Econometria I

Teste de Hipóteses

Victor Oliveira

Núcleo de Economia Internacional e Desenvolvimento Econômico

PPGDE – 2023

Sumário I

O Modelo Estatístico Clássico

- O modelo estatístico clássico é definido pela trinca

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}) \tag{1}$$

em que

- Ω é o espaço de resultados do experimento
- $\mathcal{F}$ é uma σ-álgebra de Ω
- $\mathcal{P}$ é uma família de medidas de probabilidade

Quantidades de interesse

$g(P) = \mathbb{E}_P(Z)$
$g(P) = \mathbb{E}_P(Z_1 \in B | Z_2 \in A)$
$g(P) = \text{var}_P(Z)$

$$\begin{array}{c} P_1 : \mathcal{F} \to [0,1] \\ P_2 : \mathcal{F} \to [0,1] \\ \vdots \\ P_j : \mathcal{F} \to [0,1] \\ \vdots \end{array} \qquad \mathcal{P}$$

Hipóteses

- Em mínimos quadrados restrito descrevemos a estimação sujeita a restrições. Aprendemos como representar as restrições lineares. Agora, vamos aprender como testar essas restrições através dos **testes de hipóteses**.
- **O teste de hipótese busca avaliar se há evidências contrária a uma restrição proposta**.
- Seja $\theta = r(\beta)$ um parâmetro de interesse de dimensão $q \times 1$ em que $r \times \mathbb{R}^k \to \Theta \subset \mathbb{R}^q$ é alguma transformação. Por exemplo, θ pode ser um único coeficiente, $\theta = \beta_j$, ou a diferença entre dois coeficientes, $\theta = \beta_j - \beta_\ell$, ou a razão entre dois coeficientes, $\theta = \dfrac{\beta_j}{\beta_\ell}$.

- Uma hipótese pontual relativa a θ pode ser uma restrição proposta, como

$$\theta = \theta_0 \tag{2}$$

em que θ_0 é um valor hipotético conhecido.

Definição

Seja $\beta \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^k$ um espaço de parâmetros. Uma hipótese é uma restrição $\beta \in \mathcal{B}$ onde $\mathcal{B}_0$ é um subconjunto próprio de $\mathcal{B}$. Isto se verifica em (1) deixando $\mathcal{B}_0 = \{\beta \in \mathcal{B} \colon r(\beta) = \theta_0\}$.

Definição

A **hipótese nula** H_0 é a restrição $\theta = \theta_0$ ou $\beta \in \mathcal{B}_0$.

Escrevemos a hipótese nula como: $H_0 \colon \theta = \theta_0$ ou $H_0 \colon r(\beta) = \theta_0$.

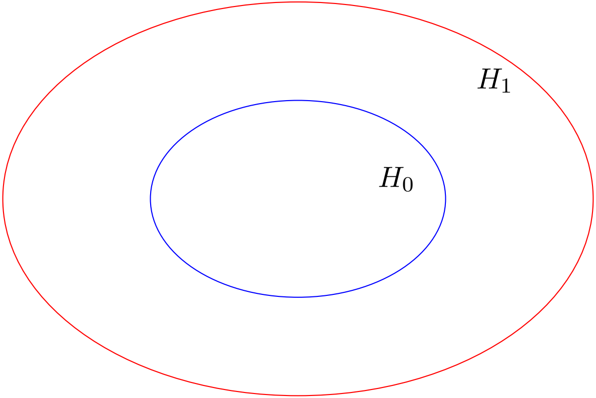
- O complemento da hipótese nula é chamado de **hipótese alternativa**.

Definição

A **hipótese alternativa** H_1 é o subconjunto $\{\theta \in \Theta : \theta \neq \theta_0\}$ ou $\{\beta \in \mathcal{B} \colon \beta \ni \mathcal{B}_0\}$.

- A Figura abaixo ilustra a **divisão do espaço de parâmetros entre a hipóteses nula e alternativa**.

