Universidade Federal do Paraná
Setor de Ciências Sociais Aplicadas
Departamento de Economia
SE620 – Economia do Setor Público

Prof. Dr. Victor Oliveira

1) Suponha que haja n consumidores idênticos indexados por $i = 1, \ldots, N$. Todos os consumidores têm a mesma função de utilidade:

$$U_i = \log(x_i) + \log(G)$$

em que x_i é o consumo de um bem privado pelo indivíduo i e G é um bem público puro. Cada consumidor possui renda igual a 1. Seja 1 o preço unitário do bem privado, de modo que a restrição orçamentária de cada consumidor possa ser escrita como:

$$x_i + g_i \leq 1$$

em que g_i é a contribuição individual para o bem público. A quantidade total disponível do bem público é a soma das contribuições individuais, ou seja:

$$G = \sum_{i=1}^{N} g_i$$

a) Calcule G^d, a provisão de equilíbrio do bem público quando os indivíduos tomam decisões descentralizadas.

Solução

O Lagrangeano associado ao problema de otimização segue abaixo:

$$L = \log(1 - g_i) + \log\left(g_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} g_j\right)$$

A condição de primeira ordem pode ser escrita como segue:

$$\frac{\partial L}{\partial g_i} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{1 - g_i} + \frac{1}{g_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} g_j} = 0$$

Como os indivíduos são idênticos $\forall i, g_i = g$. Logo,

$$\frac{1}{Ng} = \frac{1}{1-g} \quad \Longleftrightarrow \quad g = \frac{1}{N+1}$$

A provisão total é

$$G^d = Ng = \frac{N}{N+1}$$

b) Calcule G^o, a provisão ótima de bem público quando um planejador social escolhe o nível de bem público.

Solução

O planejador social maximiza o bem-estar utilitarista (soma das utilidades). Logo, o Lagrangeano associado ao problema é

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^{N} \left[\log\left(1 - \frac{G}{N}\right) + \log(G) \right] \\ &= N \left(\log\left[1 - \frac{G}{N}\right] + \log(G) \right) \end{aligned}$$

A condição de primeira ordem pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial G} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad N \left[-\frac{1}{1 - \frac{G}{N}} \frac{1}{N} + \frac{1}{G} \right] = 0 \\ &\Longrightarrow \quad G^o = \frac{N}{2} \end{aligned}$$

c) Qual o efeito de N sobre G^d e G^o?

Solução

À medida que N aumenta, a diferença entre G^o e G^d aumenta. Esse efeito decorre do fato de que, à medida que cada contribuição individual ganha valor social, ela se beneficia cada vez mais com o aumento da população.

d) Um governo aparece repentinamente nesta economia. É dotado da capacidade de aumentar um imposto fixo t para cada indivíduo e usa a receita total dos impostos $T = Nt$ para produzir algum bem público na quantidade $\overline{G}$ usando a seguinte tecnologia:

$$\overline{G} = \alpha \sum_{i=1}^{N} t = \alpha T$$

com $\alpha > 0$. Consequentemente, a restrição orçamentária de cada indivíduo agora é $x_i + g_i \leq 1 - t$. A quantidade total disponível do bem público é agora a soma das contribuições individuais e a quantidade fornecida publicamente, ou seja:

$$G = \sum_{i=1}^{N} g_i + \overline{G}$$

Calcule $G^{d'}$, a provisão de bem público de equilíbrio apenas por indivíduos privados, quando os indivíduos tomam decisões descentralizadas sob esse novo cenário, ou seja, os indivíduos pagam o imposto t e consideram $\overline{G}$ como dado.

Solução

O Lagrangeano associado ao problema de otimização segue abaixo:

$$L = \log(1 - g_i - t) + \log\left(g_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} g_j + \overline{G}\right)$$

A condição de primeira ordem é

$$\frac{\partial L}{\partial g_i} = 0 \quad \iff \quad -\frac{1}{1 - g_i - t} + \frac{1}{g_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} g_j + \overline{G}} = 0$$

Como os indivíduos são idênticos $\forall i, g_i = g$ e dado que $\overline{G} = \alpha N t$:

$$g = \frac{1}{N+1} - \frac{\alpha N + 1}{N+1} t$$

o que implica que

$$G^{d'} = Ng = \frac{N}{N+1} - \frac{N}{N+1}(\alpha N + 1)t = \frac{N}{N+1}(1 - t\alpha N - t)$$

e) Calcular G^g, a provisão para bens públicos em equilíbrio total, ou seja, a soma das contribuições individuais, $G^{d'}$, e a quantidade fornecida publicamente, $\overline{G}$.

Solução

$$\begin{aligned} G^g &= G^{d'} + \alpha T \\ &= G^{d'} + \alpha N t \end{aligned}$$

$$= \frac{N}{N+1}(1 - t\alpha N - t) + \alpha N t$$
$$= \frac{N}{N+1}(1 - t\alpha N - t + \alpha(N+1)t)$$

f) Discuta se o governo deve se engajar na provisão do bem público dependendo do valor de α.

Solução

A partir da expressão acima, podemos mostrar facilmente que $G^g > G^d$ se e somente se $\alpha > 1$. Assim, o governo deve se engajar em alguma provisão do bem público se $\alpha > 1$. Como representa a tecnologia de produção do governo, isso significa que a provisão pública do bem público é justificada desde que a tecnologia do governo seja mais eficiente que a tecnologia privada. Nesse caso, poderíamos determinar um nível ideal do imposto $t^* > 0$, de modo que o bem-estar social agregado seja maximizado. Por outro lado, se o governo é menos eficiente do que os indivíduos no fornecimento do bem público, isto é, se $\alpha < 1$, o governo não deve se engajar na provisão do bem público e definir $t = 0$.

2) Considere uma sociedade composta por três indivíduos indexados por A, B e C. Seja $G \in [0, +\infty[$ o número de horas de transmissão televisiva por dia. A transmissão televisiva é financiada através de um imposto compartilhado igualmente entre indivíduos, ou seja, se G é fornecido, cada indivíduo deve pagar $G/3$. Suponha que os indivíduos tenham a seguinte função de utilidade sobre G:

$$U_A = G$$
$$U_B = 2 - G$$
$$U_C = \frac{4}{3}G - \frac{G^2}{2}$$

a) Mostre que os três indivíduos têm preferências de pico único.

Solução

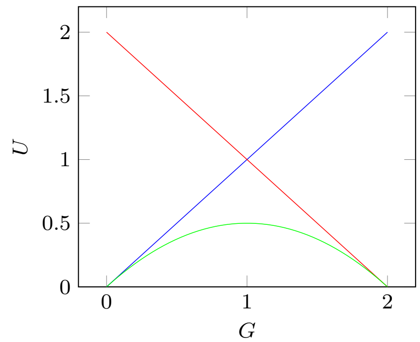
O indivíduo A prefere $G^A = 2$. O indivíduo B prefere $G^B = 0$. O indivíduo maximiza a seguinte função:

$$\frac{4}{3}G - \frac{G^2}{2} - \frac{G}{3} = G - \frac{G^2}{2}$$

isto é, $G^C = 1$. Como todos os valores para o máximo são únicos, as preferências dos três indivíduos é de pico único.

b) Se o governo está escolhendo G no intervalo de $0 \leq G \leq 2$, qual é o resultado da votação majoritária G?

Figure 1. Mapa de Indiferença



Solução

Dado que $G^B < G^C < G^A$ e dado que as preferências dos três indivíduos é de pico único, o teorema do eleitor mediano pode ser aplicado. Assim, a quantidade escolhida será $G = 1$.

c) O resultado da votação majoritária maximiza o bem-estar social? Comente.

Solução

A função de bem-estar social agregada pode ser escrita como

$$\begin{aligned} W &= U_A + U_B + U_B - G \\ &= G + 2 - G + \frac{4}{3}G - \frac{G^2}{2} - G \\ &= \frac{G}{3} - \frac{G^2}{2} + 2 \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial W}{\partial G} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G = \frac{1}{3}$$

Isso ilustra o fato de que nada garante a priori que a maioria dos votos maximizará o bem-estar social.

3) Uma cidade tem 1000 habitantes, os quais consomem apenas um bem privado: cervejas. Será construído nessa cidade um bem público: uma praça. Suponha que todos os habitantes tenham a mesma função de utilidade $U(X_i, G) = X_i - \frac{10}{G}$, em que X_i é a quantidade de cervejas consumidas e G é o tamanho da praça em m^2. Suponha que o preço da cerveja por garrafa seja 1 e o preço do metro quadrado construído da praça seja 100. Qual o valor de G é Pareto-eficiente?

Solução

Usando a condição de Samuelson,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial u_i(x_i^*, G^*)}{\partial G^*}}{\frac{\partial u_i(x_i^*, G^*)}{\partial x_i^*}} = TMT$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\frac{10}{G^2}}{1} \right) = \frac{100}{1}$$

$$N \left(\frac{\frac{10}{G^2}}{1} \right) = \frac{100}{1}$$

$$G^* = 10$$

4) Suponha que existem dois agentes e que existe um bem público e um bem privado, ambos disponíveis em quantidades contínuas. A provisão do bem público é dada por $G = g_1 + g_2$, em que g_i é a contribuição do agente $i = 1, 2$ para a provisão do bem público. A utilidade do agente 1 é $u_1(G, x_1) = 3\sqrt{G} + x_1$ e a utilidade do agente 2 é $u_2(G, x_2) = 5\sqrt{G} + x_2$, em que x_i é o consumo do bem privado pelo agente i. Determine o nível de G^* de provisão eficiente do bem público.

Solução

Usando a condição de Samuelson,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial u_i(x_i^*, G^*)}{\partial G^*}}{\frac{\partial u_i(x_i^*, G^*)}{\partial x_i^*}} = TMT$$

$$\frac{3\,(1/2)\,(G)^{-1/2}}{1} + \frac{5\,(1/2)\,(G)^{-1/2}}{1} = 1$$

$$\frac{3}{2}\frac{1}{(G)^{1/2}} + \frac{5}{2}\frac{1}{(G)^{1/2}} = 1$$

$$\frac{4}{(G)^{1/2}} = 1$$

$$4 = (G)^{1/2}$$

$$G^* = 16$$

5) Considere o problema de provisão eficiente de um bem público contínuo com

dois consumidores. Seja $u_i(\gamma, x_i) = \ln(\gamma) + (1/2)\, x_i$ a utilidade do consumidor i sobre o bem público e o bem privado, em que γ é a quantidade do bem público e x_i a quantidade do bem privado consumido pelo consumidor i, para $i = 1, 2$. A produção do bem público depende das contribuições g_1 e g_2 dos consumidores 1 e 2, respectivamente, e é dada pela função de produção $\gamma = \ln(g_1 + g_2)$. Calcule a quantidade eficiente do bem público que deve ser produzida quando o governo decide o nível do bem público.

Solução

Por meio da regra de Samuelson, temos:

$$\frac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{\gamma}}{\frac{1}{2}} = \frac{p_\gamma}{p_x} \qquad \Longrightarrow \qquad p_x = p_\gamma \gamma$$

Pela Lei de Walras,

$$\begin{aligned} p_x(x_1 + x_2) + p_\gamma \gamma - (\omega_1 + \omega_2) = 0 \\ \gamma = \frac{\omega_1 + \omega_2}{p_\gamma(1 + x_1 + x_2)} \end{aligned}$$

6) Considere uma economia com n indivíduos, com uma dotação inicial de bens de w_i e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens, x_i, e do volume de um bem público G, que é igual a soma das contribuições de cada um dos indivíduos, $G = \sum_{i=1}^{n} g_i$. A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por $u_i = x_i + a_i \ln G$, em que $a_i > 1$. Suponha que na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os demais agentes não alterarão sua contribuição em resposta. Calcule a provisão ótima do bem público. Qual agente contribuirá com um valor positivo?

Solução

Cada indivíduo resolve o seguinte problema de maximização

$$\max_{g_i} [w_i - g_i] + a_i \ln \left[\overline{G}_{-i} + g_i\right]$$

A CPO é

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial g_i} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 + a_i \left(\frac{1}{\overline{G}_{-i} + g_i} \right) = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad G = a_i$$

Dessa forma, o único indivíduo que contribuirá com um valor positivo é aquele que tirar o maior a_i. Logo,

$$G^* = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \Longrightarrow \quad a_1 = G - \sum_{i \neq 1}^{n} a_i$$

7) Considere dois consumidores com as seguintes funções de demanda por bens públicos:

$$p_1 = 10 - \frac{1}{10}G$$
$$p_2 = 20 - \frac{1}{10}G$$

em que p_i é o preço que o indivíduo i está disposto a pagar pela quantidade G.

a) Qual é o nível ótimo do bem público se o custo marginal do bem público for de 25?

Solução

Somando as demandas, temos

$$p = 30 - \frac{2}{10}G$$

Logo, $G = 25$.

b) Suponha que o custo marginal do bem público seja de 5. Qual é o nível ideal?

Solução

Somando as demandas, temos

$$p = 30 - \frac{2}{10}G$$

Logo, $G = 125$.

c) Suponha que o custo marginal do bem público seja de 40. Qual é o nível ideal? Os consumidores devem fazer uma declaração honesta de suas funções de demanda?

Solução

A demanda será zero.

8) Considere três consumidores com as seguintes funções de demanda por bens públicos:

$$p_1 = 50 - G$$
$$p_2 = 110 - G$$
$$p_3 = 150 - G$$

em que p_i é o preço que o indivíduo i está disposto a pagar pela quantidade G.

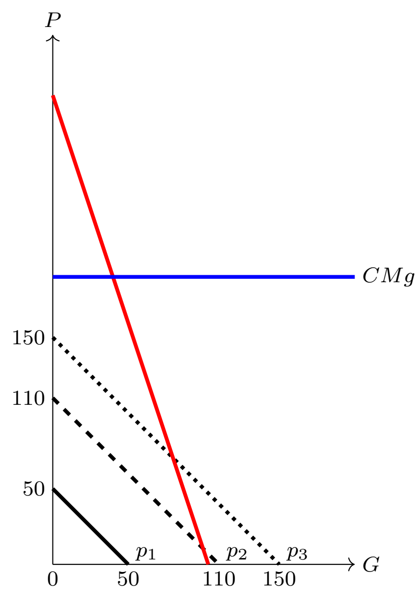
a) Qual é o nível ótimo do bem público se o custo marginal do bem público for de 190? Ilustre sua resposta graficamente.

Solução

A demanda será

$$p = 310 - 3G \quad \Longrightarrow \quad G = 40$$

Figure 2. Curva de Demanda pelo Bem Público com $CMg = 190$



b) Explique por que o bem público pode não ser fornecido por causa do problema do *free-rider*.

9) Considere três consumidores ($i = 1, 2, 3$) que se preocupam com o consumo de um bem privado e o consumo de um bem público. Suas funções de utilidade

são, respectivamente, $u_1 = x_1 G$, $u_2 = x_2 G$ e $u_3 = x_3 G$, em que x_i é o consumo do bem privado e G é a quantidade de bem público consumida em conjunto por todos eles. O custo unitário do bem privado é de 1 e o custo unitário do bem público é de 10. Os níveis de riqueza individuais são $w_1 = 30$, $w_2 = 50$ e $w_3 = 30$. Determine a alocação de equilíbrio se o bem público for financiado por meio das contribuições voluntárias dos indivíduos g_1, g_2 e g_3.

Solução

O problema de maximização do indivíduo 1 é

$$\max_{x_1, g_1} x_1(g_1 + g_2 + g_3)$$
$$\text{sujeito a } x_1 + 10g_1 = 30$$

que pode ser reescrito como

$$\max_{g_1} (30 - 10g_1)(g_1 + g_2 + g_3)$$

O problema de maximização do indivíduo 2 é

$$\max_{x_2, g_2} x_2(g_1 + g_2 + g_3)$$
$$\text{sujeito a } x_2 + 10g_2 = 50$$

que pode ser reescrito como

$$\max_{g_2} (50 - 10g_2)(g_1 + g_2 + g_3)$$

O problema de maximização do indivíduo 3 é

$$\max_{x_3, g_3} x_3(g_1 + g_2 + g_3)$$
$$\text{sujeito a } x_3 + 10g_3 = 30$$

que pode ser reescrito como

$$\max_{g_3} (30 - 10g_3)(g_1 + g_2 + g_3)$$

As condições de primeira ordem para os consumidores 1, 2 e 3 são, respectivamente:

$$\frac{\partial u_1}{\partial g_1} = 0 \iff 30 - 20g_1 - 10(g_2 + g_3) = 0 \implies g_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(g_2 + g_3)$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial g_2} = 0 \iff 50 - 20g_2 - 10(g_1 + g_3) = 0 \implies g_2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(g_1 + g_3)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial g_3} = 0 \iff 30 - 20g_3 - 10(g_1 + g_2) = 0 \implies g_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(g_1 + g_2)$$

Usando a Regra de Cramer para resolver o sistema acima, obtemos:

$$g_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$g_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{9}{4}$$

$$g_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

Portanto, $G^* = \dfrac{11}{4}$.

10) Considere uma população de consumidores. Quando um consumidor é membro de um clube que fornece um nível de provisão G e possui n membros, obtém utilidade

$$U = M - \frac{G}{n} + \log(G) - \frac{n}{k}$$

em que k é uma constante positiva e $\dfrac{G}{n}$ é a taxa de associação ao clube.

a) Qual o tamanho do clube maximiza a utilidade total produzida pelo clube?

