Universidade Federal do Paraná

Programa de Pós-Graduação em Desenvolvimento Econômico

Econometria I

Professor: Victor Oliveira

Exercícios

1) Considere o modelo linear $y_i = \theta_0 z_i + \varepsilon_i$, em que θ_0 e z_i são escalares. As condições de ortogonalidade são

$$\mathbb{E}[x_i(y_i - \theta_0 z_i)] = 0 \tag{1}$$

e a função objetivo associada ao estimador de GMM é denotada por $Q_n(\theta)$.

Assuma que $\theta_0 > 0$ e considere a reparametrização $\lambda = \dfrac{1}{\theta}$, em que as condições de ortogonalidade são

$$\mathbb{E}[x_i(z_i - \lambda_0 y_i)] = 0 \tag{2}$$

e a função objetivo associada ao estimador de GMM é denotada por $\widetilde{Q}_n(\theta)$.

a) Escreva as funções objetivo $Q_n(\theta)$ e $\widetilde{Q}_n(\theta)$ usando a mesma matriz de ponderação W.

b) Quando $Q_n(\theta) = \widetilde{Q}_n\left(\dfrac{1}{\theta}\right)$? Quando $\widetilde{Q}_n(\lambda) = Q_n\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$?

c) O que se conclui do item b)?

2) Considere um modelo de escolha discreta. Suponha que os parâmetros desse modelo sejam estimados por mínimos quadrados ordinários, ou seja, temos um modelo de probabilidade linear. Mostre que nesse caso a variância é heterocedástica.

3) Um amigo economista lhe diz que a suposição de que as observações $(y_, x_i)$ são iid implicam que a regressão $y_i = x_i'\beta + e_i$ é homocedástica. Você concorda com seu amigo? Como você explicaria sua posição?

4) Seja $\{X_i\}_{1\leq i\leq n}$ um vetor de variáveis iid e seja $X = \sum_i^n X_i$. Prove que $\mathbb{E}[X_1|X] = \dfrac{X}{n}$.

5) Suponha o modelo linear

$$y_i = x_i\beta + e_i \tag{3}$$
$$\mathbb{E}(e_i|x_i) = 0 \tag{4}$$

Considere o estimador $\beta = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^3 y_i}{\sum_{i=1}^{n} x_i^4}$. Encontre a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\widehat{\beta} - \beta)$ quando $n \to \infty$.

6) Sejam $x_1, \ldots, x_n$ uma amostra aleatória de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Sendo a função de verossimilhança

$$L(x;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \theta x_i^{-2} \mathbb{I}_{[\theta,+\infty)}(x_i) \tag{5}$$

em que $\mathbb{I}$ é a função indicadora. Obtenha o estimador de máxima verossimilhança para θ.

7) Considere o modelo de regressão

$$y = X\beta + u, \quad u \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_n) \tag{6}$$

em que y e u denotam vetores $n \times 1$, β indica um vetor $k \times 1$ e X representa uma matriz $n \times k$. Assume-se que a variável explicativa X está correlacionada com o termo de erro u. Mostre que o estimador de MQO, denotado por $\hat{\beta}$, é inconsistente.

8) Um pesquisador está considerando duas especificações para estimar a relação entre X e Y como segue:

$$\log Y = \beta_1 + \beta_2 \log X + U \tag{7}$$
$$\log \frac{Y}{X} = \alpha_1 + \alpha_2 \log X + V \tag{8}$$

em que o tamanho da amostra é n. Usando as mesmas n observações das variáveis Y e X, o pesquisador ajusta as duas especificações usando mínimos quadrados ordinários (OLS), como segue:

$$\widehat{\log Y} = \widehat{\beta}_1 + \widehat{\beta}_2 \log X \tag{9}$$
$$\widehat{\log \frac{Y}{X}} = \widehat{\alpha}_1 + \widehat{\alpha}_2 \log X \tag{10}$$

a) Determine se (8) pode ser escrito como uma versão restrita de (7).
b) Usando as expressões para as estimativas, escreva $\widehat{\beta}_2$ em termos de $\widehat{\alpha}_2$.
c) Usando as expressões para as estimativas, escreva $\widehat{\beta}_1$ em termos de $\widehat{\alpha}_1$.
d) Determine a relação entre a estatística t usando $\widehat{\beta}_2$ e a estatística t usando $\widehat{\alpha}_2$.

