Econometria I

Dados em Painel

Victor Oliveira

Núcleo de Economia Internacional e Desenvolvimento Econômico

PPGDE – 2024

Sumário I

Cross-Section

1. Cross-section: são coletados em um único período de tempo e são caracterizados por unidades individuais – pessoas, empresas, países, etc. Alguns exemplos incluem:
    - Notas dos alunos no final do semestre corrente
    - Dados do agregado familiar do ano anterior: despesas com alimentação, rendimentos, etc
    - Dados de um carro: velocidade média, potência, cor, etc
2. Com dados transversais, a ordem dos dados não importa.
3. Em outras palavras, podemos ordenar os dados em ordem crescente, decrescente ou mesmo aleatória e isso não afetará os resultados da modelagem.

Série Temporal

- Os dados coletados em vários pontos específicos no tempo são chamados de dados de séries temporais.
- Tais exemplos incluem preços de ações, taxas de juros, taxas de câmbio, bem como preços de produtos, PIB, etc.
- Os dados de séries temporais podem ser observados em muitas frequências diferentes (por hora, diariamente, semanalmente, mensalmente, trimestralmente, anualmente, etc.).
- Ao contrário dos dados transversais, a ordem dos dados é importante nos dados de séries temporais. Cada ponto representa os valores em pontos específicos no tempo.
- Alterar a ordem dos dados ignora a dimensionalidade temporal dos dados.

Dados em Painel

- Os dados em painel combinam dados transversais e de séries temporais: os mesmos indivíduos (pessoas, empresas, cidades, etc.) são observados em vários pontos no tempo (dias, anos, antes e depois do tratamento, etc.).
- Os dados do painel permitem controlar as variáveis que você não pode observar ou medir como:
  - fatores culturais (como países ou regiões específicas)
  - diferença nas práticas de negócios entre as empresas
- Se tivermos o mesmo número de observações de período de tempo para cada indivíduo, teremos um painel balanceado.

Pooled OLS

- Suponha que para cada unidade *cross-section* i observamos o mesmo conjunto de variáveis em T períodos. Neste caso o modelo populacional será dado por:

$$y_{it} = x_{it}\beta + \alpha_i + u_{it}, \quad i = 1, \ldots, N \quad \text{e} \quad t = 1, \ldots, T \tag{1}$$

- No caso de **pooled OLS**, quais seriam as hipóteses de identificação?

  POLS.1 $\mathbb{E}(\boldsymbol{x}'_{it} u_{it}) = 0$, $t = 1, 2, \ldots, T$

  POLS.2 $\text{rank}(\boldsymbol{x}'_{it}) = K$

- Sob **POLS.1** e **POLS.2**, o *pooled ordinary least square estimator* (POLS) será dado por:

$$\widehat{\beta}_{POLS} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{x}'_{it} \boldsymbol{x}_{it} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \boldsymbol{x}'_{it} \boldsymbol{y}_{it} \right) \tag{2}$$

- O processo é dado por:
  1. Empilhar os dados de tamanho NT.
  2. Estimar a regressão de y_{it} em x_{it}, $t = 1, 2, \ldots, T$ e $i = 1, 2, \ldots, N$.
  3. Obter a var$(\widehat{\beta})$ que é dada por $\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} \widehat{u}_{it}}{NT - K}$.

- Podemos utilizar os testes **F** e **t** como se estivéssemos no caso de *cross-section*. Isto é, utilizamos as mesmas estatísticas de OLS.
- Para testar autocorrelação no contexto de pooled OLS devemos proceder com o seguinte teste.
- Suponha que o termo de erro é AR(1)

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + e_t \tag{3}$$

em que

$$\mathbb{E}(e_t | x_t, u_{t-1}, x_{t-1}, u_{t-2}, \ldots) \tag{4}$$

- A hipótese de teste é H_0: $\rho_1 = 0$, isto é, não existe autocorrelação.

- Para fazer o teste para autocorrelação basta estimar o seguinte modelo:

$$y_{it} = x_{it}\beta + \rho_1 u_{it-1} + e_{it}, \; t = 2, \ldots, T \tag{5}$$

- Duas questões:
  1. Por que perdemos o primeiro período?
  2. Como estimamos este modelo?

Dados em Painel

- Considere a seguinte equação:

$$y_{it} = x_{it}\beta + \alpha_i + u_{it}, \quad \forall i = 1, \ldots, N \text{ e } t = 1, \ldots, T \qquad (6)$$

- O que significa α_i?
- O α_i é uma variável aleatória constante ao longo do tempo para cada indivíduo/firma i.
- Também denominamos como **efeito não observado** ou **heterogeneidade não observada**.