Figura 1: Hipóteses nula (H_0) e alternativa (H_1)



- O objetivo da hipótese nula é verificar se podemos
  1. reduzir $\mathcal{P}$ a uma subfamília $\mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}$
  2. reduzir o espaço paramétrico Φ a um subconjunto $\Phi_0 \subset \Phi$
- Nessa roupagem, teríamos: "H_0: pelo menos uma medida em $\mathcal{P}_0$ descreve probabilisticamente os dados experimentais", isto é, $H_0\colon P \in \mathcal{P}_0$.
- Em termos de vetor de parâmetros, $H_0\colon \theta \in \Phi_0$, em que $\Phi_0 \in \Phi$ e $\mathcal{P}_0 = \{P_\theta\colon \theta \in \Phi_0\}$.

Aceitação e Rejeição da H_0

- No teste de hipótese, *assumimos que há um verdadeiro valor de θ, mas desconhecido e este valor satisfaz H_0 ou não satisfaz H_0.*
- **O objetivo do teste de hipótese é avaliar se ou não H_0 é verdadeira, perguntando se H_0 é consistente com os dados observados**.
- ***Um teste de hipótese aceita a H_0 ou rejeita a H_0 em favor da H_1*. Podemos escrever estas duas decisões como "Aceita H_0" e "Rejeita H_0"**.
- **A decisão é baseada nos dados** e, portanto, há um mapeamento do espaço amostral para o conjunto de decisão. Com isso, o espaço amostral é dividido em duas regiões: S_0 e S_1.

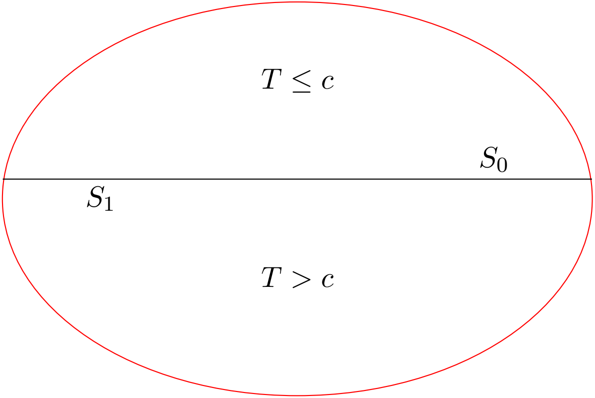
- *Se a amostra observada está contida em* S_0*, aceitamos* H_0*. Mas, se a amostra está contida em* S_1*, rejeitamos* H_0*.*
  - O conjunto S_0 é chamado de **região de aceitação de** H_0;
  - O conjunto S_1 é chamado de **região de rejeição de** H_0 ou **região crítica**.
- É conveniente expressar este mapeamento como uma função avaliada nos reais chamada de **estatística de teste**

$$T = T\left((y_1, \boldsymbol{x}_1), \cdots, (y_n, \boldsymbol{x}_n)\right) \tag{3}$$

relativa ao **valor crítico**.

- O teste de hipótese consiste da **regra de decisão**:
  1. Aceita H_0 se $T \leq c$.
  2. Rejeita H_0 se $T > c$.

Figura 2: Hipóteses nula (H_0) e alternativa (H_1)



- A estatística de teste T deveria ser pensada de tal forma que pequenos valores são prováveis quando H_0 é verdadeira e, grandes valores, são prováveis quando H_1 é verdadeira.
- A estatística de teste mais usada é o valor absoluto da **estatística-t**:

$$T = |T(\theta_0)| \tag{4}$$

em que

$$T(\theta) = \frac{\widehat{\theta} - \theta}{s\left(\widehat{\theta}\right)} \tag{5}$$

sendo $\widehat{\theta}$ uma estimativa pontual de θ e $s\left(\widehat{\theta}\right)$ o seu desvio-padrão.

- *A estatística-t é apropriada para quando estamos testando hipótese sobre coeficientes individuais ou o valor real de um parâmetro* $\theta = h(\beta)$ *e* θ_0 *é o valor hipotético.* Por exemplo:

    1. $\theta = 0$ se desejarmos temos $H_0\colon \theta = 0$.
    2. $\theta_0 = 1$ se desejarmos testar $H_0\colon \theta = 1$.