Solução

Para descobrir qual a provisão eficiente do bem público e o número ótimo de membros do clube, montamos o Lagrangeano:

$$L = M - \frac{G}{n} + \log(G) - \frac{n}{k}$$

As condições de primeira ordem são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial G} = 0 \quad &\iff \quad -\frac{1}{n} + \frac{1}{G} = 0 \quad &\implies G^* = n \\ \frac{\partial L}{\partial n} = 0 \quad &\iff \quad \frac{G}{n^2} - \frac{1}{k} = 0 \quad &\implies n^* = \sqrt{Gk} \end{aligned}$$

b) Qual o nível ótimo de fornecimento do bem público? Como essa nível varia com o tamanho do clube?

Solução

O nível ótimo do bem público varia de forma linear com o tamanho do clube, isto é, $\dfrac{dG}{dn} = 1$.

11) Seja $U = 40n - 2n^2$ a função de utilidade dos membros de um clube. Encontre o tamanho ideal do clube.

Solução

Para descobrir qual o número ótimo de membros do clube, montamos o Lagrangeano:

$$L = 40n - 2n^2$$

A condição de primeira ordem é:

$$\frac{\partial L}{\partial n} = 0 \quad \iff \quad 40 - 4n = 0 \quad \implies n^* = 10$$

12) Suponha que os consumidores tenham renda M e preferências representadas por

$$U = x + 5\log G - n$$

Também suponha que a função de custo da produção privada do bem público seja $C(G) = G$.

a) Mostre que utilidade dos membros do clube é maximizada quando $n = 5$ com nível de provisão $G = 25$.

Solução

Para descobrir qual a provisão eficiente do bem público e o número ótimo de membros do clube montamos o Lagrangeano:

$$L = x + 5\log G - n - \frac{G}{n}$$

As condições de primeira ordem são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial G} = 0 \quad &\iff \quad \frac{5}{G} - \frac{1}{n} = 0 \quad \Longrightarrow G^* = 5n \\
\frac{\partial L}{\partial n} = 0 \quad &\iff \quad -1 - \left(-\frac{G}{n^2}\right) = 0 \quad \Longrightarrow n^* = \sqrt{G}
\end{aligned}$$

Resolvendo as CPO's encontramos $G^* = 25$ e $n^* = 5$.

b) Prove que, se G é escolhido de forma ideal, dado n, a utilidade em função de n pode ser escrita como $U = M + 10\log(n) - 2n$.

Solução

Como a função de utilidade é invariante a transformações monotônicas note que:

$$\begin{aligned}
U &= x + 5\log G - n \\
&= x + 5\log(5n) - n \quad \text{[substituindo } G^* = 5n\text{]} \\
&= x + 5\log(5) + 5\log(n) - n \quad \text{[propriedade do logaritmo]} \\
&= 2x + 10\log(5) + 10\log(n) - 2n \quad \text{[multiplicando por 2]} \\
&= M + 10\log(n) - 2n \quad \text{[agregando]}
\end{aligned}$$

c) Usando a função de utilidade do item acima, calcule o número de clubes se a população total for $N = 18$. Arredonde o número.

Solução

Para descobrir qual o número ótimo de membros do clube, montamos o Lagrangeano:

$$L = M + 10\log(n) - 2n$$

A CPO é

$$\frac{\partial L}{\partial n} = 0 \iff \frac{10}{n} - 2 = 0 \implies n^* = 5$$

O número ótimo de clubes seria 5 com 4 membros cada.

13) Considere três consumidores ($i = 1, 2, 3$) que se preocupam com o consumo de um bem privado e o consumo de um bem público. Suas funções de utilidade são, respectivamente, $u_1 = x_1 G$, $u_2 = x_2 G$ e $u_3 = x_3 G$, em que x_i é o consumo do bem privado e G é a quantidade de bem público consumida em conjunto por todos eles. O custo unitário do bem privado é de 1 e o custo unitário do bem público é de 1. Os níveis de riqueza individuais em são $w_1 = 1$, $w_2 = 1$ e $w_3 = 1$.

a) Determine as alocações de equilíbrio se o bem público é financiado pelas contribuições de cada indivíduo, isto é, g_1, g_2 e g_3.

Solução

Dados os preços e os níveis de riqueza dos indivíduos podemos usar a seguinte restrição: $x_i = 1 - g_i$. Cada indivíduo i decide sobre g_i para maximizar sua utilidade $(1 - g_i)(g_1 + g_2 + g_3)$, tomando as contribuições dos demais como dadas. Para $i = 1$, obtemos:

$$\frac{\partial u_1}{\partial g_1} = 0 \iff 1 - 2g_1 - g_2 - g_3 = 0 \iff g_1 = \frac{1 - g_2 - g_3}{2}$$

Dado que os indivíduos são idênticos, em equilíbrio teremos $g_1 = g_2 = g_3 \equiv g$. Portanto, $g = \frac{1}{4}$ e $G = 3g = \frac{3}{4}$.

b) Mostre que a alocação eficiente é tal que $G = \frac{3}{2}$.

Solução

De acordo com a regra de Samuelson sabemos que

$$3\frac{1 - g}{g} = 1 \iff g = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad G = \frac{3}{2}$$

c) Verifique rapidamente se a alocação eficiente é Pareto superior em relação à obtida graças a contribuições voluntárias. Explique por que elas diferem.

Solução

Dizemos que uma alocação é Pareto-superior a outra se pelo menos um indivíduo estiver melhor no primeiro do que no segundo e se ninguém estiver em pior situação. Quando o bem é financiado por contribuições voluntárias a utilidade é $u = \frac{3}{16}$. Da alocação eficiente temos $u = \frac{12}{16}$. Assim, a alocação eficiente é Pareto superior em relação à obtida através de contribuições voluntárias. A razão dessa diferença é que, quando tomam decisões descentralizadas, os indivíduos não levam em conta externalidades positivas mútuas induzidas pela provisão do bem público. Como resultado, eles o fornecem insuficientemente.

d) Suponha que o governo seja capaz de excluir indivíduos do consumo do bem público. Isso implica que agora é possível permitir que cada indivíduo pague um preço unitário p para obter acesso à quantidade total disponível do bem público. Determine p que permita alcançar a alocação eficiente.

Solução

Estamos procurando por p de modo que cada indivíduo exija $G = \frac{3}{2}$ ao maximizar a seguinte função de utilidade:

$$u = (1 - pG)G$$

A condição de primeira ordem que determina a demanda pelo bem público é

$$1 - 2pG = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad G = \frac{1}{2p}$$

Assim, $p = \frac{1}{3}$.

e) Qual o gasto do indivíduo no consumo do bem público se o mesmo for provisionado pelo planejador central?

Solução

Cada indivíduo gasta $pG = \frac{1}{2}$ no consumo do bem público, tal que a renda total para o produtor será $\frac{3}{2}$.

14) Considere que as preferências de dois agentes possam ser representadas pelas seguintes funções de utilidade, respectivamente:

$$U_1(x_1, z_1) = 2\ln x_1 + \ln z_1$$
$$U_2(x_2, z_2) = \ln x_2 + 2\ln z_2$$

em que x_i é o consumo do bem privado e z_i é o consumo do bem público.

a) Encontre os preços de Lindhal.

Solução

As demandas Marshallianas podem ser encontradas como segue:

$$TMS_{x_i,z_i} = \frac{p_x^i}{p_z^i}, \quad i = 1,2$$

Logo,

$$\frac{\frac{2}{x_1}}{\frac{1}{z_1}} = \frac{p_x^1}{p_z^1}$$
$$\frac{\frac{1}{x_2}}{\frac{2}{z_2}} = \frac{p_x^2}{p_z^2}$$

Usando a restrição orçamentária, encontramos:

$$\begin{aligned} p_x^1 x_1 + p_z^1 z_1 &= M_1 \\ p_x^1\left(\frac{2z_1p_z^1}{p_x^1}\right) + p_z^1 z_1 &= M_1 \\ 2z_1p_z^1 + p_z^1 z_1 &= M_1 \\ 3z_1p_z^1 &= M_1 \\ p_z^1 &= \frac{M_1}{3Z} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p_x^2 x_2 + p_z^2 z_2 &= M_2 \\ p_x^2\left(\frac{z_2p_z^2}{2p_x^2}\right) + p_z^2 z_2 &= M_2 \\ \frac{z_2p_z^2}{2} + p_z^2 z_2 &= M_2 \\ \frac{3z_2p_z^2}{2} &= M_2 \\ p_z^2 &= \frac{2M_2}{3Z} \end{aligned}$$

b) Suponha que a fronteira de possibilidade de produção $Z + X = 120$. De acordo com o esquema de Lindhal, qual é o nível ótimo de fornecimento do bem público Z?

Solução

Sendo a fronteira de possibilidade, então

$$\frac{1}{Z}\left(\frac{M_1}{3}+\frac{2M_2}{2}\right)=1 \quad\Longrightarrow\quad Z=\frac{M_1}{3}+\frac{2M_2}{2}$$

c) Se a renda do indivíduo 1 é $w_1 = 90$ e a do indivíduo 2 é $w_2 = 30$, quais são os preços de Lindhal e qual é o nível ótimo de fornecimento do bem público Z?

Solução

Se $M_1 = 90$ e $M_2 = 30$, a solução de Lindahl, o nível de Z para o qual a soma vertical da curva de demanda é igual a 1, é $Z = 50$. Quando $M_1 = 90$, $M_2 = 30$ e $Z = 50$, então $p_z^1 = 0,6$ e $p_2^z = 0,4$. O fato de $p_z^1 + p_z^2 = 1$ mostra que esta é uma solução de Lindahl.

15) Considere que as preferências de dois agentes possam ser representadas pelas seguintes funções de utilidade, respectivamente:

$$U_1(x_1,G)=\ln x_1+\left(\frac{\eta_1}{1-\eta_1}\right)\ln G$$
$$U_2(x_2,G)=\ln x_2+\left(\frac{\eta_2}{1-\eta_2}\right)\ln G$$

em que x_i é o consumo do bem privado e G é o consumo do bem público. Encontre os preços de Lindhal e a provisão ótima de fornecimento do bem público nessa abordagem.

Solução

As demandas Marshallianas são:

$$TMS_{x_i,G}=\frac{p_x^i}{p_G^i},\quad i=1,2$$

Logo,

$$\frac{\frac{1}{x_1}}{\left(\frac{\eta_1}{1-\eta_1}\right)\left(\frac{1}{G}\right)}=\frac{p_x^1}{p_G^1} \quad\Longrightarrow\quad p_G^1=\frac{\eta_1}{2\eta_1-1}\frac{M_1}{G}$$
$$\frac{\frac{1}{x_2}}{\left(\frac{\eta_2}{1-\eta_2}\right)\left(\frac{1}{G}\right)}=\frac{p_x^2}{p_G^2} \quad\Longrightarrow\quad p_G^2=\frac{\eta_2}{2\eta_2-1}\frac{M_2}{G}$$

Sendo a fronteira de possibilidade com $TMT = 1$, então

$$\frac{\eta_1}{2\eta_1 - 1}\frac{M_1}{G} + \frac{\eta_2}{2\eta_2 - 1}\frac{M_2}{G} = 1 \quad\Longrightarrow\quad G = M_1\left(\frac{\eta_1}{2\eta_1 - 1}\right) + M_2\left(\frac{\eta_2}{2\eta_2 - 1}\right)$$

16) Considere uma economia composta por 2 indivíduos – A e B – que consomem 2 bens – 1 e 2. A função de utilidade dos indivíduos é:

$$U^A = \log(x_1^A) + \log(x_2^A) + \frac{1}{2}\log(x_1^B)$$
$$U^B = \log(x_1^B) + \log(x_2^B) + \frac{1}{2}\log(x_1^A)$$

em que x_j^i é a quantidade do bem j consumida pelo indivíduo i. Cada indivíduo é dotado de 1 unidade de renda. Seja o preço unitário de ambos os produtos igual a 1.

a) Calcule a situação de equilíbrio descentralizado dessa economia.

Solução

O Lagrangeano do problema de otimização do indivíduo A é

$$L = \log(x_1^A) + \log(x_2^A) + \frac{1}{2}\log(x_1^B) - \lambda(1 - x_1^A - x_2^A)$$

cujas condições de primeira ordem são

$$\frac{\partial L}{\partial x_1^A} = 0 \iff \lambda = \frac{1}{x_1^A}$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2^A} = 0 \iff \lambda = \frac{1}{x_2^A}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \iff 1 - x_1^A - x_2^A = 0$$

Resolvendo, obtemos

$$x_1^A = \frac{1}{2}$$
$$x_2^A = \frac{1}{2}$$

Como o problema é simétrico para ambos os consumidores, temos que:

$$x_1^B = \frac{1}{2}$$
$$x_2^B = \frac{1}{2}$$

b) Calcule o ótimo social se a função de bem-estar social for a soma das funções de utilidade dos indivíduos.

Solução

O problema de otimização é

$$\max_{x_1^A, x_2^A, x_1^B, x_2^B} \log(x_1^A) + \log(x_2^A) + \frac{1}{2}\log(x_1^B) + \log(x_1^B) + \log(x_2^B) + \frac{1}{2}\log(x_1^A)$$

sujeito a $x_1^A + x_2^A \leq 1$
$x_1^B + x_2^B \leq 1$

As condições de primeira ordem são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1^A} = 0 &\iff \frac{3}{2x_1^A} - \lambda = 0 &\implies \lambda = \frac{3}{2x_1^A} \\
\frac{\partial L}{\partial x_2^A} = 0 &\iff \frac{1}{x_2^A} - \lambda = 0 &\implies \lambda = \frac{1}{x_2^A} \\
\frac{\partial L}{\partial x_1^B} = 0 &\iff \frac{3}{2x_1^B} - \mu = 0 &\implies \mu = \frac{3}{2x_1^B} \\
\frac{\partial L}{\partial x_2^B} = 0 &\iff \frac{1}{x_2^B} - \mu = 0 &\implies \mu = \frac{1}{x_2^B} \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 &\iff x_1^A + x_1^B - 1 \leq 0 &\implies x_1^A + x_1^B \leq 1 \\
\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 &\iff x_2^A + x_2^B - 1 \leq 0 &\implies x_2^A + x_2^B \leq 1
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2x_1^A} = \frac{1}{x_2^A} &\iff x_1^A = \frac{3}{5}, \quad x_2^A = \frac{2}{5} \\
\frac{3}{2x_1^B} = \frac{1}{x_2^B} &\iff x_1^B = \frac{3}{5}, \quad x_2^B = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

c) Compare as quantidades do bem 1 nas duas situações. Comente.

Solução

No equilíbrio descentralizado, a quantidade total de bem 1 é menor do que no ideal social. Isso decorre do fato de que, ao maximizar sua própria utilidade, os indivíduos não levam em consideração a externalidade positiva associada ao consumo do bem 1. Isso resulta em uma sub-provisão do bem 1.

d) Mostre que o ideal social pode ser alcançado em uma estrutura descentralizada, graças a um subsídio s sobre o bem 1 (portanto, o preço desse bem é agora $1 - s$), com o custo desse subsídio coberto por um imposto fixo T sobre cada consumidor.

Solução

Para o consumidor 1 temos:

$$L = \log(x_1^A) + \log(x_2^A) + \frac{1}{2}\log(x_1^B) + \lambda\left[1 - T - (1-s)x_1^A - x_2^A\right]$$

As condições de primeira ordem são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1^A} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x_1^A} - \lambda(1-s) = 0 \quad \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{(1-s)x_1^A} \\
\frac{\partial L}{\partial x_2^A} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x_2^A} - \lambda = 0 \quad \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{x_2^A} \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 - T - (1-s)x_1^A - x_2^A = 0 \quad \Longrightarrow (1-s)x_1^A - x_2^A = 1 - T
\end{aligned}$$

Para o consumidor 2 temos:

$$L = \log(x_1^B) + \log(x_2^B) + \frac{1}{2}\log(x_1^A) + \mu\left[1 - T - (1-s)x_1^B - x_2^B\right]$$

As condições de primeira ordem são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_1^B} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x_1^B} - \mu(1-s) = 0 \quad \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{(1-s)x_1^B} \\
\frac{\partial L}{\partial x_2^B} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x_2^B} - \mu = 0 \quad \Longrightarrow \lambda = \frac{1}{x_2^A} \\
\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 1 - T - (1-s)x_1^B - x_2^B = 0 \quad \Longrightarrow (1-s)x_1^B - x_2^B = 1 - T
\end{aligned}$$

Encontramos que

$$\begin{aligned}
x_1^A &= \frac{1-T}{2(1-s)} \\
x_1^B &= \frac{1-T}{2(1-s)}
\end{aligned}$$

Como queremos $x_1^A = x_1^B = \dfrac{3}{5}$ temos que $T = s\dfrac{3}{5}$.

e) Seja a situação acima. Qual o valor ótimo do subsídio?

Solução

Temos que resolver a seguinte expressão:

$$\frac{1 - s\frac{3}{5}}{2(1-s)} = \frac{3}{5} \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{1}{3}$$

17) Suponha que haja dois consumidores indexados por $i = 1, 2$. Os consumidores têm a seguinte função de utilidade:

$$U^1 = \alpha_1 \log x_1 + (1 - \alpha_1) \log G$$
$$U^2 = \alpha_2 \log x_2 + (1 - \alpha_2) \log G$$

em que x é o consumo de um bem privado pelo indivíduo i, G é um bem público puro e $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Cada consumidor possui renda igual a 1. Seja 1 o preço unitário do bem privado, de modo que a restrição orçamentária de cada consumidor possa ser escrita como:

$$x_i + g_i \leq 1$$

em que g_i é a contribuição individual para o bem público. A quantidade total disponível do bem público é a soma das contribuições individuais, ou seja:

$$G = \sum_{i=1}^{N} g_i$$

Calcule G^d, a provisão de equilíbrio do bem público quando os indivíduos tomam decisões descentralizadas. É necessário impor condições adicionais sobre os parâmetros?

