Universidade Federal do Paraná **Departamento de Economia**

Economia Matemática **Professor: Victor Oliveira**

Lista de Exercícios III – A

1) Resolva o modelo de Solow considerando a seguinte função de produção: $Q(K, L) = A^{\alpha}K^{\beta}L^{\gamma}$ considerando três situações e analise:

- Situação 1: $\beta + \gamma < 1$
- Situação 2: $\beta + \gamma = 1$
- Situação 3: $\beta + \gamma > 1$

2) A propensão marginal a consumir é dada por

$$\frac{dC}{dR} + \frac{2R}{R^2+1}C = \frac{1}{R^2+1}$$

em que C é o consumo e R denota a renda. Encontre a função de consumo dado que $C = 100$ quando $R = 2$.

3) Considere que o seguinte sistema de demanda e de oferta foi estimado:

$$\begin{aligned} Q_d &= 40 - 2p - 2p' - p'' \\ Q_s &= -5 + 3p \end{aligned}$$

em que $p(0) = 12$ e $p'(0) = 1$. Determine $p(t)$.

4) A função de investimento é dada por $I(t) = 200\mathrm{e}^{0,4t}$, em que $I(t) = \dfrac{dk}{dt}$ com $K(0) = 90$. Encontre a trajetória do capital físico.

5) Considere que o seguinte sistema de demanda e de oferta foi estimado:

$$\begin{aligned} Q_d &= \alpha - \beta p + \kappa p' + \ell p'' \\ Q_s &= -\gamma + \delta p + up' + vp'' \end{aligned}$$

Aqui assumimos $\alpha, \beta, \gamma, \delta > 0$ mas não colocamos restrições aos sinais de κ, ℓ, u, v para levar em conta as expectativas do consumidor sobre o preço. Se $\kappa > 0$, então um aumento do preço fará com que Q_d suba. Por outro lado, ℓ representa as expectativas do consumidor sobre a tendência de aumento dos preços. Da mesma forma, u e v representam expectativas sobre preços e mudanças nos preços por parte dos ofertantes. Determine a trajetória de $p(t)$ sem considerar a solução particular.

6) Considere que a taxa de crescimento de um país possa ser representado pelo seguinte modelo:

$$x'(t) = \beta x(t)(\alpha - x(t))$$

Derive uma solução explícita para o problema e análise graficamente.

7) Considere o seguinte modelo de uma economia com um bem. Suponha que o agregado do bem seja

$$D(t) = a - bp(t) + c\pi(t)$$

em que p é o preço do bem, π é a taxa de inflação esperada e $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$ são constantes. Suponha que a oferta agregada do bem seja fixada em Q^* e que o preço se ajuste de acordo com

$$p'(t) = h(D(t) - Q^*) + \pi(t)$$

em que $h > 0$. Finalmente, suponha que as expectativas sejam adaptativas:

$$\pi'(t) = \kappa(p'(t) - \pi(t))$$

para algum $\kappa > 0$. O equilíbrio deste sistema é estável?

8) A função logarítmica generalizada

$$u(x) = ln(x) \equiv \frac{x^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \quad \text{para } \sigma > 0$$

tem muitos usos, não apenas em economia. Em economia, em modelos determinísticos é chamada de função de utilidade isoelástica, ou, em modelos estocásticos, é chamada de aversão ao risco relativo constante (CRRA). Usando a análise de Pratt (1964) pode-se mostrar que é uma solução do problema

$$-\frac{u''(x)x}{u'(x)} = \sigma$$

Resolva a EDO de segunda ordem acima.

9) Uma equação diferencial fundamental em economia é a equação da restrição orçamentária. Seja $a(t) \in \mathbb{R}$ a posição patrimonial de uma pessoa no momento t, que é uma variável de *stock* que

pode ser lida no seu saldo. Se $a > 0$ dizemos que o agente é um credor líquido e se $a < 0$ é um devedor líquido. Suponha que o ativo tenha um retorno instantâneo $r(t)$ e que a pessoa tenha um fluxo de receitas não financeiras denotado por $y(t)$ e um fluxo de despesas denotado por $e(t)$. Uma das “leis” férreas da economia é que a mudança na posição dos ativos, ou investimento, é igual à poupança. A poupança, denotada por $s(t)$, é igual à receita total menos as despesas. Portanto

$$a'(t) = s(t) = r(t)a(t) + y(t) - e(t), \quad \text{para todo } t \in T$$

Suponhamos que todas as variáveis exógenas sejam constantes e dadas parametricamente por

$$a'(t) = s(t) = ra(t) + y - e, \quad \text{para todo } t \in T$$

Dada uma posição inicial de ativos $a(0) = a_0$ quais serão as posições de ativos no futuro? Como eles mudarão para variações constantes e permanentes em qualquer um dos parâmetros r, y ou e no nível inicial $a_0 0$?

10) Encontre a função de demanda $f(p)$ se a elasticidade-preço da demanda é $\varepsilon = -k$.