9) Considere os seguintes modelos

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{11}$$
$$Y = X\beta + Z\gamma + \varepsilon \tag{12}$$

Denote o estimador de β na equação (11) por $\hat{\beta}^{(1)}$. Encontre $\mathbb{E}\left[\hat{\beta}^{(1)}|X, Z\right]$ se o modelo correto é o (12).

10) Seja Y um vetor $n \times 1$, X uma matriz $n \times k$ e $Z = XB$, em que B é uma matriz $k \times k$. Denote por $\hat{\beta}$ e por $\hat{e}$ o estimador de MQO e o resíduo da regressão de Y sobre X. Da mesma forma, denote por $\widetilde{\beta}$ e por $\widetilde{e}$ o estimador de MQO e o resíduo da regressão de Y sobre Z. Qual a relação entre $\hat{\beta}$ e $\widetilde{\beta}$ e entre $\hat{e}$ e $\widetilde{e}$?

11) Suponha que encontramos $\hat{\beta}$ como uma estimativa de $\beta \in \mathbb{R}$, tal que $\sqrt{n}\left(\hat{\beta} - \beta\right) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, V)$ quando $n \to \infty$. Temos um estimador consistente $\hat{V}$ de V e o parâmetro de interesse é $\theta = \beta^2$. Encontre a distribuição assintótica de $\hat{\theta} = \hat{\beta}^2$ e o erro-padrão assintótico válido.

12) Suponha o modelo

$$y_i = \beta_1 + x_{1i}'\beta_2 + x_{2i}'\beta_3 + e_i \tag{13}$$
$$\mathbb{E}[x_i e_i] = 0 \tag{14}$$

Apresente a dedução da estatística de teste para $H_0\colon \beta_2 - \beta_3 = 1$ contra $H_1\colon \beta_2 - \beta_3 \neq 1$.

13) Suponha o modelo

$$y_i = x_{1i}'\beta_1 + x_{2i}'\beta_2 + e_i \tag{15}$$
$$\mathbb{E}[x_i e_i] = 0 \tag{16}$$

Deduza o teste de Wald de $H_0 : \beta_1 = \beta_2$ contra $H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$.

14) Alguém lhe conta que $\hat{\beta}_1 = 1.0$, $\hat{\beta}_2 = 0.8$ e que os erros-padrão são $\text{ep}(\hat{\beta}_1) = 0.07$ e $\text{ep}(\hat{\beta}_2) = 0.07$. Escreva um intervalo de confiança de 95% para $\theta = \beta_1 - \beta_2$ como função de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\text{ep}(\hat{\beta}_1)$, $\text{ep}(\hat{\beta}_2)$ e $\hat{\rho}$, em que $\hat{\rho}$ é a correlação estimada entre $\hat{\beta}_1$ e $\hat{\beta}_2$.

15) Dizemos que o estimador de MQO é não viesado e consistente. Explique a diferença entre esses dois conceitos.

16) Seja o modelo linear

$$y_i = x_{1i}\beta_1 + x_{2i}\beta_2 + e_i \tag{17}$$

$$\mathbb{E}(x_i e_i) = 0 \tag{18}$$

Considere a restrição

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = 2 \tag{19}$$

Encontre uma expressão explícita para o estimador de mínimos quadrados restrito (CLS) $\widetilde{\beta} = \left(\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2\right)$ de $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ sob (19). Derive a distribuição assintótica de $\widetilde{\beta}_1$ sob a suposição de que a restrição é verdadeira.

