

## NOTAS DE AULA

Professor do Departamento de Economia

Universidade Federal do Paraná

Victor Rodrigues de Oliveira<sup>1</sup>

<sup>1</sup> E-mail: victoroliv.rod@ufpr.com

---

# SUMÁRIO

---

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
1.1	Conceitos . . . . .	14
1.2	A Natureza da Economia Matemática . . . . .	15
1.3	Estruturas Algébricas . . . . .	17
1.3.1	Conjunto dos Números Reais . . . . .	17
1.3.2	Conjunto dos Números Complexos . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Espaços Vetoriais</b>	<b>22</b>
2.1	Propriedades . . . . .	23
2.2	Sistema de Coordenadas . . . . .	29
2.3	O Plano Cartesiano e o Espaço Tridimensional . . . . .	31
2.4	Subespaço Vetorial . . . . .	33
2.5	Combinação Linear: Subespaço Gerado . . . . .	34
2.6	Soma e Intersecção . . . . .	35
2.7	Dependência e Independência Linear . . . . .	40
2.8	Base e Dimensão . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Produto Interno</b>	<b>45</b>
3.1	Definição de Produto Interno . . . . .	46
3.2	Matriz do Produto Interno . . . . .	47
3.3	Desigualdade de Cauchy-Schwarz . . . . .	48
3.4	Definição de Norma: Norma Euclidiana . . . . .	49
3.5	Ângulo . . . . .	50
3.6	Relação entre Produto Vetorial e ângulo entre Vetores . . . . .	53
3.7	Ângulos Diretores . . . . .	55
3.8	Vessor . . . . .	55
3.9	Projeção . . . . .	56
<b>4</b>	<b>Álgebra Matricial</b>	<b>58</b>
4.1	Matrizes e Determinantes . . . . .	60
4.1.1	Definições . . . . .	60
4.1.2	Inversão de Matrizes . . . . .	68
4.1.3	Determinantes . . . . .	70
4.1.4	Autovalor e Autovetor de um Operador Linear . . . . .	78

4.1.5	Autovalor e Autovetor de uma Matriz . . . . .	80
4.1.6	Diagonalização de Operadores Lineares (Potência de uma Matriz) . . . . .	87
4.2	Sistemas de Equações Lineares . . . . .	90
4.3	Aplicações . . . . .	101
4.3.1	O Mercado . . . . .	101
4.3.2	Análise de Equilíbrio Parcial da Incidência de Impostos . . . . .	107
4.3.3	Peso Morto . . . . .	111
4.3.4	Vantagens Comparativas . . . . .	117
4.3.5	Cadeias de Markov: Desemprego . . . . .	128
4.3.6	Crescimento e Consumo: Modelo de Leontief . . . . .	130
4.3.7	Análise de Componentes Principais . . . . .	134
<b>5</b>	<b>Análise Funcional</b> . . . . .	<b>140</b>
5.1	Introdução . . . . .	141
5.2	Espaços Vetoriais Normados . . . . .	141
5.3	Operadores Lineares Contínuos . . . . .	155
<b>6</b>	<b>Cálculo</b> . . . . .	<b>160</b>
<b>7</b>	<b>Sequências, Séries e Limites</b> . . . . .	<b>170</b>
7.1	Limites de Funções . . . . .	171
7.2	Limites Indeterminados . . . . .	174
7.2.1	Limite de Funções de Duas ou Mais Variáveis . . . . .	178
7.2.2	Continuidade . . . . .	180
7.3	Sequências . . . . .	183
7.3.1	Sequências . . . . .	184
7.3.2	Limite de uma Sequência . . . . .	186
7.3.3	Propriedades Aritméticas dos Limites . . . . .	188
7.3.4	Subsequências . . . . .	191
7.3.5	Sequências de Cauchy . . . . .	192
7.3.6	Limites Infinitos . . . . .	193
7.4	Séries Numéricas . . . . .	194
7.5	Sucessões de Funções . . . . .	200
7.6	Séries de Funções . . . . .	203
7.7	Aplicações . . . . .	204
7.7.1	Relações de Preferência . . . . .	204
7.7.2	Sequências de Eventos e o Lema de Borel-Cantelli . . . . .	205
7.7.3	Convergência Estocástica . . . . .	207
<b>8</b>	<b>Derivadas</b> . . . . .	<b>209</b>
8.1	Introdução . . . . .	210
8.2	Tangente a uma Parábola . . . . .	211
8.3	Velocidade Instantânea . . . . .	212
8.4	Taxas de Mudança . . . . .	214

