**Universidade Federal do Paraná** **Departamento de Economia**

**Economia Matemática** **Professor: Victor Oliveira**

**Lista de Exercícios II – A**

1) Considere a função de produção $f(x,y) = \ln c + \alpha \ln x + \beta \ln y$ com função custo $C = \omega_1 x + \omega_2 y$. Determine o nível de insumos que minimiza o custo.

2) Suponha que um indivíduo tenha função de utilidade $U(x,y) = xy$.

   a) Encontre as funções de demanda individual $x^*$ e $y^*$, bem como $\lambda^*$.

   b) Mostre, por estática comparativa, o efeito de um aumento de $p_x$ e da renda sobre $x^*$.

   c) Seja $U^* = U(x^*, y^*)$ é a utilidade máxima atingida por um indivíduo dada a restrição. Encontre $\dfrac{dU^*}{dR}$, em que $R$ é a renda, e mostre que é a mesma que $\lambda^*$.

3) Suponha que a função de utilidade de um indivíduo possa ser representada por

$$U(x,y,z) = a\ln(x) + b\ln(y) + c\ln(z) \tag{1}$$

   sujeito a $a + b + c = 1$ e $a, b, c > 0$.

   a) Resolva as condições de primeira ordem para as funções de demanda do consumidor, assumindo que o consumidor maximiza a utilidade.

   b) Encontre todas as estáticas comparativas para cada bem em relação a cada preço e ao orçamento disponível $R$.

   c) Encontre todas as estáticas comparativas para $\lambda^*$ e interprete.

4) Um monopolista vende dois produtos pelos seguintes preços

$$p_1 = 256 - 3q_1 - q_2 \tag{2}$$
$$p_2 = 222 + q_1 - 5q_2 \tag{3}$$

   em que $p_1$ e $p_2$ são os preços e $q_1$ e $q_2$ são as quantidades produzidas. A função custo é $C(q_1, q_2) = q_1^2 + q_1 q_2 + q_2^2$. Encontre as quantidades que maximizam os lucros.

5) Um monopolista produz um bem que é comprado por dois tipos de consumidores. Os consumidores do tipo 1 estão dispostos a pagar $50 - 5q_1$ reais para comprar $q_1$ unidades do bem. Os consumidores do tipo 2 estão dispostos a pagar $100 - 10q_2$ reais para comprar $q_2$ unidades do bem. A função custo do monopolista é $C(q) = 90 + 20q$ reais. Quanto deve ser a produção monopolista em cada mercado?

6) Suponha que os preços de mercado de dois insumos $K$ e $L$ sejam: $P_K = r = 10$ e $P_L = w = 10$. A empresa, portanto, enfrenta a função de custo $C = rK + wL = 10K + 10L$. Suponha que a empresa tenha uma meta de produção de, digamos, 80 unidades. Portanto, esta empresa enfrenta a seguinte restrição: $Q(K, L) = 2K^{0,5}L^{0,5}$. Aqui o problema de decisão da empresa é minimizar o custo de produção sujeito à restrição de produção. Qual a escolha ótima dos insumos?

7) A função de demanda de uma médica é $q = 15.000 - 10p$, em que $q$ é o número de pacientes em seu consultório que pagam $p$ reais anualmente. Sua função de custo total para $q$ pacientes é $\mathrm{CT} = 380.000 + 70q + 0,04q^2$. A médica deseja determinar quantos pacientes atender em seu consultório para maximizar seu lucro $\pi$, em que $\pi = \mathrm{RT} - \mathrm{CT}$ com $\mathrm{RT} = pq$.

   a) Quantos pacientes particulares ela deveria aceitar e a que preço anual $p$ para maximizar seu lucro?
   b) A médica está considerando se participará de um programa governamental que lhe pagará R$ 700 para cada paciente encaminhado pelo estado que ela inclua em seu rol de pacientes. Use sua receita marginal com lucro máximo para mostrar por que a médica deveria participar do programa do governo.
   c) Para determinar o novo lucro máximo da médica (assumindo que seu consultório possa incluir tantos pacientes do governo quantos ela desejar) use a receita marginal e o custo marginal para calcular quantos pacientes particulares e quantos pacientes do governo que ela deveria cobrir.