17) Seja a seguinte regressão

$$\ln(\text{salário}) = \beta_0 + \beta_1(\text{tenure}) + u \tag{20}$$

A partir das informações abaixo

a) calcule a estimativa por MQO de β_0 e β_1 (dica: note que $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\bar{X}$)

b) encontre também a estatística t associada a cada parâmetro

c) construa um intervalo de confiança de 95% para β_0 e β_1

Tabela 1—Dados Estatísticos

Variável	N	Média	Desvio-padrão	Mínimo	Máximo
ln salário	2231	1.87	0.57	0.0049	3.70
tenure	2231	5.98	5.51	0.0000	25.92
tenure^2	2231	66.08	102.54	0.0000	671.67
$\ln{(\text{salário})}^2$	2231	3.85	2.35	0.0001	13.75
$\ln(\text{salário}) \times \text{tenure}$	2231	12.15	12.62	0.0049	75.72

Tabela 2—Resultados da Regressão

Variável	Coeficiente	Erro-padrão	t	$P > \lvert t \rvert$	IC
tenure		0.002		0.0000	
constante		0.017		0.0000	

Tabela 3—Informações Adicionais

N	2231
F(1,2229)	220.510
Prob>F	0.000
R^2	0.090
R^2 ajustado	0.090
Erro Quadrático Médio	0.547

18) Suponha que $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, com $x = 0, 1, 2, \ldots$ e $\lambda > 0$. Sabendo que $f(x;\lambda) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, pede-se:

   a) Monte a função de verossimilhança.
   b) Monte a função de log-verossimilhança.
   c) Mostre que a matriz de informação de Fisher é $I(\lambda) = \dfrac{n}{\lambda}$.
   d) Derive a estatística LR.

19) Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ uma amostra iid de variáveis aleatórias com função densidade de probabilidade

$$f(x;\theta) = \frac{2x}{\theta}\mathrm{e}^{-x^2/\theta} \tag{21}$$

com $x > 0$. Derive a estatística LR.

20) Se $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ e $\text{var}(X_i) = \sigma^2$, e as observações são iid, o que lei dos grandes números e o teorema central do limite afirma sobre $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$?

21) Os seguintes testes estatísticos são válidos? $H_0\colon \mu_X = 100$ e $H_0\colon \bar{X} = 100$.

22) Seja o modelo de regressão abaixo sem intercepto. Se soubermos que a função de regressão populacional é

$$y_i = \beta_1 x_i + u_i \tag{22}$$

   a) O que é $\mathbb{E}(y_i|x_i)$?
   b) O que é $\mathbb{E}(y_i|x_i = 0)$?
   c) Derive o estimador de MQO para β_1.
   d) Derive ao estimador de MM para β_1.

23) No modelo estrutural,

$$y = X\beta + e \tag{23}$$
$$X = Z\Gamma + U \tag{24}$$

com Γ uma matriz $L \times K$ (com $L \geq K$). Afirmamos que β é identificado se $\text{rank}(\Gamma) = K$. Explique por que isso é verdade. Isto é, mostre que se $\text{rank}(\Gamma) < K$ então β não pode ser identificado.

24) Seja o modelo

$$y_i = x_i\beta + e_i, \quad \mathbb{E}(e_i|x_i) = 0 \tag{25}$$

em que x_i e β são univariados.

a) Mostre que $\mathbb{E}(x_i e_i) = 0$ e $\mathbb{E}(x_i^2 e_i) = 0$.
b) Seria $z_i = \begin{pmatrix} x_i & x_i^2 \end{pmatrix}$ um instrumento válido para a estimação de β?
c) Defina o estimador MQ2E de β usando z_i como instrumento para x_i. Como ele difere do MQO. Qual procedimento você recomenda? Seja específico.

25) Das variáveis (y_i^*, x_i^*, x_i) somente o par (y_i, x_i) é observado. Neste caso, dizemos que y_i^* é uma variável latente. Suponha que

$$y_i^* = x_i'\beta + e_i, \quad \mathbb{E}(x_i e_i) = 0 \tag{26}$$
$$y_i^* = y_i + u_i \tag{27}$$

em que u_i é um erro de mensuração que satisfaz:

$$\mathbb{E}(x_i u_i) = 0 \tag{28}$$
$$\mathbb{E}(y_i^* u_i) = 0 \tag{29}$$

a) Interprete os pressupostos acima.
b) β é o coeficiente da projeção linear de y_i em x_i?
c) $\widehat{\beta}$ é consistente quando $n \to \infty$?
d) Encontre a distribuição assintótica de $\sqrt{n}(\widehat{\beta} - \beta)$ quando $n \to \infty$?
e) Suponha agora que você tenha observações sobre (y_i^*, y_i, x_i). Qual estimador você recomendaria e por quê?