8.5	Derivadas . . . . .	214
8.6	Regras Básicas . . . . .	220
8.7	Derivadas de Funções Trigonométricas . . . . .	224
8.8	Teorema da Função Inversa . . . . .	225
8.9	Regra da Cadeia . . . . .	226
8.10	Derivadas de Ordem Superior . . . . .	229
8.11	Derivadas Parciais . . . . .	229
8.12	Derivada de uma Função Implícita . . . . .	236
8.13	Classes de Diferenciabilidade . . . . .	239
8.14	Aplicações do Cálculo Diferencial . . . . .	246
8.14.1	Pontos Críticos para Funções de uma Variável . . . . .	246
8.14.2	Concavidade para Funções com uma Variável . . . . .	251
8.14.3	Pontos Críticos para Funções Multivariadas . . . . .	252
8.14.4	Concavidade para Funções Multivariadas . . . . .	252
8.14.5	Taxa de Crescimento . . . . .	254
8.14.6	Aproximação por Diferenciais . . . . .	255
8.14.7	Expansão de Taylor . . . . .	256
<b>9</b>	<b>Otimização de Funções</b>	<b>259</b>
9.1	Introdução . . . . .	260
9.2	Formas Quadráticas . . . . .	265
9.3	Restrições Lineares e Matrizes Orladas . . . . .	268
9.4	Otimização Não-Condicionada . . . . .	270
9.4.1	Condições de Primeira Ordem . . . . .	270
9.4.2	Condições de Segunda Ordem . . . . .	271
9.5	Otimização Condicionada . . . . .	275
9.5.1	Otimização com Restrição de Igualdade . . . . .	275
9.5.2	Otimização com Restrição de Igualdade e de Desigualdade . . . . .	281
9.5.3	Condições de Segunda Ordem . . . . .	289
9.5.4	O Lagrangeano . . . . .	292
9.6	Aplicações . . . . .	296
9.6.1	Otimização sem Restrição . . . . .	296
9.6.2	Otimização com Restrição . . . . .	305
9.7	Estática Comparativa . . . . .	395
9.7.1	O Método da Estática Comparativa . . . . .	396
9.7.2	Otimização sem Restrição . . . . .	404
9.7.3	Teorema do Envelope: Otimização sem Restrição . . . . .	407
9.7.4	Otimização com Restrição de Igualdade: Parte I . . . . .	409
9.7.5	Otimização com Restrição de Igualdade: Parte II . . . . .	413
<b>10</b>	<b>Integrais</b>	<b>415</b>
10.1	Integral como Área . . . . .	416
10.2	Integral Definida e Integral Indefinida . . . . .	419
10.3	Técnicas de Integração . . . . .	430

