Сгенерируем выборку $X_1 \ldots X_{100}$ из распределения P_θ в указанных теоретических задачах. Для уровня доверия α для всех $n \leq 100$ построим доверительный интервал, определенный в задаче. Изобразим их на графиках.

Для $n = 10$ и $n = 100$ оценим вероятность попадания истинного значения θ в интервал. Для этого сгенерируем достаточное количество выборок, построим по каждой из них интервалы и определим, сколько раз в интервалы попадет истинное значение θ. Таким образом будет построена бернуллиевская выборка, по ней оценим вероятность.

In [11]:
```
import scipy.stats as stats
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import pylab
%matplotlib inline
```

In [12]:
```
N = 100
alpha = 0.95
```

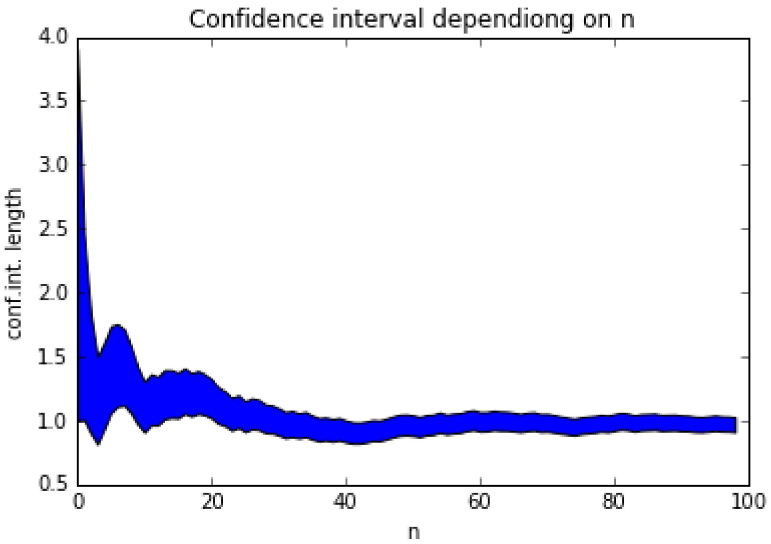
In [75]:
```
def solve_task(distribution, confidence_start_f, confidence_end_f):
    # Генерируем выборку.
    sample = distribution(N)
    conf_points_begins = np.zeros(N - 1)
    conf_points_ends = np.zeros(N - 1)
    for n in range(1, N):
        # Строим доверительный интервал уровня доверия alpha.
        confidence_start = confidence_start_f(sample[:n])
        confidence_end = confidence_end_f(sample[:n])
        # Добавляем его в лист.
        conf_points_begins[n-1] = confidence_start
        conf_points_ends[n-1] = confidence_end
    n = range(N - 1)
    plt.figure()
    plt.fill_between(n, conf_points_begins, conf_points_ends, where=conf_points_ends >= conf_points_begins)
    plt.title(r"Confidence interval dependiong on n")
    plt.xlabel(r'n')
    plt.ylabel(r'conf.int. length')
    plt.show()

    # Оценим вероятность попадания истинного значения theta в интервал для n = 10,100.
    # n = 10, 500 выборок.
    positive_10 = 0
    for i in range(500):
        cur_sample = distribution(10)
        confidence_start = confidence_start_f(cur_sample)
        confidence_end = confidence_end_f(cur_sample)
        if (confidence_start <= 1 <= confidence_end):
            positive_10 += 1
    probability_10 = positive_10 / 500.
    # n = 100, 100 выборок.
    positive_100 = 0
    for i in range(100):
        cur_sample = distribution(100)
        confidence_start = confidence_start_f(cur_sample)
        confidence_end = confidence_end_f(cur_sample)
        if (confidence_start <= 1 <= confidence_end):
            positive_100 += 1
    probability_100 = positive_100 / 100.

    print("Вероятность попадания истинного значения theta (для n=",10,")=", probability_10)
```

```
    print("Вероятность попадания истинного значения theta (для n=",100,")=", probability_100)
```

Равномерное распределение.

