xPhO Physics Club

Trường & Giải tích

Người trình bày: Carina

Mục lục

1. Trường vô hướng và giải tích đa biến

1.1 Hàm đa biến

1.2 Đạo hàm riêng

1.3 Gradient

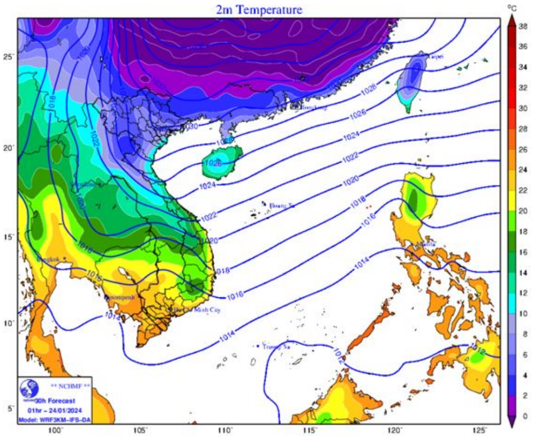
1.4 Tích phân đa biến

2. Trường vector và giải tích vector

2.1 Tính xoáy của trường

2.2 Tính phân kỳ của trường

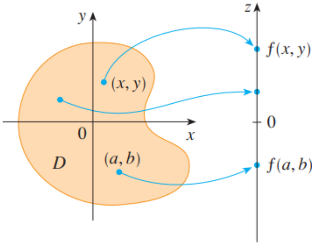
2.3 Một số ứng dụng



Hình: Biểu đồ nhiệt độ theo khu vực

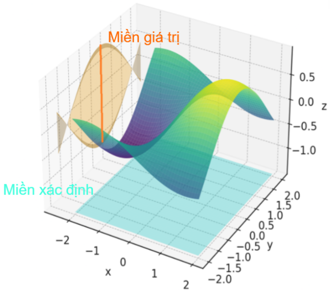
Định nghĩa

Hàm f theo n biến là quy tắc gán một véc-tơ $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ trong tập xác định $D \subseteq \mathbb{R}^n$ với một số thực $f(\mathbf{x})$.



Hình: Hàm số hai biến $z = f(x, y)$

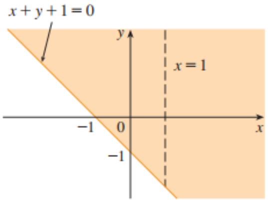
Đồ thị hàm f bao gồm mọi điểm $(x_1, x_2, \ldots, x_n, z)$ trong $\mathbb{R}^{n+1}$ sao cho $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.



Hình: Miền giá trị và miền xác định

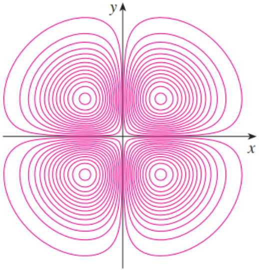
Một số ví dụ:

- $z = \sin x + \cos y$: $D = \mathbb{R}^2$, $z \in [-2, 2]$
- $z = \sqrt{x + y + 1}$:
  $D = \{(x, y) | x + y + 1 \geq 0\}$,
  $z \in [0, +\infty)$

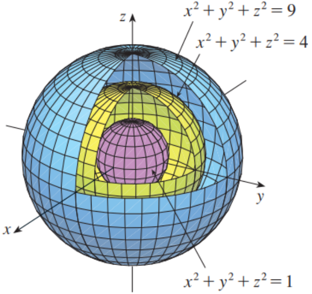


Hình: Miền xác định của hàm $z = \sqrt{x + y + 1}$

Đồ thị đường mức của hàm $f(\mathbf{x})$ là tập hợp véc-tơ $\mathbf{x}$ sao cho $f(\mathbf{x}) = c$ với một hằng số c.



Hình: Đường mức của hàm $z = xye^{-(x^2+y^2)}$.