Erro Tipo I

- O **erro tipo I** é a falsa rejeição da H_0, isto é, rejeita H_0 quando H_0 é verdadeira. A probabilidade do erro tipo I é chamada de **tamanho do teste**:

$$\boldsymbol{P}[\text{Rejeitar } H_0 | H_0 \text{ verdadeira}] = \boldsymbol{P}[T > c | H_0 \text{ verdadeira}] \quad (6)$$

- O objetivo principal da construção do teste é **limitar a incidência de erro tipo I limitando o tamanho do teste**.
- A exata distribuição dos estimadores e estatísticas de teste são desconhecidas. Por isso, não podemos calcular explicitamente a probabilidade em (6). Mas podemos fazer uso de aproximações assintóticas.

- Assim, quando H_0 é verdadeira temos que

$$T \xrightarrow{d} \xi \tag{7}$$

quando $n \to \infty$ para alguma variável aleatória ξ com distribuição contínua. Considere $G(u) = \boldsymbol{P}[\xi \leq u]$ a distribuição de ξ. Chamaremos ξ (ou G) a **distribuição nula assintótica**.

- É desejável construir estatísticas de teste T cuja distribuição nula assintótica G seja conhecida e não dependa de parâmetros desconhecidos. Neste caso dizemos que T é **assintoticamente pivotal**.

- Definimos o **tamanho assintótico** do teste como a probabilidade assintótica do erro tipo I:

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}[T > c | H_0 \text{ verdadeira}] = \boldsymbol{P}[\xi > c] = 1 - G(c) \tag{8}$$

- Assim, o **tamanho assintótico do teste é uma função da distribuição nula assintótica G e do valor crítico c**.
- Por exemplo, o tamanho assintótico de um teste com base na estatística-t com valor critico c é $2\,(1 - \Phi(c))$.
- **nível de significância** $\alpha \in (0, 1)$ e então selecionamos c para que o tamanho assintótico não seja maior que α. Quando a distribuição nula assintótica G é pivotal, fazemos isso definindo c igual ao quantil $1 - \alpha$ da distribuição G.
- Vamos chamar c de **valor crítico assintótico** porque ele vem de uma distribuição nula assintótica.
- Por exemplo, uma vez que $2(1 - \Phi(1, 96)) = 0, 05$ temos que o valor crítico assintótico de 5% para a estatística-t é $c = 1, 96$.

- A estatística-t é o teste de hipótese unidimensional mais comum com $H_0 : \theta = \theta_0 \in \mathbb{R}$ contra $H_1 : \theta \neq \theta_0$.
- Estabelecemos formalmente sua distribuição nula assintótica com base no seguinte teorema.

Teorema

Sob o conjunto de pressupostos:

1. *as variáveis* $(y_i, \boldsymbol{x}_i), i = 1, \ldots, n$ *são i.i.d.*
2. $\mathbb{E}\left[y^4\right] < \infty$
3. $\mathbb{E}\left[\boldsymbol{x}_i\right]^4 < \infty$
4. $\boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{xx}}$ *é positiva definida*
5. $r(\beta) \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q$ *é continuamente diferenciável no verdadeiro valor de* β *e* $\boldsymbol{R} = \frac{\partial}{\partial \beta} r(\beta)'$ *tem rank* q

Seja

$$H_0 \colon \theta = \theta_0 \in \mathbb{R} \tag{9}$$

então, $T\left(\theta_0\right) \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1)$. *Para* c *que satisfaz* $\alpha = 2\left(1 - \Phi(c)\right)$, $\boldsymbol{P}\left[|T(\theta_0)| > c | H_0\right] \to \alpha$, *e o teste "rejeita* H_0 *se* $|T(\theta_0)| > c$*" tem tamanho assintótico* α.