Доверительный интервал: $\left(\frac{\bar{X}}{\frac{1}{2}+E}, \frac{\bar{X}}{\frac{1}{2}-E}\right)$, где $E = \sqrt{\frac{1}{12\alpha n}}$

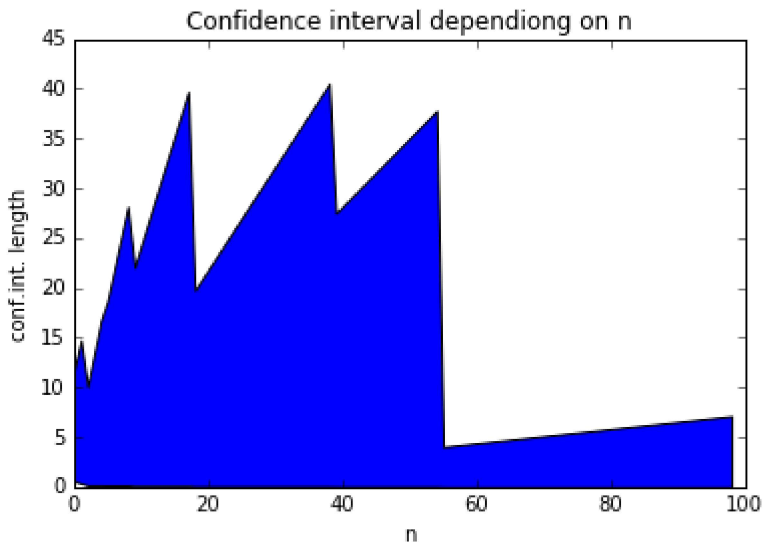
In [76]:
```
solve_task(distribution = (lambda N: stats.uniform.rvs(size = N)),
           confidence_start_f=(lambda sample: np.mean(sample) / (1./2 + np.sqrt(1 / (12 * alpha * len(sample)))) ),
          confidence_end_f=(lambda sample: np.mean(sample) / (1./2 - np.sqrt(1 / (12 * alpha * len(sample)))) ) )
```




```
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 10 )= 0.678
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 100 )= 0.67
```

Доверительный интервал: $\left(X_{(1)}, \frac{X_{(1)}}{1-(\alpha)^{\frac{1}{n}}}\right)$

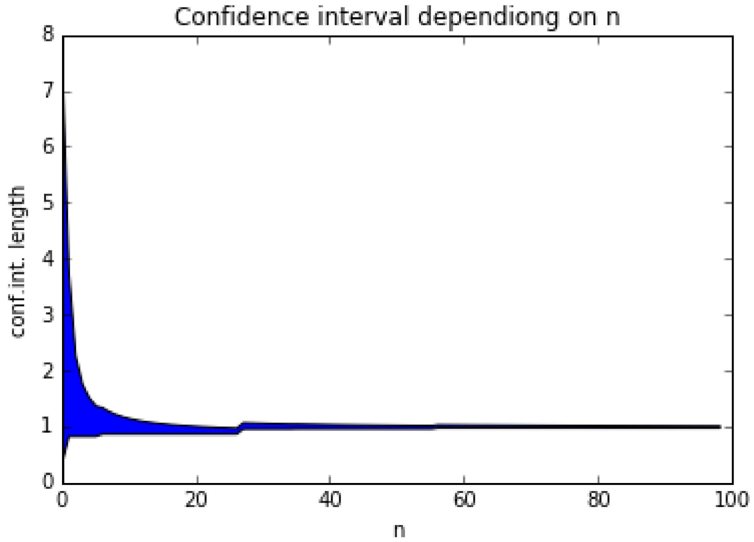
In [77]:
```
solve_task(distribution = (lambda N: stats.uniform.rvs(size = N)),
           confidence_start_f=(lambda sample: np.min(sample)),
          confidence_end_f=(lambda sample: np.min(sample) / (1 - np.power(0.95, 1. / len(sample))) ) )
```




```
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 10 )= 0.974
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 100 )= 0.99
```

Доверительный интервал: $(X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}})$