10.3.1	Substituição . . . . .	430
10.3.2	Substituição Trigonométrica . . . . .	433
10.3.3	Integração por Partes . . . . .	437
10.3.4	Fração Parcial . . . . .	441
10.3.5	Integrais com Limites de Integral Variável . . . . .	444
10.4	Integrais Duplas . . . . .	444
10.5	Aplicações . . . . .	449
10.5.1	Excedente do Consumidor e do Produtor . . . . .	449
10.5.2	Valor Presente e Futuro de um Fluxo de Renda . . . . .	452
10.5.3	Curva de Lorenz . . . . .	453
10.5.4	Coeficiente de Gini . . . . .	455
<b>11</b>	<b>Equações Diferenciais: I</b> . . . . .	<b>459</b>
11.1	Introdução . . . . .	460
11.2	Conceitos . . . . .	461
11.3	Campo de Vetores . . . . .	462
11.4	Equações Diferenciais de Primeira Ordem . . . . .	465
11.4.1	Método do Fator Integrante . . . . .	465
11.4.2	Equações Separáveis . . . . .	469
11.4.3	Equações Exatas . . . . .	473
11.4.4	Equações Homogêneas . . . . .	475
11.4.5	Teorema de Existência e Unicidade: Parte I . . . . .	476
11.5	Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem . . . . .	479
11.5.1	Método de Euler . . . . .	480
11.5.2	Princípio da Superposição . . . . .	480
11.5.3	O Wronskiano . . . . .	481
11.5.4	EDO Homogênea Linear de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes . . . . .	482
11.5.5	EDO Não-Homogênea Linear de Segunda Ordem . . . . .	489
11.6	Equação Diferencial com Coeficientes Não-Constantes . . . . .	493
11.7	Aplicações . . . . .	497
11.7.1	O Papel dos Preços . . . . .	497
11.7.2	Formação dos Preços . . . . .	498
11.7.3	Oferta e Demanda: Dinâmica de Preços . . . . .	503
11.7.4	Formação de Expectativas . . . . .	505
11.7.5	Matching no Mercado de Trabalho . . . . .	508
11.7.6	Modelo Harrod-Domar . . . . .	509
11.7.7	Modelo Monetário de Cagan . . . . .	511
11.7.8	Modelo de Solow . . . . .	513
11.7.9	Inflação e Desemprego . . . . .	516
11.7.10	Hipótese de Histerese . . . . .	521
11.7.11	Medida de Aversão ao Risco de Arrow-Pratt . . . . .	525
11.7.12	A Estabilidade do Equilíbrio Competitivo: O Processo Walrasiano . . . . .	531
11.7.13	O Equilíbrio Competitivo para Três Bens . . . . .	534

<b>12 Equações Diferenciais: II</b>	<b>540</b>
12.1 Prolegômenos . . . . .	541
12.2 Teorema de Existência e Unicidade . . . . .	545
12.3 Soluções Maximas . . . . .	557
12.4 Dependência das Soluções em Relação às Condições Iniciais e Parâmetros . . . . .	563
12.4.1 Teorema de Dependência Contínua . . . . .	563
12.4.2 Teorema de Dependência Diferenciável . . . . .	570
12.5 Equações Diferenciais Autônomas . . . . .	575
12.5.1 Propriedades . . . . .	575
12.5.2 Teorema do Fluxo Tubular . . . . .	582
12.6 Equações Lineares Autônomas . . . . .	590
12.6.1 Exponencial de Matrizes . . . . .	590
12.6.2 Caso Bidimensional . . . . .	597
12.6.3 Classificação de Fluxos Lineares . . . . .	599
12.6.4 Campos Lineares Hiperbólicos . . . . .	602
12.7 Equações Lineares Não Autônomas . . . . .	612
12.7.1 Solução Fundamental e Teorema de Liouville . . . . .	613
12.7.2 Equações com Coeficientes Periódicos: Teorema de Floquet . . . . .	619
12.8 Estabilidade de Lyapunov . . . . .	626
12.9 Campos de Vetores em Superfícies . . . . .	633
12.10 Hiperbolide . . . . .	644
12.11 Teorema da Variedade Estável . . . . .	657
<b>13 Sistemas de Equações Diferenciais</b>	<b>661</b>
13.1 Sistema de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem Homogêneas . . . . .	662
13.2 Retrato de fase . . . . .	667
13.2.1 Autovalores Complexos . . . . .	672
13.2.2 Caso Diagonal com Autovalores Reais . . . . .	673
13.2.3 Caso Não-Diagonal . . . . .	673
13.2.4 Diagrama de Fase de Sistemas de EDO Não-Lineares . . . . .	674
13.3 Aplicações . . . . .	677
13.3.1 A Estabilidade do Equilíbrio Competitivo: O Processo Walrasiano . . . . .	678
13.3.2 O Equilíbrio Competitivo para Três Bens . . . . .	681
13.3.3 O Modelo Walras-Keynes-Phillips de Tobin: Aplicação do Teorema de Routh-Hurwitz . . . . .	685
13.3.4 Oligopólio: O Modelo de Cournot . . . . .	688
<b>14 Equações em Diferenças</b>	<b>691</b>
14.1 Equações em Diferenças de Primeira Ordem . . . . .	692
14.2 Steady State e Estabilidade . . . . .	695
14.3 Solução de Equações em Diferenças Lineares de Primeira Ordem . . . . .	699
14.4 Aplicações de Equações em Diferenças Lineares de Primeira Ordem . . . . .	701
14.4.1 O Modelo Cobweb . . . . .	701
14.4.2 O Modelo de Solow . . . . .	704