19/38

Teste t

- Pelo Teorema acima, os valores críticos assintóticos podem ser considerados de uma distribuição normal.
- Uma vez que os valores críticos da distribuição *t de student* são (ligeiramente) maiores do que aqueles da distribuição normal, os valores críticos de *t de student* diminuem ligeiramente a probabilidade de rejeição do teste.
- A hipótese alternativa $\theta \neq \theta_0$ é chamada de bi-caudal. As vezes estamos interessados em fazer testes para hipótese alternativa unicaudal tais como: $H_1 : \theta > \theta_0$ ou $H_1 : \theta < \theta_0$.
- Testes de $\theta = \theta_0$ contra $\theta > \theta_0$ ou $\theta < \theta_0$ são baseados numa estatística-t $T = (\theta_0)$.
- A hipótese $\theta = \theta_0$ é rejeitada em favor de $\theta > \theta_0$ se $T > c$ satisfaz $\alpha = 1 - \Phi(c)$.

Figura 3: Teste de Hipótese Bicaudal: $H_0 : \beta_2 \neq 0$

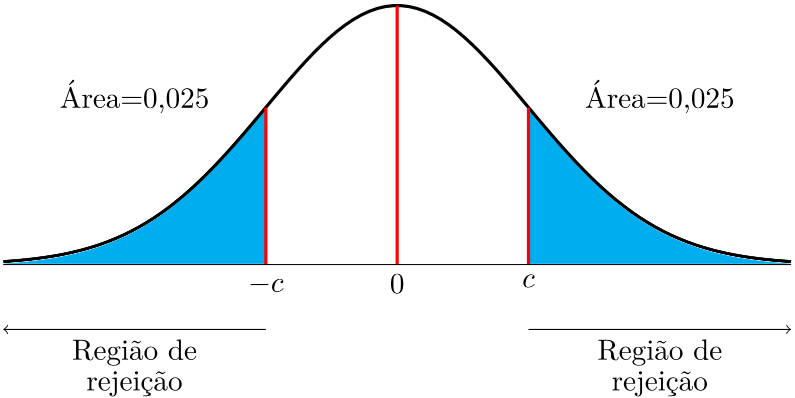


Figura 4: Teste de Hipótese Unicaudal: $H_0 : \beta_2 > 0$

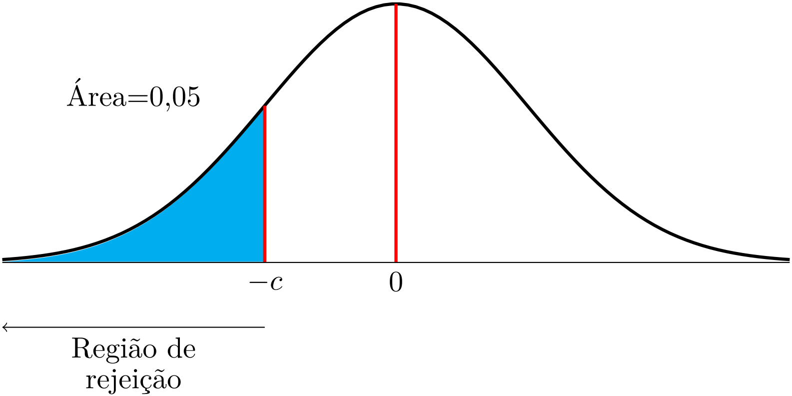
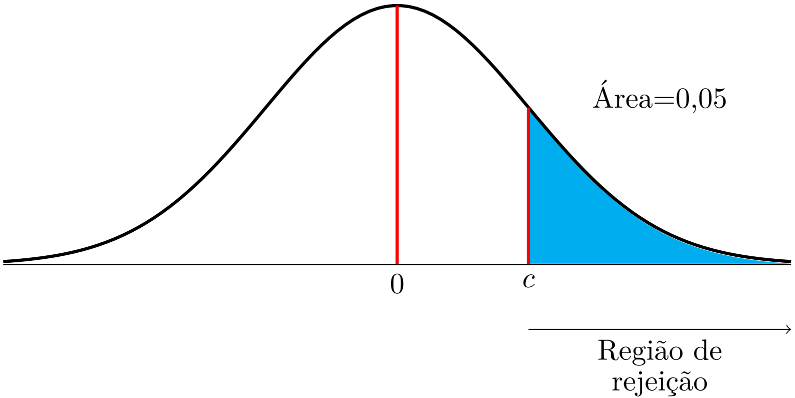