In [78]:
```
solve_task(distribution = (lambda N: stats.uniform.rvs(size = N)),
           confidence_start_f=(lambda sample: np.max(sample)),
          confidence_end_f=(lambda sample: np.max(sample) / (np.power(0.05, 1. / len(sample))) ) )
```



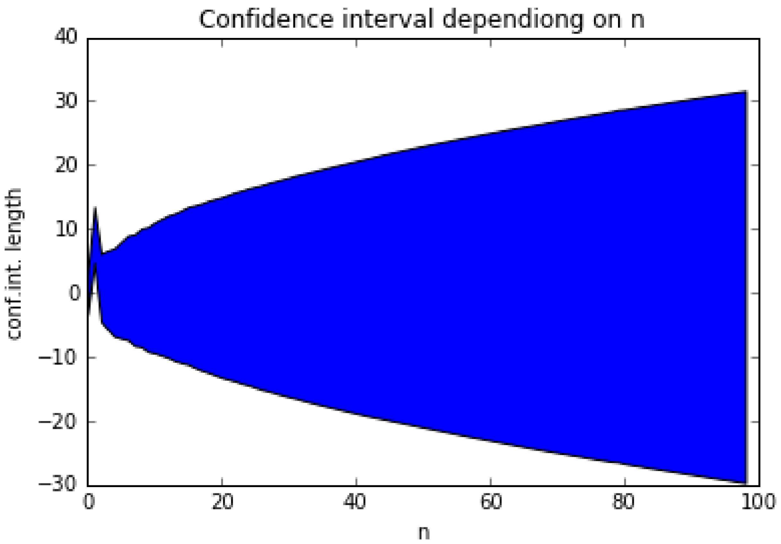

```
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 10 )= 0.952
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 100 )= 0.97
```

По этим графикам и вероятностям, видно, что последний доверительный интервал лучше двух предыдущих.(Точнее оценивает параметр θ). А первый доверительный интервал, показывает уровень доверия ниже ожидаемого.

Распределение Коши со сдвигом.

Доверительный интервал $(\hat{\mu} - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\pi}{2\sqrt{n}}, \hat{\mu} + u_{\frac{1+\alpha}{2}} \frac{\pi}{2\sqrt{n}})$, квантиль смотрим в таблице.

In [84]:
```
solve_task(distribution = (lambda N: stats.cauchy.rvs(size = N, loc = 1.)),
           confidence_start_f=(lambda sample: np.median(sample) - stats.norm.ppf((1 + alpha) / 2) *
                                np.pi / 2 * np.sqrt(len(sample))),
          confidence_end_f=(lambda sample: np.median(sample) + stats.norm.ppf((1 + alpha) / 2) *
                                np.pi / 2 * np.sqrt(len(sample))) )
```

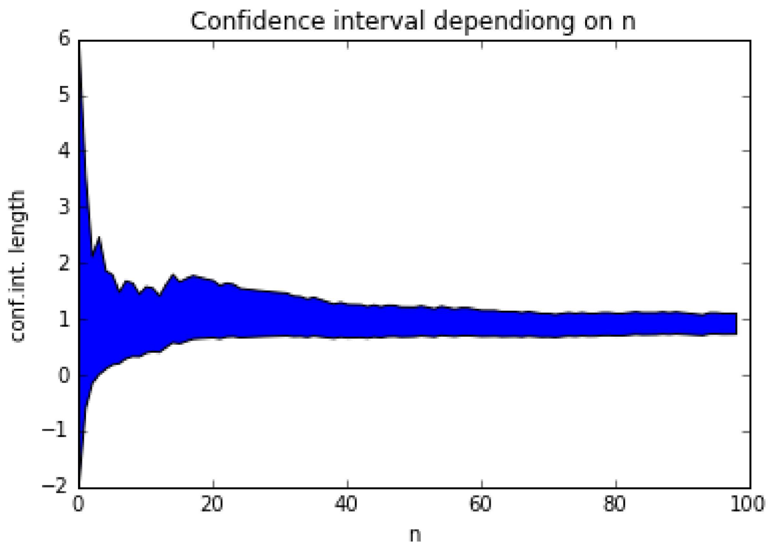



```
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 10 )= 1.0
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 100 )= 1.0
```

Пуассоновское распределение.