- Na dimensão do indivíduo, o que seria α_i?
- Podemos dizer que α_i seriam características fixas não observadas dos indivíduos.
- Por exemplo:
    - Habilidade cognitiva
    - Motivação
    - Educação familiar precoce

- Na dimensão de firma, o que seria α_i?
- Podemos dizer que α_i seriam características fixas não observadas da firma.
- Por exemplo:
    - Setor que ocupa no mercado
    - Qualidade gerencial
    - Estrutura
    - Proximidade geográfica do mercado (localização)

Estimação com α_i

- Como podemos estimar uma equação levando em consideração α_i?
- Para uma observação *cross-section* i podemos escrever o modelo em cada um dos anos como:

$$y_{i1} = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \alpha_i + u_{i1} \tag{7}$$
$$y_{i2} = \beta_0 + \beta_1 x_{i2} + \alpha_i + u_{i2} \tag{8}$$

- Subtraindo a segunda equação da primeira temos:

$$\begin{aligned}(y_{i2} - y_{i1}) &= (\beta_0 - \beta_0) + \beta_1 (x_{i2} - x_{i1}) + (\alpha_i - \alpha_i) + (u_{i2} - u_{i1}) \\ \underbrace{(y_{i2} - y_{i1})}_{\Delta y_i} &= \beta_1 \underbrace{(x_{i2} - x_{i1})}_{\Delta x_i} + \underbrace{(u_{i2} - u_{i1})}_{\Delta u_i}\end{aligned} \tag{9}$$

- Resultado em

- Quais são as hipóteses que devemos assumir para obter estimadores consistentes?

  HC.1 $\mathbb{E}(\Delta \boldsymbol{x}' \Delta u) = \mathbf{0}$

  HC.2 rank $(\Delta \boldsymbol{x}' \Delta \boldsymbol{x}) = K$

- Considerando o exemplo anterior de painel em dois períodos, a condição HC.1 equivale a $\mathbb{E}[(x_2 - x_1)'(u_2 - u_1)] = 0$, ou fazendo as contas como $\mathbb{E}(x_2' u_2) - \mathbb{E}(x_2' u_1) - \mathbb{E}(x_1' u_2) + \mathbb{E}(x_1' u_1) = 0$.
- Para que a condição acima seja satisfeita temos que ter em mente dois tipos de **exogeneidade**. Existe algum outro modo de obter estimativas consistentes?

Exogeneidade

- Qual o conceito de exogeneidade usaremos para a análise de dados em painel? Há dos tipos de exogeneidade:
  - Exogeneidade contemporânea
  - Exogeneidade estrita

Exogeneidade Contemporânea

- A **exogeneidade contemporânea** ocorre quando u_t e x_t são ortogonais na média condicional:

$$\mathbb{E}[u_{it}|x_{it}, \alpha_i] = 0, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{11}$$

- *É **exogeneidade contemporânea** de x_t porque ela apenas restringe a relação entre o termo de erro e a variável explicativa no mesmo período.*

Exogeneidade Estrita

- A **exogeneidade estrita** é um pressuposto mais forte comparado com o de exogeneidade contemporânea.
- Assim, temos

$$\mathbb{E}[u_{it}|x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iT}, \alpha_i] = 0,\ t = 1, 2, \ldots, T,\ i = 1, 2, \ldots, N \tag{12}$$

que combinado com $y_{it} = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i + u_{it}$ é idêntico a

$$\mathbb{E}[y_{it}|x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iT}, \alpha_i] = \mathbb{E}[y_{it}|x_{it}, \alpha_i] = \boldsymbol{x}_{it}\boldsymbol{\beta} + \alpha_i \tag{13}$$

para $t = 1, 2, \ldots, T$.

- Da expressão (13), a segunda igualdade é o pressuposto da forma funcional.
- Por sua vez, a primeira igualdade fornece a exogeneidade estrita e sua interpretação. Isso significa que, uma vez que controlamos para x_{it} e α_i, x_{is} não tem efeito nenhum sobre y_{it} para $s \neq t$.
- Assim, o pressuposto expresso na equação (13) restringe como o valor esperado de y_{it} pode relacionar com as variáveis explicativas em outros períodos.

Efeitos Fixos

- A transformação do efeito fixo ou transformação *within* ocorre na situação em que α_i é tratado como uma constante fixa.
- No contexto do estimador de efeitos fixos, tais constantes podem ser correlacionadas com x_{it}, isto é, $\text{cov}(x_{it}, \alpha_i) \neq 0$.
- **Restrição:** não podemos incluir nenhuma variável explicativa que é constante ao longo do tempo. Por exemplo: raça, setor, sexo e etc.

Transformação Within

- Como é realizada essa transformação *within*? Faremos isso em duas etapas.
- A equação estimada é dada por:

$$y_{it} = \boldsymbol{x}'_{it}\beta + \alpha_i + u_{it} \tag{14}$$

- Como podemos estimar a equação (14) considerando o fato de que $\text{cov}(x_{it}, \alpha_i) \neq 0$?