26) Considere o modelo de regressão

$$y_i = x_i'\theta_0 + u_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{30}$$

em que $x_i \in \mathbb{R}^d$ pode ser particionado em dois subvetores $x_1^{(1)} \in \mathbb{R}^{d_1}$ e $x_2^{(1)} \in \mathbb{R}^{d_2}$ (com $d = d_1 + d_2$) com os correspondentes coeficientes $\theta_{0,1}$ e $\theta_{0,2}$. Suponha que o objeto de interesse seja $\theta_{0,1}$. Suponha que x_1 é endógeno e que um vetor de instrumentos $z_i \in \mathbb{R}^{d_z}$

está disponível, de modo que $\mathbb{E}[z_i u_i] = 0$ e $\mathbb{E}[z_i x_i^{(2)}] = 0$. Assuma que os dados sejam iid. Se $d_1 \leq d_z \leq d$ o sistema não é identificado. Além disso, z_i é não correlacionado com $x_i^{(2)}$. Mostre que $\theta_{0,1}$ pode, no entanto, ser consistentemente estimado propondo um estimador consistente $\widehat{\theta}_1$ de $\theta_{0,1}$ e derive sua distribuição limite.

27) Seja X uma distribuição bivariada com média μ e matriz de covariância Σ, em que

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{31}$$

Seja $Y = X'\beta + \varepsilon$, em que ε segue uma distribuição normal padrão e é independente de X. Finalmente, $\beta = (-1, 2)'$.

a) Compute $\mathbb{E}(Y)$.
b) Compute $\text{var}(Y)$.
c) Compute a correlação entre Y e ε.

28) Seja $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$, em que $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são particionados como $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}_0|\boldsymbol{X}_1)$ e $\boldsymbol{\beta}' = (\boldsymbol{\beta}_0'|\boldsymbol{\beta}_1')$ respectivamente. $\boldsymbol{\beta}_0$ tem p_0 componentes e $\boldsymbol{\beta}_1$ tem $p - p_0$ componentes. Mostre que $\|\boldsymbol{Y}\|^2 = \|\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{Y}\|^2 + \|(\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}_0)\boldsymbol{Y}\|^2 + \|\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}\|^2$.

29) Considere uma amostra iid $\{y_i, x_i\}_{i=1}^n$, $i = 1, \ldots, n$, em que y_i e x_i são escalares. Considere o modelo de projeção

$$x_i = y_i\gamma + u_i \tag{32}$$

$$\mathbb{E}(y_i u_i) = 0 \tag{33}$$

e defina o estimador de interesse como $\theta = \dfrac{1}{\gamma}$.

a) Proponha um estimador $\widehat{\gamma}$ para γ.
b) Proponha um estimador $\widehat{\theta}$ para θ.
c) Encontre a distribuição assintótica de $\widehat{\theta}$.
d) Encontre a expressão para o erro padrão assintótico para $\widehat{\theta}$.

30) Seja o modelo de regressão $Y = X\beta + \varepsilon$ com $\mathbb{E}(\varepsilon_i|x_i) = 0$. Assuma $\theta = \dfrac{1}{\beta_1}$ em que $\beta_!$ é o primeiro elemento de β. Seja $\widehat{\beta}$ o estimador de MQO de β e $\widehat{V}$ o estimador da variância de $\widehat{\beta}$. Encontre um intervalo de confiança de 95% assintoticamente válido para θ (escreva uma fórmula explícita em termos de $\widehat{\beta}$ e de $\widehat{V}$).

31) Seja o modelo de regressão $Y = X\beta + \varepsilon$ com $\mathbb{E}(\varepsilon_i|x_i) = 0$. Sabe-se que o verdadeiro β satisfaz a restrição $R\beta = 0$, sendo R uma matriz $q \times k$ com $q < k$. Considere o estimador

$$\widetilde{\beta} = \widehat{\beta} - (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}R\widehat{\beta} \tag{34}$$

Mostre que $\widetilde{\beta}$ é um estimador não viesado para β.

