Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Sociais Aplicadas
Departamento de Economia
SE620 – Economia do Setor Público

Prof. Dr. Victor Oliveira

EXERCÍCIOS

1) Considere um país em que as preferências dos consumidores são dadas por

$$u(x, h) = x - \frac{1}{2}h^2$$

em que x é a quantia em reais da despesa semanal de consumo da pessoa e h é o número de horas que ela trabalha por semana. As pessoas diferem apenas no salário ω, que podem ganhar (antes da dedução de impostos) por hora. As pessoas podem escolher quantas horas h trabalham e fazer essa escolha para maximizar sua utilidade, uma vez que o valor x de seu consumo depende de quanto eles trabalham. O valor x de seu consumo é igual a sua renda salarial, líquido de quaisquer impostos, mais o dinheiro que eles recebem do governo e que vamos chamar de T. Denote a taxa de impostos por τ.

   a) Desenhe o mapa de indiferença [Dica: isole x em função de h e escolha valores arbitrários para u].

   b) Qual o número ótimo de horas de trabalho a serem ofertadas?

   Solução

   $h = (1 - \tau)\omega$

   c) Qual a sua renda bruta (denote por y)?

   Solução

   A renda bruta é $y = \omega h = \omega^2(1 - \tau)$.

   d) Qual a receita total do governo ($R(\omega) = \tau y - T$)?

   Solução

   A receita total é $R = \tau(1 - \tau)\omega^2 - T$

   e) Sendo a receita total não-negativa, qual o valor de τ gera a arrecadação máxima?

   Solução

   $\tau = \dfrac{1}{2}$

2) Uma economia consiste em 3 milhões de pessoas. Cada pessoa tem as mesmas preferências sobre seu consumo C e o número de horas em que trabalha por semana H, representado pela função de utilidade

$$U(C,H) = C - H^2$$

O salário de cada pessoa depende de sua produtividade (que é exógena e não é afetada pela política do governo). Um milhão de pessoas ganha um salário (antes de deduções fiscais) de R$ 10 por hora; um milhão de pessoas ganha um salário de R$ 20 por hora; o restante de um milhão de pessoas ganha um salário de R$ 50 por hora. Cada pessoa escolhe quantas horas deseja trabalhar. Sua renda salarial líquida é gasta no consumo de C.

a) Desenhe o mapa de indiferença.
b) Escreva restrição do problema.
Solução
$C = \omega(1-\tau)H$
c) Calcule o número ótimo de horas.
Solução
$H = \dfrac{\omega(1-\tau)}{2}$
d) Qual a renda total do consumidor?
Solução
A renda bruta do indivíduo pode ser escrita como $y = (1-\tau)\dfrac{\omega^2}{2}$
e) Qual o total de impostos arrecadados pelo governo?
Solução
$R = \tau(1-\tau)\dfrac{\omega^2}{2}$
f) Se o governo tributar toda a renda do trabalho a uma taxa τ, como a receita tributária do governo por pessoa varia com a taxa τ?
Solução
A receita por pessoa será $RTPc = 500\tau(1-\tau)$
g) Qual a taxa τ gera a receita tributária máxima para o governo?
Solução
$\tau^* = \dfrac{1}{2}$
h) Qual o imposto ótimo?
Solução
$\tau^* = \dfrac{500 - \frac{1}{2}\omega^2}{1000 - \frac{1}{2}\omega^2}$

3) Suponha que as preferências de uma pessoa são dadas por

$$U(X, H) = X - aH^2$$

em que X é seu consumo (em reais por semana), H é o número de horas por semana em que ele trabalhava e a é uma constante positiva. As pessoas são livres para escolher suas horas de trabalho, a fim de maximizar sua utilidade, sujeitas à restrição de que seu consumo semanal seja igual à sua renda semanal líquida de impostos. Qual seria a renda semanal de uma pessoa, se ela recebesse um salário por hora de ω e estivesse sujeita a um imposto de renda com uma taxa marginal de τ, e se E reais de sua renda semanal fossem isentos do imposto? Se o salário varia para as diferentes pessoas que compõem essa sociedade, qual a taxa marginal de imposto τ^* que maximizaria a receita tributária para um dado valor de E?

