Universidade Federal do Paraná **Departamento de Economia**

Economia Matemática **Professor: Victor Oliveira**

Lista de Exercícios II

1) **Otimização com Restrição de Igualdade**

a) Considere o problema de otimização

(1)
$$\max_{x,y} xy$$
$$\text{sujeito a } x + y = 6$$

Resolva.

b) Considere o problema de otimização

(2)
$$\max_{x,y} x^2 y$$
$$\text{sujeito a } 2x^2 + y^2 = 3$$

Resolva.

c) Considere o problema de otimização

(3)
$$\max_{x,y} x^a y^b$$
$$\text{sujeito a } px + y = m$$

em que $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$, $m > 0$ e $x > 0$ e $y > 0$. Justifique os sinais dos parâmetros e das variáveis. Resolva.

d) Considere o problema de otimização

(4)
$$\max_{x,y} x$$
$$\text{sujeito a } x^2 = 0$$

Resolva.

e) Considere o problema de otimização

(5)
$$\begin{aligned} &\max_{x,y} x^2 + y^2 + z^2 \\ \text{sujeito a } & x + 2y + z = 1 \\ & 2x - y - 3z = 4 \end{aligned}$$

Resolva.

2) **Otimização com Restrição de Desigualdade**

a) Considere o problema de otimização

(6)
$$\begin{aligned} &\max_{x,y} \left[-(x-1)^2 - (y+2)^2\right] \\ \text{sujeito a } & 0 \leq x \leq 2 \\ & -3 \leq y \leq 3 \end{aligned}$$

Resolva.

b) Considere o problema de otimização

(7)
$$\begin{aligned} &\max_{x,y} x^2 + y^2 + y - 1 \\ \text{sujeito a } & x + y \leq 1 \end{aligned}$$

Resolva.

c) Considere o problema de otimização

(8)
$$\begin{aligned} &\max_{x,y} \left[-(x-4)^2 - (y-4)^2\right] \\ \text{sujeito a } & x + y \leq 4 \\ & x + 3y \leq 9 \end{aligned}$$

Resolva e ilustre graficamente o problema.

d) Considere o problema de otimização

(9)
$$\begin{aligned} &\max_{x,y} x \\ \text{sujeito a } & y - (1-x)^3 \leq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Resolva.

e) Considere o problema de otimização

$$\max_{x,y} x \qquad (10)$$
$$\text{sujeito a } x^2 \leq 0$$

Resolva.

f) Considere o problema de otimização

$$\max_{x} \left[-(x-2)^2\right] \qquad (11)$$
$$\text{sujeito a } x \geq 1$$

Resolva.

g) Considere o problema de otimização

$$\max_{x,y} \left[-(x-2)^2 - (y-2)^2\right] \qquad (12)$$
$$\text{sujeito a } x + y \leq 6$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Resolva.

h) Considere o problema de otimização

$$\max_{x,y} x^{1/2} + y \qquad (13)$$
$$\text{sujeito a } px + y \leq I$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Resolva.

i) Considere o problema de otimização

$$\max_{x,y} xy \qquad (14)$$
$$\text{sujeito a } x + y^2 \leq 2$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Resolva.

j) Considere o problema de otimização

(15)
$$
\begin{aligned}
&\max_{x,y} \ln(x+1)+y \\
\text{sujeito a } &2x+y \leq 3 \\
&x \geq 0 \\
&y \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolva.

k) Considere o problema de otimização

(16)
$$
\begin{aligned}
&\max_{x,y} x^2+y^2 \\
\text{sujeito a } &x^2+y^2 \leq 5 \\
&x+2y=4 \\
&x \geq 0 \\
&y \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolva.

l) Considere o problema de otimização

(17)
$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y,z,w} x^2+y^2+z^2+w^2 \\
\text{sujeito a } &x+y+z+w=1 \\
&w \leq A
\end{aligned}
$$

Resolva.

m) Considere o problema de otimização

(18)
$$
\begin{aligned}
&\min_{x,y} x^2+y^2+60x \\
\text{sujeito a } &x-80 \geq 0 \\
&x+y-120 \geq 0
\end{aligned}
$$