Primeira etapa Obtemos a equação *cross-section* tomando a média da equação (14):

$$\overline{y}_i = \overline{\boldsymbol{x}}_i'\beta + \alpha_i + \overline{u}_i \tag{15}$$

em que

$$\overline{y}_i = \frac{\sum_{i=1}^{T} y_{it}}{T} \tag{16}$$

$$\overline{x}_i = \frac{\sum_{i=1}^{T} x_{it}}{T} \tag{17}$$

$$\overline{u}_i = \frac{\sum_{i=1}^{T} u_{it}}{T} \tag{18}$$

Segunda etapa Subtraímos a equação (15) da equação (14), obtendo:

$$\underbrace{(y_{it} - \overline{y}_i)}_{\ddot{y}_{it}} = \underbrace{(x_{it} - \overline{x}_i)'}_{\ddot{x}_{it}} \beta + \underbrace{(u_{it} - \overline{u}_i)}_{\ddot{u}_{it}} \tag{19}$$

Após realizarmos a transformação *within* a nova equação a ser estimada será dada por:

$$\ddot{\boldsymbol{y}}_{it} = \ddot{\boldsymbol{x}}'_{it}\beta + \ddot{\boldsymbol{u}}_{it}$$

Hipóteses do EF

- Para obter o estimador desta equação é necessário assumir duas hipóteses:

  FE.1 $\mathbb{E}(u_{it}|x_i, \alpha_i) = 0$ para $t = 1, 2, \ldots, T$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \mathbb{E}(u_{it}|x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{iT}, \alpha_i) = 0 \\ &\Longrightarrow \mathbb{E}(\ddot{\boldsymbol{X}}_i \ddot{\boldsymbol{u}}_i) = 0 \end{aligned} \tag{20}$$

  FE.2 rank $\mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{X}}_i\right) = K$

  FE.3 $\mathbb{E}\left(\boldsymbol{u}_i \boldsymbol{u}_i' | \boldsymbol{X}_i, \alpha_i\right) = \sigma_u^2 \boldsymbol{I}_T$

- Sob **FE.1** e **FE.2**, o estimador de efeito fixo pode ser identificado como:

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}^{FE} &= \left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{\boldsymbol{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{X}}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} \ddot{\boldsymbol{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{Y}}_i\right) \\ &= \left(\ddot{\boldsymbol{X}}' \ddot{\boldsymbol{X}}\right)^{-1} \left(\ddot{\boldsymbol{X}}' \ddot{y}\right) \end{aligned} \tag{21}$$

- Para verificar as propriedades de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FE}$ veja que

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FE} = \boldsymbol{\beta} + \left(\sum_{i=1}^{n} \ddot{\boldsymbol{X}}_i' \ddot{\boldsymbol{X}}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \ddot{\boldsymbol{X}}_i' \ddot{u}_i\right) \tag{22}$$

- Tomando o valor esperado condicional, temos

$$\mathbb{E}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FE} \middle| \boldsymbol{X}_i\right) = \boldsymbol{\beta} + \left(\sum_{i=1}^{n} \ddot{\boldsymbol{X}}_i' \mathbb{E}\left(\ddot{u}_i \middle| \boldsymbol{X}_i\right)\right) \tag{23}$$

- Assim,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FE} \overset{\mathcal{P}}{\to} \boldsymbol{\beta} + 0, \text{ pois } \mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i' \ddot{u}_i\right) = \mathbf{0} \tag{24}$$

- Então, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FE}$ não é viciado sob FE.1.

Variância

- Veja que, sob certas condições de regularidade,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FE} - \boldsymbol{\beta}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, V) \tag{25}$$

em que

$$\begin{aligned} V &= \left(\mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i'\ddot{\boldsymbol{X}}_i\right)\right)^{-1}\mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i'\ddot{u}_i\ddot{u}_i'\ddot{\boldsymbol{X}}_i\right)\left(\mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i'\ddot{\boldsymbol{X}}_i\right)\right)^{-1} \\ &= \left(\mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i'\ddot{\boldsymbol{X}}_i\right)\right)^{-1}\mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i'u_iu_i'\ddot{\boldsymbol{X}}_i\right)\left(\mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i'\ddot{\boldsymbol{X}}_i\right)\right)^{-1} \end{aligned} \tag{26}$$

Primeira Diferença

- Considere o seguinte modelo de regressão

$$y_{it} = \boldsymbol{X}'_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \; i = 1, \ldots, N \text{ e } t = 1, \ldots, T \tag{27}$$

e ele defasado um período:

$$y_{it-1} = \boldsymbol{X}'_{it-1}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it-1}, \; i = 1, \ldots, N \text{ e } t = 2, \ldots, T \tag{28}$$

- A primeira diferença é dada por:

$$\begin{aligned} (y_{it} - y_{it-1}) &= (\boldsymbol{X}'_{it} - \boldsymbol{X}'_{it-1})\boldsymbol{\beta} + (u_{it} - u_{it-1}) \\ \Delta y_{it} &= \Delta \boldsymbol{X}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it} \end{aligned} \tag{29}$$

para $t = 2, \ldots, T$.

