Universidade Federal do Paraná **Departamento de Economia**

Economia Matemática **Professor: Victor Oliveira**

Lista de Exercícios I – A

1) Sejam as seguintes matrizes de transição

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{2}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}, \quad M_6 = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad M_7 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \quad M_8 = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{7}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

$$M_9 = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}, \quad M_{10} = \begin{pmatrix} \frac{11}{20} & \frac{1}{4} \\ \frac{9}{20} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad M_{11} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\ \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} \frac{13}{20} & \frac{3}{20} \\ \frac{7}{20} & \frac{17}{20} \end{pmatrix},$$

$$M_{13} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{3}{5} & \frac{9}{10} \end{pmatrix}, \quad M_{14} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{7}{20} \\ \frac{3}{4} & \frac{13}{20} \end{pmatrix}, \quad M_{15} = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad M_{16} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix},$$

$$M_{17} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad M_{18} = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/2 & 2/5 \\ 2/3 & 1/4 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Pede-se:

- Calcule o determinante.
- Calcule a inversa.
- Calcule o polinômio característico.
- Calcule os autovalores.
- Calcule os autovetores.
- Represente graficamente a cadeia de Markov.
- Diagonalize a matriz.
- Realize a potenciação da matriz, isto é, $M^t = PD^tP^{-1}$.
- Calcule o estado estacionário supondo que a taxa de desemprego é de 5%.
- Calcule o tempo necessário para se aproximar do vetor estacionário.

2) Sejam os seguintes sistemas de equações com três variáveis e três incógnitas. Por Regra de Cramer estabeleça se o sistema é SPD, SPI e SI e encontre as soluções. Represente graficamente.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - y = 9 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = -6 \end{cases} \quad \begin{cases} 7x + 3y = 1 \\ 2x + 5y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ x + 3y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 9y = 12 \\ -x - 3y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 4x + y = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 9y = 15 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} -6x - y = 10 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \cdot x + y = 2 \\ x + 0 \cdot y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ 0 \cdot x + 2y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} -x - y = 2 \\ 3 \cdot x + 0 \cdot y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ y + 4y = 8 \end{cases}$$

3) Sejam os seguintes sistemas de equações com três variáveis e três incógnitas. Por Regra de Cramer estabeleça se o sistema é SDP, SDI e SI e encontre as soluções.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x + y - z = 2 \\ 3x + 4y - z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2y + z = 3 \\ 3z = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 4 \\ y + z = 3 \\ 2x + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ y + 4z = 9 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 0y + 2z = 7 \\ y + z = 5 \\ x + 2y + 3z = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y + z = 6 \\ x + 3y + 2z = 13 \\ y + z = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x + 4y + 6z = 12 \\ 3x + 6y + 9z = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ y + z = 3 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - 2y + 4z = 6 \\ 4x - 4y + 6z = 12 \\ x - 2y - z = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 2y - z = 6 \\ 2x - 2y + 2z = 6 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ y + z = 3 \\ x + 2y + z = 6 \end{cases}$$

4) Sejam os seguintes sistemas de equações. Encontre as soluções. Represente graficamente.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x + y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 15 \\ x - y = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 49 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 - 1 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} (x + y)^2 = 49 \\ xy = 10 \end{cases}$$

5) Para a função de demanda linear $x = a - bp$, calcule a perda de peso morto da introdução de um imposto t sobre mercadorias quando o custo marginal de produção for $CMg = 2x$. Como a perda de peso morto é afetada pelas alterações em a e em b? Como uma mudança em b afeta a elasticidade da demanda no equilíbrio sem tributação? Qual a carga tributária paga por consumidores e produtores?

6) Um bem é negociado em um mercado competitivo. A função de demanda é dada por $X = 75 - 5P$ e a oferta é perfeitamente elástica ao preço $P = 10$.

   a) Um imposto específico de valor $t = 2$ é introduzido. Determine a incidência tributária.
   b) É introduzido um imposto ad valorem a uma taxa de $t = 0,2$. Determine a incidência tributária.
   c) Como a incidência do imposto específico e do imposto *ad valorem* diferem se a oferta é dada por $Y = 2,5P$?

7) Suponha que a função de demanda seja dada por $x = p^{-\varepsilon_d}$ e a função de oferta por $y = p^{\varepsilon_s}$. Encontre o preço de equilíbrio. Qual é o efeito no preço de equilíbrio da introdução de um imposto de $t = \frac{1}{10}$ se $\varepsilon_d = \varepsilon_s = \frac{1}{2}$? Descreva como a incidência do imposto é dividida entre consumidores e produtores.

8) Encontre a incidência tributária de um imposto de R$ 4 por unidade em um mercado perfeitamente competitivo no qual a curva de demanda é $Q^d = 56 - 3p^d$ e a curva de oferta é $Q^s = p^s - 8$ por meio da compensação de mercado. Verifique que a resposta é a mesma usando as elasticidades preço da demanda e preço da oferta.