14.4.3	O Modelo de Hiperinflação de Cagan . . . . .	708
14.5	Equações em Diferenças de Ordem p . . . . .	712
14.5.1	Comportamento Limite das Soluções . . . . .	713
14.5.2	Aplicações . . . . .	717
<b>15</b>	<b>Sistemas de Equações em Diferenças</b>	<b>729</b>
15.1	Sistema de Equações em Diferenças de Primeira Ordem . . . . .	731
15.1.1	Sistema de Equações em Diferenças de Primeira Ordem Homogênas . . . . .	731
15.1.2	Solução de Sistemas Homogêneos . . . . .	732
15.2	Teoria da Estabilidade . . . . .	733
15.3	Sistemas Bidimensionais . . . . .	735
15.4	Aplicações de Sistemas de Equações em Diferenças . . . . .	742
15.4.1	Overshooting da Taxa de Câmbio . . . . .	743
15.4.2	Modelo Novo Keynesiano . . . . .	747
<b>16</b>	<b>Cálculo de Variações</b>	<b>750</b>
16.1	Tempo Contínuo . . . . .	751
16.1.1	Equação de Euler-Lagrange . . . . .	751
16.1.2	Condições de Contorno . . . . .	754
16.1.3	Horizonte Infinito . . . . .	755
16.1.4	Condição Suficiente . . . . .	756
16.1.5	Crescimento Ótimo em Ramsey . . . . .	756
16.2	Tempo Discreto . . . . .	758
16.2.1	Equação de Euler-Lagrange . . . . .	759
16.2.2	Condições de Contorno . . . . .	759
16.2.3	Horizonte Infinito . . . . .	760
16.2.4	Condição Suficiente . . . . .	761
16.2.5	Consumo ótimo . . . . .	761
<b>17</b>	<b>Programação Dinâmica</b>	<b>763</b>
17.1	Horizonte Finito . . . . .	765
17.2	Horizonte Infinito . . . . .	770
17.3	Aplicações . . . . .	773
17.3.1	Ramsey . . . . .	773
17.3.2	Teoria dos Jogos . . . . .	776
<b>18</b>	<b>Controle ótimo</b>	<b>778</b>
18.1	O Princípio do Máximo de Pontryagin . . . . .	779
18.2	Problemas de Controle ótimo em Horizonte Infinito . . . . .	782
18.3	Aplicações . . . . .	785
18.3.1	Política Monetária Ótima . . . . .	785
18.3.2	Poupança: A Hipótese da Renda Permanente . . . . .	792
<b>19</b>	<b>Anexo</b>	<b>800</b>

---

## LISTA DE FIGURAS

---

1.3.1	Plano Complexo . . . . .	20
1.3.2	Números Complexos . . . . .	21
1.3.3	Coordenadas Polares . . . . .	21
2.1.1	Feixe de Retas Paralelas . . . . .	23
2.1.2	Dois Sentidos para uma Mesma Direção . . . . .	23
2.1.3	Conjunto de Segmentos Orientados Equipolentes . . . . .	24
2.1.4	Vetores $\vec{u}$ , $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são Coplanares . . . . .	24
2.1.5	Representação Geométrica da Operação de Adição de Vetores . . . . .	26
2.1.6	Representação Geométrica da Operação de Subtração de Vetores . . . . .	26
2.1.7	Ilustração da Propriedade $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ . . . . .	26
2.1.8	Representação Geométrica da Multiplicação por Escalar e Elemento Neutro . . . . .	27
2.2.1	Sistema de Coordenadas Ortonormais . . . . .	31
2.2.2	Sistema de Coordenadas Oblíquo . . . . .	31
2.3.1	O Plano Numérico $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . . . . .	32
2.4.1	Subconjunto $S$ no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	33
2.4.2	Subconjunto $S$ no $\mathbb{R}^2$ . . . . .	33
2.5.1	Feixe de Retas Paralelas . . . . .	34
2.6.1	A Intersecção dos Subespaços $U$ e $W$ é o Eixo $y$ dos Eixos Coordenados . . . . .	36
3.4.1	Ilustração de Normas no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	49
3.5.1	Relação entre o ângulo e o Produto Escalar de dois Vetores . . . . .	50
3.5.2	Relação entre o Ângulo e o Produto Escalar de dois Vetores . . . . .	51
3.9.1	Projeção de um Vetor . . . . .	56
4.1.1	Produto de Matrizes . . . . .	63
4.1.2	Interpretação Geométrica do Determinante: Área de um Paralelogramo . . . . .	71
4.1.3	Interpretação Geométrica do Determinante: Área de um Paralelogramo . . . . .	71
4.1.4	Interpretação Geométrica do Determinante: Volume de um Paralelepípedo . . . . .	73
4.2.1	Interpretação Geométrica por Linhas e por Colunas de um Sistema de Equações: Retas Concorrentes . . . . .	94
4.2.2	Interpretação Geométrica por Linhas e por Colunas de um Sistema de Equações: Retas Paralelas Distintas . . . . .	95