Solução

O salário líquido seria $(1-\tau)[\omega H - E] = (1-\tau)\left[\dfrac{(1-\tau)\omega^2}{2a} - E\right]$ e $\tau^* = \dfrac{1}{2} - \dfrac{a}{\omega^2}E$

4) Seja um indivíduo com a seguinte função de utilidade

$$U(c, \ell) = c - \frac{1}{1+\mu}\ell^{1+\mu}$$

em que $\mu > 0$, c indica o consumo e ℓ é o tempo de trabalho. O salário por hora é $\omega = 1$, de modo que a restrição orçamentária é simplesmente:

$$c \leq \ell(1-t)$$

em que t é a taxa de imposto cobrado pelo governo.

a) Desenhe o mapa de indiferença.
b) Determine ℓ^*, a oferta de trabalho ótimo do indivíduo dada a taxa de imposto t.

Solução

$\ell^* = (1-t)^{1/\mu}$

c) Determine ε, a elasticidade da oferta de mão-de-obra do indivíduo em relação ao salário líquido.

Solução

$\frac{1}{\mu}$

d) A receita do governo de tributar o indivíduo é de $R = \ell^* t$. Vamos supor que a função de bem-estar social considerada pelo governo seja $W = \alpha R + U(\ell^*)$. Interprete α.

Solução

α é o benefício marginal para o governo aumentar mais impostos desse indivíduo. Continue!

e) Considerando a função de bem-estar acima, encontre t^*.

Solução

$t^* = \frac{(\alpha - 1)\mu}{(\alpha - 1)(1 + \mu) + 1}$

f) Como t^* varia com μ?

Solução

$\frac{\partial t^*}{\partial \mu} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{[(\alpha - 1)(1 + \mu) +^2]}$

g) Como t^* varia com α?

Solução

$\frac{\partial t^*}{\partial \alpha} = \frac{\mu}{[(\alpha - 1)(1 + \mu) +^2]}$

5) Consideramos uma economia povoada por dois indivíduos – indexados por $i = 1, 2$ – que têm preferências diferentes. Especificamente, as preferências do indivíduo i sobre o consumo c e trabalho ℓ são dadas por:

$$u_i(c, \ell) = c - \frac{\ell^{1+\mu_i}}{1 + \mu_i}$$

em que $\mu_i > 0$. Um indivíduo com salário por hora fornecendo mão de obra ℓ, ganha $z = \omega \ell$ (ganhos antes dos impostos) e consome $c = z(1 - \tau)$, em que τ é a taxa de imposto sobre a renda do trabalho.

a) Mostre que a oferta de trabalho ótima do indivíduo i é $\ell_i^* = [\omega(1 - \tau)]^{1/\mu_i}$.

Solução

Monte o problema de otimização e depois a condição de primeira ordem.

b) Determine τ_1 e τ_2 que permitem o governo maximizar sua receita total $R = \omega \ell_1^* \tau_1 + \omega \ell_2^* \tau_2$.

Solução

$\tau_1 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu_1}}, \tau_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu_2}}$

c) Por razões técnicas, o governo não pode definir taxas de imposto diferentes para cada indivíduo i. Consequentemente, o governo decide estabelecer uma taxa de imposto comum $\overline{\tau}$ como $\overline{\tau} = \dfrac{1}{1+\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{\mu}\right)}$.
Comente acerca desta solução, em que $\mathbb{E}$ é o operador esperança.

Solução

Essa solução reflete um problema de informação: o governo não é capaz de observar a elasticidade de cada oferta de trabalho individual. Continue!

