Econometria I

Teste de Hipóteses

Victor Oliveira
Núcleo de Economia Internacional e Desenvolvimento Econômico

PPGDE – 2023

Sumário I

- O **teste t** é apropriado quando a hipótese nula é uma restrição de valor real. Porém, pode haver várias restrições no vetor de coeficientes β.
- Suponha que temos $q > 1$ restrições que podem ser escritas na forma $\theta = \theta_0$. É natural estimar $\theta = r(\beta)$ usando o estimador $\widehat{\theta} = r(\widehat{\beta})$.
- Para testar $H_0 \colon \theta = \theta_0$ contra $H_1 \colon \theta \neq \theta_0$, uma forma é medir a magnitude da discrepância $\widehat{\theta} - \theta_0$. A forma mais simples de mensurar é a forma quadrática ponderada conhecida como a **estatística Wald**.

$$W = W(\theta_0) = \left(\widehat{\theta} - \theta_0\right)' \widehat{\boldsymbol{V}}_{\widehat{\theta}}^{-1} \left(\widehat{\theta} - \theta_0\right) \tag{1}$$

em que $\widehat{\boldsymbol{V}}_{\widehat{\theta}} = \widehat{\boldsymbol{R}}' \widehat{\boldsymbol{V}}_{\widehat{\beta}} \widehat{\boldsymbol{R}}$ é um estimador de $\widehat{\boldsymbol{V}}_{\widehat{\theta}}$ e $\widehat{\boldsymbol{R}} = \frac{\partial}{\partial \beta} r(\beta)'$.

- Alternativamente, podemos escrever W usando o estimador da variância assintótica $\widehat{\boldsymbol{V}}_\theta$ como:

$$W = n\left(\widehat{\theta} - \theta_0\right)' \widehat{\boldsymbol{V}}_{\widehat{\theta}}^{-1} \left(\widehat{\theta} - \theta_0\right) \tag{2}$$

- Ou podemos escrever W diretamente como uma função de $\widehat{\beta}$ como

$$W = \left(r\left(\widehat{\beta}\right) - \theta_0\right)' \left(\widehat{\boldsymbol{R}}\widehat{\boldsymbol{V}}_{\widehat{\beta}}\widehat{\boldsymbol{R}}\right)^{-1} \left(r\left(\widehat{\beta}\right) - \theta_0\right) \tag{3}$$

- Quando $r(\widehat{\beta}) = \boldsymbol{R}'\boldsymbol{\beta}$ é uma função linear de β, então a estatística de Wald é simplificada para

$$W = \left(\boldsymbol{R}'\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \theta_0\right)' \left(\widehat{\boldsymbol{R}}\widehat{\boldsymbol{V}}_{\widehat{\beta}}\widehat{\boldsymbol{R}}\right)^{-1} \left(\boldsymbol{R}'\widehat{\boldsymbol{\beta}} - \theta_0\right) \tag{4}$$

- A estatística de Wald é uma medida euclidiana ponderada do tamanho do vetor $\widehat{\theta} - \theta_0$. **Quando $q = 1$, então $W = t^2$, o quadrado da estatística-t**. Assim, testes de hipóteses baseados em W e t são equivalentes.
- A estatística de Wald dada pela eq. (4) é uma generalização da estatística-t para o caso de múltiplas restrições.
- Como a estatística de Wald é simétrica no argumento $\widehat{\theta} - \theta_0$, ela trata hipóteses alternativas positivas e negativas simetricamente. Assim, a hipótese alternativa é sempre bilateral.

Teorema

Sob o conjunto de pressupostos:

1. *as variáveis* $(y_i, \boldsymbol{x}_i)$, *i=1,.., n são i.i.d.;*
2. $\mathbb{E}[y^4] < \infty$;
3. $\mathbb{E}[\boldsymbol{x}_i]^4 < \infty$;
4. $\boldsymbol{Q_{xx}}$ *é positiva definida;*
5. $r(\beta) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^q$ *é continuamente diferenciável no verdadeiro valor de* β *e* $\boldsymbol{R} = \frac{\partial}{\partial \beta} r(\beta)'$ *tem rank* q

Sendo $H_0 : \theta = \theta_0 \in \mathbb{R}^q$, *então* $W \xrightarrow{d} \chi^2_q$.
Para c *que satisfaz* $\alpha = 1 - G_q(c)$, $\boldsymbol{P}[W > c|H_0] \to \alpha$, *e o teste "Rejeita* H_0 *se* $W > c$*" tem tamanho assintótico* α.

- **Nota**: Observe que a distribuição assintótica no Teorema 2 depende apenas de q, o número de restrições sendo testadas.
- O valor-p para W é $p = 1 - G_q(W)$, e este é particularmente útil quando testamos restrições múltiplas.

Estatística Wald e a Estatística F

- Para qualquer estatística de Wald que testa uma restrição q-dimensional, a versão F do teste é:

$$F = \frac{W}{q}. \tag{5}$$

- Quando F é reportado é convencional usar $F_{q,n-k}$ valores críticos e valor-p ao invés de usar valores da χ_q^2.