4.2.3	Interpretação Geométrica por Linhas e por Colunas de um Sistema de Equações: Retas Paralelas Coincidentes	96
4.2.4	Solução Gráfica do Sistema	97
4.2.5	Solução Gráfica do Sistema	98
4.3.1	Curvas de Oferta e de Demanda do Mercado de Frangos	103
4.3.2	Incidência de um Imposto	109
4.3.3	Demandas Inelásticas versus Demandas Elásticas	111
4.3.4	Peso Morto	112
4.3.5	Curva de possibilidade de produção	120
4.3.6	Curva de possibilidade de produção	121
4.3.7	Exemplo Ilustrativo	122
4.3.8	Oferta e demanda mundiais	125
4.3.9	Importações líquidas	127
4.3.10	Cadeia de Markov: Dois Estados	128
4.3.11	Algoritmo da Análise de Componentes Principais	135
5.2.1	Gráfico da função $t^\alpha - \alpha t$	146
5.2.2	Lema de Riesz	152
6.0.1	Método de Fermat	164
7.1.1	Noção Gráfica de Limites	172
7.2.1	Gráfico da função $f(x) = \sin(x)/x$	175
7.2.2	Gráfico da função $x \exp(1/x)$	176
7.2.3	Gráfico da função $1/(\exp(x) - 1) - 1/x$	177
7.2.4	Gráfico da função $x^{1/x}$	178
7.2.5	Descontinuidade removível	182
7.2.6	Descontinuidade de salto	182
7.2.7	Descontinuidade infinita	183
7.3.1	Sequência $x_n = \frac{1}{n}$	185
7.3.2	Sequência $x_n = (1 + (-1)^{n+1}) \frac{n}{2}$	186
7.3.3	Sequência $x_n = \sqrt[n]{n}$	186
7.3.4	Noção Geométrica de Limite	187
7.3.5	Sequência $x_n = \frac{\sin(nx)}{n}$	188
7.3.6	Sequência $x_n = \sqrt[n]{a}$	189
7.3.7	Sequência $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{1}{0.5n} \text{ e } \frac{x_n}{y_n}$	190
7.3.8	Sequência $x_n = \frac{(-1)^n}{n}, y_n = \frac{1}{n} \text{ e } (-1)^n$	190
7.3.9	Sequência $x_{2n-1} = -\frac{1}{n} \text{ e } x_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$	192
7.5.1	Gráfico da função $f_n = x^n$	201
7.5.2	Gráfico da função $f_n = x^n(1-x)^n$	202
7.5.3	Gráfico da função $f(x) = nx^n(1-x^n)$	203