Figura 5: Teste de Hipótese Unicaudal: $H_0 : \beta_2 < 0$



Erro Tipo II

- O **Erro tipo II** é a falsa aceitação da H_0, isto é, aceitar H_0 quando H_1 é verdadeira. A probabilidade de rejeição sob a hipótese alternativa é chamada de **poder do teste** e é igual 1 menos a probabilidade do erro tipo II:

$$\pi(\theta) = \boldsymbol{P}[\text{Rejeitar } H_0 | H_1 \text{ verdadeira}] = \boldsymbol{P}[T > c | H_1 \text{ verdadeira}] \tag{10}$$

  em que $\pi(\theta)$ é a **função poder** e é escrita como uma função de θ para indicar sua dependência sobre o verdadeiro valor do parâmetro θ.

- O poder de um teste depende do valor verdadeiro do parâmetro θ e, para um teste bem comportado, o poder aumenta tanto à medida que θ se afasta da hipótese nula θ_0 quanto à medida que o tamanho da amostra n aumenta.

- Considerando as H_0 e H_1 e as duas decisões possíveis (Aceitar H_0 ou Rejeitar H_0), existem quatro pares possíveis de situações e decisões.

Tabela 1: Decisões do teste de hipótese

	Decisão	
Situação	Aceitar H_0	Rejeitar H_0
H_0 verdadeira	Decisão correta	Erro Tipo I
H_1 verdadeira	Erro Tipo II	Decisão correta

- Dada uma estatística de teste T, aumentar o valor crítico c aumenta a região de aceitação S_0 enquanto diminui a região de rejeição S_1. Isso diminui a probabilidade de um erro tipo I (diminui o tamanho), mas aumenta a probabilidade de um erro tipo II (diminui a potência).

- **A escolha de c envolve um *trade-off* entre tamanho e poder do teste**.
- É por isso que o nível de significância α do teste não pode ser definido arbitrariamente pequeno. Caso contrário, o teste não terá poder significativo.
- É importante considerar o poder de um teste ao interpretar os testes de hipótese, pois um foco excessivamente estreito no tamanho pode levar a decisões ruins.
- **Nível de significância**: o teste de hipótese requer uma escolha pré-selecionada do nível de significância α, embora não haja base científica objetiva para a escolha de α. No entanto, a prática comum é definir $\alpha = 0,05(5\%)$.
- **Observação**: ao definir a hipótese, o erro mais importante de ser evitado deve ser o erro tipo I.

P-valor

- Seja T_{H_0} uma estatística tal que quanto maior for a discrepância entre H_0 e x maior é seu valor observado.
- O valor-p (para $\Phi_0 \neq \emptyset$) é

$$p_x(\Phi_0) = \sup_{\theta \in \Phi_0} P_\theta \left(T_{H_0}(X) \geq T_{H_0}(x) \right) \tag{11}$$

  em que $T_{H_0}(X) \geq T_{H_0}(x) \in \mathcal{F}$.
- $p_x(\Phi_0) \approx 0$ indica que mesmo sob o melhor caso em H_0, os eventos tão ou mais extremos quanto o observado são raros.
- Se o evento ocorreu ou a hipótese nula deve ser falsa ou um evento raro ocorreu (*Modus Tollens* Fisheriano).