Solução

A função de utilidade dos agentes 1 e 2 pode ser reescrita, respectivamente, como:

$$U^1 = \alpha_1 \log(1 - g_1) + (1 - \alpha_1) \log(g_1 + g_2)$$
$$U^2 = \alpha_2 \log(1 - g_2) + (1 - \alpha_2) \log(g_1 + g_2)$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial U^1}{\partial g_1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{\alpha_1}{1 - g_1} + \frac{1 - \alpha_1}{g_1 + g_2} = 0 \quad \Longrightarrow g_1 = 1 - \alpha_1 - \alpha_1 g_2$$
$$\frac{\partial U^2}{\partial g_2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{\alpha_2}{1 - g_2} + \frac{1 - \alpha_2}{g_1 + g_2} = 0 \quad \Longrightarrow g_2 = 1 - \alpha_2 - \alpha_2 g_1$$

Montamos o sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} g_1 + \alpha_1 g_2 = 1 - \alpha_1 \\ \alpha_2 g_1 + g_2 = 1 - \alpha_2 \end{cases}$$

e resolvendo por Regra de Cramer, obtemos:

$$g_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-\alpha_1 & \alpha_1 \\ 1-\alpha_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+\alpha_1\alpha_2-2\alpha_1}{1-\alpha_1\alpha_2}$$

$$g_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-\alpha_1 \\ \alpha_2 & 1-\alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+\alpha_1\alpha_2-2\alpha_2}{1-\alpha_1\alpha_2}$$

É necessário que $\alpha_1\alpha_2 < 1$ e que $\alpha_1 + \alpha_2 < 2$.

18) Existem cinco proprietários: $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Suas funções de utilidade são todas da forma $u(x, y_i) = y_i - \frac{1}{2}(\alpha_i - x)^2$, em que x indica o nível em que um bem público é fornecido e y_i indica a quantidade de dinheiro que o proprietário da casa tem disponível para gastar em outros bens. Os valores de seus parâmetros de preferência α_i são $\alpha_1 = 30$, $\alpha_2 = 27$, $\alpha_3 = 24$, $\alpha_4 = 21$ e $\alpha_5 = 18$. Todas as empresas que produzem o bem público cobram um preço unitário de p reais; p é, portanto, o custo marginal para os proprietários de cada unidade de x. Suponha que $p = 40$.

a) Qual a provisão ótima do bem público?

Solução

Usando a regra de Samuelson sabemos que

$$30 - x + 27 - x + 24 - x + 21 - x + 18 - x = 40 \quad \Longrightarrow \quad x = 16$$

b) Quais consumidores irão adquirir o bem público?

Solução

Como o preço é maior do que disposição a pagar de cada agente individualmente, isto é, $p > TMS_i$, $i \in \mathbb{N}$, para todo $x \in \mathbb{R}_+$ há apenas um equilíbrio: $\xi_i = 0$ para todo i e, portanto, $x = 0$.

Nenhum bem público é comprado, apesar do nível de Pareto ser $x = 16$ e apesar de quando $x = 0$, o valor social marginal do bem público, $\sum_i TMS_i$, é 120, o que excede em muito o custo marginal (ou seja, o preço de \$ 40) de cada unidade de x. O excedente do consumidor no nível de provisão de Pareto, $x = 16$, é de \$ 640, o que é perdido no equilíbrio.

c) Suponha que o preço agora é $p = 20$. Quais consumidores irão adquirir o bem público?

Solução

Usando a regra de Samuelson sabemos que

$$30 - x + 27 - x + 24 - x + 21 - x + 18 - x = 20 \quad \Longrightarrow \quad x = 20$$

19) Assuma que d denote uma decisão pública: $d \in \{0, 1\}$ (se um poste for construído $d = 1$; caso contrário, $d = 0$). O custo total é cd. Seja $c = 1$. Existem dois jogadores, $n = 2$. Os jogadores têm a mesma avaliação (disposição para pagar) pelo bem público,

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{2}{3}$$

O jogador i contribui com g_i e sua recompensa é

$$u_i = \begin{cases} \theta_i - g_i & \text{se } d = 1 \\ 0 & \text{se } d = 0 \end{cases}$$

Suponha que a regra de decisão pública seja $d = 1$ se e somente se $\sum g_i \geq c$. Suponha que as contribuições sejam escolhidas em um conjunto discreto, a saber

$$g_i \in \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right\}$$

a) Represente o jogo na forma normal, isto é, escreva a matriz de *payoffs*.

Solução

A matriz de payoffs será

	0	$1/3$	$1/2$	$2/3$
0	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$
$1/3$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1/3,0)$
$1/2$	$(0,0)$	$(0,0)$	$(1/6,1/6)$	$(1/6,0)$
$2/3$	$(0,0)$	$(0,1/3)$	$(0,1/6)$	$(0,0)$

b) Encontre os equilíbrios de Nash em estratégias puras.

Solução

- $\lambda L_2 + (1 - \lambda) L_3 \succ L_1$

- $\lambda C_2 + (1-\lambda)C_3 \succ C_1$
- $\lambda C_2 + (1-\lambda)C_3 \succ C_4$
- $\lambda L_2 + (1-\lambda)L_3 \succ L_4$

Da ideia de equilíbrio correlacionado, encontramos a solução $(1/6, 1/6)$.

20) Uma casa um pouco ao sul do campus tem dois residentes: A e B. Toda a limpeza da casa é feita exclusivamente através dos esforços individuais dos dois residentes, que, depois de comer, dormir e socializar, têm 49 horas por semana para se dedicar a alguma combinação de estudo e limpeza. A utilidade de A para estudar e limpar é dada por $U_A = 20\log S_A + 4\log C$ e a utilidade de B para estudar e limpar é dada por $U_B = 20\log S_B + 5\log C$, em que C é a limpeza total feita no apartamento, dada pela soma da contribuição de cada indivíduo $C = C_A + C_B$, e S é o tempo de estudo.

   a) Quanto tempo A e B passam estudando e limpando?

   Solução

   A função de utilidade de A é

$$U_A = 20\log(49 - C_A) + 4\log(C_A + C_B)$$

   cuja CPO é

$$\frac{\partial U_A}{\partial C_A} = 0 \iff -\frac{20}{49 - C_A} + \frac{4}{C_A + C_B} = 0 \implies C_A = \frac{49 - 5C_B}{6}$$

   A função de utilidade de B é

$$U_B = 20\log(49 - C_B) + 5\log(C_A + C_B)$$

   cuja CPO é

$$\frac{\partial U_B}{\partial C_B} = 0 \iff -\frac{20}{49 - C_B} + \frac{5}{C_A + C_B} = 0 \implies C_B = \frac{49 - 4C_A}{5}$$

   Combinando as funções de reação, encontramos:

$$\begin{aligned}
C_A &= \frac{49 - 5C_B}{6} \\
C_A &= \frac{49 - 5\left(\frac{49 - 4C_A}{5}\right)}{6} \\
C_A &= \frac{49 - 49 + 20C_A}{6} \\
6C_A - 20C_A &= 0 \\
C_A &= 0 \quad \therefore \quad S_A = 49
\end{aligned}$$

Usando estes resultados, encontramos:

$$C_B = \frac{49 - 4C_A}{5}$$
$$C_B = \frac{49}{5} \quad \therefore \quad S_B = \frac{196}{5}$$

b) Qual é a quantidade de tempo socialmente ideal que eles devem gastar? Se sua resposta difere da parte a), por quê?

Solução

O problema de otimização se torna

$$\max_{S_A,S_B,C_A,C_B} L = 20\log S_A + 4\log(C_A + C_B) + 20\log S_B + 5\log(C_A + C_B) + \lambda(49 - S_A - C_A) + \mu(49 - S_B - C_B)$$

cujas CPO's são

$$\frac{20}{S_A} - \lambda = 0$$
$$\frac{9}{C_A + C_B} - \lambda = 0$$
$$\frac{20}{S_B} - \mu = 0$$
$$\frac{9}{C_A + C_B} - \mu = 0$$
$$49 - S_A - C_A = 0$$
$$49 - S_B - C_B = 0$$

Resolvendo encontramos $C_A = C_B = 9$ e $S_A = S_B = 40$.

Intuitivamente, no cálculo da parte (a), definimos a utilidade marginal da última hora de limpeza para cada residente igual à utilidade marginal de estudar para esse residente. Na parte (b), definimos a soma das utilidades marginais da última hora de limpeza - a utilidade social marginal da limpeza - igual à utilidade marginal de estudar para qualquer residente. Como a utilidade marginal social da limpeza excede as utilidades marginais individuais daquela hora de limpeza, um planejador central escolhe de maneira ideal mais tempo na limpeza do que os indivíduos se estivessem agindo sozinhos.

21) Suponha que cinco proprietários morem às margens da Lagoa dos Patos: Ana, Betania, Catarina, Diana e Eliane. Para lidar com problemas de bens públicos, como decidir o nível da água no lago e como controlar os mosquitos no verão, eles formaram uma associação de proprietários. A função de utilidade de

cada proprietário é da forma: $u(x, y_i) = y_i - \frac{1}{2}(\alpha_i - x)^2$, em que x indica o número de tanques de spray de mosquito que são pulverizados a cada semana durante o verão, e y_i indica a quantidade de dinheiro que o proprietário tem disponível para gastar em outros bens privados. Os valores de seus parâmetros de preferência α_i são $\alpha_1 = 30$, $\alpha_2 = 27$, $\alpha_3 = 24$, $\alpha_4 = 21$ e $\alpha_5 = 18$. Existem várias empresas locais que pulverizarão para controlar os mosquitos. Todas as empresas cobram o mesmo preço $p = 40$ por tanque que utilizam na pulverização.

a) Quanto spray será comprado?

Solução

Usando a regra de Samuelson sabemos que

$$30 - x + 27 - x + 24 - x + 21 - x + 18 - x = 40 \implies x = 16$$

b) Suponha que os proprietários decidam que, em vez de cada um deles comprar repelente de insetos separadamente e cada um pagar R$ 40 por tanque, a associação cobrará de cada um deles apenas uma parte do preço de R$ 40: cada proprietário pagará a parcela do preço (ou imposto por unidade) p_i para cada unidade que a associação compra, com $\sum p_i = 40$, tal que seja igual a sua TMS. Qual o valor pago individualmente?

Solução

Em $x = 16$, a taxa marginal de substituição de cada indivíduo é

$$TMS_A = 14$$
$$TMS_B = 11$$
$$TMS_C = 8$$
$$TMS_D = 5$$
$$TMS_E = 2$$

Cada indivíduo pagará um preço igual a sua taxa marginal de substituição.

22) Seja $U = (x_1)^{\alpha}(x_2 y)^{1-\alpha}$, em que y é uma externalidade. É uma externalidade positiva ou negativa? Como ela afeta a demanda do bem 1 comparativamente à demanda pelo bem 2?

Solução

O Lagrangeano é

$$L = \alpha \log x_1 + (1 - \alpha) \log x_2 + (1 - \alpha) \log y$$

Sabendo que

$$\frac{\frac{\alpha}{x_1}}{p_{x_1}} = \frac{\frac{1-\alpha}{x_2}}{p_{x_2}} = \frac{\frac{1-\alpha}{y}}{p_y}$$

nenhuma das demandas pelos bens é afetada pela externalidade.

23) Suponha que temos dois consumidores representativos. A utilidade de cada um deles é $U_1 = (x_1^1 x_2^1)^\alpha (x_1^2 x_2^2)^{1-\alpha}$ e $U_2 = (x_1^2 x_2^2)^\alpha (x_1^1 x_2^1)^{1-\alpha}$, em que x_i^h é o consumo do bem i pelo consumidor h. Mostre que o equilíbrio é eficiente a despeito da externalidade. Explique.

Solução

A utilidade marginal do bem 1 para o consumidor 1 é

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1^1} = \alpha (x_1^1 x_2^1)^{\alpha-1} (x_2^1)(x_1^2 x_2^2)^{1-\alpha}$$

e a utilidade marginal do bem 2 é

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_1^2} = (1-\alpha)(x_1^1 x_2^1)^\alpha (x_2^2)(x_1^2 x_2^2)^{-\alpha}$$

A taxa marginal de substituição para o consumidor 1 pode ser calculada como

$$TMS_{1,2}^1 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_1^2}{x_1^1}$$

De forma semelhante para o consumidor 2, temos:

$$TMS_{1,2}^2 = \frac{\alpha}{1-\alpha}\frac{x_2^1}{x_2^2}$$

Observe que cada uma das taxas marginais de substituição é independente do efeito de externalidade. Cada consumidor iguala sua TMS à relação de preço. Portanto, a externalidade não afeta o fato de que o equilíbrio é eficiente. Esta conclusão é válida porque a externalidade não afeta as proporções em que os dois consumidores compram os bens. (Observe que o efeito externalidade pode ser fatorado a partir da utilidade como uma constante.) O mesmo equilíbrio é alcançado com e sem a externalidade. Como consequência, esse tipo de externalidade é chamado de "Pareto irrelevante".

24) Suponha que foi descoberto ouro em uma região do interior do Brasil e que o preço do grama de ouro é R$ 1. A quantidade produzida de ouro em gramas (q) pode ser expressa como função do número de garimpeiros (n), de acordo com a função $q = 40n - 2n^2$, e o custo do material individual para garimpagem é R$

12. Na região em que se descobriu ouro foi concedido livre acesso. Determine a diferença entre o número efetivo de garimpeiros e o número ótimo.

Solução

O número ótimo é encontrado resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$\max_n \pi = pq - cq = 40n - 2n^2 - 12n \quad \Longrightarrow \quad n^* = 7$$

O número efetivo é aquele encontrado quando da condição de lucro igual a zero, isto é,

$$40n - 2n^2 - 12n = 0 \quad \Longrightarrow \quad n^{\text{efet}} = 14$$

25) Considere dois agentes, $i = 1, 2$, que estão decidindo a que velocidade chegam a um destino. Cada um deles possui uma função de utilidade $u_i(v_i) = 2v_i$, em que v_i é a velocidade que eles estão trafegando. Só que, quanto mais rápido eles andam pela estrada, maior a probabilidade de ocorrência de um acidente, que é denotada por $p(v_1, v_2)$, e que dá a eles um custo de 0,5 cada.

a) Escreva o problema privado de maximização de cada motorista.

Solução

O problema privado de maximização de cada motorista é dado por

$$\max_{v_i} \left[u_i(v_i) - p(v_1, v_2)c_i\right] = \max_{v_i} \left[2v_i - 0,5p(v_1, v_2)\right]$$

b) Derive as condições de primeira ordem e resolva o problema.

Solução

As condições de primeira ordem são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_1}{\partial v_1} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 - \frac{1}{2}\frac{\partial p(v_1, v_2)}{\partial v_1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial p(v_1, v_2)}{\partial v_1} = 4 \\
\frac{\partial \pi_2}{\partial v_2} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 - \frac{1}{2}\frac{\partial p(v_1, v_2)}{\partial v_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial p(v_1, v_2)}{\partial v_1} = 4
\end{aligned}$$

c) Escreva o problema o social.

Solução

O problema social de maximização de cada motorista é dado por

$$\max_{v_1, v_2} \pi(v_1, v_2) \left[2v_1 + 2v_2 - p(v_1, v_2)\right]$$

d) Derive as condições de primeira ordem e resolva o problema.

Solução

As condições de primeira ordem são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi(v_1, v_2)}{\partial v_1} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 - \frac{\partial p(v_1, v_2)}{\partial v_1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial p(v_1, v_2)}{\partial v_1} = 2 \\
\frac{\partial \pi(v_1, v_2)}{\partial v_2} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 - \frac{\partial p(v_1, v_2)}{\partial v_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial p(v_1, v_2)}{\partial v_2} = 2
\end{aligned}$$

26) O número total de peixes capturados em uma pesca local não excludente é dado por $f(k)$, onde k é o número total de barcos de pesca que trabalham no local de pesca. Suponha que $f' > 0$ e $f'' < 0$, e que $f(0) = 0$. Ou seja, assumimos que a produção total de peixes é uma função côncava crescente do número de barcos que trabalham no local de pesca. Observe também que, como consequência da concavidade de $f(\cdot)$, $\frac{f(k)}{k} > f'(k)$. Ou seja, o número de peixes capturados por barco é sempre maior que o produto marginal da adição de outro barco. Isto resulta da observação de que o produto médio é decrescente com uma função de produção côncava. Defina $PMe(k) = \frac{f(k)}{k}$. Então, $PMe'(k) = \frac{1}{k}(f'(k) - PMe(k)) < 0$. Portanto, $PMe(k) > f'(k)$. Os barcos de pesca são produzidos a um custo $c(k)$, em que k é o número total de barcos e $c(\cdot)$ é uma função estritamente crescente e estritamente convexa. O preço do peixe é normalizado para 1.

a) Encontre o número eficiente de barcos.

Solução

O número eficiente de barcos de Pareto é encontrado resolvendo

$$\max_k f(k) - c(k)$$

o que implica que a condição de primeira ordem para o número ideal de barcos k^0 é:

$$f'\left(k^0\right) = c'\left(k^0\right)$$

b) Resolva o problema dos produtores de barco.

Solução

Seja k_i o número de barcos que o trabalhador i emprega e assuma que há I pescadores. Portanto, $k = \sum_i k_i$. Se p é o preço de um barco de pesca, os produtores do barco resolvem

$$\max_{k} pk - c(k)$$

cuja condição ótima é

$$c'(k) = p$$

c) Partindo do pressupondo que cada barco pesqueiro captura o mesmo número de peixes, resolva o problema do pescador.