8.1.1	Aproximando uma Reta Tangente por uma Sequência de Secantes . . . . .	210
8.2.1	Gráfico da Função $y = x^2$ . . . . .	211
8.3.1	Velocidade Instantânea . . . . .	213
8.5.1	Gráfico da Função $y =  x $ e Candidatos a Tangente . . . . .	217
8.5.2	Gráfico da Função $y = \sqrt{ x }$ e uma Possível Candidata a Tangente . . . . .	218
8.6.1	Regra do Produto . . . . .	221
8.8.1	Gráfico da Função $y = x^2$ , da Função $y = \sqrt{x}$ e da Função $y = x$ . . . . .	226
8.11.1	Derivadas Parciais: Interpretação Geométrica . . . . .	231
8.11.2	Vetor Gradiente . . . . .	234
8.11.3	Derivadas Parciais . . . . .	235
8.12.1	Gráfico da Função $z(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$ . . . . .	236
8.14.1	Gráfico de uma Função com Máximos Global e Local e Mínimos Global e Local . . . . .	246
8.14.2	Ponto Crítico se $f'(c) = 0$ . . . . .	247
8.14.3	Ponto Crítico se $f'(c)$ não Existe . . . . .	247
8.14.4	Função que Satisfaz as Condições do Teorema de Rolle . . . . .	249
8.14.5	Teorema do Valor Médio . . . . .	249
8.14.6	Gráfico de uma Função e sua Concavidade . . . . .	251
8.14.7	Gráfico da Função $f(x) = x^4$ . . . . .	252
8.14.8	Gráfico da Função $g(x, y) = x^2 + 6xy + 4y^2 + 2x - 4y$ . . . . .	254
8.14.9	Gráfico da Função $f(x) = \ln x$ . . . . .	257
8.14.10	Gráfico da Função $f(x) = \cos x$ . . . . .	257
9.1.1	Funções de Demanda . . . . .	261
9.2.1	Gráfico da Função $Q_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ . . . . .	265
9.2.2	Gráfico da Função $Q_2(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ . . . . .	266
9.2.3	Gráfico da Função $Q_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ . . . . .	266
9.2.4	Gráfico da Função $Q_4(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ . . . . .	266
9.2.5	Gráfico da Função $Q_5(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ . . . . .	267
9.4.1	Domínio da Função . . . . .	273
9.5.1	A Curva de Nível de $f$ de Valor Mais Alto é Tangente ao Conjunto Restrição $C$ . . . . .	275
9.5.2	$\nabla f(x^*)$ e $\nabla h(x^*)$ Estão Alinhados no Máximo ou no Mínimo Condicionado $x^*$ . . . . .	278
9.5.3	$\nabla f$ e $\nabla g$ Apontam na Mesma Direção e Sentido no Máximo $p$ . . . . .	282
9.5.4	Situação em que a Restrição é Inativa . . . . .	283
9.6.1	Dispêndios Decorrentes de uma Mudança no Preço . . . . .	306
9.6.2	A Competição Ativa Envolve uma Forma Particular de Rivalidade: Rivalidade entre Compradores Alternativos e/ou Vendedores Alternativos – Sem Competição, Competição Perfeita, Competição Imperfeita . . . . .	311
9.6.3	Curva de Oferta da Firma Competitiva . . . . .	313
9.6.4	Utilidade Marginal da Sociedade . . . . .	314
9.6.5	Curva de Oferta . . . . .	316
9.6.6	Receita Marginal do Monopolista . . . . .	337
9.6.7	Preço e Quantidade Ótima do Monopolista . . . . .	337
9.6.8	Caso em que o Monopolista não Apresenta Lucro . . . . .	338