Exemplo

- Seja $X = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de uma normal bivariada com média $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)'$ e matriz de variância-covariância identidade.
- Considere $H_0\colon \boldsymbol{\mu} = 0$ e $H_0'\colon \mu_1 = \mu_2$.
- Observe que $H_0 \implies H_0'$, pois se $\boldsymbol{\mu} = 0$, então $\mu_1 = \mu_2$.
- A distribuição de estatística de razão de verossimilhanças
  - sob $H_0\colon \boldsymbol{\mu} = 0$ é

$$T_{H_0}(X) = n\bar{X}'\bar{X} \sim \chi_2^2 \tag{12}$$

    em que $\bar{X} = \left(\bar{X}_1, \bar{X}_2\right)'$ é o EMV de μ.
  - sob $H_0'\colon \mu_1 = \mu_2$ é

$$T_{H_0'}(X) = \frac{n}{2}\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2\right)^2 \sim \chi_2^1 \tag{13}$$

Exemplo

- Seja $X = (X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória em que $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, em que $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
- Suponha que a hipótese de interesse seja $H_0\colon \mu = \mu_0$ contra $H_1\colon \mu \neq \mu_0$.
- Encontre o p-valor usando $T_{H_0}(X) = n(\bar{X} - \mu_0)^2$.
- Observe que $\Phi_0 = \{(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \colon \mu = \mu_0\}$.
- Assim,

$$\begin{aligned} \text{p-valor}(H_0, \underset{\sim}{x_n}) &= \sup_{\theta \in \Phi_0} P_\theta \left(T_{H_0}(\underset{\sim}{X_n}) \geq T_{H_0}(\underset{\sim}{x_n})\right) \\ &= \sup_{\theta \in \Phi_0} P_\theta \left(n(\bar{X} - \mu_0)^2 \geq n(\bar{x} - \mu_0)^2\right) \end{aligned} \tag{14}$$

- Note que $\dfrac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_1, \forall \theta \in \Phi_0$.

- Isso implica que

$$\begin{aligned} \text{p-valor}(H_0, \underset{\sim}{x_n}) &= \sup_{\theta \in \Phi_0} P_\theta \left(\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \geq \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \right) \\ &= \sup_{\theta \in \Phi_0} P \left(\chi_1^2 \geq \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \right) \end{aligned} \tag{15}$$

- Observe que σ^2 é desconhecido. À medida que a variância aumenta, a quantidade $\dfrac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2}$ decresce. De tal modo, que a probabilidade de uma χ_1^2 ser maior que zero é 1.
- Logo,

$$\text{p-valor}(H_0, \underset{\sim}{x_n}) = \sup_{\theta \in \Phi_0} P \left(\chi_1^2 \geq \frac{n(\bar{x} - \mu_0)^2}{\sigma^2} \right) = 1 \tag{16}$$

- Assim, esse p-valor é irrelevante e nunca será possível rejeitar a hipótese.

- Ou seja, a estatística proposta não é boa para se testar a hipótese $H_0\colon \mu = \mu_0$.
- Então, vamos propor outra estatística. Se definirmos $T_{H_0}(\underset{\sim}{X}_n) = \dfrac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{s^2_{n-1}} \sim F_{1,n-1}$, em que $s^2_{n-1} = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \bar{X}\right)^2$.
- Assim,

$$
\begin{aligned}
\text{p-valor}(H_0, \underset{\sim}{x}_n) &= \sup_{\theta\in\Phi_0} P_\theta\left(T_{H_0}(\underset{\sim}{X}_n) \geq T_{H_0}(\underset{\sim}{x}_n)\right) \\
&= \sup_{\theta\in\Phi_0} P_\theta\left(F_{1,n-1} \geq \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{s^2_{n-1}}\right) \\
&= P\left(F_{1,n-1} \geq \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{s^2_{n-1}}\right) \qquad (17)
\end{aligned}
$$

- Podemos reescrever usando a distribuição t. Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}(H_0, \underset{\sim}{x_n}) &= P\left(\frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{S^2_{n-1}} \geq \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{s^2_{n-1}}\right) \\
&= P\left(F_{1,n-1} \geq \frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{s^2_{n-1}}\right) \\
&= P\left(\frac{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0|}{\sqrt{S^2_{n-1}}} \geq \frac{\sqrt{n}|\bar{x}-\mu_0|}{\sqrt{s^2_{n-1}}}\right) \\
&= 1 - P\left(-\frac{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0|}{\sqrt{S^2_{n-1}}} < \frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sqrt{s^2_{n-1}}} < \frac{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0|}{\sqrt{S^2_{n-1}}}\right) \\
&= 1 - P\left(-\frac{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0|}{\sqrt{S^2_{n-1}}} < t_{n-1} < \frac{\sqrt{n}|\bar{X}-\mu_0|}{\sqrt{S^2_{n-1}}}\right)
\end{aligned} \tag{18}
$$