Hình: Đường mức của hàm $f = x^2 + y^2 + z^2$

Mục lục

1. Trường vô hướng và giải tích đa biến

1.1 Hàm đa biến

1.2 Đạo hàm riêng

1.3 Gradient

1.4 Tích phân đa biến

2. Trường vector và giải tích vector

2.1 Tính xoáy của trường

2.2 Tính phân kỳ của trường

2.3 Một số ứng dụng

Định nghĩa

Đạo hàm riêng của hàm $f(\mathbf{x})$ theo x_i tại điểm $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ là giới hạn

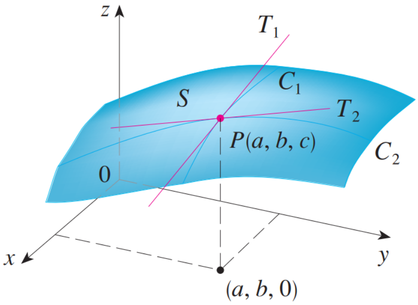
$$f_{x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h} \quad (1)$$

nếu giới hạn này tồn tại.

Khi này, vi phân của hàm f tại điểm $\mathbf{a}$ có thể được biểu diễn như sau:

$$df = f_{x_1} dx_1 + f_{x_2} dx_2 + \ldots + f_{x_n} dx_n \quad (2)$$

Xét đồ thị hàm số $z(x, y)$. Mặt phẳng $x = a$ và $y = b$ cắt đồ thị tại hai đường cong C_2 và C_1. Khi đó các đạo hàm riêng chính là độ dốc của các tiếp tuyến T_2 và T_1 của hai đường cong tại điểm $P(a, b, c)$.



Hình: Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng

Đạo hàm riêng

Định lý Clairut

Nếu hàm $f(x, y)$ có đạo hàm riêng bậc nhất liên tục lân cận điểm (a, b) thì

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b) \tag{3}$$

Định lý trên thường được sử dụng trong nhiệt động lực học. Ví dụ, ta có các hàm $F(T, V)$, $P(T, V)$, $S(T, V)$ có các vi phân liên hệ với nhau: $dF = -SdT - PdV$.
Áp dụng định lý Clairut:

$$F_{TV} = F_{VT} \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \tag{4}$$

Phương trình trên là một trong các phương trình Maxwell trong nhiệt động lực học.

Mục lục

1. Trường vô hướng và giải tích đa biến
1.1 Hàm đa biến
1.2 Đạo hàm riêng
1.3 Gradient
1.4 Tích phân đa biến

2. Trường vector và giải tích vector
2.1 Tính xoáy của trường
2.2 Tính phân kỳ của trường
2.3 Một số ứng dụng

Gradient

Định nghĩa

Trường vô hướng gán tương ứng một giá trị vô hướng cho mọi điểm trong không gian.

Ví dụ:

- Trong bản đồ nhiệt độ, nhiệt độ $T(\varphi, \lambda)$ được gán với các kinh độ và vĩ độ.
- Trong trường điện từ, điện thế $V(x, y, z)$ được gán với các tọa độ trong không gian.

Định nghĩa

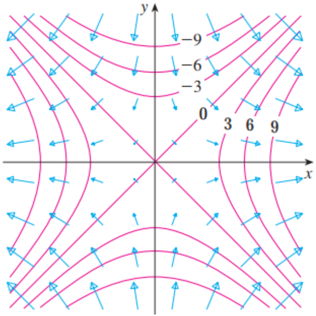
Gradient của trường vô hướng $f(x, y, z)$ là véc-tơ

$$\nabla f = f_x \widehat{\mathbf{x}} + f_y \widehat{\mathbf{y}} + f_z \widehat{\mathbf{z}} \tag{5}$$

Như vậy, ta có thể viết tìm biến thiên df của hàm f khi dịch chuyển một đoạn $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$ trong không gian như sau:

$$df = f_x dx + f_y dy + f_z dz = \nabla f \cdot d\mathbf{r} \tag{6}$$

Về mặt hình học, gradient ∇f chỉ hướng tăng nhanh nhất của hàm f và có độ lớn bằng độ dốc theo hướng này.