Hipóteses do FD

FD.1 $\mathbb{E}\left(u_{it}|\boldsymbol{X}'_{i1},\ldots,\boldsymbol{X}'_{iT},\alpha_i\right)=\mathbf{0},\ t=1,\ldots,T$

FD.2 rank $\left(\Delta\boldsymbol{X}'\Delta\boldsymbol{X}\right)=\boldsymbol{K}$ para $t=2,\ldots,T$

FD.3 $\mathbb{E}\left(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}'_i|\boldsymbol{X}'_{i1},\ldots,\boldsymbol{X}'_{iT},\alpha_i\right)=\sigma_e^2\boldsymbol{I}_{T-1}$

- O estimador de MQO para $\boldsymbol{\beta}^{FD}$ neste caso é dado por:

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FD} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{X}_i' \Delta \boldsymbol{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{X}_i' \Delta y_i\right) \\ &= \boldsymbol{\beta} + \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{X}_i' \Delta \boldsymbol{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta \boldsymbol{X}_i' e_i\right) \qquad (30)\end{aligned}$$

- Tomando o valor condicional à X de (30) e supondo que $\mathbb{E}(e_i|\boldsymbol{X}) = 0$, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FD}$ é consistente.
- Assim,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FD} \xrightarrow{\mathcal{P}} \boldsymbol{\beta} + 0, \text{ pois } \mathbb{E}\left(\Delta \boldsymbol{X}_i' e_i\right) = \mathbf{0} \qquad (31)$$

- Então, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FD}$ não é viciado sob FD.1.

Variância

- Veja que, sob certas condições de regularidade,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FD} - \boldsymbol{\beta}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, V) \tag{32}$$

em que

$$V = \left(\mathbb{E}\left(\Delta \boldsymbol{X}_i' \Delta \boldsymbol{X}_i\right)\right)^{-1} \mathbb{E}\left(\Delta \boldsymbol{X}_i' e_i e_i' \Delta \boldsymbol{X}_i\right) \left(\mathbb{E}\left(\Delta \boldsymbol{X}_i' \Delta \boldsymbol{X}_i\right)\right)^{-1} \tag{33}$$

Resumo

1. α_i são tratados como constantes (fixas)
2. Tais constantes podem ser arbitrariamente correlacionados com x_{it}
3. **Hipótese de identificação: exogeneidade Estrita**
4. Solução: eliminar o efeito fixo através de alguma transformação
5. Dois estimadores: transformação *within* $\widehat{\beta}^{FE}$ e estimador em primeira diferença $\widehat{\beta}^{FD}$
6. Qual a limitação do modelo de efeito fixo?

Efeitos Aleatórios

- Considere o seguinte modelo linear

$$y_{it} = x'_{it}\beta + \alpha_i + u_{it}, \; i = 1, \ldots, N \text{ e } t = 1, \ldots, T \tag{34}$$

- Para obter o estimador de efeitos aleatórios devemos assumir as seguintes hipóteses:

  RE.1a $\mathbb{E}[u_{it}|\boldsymbol{X}_i, \alpha_i] = 0$ para $t = 1, 2, \ldots, T$
  RE.1b $\mathbb{E}[\alpha_i|\boldsymbol{X}_i] = \mathbb{E}[\alpha_i] = 0$
  RE.2 rank $\mathbb{E}[\boldsymbol{X}'_i \Omega^{-1} \boldsymbol{X}_i] = K$
  RE.3a $\mathbb{E}[u'_i u_i|\boldsymbol{X}_i, \alpha_i] = \sigma^2_u \boldsymbol{I}_T$
  RE.3b $\mathbb{E}[\alpha^2_i|\boldsymbol{X}_i] = \sigma^2_\alpha$

- Sob as hipóteses **RE.1a** e **RE.1b**, podemos reescrever o modelo como

$$y_{it} = x_{it}'\beta + v_{it},\ i = 1, \ldots, N \text{ e } t = 1, \ldots, T \tag{35}$$

em que

$$v_{it} = \alpha_i + u_{it} \tag{36}$$

Estimação

- Neste modelo, vamos usar MQG para explorar a correlação no erro v_{it}.
- Para usar o MQG, é necessário saber que a seguinte hipótese precisa ser satisfeita.

  Exogeneidade $\mathbb{E}[v_{it}|\boldsymbol{X}_i] = 0$
- É importante lembrar que:

$$\mathbb{E}[v_{it}|\boldsymbol{X}_i] = \mathbb{E}[u_{it}|\boldsymbol{X}_i] + \mathbb{E}[\alpha_i|\boldsymbol{X}_i] = 0 \tag{37}$$

- Além disso, temos os seguintes resultados:

$$\mathbb{E}[v_{it}] = 0 \tag{38}$$

e

$$\text{var}[v_{it}] = \mathbb{E}(\alpha_i^2) + 2\mathbb{E}(\alpha_i u_i) + \mathbb{E}(u_{it}^2) = \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 \tag{39}$$

e

$$\text{cov}(v_{it}, v_{is}) = \mathbb{E}[(\alpha_i + u_{it})(\alpha_i + u_{is})] = \sigma_\alpha^2 \tag{40}$$

e

$$\text{cov}(v_{it}, v_{js}) = 0 \text{ se } i \neq j \tag{41}$$

Matriz de Variância-Covariância

- Com isso,

$$\Omega \equiv \text{var}[v_i|X_i] = \text{var}[v_i] = \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 & \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \sigma_\alpha^2 & \sigma_\alpha^2 & \dots & \sigma_\alpha^2 + \sigma_u^2 \end{bmatrix}$$
$$= \sigma_u^2 \boldsymbol{I}_T + \sigma_\alpha^2 \imath_T \imath_T' \tag{42}$$