Resolva.

n) Considere o problema de otimização

(19)
$$\begin{aligned} &\min_{x,y} (x-2)^2 + y \\ \text{sujeito a } & y - x^3 \geq 0 \\ & y + x^3 \leq 0 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Resolva.

o) Considere o problema de otimização

(20)
$$\begin{aligned} \max_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad & f(x,y,z) = 4x + 3y + 2z - x^2 - y^2 - z^2 \\ \text{sujeito a} \quad & x + y + z - 4 \leq 0, \\ & y + 2z - 3 \leq 0. \end{aligned}$$

Resolva.

p) Considere o problema de otimização

(21)
$$\begin{aligned} \max_{x,y,z\in\mathbb{R}} \quad & f(x,y,z) = \ln(x+1) + \ln(y+1) + \ln(z+1) \\ \text{sujeito a} \quad & x + y + z - 4 \leq 0, \\ & xy - 1 \leq 0, \\ & x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \end{aligned}$$

3) **Estática Comparativa**

a) Considere o problema de maximização

$$\max_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad U(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

sujeito à restrição orçamentária

$$p_x x + p_y y = m, \qquad p_x > 0,\ p_y > 0,\ m > 0.$$

i) Construa a função Lagrangiana e derive as condições de primeira ordem.
ii) Resolva o sistema de condições de primeira ordem e obtenha as demandas ótimas

$$x^*(p_x, p_y, m), \qquad y^*(p_x, p_y, m).$$

iii) Utilizando diferenciação total, calcule

$$\frac{\partial x^*}{\partial m} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y^*}{\partial m},$$

e interprete economicamente os resultados.

iv) Mostre que

$$\frac{\partial x^*}{\partial p_x} < 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial y^*}{\partial p_y} < 0.$$

v) Analise como a razão ótima de consumo

$$\frac{x^*}{y^*}$$

se altera quando o parâmetro α aumenta. Determine o sinal de

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{x^*}{y^*}\right).$$

b) Considere uma firma que escolhe os níveis de insumos x e y para minimizar seu custo total, dada uma tecnologia de produção do tipo CES.

$$\min_{x,y\in\mathbb{R}_+} \quad C(x,y) = w_x x + w_y y,$$

sujeito à restrição tecnológica

$$F(x,y) = (\delta x^\rho + (1-\delta)y^\rho)^{\frac{1}{\rho}} = q,$$

onde $q > 0$ é o nível de produção exógeno, $w_x > 0$ e $w_y > 0$ são os preços dos insumos, $0 < \delta < 1$ e $\rho \neq 0$.

i) Construa a função Lagrangiana do problema.

ii) Derive as condições de primeira ordem e obtenha a condição de taxa marginal de substituição técnica (TMST).

iii) Resolva o sistema para obter as demandas condicionais ótimas

$$x^*(w_x, w_y, q, \delta, \rho), \qquad y^*(w_x, w_y, q, \delta, \rho).$$

iv) Utilizando diferenciação implícita, determine o sinal de

$$\frac{\partial x^*}{\partial w_x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial y^*}{\partial w_y}.$$

v) Analise como a razão ótima de insumos

$$\frac{x^*}{y^*}$$

se altera quando o parâmetro de substituição ρ aumenta. Interprete o resultado economicamente.

vi) Calcule a derivada

$$\frac{\partial C^*(w_x, w_y, q)}{\partial q}$$

e interprete o multiplicador de Lagrange associado à restrição tecnológica.

c) Considere um agente representativo que escolhe consumo presente c_1 e consumo futuro c_2 para maximizar sua utilidade intertemporal.

$$\max_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+} \quad U(c_1, c_2) = \ln c_1 + \beta \ln c_2, \qquad \beta > 0,$$

sujeito à restrição intertemporal

$$c_1 + \frac{c_2}{1+r} = w, \qquad r > -1,\ w > 0.$$

i) Construa a função Lagrangiana do problema.

ii) Derive as condições de primeira ordem e obtenha a relação ótima entre c_1 e c_2.