8) Tiago e Eduardo acabaram de receber sua primeira patente para um novo sistema de jogo portátil. Estabeleceram a sua empresa inicial num armazém e ainda não determinaram os seus custos fixos. Enquanto isso, para determinar o número $q$ de unidades demandadas para seu sistema ao preço $p$ por unidade, eles o colocaram no mercado em duas áreas muito semelhantes a dois preços diferentes: \$720 em uma área e \$500 na outra. Desde que sejam capazes de apoiar a procura e não haja escassez em nenhum dos mercados, serão capazes de utilizar a sua experiência para estabelecer a sua função de demanda. Eles descobrem que vendem $q = 1720$ unidades ao preço de $p = \$720$, e vendem $q = 3480$ unidades ao preço de $p = 500$.

   a) Use seus resultados para expressar $p$ como uma função linear de $q$. A que preço e quantidade Tiago e Eduardo maximizarão sua receita total?
   b) Tiago e Eduardo esboçaram os gráficos de receita total e de receita marginal no mesmo eixo (com $q$ no eixo horizontal) e notaram que a receita total máxima é a área do triângulo cujos vértices são $(0, 0)$, $(0, 935)$, $(3740, 0)$. Isso os motivou a provar que a receita total como função de $q$ é a área sob a curva da receita marginal de 0 a $q$. Mostre como eles fizeram isso.
   c) Tiago e Eduardo estavam se perguntando para qual $q \in [0, 3740]$, a receita total média por unidade $q$ é igual ao valor médio da função de receita total? Qual é a sua resposta e por quê?
   d) Tiago e Eduardo estão sentados para discutir o lucro com base na função de custo total e na função de receita total. Mostre por que a receita marginal é igual ao custo marginal quando seu lucro é máximo. Quantas unidades $q$ a que preço $p$ produz o lucro máximo? Qual o custo total e a receita total quando o lucro está no máximo?

e) Para ter uma ideia melhor de como a demanda muda conforme o preço muda, Tiago e Eduardo calcularam a elasticidade-preço de demanda pelos valores de $p$ e $q$ nos quais o lucro é maximizado. Se aumentarem o seu preço em 3% por unidade, qual seria o efeito sobre a demanda por seu produto?

f) Tiago e Eduardo estão se perguntando se deveriam se envolver em uma campanha publicitária e mudar para um local mais agradável. Embora a publicidade e o novo espaço alugado aumentem o seu custo fixo para 120.000 reais, eles pensam que terão maior lucro vendendo mais unidades a um preço mais baixo com base na relação $p = 960 - 0,1q$. Determine se Tiago e Eduardo deveriam anunciar e se mudar para um lugar melhor.

9) Na maioria dos cursos de econometria, a regressão linear começa com a localização dos estimadores de mínimos quadrados em um sistema simples de duas variáveis. O modelo descreve a resposta $y_i$ para cada valor $x_i$ da variável independente $x$,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \tag{4}$$

em que $\beta_0$ e $\beta_1$ são parâmetros desconhecidos, e a variável aleatória $\varepsilon$ tem valor esperado $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ e variância constante $\sigma^2$. Assim, para cada valor de $x_i$, a variável aleatória $y_i$ é distribuída com média condicional $\mathbb{E}(y_i|x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$ e variância $\sigma^2$. A notação $\mathbb{E}(y_i|x_i)$ indica que uma vez escolhido $x_i$, a distribuição de $y_i$ tem média $\beta_0 + \beta_1 x_i$.

Suponha que tenhamos $n$ observações ($i = 1, \ldots, n$). Se $b_0$ e $b_1$ são estimadores de $\beta_0$ e de $\beta_1$, então:

$$\hat{y}_i = b_0 + b_1 \hat{x}_i \tag{5}$$

é uma estimativa de $y_i$. O estimador de mínimos quadrados de $\beta_0$ e $\beta_1$ são os valores de $b_0$ e $b_1$ que minimizam a soma dos quadrados dos resíduos,

$$L = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - b_0 - b_1 x_i]^2 \tag{6}$$

Pede-se:

a) Minimize $L$ com relação a $\beta_0$ e $\beta_1$.

b) Mostre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$.

c) Mostre que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} e_i x_i = 0$.

d) Encontre a condição de segunda ordem. O que ela implica?

