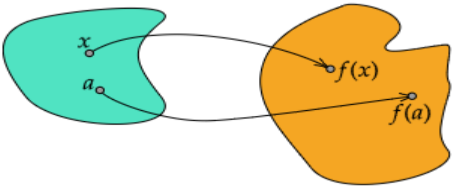


Mục lục

Hàm số

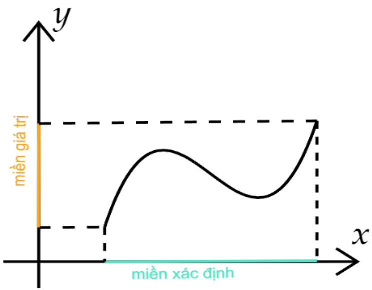
Định nghĩa

Hàm f là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử x thuộc tập hợp X với một và chỉ một phần tử , kí hiệu $f(x)$, thuộc một tập hợp Y.



$f : X \to Y$

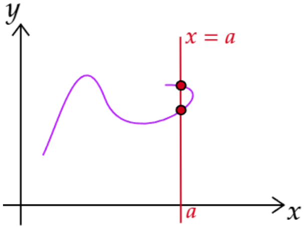
Đồ thị của f bao gồm mọi điểm (x, y) sao cho $y = f(x)$ với $x \in X$.



Một số hàm số quen thuộc:

- $y = \sin x : X = (-\infty, \infty), Y = [-1, 1]$
- $y = |x| : X = (-\infty, \infty), Y = (0, \infty)$

Chú ý, đây không phải là một hàm số:



Mục lục

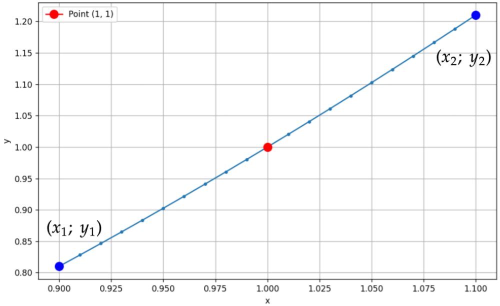
Định nghĩa

Giới hạn của hàm số $f(x)$ tại điểm $x = a$ được ký hiệu là:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \tag{1}$$

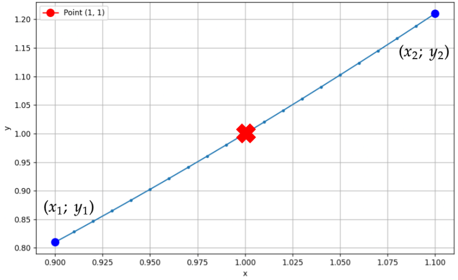
là giá trị mà hàm số tiến tới khi x tiến tới a.

Xét hàm số đồ thị hàm số $y = x^2$ được phóng to gần điểm $(1; 1)$:



- $y_1 = x_1^2$
- $y_2 = x_2^2$

Xét hàm số đồ thị hàm số $y = x^2$ (bị gián đoạn) được phóng to gần điểm $(1; 1)$:



- $y_1 = \begin{cases} x_1^2 & \text{nếu } x_1 \neq 1 \\ -100 & \text{nếu } x_1 = 1 \end{cases}$
- $y_2 = \begin{cases} x_2^2 & \text{nếu } x_2 \neq 1 \\ 100 & \text{nếu } x_2 = 1 \end{cases}$

Bảng: Giá trị $y = x^2$ khi x tới gần 1

Bên trái		Bên phải	
x	y	x	y
0.900	0.8100	1.100	1.2100
0.925	0.8556	1.075	1.1556
0.950	0.9025	1.050	1.1025
0.975	0.9506	1.025	1.0506
0.990	0.9801	1.010	1.0201
0.995	0.9900	1.005	1.0100
0.999	0.9980	1.001	1.0020

- $y_1(1) = -100$
- $y_2(1) = 100$
- $\lim_{x_1 \to 1^-} y_1 = 1$
- $\lim_{x_2 \to 1^+} y_2 = 1$

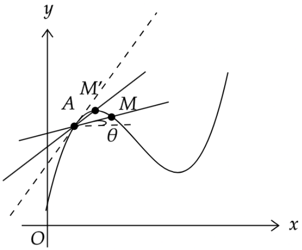
Định nghĩa

Đạo hàm của hàm số f tại giá trị a, kí hiệu bởi $f'(a)$, là

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \tag{2}$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Xét cát tuyến AM của một đồ thị hàm số $y = f(x)$:



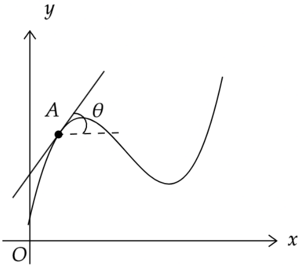
Hình: Cát tuyến của đồ thị hàm số

Từ hình vẽ, ta thu được:

$$\tan\theta = \frac{f(x_M) - f(x_A)}{x_M - x_A} \tag{3}$$

Khi lấy một điểm M' gần điểm A hơn M trên đồ thị, cát tuyến AM' sẽ gần với tiếp tuyến tại điểm A (đường nét đứt) hơn.