9.6.9	Peso Morto do Monopolista . . . . .	339
9.6.10	Distribuição dos Consumidores . . . . .	353
9.6.11	Demanda Unitária . . . . .	354
9.6.12	Equilíbrio com preços rígidos . . . . .	369
9.6.13	Overshooting . . . . .	371
9.6.14	Efeitos do overshooting . . . . .	371
9.6.15	Efeito de uma Expansão Monetária . . . . .	376
9.6.16	Efeito de uma Expansão Monetária sobre a Balança Comercial . . . . .	377
9.6.17	Efeito de uma Expansão Fiscal . . . . .	377
9.6.18	Mudança de Lucros frente a um Aumento de Preços . . . . .	380
9.6.19	Provisão Ótima de Bens Públicos . . . . .	393
10.1.1	Função $f = -0.2(x+1)(x-5)(x-2)$ com $N = 10$ . . . . .	416
10.1.2	Função $f = -0.2(x+1)(x-5)(x-2)$ com $N = 50$ . . . . .	418
10.1.3	Gráfico da Função $f(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$ . . . . .	419
10.2.1	Gráfico Alusivo ao Teorema do Confronto . . . . .	420
10.2.2	Gráfico da Função $x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$ . . . . .	421
10.2.3	Gráfico da Função $y = x^2 + C$ . . . . .	428
10.4.1	Soma de Riemann para uma Integral Dupla . . . . .	446
10.5.1	Curva de Demanda . . . . .	450
10.5.2	Oferta e Demanda . . . . .	451
10.5.3	Curva de Lorenz . . . . .	454
10.5.4	Índice de Gini: Interpretação Geométrica . . . . .	456
11.3.1	Campo de Vetores para $y' = \frac{1}{2}(3-y)$ . . . . .	463
11.3.2	Campo de Vetores para $y' = (y-1)(y-5)$ . . . . .	464
11.3.3	Campo de Vetores para $y' = y+t$ . . . . .	465
11.3.4	Campo de Vetores para $y' = y-t$ . . . . .	465
11.4.1	Campo de Vetores para $y' + y = \exp(2t)$ . . . . .	468
11.4.2	Campo de Vetores para $ty' - y = t^2 \exp(-t), t > 0$ . . . . .	469
11.4.3	Gráfico da função $y(x) = \frac{1}{2-x}$ . . . . .	477
11.4.4	Gráfico da Função $y(x) = x^2$ . . . . .	478
11.4.5	Gráfico da Função $y(x) = \frac{x}{cx-1}$ . . . . .	479
11.7.1	Dinâmica de Preços . . . . .	505
11.7.2	Dinâmica de Preços em Expectativas Adaptativas . . . . .	507
11.7.3	Dinâmica da Taxa de Desemprego . . . . .	509
11.7.4	Dinâmica no Modelo Harrod-Domar . . . . .	511
11.7.5	Dinâmica do Nível de Preços no Modelo de Cagan: Comportamento Estável . . . . .	513
11.7.6	Dinâmica de $k(t)$ no Modelo de Solow . . . . .	515
11.7.7	Dinâmica Inflacionária com Raízes Repetidas . . . . .	517
11.7.8	Dinâmica Inflacionária com Raízes Complexas . . . . .	518
11.7.9	Dinâmica Inflacionária com Raízes Reais e Distintas . . . . .	518

11.7.10	Dinâmica Inflacionária em um Modelo com NAIRU . . . . .	520
11.7.11	Dinâmica da Taxa de Desemprego em um Modelo com NAIRU . . . . .	520
11.7.12	Dinâmica Inflacionária com Histerese: Caso das Raízes Complexas . . . . .	522
11.7.13	Dinâmica Inflacionária com Histerese: Caso das Raízes Reais e Distintas . . . . .	522
11.7.14	Dinâmica Inflacionária com Histerese: Caso das Raízes Repetidas . . . . .	523
11.7.15	Dinâmica da Taxa de Desemprego com Histerese: Caso das Raízes Complexas . .	524
11.7.16	Dinâmica da Taxa de Desemprego com Histerese: Caso das Raízes Reais e Distintas	524
11.7.17	Dinâmica da Taxa de Desemprego com Histerese: Caso das Raízes Repetidas .	525
11.7.18	Gráfico da Função $u(x) = -e^{-x}$ . . . . .	525
11.7.19	Função Distribuição Acumulada . . . . .	527
11.7.20	Conjunto de Aceitação . . . . .	528
11.7.21	Comparação de Aversão ao Risco Através do Conjunto de Aceitação . . . . .	529
11.7.22	Gráfico da função $u(x) = -e^{-x}$ . . . . .	531
11.7.23	Curvas $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$ . . . . .	537
11.7.24	Existência e Unicidade do Equilíbrio Competitivo . . . . .	538
11.7.25	Comportamento Dinâmico de $(p_1, p_2)$ . . . . .	538
12.1.1	Função Localmente Lipschitziana . . . . .	542
12.2.1	Gráfico da EDO $x' = x^{2/3}$ . . . . .	546
12.2.2	A Escolha de $\delta$ Influencia o Domínio de Definição da Solução . . . . .	547
12.2.3	Iterados de Picard . . . . .	550
12.3.1	Convergência para o Bordo de $U$ . . . . .	560
12.3.2	Campo de Vetores para $x' = x(x - 1)$ . . . . .	561
12.4.1	Teorema da Dependência Contínua . . . . .	568
12.5.1	Equações Diferenciais Autônomas . . . . .	576
12.5.2	Trajetória do Ponto $x$ . . . . .	577
12.5.3	Teorema do Fluxo Tubular . . . . .	582
12.5.4	Ponto Estacionário . . . . .	583
12.5.5	Gráfico de um Mergulho . . . . .	584
12.5.6	Transformação de Poincaré . . . . .	586
12.6.1	Exponencial de uma Aplicação Linear . . . . .	591
12.6.2	Retrato de Fase de $\exp(tA)$ . . . . .	604
12.6.3	Retrato de Fase de $\exp(tB)$ . . . . .	605
12.7.1	Logaritmo no Caso Complexo . . . . .	621
12.8.1	Retrato de Fase de $\exp(tA)$ . . . . .	627
12.9.1	Campos de Vetores em Superfícies . . . . .	636
12.9.2	Usando o Teorema da Curva Fechada . . . . .	638
12.10.1	Hiperbolicidade . . . . .	645
12.10.2	Órbita Periódica Hiperbólica . . . . .	647
12.10.3	Matrizes Similares . . . . .	647
12.10.4	Teorema de Grobman-Hartman . . . . .	648
12.10.5	Conjugação de Fluxos . . . . .	649
12.11.1	Teorema da Variedade Estável . . . . .	658