6) O presidente solicitou que você reavaliasse os custos e benefícios de várias propostas de imposto de renda e de consumo que seu painel tributário fez. Para isso, considere um modelo de 2 períodos em que os indivíduos obtêm renda Y por trabalhar no período 1 e não trabalham no período 2 (aposentadoria). Os indivíduos escolhem quanto consumir em cada período. A economia no período 1 gera uma taxa de juros $r > 0$. Seja C_1 o consumo no período 1 e C_2 o consumo no período 2.

a) Escreva a restrição orçamentária do indivíduo em uma economia sem impostos.

Solução

$Y = C_1 + \dfrac{C_2}{1+r}$

b) Escreva a restrição orçamentária em que mão de obra e renda são tributadas à taxa t, mas suponha que não haja contas de poupança isentas de impostos.

Solução

Solução

$(1-t)Y = C_1 + \dfrac{C_2}{[1+r(1-t)]}$

c) Escreva a restrição orçamentária com uma taxa de imposto sobre consumo τ e nenhum imposto sobre o rendimento.

Solução

$Y = (1+\tau)\left[C_1 \dfrac{C_2}{1+r}\right]$

d) O painel tributário alega que isentar a receita de capital do imposto de renda e reter o imposto de renda sobre a renda do trabalho é equivalente a mudar para um sistema de imposto de consumo. Prove isso algebricamente usando as restrições orçamentárias nas partes (a) e (b).

Solução

Use as restrições anteriores.

e) Suponha que os indivíduos tenham uma função de utilidade $U = (C_1)^{0,5} + \left(\frac{C_2}{1+r}\right)^{0,5}$. Mostre que uma taxa de imposto sobre o consumo (τ) não distorce as opções de consumo. [Dica: mostre que os indivíduos escolherão uma proporção de consumo C_2/C_1 igual à mesma expressão com o imposto sobre o consumo ou sem impostos.]

Solução

Calcule as soluções ótimas antes e depois do imposto. Escreva as restrições corretamente. Use ao final a dica do exercício.

7) Suponha que os indivíduos tenham a mesma função de utilidade sobre o consumo e o trabalho dada por:

$$U(c, \ell) = (1-\theta)\ln(c) + \theta \ln(50-\ell)$$

em que c representa consumo e ℓ representa horas de trabalho e θ é um dado parâmetro, restrito a estar entre 0 e 1. Aqui, $\ln(x)$ denota o logaritmo natural de x. Suponha também que a única renda que os indivíduos têm é a renda do trabalho e que a taxa de salário por hora é dada por ω.

a) Escreva a restrição orçamentária do indivíduo.

Solução

$c = \omega\ell$

b) Escreva o problema de maximização desse indivíduo e encontre as melhores opções de trabalho e consumo.

Solução

O problema de otimização é $\max_\ell (1-\theta)\ln(\omega\ell) + \theta\ln(50-\ell)$, o que implica que $\ell = 50(1-\theta)$.

c) Agora, suponha que exista um imposto de $\tau = 0,2$ sobre a renda do trabalho. Resolva a nova escolha ideal de mão de obra e consumo.

Solução

Os novos ótimos são $\ell = 50(1-\theta)$ e $c = 50\omega(1-\tau)(1-\theta)$.

8) Suponha que todos os indivíduos tenham a mesma função de utilidade sobre o consumo e o trabalho, dados por:

$$U(c, \ell) = c - \frac{\ell^2}{2}$$

em que c representa o consumo e ℓ representa as horas de trabalho. Suponha que a única renda que os indivíduos tenham é da renda do trabalho e que trabalhem com um salário por hora ω tributado à taxa τ.

a) Escreva a restrição orçamentária do indivíduo.

Solução

$c = (1-\tau)\omega\ell$

b) Encontre a oferta de trabalho ótima como uma função do salário ω e da renda τ.

Solução

$\ell^* = (1-\tau)\omega$

c) Mostre que a taxa de imposto ótimo que maximiza a receita é $\tau^* = 0,5$.

