Na výše zmíněném grafu platí:

$$a \perp\!\!\!\perp e|c$$
$$a \not\perp\!\!\!\perp e|d$$
$$a \not\perp\!\!\!\perp e|\{c,d\}$$

2.4.1 D-separace a Markovský obal

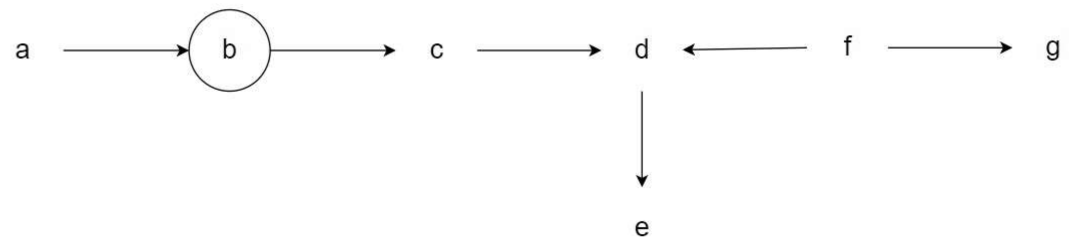
Na minulém příkladu jsme ukázali nezávislost dvou vrcholů vůči sobě, dále je však nutné definovat neávislost vrcholu (soubor vrcholů) A vůči jinému vrcholu (souboru vrcholů) B v závislosti na třetím třetím vrcholu (souboru vrcholů) C. K tomu potřebujeme zavést pojem D-separace (directed-separation). Nechť je graf $G = (V, E)$ orientovaný a acyklický, a A je soubor vrcholů takový, že platí: $A \subseteq V$, X a Y jsou vrcholy v $V - A$ a ρ je řetězec mezi A, B. Poté ρ je **blokováno** A, pokud platí alespoň jedno z následujících:

- Pakliže nevede orientovaná cesta z A do B.
- Existuje $C \in A$ v řetězci ρ, a neexistuje orientovaná cesta z A do B, která by neobsahovala C.

První bod se týká situace, kdy množina C vrcholů je prázdná a závislost vrcholů A, B závisí pouze na orientaci hran. Motivace pro druhé pravidlo vychází z faktu, že pokud uvažujeme hodnoty vrcholů ze Z jako dané, změní se podmíněné rozdělení náhodných veličin, které jsou reprezentovány pomocí zbylých vrcholů.

Speciálním případem při vyhodnocování d-separace je případ známý také jako **Berksonův paradox**. Pakliže sledujeme dvě efekt dvou nezávislých veličin, pak se tyto veličiny stanou závislé tím, že pokud se dozíme informaci o jedné, výskyt té druhé se stane pravděpodobnější resp. méně pravděpodobný.

Pokud toto vztáhneme na hledání závislosti mezi vrcholy A, B v závislosti na C platí, že: Pokud neexistuje orientovaná cesta z A do B a blokující uzel patří, či má potomka v C poté již cesta není nadále d-separovaná. [**?**]



Obr. 9: Příklad d-separace

Příklad: Mějme možinu vrcholů $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ a množinu $C = \{b, e\}, C \subseteq B$.

- $c \not\perp\!\!\!\perp f|\{b, e\}$, přestože je vrchol D kolizním vrcholem, jeho dítětem je vrchol e, dle pravidla číslo 3 tedy vrchol e přestává být kolizním.
- $a \perp\!\!\!\perp g|\{b, e\}$, přestože vrchol d není blokujícím vrcholem (viz. předchozí příklad), cesta obsahuje vrchol $b \in Z$, a tudíž dle pravidla č. 1, jsou vrcholy a, g d-separované.

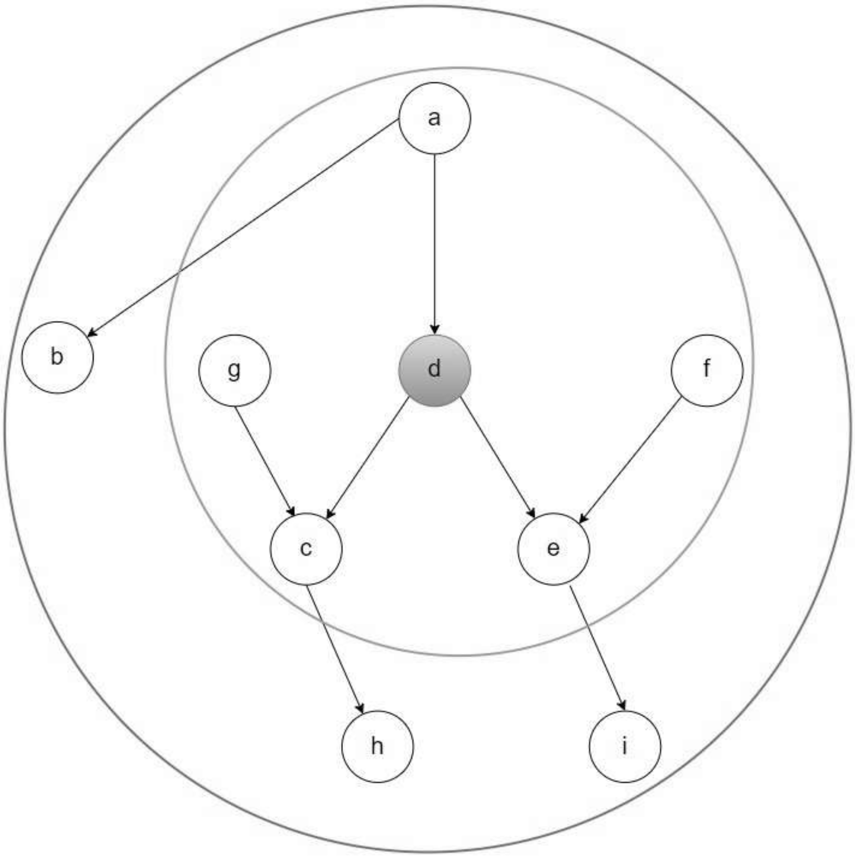
Věta: Pakliže jsou dva vrcholy (množiny vrcholů) d-separovatelné, poté jsou také podmíněně nezávislé.

Plynule navazujícím pojmem je takzvaný **markovský obal**. Markovský obal vrcholu d z množiny náhodných veličin $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ je jákékoli $V_1 \subset V$ takové, že platí $V_1 \perp\!\!\!\perp d$, neboli:

$$d \perp\!\!\!\perp (V \setminus V_1)|V_1$$

Obecný Markovský obal není jednoznačný, jelikož jakákoli množina vrcholů obsahující Markovský obal, je sama Markovským obalem. Z tohoto důvodu se zavedeme pojem **Markovská harnice**.

Markovská hranice vrcholu $d \in V$ reprezentuje $V_1 \subset V$, takové že V_1 je Markovským obal a neexistuje další podmožina V_2, která by byla Markovským obalem. Markovská hranice je tedy nejmenším možným Markovským obalem a je tvořena: rodiči vrcholu d, dětmi vrcholu d, rodiči dětí vrcholu d. [**?**]



Obr. 10: Markovský obal vrcholu d (červeně i zeleně) a hranice pouze zeleně)

Na obrázku výše lze vidět, že Markovská hranice je reprezentována zelenou kružnicí a je jednoznačná, zatímco Markovský obal označují obě kružnice, jednak Markovská hranice (minimální Markovský obal) a červená kružnice, která obsahuje Markovský obal, a zároveň redundantní vrcholy.