32) Seja a variável y_i gerada por $y_i = x_i^2 + \varepsilon_i$ em que ε_i é independente de x_i, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ e $\mathbb{E}(\varepsilon_i^2) = \sigma^2$. Suponha que $\mathbb{E}(x_i) = 0$, e seja $\mu_2 = \mathbb{E}(x_i^2)$, $\mu_3 = \mathbb{E}(x_i^3)$ e $\mu_4 = \mathbb{E}(x_i^4)$. Usando uma amostra aleatória de (y_i, x_i), suponha que você estime (por MQO) uma equação linear $\widehat{y_i} = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 x_i + \widehat{e}_i$. Encontre uma expressão para β_0 e β_1 em termos dos momentos de ε_i e de x_i.

33) Seja o seguinte modelo de painel

$$y_{it} = \mu_i + e_{it} \tag{35}$$

com $\mathbb{E}(e_{it}^2) = \sigma^2$, em que $\mathbb{E}(\mu_i e_{it}) = 0$, $i = 1, \ldots, n, t = 1, \ldots, T$.

a) Mostre que para o estimador de GMM para μ_i é $\bar{y}_i$, o estimador de efeitos fixos.
b) Encontre o estimador de GMM $\widehat{\sigma}^2$ para σ^2.

34) Assuma o modelo

$$y_i = z_i\beta + e_i \tag{36}$$
$$\mathbb{E}(z_i e_i) \neq 0 \tag{37}$$

em que (y_i, z_i) são iid e $\mathbb{E}(e_i) = 0$.

a) Dizemos que z_i é "exógeno" ou "endógeno" para β?
b) O estimador $\hat{\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} z_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i^2}$ é consistente para β?
c) Considere o estimador $\widetilde{\beta} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{\sum_{i=1}^{n} z_i}$. Existe uma condição (além de $\mathbb{E}(z_i e_i) = 0$) sob a qual $\widetilde{\beta}$ é consistente para β?

d) Explique sua descoberta em (c) mostrando que você pode escrever $\widetilde{\beta}$ como um estimador de IV válido. Explique a restrição de identificação.

35) Seja o modelo linear $Y = Z\beta + e$ e considere os seguintes estimadores para β:

- $\widehat{\beta}_1$ obtido por MQ2E usando X_1 como instrumento.
- $\widehat{\beta}_2$ obtido por MQ2E usando X_2 como instrumento.
- $\widetilde{\beta}$ obtido por GMM usando os instrumentos $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \end{pmatrix}$ e matriz de ponderação $\Omega = \begin{pmatrix} (X_1'X_1)^{-1}\lambda & 0 \\ 0 & (X_2'X_2)^{-1}(1-\lambda) \end{pmatrix}$ para $\lambda \in (0,1)$.

Encontre uma expressão para $\widetilde{\beta}$ que é uma média ponderada de $\widehat{\beta}_1$ e de $\widehat{\beta}_2$.

36) Você tem uma amostra aleatória do modelo

$$y_i = x_i\beta_1 + x_i^2\beta_2 + \varepsilon_i \tag{38}$$
$$\mathbb{E}(e_i|x_i) = 0 \tag{39}$$

em que y_i é o salário por hora e x_i é a idade. Como você testaria a hipótese de que o salário esperado para um trabalhador de 40 anos é \$ 20 por hora. Detalhe a dedução do teste.

37) O modelo é

$$y_i = z_i\beta + x_\gamma + \varepsilon_i \tag{40}$$
$$\mathbb{E}(\varepsilon_i|x_i) = 0 \tag{41}$$

Logo, z_i é potencialmente endógeno e x_i é exógeno. Assuma que $x_i \in \mathbb{R}$ e $z_i \in \mathbb{R}$. Alguns podem sugerir estimar (β, γ) por GMM usando o par $\begin{pmatrix} x_i & x_i^2 \end{pmatrix}$ como instrumentos. Isso é possível? Sob quais condições, se há alguma (além das descritas acima), este é um estimador válido?