iii) Resolva explicitamente $c_1^*(r, w, \beta)$ e $c_2^*(r, w, \beta)$.

iv) Usando diferenciação total, determine o sinal de

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial c_2^*}{\partial r}.$$

v) Analise como a alocação ótima reage a uma variação em β. Determine o sinal de

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{c_2^*}{c_1^*}\right).$$

vi) Interprete economicamente o multiplicador de Lagrange associado à restrição intertemporal.

d) Considere um indivíduo que escolhe consumo c e lazer ℓ para maximizar sua utilidade.

$$\max_{c, \ell \in \mathbb{R}_+} \quad U(c, \ell) = \ln c + \gamma \ln \ell, \qquad \gamma > 0,$$

sujeito à restrição orçamentária com imposto proporcional sobre o trabalho

$$c = (1-\tau)w(T-\ell) + R,$$

onde $w > 0$ é o salário real, $T > 0$ é o tempo total disponível, $\tau \in [0, 1)$ é a alíquota do imposto e $R \geq 0$ é uma renda não laboral.

i) Construa a função Lagrangiana do problema.

ii) Derive as condições de primeira ordem e obtenha a condição de escolha ótima entre consumo e lazer.

iii) Resolva explicitamente $c^*(w, \tau, R, \gamma, T)$ e $\ell^*(w, \tau, R, \gamma, T)$.

iv) Utilizando diferenciação implícita, determine o sinal de

$$\frac{\partial \ell^*}{\partial \tau} \quad \text{e} \quad \frac{\partial c^*}{\partial \tau}.$$

v) Analise como a oferta de trabalho ótima

$$h^* = T - \ell^*$$

reage a um aumento da renda não laboral R.

vi) Interprete economicamente o multiplicador de Lagrange associado à restrição orçamentária.

e) Considere um investidor avesso ao risco que escolhe quanto investir em um ativo livre de risco e em um ativo arriscado.

$$\max_{x,y \in \mathbb{R}} \quad \mathbb{E}[U(W)] = \mathbb{E}\left[-e^{-\theta W}\right], \qquad \theta > 0,$$

onde a riqueza final é

$$W = (1 + r_f)x + y(1 + \tilde{r}),$$

com $r_f > -1$ a taxa de retorno do ativo livre de risco e $\tilde{r}$ o retorno aleatório do ativo arriscado, tal que $\mathbb{E}[\tilde{r}] = \mu$ e $\mathrm{Var}(\tilde{r}) = \sigma^2$.

A riqueza inicial W_0 impõe a restrição orçamentária

$$x + y = W_0.$$

i) Utilize a restrição orçamentária para reescrever o problema em termos de uma única variável.

ii) Mostre que o problema admite uma solução fechada para y^*.

iii) Determine o sinal de

$$\frac{\partial y^*}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial y^*}{\partial \sigma^2}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial y^*}{\partial \theta}.$$

iv) Analise como a composição ótima do portfólio reage a um aumento da taxa livre de risco r_f.

v) Interprete economicamente os resultados de estática comparativa obtidos.

f) Considere um indivíduo que escolhe consumo privado c e contribuição voluntária g para um bem público.

$$\max_{c,g \in \mathbb{R}_+} \quad U(c, g) = \ln c + \alpha \ln(G_0 + g), \qquad \alpha > 0,$$

sujeito à restrição orçamentária

$$c + g = m, \qquad m > 0,$$

onde $G_0 > 0$ representa a provisão exógena do bem público proveniente de outros indivíduos ou do governo.

i) Construa a função Lagrangiana do problema.

ii) Derive as condições de primeira ordem e resolva explicitamente

$$c^*(m, G_0, \alpha), \qquad g^*(m, G_0, \alpha).$$

iii) Determine o sinal de
$$\frac{\partial g^*}{\partial m} \quad \text{e} \quad \frac{\partial g^*}{\partial G_0}.$$

iv) Analise como a contribuição ótima reage a um aumento do parâmetro de preferência α.

v) Interprete economicamente os resultados de estática comparativa.

g) Considere um indivíduo que enfrenta risco de perda e escolhe quanto seguro adquirir.