Exemplo

- Seja $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ uma amostra aleatória em que $\theta \in (0, 1)$.
- Suponha que a hipótese de interesse seja $H_0\colon \theta = \theta_0$ contra $H_1\colon \theta \neq \theta_0$.
- Encontre o p-valor usando $T_{H_0}(\underset{\sim}{X}_n) = |\bar{X} - \theta_0|$.

- Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p}(H_0, \underset{\sim}{x}_n) &= \sup_{\theta \in \Phi_0} P_\theta \left(T_{H_0}(\underset{\sim}{X}_n) \geq T_{H_0}(\underset{\sim}{x}_n) \right) \\
&= P_{\theta_0} \left(|\bar{X} - \theta_0| \geq |\bar{x} - \theta_0| \right) \\
&= 1 - P_{\theta_0} \left(|\bar{X} - \theta_0| < |\bar{x} - \theta_0| \right) \\
&= 1 - P_{\theta_0} \left(-|\bar{x} - \theta_0| < \bar{X} - \theta_0 < |\bar{x} - \theta_0| \right) \\
&= 1 - P_{\theta_0} \left(\theta_0 - |\bar{x} - \theta_0| < \bar{X} \leq \theta_0 + |\bar{x} - \theta_0| \right) \\
&= 1 - P_{\theta_0} \left(n\theta_0 - n|\bar{x} - \theta_0| < \sum_{i=1}^{n} X_i < n\theta_0 + n|\bar{x} - \theta_0| \right)
\end{aligned} \tag{19}
$$

- Note que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, \theta)$ para qualquer $\theta \in (0,1)$.

- Isso implica que

$$\mathrm{p}(H_0, \underset{\sim}{x}_n) = 1 - P_{\theta_0}\left(n\theta_0 - n|\bar{x} - \theta_0| < B(n, \theta_0) \leq n\theta_0 + n|\bar{x} - \theta_0|\right) \tag{20}$$

Exemplo

- Seja $X \sim \text{Bernoulli}(\theta)$ uma amostra aleatória em que $\theta \in (0,1)$.
- Suponha que a hipótese de interesse seja $H_0\colon \theta \leq \theta_0$ contra $H_1\colon \theta > \theta_0$.
- Encontre o p-valor usando $T_{H_0}(\underset{\sim}{X}_n) = \bar{X} - \theta_0$.
- Assim,

$$
\begin{aligned}
\text{p}(H_0, \underset{\sim}{x}_n) &= \sup_{\theta \leq \theta_0} P_\theta \left(T_{H_0}(\underset{\sim}{X}_n) \geq T_{H_0}(\underset{\sim}{x}_n)\right) \\
&= \sup_{\theta \leq \theta_0} P_{\theta_0} \left(\bar{X} - \theta_0 \geq \bar{x} - \theta_0\right) \\
&= \sup_{\theta \leq \theta_0} P_{\theta_0} \left(\bar{X} \geq \bar{x}\right) \\
&= \sup_{\theta \leq \theta_0} P_{\theta_0} \left(n\bar{X} \geq n\bar{x}\right) \qquad (21)
\end{aligned}
$$

- Note que $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, \theta)$ para qualquer $\theta \in (0, 1)$.
- Logo,

$$\mathrm{p}(H_0, \underset{\sim}{x}_n) = \sup_{\theta \leq \theta_0} P_{\theta_0}\left(B(n, \theta_0) \geq n\bar{x}\right) \tag{22}$$

Econometria I

Teste de Hipóteses

Victor Oliveira

Núcleo de Economia Internacional e Desenvolvimento Econômico

PPGDE – 2023