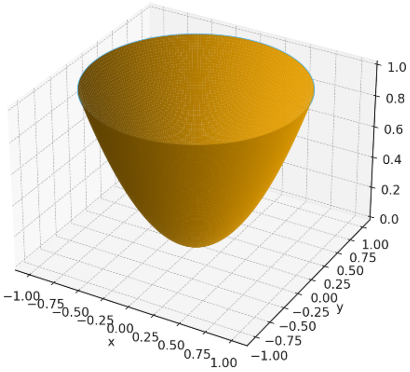
Hình: Ý nghĩa hình học của gradient

Mục lục

1. Trường vô hướng và giải tích đa biến
1.1 Hàm đa biến
1.2 Đạo hàm riêng
1.3 Gradient
1.4 Tích phân đa biến

2. Trường vector và giải tích vector
2.1 Tính xoáy của trường
2.2 Tính phân kỳ của trường
2.3 Một số ứng dụng

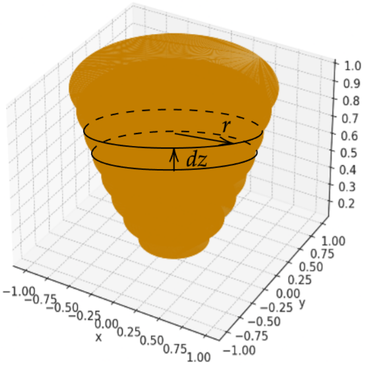
Làm thế nào để tính thể tích của một paraboloid $z = x^2 + y^2$ nằm dưới mặt phẳng $z = a$?



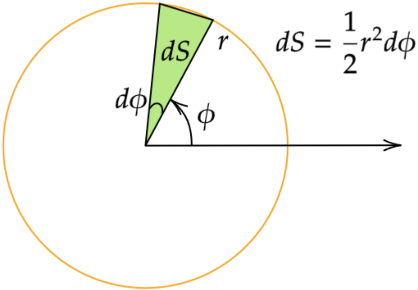
Hình: Paraboloid

Tích phân bội

Thể tích V của paraboloid có thể được tính bằng tổng thể tích của các đĩa dày dz:



Trong hệ tọa độ trụ, diện tích của mỗi đĩa được tính bằng tổng diện tích các tam giác nhỏ có góc nhọn $d\phi$:



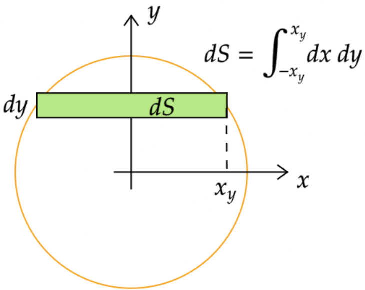
Khi đó, thể tích V có thể được tính như sau:

$$V = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2} d\phi dz \tag{7}$$

Biểu thức trên là một **tích phân hai lớp**.
Như vậy, thể tích của paraboloid là:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^a \pi r^2 dz \\ &= \int_0^a \pi z dz = \boxed{\frac{\pi a^2}{2}} \end{aligned} \tag{8}$$

Trong hệ tọa độ Đề-các, diện tích của đĩa được tính bằng tổng diện tích của các hình vuông nhỏ có chiều rộng dy:



Khi đó, thể tích V có thể được tính như sau:

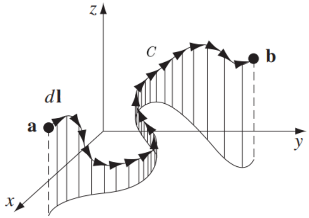
$$V = \int_0^a \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \int_{-\sqrt{z-y^2}}^{\sqrt{z-y^2}} dxdydz \qquad (9)$$

Biểu thức trên là một **tích phân ba lớp**. Thực hiện phép tích phân trên, cuối cùng ta vẫn thu được:

$$V = \boxed{\frac{\pi a^2}{2}} \qquad (10)$$

Tích phân đường

Gọi $\mathbf{v}(x, y, z)$ là một hàm véc-tơ ứng với mọi điểm trong không gian. C là một đường cong trong không gian nối hai điểm **a** và **b**, và có véc-tơ chỉ phương là **u**.



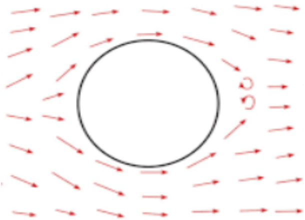
Khi đó tích phân đường của **v** dọc theo C là:

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} dl = \int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}. \tag{11}$$

Định lý cơ bản của giải tích

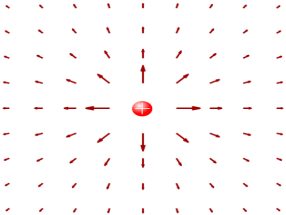
Nếu f là một hàm vô hướng có đạo hàm liên tục trong miền chứa đường cong C nối hai điểm **a** và **b**, thì

$$\int_C \nabla f \cdot d\mathbf{l} = f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a}). \tag{12}$$



Hình: Trường vận tốc của chất lưu

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y) = \mathbf{v}(r, \theta)$$