Solução

Pressupondo que cada barco pesqueiro captura o mesmo número de peixes, cada pescador resolve o problema

$$\max_{k_i} \frac{k_i}{k_i + k_{-i}} f(k) - pk_i$$

em que $k_{-i} = \sum_{j \neq i} k_j$. A condição ótima deste problema é

$$f'(k^*) \frac{k_i^*}{k^*} + \frac{f(k^*)}{k^*} \left(\frac{k_{-i}^*}{k^*} \right) = p$$

A compensação do mercado implica então que:

$$f'(k^*) \frac{k_i^*}{k^*} + \frac{f(k^*)}{k^*} \left(\frac{k_{-i}^*}{k^*} \right) = c'(k^*)$$

Como todos os nossos produtores são idênticos, o ideal envolverá $k_i^* = k_j^* \ \forall i, j$. Ou seja, todos os pescadores escolherão o mesmo número de barcos. Se houver um total de n pescadores, podemos reescrever essa condição como:

$$f'(k^*) \frac{1}{n} + \frac{f(k^*)}{k^*} \left(\frac{n-1}{n} \right) = c'(k^*)$$

Assim, o lado esquerdo é uma combinação convexa do produto marginal, $f'(k)$, e do produto médio, $\frac{f(k)}{k}$. E dado que $\frac{f(k)}{k} > f'(k)$, isto implica que $f'(k^*) \frac{1}{n} + \frac{f(k^*)}{k^*} \left(\frac{n-1}{n} \right) > f'(k^*)$. Finalmente, como $c'(k)$ é crescente em k isso implica que $k^* > k^0$, ou seja, o mercado "exagera" na pesca.

d) O fenômeno anterior, de que o mercado tenderá a usar em excesso recursos comuns, é conhecido como a tragédia dos comuns. Por exemplo, colocar uma cota no número de barcos que cada pescador pode possuir ou no número de peixes que cada barco pode capturar ajudaria a resolver o problema. Além disso, a tributação de barcos ou peixes também ajudaria a resolver o problema. Qual seria o imposto do barco apropriado?

Solução

Por exemplo, colocar uma cota no número de barcos que cada pescador pode possuir ou no número de peixes que cada barco pode pegar ajudaria a resolver o problema. Além disso, a tributação de barcos ou peixes também ajudaria a resolver o problema. O imposto do barco apropriado seria

$$t* = \frac{k^*_{-i}}{k^*}\left(\frac{f(k^*)}{k^*} - f'(k)\right)$$

27) Uma empresa de gás natural do Rio de Janeiro possui muitos dutos que passam por baixo das áreas que agora são povoadas. A empresa pode investir R\$ u na manutenção dos tubos. A manutenção afeta duas coisas. Primeiro, mais manutenção significa que a empresa de gás perderá menos gás nos canos. Suponha que o valor do gás perdido seja dado por $\frac{1}{u}$. Então, mais manutenção reduz a quantidade de gás perdido. Segundo, mais manutenção significa menos danos à terra acima dos canos. Suponha que o valor do dano à terra acima dos tubos seja dado por $3\frac{1}{u}$. Então, mais manutenção diminui a quantidade de dano à terra acima.

a) Qual é o nível socialmente ideal de manutenção, u? Qual é o valor do gás perdido? Qual é o valor do dano à terra?

Solução

O problema de otimização é

$$\min u + 3\frac{1}{u} + \frac{1}{u}$$

A condição de primeira ordem é

$$1 - \frac{4}{u^2} = 0 \quad \iff \quad u^s = 2$$

O valor do gás perdido é $\frac{1}{2}$ e o dano à terra seria de $\frac{3}{2}$.

b) Que nível de u é escolhido pela empresa de gás quando ninguém é dono da terra acima dos canos? Agora, qual é o valor do gás perdido? Qual é o valor do dano à terra? Qual é a perda de peso morto?

Solução

O problema de otimização é

$$\min u + \frac{1}{u}$$

A condição de primeira ordem é

$$1 - \frac{1}{u^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u^p = 1$$

O valor do gás perdido é 1 e o dano à terra seria de 3. O custo social é 5 e o privado é 4. Logo, a perda de peso morto é 1.

c) Suponha agora que a companhia de gás possua a terra acima dos canos. Que nível de u eles escolherão agora? Isso é ótimo? Caso contrário, calcule a perda de peso morto.

Solução

A firma minimiza

$$\min u + \frac{3}{u} + \frac{1}{u} \quad \Longleftrightarrow \quad u^p = u^s = 2$$

Não há perda de peso morto.

d) Suponha agora que João Silva, um cidadão comum, possua a propriedade acima da usina e possa processar a empresa de gás natural sem custos pelos prejuízos causados à sua propriedade. Qual nível de u será escolhido pela empresa de gás natural? Quanto será pago pela companhia de gás a João Silva?

Solução

Os processos de João Silva impõem um custo à companhia de gás de $P(u) = \frac{3}{u}$. Eles levarão isso em consideração na escolha de u, escolhendo minimizar:

$$\min u + \frac{3}{u} + \frac{1}{u} \quad \Longleftrightarrow \quad u^p = u^s = 2$$

A companhia de gás pagará a João Silva $\frac{3}{2}$ pelos danos materiais.

e) Suponha agora que os tribunais são imperfeitos (uma realidade do Brasil): para cada R$ 1 em dano real, apenas 50% do dano pode ser recuperado no tribunal. Portanto, se o verdadeiro dano a João for L, a empresa de gás pagará apenas $\frac{L}{2}$.

i) Suponha que João Silva seja o proprietário da propriedade. Qual nível de u será escolhido pela empresa de gás? Isso é eficiente? Caso contrário, qual é a perda de peso morto?

Solução

Neste caso a empresa paga somente $P(u) = \frac{1}{2}\left(3\frac{1}{u}\right)$. Portanto, eles minimizam

$$\min u + \frac{1}{u} + \frac{3}{2u}$$

A condição de primeira ordem é

$$1 - \frac{5}{2}\frac{1}{u^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad u = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

Este resultado não é eficiente, pois $u < 2$. O custo social total é

$$\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{4}{\sqrt{\frac{5}{2}}}$$

A perda de peso morto é

$$4 - \left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{4}{\sqrt{\frac{5}{2}}}\right)$$

ii) Suponha que a empresa de gás possua a propriedade. Qual o nível de u será escolhido? Isso é eficiente? Caso contrário, qual é o peso morto?

Solução

A firma minimiza

$$\min u + \frac{3}{u} + \frac{1}{u} \quad \Longleftrightarrow \quad u^p = u^s = 2$$

28) Duas usinas de energia fornecem energia para a cidade de Curitiba: uma usina de propriedade da UFPR e uma usina de propriedade de uma empresa privada. Ambas as usinas queimam carvão para produzir eletricidade e, consequentemente, produzem *smog*[1] como subproduto. A usina privada poderia reduzir sua poluição atmosférica, mas a um total de $c_M(x_M) = 5x_M^2$, em que x_M indica o número total de unidades de poluição atmosférica reduzidas pela unidade privada. A fábrica da UFPR é um pouco

[1]Resulta da combustão de grandes quantidades de carvão que produz uma mistura de fumo, dióxido de enxofre e outros compostos e em termos genéricos é nevoeiro contaminado por fumaça.

menos eficiente e seu custo total para reduzir a poluição atmosférica é dado por $c_H(x_H) = 7x_H^2 + 10x_H$. O governo de Curitiba contratou uma equipe de ambientalistas que calculou que a redução total da poluição atmosférica na cidade é de $100(x_M + x_H)$.

a) Calcule o nível de redução socialmente ideal para cada usina.

Solução

O ótimo social iguala benefício marginal ao custo marginal:

$$\begin{aligned} 10x_M = 100 &\quad\Longrightarrow\quad x_M = 100 \\ 14x_H + 10 = 100 &\quad\Longrightarrow\quad x_H = \frac{90}{14} \end{aligned}$$

b) O governo de Curitiba considera a imposição de um imposto sobre a produção de energia.

  i) Qual o valor do imposto deve ser proposto para atingir os valores de redução que você calculou acima.

  Solução

  O imposto ideal seria o negativo do benefício marginal, $\tau = -100$, por unidade não abatida ou, alternativamente, um subsídio de 100 para cada unidade diminuída.

  ii) Escreva o problema de otimização de cada firma sob o imposto e mostre que cada uma escolherá em particular a quantidade de redução socialmente ideal.

  Solução

  Cada firma escolhe

$$\max 100x_i - c_i(x_i) \quad\Longrightarrow\quad 100x_i = c_i'(x_i)$$

c) De repente, um economista é votado como prefeito de Curitiba. Ele impõe que as usinas de Curitiba devem reduzir a poluição atmosférica em 5 unidades no total. Além disso, ele declara que as empresas poderão negociar licenças de forma competitiva. Um dos antigos colegas de classe do prefeito à época da pós-graduação administra a usina privada, de modo que o prefeito concede a ela 5 autorizações e à usina da UFPR 0. Como resultado, a UFPR deverá diminuir em 5 unidades, e a usina privada (já que possui todas as licenças) não precisará diminuir.

  i) A usina da UFPR certamente desejará comprar algumas licenças da usina privada. Explique intuitivamente (sem matemática), por que essa transação pode acontecer.

  Solução

O custo marginal de redução na UFPR quando $x_H = 0$ é 10, enquanto o custo marginal da redução na usina privada é $10 \times 5 = 50$. É muito mais barato diminuir na UFPR que na usina privada no ponto em que $x_H = 0$ e $x_M = 5$.

ii) Denote o número de licenças que a usina privada possui como y_M (de modo que $x_M = 5 - y_M$) e denote o preço competitivo das permissões como p. Derive a quantidade de licenças que a usina privada acabará mantendo em função de p.

Solução

Em um mercado competitivo,

$$p = c'_M(x_M) = 10x_M \quad \Longrightarrow \quad x_M = \frac{p}{10} \quad \text{ou} \quad y_M = 5 - \frac{p}{10}$$

iii) Calcule a quantidade de licenças que a UFPR terá em função de p.

Solução

Em um mercado competitivo,

$$p = c'_H(x_H) = 14x_H + 10 \quad \Longrightarrow \quad x_H = \frac{p-10}{14} \quad \text{ou} \quad y_H = 5 - \frac{p-10}{14}$$

iv) Usando o fato de que $y_M + y_H = 5$, calcule p.

Solução

Temos:

$$5 - \frac{p-10}{14} + 5 - \frac{p}{10} = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad p = \frac{100}{3}$$

29) Gilroy, Califórnia, é a capital mundial do alho. Infelizmente, o cheiro de alho permeia todos os aspectos da vida na cidade. Existem apenas dois moradores dispostos a viver dentro dos limites da cidade, Ana e Bete. Ana ganha uma renda de 460 e Bete ganha uma renda de 440. Um vendedor está visitando a cidade, oferecendo unidades de conversão de odores que convenientemente transformam odor de alho e produzem ar puro. As preferências sobre o ar puro (C) e todos os bens de consumo privado (x_i) para o indivíduo i são dadas por:

$$u_i = 5\ln(x_i) + \ln C$$

O fornecimento total de ar limpo é dado como a soma das compras individuais: $C = C_A + C_B$. O preço do ar limpo é 2, enquanto o preço de todos os outros bens privados é 1.

a) Calcule a provisão privada de ar limpo de Ana e Bete, considerando a provisão do outro como determinado. Ou seja, resolva para C_A em função de C_B no problema de otimização de Ana e vice-versa. Você pode explicar o sinal da contribuição do outro residente nessas funções de resposta?

Solução

O problema de maximização de Ana é

$$\max_{x_A, C_A} 5\ln(x_A) + \ln(C_A + C_B)$$
$$\text{sujeito a } x_A + 2C_A \leq y_A$$

As condições de primeira ordem são

$$\frac{5}{x_A} - \lambda = 0$$
$$\frac{1}{C_A + C_B} - 2\lambda = 0$$
$$x_A + 2C_A \leq y_A$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{5}{x_A} &= \frac{1}{2(C_A + C_B)} \\
\frac{5}{y_A - 2C_A} &= \frac{1}{2(C_A + C_B)} \\
\frac{5}{460 - 2C_A} &= \frac{1}{2(C_A + C_B)} \\
10(C_A + C_B) &= 460 - 2C_A \\
12C_A &= 460 - 10C_B \\
C_A &= \frac{115}{3} - \frac{5}{6}C_B
\end{aligned}$$

Como o problema é simétrico para os dois agentes, temos:

$$C_B = \frac{110}{3} - \frac{5}{6}C_A$$

b) Se o governo não intervir, que nível de ar limpo será fornecido? Quantas unidades são fornecidas por Ana? Quantas por Bete?

Solução

Combinando as funções de reação acima

$$
\begin{aligned}
C_A &= \frac{115}{3} - \frac{5}{6}C_B \\
C_A &= \frac{115}{3} - \frac{5}{6}\left(\frac{110}{3} - \frac{5}{6}C_A\right) \\
C_A - \frac{25}{36}C_A &= \frac{115}{3} - \frac{550}{18} \\
\frac{11}{36}C_A &= \frac{140}{18} \\
C_A &= \frac{140}{18}\frac{36}{11} \\
C_A &= \frac{280}{11}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
C_B &= \frac{110}{3} - \frac{5}{6}\frac{280}{11} \\
C_B &= \frac{110}{3} - \frac{5}{6}\frac{280}{11} \\
C_B &= \frac{110}{3} - \frac{1400}{66} \\
C_B &= \frac{170}{11}
\end{aligned}
$$

Logo,

$$C = \frac{450}{11}$$

c) Qual é o nível socialmente ideal de fornecimento de ar limpo? (Você pode assumir uma função utilitária de bem-estar social). Esse valor diverge do encontrado em (b)? Explique, se houver diferença, porque isso ocorre.

Solução

O ótimo social é dado pela condição de Samuelson

$$\frac{\frac{1}{C}}{\frac{5}{x_A}} + \frac{\frac{1}{C}}{\frac{5}{x_B}} = \frac{2}{1} \quad \Longrightarrow \quad x_A + x_B = 10C$$

Usando a restrição orçamentária, temos:

$$
\begin{aligned}
x_A + x_B + 2C &= 900 \\
12C &= 900
\end{aligned}
$$

$$C = 75$$

d) Suponha que o governo local esteja insatisfeito com o nível de provisão privada. O governo tributa tanto Ana quanto em Bete em R$ 30, por meio de um imposto lump-sum (a renda líquida de impostos é efetivamente reduzida para 440 e 410, respectivamente) para fornecer 30 unidades de ar limpo. Tanto Ana quanto Bete são livres para comprar unidades adicionais de ar limpo, se acharem particularmente ideal fazê-lo. Qual é o nível total de ar limpo fornecido? Explique claramente o impacto da tributação pelo governo local na provisão privada de cada residente. Como esta resposta se compara a encontrada em (b)?

Solução

Agora, temos:

$$C_A = \frac{460 - 30}{12} - \frac{5}{6}(C_B + 30)$$

e

$$C_B = \frac{440 - 30}{12} - \frac{5}{6}(C_A + 30)$$

Combinando as equações acima, encontramos:

$$C_A = \frac{115}{11} < \frac{280}{11}$$
$$C_B = \frac{5}{11} < \frac{170}{11}$$

A quantidade total de ar limpo é

$$C = 30 + \frac{115}{11} + \frac{5}{11} = \frac{450}{11}$$

A resposta é a mesmo que na parte (b). A provisão governamental de ar limpo "expulsa completamente" o ar limpo que seria fornecido pelos agentes.

30) Os Simpsons e os Flandres são vizinhos de lado. Os Simpsons gostam de ouvir música muito alto. Os Flandres preferem sossego. Usando x para denotar o volume da música dos Simpsons em decibéis e usando y_S e y_F para denotar seu consumo mensal de outros bens (em dólares), as preferências das famílias

Simpsons e Flandres são descrito pelas seguintes funções de utilidade:

$$u_S(x, y_S) = y_S + 9x - \frac{1}{2}x^2$$
$$u_F(x, y_F) = y_F - x^2$$

A renda mensal familiar é de R$ 3000. O custo de ouvir música alta é de R$ 3. Determine o volume eficiente de Pareto da música dos Simpsons.

Solução

A condição ótima diz que

$$9 - x - 2x = 3 \quad \Longrightarrow \quad x^* = 2$$

31) Ana, Bete e Carla se preocupam apenas com o consumo de eletricidade e um conjunto de bens agregados. Além disso, Ana deseja consumir eletricidade apenas pela manhã, Bete deseja consumir eletricidade somente à tarde, e Carla deseja consumir eletricidade somente à noite. Suas taxas marginais de substituição entre o bem composto e o consumo de eletricidade são dadas pelas expressões

$$TMS_A = 10 - x_A \quad TMS_B = 8 - x_B \quad TMS_C = 6 - x_C$$

em que x_i indica o número de unidades de eletricidade que i consome (apenas na hora do dia preferida). A eletricidade é produzida por uma tecnologia com retorno constante de escala: 18 unidades do bem composto produzirão uma unidade de eletricidade durante o dia e a noite - ou seja, manhã, tarde e noite são produtos conjuntos e produzem uma unidade a qualquer hora do dia. O consumo de eletricidade de cada pessoa é monitorado por um medidor de energia.

a) Determine o nível ótimo de produção e a alocação ótima de Pareto de eletricidade.

Solução

A condição ótima diz que

$$10 - x + 8 - x + 6 - x = 18 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

b) Suponha que a eletricidade seja produzida pela cidade. A cidade deseja cobrar preços diferentes em diferentes horários do dia para maximizar o bem-estar do consumidor. Obviamente, a cidade também terá que cobrir o custo de produção. Quais os preços que deve cobrar a cada hora do dia? Explique como se pode dizer que esses preços maximizam o bem-estar.