$$\max_{c_0, s \in \mathbb{R}_+} \quad \mathbb{E}[U] = (1-p)\ln c_0 + p \ln c_1, \qquad 0 < p < 1,$$

onde a renda inicial é $w > 0$, a perda ocorre com probabilidade p, e a renda no estado ruim é

$$c_1 = w - L + s,$$

enquanto a renda no estado bom é

$$c_0 = w - \pi s.$$

O prêmio do seguro é $\pi > 0$ por unidade de cobertura e $L > 0$ é o valor da perda.

i) Escreva a restrição orçamentária implícita do problema e construa a Lagrangiana.

ii) Derive a condição de primeira ordem e resolva para o nível ótimo de seguro s^*.

iii) Determine o sinal de
$$\frac{\partial s^*}{\partial p}, \quad \frac{\partial s^*}{\partial L}, \quad \text{e} \quad \frac{\partial s^*}{\partial \pi}.$$

iv) Analise o caso de seguro atuarialmente justo ($\pi = p$).

v) Interprete economicamente os resultados de estática comparativa.

h) Considere um consumidor que escolhe a quantidade q e o nível de qualidade s de um bem diferenciado.

$$\max_{q, s \in \mathbb{R}_+} \quad U(q,s) = \ln q + \beta \ln s, \qquad \beta > 0,$$

sujeito à restrição orçamentária

$$p(s)\, q = m, \qquad m > 0,$$

onde o preço unitário depende da qualidade segundo

$$p(s) = p_0 + \gamma s, \qquad p_0 > 0,\ \gamma > 0.$$

i) Construa a função Lagrangiana do problema.

ii) Derive as condições de primeira ordem e resolva explicitamente

$$q^*(m, p_0, \gamma, \beta), \qquad s^*(m, p_0, \gamma, \beta).$$

iii) Determine o sinal de
$$\frac{\partial s^*}{\partial m} \quad \text{e} \quad \frac{\partial q^*}{\partial m}.$$
iv) Analise como o nível ótimo de qualidade reage a um aumento do parâmetro tecnológico γ.
v) Interprete economicamente os resultados de estática comparativa.

i) Considere uma firma que produz um nível fixo de produto $q > 0$ e escolhe o nível de abatimento de poluição a.
$$\min_{a\in\mathbb{R}_+} \quad C(a) = c(q) + \frac{k}{2}a^2, \qquad k > 0,$$
sujeito à restrição ambiental
$$E = e(q) - a = \bar{E}, \qquad \bar{E} \geq 0,$$
onde $e(q) > 0$ é a emissão sem abatimento e $\bar{E}$ é o teto regulatório de emissões.

i) Reescreva o problema como um problema irrestrito usando a restrição de igualdade.
ii) Resolva explicitamente o nível ótimo de abatimento $a^*(\bar{E}, q, k)$.
iii) Determine o sinal de
$$\frac{\partial a^*}{\partial \bar{E}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial a^*}{\partial k}.$$
iv) Interprete economicamente o multiplicador de Lagrange associado à restrição ambiental.
v) Discuta como a solução se altera se o regulador tornar a restrição mais rígida.

j) Considere uma firma que define seu preço nominal p para um período, maximizando lucros esperados sob custos de atenção limitada.

A demanda enfrentada pela firma é
$$y = \exp(a - p),$$
onde a é um estado agregado (demanda) com média $\bar{a}$.

O custo de produção é
$$C(y) = \frac{1}{2}y^2.$$
A firma observa apenas um sinal imperfeito de a,
$$s = a + \varepsilon, \qquad \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$
e escolhe p com base em s.