Hình: Trường tĩnh điện của điện tích điểm

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(r)$$

Mục lục

1. Trường vô hướng và giải tích đa biến

1.1 Hàm đa biến

1.2 Đạo hàm riêng

1.3 Gradient

1.4 Tích phân đa biến

2. Trường vector và giải tích vector

2.1 Tính xoáy của trường

2.2 Tính phân kỳ của trường

2.3 Một số ứng dụng

Trường (lực) thế

1. Giá trị của tích phân đường (công) chỉ phụ thuộc vào điểm đầu và điểm cuối:

$$-\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = V(\mathbf{r}_1) - V(\mathbf{r}_2).$$

2. Lưu số trên một đường cong kín là bằng không:

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = 0.$$

3. Trường lực thế có thể biểu diễn dưới dạng gradient của một hàm vô hướng:

$$\mathbf{F} = -\nabla V.$$

Ví dụ về các lực thế: lực hấp dẫn, lực đàn hồi, ...

Quan hệ giữa các tính chất của trường thế

Từ tính chất thứ nhất,

$$-\mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}V.$$

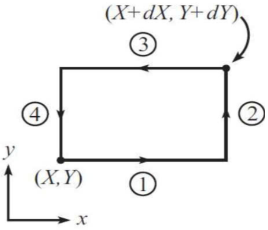
Do đó,

$$-(F_x\mathrm{d}x + F_y\mathrm{d}y + F_z\mathrm{d}z) = \partial_x V\mathrm{d}x + \partial_y V\mathrm{d}y + \partial_z V\mathrm{d}z.$$

Đồng nhất hai vế,

$$\mathbf{F} = -\nabla V.$$

Từ tính chất thứ hai (xét trên mặt phẳng xy),



$$\oint \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \mathrm{d}X\mathrm{d}Y\,(\partial_x F_y - \partial_y F_x) = 0.$$

Tương tự cho các mặt phẳng khác,

$$\mathrm{d}Y\mathrm{d}Z\,(\partial_y F_z - \partial_z F_y) = 0.$$
$$\mathrm{d}X\mathrm{d}Z\,(\partial_z F_x - \partial_x F_z) = 0.$$

Curl và định lý Curl (Stokes)

Curl của **F** được định nghĩa là

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \det\left(\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_x & F_y & F_z \end{bmatrix}\right).$$

Định lý Stokes tổng quát hoá cho mọi bề mặt:

$$\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{da} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl}.$$

Chú ý, $\mathcal{C}$ là đường biên của bề mặt $\mathcal{S}$. Số hạng ở vế phải được gọi là *lưu số* của trường **F** trên đường cong kín $\mathcal{C}$.

Curl của một trường thế bằng không nên **F** phải có dạng $-\nabla V$ vì

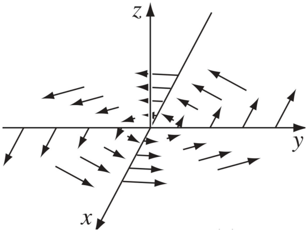
$$\nabla \times (\nabla V) = 0 \quad \forall V.$$

Cụ thể,

$$\begin{aligned} \partial_{xy} V &= \partial_{yx} V, \\ \partial_{yz} V &= \partial_{zy} V, \\ \partial_{zx} V &= \partial_{xz} V. \end{aligned}$$

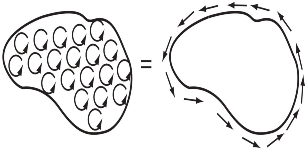
Tóm lại, điều kiện cần và đủ của một trường thế là

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

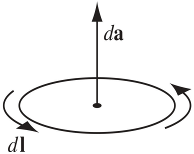


$$\mathbf{v} = -y\hat{x} + x\hat{y},$$

$$\nabla \times \mathbf{v} = 2\hat{z}.$$



Hình: Định lý Stokes



Hình: Chiều của vector pháp tuyến

Mục lục

1. Trường vô hướng và giải tích đa biến

1.1 Hàm đa biến

1.2 Đạo hàm riêng

1.3 Gradient

1.4 Tích phân đa biến

2. Trường vector và giải tích vector

2.1 Tính xoáy của trường

2.2 Tính phân kỳ của trường

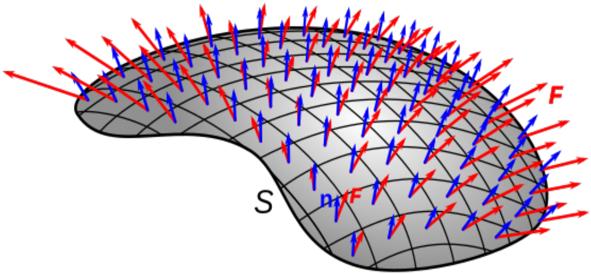
2.3 Một số ứng dụng

Lượng nước đi qua tiết diện $= \mathbf{v} \cdot \hat{n} A \Delta t$.