Solução

Escreva a expressão da receita total e otimize em relação a τ. Resolva o problema e encontrará o valor do enunciado.

d) Suponha que o governo use toda a receita arrecadada para fornecer às pessoas uma renda básica universal (ou seja, uma transferência de montante fixo (*lump-sum*) $T > 0$ por pessoa). Como a oferta de trabalho ideal do indivíduo é afetada? Discuta os efeitos renda e substituição e desenhe sua nova restrição orçamentária.

Solução

Uma transferência de montante fixo não afeta os salários; o efeito de substituição é zero. Continue!

e) Agora imagine que existem dois indivíduos na economia: um ganha um salário de \$ 20/hora e um ganha um salário de \$ 100/hora. Resolva a oferta de mão-de-obra maximizadora de utilidade de cada indivíduo sob o imposto de maximização de receita à taxa $\tau = 0,5$ e calcule a receita gerada para o governo.

Solução

A oferta de trabalho do agente 1 é 10. A oferta de trabalho do agente 2 é 50. A receita do governo é $R = 2600$.

f) Agora imagine que existem dois indivíduos na economia: um ganha um salário de \$ 20/hora e um ganha um salário de \$ 100/hora. Suponha que haja uma eleição, e a nova administração do governo abandone a renda básica universal e mude o cronograma de impostos para que:

- Haja um subsídio de 100% sobre os primeiros R\$ 1000 em renda do trabalho (isso significa que, se você ganhar até R\$ 1000, o governo fornecerá uma transferência igual aos seus ganhos).
- Toda renda do trabalho acima de R\$ 1000 é então tributada à alíquota de 50%.

Encontre a nova oferta de mão-de-obra de cada indivíduo e seu consumo após os impostos.

Solução

O indivíduo 1 escolheria trabalhar 40 horas e o indivíduo 2 trabalharia 50 horas. O consumo será, respectivamente de 1600 e 4000.

9) Considere um modelo de 2 períodos em que os indivíduos obtêm renda do trabalho de $Y = 200$ por trabalhar no período 1 e não trabalham no período 2 (aposentadoria). Os indivíduos escolhem quanto consumir em cada período. A poupança no período 1 é remunerada no período 2 a uma taxa de juros $r = 25\%$. Seja C_1 o consumo no período 1 e C_2 o consumo no período 2. Suponha que os indivíduos tenham uma função de utilidade $U = \ln C_1 + \ln C_2$.

a) Escreva o problema de maximização da utilidade do indivíduo e encontre C_1, C_2 e S ideais em uma economia sem impostos.

Solução

$\max_{C_1} \ln C_1 + \ln((200 - C_1)(1 + 0.25))$

Temos que $C_1 = 100$, $C_2 = 125$ e $S = 100$.

b) Agora suponha que um imposto de renda de $\tau = 20\%$ seja imposto sobre a renda do trabalho e da poupança. Encontre C_1, C_2 e S ideais com essa alíquota de impostos.

Solução

Temos que $C_1 = 80$, $C_2 = 96$ e $S = 80$.

c) Compare a relação de consumo C_2/C_1 em (a) e (b). O imposto de renda distorce as opções de consumo?

Solução

Calcule a razão entre o consumo nos dois períodos e veja que difere. Use isso como base da resposta.

d) Quanta receita o governo cobra de cada indivíduo sob o sistema de imposto de renda acima? Considere $\tau = 20\%$.

Solução

$R = 44$

e) Suponha agora que o governo esteja pensando em mudar para um sistema em que apenas a renda do trabalho seja tributada. Encontre o imposto de renda do trabalho τ_L que permitiria ao governo obter a mesma receita que no sistema de tributação.

Solução

$\tau_= 0,22$

f) Encontre C_1, C_2 e S ideais com a alíquota de impostos τ_L que você encontrou anteriormente.

Solução

Temos que $C_1 = 78$, $C_2 = 97,50$ e $S = 78$.

g) Compare a relação de consumo C_2/C_1 em (a) e (f). O imposto de renda sobre o trabalho distorce as opções de consumo?