10) Quando os retornos das ações dependem uns dos outros, a variância de uma soma não é apenas a soma das variâncias, mas também inclui termos de covariância. A covariância mede o grau de dependência entre os dois retornos. Para duas ações, a variância de $\omega_1 R_1 + \omega_2 R_2$ é

$$\sigma^2 = \omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \mathrm{cov}(R_1, R_2) \tag{7}$$

Suponha que $\omega_1^2 = 2$, $\omega_2^2 = 1$ e $\mathrm{cov}(R_1, R_2) = -1$. Quais valores de $\omega_1$ e $\omega_2$ minimizam a variância do portfólio? São pesos diferentes daqueles que minimizam a variância no caso independente? Quão menor é a variância mínima no caso dependente do que no caso independente?

11) Buscar maximizar o retorno esperado avesso ao risco $\mu - a\sigma^2$ reduz o problema do portfólio ao problema de otimização restrita

$$\max\ f(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) = \omega_1\mu_1 + \omega_2\mu_2 + \omega_3\mu_3 + \omega_4\mu_4 - a\left(\omega_1^2\sigma_1^2 + \omega_2^2\sigma_2^2 + \omega_3^2\sigma_3^2 + \omega_4^2\sigma_4^2\right) \tag{8}$$

sujeito a restrição $g(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 - 1 = 0$. Use as derivadas parciais $\dfrac{\partial L}{\partial \omega_i}$, $i = 1, 2, 3, 4$, e $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}$ do Lagrangeano

$$L(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) = f(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) - \lambda g(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) \tag{9}$$

para obter um sistema de cinco equações com incógnitas $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \lambda$. Mostre que a solução do sistema de equações simultâneas é

$$\omega_2 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\omega_1 + \frac{\mu_2 - \mu_1}{2a\sigma_2^2} \tag{10}$$

$$\omega_3 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2}\omega_1 + \frac{\mu_3 - \mu_1}{2a\sigma_3^2} \tag{11}$$

$$\omega_4 = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_4^2}\omega_1 + \frac{\mu_4 - \mu_1}{2a\sigma_4^2} \tag{12}$$

$$\omega_1 = \frac{1 - \dfrac{\mu_2 - \mu_1}{2a\sigma_2^2} - \dfrac{\mu_3 - \mu_1}{2a\sigma_3^2} - \dfrac{\mu_4 - \mu_1}{2a\sigma_4^2}}{1 + \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} + \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_3^2} + \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_4^2}} \tag{13}$$

12) Considere a função de produção $f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$, $\alpha > 0, \beta > 0$, com restrição orçamentária $\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = C$, em que $\omega_i$ é o custo por unidade de $x_i$. A região de viabilidade $\Omega$ é a porção da linha $\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 = C$ situada no primeiro quadrante. Como $f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$ e $f(x_1, x_2) \geq 0$ em $\Omega$, o mínimo absoluto de $f(x_1, x_2)$ é 0. Para encontrar o máximo absoluto de

$f$, seja $L = x_1^{\alpha} x_2^{\beta} - \lambda(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 - C)$. Encontre $x_1^*$, $x_2^*$ e $\lambda^*$. Prove que, de fato, o resultado obtido maximiza a função objetivo no conjunto-restrição.

13) Suponha que uma empresa produz três produtos $Q_1$, $Q_2$ e $Q_3$ e que o lucro que obtém em $Q_1$ e $Q_2$ depende do seu nível de produção, de modo que os respectivos lucros unitários de $Q_1$, $Q_2$ e $Q_3$ são, respectivamente, $46 - 0,5Q_1$, $43,25 - 0,25Q_2$ e 20. Suponha também que cada unidade de $Q_1$ requer 2 unidades de trabalho e 3 unidades de terra; cada unidade de $Q_2$ requer 1 unidade de trabalho e 2 unidades de terra; cada unidade de $Q_3$ requer 3 unidades de trabalho e 2 unidades de terra; e os montantes totais de mão-de-obra e terra disponíveis são de 230 unidades e 280 unidades, respectivamente. A firma não precisa utilizar todos os recursos disponíveis. Calcule os valores ótimos de $Q_1$, $Q_2$ e $Q_3$ e o lucro máximo. Prove que o lucro é realmente máximo.