Nếu tiết diện gấp khúc: $\sum_i^n \mathbf{v} \cdot \hat{n}_i A_i \Delta t$.

Nếu tiết diện là một mặt cong liên tục: $\lim_{n\to\infty} \sum_i^n \mathbf{v} \cdot \hat{n}_i A_i \Delta t$.

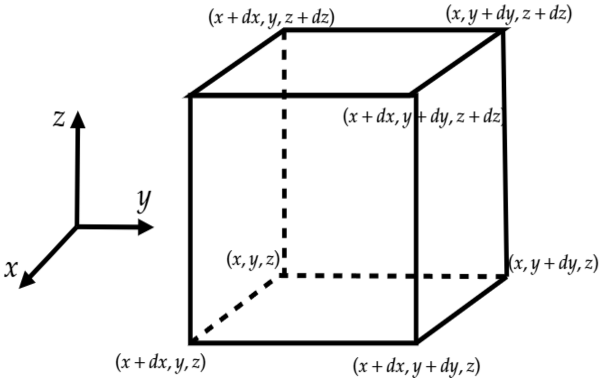
Tích phân mặt và thông lượng



$$\phi = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{a}.$$

ϕ được gọi là *thông lượng* của trường **F** qua bề mặt $\mathcal{S}$.

Div và định lý Divergence (Gauss)



$$\begin{aligned}\delta\phi =& (F_x(x+dx) - F_x(x))dydz \\ &+ (F_y(y+dy) - F_y(y))dxdz \\ &+ (F_z(z+dz) - F_z(z))dxdy \\ =& (\partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z)dxdydz.\end{aligned}$$

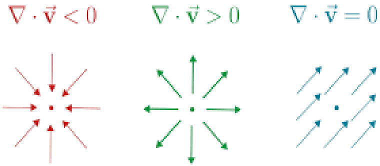
Với $\nabla \cdot \mathbf{F} \equiv \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$,

$$\delta\phi = \nabla \cdot \mathbf{F} d\tau.$$

Định lý Divergence phát biểu rằng

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{da} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \mathbf{F} d\tau.$$

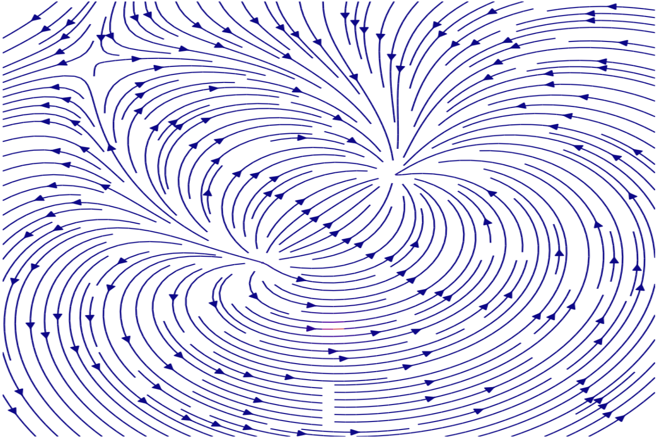
Nguồn và giếng, phương trình liên tục



$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{a} + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho \mathrm{d}\tau = 0.$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Hình ảnh ví dụ cho một trường vector với các xoáy, nguồn, và giếng



Các đạo hàm

1. $\nabla \times (\nabla V) = 0$ với mọi hàm vô hướng V.
2. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ với mọi hàm vector $\mathbf{F}$.
3. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$, với ∇^2 là toán tử Laplace, được định nghĩa

$$\nabla^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2.$$

Ta cũng có thể viết

$$\nabla^2 \mathbf{F} = (\nabla \cdot \nabla)\mathbf{F}.$$

Ngoài ra,

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{F}$$

biểu thị xấp xỉ tuyến tính cho "vi phân" của $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r} + \mathbf{u}) - \mathbf{F}(\mathbf{r}) \approx (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{F}.$$