10) Considere uma economia com um continuum de agentes i em $[0, 1]$. Existem dois bens: um bem não energético e um bem energético. Cada agente tem a mesma função de utilidade:

$$U_i(c_i, e_i, E) = (1 - \alpha)\log(c_i) + \alpha \log(e_i) - \lambda \log(E)$$

em que c_i é o consumo individual do bem não-energético, e_i é o consumo individual do bem energético e E é o nível agregado do bem energético. Além disso, supomos que $0 < \alpha < 1$ e $0 < \lambda < 1$.

a) Explique porque E entra negativamente na função de utilidade.

Solução

Pense que E é uma externalidade.

b) Em uma economia de livre mercado, cada agente i escolhe seu nível de consumo do bem não-energético c_i e do bem energético e_i para maximizar sua utilidade sob a restrição orçamentária $y_i = c_i + e_i$. Calcule os níveis ideais de c_i e de e_i.

Solução

$c_i^* = (1 - \alpha)y_i$ e $e_i^* = \alpha y_i$.

c) Em uma economia planejada, um planejador benevolente escolhe o nível agregado de consumo do bem não-energético C e do bem energético E para maximizar o bem-estar social $U = U(C, E)$ sob a restrição orçamentária agregada $Y = C + E$. Calcule os valores socialmente ótimos de C e de E.

Solução

$C^* = \dfrac{1-\alpha}{1-\lambda}Y$ e $E^* = \dfrac{\alpha - \lambda}{1-\lambda}Y$.

d) Mostre e explique brevemente por que o consumo de energia é menor na economia planejada do que na economia de livre mercado.

Solução

Use a explicação de externalidades como argumento para sua resposta.

e) Agora, introduzimos um imposto corretivo t sobre o consumo de energia. A restrição de orçamento do agente i se torna $c_i + (1+t)e_i = y_i$. Calcule os níveis ideais de c_i e de e_i.

Solução

$c_i^* = (1 - \alpha)y_i$ e $e_i^* = \dfrac{\alpha y_i}{1+t}$

f) Calcule a taxa de imposto t^* que permite obter o valor socialmente ideal de consumo do bem energético. [Dica: t^* é tal que $E^* = \int_0^1 e_i^* di$]

Solução

$t^* = \dfrac{\lambda(1-\alpha)}{\alpha - \lambda}$

g) Mostre que t^* é uma função crescente de λ e explique brevemente o que isso significa.

Solução

Calcule $\dfrac{dt^*}{d\lambda}$.

11) Suponha que o governo cobrasse um imposto de renda proporcional à alíquota τ. Suponha ainda que o nível médio de renda (em milhares de reais) no país seja $30(1-3\tau^2)$. Qual taxa de imposto τ maximizaria a receita do governo? Se uma parcela E da renda nacional foi isenta, qual seria o valor ótimo de τ?

Solução

$\tau = 0,33$ ou 33%.

Com a isenção, $\tau^* = \left(\dfrac{30-E}{270}\right)^{0.5}$.

12) Suponha que o governo cobrasse um imposto de renda proporcional à alíquota τ. Suponha ainda que o nível médio de renda (em milhares de reais) no país seja $40(1-\tau)$. Qual taxa de imposto τ maximizaria a receita do governo?

Solução

$\tau = 0,50$ ou 50%.

13) Suponha que um governo se preocupe apenas com a renda após impostos das pessoas mais pobres do país. Suponha que ele esteja tentando redistribuir a renda cobrando um imposto de renda com uma alíquota marginal constante τ, dividindo os rendimentos igualmente entre todas as pessoas, de modo que a renda líquida de uma pessoa seja $(1-t)y+R$ se sua renda tributável for y, e se a receita per capita do imposto for R. Suponha também que a renda tributável de uma pessoa seja definida por $z(1-3\tau^2)$. Existem muitas pessoas diferentes, variando em sua renda original z. Em particular, há algumas pessoas que têm uma renda z igual a zero, embora a renda original média no país seja cerca de $\bar{z} > 0$. Qual taxa de imposto marginal τ o governo deveria cobrar?

Solução

$\tau = \dfrac{1}{3}$.