Khi điểm điểm M tiến gần đến điểm A, độ dốc của cát tuyến AM sẽ tiến gần đến độ dốc của tiếp tuyến tại điểm A:



Hình: Cát tuyến tiến gần đến tiếp tuyến

Độ dốc của tiếp tuyến tại điểm A được tính bằng giới hạn:

$$\tan\theta = \lim_{M\to A} \frac{f(x_M) - f(x_A)}{x_M - x_A} = f'(x_A) \quad (4)$$

$\longrightarrow$ Đạo hàm của hàm số tại điểm A phản ánh độ dốc của đồ thị tại điểm đó, cũng chính là tốc độ biến thiên của hàm số tại điểm đó.

Đạo hàm

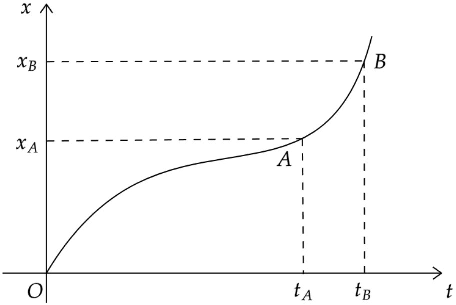
Bảng đạo hàm của các hàm thông dụng:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

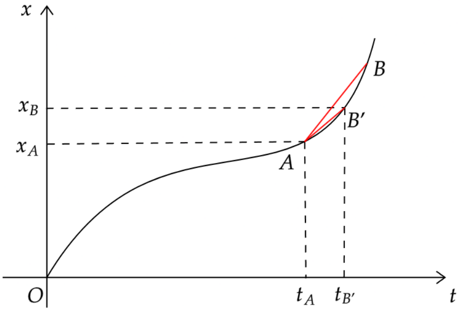
Ví dụ 1: Một người di chuyển theo một đường thẳng. Kí hiệu $x(t)$ là vị trí của người đó tại thời điểm t.



Tốc độ trung bình của người đó trong khoảng thời gian $[t_A, t_B]$ được tính bằng:

$$\overline{v}_{AB} = \frac{x(t_B) - x(t_A)}{t_B - t_A} \tag{5}$$

Lấy một điểm B' gần điểm A hơn, ta thấy đồ thị hàm số $x(t)$ gần giống đường thẳng AB' hơn:



Như vậy, tốc độ trung bình trong khoảng thời gian $[t_A, t'_B]$ sẽ gần với tốc độ tức thời tại thời điểm t_A:

$$v(t_A) = \lim_{B' \to A} \overline{v}_{AB'} \tag{6}$$

Hay

$$v(t_A) = \lim_{t_{B'} \to t_A} \frac{x(t_{B'}) - x(t_A)}{t_{B'} - t_A} = x'(t_A) \tag{7}$$

Ví dụ 2: Nước trong ấm siêu tốc có nhiệt độ T, đang nhận công suất nhiệt $\mathcal{P}_0$ từ ấm. Trong quá trình đó, nước đồng thời tỏa nhiệt ra môi trường (có nhiệt độ T_0) với công suất $\mathcal{P}_1 = k(T - T_0)$. Biết rằng nước có khối lượng m và nhiệt dung riêng là c.

Tính nhiệt độ của nước tại thời điểm t, biết ban đầu nước có nhiệt độ T_0.

Giải: Trong khoảng thời gian Δt, nước nhận nhiệt lượng ΔQ và tăng nhiệt độ một lượng ΔT.

$$\Delta Q = mc\Delta T \tag{8}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = mc\frac{\Delta T}{\Delta t} \tag{9}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = mc \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} \tag{10}$$

$$Q'(t) = mcT'(t) \tag{11}$$

Giải: Trong khoảng thời gian Δt, nước nhận nhiệt lượng ΔQ và tăng nhiệt độ một lượng ΔT.

$$\Delta Q = mc\Delta T \tag{12}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = mc\frac{\Delta T}{\Delta t} \tag{13}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = mc \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta t} \tag{14}$$

$$Q'(t) = mcT'(t) \tag{15}$$

$$Q'(t) = \mathcal{P}_0 - \mathcal{P}_1 \tag{16}$$

$$\boxed{mcT'(t) = \mathcal{P}_0 - k(T - T_0)} \tag{17}$$

$$T(t) = T_0 + \frac{\mathcal{P}_0}{k}(1 - \exp(-kt/mc)) \tag{18}$$

Tính toán số

Giả sử ta muốn tính đạo hàm của $y(x)$ bằng các công cụ lập trình, sẽ là tự nhiên nếu sử dụng trục tiếp định nghĩa của đạo hàm:

$$y(x_0 + \epsilon) \approx y(x_0) + \epsilon y'(x_0).$$

Ở đây ϵ là một con số rất nhỏ, ví dụ như 0.01, hay nếu cần chính xác hơn, có thể là 0.001,v.v. Như vậy, việc ta cần làm chỉ là khai báo hàm $y(x)$ rồi chọn một bước nhảy thích hợp.

Tài liệu tham khảo I

[1] J. Stewart, *Calculus 1*, 7th. Cengage Learning, 2012.

[2] R. Hobson, *Mathmatical Methods for Physics and Engineering*, 2nd. Cambridge University Press, 2011.

[3] Đêmiđôvic, *Bài tập Giải tích toán học tập I*, trans. by V. Đ. T. Nguyễn Hữu Ngự. Nhà xuất bản Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1975.