- Como estimar o modelo considerando a nova matriz de variância e covariância?
- Usamos a matriz de variância e covariância para eliminar a autocorrelação e a heterocedasticidade dos erros por mínimos quadrados generalizados.
- Para fazer isso pré-multiplicamos o nosso modelo original por $\Omega^{-1/2}$. Assim,

$$\underbrace{\Omega^{-1/2}\boldsymbol{y}_i}_{\boldsymbol{y}_i^*} = \underbrace{\Omega^{-1/2}\boldsymbol{X}_i}_{\boldsymbol{X}_i^*}\boldsymbol{\beta} + \underbrace{\Omega^{-1/2}\boldsymbol{u}_i}_{\boldsymbol{u}_i^*} \tag{43}$$

- O estimador de MQO para $\boldsymbol{\beta}^{RE}$ neste caso é dado por:

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{RE} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i' \Omega^{-1} \boldsymbol{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i' \Omega^{-1} y_i\right) \\ &= \boldsymbol{\beta} + \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i' \Omega^{-1} \boldsymbol{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i' \Omega^{-1} u_i\right) \qquad (44)\end{aligned}$$

- Tomando o valor condicional à X de (44) e supondo que $\mathbb{E}(e_i|\boldsymbol{X}) = 0$, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{RE}$ é consistente.
- Assim,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{RE} \overset{\mathcal{P}}{\to} \boldsymbol{\beta} + 0, \text{ pois } \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}_i' u_i\right) = \mathbf{0} \qquad (45)$$

- Então, $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{RE}$ não é viciado sob RE.1a.

Variância

- Veja que, sob certas condições de regularidade,

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{RE} - \boldsymbol{\beta}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, V) \tag{46}$$

em que

$$V = \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{X}_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} u_i u_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{X}_i\right) \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{\Omega}^{-1} \boldsymbol{X}_i\right)^{-1} \tag{47}$$

Teste de Hausmann

- A ideia do **Teste de Hausmann** é testar a hipótese de que α_i e x_{it} são correlacionados.
- A hipótese nula e alternativa são dadas por:

$$H_0: \ \mathrm{cov}(\alpha_i, \boldsymbol{x}_i) = 0 \quad \text{(efeitos aleatórios)} \tag{48}$$

$$H_1: \ \mathrm{cov}(\alpha_i, \boldsymbol{x}_i) \neq 0 \quad \text{(efeitos fixos)} \tag{49}$$

- A estatística de teste será dada por:

$$H = \left(\widehat{\delta}_{FE} - \widehat{\delta}_{RE}\right)' \left[\widehat{\mathrm{var}}(\widehat{\delta}_{FE}) - \widehat{\mathrm{var}}(\widehat{\delta}_{RE})\right]^{-1} \left(\widehat{\delta}_{FE} - \widehat{\delta}_{RE}\right) \sim \chi^2_q \tag{50}$$

em que q é o número de elementos de δ, o vetor com as variáveis que variam no tempo.

Método dos Momentos

- As condições dos momentos populacionais fornecem informações que podem ser utilizadas para estimar os parâmetros de distribuições.
- Suponha que queiramos estimar a média populacional e a variância de uma variável aleatória X_n.
- Esses parâmetros satisfazem os momentos populacionais:

$$\mathbb{E}[X_n] - \mu = 0 \tag{51}$$

$$\mathbb{E}[X_n^2] - (\sigma^2 + \mu^2) = 0 \tag{52}$$

- Os equivalentes amostrais são:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_n}{n} - \mu^* = 0 \implies \mu^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_n}{n} \tag{53}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_n^2 - (\sigma^{2^*} + \mu^{2^*}) = 0 \implies \sigma^{2^*} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_n - \mu^*)^2}{n} \tag{54}$$

GMM

- Seja $x_i, i = 1, \ldots, n$, variáveis aleatórias obtidas de uma distribuição populacional P desconhecida.
- Para uma função desconhecida ψ, o parâmetro $\theta_0 \in \Theta$ satisfaz a condição de momento

$$\mathbb{E}[\psi(x_i, \theta_0)] = 0 \tag{55}$$

- Esta equação fornece o núcleo da estimativa GMM.
- A função apropriada ψ e o parâmetro θ_0 são geralmente derivados de um modelo teórico.
- Ambos ψ e θ_0 podem ser vetorizados e não necessariamente do mesmo tamanho.
- Seja q tamanho de ψ, e p o tamanho de θ.
- O GMM é baseado em funções de momentos que dependem de variáveis aleatórias observáveis e parâmetros desconhecidos, e que têm expectativa zero na população quando avaliadas nos parâmetros verdadeiros.

- Hansen mostrou que todos os estimadores de variáveis instrumentais previamente sugeridos, em modelos lineares ou não lineares, com corte transversal, séries temporais ou dados em painel, podem ser convertidos em estimadores GMM.
- O GMM é, portanto, às vezes visto como uma estrutura unificadora para inferência em econometria.