Solução

Os preços de Lindhal levam as pessoas a escolherem a mesma quantidade (Pareto) dos bens. Logo, em $x = 2$,

$$p_A = 8, \quad p_B = 6, \quad p_C = 4$$

32) Alice é uma musicista; Beto não é. Seja x o número de horas por dia que Alice dedica a escrever, tocar e gravar sua música. Alice tem um custo de R\$ 4 por cada hora que ela gasta produzindo música. Permita que y_A e y_B denotem os gastos em dólares de Alice e Beto em bens que não sejam música. Cada um possui R\$ 100 de renda por dia. As preferências de Alice e Beto pela música de Alice são descritas pelas funções de utilidade

$$u_A(x, y_A) = \begin{cases} y_A + 8x - \dfrac{1}{2}x^2 & x \leq 8 \\ y_A + 32 & x \geq 8 \end{cases}$$

e

$$u_B(x, y_B) = \begin{cases} y_B + 12x - \dfrac{1}{2}x^2 & x \leq 12 \\ y_B + 72 & x \geq 12 \end{cases}$$

a) Quanto Alice produzirá se ela nem souber que Beto existe?

Solução

A taxa marginal de substituição de Alice é

$$8 - x = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = 4$$

b) Suponha que Alice produza a quantidade de música em (a) e Beto tenha encontrado uma maneira de piratear a música baixando-a do computador de Alice. Alice não tem como impedir Beto dessa pirataria de “carona”. Quanto excedente de consumidor Alice e Beto obtêm? (Não se esqueça que custa a Alice R\$ 4 por cada hora que ela dedica à produção de música.)

Solução

Assuma que $\mathring{u}_A = \mathring{y}_A$ e $\mathring{u}_B = \mathring{y}_B$ em $x = 0$. Em $x = 4$, temos:

$$u_A = \mathring{y}_A + 8(4) - \frac{1}{2}(4^2) - 4(4) = \mathring{y}_A + 8$$

$$u_B = \mathring{y}_B + 12(4) - \frac{1}{2}(4^2) = \mathring{y}_B + 40$$

Portanto,

$$EC_A = 8, \quad EC_B = 40 \quad \therefore \quad EC = 48$$

c) Qual é a quantidade de música de Pareto para Alice produzir? Qual é o excedente total nesse nível de música?

Solução

A condição ótima diz que

$$(8-x) + (12-x) = 4 \quad \text{se} \quad x \leq 8 \quad \Longrightarrow \quad x^* = 8$$

Assuma que $\mathring{u}_A = \mathring{y}_A$ e $\mathring{u}_B = \mathring{y}_B$ em $x = 0$. Em $x = 4$, temos:

$$u_A = \mathring{y}_A + 8(8) - \frac{1}{2}(8^2) - 4(8) = \mathring{y}_A$$
$$u_B = \mathring{y}_B + 12(8) - \frac{1}{2}(8^2) - 4(8) = \mathring{y}_B + 64$$

Portanto,

$$EC_A = 0, \quad EC_B = 64 \quad \therefore \quad EC = 64$$

d) Agora, suponha que Beto e Alice concordem com um pagamento de transferência t de Beto para Alice, em troca de Alice produzir a quantidade de música de Pareto. Determine a faixa de pagamentos que geram alocações principais e determine o excedente do consumidor de cada um em função de t.

Solução

Se Beto paga t para Alice produzir em $x = 8$, então:

$$u_A = \mathring{y}_A + t \quad \therefore \quad u_A \geq \mathring{u}_A \quad \Longrightarrow \quad t \geq 8$$
$$u_B = \mathring{y}_B + 64 - t \quad \therefore \quad u_B \geq \mathring{u}_B \quad \Longrightarrow \quad t \leq 24$$

33) A cervejaria R utiliza água do Rio Barigui em suas operações de fabricação de cerveja. Recentemente, a empresa P abriu uma fábrica a montante da cervejaria. As operações de fabricação da empresa P poluem a água do rio: seja x o número de galões de poluente que a empresa P despeja no rio todos

os dias. Os lucros da cervejaria são reduzidos em x^2 reais por dia, porque é esse o custo da cervejaria para limpar os poluentes da água que usa. O nível de operação maximizador de lucro da empresa P envolve o despejo diário de 30 galões de poluente no rio. Alterar suas operações para despejar menos poluente reduz o lucro da empresa P: especificamente, o lucro diário da empresa P é reduzido pela quantidade $\frac{1}{2}(30 - x)^2$ se despejar x galões de poluente por dia. Não há leis que restrinjam a quantia que a empresa P possa poluir a água e nenhuma lei exigindo que a empresa P compense a cervejaria pelos custos impostos por sua poluição. Determine o nível eficiente de poluição. Se a eficiência exigir que $x < 30$, determine a faixa de barganhas que as duas firmas devem alcançar – ou seja, os valores máximo e mínimo em reais que a cervejaria deve pagar à empresa P em troca do acordo da empresa P em despejar apenas x (menos de 30) galões por dia.

Solução

Seja K_P a receita da empresa P quando $x = 30$ e K_R a receita da empresa R quando $x = 0$. Portanto,

$$\pi_P = K_P - \frac{1}{2}(30 - x)^2$$

e

$$\pi_R = K_R - x^2$$

A eficiência requer que o lucro total seja maximizado, isto é, $\pi = K_P + K_R - \frac{1}{2}(30 - x)^2 - x^2$. Assim,

$$30 - x - 2x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x^* = 10$$

Com base nisso,

$$\pi_P(10) = K_P - 200$$

e

$$\pi_R(10) = K_R - 100$$

e

$$\pi_P(30) = K_P$$

e

$$\pi_R(30) = K_R - 900$$

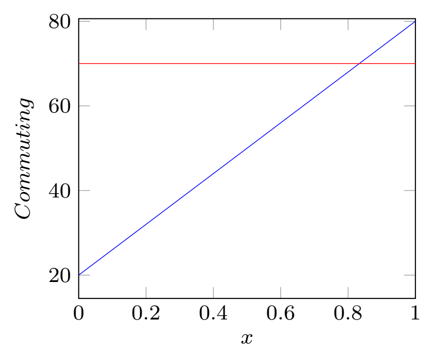
Se t é a quantia que a cervejaria R paga à empresa P, então $t \geq 200 = \pi_P(30) - \pi_P(10)$ e $t \leq 800 = \pi_R(10) - \pi_R(30)$.

34) Há um grande número de passageiros que decidem usar o carro ou o metrô. O deslocamento de trem ao trabalho leva 70 minutos, independentemente do número de passageiros que tomam o trem. O deslocamento de carro leva $C(x) = 20 + 60x$ minutos, em que x é a proporção de passageiros que usa carro para trabalho com $0 \leq x \leq 1$.

a) Trace as curvas do tempo de deslocamento de carro e o tempo de deslocamento de trem em função da proporção de usuários de automóveis. Em seguida, determine a decisão de cada viajante $d(x)$ sobre usar o carro ou o trem em função do tempo $C(x)$.

Solução

Figure 3. Curvas de tempo de deslocamento



b) Qual é a proporção de passageiros que tomam o carro se todos estão tomando sua decisão de forma livre e independente, a fim de minimizar o tempo de deslocamento?

Solução

A proporção de usuários de carros, se forem feitas escolhas independentes, será tal que os tempos de viagem de metrô e de carro sejam equivalentes. Portanto,

$$70 = 20 + 60x_m \quad \Longrightarrow \quad x_m = \frac{5}{6}$$

Essa solução corresponde ao ponto de interseção das duas curvas.

c) Qual é a proporção de usuários de carro que minimiza o tempo total de deslocamento?

Solução

O tempo total de deslocamento é $(20 + 60x)x + 70(1 - x)$. Assim, a condição ótima implica:

$$20 + 120x - 70 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = \frac{5}{12}$$

d) Compare isso com a sua resposta dada na parte (b). Interprete a diferença. Qual é o tamanho da perda de peso morto da externalidade?

Solução

Temos que

$$T_m = \left(20 + 60\frac{5}{6}\right)\frac{5}{6} + 70\left(\frac{1}{6}\right) = 70$$

e

$$T_0 = \left(20 + 60\frac{5}{12}\right)\frac{5}{12} + 70\left(\frac{7}{12}\right) = 59,58$$

A diferença é $T_m - T_0 = 10,41$. Este valor representa a perda de peso morto.

e) Explique como um pedágio poderia atingir a alocação eficiente de passageiros entre trem e carro e o benefício para todos.

Solução

Suponha que os passageiros atribuam valor monetário ao seu tempo de viagem. Demora 45 minutos por usuário de carro e 70 por usuário de trem. Então, um pedágio que vale 25 minutos de deslocamento pode induzir os usuários a trocar de carro para metrô, porque o valor do pedágio excede os benefícios de um tempo de viagem mais curto. Dadas as informações sobre o valor monetário do tempo de viagem, o valor do pedágio pode ser calculado para que a proporção de passageiros que ainda considerem benéfico viajar de carro seja exatamente igual ao nível social ideal.

35) Na ilha de Pago Pago existem dois lagos e 20 pescadores. Cada pescador pode pescar em qualquer lago e manter a captura média em seu lago específico. No lago x, o número total de peixes capturados é dado por

$$F^x = 10\ell_x - \frac{1}{2}\ell_x^2$$

em que ℓ_x é o número de pessoas que estão no lago. Para o lago y, temos:

$$F^y = 5\ell_y$$

a) Sob essa organização da sociedade, qual será o número total de peixes capturados?
Solução
Primeiro, mostre como a pesca depende da alocação de trabalho:

$$\ell_x + \ell_y = 20 \quad \Longrightarrow \quad \ell_y = 20 - \ell_x$$

Assim,

$$\begin{aligned} F^T &= F^x + F^y \\ &= 10\ell_x - \frac{1}{2}\ell_x^2 + 5\ell_y \\ &= 10\ell_x - \frac{1}{2}\ell_x^2 + 5(20 - \ell_x) \\ &= 5\ell_x - 0,5\ell_x^2 + 100 \end{aligned}$$

Igualando a pesca média em cada lago, temos:

$$\begin{aligned} \frac{F^x}{\ell_x} &= \frac{F^y}{\ell_y} \\ 10 - 0,5\ell_x &= 5 \quad \therefore \quad \ell_x = 10, \quad \ell_y = 10 \end{aligned}$$

b) O chefe de Pago Pago, depois de ler um livro de economia, acredita que é possível aumentar o número total de peixes capturados restringindo o número de pessoas autorizadas a pescar no lago x. Qual deve ser o número de indivíduos permitido pescar no lago x, a fim de maximizar a captura total?
Solução
O problema é

$$\max 5\ell_x - 0,5\ell_x^2 + 100$$

cuja condição de primeira ordem é

$$\frac{dF^T}{d\ell_x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 5 - \ell_x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ell_x = 5, \quad \ell_y = 15, \quad F^T = 112,5$$

c) Ao se opor à coerção, o chefe decide exigir uma licença de pesca para o lago x. Se o procedimento de licenciamento é a alocação ideal de mão-de-obra, qual deve ser o custo de uma licença (em termos de peixe)?

Solução

Temos:

$$F^x_{\text{caso 1}} = 10(10) - 0,5(10)^2 = 50 \quad \Longrightarrow \quad \overline{F^x_{\text{caso 1}}} = \frac{50}{10} = 5$$
$$F^x_{\text{caso 2}} = 10(5) - 0,5(5)^2 = 35,7 \quad \Longrightarrow \quad \overline{F^x_{\text{caso 2}}} = \frac{35,7}{5} = 7,5$$

Portanto, a licença no lago x deveria ser de 2,5.

36) Considere uma economia com dois consumidores, B e J. Existe um bem público nesta economia na forma de sirenes de enchente. A demanda de B por sirenes é dada por $P = 10 - Q$, e a demanda de J por sirenes é $P = 8 - 2Q$. O custo marginal para fornecer sirenes é constante, $CMg = 9$. Quantas sirenes serão fornecidas no mercado?

Solução

A curva de demanda de mercado é

$$P = 10 - Q \quad \text{se} \quad 0 < P < 8$$
$$P = 18 - 3Q \quad \text{se} \quad 8 \leq P < 18$$

Assim, ao custo marginal de $CMg = 9$, a demanda será $Q = 3$.

37) Para a função de demanda linear $x = a - bp$, calcule a perda de peso morto da introdução de um imposto t sobre mercadorias quando o custo marginal de produção for $CMg = 2x$. Como a perda de peso morto é afetada pelas alterações em a e em b? Como uma mudança em b afeta a elasticidade da demanda no equilíbrio sem tributação? Qual a carga tributária paga por consumidores e produtores?

Solução

A curva de oferta para a firma competitiva é em geral dada por: $p = c'(y)$ se $p \geqq \dfrac{c_v(y(p))}{y(p)}$ e $y = 0$ se $p \leqq \dfrac{c_v(y(p))}{y(p)}$. Ou seja, a curva de oferta coincide com a porção inclinada para cima da curva de custo marginal, desde que o preço cubra o custo variável médio, e a curva de oferta é zero se o preço for menor do que o custo variável médio. Se é no longo prazo, não há custo fixo e, portanto, o custo variável médio coincide com o custo médio; se é no curto-prazo, há diferença. Assim, a curva de oferta será

$$CMg = 2x \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{p}{2}$$

Situação antes do imposto:

$$\begin{aligned} a - bp &= \frac{p}{2} \\ a &= \frac{p}{2} + bp \\ a &= p\left(\frac{2b+1}{2}\right) \\ p^* &= \frac{2a}{2b+1} \end{aligned}$$

Como consequência:

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{\frac{2a}{2b+1}}{2} \\ &= \frac{a}{2b+1} \end{aligned}$$

Após o imposto, $p_d = p_s + t$:

$$\begin{aligned} a - bp_d &= \frac{p_s}{2} \\ a - b(p_s + t) &= \frac{p_s}{2} \\ a - bp_s - bt &= \frac{p_s}{2} \\ a - bt &= \frac{p_s}{2} + bp_s \\ p_s^* &= \frac{2(a - bt)}{2b+1} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} p_d^* &= \frac{2(a - bt)}{2b+1} + t \\ p_d^* &= \frac{2a + t}{2b+1} \end{aligned}$$

e como consequência:

$$\begin{aligned} x_t^* &= \frac{p_s^*}{2} \\ x_t^* &= \frac{\frac{2(a-bt)}{2b+1}}{2} \\ x_t^* &= \frac{a - bt}{2b+1} \end{aligned}$$

A variação observada no excedente do consumidor será:

$$\begin{aligned}
\Delta CS &= -\frac{(x^* - x_t^*)(p_d^* - p^*)}{2} \\
&= -\frac{\left(\frac{a}{2b+1} - \frac{a-bt}{2b+1}\right)\left(\frac{2a+t}{2b+1} - \frac{2a}{2b+1}\right)}{2} \\
&= -\frac{\left(\frac{bt}{2b+1}\right)\left(\frac{t}{2b+1}\right)}{2} \\
&= -\frac{bt^2}{2(2b+1)^2}
\end{aligned}$$

A variação observada no excedente do produtor será:

$$\begin{aligned}
\Delta PS &= -\frac{(x^* - x_t^*)(p^* - p_s^*)}{2} \\
&= -\frac{\left(\frac{a}{2b+1} - \frac{a-bt}{2b+1}\right)\left(\frac{2a}{2b+1} - \frac{2(a-bt)}{2b+1}\right)}{2} \\
&= -\frac{\left(\frac{bt}{2b+1}\right)\left(\frac{2bt}{2b+1}\right)}{2} \\
&= -\frac{2b^2t^2}{(2b+1)^2}
\end{aligned}$$

O custo do imposto para o consumidor é $p_d^* - p^* = \dfrac{t}{2b+1}$. O custo do imposto para o produtor é $p^* - p_s^* = \dfrac{2bt}{2b+1}$. Os consumidores estão pagando $\dfrac{p_d^* - p^*}{t} = \dfrac{1}{2b+1}\%$; os produtores, $\dfrac{p^* - p_s^*}{t} = \dfrac{2b}{2b+1}\%$. Também sabemos que:

$$\eta_D = -b\frac{\left(\frac{2a}{2b+1}\right)}{\left(\frac{a-bt}{2b+1}\right)} = -\frac{2ab}{(a-bt)}$$

$$\eta_S = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{2a}{2b+1}\right)}{\left(\frac{a-bt}{2b+1}\right)} = \frac{a}{a-bt}$$

O peso morto é dado abaixo:

$$DWB = \frac{t\left(\dfrac{a}{2b+1} - \dfrac{a-bt}{2b+1}\right)}{2} = \frac{bt^2}{2(2b+1)}$$

O peso morto não é alterado quando o parâmetro a muda. O peso morto é alterado quando o parâmetro b muda, como segue abaixo:

$$\frac{\partial DWB}{\partial b} = \frac{t^2}{2(2b+1)^2}$$

38) Um bem é negociado em um mercado competitivo. A função de demanda é dada por $X = 75 - 5P$. Um imposto específico de valor $t = 2$ é introduzido. Determine a incidência tributária se a oferta é dada por $Y = 2,5P$. Qual a perda de peso morto?

Solução

Igualando demanda e oferta obtemos:

$$75 - 5P = 2,5P \quad \Longleftrightarrow \quad P^* = 10, \quad X^* = 25$$

Após a introdução do imposto temos:

$$75 - 5(p_s + 2) = 2,5p_s \quad \Longleftrightarrow \quad p_s^* = 8,7, \quad p_d^* = 10,7, \quad X^* = 21,50$$

O custo do imposto para o consumidor é $p_d^* - p^* = 10,7 - 10 = 0,7$. O custo do imposto para o produtor é $p^* - p_s^* = 10 - 8,7 = 1,3$. Os consumidores estão pagando $\frac{p_d^* - p^*}{t} = \frac{0,7}{2} = 35\%$; os produtores, $\frac{p^* - p_s^*}{t} = \frac{1,3}{2} = 65\%$. O peso morto é dado abaixo:

$$DWB = \frac{2(25 - 21,50)}{2} = 3,50$$

39) Suponha que a função de demanda seja dada por $x = p^{-\varepsilon_d}$ e a função de oferta por $y = p^{\varepsilon_s}$. Encontre o preço de equilíbrio. Qual é o efeito no preço de equilíbrio da introdução de um imposto de $t = \frac{1}{10}$ se $\varepsilon_d = \varepsilon_s = \frac{1}{2}$? Descreva como a incidência do imposto é dividida entre consumidores e produtores.

