Universidade Federal do Paraná **Departamento de Economia**

Economia Matemática **Professor: Victor Oliveira**

Lista de Exercícios IV

1) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = -2y, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

a) Encontre a solução geral e a solução particular.
b) Classifique o ponto crítico na origem.
c) Esboce o retrato de fase.
d) Descreva o comportamento assintótico das soluções.

2) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

a) Determine a solução do sistema.
b) Classifique o ponto de equilíbrio.
c) Faça o retrato de fase.
d) Analise a estabilidade e o comportamento assintótico.

3) Considere o sistema triangular

$$\begin{cases} \dot{x} = -x, \\ \dot{y} = x - y, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (1, 0).$$

a) Resolva o sistema.
b) Classifique o equilíbrio.
c) Desenhe o retrato de fase.
d) Analise o comportamento quando $t \to \infty$.

4) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -4x, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

a) Determine a solução.
b) Classifique a origem.
c) Faça o retrato de fase.

d) Descreva o comportamento assintótico.

5) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x - y, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

a) Encontre a solução geral.
b) Classifique o ponto crítico.
c) Descreva o retrato de fase.
d) Analise o comportamento assintótico.

6) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + y, \\ \dot{y} = -x + y, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (0, 1).$$

a) Resolva o sistema.
b) Classifique a origem.
c) Faça o retrato de fase.
d) Analise a estabilidade e o comportamento assintótico.

7) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y, \\ \dot{y} = -2x - y, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

a) Determine a solução.
b) Classifique o ponto crítico.
c) Esboce o retrato de fase.
d) Descreva o comportamento quando $t \to \infty$.

8) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (1, 1).$$

a) Resolva o sistema.
b) Classifique o equilíbrio.
c) Faça o retrato de fase.
d) Analise o comportamento assintótico.

9) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = -x + 2y, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

a) Encontre a solução usando autovalores e autovetores.
b) Classifique o ponto crítico.

c) Descreva o retrato de fase.

d) Analise o comportamento assintótico.

10) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y, \\ \dot{y} = -2x - y, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (1, 0).$$

a) Resolva o sistema.

b) Classifique a origem.

c) Faça o retrato de fase.

d) Descreva o comportamento assintótico.

11) Considere o sistema com autovalor duplo

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - y, \\ \dot{y} = -y, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

a) Encontre a solução geral.

b) Classifique o ponto crítico.

c) Descreva o retrato de fase.

d) Analise o comportamento assintótico.

12) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y, \\ \dot{y} = x + 4y, \end{cases} \qquad (x(0), y(0)) = (x_0, y_0).$$

a) Resolva o sistema.

b) Classifique o ponto crítico.

c) Faça o retrato de fase.

d) Descreva o comportamento quando $t \to \infty$.

13) Considere o sistema linear

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + y, \\ \dot{y} = -2x - 3y. \end{cases}$$

a) Resolva o sistema pelo método matricial, determinando o espectro e a decomposição associada.

b) Elimine uma das variáveis e reduza o sistema a uma equação diferencial linear de segunda ordem.

c) Mostre que as duas abordagens conduzem à mesma solução geral.

d) Classifique rigorosamente o ponto crítico na origem.

e) Descreva o retrato de fase, destacando direções invariantes.

f) Analise o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

14) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y, \\ \dot{y} = x + 4y. \end{cases}$$

a) Resolva o sistema usando autovalores e autovetores.
b) Reduza o sistema a uma EDO de segunda ordem para $x(t)$.
c) Compare explicitamente as soluções obtidas pelos dois métodos.
d) Classifique o equilíbrio na origem.
e) Descreva o retrato de fase e as direções privilegiadas do fluxo.
f) Analise a estabilidade.

15) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = x - 4y. \end{cases}$$

a) Determine a solução geral via análise espectral da matriz associada.
b) Elimine y e obtenha uma equação diferencial de segunda ordem para $x(t)$.
c) Mostre a equivalência entre as soluções obtidas.
d) Classifique o ponto crítico.
e) Descreva o retrato de fase, identificando separatrizes.
f) Discuta o comportamento assintótico das trajetórias.

16) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y, \\ \dot{y} = -2y. \end{cases}$$

a) Resolva o sistema pelo método matricial, discutindo a estrutura algébrica da matriz.
b) Reduza o sistema a uma EDO de segunda ordem e resolva-a explicitamente.
c) Compare as duas representações da solução geral.
d) Classifique o ponto crítico na origem.
e) Descreva o retrato de fase, destacando trajetórias dominantes.
f) Analise o comportamento das soluções para $t \to \infty$.

17) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = y. \end{cases}$$

a) Determine a solução geral usando a forma normal da matriz associada.
b) Elimine uma variável e obtenha uma EDO de segunda ordem.
c) Mostre que as soluções coincidem.
d) Classifique o equilíbrio.
e) Descreva geometricamente o retrato de fase.

f) Analise o crescimento assintótico das soluções.

18) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 3y, \\ \dot{y} = 3x - x. \end{cases}$$

a) Resolva o sistema via autovalores complexos.

b) Reduza o sistema a uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes.

c) Escreva a solução real em termos de funções trigonométricas.

d) Classifique o ponto crítico.

e) Descreva o retrato de fase, indicando o sentido de rotação.

f) Analise o comportamento assintótico.

19) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 5y, \\ \dot{y} = 5x + 2y. \end{cases}$$

a) Resolva o sistema pelo método matricial.

b) Elimine y e obtenha uma equação de segunda ordem para $x(t)$.

c) Mostre que ambas as soluções coincidem.

d) Classifique a origem.

e) Descreva o retrato de fase e o comportamento das órbitas.

f) Analise a estabilidade do equilíbrio.

20) Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y, \\ \dot{y} = 4x. \end{cases}$$

a) Resolva o sistema via análise espectral da matriz.

b) Reduza o sistema a uma equação diferencial de segunda ordem.

c) Compare as soluções obtidas.

d) Classifique o ponto crítico.

e) Descreva o retrato de fase e a geometria das trajetórias.

f) Analise a estabilidade da origem.

1) Considere o sistema não linear

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1 + x_1^3. \end{aligned}$$

a) Determine todos os pontos de equilíbrio.

b) Calcule a matriz Jacobiana do sistema.
c) Classifique cada ponto crítico por meio da parte linear.
d) Discuta a estabilidade local de cada equilíbrio.
e) Descreva qualitativamente o retrato de fase.

2) Considere o sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_2, \\ x_2' &= x_1 + x_2 - x_1^2. \end{aligned}$$

a) Encontre os pontos singulares do sistema.
b) Obtenha a matriz da linearização em cada ponto crítico.
c) Classifique os equilíbrios segundo os autovalores.
d) Compare o comportamento local com o sistema linear associado.
e) Analise a estabilidade da origem.

3) Considere o sistema não linear

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \\ x_2' &= x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \end{aligned}$$

a) Mostre que a origem é um ponto de equilíbrio.
b) Calcule a matriz Jacobiana na origem.
c) Classifique o ponto crítico via linearização.
d) Compare o resultado com o comportamento não linear do sistema.
e) Descreva a geometria das trajetórias próximas da origem.

4) Considere o sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -2x_1 - x_2 + x_1^2. \end{aligned}$$

a) Determine os pontos de equilíbrio.
b) Linearize o sistema em torno de cada ponto crítico.
c) Classifique os equilíbrios obtidos.
d) Analise a estabilidade local.
e) Interprete o efeito do termo não linear nas trajetórias.

5) Considere o sistema não linear

$$\begin{aligned} x_1' &= x_1(1 - x_2), \\ x_2' &= x_2(x_1 - 1). \end{aligned}$$

a) Determine todos os pontos singulares.
b) Calcule a matriz Jacobiana em cada ponto de equilíbrio.
c) Classifique os pontos críticos usando a linearização.
d) Discuta a estabilidade local.
e) Descreva qualitativamente o retrato de fase.