9) Como o ônus de um imposto de 100% (expresso como uma fração do preço "antes do imposto") seria dividido entre compradores e vendedores em um mercado perfeitamente competitivo no qual a quantidade demandada é $Q_d = 75 - 2(p_d)^2$ e a oferta é $Q_s = (p_s)^2$? Prove seu resultado de duas formas distintas.

10) Qual seria a incidência aproximada de um imposto unitário de R$ 2 cobrado dos vendedores em um mercado perfeitamente competitivo, no qual a quantidade do bem demandado pelos compradores é $Q_d = 60 - 2(p_d)^2$ e a oferta é $Q_s = 10p_s - 36$? Prove seu resultado de duas formas distintas.

11) Qual é a incidência de um imposto de 100% (calculado como uma porcentagem do preço líquido [antes do imposto]) nos cortes de cabelo, se o mercado de cortes de cabelo for perfeitamente competitivo, se a curva de oferta no mercado tiver a equação

$$Q_s = \sqrt{\frac{p_s}{2}}$$

e a curva de demanda tiver a equação

$$Q_d = \frac{16}{p_d}$$

12) A curva de demanda do mercado para o bem tem a equação $Q^d = 15 - p^d$, em que p^d é o preço pago pelos compradores e Q^d é a quantidade demandada. Existe uma única firma que pode produzir tanto ou tão pouco quanto quer, a um custo constante de R$ 5 por unidade. Existem muitas outras empresas. Mas cada outra empresa só pode produzir o bem a um custo de R$ 8 por unidade. [Essas outras empresas também produzem sob retornos constantes de escala] A única empresa de baixo custo define seu preço para maximizar seu lucro, sabendo que não venderá nada do bem se cobrar um preço mais alto do que as outras empresas. [Você pode assumir que todos os clientes compram da empresa de baixo custo se a empresa de baixo custo cobrar exatamente o mesmo preço que as empresas de alto custo.] Qual seria a incidência de um imposto unitário de R$ 6 nesse mercado?

13) Qual é a incidência de um imposto de 100% (calculado como uma porcentagem do preço líquido [antes do imposto]) nos cortes de cabelo, se o mercado de cortes de cabelo for perfeitamente competitivo, se a curva de oferta no mercado tiver a equação $Q_s = (p_s)^3$ e a curva de demanda for $Q_d = \dfrac{1}{(p_d)^2}$? Utilize a aproximação da incidência tributária por meio das elasticidades. Quão boa é essa aproximação?

14) Qual a carga tributária paga pelos consumidores e ofertantes no caso de um imposto de R$ 6 por unidade vendida se a curva de oferta for $Q_s = 2p_s$ e a curva de demanda for $Q_d = \dfrac{288}{p_d}$?

15) Suponha um imposto sobre roupas no valor de R$ 1. O preço original das roupas era de R$ 1 e o da comida era de R$ 1. A renda do consumidor era de R$ 1000. As preferências do consumidor pode ser representadas pela função de utilidade $U = F + 40\sqrt{C}$, em que C é a quantidade consumida de roupas e F a quantidade consumida de alimentos. Sendo p_C o preço das roupas incluindo os impostos, quanto o governo teria que compensar o consumidor pelos danos causados pelo imposto?

16) Para o modelo de Leontief sejam as seguintes matrizes de insumo-produto no caso aberto. Resolva.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.10 & 0.40 & 0.20 \\ 0.25 & 0.20 & 0.20 & 0.25 \\ 0.15 & 0.30 & 0.20 & 0.30 \\ 0.10 & 0.10 & 0.10 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad D_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.12 & 0.25 & 0.18 \\ 0.20 & 0.30 & 0.25 & 0.30 \\ 0.15 & 0.25 & 0.30 & 0.30 \\ 0.05 & 0.10 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad D_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.20 & 0.30 & 0.25 \\ 0.20 & 0.25 & 0.25 & 0.30 \\ 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.25 \\ 0.05 & 0.10 & 0.10 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad D_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0.40 & 0.15 & 0.20 & 0.22 \\ 0.18 & 0.30 & 0.25 & 0.28 \\ 0.15 & 0.25 & 0.30 & 0.28 \\ 0.03 & 0.10 & 0.05 & 0.02 \end{pmatrix}, \quad D_4 = \begin{pmatrix} 14 \\ 11 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0.28 & 0.18 & 0.22 & 0.20 \\ 0.22 & 0.24 & 0.26 & 0.25 \\ 0.20 & 0.20 & 0.20 & 0.25 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad D_5 = \begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0.32 & 0.12 & 0.30 & 0.15 \\ 0.20 & 0.25 & 0.25 & 0.30 \\ 0.18 & 0.30 & 0.25 & 0.40 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad D_6 = \begin{pmatrix} 11 \\ 8 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 0.22 & 0.20 & 0.18 & 0.28 \\ 0.28 & 0.25 & 0.30 & 0.30 \\ 0.18 & 0.20 & 0.22 & 0.25 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.02 \end{pmatrix}, \quad D_7 = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$A_8 = \begin{pmatrix} 0.30 & 0.18 & 0.28 & 0.20 \\ 0.22 & 0.28 & 0.25 & 0.30 \\ 0.18 & 0.24 & 0.20 & 0.25 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad D_8 = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$A_9 = \begin{pmatrix} 0.26 & 0.14 & 0.30 & 0.20 \\ 0.24 & 0.26 & 0.28 & 0.30 \\ 0.20 & 0.30 & 0.20 & 0.25 \\ 0.05 & 0.05 & 0.02 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad D_9 = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$A_{10} = \begin{pmatrix} 0.34 & 0.16 & 0.22 & 0.18 \\ 0.18 & 0.30 & 0.28 & 0.30 \\ 0.18 & 0.28 & 0.28 & 0.25 \\ 0.05 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix}, \quad D_{10} = \begin{pmatrix} 13 \\ 10 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