Solução

Sabemos que $\eta_D = -\frac{1}{2}$ e $\eta_S = \frac{1}{2}$. Assim, a incidência de impostos nos consumidores é dada por

$$\frac{1/2}{1/2 - (-1/2)} = 50\%$$

Portanto, os produtores arcam com 50% do imposto. Usando a ideia de compensação de mercado, temos:

$$p^{-1/2} = p^{1/2} \quad \iff \quad p^* = 1, \quad x^* = y^* = 1$$

Após a introdução do imposto temos:

$$(p_s + 0.1)^{-1/2} = p_s^{1/2} \quad \iff \quad p_s^* = 0.95, p_d^* = 1.05$$

Os consumidores estão pagando $\frac{p_d^* - p^*}{t} = \frac{0.05125}{0.1} = 51,25\%$; os produtores, $48,75\%$.

40) Encontre a incidência tributária de um imposto de R\$ 4 por unidade em um mercado perfeitamente competitivo no qual a curva de demanda é $Q^d = 56 - 3p^d$ e a curva de oferta é $Q^s = p^s - 8$ por meio da compensação de mercado. Verifique que a resposta é a mesma usando as elasticidades preço da demanda e preço da oferta.

Solução

Igualando demanda e oferta obtemos:

$$56 - 3p = p - 8 \quad \iff \quad p^* = 16, \quad x^* = 8$$

Após a introdução do imposto temos:

$$56 - 3(p_s + 4) = p_s - 8 \quad \iff \quad p_s^* = 13, \quad p_d^* = 17, \quad x^* = 5$$

O custo do imposto para o consumidor é $p_d^* - p^* = 17 - 16 = 1$. O custo do imposto para o produtor é $p^* - p_s^* = 16 - 13 = 3$. Os consumidores estão pagando $\frac{p_d^* - p^*}{t} = \frac{1}{4} = 25\%$; os produtores, $\frac{p^* - p_s^*}{t} = \frac{3}{4} = 75\%$.

41) Suponha que a função dispêndio de um consumidor seja dada por $e(p_x, p_y, u) = p_x u - 16\frac{(p_x)^2}{p_y}$. Suponha que o preço do bem x seja 1 e o preço do bem y seja 1. O governo decide tributar o bem y por meio de um imposto específico de R\$ 1 sobre o bem y. A utilidade inicial é $u = 36$.

a) Encontre as funções de demanda Hicksianas pelos bens x e y.

Solução

$$\frac{\partial e(p_x, p_y, u)}{\partial p_x} \equiv x^h(p_x, p_y, u) = u - 32\frac{p_x}{p_y}$$
$$\frac{\partial e(p_x, p_y, u)}{\partial p_y} \equiv y^h(p_x, p_y, u) = 16\left(\frac{p_x}{p_y}\right)^2$$

b) Qual o custo do imposto para o consumidor?

Solução

Com $p_x = p_y = 1$ e $t = 0$, dado o nível inicial de utilidade de 36, o gasto do consumidor era de

$$e(1, 1, 36) = 36 - 16\frac{1}{1} = 20$$

Com $p_x = 1$ e $p_y = 2$ por causa do imposto $t = 1$, dado o nível inicial de utilidade de 36, o gasto do consumidor será de

$$e(1, 2, 36) = 36 - 16\frac{1}{2} = 28$$

O custo para o consumidor será de

$$e(p_x, p_y + t, u) - e(p_x, p_y, u) = 28 - 20 = 8$$

c) Qual a receita dos impostos para o governo?

Solução

A demanda pelo bem y é

$$y^h(p_x, p_y, u) = 16\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4$$

A receita é ty^h. Logo a receita é 4.

42) Como o ônus de um imposto de 100% (expresso como uma fração do preço "antes do imposto") seria dividido entre compradores e vendedores em um mercado perfeitamente competitivo no qual a quantidade demandada é $Q_d = 75 - 2(p_d)^2$ e a oferta é $Q_s = (p_s)^2$? Prove seu resultado de duas formas distintas.

Solução

Igualando demanda e oferta obtemos:

$$75 - 2p^2 = p^2 \quad \Longleftrightarrow \quad p^* = 5, \quad x^* = 25$$

Após a introdução do imposto temos:

$$75 - 2(p_s(1+t))^2 = p_s^2 \quad \Longleftrightarrow \quad p_s^* = \frac{5\sqrt{3}}{3}, \quad p_d^* = \frac{10\sqrt{3}}{3}, \quad x^* = \frac{25}{3}$$

Portanto, o cálculo explícito mostra que o imposto reduz o preço recebido pelos vendedores em $5 - 2.886 = 2.114$ e aumenta o preço pago pelos compradores em cerca de $5.573 - 5 = 0.573$. Portanto, os compradores pagam cerca de 21,30% do imposto (dado que $\frac{0.573}{0.573 + 2.114}$). Outra forma é usar as elasticidades. Sabemos que

$$\eta_S = 2p_s\left(\frac{p_s}{p_s^2}\right) = 2$$
$$\eta_D = -4p_d\left(\frac{p_d}{75 - 2p_d^2}\right) = -4\left(\frac{p_d^2}{75 - p_d^2}\right)$$

Mas lembre-se que $p_d = p_s(1+t)$ e que, em equilíbrio, $Q_d = Q_s = (p_s)^2$. Assim, os consumidores arcam com

$$\frac{2}{2 + 4(1+t)^2\frac{1}{1+t}} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$$

43) Qual seria a incidência aproximada de um imposto unitário de R\$ 2 cobrado dos vendedores em um mercado perfeitamente competitivo, no qual a quantidade do bem demandado pelos compradores é $Q_d = 60 - 2(p_d)^2$ e a oferta é $Q_s = 10p_s - 36$? Prove seu resultado de duas formas distintas.

Solução

Igualando demanda e oferta obtemos:

$$60 - 2p^2 = 10p - 36 \quad \Longleftrightarrow \quad p^* = \frac{\sqrt{217} - 5}{2}$$

Após a introdução do imposto temos:

$$60 - 2(p_s + t) = 10(p_s) - 36 \quad \Longleftrightarrow \quad p_s^* = \frac{\sqrt{257} - 9}{2}, \quad p_d^* = \frac{\sqrt{257} - 5}{2}$$

O custo do imposto para o consumidor é $p_d^* - p^* = \frac{\sqrt{257} - 5}{2} - \frac{\sqrt{217} - 5}{2} = \frac{\sqrt{257} - \sqrt{217}}{2}$. O custo do imposto para o produtor é $p^* - p_s^* = \frac{\sqrt{217} - 5}{2} - \frac{\sqrt{257} - 9}{2} = \frac{\sqrt{217} - \sqrt{257} + 4}{2}$. Os consumidores estão pagando $\frac{p_d^* - p^*}{t} = \frac{\sqrt{257} - \sqrt{217}}{4} = 32,50\%$; os produtores, $\dfrac{p^* - p_s^*}{t} = \dfrac{\sqrt{217} - \sqrt{257} + 4}{4} = 67,50\%$.

44) Qual é a incidência de um imposto de 100% (calculado como uma porcentagem do preço líquido [antes do imposto]) nos cortes de cabelo, se o mercado de cortes de cabelo for perfeitamente competitivo, se a curva de oferta no mercado tiver a equação

$$Q_s = \sqrt{\frac{p_s}{2}}$$

e a curva de demanda tiver a equação

$$Q_d = \frac{16}{p_d}$$

Solução

Então,

$$p_d = (1+t)p_s$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{p_s}{2}} &= \frac{16}{p_d} \\
\sqrt{\frac{p_s}{2}} &= \frac{16}{(1+t)p_s} \\
\frac{p_s}{2} &= \frac{256}{(1+t)^2 p_s^2} \\
p_s^3 &= \frac{512}{(1+t)^2} \\
p_s &= \frac{8}{(1+t)^{2/3}}
\end{aligned}$$

Quando $t = 0$, temos $p_d = p_s = 8$. Quando $t = 1$, temos $p_d = 10,08$ e $p_s = 5,04$. O preço pago pelos compradores subiu $10,08 - 8 = 2,08$ e o preço recebido pelos vendedores diminuiu $8 - 5,05 = 2,95$, para que os compradores paguem aproximadamente 40% do imposto.

45) A curva de demanda do mercado para o bem tem a equação $Q^d = 15 - p^d$, em que p^d é o preço pago pelos compradores e Q^d é a quantidade demandada. Existe uma única firma que pode produzir tanto ou tão pouco quanto quer, a um custo constante de R$ 5 por unidade. Existem muitas outras empresas. Mas cada outra empresa só pode produzir o bem a um custo de R$ 8 por unidade. [Essas outras empresas também produzem sob retornos constantes

de escala] A única empresa de baixo custo define seu preço para maximizar seu lucro, sabendo que não venderá nada do bem se cobrar um preço mais alto do que as outras empresas. [Você pode assumir que todos os clientes compram da empresa de baixo custo se a empresa de baixo custo cobrar exatamente o mesmo preço que as empresas de alto custo.] Qual seria a incidência de um imposto unitário de R$ 6 nesse mercado?

Solução

A única empresa gostaria de maximizar seus lucros cobrando o preço do monopólio. Mas precisa se preocupar com as outras empresas de alto custo. Existem muitas outras firmas, cada uma com um custo de $8 + t$ (onde $t = 0$ inicialmente e depois $t = 6$). Portanto, o monopólio deve cobrar um preço de 8 ou menos inicialmente e 14 ou menos quando o imposto é cobrado: se cobrar um preço mais alto do que os custos de alto preço da empresa, essa empresa entrará na indústria. Inicialmente, o lucro de monopólio será

$$\pi^0 = (15 - p^d)(p^d - 5)$$

A condição de primeira ordem implicará

$$20 - 2p^d = 0 \quad \iff \quad p^d = 10$$

Mas um preço de 10 é muito alto! A empresa será prejudicada por concorrentes de alto custo, que podem lucrar se puderem cobrarem um preço de 8 ou mais. Portanto, na ausência de um imposto, a melhor estratégia (potencial) do monopólio é cobrar um preço de 8. Esse preço mantém a concorrência. Qualquer preço mais alto levaria à entrada dos concorrentes. Qualquer preço mais baixo reduzirá o lucro. Com um imposto de R$ 6, o custo do monopólio sobe para R$ 11. Seu lucro se torna

$$\pi^1 = (15 - p^d)(p^d - 11)$$

A condição de primeira ordem implicará

$$26 - 2p^d = 0 \quad \iff \quad p^d = 13$$

Mas o monopólio ainda deve se preocupar com a entrada potencial. Os concorrentes de alto custo agora têm custos unitários de 14, uma vez que o imposto de 6 é adicionado aos custos de produção de 8 por unidade. O monopólio está a salvo da concorrência se cobrar seu lucro máximo de 13, uma vez que é maior que os custos de seus rivais. Portanto, a introdução do imposto de 6 aumenta o preço do monopólio de 8 para 13. Os compradores suportam $\frac{5}{6}$ do imposto.

46) Qual é a incidência de um imposto de 100% (calculado como uma porcentagem do preço líquido [antes do imposto]) nos cortes de cabelo, se o mercado de cortes de cabelo for perfeitamente competitivo, se a curva de oferta no mercado tiver a equação $Q_s = (p_s)^3$ e a curva de demanda for $Q_d = \dfrac{1}{(p_d)^2}$? Utilize a aproximação da incidência tributária por meio das elasticidades. Quão boa é essa aproximação?

Solução

Então,

$$p_d = (1+t)p_s$$

Assim,

$$\frac{1}{[(1+t)p_s]^2} = p_s^3$$
$$p_s = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/5} \quad \Longrightarrow \quad p_d = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{1/5}$$

Quando $t = 0$, temos $p_d = p_s = 1$. Quando $t = 1$, temos $p_d = 1,52$ e $p_s = 0,76$. Os compradores pagam aproximadamente $\dfrac{1,52-1}{0,76} = 68\%$ do imposto. Usando as elasticidades encontramos que os consumidores pagam $\dfrac{3}{2+3} = 60\%$ do imposto.

47) Qual a carga tributária paga pelos consumidores e ofertantes no caso de um imposto de R$ 6 por unidade vendida se a curva de oferta for $Q_s = 2p_s$ e a curva de demanda for $Q_d = \dfrac{288}{p_d}$?

Solução

Igualando demanda e oferta obtemos:

$$\frac{288}{p} = 2p \quad \Longleftrightarrow \quad p^* = 12$$

Após a introdução do imposto temos:

$$\frac{288}{p_s + t} = 2p_s \quad \Longleftrightarrow \quad p_s^* = 3\sqrt{17} - 3, \quad p_d^* = 3\sqrt{17} + 3$$

O custo do imposto para o consumidor é $p_d^* - p^* = 3\sqrt{17} + 3 - 12 = 3\sqrt{17} - 9$. O custo do imposto para o produtor é $p^* - p_s^* = 12 - 3\sqrt{17} - 3 = 3\sqrt{17} + 9$. Os consumidores estão pagando $\dfrac{p_d^* - p^*}{t} = \dfrac{3\sqrt{17}-9}{6} = \dfrac{\sqrt{17}}{2} - \dfrac{3}{2} = 56,16\%$; os produtores, $\dfrac{p^* - p_s^*}{t} = \dfrac{3\sqrt{17}+9}{6} = \dfrac{\sqrt{17}+9}{2} + \dfrac{3}{2} = 43,84\%$.

48) Suponha que a função dispêndio de um consumidor seja dada por $e(p_f, p_c, u) = \sqrt{p_f p_c} u$. Suponha que o preço do bem f seja 4 e o preço do bem c seja 4. A utilidade sem impostos é $u^0 = 18$ e após um imposto de 125% é de $u^1 = 12$.

a) Encontre as funções de demanda Hicksianas pelos bens f e c.

Solução

$$\frac{\partial e(p_f, p_c, u)}{\partial p_f} \equiv f^h(p_x, p_y, u) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_c}{p_f}} u$$
$$\frac{\partial e(p_f, p_c, u)}{\partial p_c} \equiv c^h(p_f, p_c, u) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p_f}{p_c}} u$$

b) Qual o custo do imposto para o consumidor?

Solução

O custo é dado por

$$e(4, 9, 18) - e(4, 4, 18) = 108 - 72 = 36$$

c) Qual a receita dos impostos para o governo?

Solução

A demanda pelo bem c é

$$c^h = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{9}}(18) = 6$$

A receita do governo é $tc^h = 5 \times 6 = 30$.

49) Suponha um imposto sobre roupas no valor de R\$ 1. O preço original das roupas era de R\$ 1 e o da comida era de R\$ 1. A renda do consumidor era de R\$ 1000. As preferências do consumidor pode ser representadas pela função de utilidade $U = F + 40\sqrt{C}$, em que C é a quantidade consumida de roupas e F a quantidade consumida de alimentos. Sendo p_C o preço das roupas incluindo os impostos, quanto o governo teria que compensar o consumidor pelos danos causados pelo imposto?

Solução

A função de utilidade é quase-linear. Logo, a demanda compensada é igual à demanda não-compensada. Assim,

$$C = \frac{400}{p_C^2}$$

Sem o imposto, a demanda por roupas é

$$C_{si} = \frac{400}{1^2} = 400$$

Então, o consumidor tem R\$ 600 para gastar em comida e sua utilidade é

$$U_{si} = 600 + 40\sqrt{400} = 1400$$

Com o imposto, a demanda por roupas é

$$C_{ci} = \frac{400}{2^2} = 100$$

Se ele tem M reais para gastar, ele gastará R\$ 200 em roupas e terá $M - 200$ para gastar em comida. Então, sua utilidade será

$$U_{ci} = M - 200 + 40\sqrt{100} = M + 200$$

Para compensar o indivíduo, as utilidades devem ser iguais, isto é,

$$1400 = M + 200 \quad \Longleftrightarrow \quad M = 1200$$

Como a renda é de 1000, o governo precisa compensar o consumidor com 200.

50) Suponha que a função que representa as preferências de um consumidor seja dada por $U = u(x, y) = x^{1/3}y^{2/3}$. Suponha um imposto sobre o bem x no valor de R\$ 3. O preço original do bem x era de R\$ 1 e o do bem y era de R\$ 1. A renda do consumidor era de R\$ 1000. Qual o custo para o consumidor se a utilidade inicial é igual a 20?