O custo de atenção é proporcional à variância do erro de previsão:
$$\kappa \,\mathrm{Var}(a \mid s).$$
A firma resolve:

$$\max_{p} \quad \mathbb{E}[\pi \mid s] = \mathbb{E}[py - C(y) \mid s] - \kappa \operatorname{Var}(a \mid s),$$

sujeito à restrição informacional (igualdade bayesiana):

$$\operatorname{Var}(a \mid s) = \left(\frac{1}{\operatorname{Var}(a)^{-1} + \sigma^{-2}} \right).$$

i) Mostre que a escolha ótima de preço depende apenas da expectativa condicional $\mathbb{E}[a \mid s]$.
ii) Derive a condição de primeira ordem que caracteriza $p^*(s)$.
iii) Determine o sinal de
$$\frac{\partial p^*}{\partial \sigma^2}.$$
iv) Analise como um aumento no custo de atenção κ afeta a sensibilidade do preço ao estado agregado.
v) Interprete economicamente os resultados no contexto de rigidez nominal e política monetária.

k) Considere uma firma monopolista que escolhe o nível de qualidade q de seu produto para maximizar lucros.

A demanda é dada por

$$D(p, q) = a + \theta q - p, \qquad a > 0,\ \theta > 0,$$

e o custo de produção é

$$C(q, D) = \frac{c}{2} q^2 + c_0 D, \qquad c > 0,\ c_0 > 0.$$

O regulador impõe uma **restrição de preço de custo médio** (igualdade):

$$p = \frac{C(q, D)}{D}.$$

A firma escolhe q antecipando que o preço será determinado pela restrição regulatória.

i) Use a restrição regulatória para expressar o preço $p(q)$ como função de q.
ii) Reescreva o problema de maximização do lucro como um problema em uma única variável q.
iii) Derive a condição de primeira ordem que caracteriza o nível ótimo de qualidade q^*.
iv) Determine o sinal de
$$\frac{\partial q^*}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial q^*}{\partial c}.$$
v) Interprete economicamente os resultados de estática comparativa, discutindo incentivos à qualidade sob regulação por custo médio.

l) Considere uma economia com um agente representativo que escolhe consumo privado c e provisão de um bem público G.

$$\max_{c, G \in \mathbb{R}_+} \quad U(c, G) = \ln c + \alpha \ln G, \qquad \alpha > 0,$$

sujeito à restrição orçamentária do governo (igualdade):

$$c + (1+\lambda)G = y, \qquad y > 0,\ \lambda \geq 0,$$

onde λ representa o custo marginal dos fundos públicos (distorções associadas à tributação).

i) Construa a função Lagrangiana do problema.

ii) Derive as condições de primeira ordem e resolva explicitamente

$$c^*(y, \alpha, \lambda), \qquad G^*(y, \alpha, \lambda).$$

iii) Determine o sinal de

$$\frac{\partial G^*}{\partial \lambda} \quad \text{e} \quad \frac{\partial G^*}{\partial y}.$$

iv) Mostre que a condição ótima pode ser escrita como uma versão modificada da *regra de Samuelson* (a soma das taxas marginais de todos os consumidores é igual a razão dos preços).

v) Interprete economicamente os resultados de estática comparativa, discutindo o papel das distorções fiscais na provisão de bens públicos.

m) Considere um mercado competitivo com uma firma representativa. A demanda é dada implicitamente por

$$D(p) = Ap^{-\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 1,$$

onde $A > 0$ é um parâmetro de tamanho do mercado.

A firma tem tecnologia com custo marginal crescente:

$$C(q) = \frac{c}{1+\alpha} q^{1+\alpha}, \qquad c > 0,\ \alpha > 0.$$

O governo introduz um imposto específico $t > 0$ por unidade vendida, pago pelo produtor.

i) Caracterize a oferta da firma como função do preço líquido recebido $p - t$.

ii) Determine o equilíbrio competitivo (p^*, q^*) em função de t.

iii) Calcule explicitamente

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{\partial q^*}{\partial t}.$$

iv) Mostre que a incidência do imposto sobre o preço ao consumidor é dada por

$$\frac{\partial p^*}{\partial t} = \frac{\alpha}{\alpha + \varepsilon}.$$

Interprete economicamente o papel de:

- elasticidade da demanda (ε);
- convexidade da tecnologia (α).

v) Discuta os limites:

- $\alpha \to 0$ (custo marginal constante);
- $\alpha \to \infty$ (oferta extremamente inelástica);
- $\varepsilon \to \infty$ (demanda perfeitamente elástica).