17) Dois países, Alfa e Beta, produzem apenas trigo e tecido. A tabela abaixo mostra a quantidade que cada país produz com 1 unidade de trabalho:

País	Trigo	Tecido
Alfa	10	5
Beta	6	3

a) Calcule o custo de oportunidade do trigo e do tecido em cada país.

b) Identifique quem tem vantagem comparativa em cada bem.

18) Os países Delta e Sigma podem produzir os bens X e Y. A cada hora de trabalho:

País	X	Y
Delta	4	1
Sigma	2	2

a) Determine o custo de oportunidade de X e Y para cada país.

b) Indique quem deve se especializar em qual bem.

c) Calcule os ganhos potenciais do comércio se cada país dedicar 10 horas ao bem em que tem vantagem comparativa.

19) Seja

País	Peixe	Coco
A	12	4
B	20	10

a) Calcule o custo de oportunidade.

b) Determine se existe vantagem absoluta, vantagem comparativa ou ambas.

c) Explique se o comércio traz ganhos para ambos.

20) O país Z produz 3 computadores ou 6 bicicletas por trabalhador. O país W produz 1 computador ou 2 bicicletas.

a) Identifique quem tem vantagem comparativa em cada bem.

b) Proponha uma taxa aceitável de troca (termos de troca).

c) Mostre um exemplo numérico de como ambos ganham com o comércio.

21) Dois países têm as seguintes funções de produção por hora de trabalho:

$$\text{País A: } Q_x = 8L, \quad Q_y = 4L$$
$$\text{País B: } Q_x = 10L, \quad Q_y = 5L$$

a) Calcule o custo de oportunidade de X em termos de Y em cada país.

b) Determine quem deve se especializar em quê.

c) Mostre matematicamente por que a vantagem comparativa não depende da vantagem absoluta.

22) O país H produz A, B e C. Por hora:

Bem	Quantidade
A	12
B	6
C	4

O país K produz:

Bem	Quantidade
A	10
B	10
C	2

a) Calcule o custo de oportunidade de cada bem em termos dos outros dois para cada país.
b) Determine em qual bem cada país tem vantagem comparativa.
c) Discuta se há especialização completa.

23) A produtividade é:

País	Automóveis	Sapatos
Norte	5	10
Sul	3	6

O Norte tem 100 trabalhadores e o Sul tem 40.

a) Calcule a fronteira de produção de cada país.
b) Determine a vantagem comparativa sem considerar dotação.
c) Mostre como o tamanho da economia altera a quantidade produzida após a especialização.

24) Um país tem a seguinte FPP: se dedicar t horas à produção de X,

$$X = 10t - t^2$$

e o restante das $10 - t$ horas vão para Y:

$$Y = 8(10 - t).$$

a) Calcule os custos de oportunidade marginais para X e Y.
b) Avalie se há vantagem comparativa bem definida.
c) Interprete a presença de retornos marginais decrescentes.

25) O país A produz 1 unidade de alimento ou 2 de roupa por hora. O país B produz 3 unidades de alimento ou 3 de roupa por hora.

a) Determine a vantagem comparativa.

b) Suponha que o salário em A é 1 e em B é 2. Calcule quem tem vantagem competitiva (custo unitário).

c) Explique por que vantagem comparativa e vantagem competitiva podem diferir.

26) Inicialmente, o país M produz:

Bem	Produtividade
Eletrônicos	3
Têxteis	6

O país N produz:

Bem	Produtividade
Eletrônicos	2
Têxteis	4

Após 10 anos, M melhora 50% em eletrônicos e mantém têxteis constantes.

a) Calcule a vantagem comparativa antes e depois.

b) Mostre como mudanças tecnológicas alteram padrões de comércio.

c) Explique o conceito de *vantagem comparativa dinâmica*.