Solução

Sabemos que as demandas Marshallianas por x_1 e x_2 são dadas por

$$\begin{aligned} x_1^*(p_1, p_2, m) &= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{m}{p_1} \\ x_2^*(p_1, p_2, m) &= \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{m}{p_2} \end{aligned}$$

Substituindo as demandas ótimas dentro da função de utilidade, obtemos a função de utilidade indireta:

$$\begin{aligned} v(p, m) = u(x(p, m)) &= \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{m}{p_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \frac{m}{p_2} \right)^{\alpha_2} \\ &= \left(\frac{m}{\alpha_1 + \alpha_2} \right)^{\alpha_1 + \alpha_2} \left(\frac{\alpha_1}{p_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\alpha_2}{p_2} \right)^{\alpha_2} \end{aligned}$$

Invertendo a função acima, obtemos a função dispêndio:

$$e(p,u) = (\alpha_1 + \alpha_2)\left[u\left(\frac{p_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{p_2}{\alpha_2}\right)^{\alpha_2}\right]^{\dfrac{1}{(\alpha_1+\alpha_2)}}$$

Do lema de Shephard obtemos as demandas Hicksianas:

$$h_1(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_1} = \left[u\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{p_2}{p_1}\right)^{\alpha_2}\right]^{\dfrac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}$$

$$h_2(p,u) = \frac{\partial e(p,u)}{\partial p_2} = \left[u\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{p_1}{p_2}\right)^{\alpha_1}\right]^{\dfrac{1}{\alpha_1+\alpha_2}}$$

O custo ao consumidor seria de

$$e(4,1,20) - (1,1,20) = 60 - \frac{60}{2^{2/3}} = 22,20$$

51) Se as preferências de uma pessoa podem ser representadas pela seguinte função de utilidade

$$u(Y,Z) = Z + 4\sqrt{Y}$$

em que Y e Z são as quantidades da pessoa consumidas em roupas e outros bens e se o preço líquido de impostos de cada um dos bens for 1 e se a renda da pessoa for 8, qual seria o ônus total de uma unidade imposto de R$ 1 sobre o bem Y? Mostre que a sua resposta pode ser obtida calculando-se a variação compensatória de duas maneiras diferentes.

Solução

Como a função de utilidade é quase-linear, as demandas compensadas e não-compensadas são iguais. Assim,

$$\frac{1}{4y^{-1/2}} = \frac{p_z}{p_y} \quad \Longrightarrow \quad y = 4\left(\frac{p_z}{p_y}\right)^2$$

Sem o imposto, a demanda por y é

$$y_{si} = \frac{4 \times 1^2}{1^2} = 4$$

Então, o consumidor tem R$ 4 para gastar em z e sua utilidade é

$$U_{si} = 4 + 4\sqrt{4} = 12$$

Com o imposto, a demanda por y é

$$y_{ci} = \frac{4 \times 1^2}{2^2} = 1$$

Se ele tem M reais para gastar, ele gastará R$ 2 em y e terá $M-2$ para gastar em z. Então, sua utilidade será

$$U_{ci} = M - 2 + 4\sqrt{1} = M + 2$$

Para compensar o indivíduo, as utilidades devem ser iguais, isto é,

$$12 = M + 2 \quad \Longleftrightarrow \quad M = 10$$

Como a renda é de 8, o governo precisa compensar o consumidor com 2. A outra forma é calcular a seguinte área:

$$VC = \int_1^2 4\left(\frac{p_z}{p_y}\right)^2 dp_y$$

cuja integral é

$$-4\frac{p_z^2}{p_y}\Big|_1^2 = -2 - (-4) = 2$$

52) Considere um país em que as preferências dos consumidores são dadas por

$$u(x, h) = x - \frac{1}{2}h^2$$

em que x é a quantia em reais da despesa semanal de consumo da pessoa e h é o número de horas que ela trabalha por semana. As pessoas diferem apenas no salário ω, que podem ganhar (antes da dedução de impostos) por hora. As pessoas podem escolher quantas horas h trabalham e fazer essa escolha para maximizar sua utilidade, uma vez que o valor x de seu consumo depende de quanto eles trabalham. O valor x de seu consumo é igual a sua renda salarial, líquido de quaisquer impostos, mais o dinheiro que eles recebem do governo e que vamos chamar de T. Denote a taxa de impostos por τ.

a) Qual o número ótimo de horas de trabalho a serem ofertadas?

Solução

O consumidor representativo maximiza a sua função de utilidade sujeito a restrição orçamentária:

$$\max_h x - \frac{1}{2}h^2$$
$$\text{sujeito a } x \leq \omega h(1-\tau) + T$$

que pode ser reescrito como

$$\max_h \omega h(1-\tau) + T - \frac{1}{2}h^2$$

A condição de primeira ordem é

$$\frac{\partial U}{\partial h} = 0 \quad \iff \quad \omega(1-\tau) - h = 0$$

que resulta em

$$h = (1-\tau)\omega$$

b) Qual a sua renda bruta (denote por y)?

Solução

A renda bruta é

$$y = \omega h = \omega^2(1-\tau)$$

c) Qual a receita total do governo ($R(\omega) = \tau y - T$)?

Solução

A receita do governo é igual à taxa de imposto vezes a base tributária:

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \tau y - T \\ &= \tau(1-\tau)\omega^2 - T \end{aligned}$$

d) Sendo a receita total não-negativa, qual o valor de τ gera a arrecadação máxima?

Solução

Basta derivar a expressão da receita com relação ao parâmetro τ:

$$\frac{\partial R(\omega)}{\partial \tau} = 0 \quad \iff \quad (1-2\tau)\omega^2 = 0 \quad \implies \quad \tau^* = \frac{1}{2}$$

53) Uma economia consiste em 3 milhões de pessoas. Cada pessoa tem as mesmas preferências sobre seu consumo C e o número de horas em que trabalha por semana H, representado pela função de utilidade

$$U(C, H) = C - H^2$$

O salário de cada pessoa depende de sua produtividade (que é exógena e não é afetada pela política do governo). Um milhão de pessoas ganha um salário (antes de deduções fiscais) de R$ 10 por hora; um milhão de pessoas ganha um salário de R$ 20 por hora; o restante de um milhão de pessoas ganha um salário de R$ 50 por hora. Cada pessoa escolhe quantas horas deseja trabalhar. Sua renda salarial líquida é gasta no consumo de C.

a) Escreva restrição do problema.

Solução

O consumo pode ser escrito como

$$C = \omega(1 - \tau)H$$

b) Calcule o número ótimo de horas.

Solução

Escrevendo o problema de otimização, temos:

$$\max_H \omega(1 - \tau)H - H^2$$

cuja condição de primeira ordem é

$$\omega(1 - \tau) - 2H = 0$$

Isso implica que

$$H = \frac{\omega(1 - \tau)}{2}$$

c) Qual a renda total do consumidor?

Solução

A renda bruta do indivíduo pode ser escrita como

$$y = \omega \left[\frac{\omega(1 - \tau)}{2}\right] = (1 - \tau)\frac{\omega^2}{2}$$

d) Qual o total de impostos arrecadados pelo governo?

Solução

A receita do governo é igual à taxa de imposto vezes a base tributária:

$$R = \tau(1-\tau)\frac{\omega^2}{2}$$

e) Se o governo tributar toda a renda do trabalho a uma taxa τ, como a receita tributária do governo por pessoa varia com a taxa τ?

Solução

A receita total do governo será

$$RT = 1000000\tau(1-\tau)\frac{1}{2}[100+400+2500] = 1500000000\tau(1-\tau)$$

A receita por pessoa será

$$RTPc = 500\tau(1-\tau)$$

f) Qual a taxa τ gera a receita tributária máxima para o governo?

Solução

Basta derivar a expressão da receita com relação ao parâmetro τ:

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau^* = \frac{1}{2}$$

g) Qual o imposto ótimo?

Solução

A receita líquida do trabalhador é

$$\frac{\omega^2(1-\tau)}{2}$$

Dado que ela também recebe uma participação do impostos (transferência lump-sum), seu consumo será

$$C = \frac{\omega^2(1-\tau)}{2} + 500\tau(1-\tau)$$

Então sua utilidade será

$$\begin{aligned}
U &= C - H^2 \\
&= \frac{\omega^2(1-\tau)}{2} + 500\tau(1-\tau) - \frac{1}{4}\omega^2(1-\tau)^2 \\
&= \frac{1}{4}\omega^2(1-\tau)^2 + 500\tau(1-\tau)
\end{aligned}$$

Diferenciando a utilidade em relação ao parâmetro τ:

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 500(1-2\tau) - \frac{1}{2}\omega^2(1-\tau) = 0$$

Assim,

$$\tau^* = \frac{500 - \frac{1}{2}\omega^2}{1000 - \frac{1}{2}\omega^2}$$

54) Suponha que as preferências de uma pessoa são dadas por

$$U(X, H) = X - aH^2$$

em que X é seu consumo (em reais por semana), H é o número de horas por semana em que ele trabalhava e a é uma constante positiva. As pessoas são livres para escolher suas horas de trabalho, a fim de maximizar sua utilidade, sujeitas à restrição de que seu consumo semanal seja igual à sua renda semanal líquida de impostos. Qual seria a renda semanal de uma pessoa, se ela recebesse um salário por hora de ω e estivesse sujeita a um imposto de renda com uma taxa marginal de τ, e se E reais de sua renda semanal fossem isentos do imposto? Se o salário varia para as diferentes pessoas que compõem essa sociedade, qual a taxa marginal de imposto τ^* que maximizaria a receita tributária para um dado valor de E?

Solução

O esquema de tributação implica que ele tem uma renda líquida de impostos igual a $(1-\tau)[\omega H - E]$ se ele escolhe trabalhar H horas por semana. Isso implica que seu gasto com consumo seria de $(1-\tau)[\omega H - E]$. Logo, seu nível de utilidade é de

$$U = (1-\tau)[\omega H - E] - aH^2$$

Maximizando essa expressão com relação a H temos:

$$\frac{\partial U}{\partial H} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad H = \frac{(1-\tau)\omega}{2a}$$

O salário bruto será

$$y \equiv \omega H = \frac{(1-\tau)\omega^2}{2a}$$

O salário líquido seria

$$(1-\tau)[\omega H - E] = (1-\tau)\left[\frac{(1-\tau)\omega^2}{2a} - E\right]$$

A renda taxável seria

$$R(\omega, \tau) = \tau \left[\frac{(1-\tau)\omega^2}{2a} - E\right]$$

Diferenciando esta expressão com relação à τ, temos:

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau^* = \frac{1}{2} - \frac{a}{\omega^2}E$$

Observe que, independentemente da taxa de salário da pessoa, a receita tributária diminuiria com a taxa τ se a taxa fosse superior a 50%, devido à redução na oferta de trabalho da pessoa.

55) Seja um indivíduo com a seguinte função de utilidade

$$U(c, \ell) = c - \frac{1}{1+\mu}\ell^{1+\mu}$$

em que $\mu > 0$, c indica o consumo e ℓ é o tempo de trabalho. O salário por hora é $\omega = 1$, de modo que a restrição orçamentária é simplesmente:

$$c \leq \ell(1-t)$$

em que t é a taxa de imposto cobrado pelo governo.

a) Determine ℓ^*, a oferta de trabalho ótimo do indivíduo dada a taxa de imposto t.

Solução

A função de utilidade pode ser reescrita como

$$U = \ell(1-t) - \frac{1}{1+\mu}\ell^{1+\mu}$$

A condição de primeira ordem é

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (1-t) - \ell^{\mu} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ell^* = (1-t)^{1/\mu}$$

b) Determine ε, a elasticidade da oferta de mão-de-obra do indivíduo em relação ao salário líquido.

Solução

$$\varepsilon = \frac{\partial \ell^*}{\partial(1-t)}\frac{(1-t)}{\ell^*} = \frac{1}{\mu}(1-t)^{1/\mu - 1}\frac{(1-t)}{(1-t)^{1/\mu}} = \frac{1}{\mu}$$

Assim, a elasticidade da oferta de trabalho é decrescente em μ.

c) A receita do governo de tributar o indivíduo é de $R = \ell^* t$. Vamos supor que a função de bem-estar social considerada pelo governo seja $W = \alpha R + U(\ell^*)$. Interprete α.

Solução

α é o benefício marginal para o governo aumentar mais impostos desse indivíduo. Pode ser interpretado como o peso relativo atribuído pelo governo aos beneficiários de gastos públicos em relação à utilidade desse indivíduo.

d) Considerando a função de bem-estar acima, encontre t^*.

Solução

O governo maximiza a função de bem-estar social. Assim,

$$\begin{aligned} W &= \alpha R + U(\ell^*) \\ &= \alpha(1-t)^{1/\mu} t + (1-t)^{1/\mu}(1-t) - \frac{1}{1+\mu}(1-t)^{1+\mu/\mu} \end{aligned}$$

A condição de primeira ordem implica em

$$t^* = \frac{(\alpha-1)\mu}{(\alpha-1)(1+\mu)+1}$$

e) Como t^* varia com μ?

Solução

A derivada de t^* com relação à μ é

$$\frac{\partial t^*}{\partial \mu} = \frac{\alpha(\alpha - 1)}{[(\alpha - 1)(1 + \mu) +^2]}$$

É positivo desde que $\alpha > 1$. Lembre-se de que a elasticidade da oferta de mão-de-obra é decrescente em μ. Portanto, quanto menor a elasticidade da oferta de mão-de-obra do indivíduo, maior será a taxa de imposto. Observe também que:

$$\lim_{\mu \to +\infty} \frac{1}{t^*} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{\mu \to +\infty} t^* = \lim_{\varepsilon \to 0} = 1$$

o que significa que a taxa de imposto será de 100% se a elasticidade da oferta de trabalho for zero.

f) Como t^* varia com α?

Solução

A derivada de t^* com relação à α é

$$\frac{\partial t^*}{\partial \alpha} = \frac{\mu}{[(\alpha - 1)(1 + \mu) +^2]}$$

É positivo. Portanto, quanto menor o peso relativo atribuído pelo governo à utilidade do indivíduo, maior será a taxa de imposto.

56) Consideramos uma economia povoada por dois indivíduos – indexados por $i = 1, 2$ – que têm preferências diferentes. Especificamente, as preferências do indivíduo i sobre o consumo c e trabalho ℓ são dadas por:

$$u_i(c, \ell) = c - \frac{\ell^{1+\mu_i}}{1 + \mu_i}$$

em que $\mu_i > 0$. Um indivíduo com salário por hora fornecendo mão de obra ℓ, ganha $z = \omega\ell$ (ganhos antes dos impostos) e consome $c = z(1 - \tau)$, em que τ é a taxa de imposto sobre a renda do trabalho.

a) Mostre que a oferta de trabalho ótima do indivíduo i é $\ell_i^* = [\omega(1 - \tau)]^{1/\mu_i}$.

Solução

A função de utilidade pode ser reescrita como

$$U = \ell(1 - \tau) - \frac{1}{1 + \mu_i}\ell^{1+\mu_i}$$

A condição de primeira ordem é

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = 0 \iff \omega(1-\tau) - \ell^{\mu_i} = 0 \implies \ell^* = [\omega(1-\tau)]^{1/\mu_i}$$

b) Determine τ_1 e τ_2 que permitem o governo maximizar sua receita total $R = \omega\ell_1^*\tau_1 + \omega\ell_2^*\tau_2$.

Solução

O governo escolhe maximizar:

$$R = \omega\ell_1^*\tau_1 + \omega\ell_2^*\tau_2$$
$$R = \omega[\omega(1-\tau)]^{1/\mu_1}\tau_1 + \omega[\omega(1-\tau)]^{1/\mu_2}\tau_2$$

As condições de primeira ordem são:

$$(1-\tau_1)^{1/\mu_1} - \tau_1\frac{1}{\mu_1}(1-\tau_1)^{1/\mu_1 - 1} = 0 \iff \tau_1 = \frac{1}{1+\frac{1}{\mu_1}}$$
$$(1-\tau_2)^{1/\mu_2} - \tau_2\frac{1}{\mu_2}(1-\tau_2)^{1/\mu_2 - 1} = 0 \iff \tau_2 = \frac{1}{1+\frac{1}{\mu_2}}$$

$\frac{1}{\mu_i}$ representa a elasticidade da renda em relação à taxa de imposto $(1-\tau)$. Ele mede como o indivíduo i altera sua oferta de mão-de-obra (e, consequentemente, sua renda) quando a taxa de imposto muda. Assim, a fórmula acima implica que a taxa de imposto τ_i será maior para indivíduos que reagem mais a alterações tributárias. Aqui, $\mu_1 > \mu_2$ implica que $\tau_1 > \tau_2$. Isso ilustra o princípio básico da tributação ideal que exige tributar mais o que é menos elástico.

c) Por razões técnicas, o governo não pode definir taxas de imposto diferentes para cada indivíduo i. Consequentemente, o governo decide estabelecer uma taxa de imposto comum $\overline{\tau}$ como $\overline{\tau} = \dfrac{1}{1+\mathbb{E}\left(\frac{1}{\mu}\right)}$.

Comente acerca desta solução, em que $\mathbb{E}$ é o operador esperança.

Solução

Essa solução reflete um problema de informação: o governo não é capaz de observar a elasticidade de cada oferta de trabalho individual. Como consequência, o governo deve contar com uma taxa tributária comum que será – do ponto de vista da maximização da receita tributária – alta para algumas pessoas e baixa para outras pessoas. Logo, as receitas tributárias não serão maximizadas. Esta é a segunda melhor solução que atende às restrições técnicas. Observe que não podemos dizer nada sobre a otimização ou não otimização desta solução do ponto de vista do bem-estar social, pois não modelamos a maneira como os impostos são usados, nem como a produção do governo entra na função de utilidade. Tomando o modelo pelo valor nominal, o bem-estar social seria maximizado se a taxa de imposto fosse definida como 0.

57) O presidente solicitou que você reavaliasse os custos e benefícios de várias propostas de imposto de renda e de consumo que seu painel tributário fez. Para isso, considere um modelo de 2 períodos em que os indivíduos obtêm renda Y por trabalhar no período 1 e não trabalham no período 2 (aposentadoria). Os indivíduos escolhem quanto consumir em cada período. A economia no período 1 gera uma taxa de juros $r > 0$. Seja C_1 o consumo no período 1 e C_2 o consumo no período 2.

a) Escreva a restrição orçamentária do indivíduo em uma economia sem impostos.

Solução

$$Y = C_1 + \frac{C_2}{1+r}$$

b) Escreva a restrição orçamentária em que mão de obra e renda são tributadas à taxa t, mas suponha que não haja contas de poupança isentas de impostos.

Solução

$$(1-t)Y = C_1 + \frac{C_2}{[1+r(1-t)]}$$

c) Escreva a restrição orçamentária com uma taxa de imposto sobre consumo τ e nenhum imposto sobre o rendimento.