Доверительный интервал: $(\bar{X}(1 - \frac{u_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}), \bar{X}(1 + \frac{u_{\frac{1+\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}))$.

In [86]:
```
solve_task(distribution = (lambda N: stats.poisson.rvs(1., size = N)),
           confidence_start_f=(lambda sample: np.mean(sample) * (1 - stats.norm.ppf((1 + alpha) / 2) / np.sqrt(len(sample)
          confidence_end_f=(lambda sample: np.mean(sample) * (1 + stats.norm.ppf((1 + alpha) / 2) / np.sqrt(len(sample)))
```

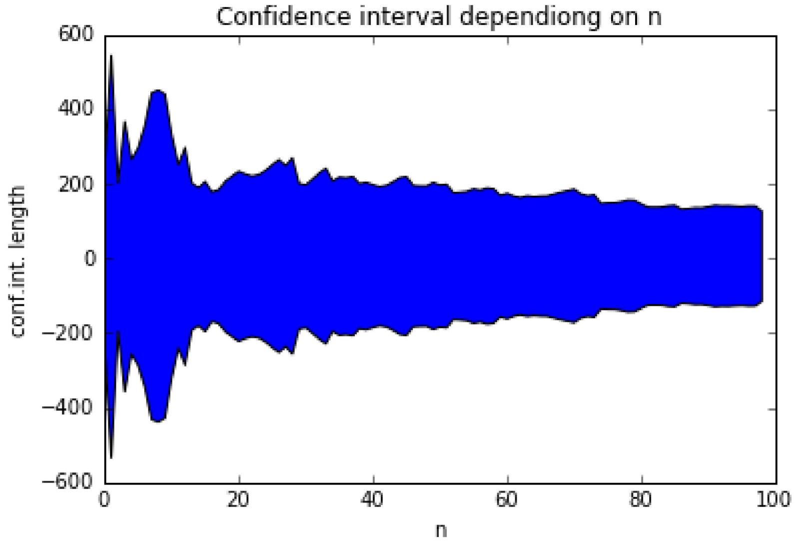



```
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 10 )= 0.854
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 100 )= 0.96
```

Гамма распределение. $(\theta, \lambda) = (10, 1)$

Доверительный интервал: $(\frac{\lambda}{\bar{X}} - u_{\frac{1+\alpha}{2}}(\frac{\lambda}{\bar{X}})^3\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{\lambda}{\bar{X}} + u_{\frac{1+\alpha}{2}}(\frac{\lambda}{\bar{X}})^3\frac{1}{\sqrt{n}})$

In [87]:
```
# lambda = alpha = 1, theta = 1 = 1 / scale
# В библиотеке распределение определено так: gamma.pdf(x, a) = x**(a-1) * exp(-x) / gamma(a)
solve_task(distribution = (lambda N: stats.gamma.rvs(a = 1., scale = 1./10, size = N)),
           confidence_start_f=(lambda sample: 1 / np.mean(sample) - stats.norm.ppf((1 + alpha) / 2) / np.sqrt(len(sample))
                               np.power((1 / np.mean(sample)),3) ),
          confidence_end_f=(lambda sample: 1 / np.mean(sample) + stats.norm.ppf((1 + alpha) / 2) / np.sqrt(len(sample)) *
                               np.power((1 / np.mean(sample)),3) ))
```




```
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 10 )= 1.0
Вероятность попадания истинного значения theta (для n= 100 )= 1.0
```

Вывод. Мы построили доверительные интервалы, для указанных распределений. Среди доверительных интервалов у равномерного, самым точно ограничивающим θ оказался интервал $(X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}})$. Мы увидели, что доверительные интервалы, в зависимости от размера выборки, могут как сходиться по ширине, так и расходиться.(Соответственно сильнее или слабее ограничивать параметры). В целом, все интервалы, действительно предсказывают попадание параметра в них с вероятностью больше 0.95, за исключением первого в равномерном.

In [ ]:
```
```