- Juntamente com a equação (55), também se impõem certas condições de contorno para o momento de 2ª ordem e para a derivada parcial:

$$\mathbb{E}[\psi(x_i, \theta_0)\psi'(x_i, \theta_0)] \equiv \Phi < \infty \tag{56}$$

e

$$\left| \frac{\partial^2 \psi_j(x, \theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_\ell} \right| \leq m(x) \tag{57}$$

para todo $\theta \in \Theta$, em que $\mathbb{E}[m(x)] < \infty$. Também definimos

$$D \equiv \mathbb{E}\left[\frac{\partial \psi(x_i, \theta)}{\partial \theta'}\right] \tag{58}$$

com *rank* igual a p.

- A solução foi generalizada por Hansen (1982) por meio do seguinte problema de otimização da forma quadrática abaixo:

$$Q_{C,N}(\theta) = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i,\theta)\right]' \cdot \boldsymbol{C} \cdot \left[\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i,\theta)\right] \tag{59}$$

para alguma matriz positiva definida simétrica $\boldsymbol{C}$.

- Sob certas condições de regularidade, $\widehat{\theta}^{GMM}$ tem as seguintes propriedades assintóticas:

$$\widehat{\theta}^{GMM} \xrightarrow{\mathcal{P}} \theta^* \tag{60}$$

$$\sqrt{N}\left(\widehat{\theta}^{GMM} - \theta^*\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \left(\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Gamma}\right)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Gamma}\left(\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{C}\boldsymbol{\Gamma}\right)^{-1}\right) \tag{61}$$

em que

$$\boldsymbol{\Delta} \equiv \mathbb{E}\left[\psi(x_i, \theta^*)\psi(x_i, \theta^*)'\right] \tag{62}$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = \mathbb{E}\left[\frac{\partial}{\partial \theta'}\psi(x_i, \theta^*)\right] \tag{63}$$

Matriz C e Estimadores Convencionais

- Sabemos que para um modelo linear

$$\widehat{\theta}^{GMM} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}'y \tag{64}$$

- Se $L = K$, então $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}$ é uma matriz quadrada e teremos

$$\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}\boldsymbol{C}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}\right)^{-1}\boldsymbol{C}^{-1}\left(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right)^{-1} \tag{65}$$

- O estimador de GMM se reduz a:

$$\widehat{\theta}^{GMM} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}'y \tag{66}$$

isto é, o estimador de IV.

- Se $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{Z}$, então o estimador GMM para um modelo linear coincide com o estimador de MQO, isto é

$$\widehat{\theta}^{GMM} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'y \tag{67}$$

- Qualquer matriz $\boldsymbol{C}$ positiva definida garante consistência.
- No entanto, a escolha de $\boldsymbol{C}$ é importante, porque em amostras finitas, diferentes matrizes $\boldsymbol{C}$ levarão a diferentes estimativas pontuais.
- Considere

$$\boldsymbol{C} = \left(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\right)^{-1} \tag{68}$$

- Consequentemente,

$$\widehat{\theta}^{GMM} = \left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X}\right)^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}\left(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}\right)^{-1}\boldsymbol{Z}'y \tag{69}$$

que é o estimador MQ2E.

- A escolha ótima para $\boldsymbol{C}$ em termos de minimizar a variância assintótica é o inverso da covariância dos momentos, $\boldsymbol{\Delta}^{-1}$.
- Usando a matriz de ponderação ótima, a distribuição assintótica é

$$\sqrt{N}\left(\widehat{\theta}^{GMM} - \theta^*\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}\left(0, \left(\boldsymbol{\Gamma}'\boldsymbol{\Delta}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\right)^{-1}\right) \tag{70}$$

- Este estimador é geralmente não viável pois $\boldsymbol{\Delta}^{-1}$ não é conhecida.
- A sugestão é obter essa matriz como

$$\widehat{\boldsymbol{\Delta}}^{-1} = \left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\psi(x_i, \widetilde{\theta})\psi(x_i, \widetilde{\theta})'\right]^{-1} \tag{71}$$

- No segundo passo uma estimativa de θ^* é obtida pela minimização de $Q_{\widehat{\boldsymbol{\Delta}}^{-1}, N}(\theta)$.

Endogeneidade em Painel de Dados

- Seja o seguinte modelo de dados em painel

$$y_i = \boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\beta} + u_i \tag{72}$$

e o conjunto de instrumentos $\boldsymbol{Z}_i$ ($\boldsymbol{L}$ ao total).

- O objetivo é estimar o modelo a parir dos momentos amostrais.
- Assim, sejam os seguintes pressupostos:
    - GMM.1 $\mathbb{E}(\boldsymbol{Z}_i' u_i) = \mathbf{0}$
    - GMM.2 rank $\mathbb{E}(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{K}$

- Se $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{K}$, isto é, o modelo é identificado, então da condição GMM.1, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\boldsymbol{Z}_i' u_i) &= \mathbf{0} \\
\mathbb{E}(\boldsymbol{Z}_i' \left(y_i - \boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{\beta}\right)) &= \mathbf{0} \\
\mathbb{E}(\boldsymbol{Z}_i' y_i) - \mathbb{E}(\boldsymbol{Z}_i' \boldsymbol{X}_i) \boldsymbol{\beta} &= 0 \\
\boldsymbol{\beta}^{MM} &= \mathbb{E}(\boldsymbol{Z}_i' \boldsymbol{X}_i)^{-1} \mathbb{E}\left(\boldsymbol{Z}_i' y_i\right) \qquad (73)
\end{aligned}
$$