Teste de Wald Homocedástico

- Se assumirmos que o termo de erro é homocedástico então é apropriado usar a estatística de Wald homocedástica que substitui $\widehat{\boldsymbol{V}}_{\widehat{\theta}}$ pelo estimador homocedástico $\widehat{\boldsymbol{V}}^0_{\widehat{\theta}}$. A estatística de teste é:

$$
\begin{aligned}
W^0 &= (\widehat{\theta} - \theta_0)' \left(\widehat{\boldsymbol{V}}_{\widehat{\theta}}\right)^{-1} (\widehat{\theta} - \theta_0) \\
&= \frac{(r(\widehat{\beta}) - \theta_0)' \left(\boldsymbol{R}'(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{R}\right)^{-1} (r(\widehat{\beta}) - \theta_0)}{s^2} \qquad (6)
\end{aligned}
$$

- No caso de hipóteses lineares $H_0 \colon \boldsymbol{R}'\beta = \theta_0$ podemos escrever como

$$
W^0 = \frac{(\boldsymbol{R}'\widehat{\beta} - \theta_0)' \left(\boldsymbol{R}'(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{x})^{-1}\boldsymbol{R}\right)^{-1} (\boldsymbol{R}\widehat{\beta} - \theta_0)}{s^2} \qquad (7)
$$

- Vamos chamar W^0 de estatística de Wald homocedástica porque ela é apropriada quando os erros são condicionalmente homocedásticos.
- Quando $q = 1$, então $W^0 = t^2$, o quadrado da estatística-t onde o último é computado com erro-padrão homocedástico.

Teste F

- Vimos o **teste F** para restrição de exclusão em um modelo de regressão normal. Vamos generalizar esse teste para um conjunto mais geral de restrições.
- Seja $\mathcal{B}_0 \subset \mathbb{R}^k$ um espaço de parâmetros restrito no qual impomos q restrições sobre β.
- Considere $\widehat{\beta}_{MQO}$ o estimador de Mínimos Quadrados não restrito e seja $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \boldsymbol{x}_i'\widehat{\beta}_{MQO})^2$ o estimador da variância σ^2.
- Considere também $\widetilde{\beta}_{CLS}$ como sendo o estimador de mínimos quadrados restrito que satisfaz $\widetilde{\beta}_{CLS} \in \mathcal{B}_0$ e $\widetilde{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \boldsymbol{x}_i'\widetilde{\beta}_{CLS})^2$ o estimador da $\widetilde{\sigma}^2$.

- A estatística F para testar $H_0\colon \beta \in \mathcal{B}_0$ é:

$$F = \frac{\left(\widetilde{\sigma}^2 - \widehat{\sigma}^2\right)\Big/q}{\widehat{\sigma}^2\Big/n-k} \tag{8}$$

- Escrito de forma alternativa, temos:

$$F = \frac{SQE\left(\widetilde{\beta}_{CLS}\right) - SQE\left(\widehat{\beta}_{MQO}\right)\Big/q}{s^2} \tag{9}$$

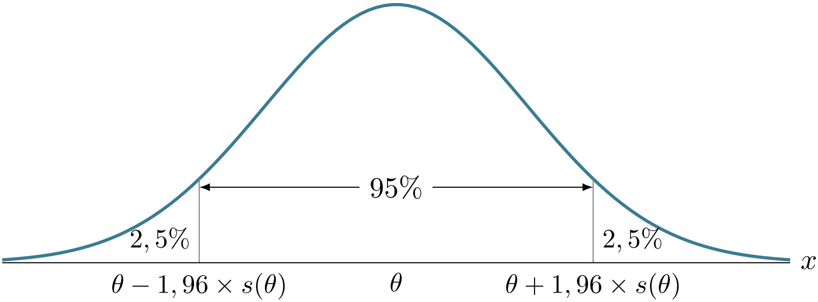
em que $SQE(\beta) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \boldsymbol{x}_i'\beta)^2$.

Intervalo de Confiança

- Há uma relação muito próxima entre testes de hipóteses e intervalo de confiança.
- O intervalo de confiança assintótico padrão de 95% para um parâmetro θ é dado por

$$\widehat{IC} = \left[\widehat{\theta} - 1,96 \times s\left(\widehat{\theta}\right),\ \widehat{\theta} + 1,96 \times s\left(\widehat{\theta}\right)\right] = \{\theta : |T(\theta)| \leq 1,96\} \tag{10}$$

- Podemos escrever $\widehat{IC}$ como "*a estimativa pontual mais ou menos dois desvio-padrão*" ou "*o conjunto de valores dos parâmetros que não foram rejeitados por um teste t bicaudal*".


95%
2, 5%
2, 5%
x
$\theta - 1,96 \times s(\theta)$
θ
$\theta + 1,96 \times s(\theta)$

Econometria I

Teste de Hipóteses

Victor Oliveira

Núcleo de Economia Internacional e Desenvolvimento Econômico

PPGDE – 2023