Solução

$$Y = (1+\tau)\left[C_1 \frac{C_2}{1+r}\right]$$

d) O painel tributário alega que isentar a receita de capital do imposto de renda e reter o imposto de renda sobre a renda do trabalho é equivalente a mudar para um sistema de imposto de consumo. Prove isso algebricamente usando as restrições orçamentárias nas partes (a) e (b).

Solução

$$(1-t)Y = C_1 + \frac{C_2}{[1+r(1-t)]}$$

A expansão das mudanças de poupança isenta de impostos

$$1+r(1-t) \quad \rightarrow \quad 1+r$$

Portanto, a restrição orçamentária com economia isenta de impostos é:

$$(1-t)Y = C_1 + \frac{C_2}{1+r}$$

Existe algum valor de t para o qual

$$(1-t)Y = \frac{Y}{1+\tau}$$

Portanto, a restrição orçamentária se torna:

$$\frac{Y}{1+\tau} = C_1 + \frac{C_2}{1+r} \quad \rightarrow \quad Y = (1+\tau)\left[C_1 + \frac{C_2}{1+r}\right]$$

que é a restrição orçamentária da parte (c) com um imposto de consumo puro.

e) Suponha que os indivíduos tenham uma função de utilidade $U = (C_1)^{0,5} + \left(\frac{C_2}{1+r}\right)^{0,5}$. Mostre que uma taxa de imposto sobre o consumo (τ) não distorce as opções de consumo. [Dica: mostre que os indivíduos escolherão uma proporção de consumo C_2/C_1 igual à mesma expressão com o imposto sobre o consumo ou sem impostos.]

Solução

O problema de otimização é

$$\max_{C_1,C_2} (C_1)^{1/2} + \left(\frac{C_2}{1+r}\right)^{1/2}$$
$$\text{sujeito a } Y = C_1 + \frac{C_2}{1+r}$$

que pode ser reescrito como

$$\max_{C_1} (C_1)^{1/2} + (Y - C_1)^{1/2}$$

A condição de primeira ordem desse problema de otimização não-restrito é

$$\frac{\partial}{\partial C_1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}C_1^{-1/2} - \frac{1}{2}(Y - C_1)^{-1/2} = 0$$

o que implica que $C_1 = \frac{Y}{2}$. Consequentemente, $C_2 = (1+r)\frac{Y}{2}$. Portanto, $\frac{C_2}{C_1} = 1 + r$.

Com impostos o problema de otimização é

$$\max_{C_1, C_2} (C_1)^{1/2} + \left(\frac{C_2}{1+r}\right)^{1/2}$$
$$\text{sujeito a } Y = (1+\tau)\left(C_1 + \frac{C_2}{1+r}\right)$$

que pode ser reescrito como

$$\max_{C_1} (C_1)^{1/2} + \left(\frac{Y}{1+\tau} - C_1\right)^{1/2}$$

A condição de primeira ordem desse problema de otimização não-restrito é

$$\frac{\partial}{\partial C_1} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}C_1^{-1/2} - \frac{1}{2}\left(\frac{Y}{1+\tau}\right)^{-1/2} = 0$$

o que implica que $C_1 = \frac{Y}{2(1+\tau)}$. Consequentemente, $C_2 = (1+r)\frac{Y}{2(1+\tau)}$. Portanto, $\frac{C_2}{C_1} = 1 + r$.

58) Suponha que os indivíduos tenham a mesma função de utilidade sobre o consumo e o trabalho dada por:

$$U(c, \ell) = (1-\theta)\ln(c) + \theta\ln(50 - \ell)$$

em que c representa consumo e ℓ representa horas de trabalho e θ é um dado parâmetro, restrito a estar entre 0 e 1. Aqui, $\ln(x)$ denota o logaritmo natural de x. Suponha também que a única renda que os indivíduos têm é a renda do trabalho e que a taxa de salário por hora é dada por ω.

a) Escreva a restrição orçamentária do indivíduo.

Solução

A restrição orçamentária é

$$c = \omega \ell$$

b) Escreva o problema de maximização desse indivíduo e encontre as melhores opções de trabalho e consumo.

Solução

O problema de otimização é

$$\max_{\ell} (1-\theta)\ln(\omega\ell) + \theta \ln(50-\ell)$$

A condição de primeira ordem desse problema de otimização não-restrito é

$$\frac{\partial U}{\partial \ell} = 0 \quad \iff \quad (1-\theta)\frac{\omega}{\omega\ell} - \frac{\theta}{50-\ell} = 0$$

o que implica que $\ell = 50(1-\theta)$. Logo, $c = 50\omega(1-\theta)$.

c) Agora, suponha que exista um imposto de $\tau = 0,2$ sobre a renda do trabalho. Resolva a nova escolha ideal de mão de obra e consumo.

Solução

Os novos ótimos são $\ell = 50(1-\theta)$ e $c = 50\omega(1-\tau)(1-\theta)$.

59) Suponha que todos os indivíduos tenham a mesma função de utilidade sobre o consumo e o trabalho, dados por:

$$U(c,\ell) = c - \frac{\ell^2}{2}$$

em que c representa o consumo e ℓ representa as horas de trabalho. Suponha que a única renda que os indivíduos tenham é da renda do trabalho e que trabalhem com um salário por hora ω tributado à taxa τ.

a) Escreva a restrição orçamentária do indivíduo.

Solução

A restrição é

$$c = (1-\tau)\omega\ell$$

b) Encontre a oferta de trabalho ótima como uma função do salário ω e da renda τ.

Solução

Reescrevendo a função objetivo como um problema irrestrito, temos:

$$U = (1-\tau)\omega\ell - \frac{\ell^2}{2}$$

A condição de primeira ordem é

$$(1-\tau)\omega - \ell = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ell^* = (1-\tau)\omega$$

c) Mostre que a taxa de imposto ótimo que maximiza a receita é $\tau^* = 0,5$.

Solução

A receita do governo é

$$R = \tau\omega[(1-\tau)\omega]$$

Derivando e igualando a zero, obtemos:

$$\omega^2(1-2\tau) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \tau^* = \frac{1}{2}$$

d) Suponha que o governo use toda a receita arrecadada para fornecer às pessoas uma renda básica universal (ou seja, uma transferência de montante fixo (*lump-sum*) $T > 0$ por pessoa). Como a oferta de trabalho ideal do indivíduo é afetada? Discuta os efeitos renda e substituição e desenhe sua nova restrição orçamentária.

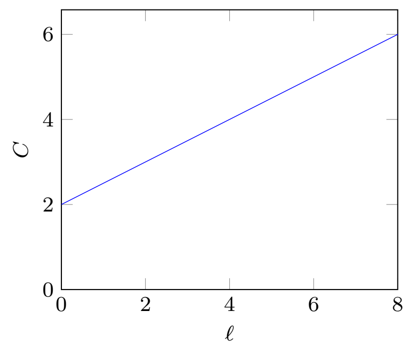
Solução

Uma transferência de montante fixo não afeta os salários; o efeito de substituição é zero. Como a função de utilidade é quase linear, o efeito da renda também é zero, então a soma da transferência única não afeta as decisões trabalhistas. A seguir, é apresentado o gráfico da nova restrição orçamentária.

e) Agora imagine que existem dois indivíduos na economia: um ganha um salário de \$ 20/hora e um ganha um salário de \$ 100/hora. Resolva a oferta de mão-de-obra maximizadora de utilidade de cada indivíduo sob o imposto de maximização de receita à taxa $\tau = 0,5$ e calcule a receita gerada para o governo.

Solução

Figure 4. Restrição orçamentária



A oferta de trabalho do agente 1 é $\ell_1 = 0.5 \times 20 = 10$.

A oferta de trabalho do agente 2 é $\ell_2 = 0.5 \times 100 = 50$.

A receita do governo é $R = 0.5 \times (10 \times 20 + 50 \times 100) = 2600$.

f) Agora imagine que existem dois indivíduos na economia: um ganha um salário de \$ 20/hora e um ganha um salário de \$ 100/hora. Suponha que haja uma eleição, e a nova administração do governo abandone a renda básica universal e mude o cronograma de impostos para que:

- Haja um subsídio de 100% sobre os primeiros R\$ 1000 em renda do trabalho (isso significa que, se você ganhar até R\$ 1000, o governo fornecerá uma transferência igual aos seus ganhos).
- Toda renda do trabalho acima de R\$ 1000 é então tributada à alíquota de 50%.

Encontre a nova oferta de mão-de-obra de cada indivíduo e seu consumo após os impostos.

Solução

A restrição orçamentária é

$$c = \begin{cases} 2\omega\ell & \text{se } \ell \leq \dfrac{1000}{\omega} \\ \\ 2000 + \dfrac{\omega}{2}\left(\ell - \dfrac{1000}{\omega}\right) & \text{se } \ell > \dfrac{1000}{\omega} \end{cases}$$

A solução do problema de maximização para a faixa mais baixa da restrição orçamentária fornece $\ell = 2\omega$, que será a melhor escolha de mão-de-obra, desde que $\omega \times 2\omega \leq 1000$. Por sua vez, a solução para a faixa superior da restrição orçamentária fornece $\ell = \dfrac{\omega}{2}$ que será a melhor escolha de mão-de-obra, desde que $\omega \times \dfrac{\omega}{2} > 1000$. Se nenhuma dessas condições se mantiver, a solução ideal estará no limite. Ou seja,

$\ell = \dfrac{1000}{\omega}$. Seguindo esse procedimento, descobrimos que o indivíduo 1 escolheria trabalhar $\ell_1 = 2\omega_1 = 40$ horas e o indivíduo 2 trabalharia $\ell_2 = \dfrac{\omega}{2} = 50$ horas (o mesmo que antes). Sob essas opções, os ganhos fiscais são dados por $E_1 = 2(40 \times 20) = 1600$ e $E_2 = 2000 + \left(\dfrac{100}{2}\right)(50 - 10) = 4000$.

60) Considere um modelo de 2 períodos em que os indivíduos obtêm renda do trabalho de $Y = 200$ por trabalhar no período 1 e não trabalham no período 2 (aposentadoria). Os indivíduos escolhem quanto consumir em cada período. A poupança no período 1 é remunerada no período 2 a uma taxa de juros $r = 25\%$. Seja C_1 o consumo no período 1 e C_2 o consumo no período 2. Suponha que os indivíduos tenham uma função de utilidade $U = \ln C_1 + \ln C_2$.

a) Escreva o problema de maximização da utilidade do indivíduo e encontre C_1, C_2 e S ideais em uma economia sem impostos.

Solução

O consumo no período 2 é dado por

$$C_2 = (200 - C_1)(1 + 0.25)$$

O problema de otimização é

$$\max_{C_1} \ln C_1 + \ln((200 - C_1)(1 + 0.25)) = \max_{C_1} \ln C_1 + \ln(250 - 1.25C_1)$$

A condição de primeira ordem implica

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1.25}{250 - 1.25C_1}$$

Isso implica que $C_1 = 100$, $S = 100$ e $C_2 = S(1 + r) = 125$.

b) Agora suponha que um imposto de renda de $\tau = 20\%$ seja imposto sobre a renda do trabalho e da poupança. Encontre C_1, C_2 e S ideais com essa alíquota de impostos.

Solução

O consumo no período 2 é dado por

$$C_2 = (200(1 - 0.2) - C_1)(1 + 0.25(1 - 0.2)) = (160 - C_1)(1 + 0.2)$$

O problema de otimização é

$$\max_{C_1} \ln C_1 + \ln((160 - C_1)(1 + 0.2)) = \max_{C_1} \ln C_1 + \ln(192 - 1.2C_1)$$

A condição de primeira ordem implica

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1.2}{192 - 1.2C_1}$$

Isso implica que $C_1 = 80$, $S = 160 - 80$ e $C_2 = S(1 + (1 - \tau)r) = 96$.

c) Compare a relação de consumo ${}^{C_2}/{}_{C_1}$ em (a) e (b). O imposto de renda distorce as opções de consumo?

Solução

Sem impostos temos ${}^{C_2}/{}_{C_1} = 1.25$, enquanto com impostos temos ${}^{C_2}/{}_{C_1} = 1.2$. Isso significa que a taxação da renda distorce as escolhas de consumo intertemporais.

d) Quanta receita o governo cobra de cada indivíduo sob o sistema de imposto de renda acima? Considere $\tau = 20\%$.

Solução

A receita do governo é

$$\begin{aligned} R &= \tau Y + \tau r S \\ &= 0.2(200) + 0.2(0.25 * 80) = 44 \end{aligned}$$

e) Suponha agora que o governo esteja pensando em mudar para um sistema em que apenas a renda do trabalho seja tributada. Encontre o imposto de renda do trabalho τ_L que permitiria ao governo obter a mesma receita que no sistema de tributação.

Solução

O governo escolhe obter uma receita de 44. Logo,

$$\tau_L Y = 44 \quad \Longleftrightarrow \quad \tau_L = 0.22$$

f) Encontre C_1, C_2 e S ideais com a alíquota de impostos τ_L que você encontrou anteriormente.

Solução

O consumo no período 2 é dado por

$$C_2 = (200(1 - 0.22) - C_1)(1 + 0.25) = (156 - C_1)(1 + 0.25)$$

O problema de otimização é

$$\max_{C_1} \ln C_1 + \ln((156 - C_1)(1 + 0.25)) = \max_{C_1} \ln C_1 + \ln(195 - 1.25C_1)$$

A condição de primeira ordem implica

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1.25}{195 - 1.25C_1}$$

Isso implica que $C_1 = 78$, $S = 156 - 78 = 78$ e $C_2 = S(1+(1-\tau)r) = 97.5$.

g) Compare a relação de consumo C_2/C_1 em (a) e (f). O imposto de renda sobre o trabalho distorce as opções de consumo?

Solução

Sem e com impostos temos $C_2/C_1 = 1.25$. Logo, o imposto sobre o trabalho não tem impacto nas escolhas de consumo.

61) Considere uma economia com um continuum de agentes i em $[0,1]$. Existem dois bens: um bem não energético e um bem energético. Cada agente tem a mesma função de utilidade:

$$U_i(c_i, e_i, E) = (1-\alpha)\log(c_i) + \alpha\log(e_i) - \lambda\log(E)$$

em que c_i é o consumo individual do bem não-energético, e_i é o consumo individual do bem energético e E é o nível agregado do bem energético. Além disso, supomos que $0 < \alpha < 1$ e $0 < \lambda < 1$.

a) Explique porque E entra negativamente na função de utilidade.

Solução

Isso significa que o consumo do bem energético é uma externalidade negativa: o nível de consumo de outros agentes afeta negativamente minha utilidade.

b) Em uma economia de livre mercado, cada agente i escolhe seu nível de consumo do bem não-energético c_i e do bem energético e_i para maximizar sua utilidade sob a restrição orçamentária $y_i = c_i + e_i$. Calcule os níveis ideais de c_i e de e_i.

Solução

O agente i maximiza a sua utilidade. Podemos substituir e_i por $y_i - c_i$ na função utilidade e, em seguida, maximizar o com relação a c_i. A condição de primeira ordem é:

$$\frac{dU_i}{dc_i} = 0 \iff \frac{1-\alpha}{c_i} - \frac{\alpha}{y_i - c_i} = 0$$

Isso implica em $c_i^* = (1-\alpha)y_i$ e $e_i^* = \alpha y_i$.

c) Em uma economia planejada, um planejador benevolente escolhe o nível agregado de consumo do bem não-energético C e do bem energético E para maximizar o bem-estar social $U = U(C, E)$ sob a restrição orçamentária agregada $Y = C + E$. Calcule os valores socialmente ótimos de C e de E.

Solução

O planejador social maximiza

$$U = (1-\alpha)\log(C) + (\alpha - \lambda)\log(E)$$

A condição de primeira ordem é

$$\frac{dU}{dC} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1-\alpha}{C} - \frac{\alpha-\lambda}{Y-C} = 0$$

Isso implica em $C^* = \dfrac{1-\alpha}{1-\lambda}Y$ e $E^* = \dfrac{\alpha-\lambda}{1-\lambda}Y$.

d) Mostre e explique brevemente por que o consumo de energia é menor na economia planejada do que na economia de livre mercado.

Solução

Na economia de laissez-faire, o consumo agregado de bens energéticos é

$$\int_0^1 e_i di = \alpha Y$$

Dado que $0 < \lambda < 1$ e $0 < \alpha < 1$, $\alpha Y > \dfrac{\alpha-\lambda}{1-\lambda}Y$. O planejador social leva em consideração a externalidade negativa causada pelo consumo de energia, enquanto os indivíduos não.

e) Agora, introduzimos um imposto corretivo t sobre o consumo de energia. A restrição de orçamento do agente i se torna $c_i + (1+t)e_i = y_i$. Calcule os níveis ideais de c_i e de e_i.

Solução

Fazendo os cálculos chegamos a

$$c_i^* = (1-\alpha)y_i$$
$$e_i^* = \frac{\alpha y_i}{1+t}$$

f) Calcule a taxa de imposto t^* que permite obter o valor socialmente ideal de consumo do bem energético. [Dica: t^* é tal que $E^* = \int_0^1 e_i^* di$]

Solução

t^* é tal que

$$E^* = \int_0^1 e_i^* di$$

ou seja, $\frac{\alpha}{1+t^*} = \frac{\alpha - \lambda}{1-\lambda}$. Disso decorre que

$$t^* = \frac{\lambda(1-\alpha)}{\alpha - \lambda}$$

g) Mostre que t^* é uma função crescente de λ e explique brevemente o que isso significa.

Solução

Derivando, temos:

$$\frac{dt^*}{d\lambda} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{(\alpha-\lambda)^2} > 0$$

Quanto maior a externalidade, maior o imposto corretivo necessário.