- Se $\boldsymbol{L} > \boldsymbol{K}$, então o problema de otimização é escrito como

$$\min_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Z}_i' \left(y_i - \boldsymbol{X}_i \widehat{\boldsymbol{\beta}} \right) \right)' \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Z}_i' \left(y_i - \boldsymbol{X}_i \widehat{\boldsymbol{\beta}} \right) \right) \tag{74}$$

- A CPO implica que

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{MM} = \mathbb{E} \left(\boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i' \boldsymbol{X}_i \right)^{-1} \mathbb{E} \left(\boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i' y_i \right) \tag{75}$$

- Veja que

$$\sqrt{n} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{MM} - \boldsymbol{\beta} \right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, V) \tag{76}$$

em que

$$V = \mathbb{E} \left(\boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i' \boldsymbol{X}_i \right)^{-1} \mathbb{E} \left(\boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i' u_i u_i' \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i' \boldsymbol{X}_i \right) \mathbb{E} \left(\boldsymbol{X}_i' \boldsymbol{Z}_i \boldsymbol{Z}_i' \boldsymbol{X}_i \right)^{-1} \tag{77}$$

GMM

- A função objetivo é:

$$\min_{\widehat{\boldsymbol{\beta}}} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Z}_i' \left(y_i - \boldsymbol{X}_i \widehat{\boldsymbol{\beta}} \right) \right)' \widehat{\boldsymbol{\Omega}} \left(\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{Z}_i' \left(y_i - \boldsymbol{X}_i \widehat{\boldsymbol{\beta}} \right) \right) \tag{78}$$

em que $\widehat{\boldsymbol{\Omega}}$ é uma matriz simétrica positiva definida.

- A CPO implica que

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GMM} = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{X} \right)^{-1} \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{Z}\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{Z}'y \right) \tag{79}$$

- Veja que

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{GMM}-\boldsymbol{\beta}\right)\xrightarrow{\mathcal{D}}\mathcal{N}(\mathbf{0},V) \tag{80}$$

em que

$$\begin{aligned} V =&\mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Z}_i\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\right)^{-1}\mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Z}_i\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{Z}_i'u_iu_i'\boldsymbol{Z}_i\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\right)\\ &\mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Z}_i\widehat{\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\right)^{-1} \end{aligned} \tag{81}$$

FEIV

- Considere o seguinte modelo de regressão:

$$y_{it} = \boldsymbol{X}'_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it} \tag{82}$$

- Temos as seguintes hipóteses:

$$\begin{aligned}
\text{FEIV.1} \quad & \mathbb{E}(u_{it}|\boldsymbol{Z}_{it}, c_i) = \mathbf{0}, \quad t = 1, \ldots, T \\
\text{FEIV.2a} \quad & \text{rank}\left[\sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{Z}}_{it}\ddot{\boldsymbol{Z}}'_{it}\right)\right] = \boldsymbol{L} \\
\text{FEIV.2b} \quad & \text{rank}\left[\sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{Z}}_{it}\ddot{\boldsymbol{X}}'_{it}\right)\right] = \boldsymbol{K} \\
\text{FEIV.3} \quad & \mathbb{E}(u_i u'_i|\boldsymbol{Z}_{it}, c_i) = \sigma_u^2 I_T.
\end{aligned}$$

- FEIV é um estimador MQ2E do modelo de efeitos Fixos. Escrevendo o modelo em seu formato padrão, temos:

$$\ddot{y}_{it} = \ddot{\boldsymbol{X}}_{it}\boldsymbol{\beta} + \ddot{u}_{it} \tag{83}$$

- A CPO implica que o estimador $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ de FEIV é:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FEIV} = \mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i'\boldsymbol{Z}_i\left(\boldsymbol{Z_i'Z_i}\right)^{-1}\boldsymbol{Z_i}'\ddot{\boldsymbol{X}}_i\right)^{-1}\mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i'\boldsymbol{Z}_i\left(\boldsymbol{Z_i'Z_i}\right)^{-1}\boldsymbol{Z_i}'\ddot{y}_i\right) \tag{84}$$

- Veja que

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FEIV} - \boldsymbol{\beta}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, V) \tag{85}$$

em que

$$\begin{aligned} V =& \mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i'\boldsymbol{Z}_i\left(\boldsymbol{Z_i'}\boldsymbol{Z_i}\right)^{-1}\boldsymbol{Z_i}'\ddot{\boldsymbol{X}}_i\right)^{-1} \\ & \mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i'\boldsymbol{Z}_i\left(\boldsymbol{Z_i'}\boldsymbol{Z_i}\right)^{-1}\boldsymbol{Z_i}'u_iu_i'\boldsymbol{Z}_i\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{Z}_i\right)^{-1}\boldsymbol{Z}_i'\ddot{\boldsymbol{X}}_i\right) \\ & \mathbb{E}\left(\ddot{\boldsymbol{X}}_i'\boldsymbol{Z}_i\left(\boldsymbol{Z_i'}\boldsymbol{Z_i}\right)^{-1}\boldsymbol{Z_i}'\ddot{\boldsymbol{X}}_i\right)^{-1} \end{aligned} \tag{86}$$