38) Considere o modelo

$$y_i = x_i'\beta + e_i \tag{42}$$
$$\mathbb{E}(e_i|x_i) = 0 \tag{43}$$
$$z_i = (x_i'\beta)\,\gamma + u_i \tag{44}$$
$$\mathbb{E}(u_i|x_i) = 0 \tag{45}$$

O objetivo é estimar γ. Mostre que $\widehat{\gamma}$ é consistente para γ. Quais condições são necessárias?

39) Considere as projeções abaixo

$$y_i = x_i\gamma_1 + e_i \tag{46}$$
$$y_i = x_i\beta_1 + x_i^2\beta_2 + u_i \tag{47}$$

Estabeleça duas condições sob as quais $\gamma_1 = \beta_1$.

40) Derive a expressão para a matriz de variância-covariância do estimador de MQO.

41) Considere a estimação de um modelo com densidade

$$f(y_i) = \mathrm{e}^{-(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})} \exp\left(-\mathrm{e}^{-(y_i - \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta})}\right) \tag{48}$$

em que $-\infty < y < \infty$ e $\mathbb{E}[y_i|\boldsymbol{x}_i] = c + \boldsymbol{x}_i'\boldsymbol{\beta}$ com $c \approx 0,57$.

a) Deduza o estimador de máxima verossimilhança para $\boldsymbol{\beta}$.
b) Encontre a distribuição limite para $\boldsymbol{\beta}$, supondo que a densidade esteja especificada corretamente.
c) Apresente um estimador alternativo para $\boldsymbol{\beta}$ a partir do método dos momentos.

42) Considere o modelo

$$y_i = m(x_i) + e_i \tag{49}$$
$$m(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \ldots + \beta_p x^p \tag{50}$$
$$\mathbb{E}(z_i e_i) = 0 \tag{51}$$
$$z_i = (1, x_i, \ldots, x_i^p)' \tag{52}$$
$$g(x) = \frac{d}{dx} m(x) \tag{53}$$

com observações iid. A ordem p do polinômio é conhecida. Como interpretar a função $m(x)$ dado o pressuposto de projeção em (51)? Como interpretar $g(x)$?

43) Suponha que você tenha um estimador não viesado de um vetor de parâmetros. Suponha também que você tenha estimado o vetor de parâmetros com uma amostra muito grande e, invocando o teorema do limite central, descobriu que a distribuição amostral de seus parâmetros estimados é

$$\widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}\right) \tag{54}$$

a) Teste a hipótese de que os dois parâmetros são iguais.

b) Use uma estatística de Wald para testar a hipótese de que $\beta_1 = \beta_2 = -1$. Você rejeita a hipótese?

c) Construa uma estatística de teste para a hipótese de que $\beta_1 + \beta_2 = 1$. Você rejeita a hipótese?

d) Se a hipótese em b) é verdadeira, então a hipótese em c) é verdadeira. Por que as estatísticas de teste são diferentes?

44) Considere o seguinte modelo, $y_i \sim \mathcal{N}(\alpha + \beta x_i, \sigma^2)$, em que os y_i's são independentes.

a) Derive o estimador de MQO de α sob a restrição de que $\beta = 1$.

b) Encontre o valor esperado e a variância desse estimador quando a restrição for verdadeira e quando for falsa.

c) Como as expressões encontradas em (b) se comparam àquelas obtidas para o estimador de MQO quando não há restrição?

45) Prove que sob a presença de heterocedasticidade condicional, MQG é assintoticamente mais eficiente que MQO (ou seja, ambos são consistentes, mas a variância assintótica de MQG é menor do que para MQO).

46) Considere o modelo de regressão linear

$$y_i = x_i'\theta_0 + u_i, \quad i = 1, \ldots, n \tag{55}$$

Assuma que os dados são iid e que o modelo é homocedástico. Derive o teste para $H_0\colon \theta_{0,1}^2 - \theta_{0,2}^2 = 5$ e $\theta_{0,2} + \theta_{0,3} = 1$ versus $H_1\colon \theta_{0,1}^2 - \theta_{0,2}^2 \neq 5$ e $\theta_{0,2} + \theta_{0,3} \neq 1$.