Mục lục

1. Trường vô hướng và giải tích đa biến
   - 1.1 Hàm đa biến
   - 1.2 Đạo hàm riêng
   - 1.3 Gradient
   - 1.4 Tích phân đa biến

2. Trường vector và giải tích vector
   - 2.1 Tính xoáy của trường
   - 2.2 Tính phân kỳ của trường
   - 2.3 Một số ứng dụng

Áp suất-phương trình cân bằng thuỷ tĩnh

Một hệ quả quan trọng của định lý Divergence, với một vô hướng T, là

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla T) \mathrm{d}\tau = \oint_{\mathcal{S}} T \mathrm{d}\mathbf{a}.$$

Với áp suất p trong chất lỏng, phương trình thu được là

$$\int_{\mathcal{V}} (\nabla p) \mathrm{d}\tau = \oint_{\mathcal{S}} p \mathrm{d}\mathbf{a}.$$

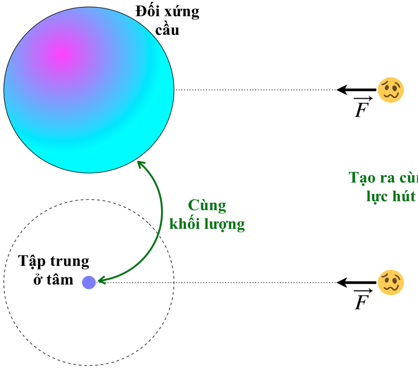
Như vậy,

$$-\nabla p + \mathbf{f}_V = \mathbf{0},$$

với $\mathbf{f}_V$ là lực thể tích. Trong trường trường hợp của trọng trường,

$$\nabla p = \rho \mathbf{g}.$$

Lực hấp dẫn của một khối/vỏ cầu đồng nhất



$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 F_r) = -4\pi G\rho.$$

$$\implies (\mathbf{F}\cdot\hat{r}) \oint_{\mathcal{S}} da = -4\pi G\rho \times \frac{4\pi}{3}R^3.$$

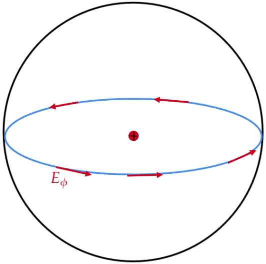
$$\implies F_r = -\frac{4\pi G\rho}{3}\frac{R^3}{r^2}.$$

$$\implies F_r = -\frac{GM}{r^2}$$

Với $M = \frac{4\pi R^3}{3}\rho$. Ở đây ta đã đặt $m = 1kg$.

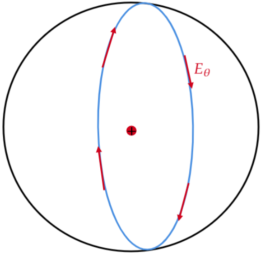
Bốn phương trình Maxwell trong chân không

1. Định lý Gauss
$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1} \rho.$$
2. Định lý về sự không tồn tại của đơn cực từ
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0.$$
3. Định luật Faraday
$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}.$$
4. Định lý Ampere-Maxwell
$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}.$$



$$E_\phi 2\pi r = 0.$$

$$\implies E_\phi = 0.$$



$$E_\theta 2\pi r = 0.$$

$$\implies E_\theta = 0.$$

Trong tĩnh điện, $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$.
Thành thử,

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \implies \mathbf{E} = \mathbf{E}_r \hat{r}.$$

Điều kiện biên:

$$\lim_{r \to \infty} \mathbf{E}(r) \to \mathbf{0}.$$

Định lý Gauss:

$$\oint_{\mathcal{S}} \mathbf{E} \cdot \hat{r}\ da = \varepsilon_0^{-1} q.$$

Như vậy,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$

Tài liệu tham khảo I

[1] D. Morin, *Introduction to classical mechanics: with problems and solutions*. Cambridge University Press, 2008.

[2] J. Stewart, *Calculus 2*, 7th. Cengage Learning, 2012.

[3] 3Blue1Brown, *Divergence and curl: The language of maxwell's equations, fluid flow, and more*, [Online]. Available: `https://youtu.be/rB83DpBJQsE?si=p7fj_iWCeCR2G_VJ`.

[4] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*. Cambridge University Press, 2023.