FDIV

- Considere um modelo de regressão em que a variável dependente defasada é utilizada como regressor

$$y_{it} = \boldsymbol{X}'_{it}\boldsymbol{\beta} + c_i + u_{it}, \quad i = 1, \ldots, N \ \text{ e } \ t = 1, \ldots, T \tag{87}$$

- Tomando a primeira diferença, temos:

$$\Delta y_{it} = \Delta \boldsymbol{X}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \Delta u_{it}, \quad t = 2, \ldots, T \tag{88}$$

- As hipóteses são

  FDIV.1 $\mathbb{E}(\boldsymbol{Z}_{it}\Delta u_{it}) = \boldsymbol{0}$, em que $\boldsymbol{Z}_i = \text{diagonal}\left(\boldsymbol{Z}'_{i2}, \ldots, \boldsymbol{Z}'_{iT}\right)$

  FDIV.2a rank $(\boldsymbol{Z}'_i\boldsymbol{Z}_i) = \boldsymbol{L}$

  FDIV.2b rank $(\boldsymbol{Z}'_i\Delta\boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{K}$

- Observe que

$$
\begin{aligned}
y_{it} &= \boldsymbol{X}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \rho y_{it-1} + c_i + u_{it} \\
y_{it-1} &= \boldsymbol{X}'_{it-1}\boldsymbol{\beta} + \rho y_{it-2} + c_i + u_{it-1} \\
\Delta y_{it} &= \Delta\boldsymbol{X}'_{it}\boldsymbol{\beta} + \rho\Delta y_{it-1} + \Delta u_{it}
\end{aligned}
\tag{89}
$$

- Supondo exogeneidade contemporânea:

$$
\mathbb{E}\left((y_{it-1} - y_{it-2})(u_{it} - u_{it-1})\right) = -\mathbb{E}(y_{it-1}u_{it-1}) \tag{90}
$$

- Assim, y_{it-2} tem correlação com Δy_{it-1} e não tem correlação com Δu_{it}. Podemos usar 2 defasagens como instrumentos.

- O estimador de $\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FDIV}$ é dado por:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{FDIV} = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Z}_i\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{Z}_i\right)^{-1}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{X}_i\right)^{-1}\mathbb{E}\left(\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{Z}_i\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{Z}_i\right)^{-1}\boldsymbol{Z}_i'y_i\right) \tag{91}$$

em que

$$\boldsymbol{Z}_i = \begin{bmatrix} (\Delta\boldsymbol{X}_{i3}, y_{i1}) & 0 & 0 \\ 0 & (\Delta\boldsymbol{X}_{i4}, y_{i1}, y_{i2}) & 0 \\ 0 & 0 & (\Delta\boldsymbol{X}_{i5}, y_{i1}, y_{i2}, y_{i3}) \end{bmatrix} \tag{92}$$

REIV

- As hipóteses do modelo de efeitos aleatórios com correção para endogeneidade são:

  REIV.1(a) $\mathbb{E}(u_{it}|\boldsymbol{Z}_{i1},\ldots,\boldsymbol{Z}_{iT},c_i)=\mathbf{0},\ t=1,\ldots,T$ (exogeneidade estrita)

  REIV.1(b) $\mathbb{E}(c_i|\boldsymbol{Z}_{i1},\ldots,\boldsymbol{Z}_{iT})=\mathbb{E}(c_i)=\mathbf{0}$

  REIV.2(a) rank $\mathbb{E}(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i)=\boldsymbol{L}$

  REIV.2(b) rank $\mathbb{E}(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}_i)=\boldsymbol{K}$

  REIV.3(a) $\mathbb{E}(u_iu_i'|\boldsymbol{Z}_i,c_i)=\sigma_u^2 I_T$

  REIV.3(b) $\mathbb{E}(c_i^2|\boldsymbol{Z}_i)=\sigma_c^2$

- O estimador $\widehat{\boldsymbol{\beta}}$ de REIV é:

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{REIV} = \mathbb{E}\left[\left(\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right)\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right)^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}_i\right)\right]^{-1} \times \\ \times \mathbb{E}\left[\left(\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right)\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right)^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}y_i\right)\right] \tag{93}$$

- Veja que

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}^{REIV} - \boldsymbol{\beta}\right) \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(\mathbf{0}, V) \tag{94}$$

em que

$$\begin{aligned} V = &\mathbb{E}\left[\left(\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right)\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right)^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}_i\right)\right]^{-1} \\ &\mathbb{E}\left[\left(\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right)\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right)^{-1}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}u_iu_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right. \\ &\left.\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right)^{-1}\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}_i\right] \\ &\mathbb{E}\left[\left(\boldsymbol{X}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right)\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{Z}_i\right)^{-1}\left(\boldsymbol{Z}_i'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X}_i\right)\right]^{-1} \end{aligned} \tag{95}$$

Econometria I

Dados em Painel

Victor Oliveira

Núcleo de Economia Internacional e Desenvolvimento Econômico

PPGDE – 2024