12.11.2	Violação do Teorema da Variedade Estável . . . . .	659
13.2.1	Retrato de Fase do Sistema $x'_1 = x_2$ e $x'_2 = -\frac{1}{2}x_2 - 2x_1 - x_1^2$ . . . . .	669
13.2.2	Retrato de Fase da EDO $x' = -x + x^3$ . . . . .	669
13.2.3	Retrato de Fase do Sistema $x'_1 = x_2$ e $x'_2 = -x_1$ . . . . .	671
13.2.4	Retrato de Fase do Sistema $x'_1 = x_2$ e $x'_2 = -x_1$ . . . . .	671
13.2.5	Retrato de Fase de um Sistema com Autovalores Complexos . . . . .	672
13.2.6	Retrato de Fase para o Caso Diagonal com Autovalores Reais . . . . .	673
13.2.7	Retrato de Fase para o Caso Não Diagonal . . . . .	674
13.2.8	Retrato de Fase do Sistema $x'_1 = x_2$ e $x'_2 = x_1 - x_2 + x_1(x_1 - 2x_2)$ . . . . .	677
13.3.1	Curvas $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$ . . . . .	684
13.3.2	Existência e Unicidade do Equilíbrio Competitivo . . . . .	684
13.3.3	Comportamento Dinâmico de $(p_1, p_2)$ . . . . .	685
14.1.1	Comportamento de $X_t = \phi^t c$ ( $\phi = 0.5$ e $\phi = 1.1$ ) . . . . .	693
14.2.1	Gráfico da Função $f(x) = \cos(x)$ . . . . .	696
14.2.2	Modelo Solow-Swan . . . . .	697
14.4.1	Modelo Cobweb: Comportamento de Convergência ( $\beta = 1$ e $\gamma = 0.8$ ; $\beta = 0.6$ e $\gamma = 0.2$ ) . . . . .	703
14.4.2	Modelo Cobweb: Comportamento Oscilatório ( $\beta = 1$ e $\gamma = 1$ ) . . . . .	703
14.4.3	Modelo Cobweb: Comportamento Explosivo ( $\beta = 1$ e $\gamma = 1.2$ ; $\beta = 1.2$ e $\gamma = 1.7$ )	704
14.4.4	Função de Produção com Retornos Marginais Decrescentes . . . . .	704
14.4.5	Condições de Inada . . . . .	705
14.4.6	Intensidade do Capital no Modelo de Solow . . . . .	707
14.4.7	Função de Impulso Resposta com Expectativas Adaptativas . . . . .	711
14.4.8	Função de Impulso Resposta com Expectativas Racionais . . . . .	711
14.5.1	Comportamento de $X_t = c\lambda_1^t$ . . . . .	715
14.5.2	Comportamento de $(c_1 + c_2 t)\lambda^t$ . . . . .	715
14.5.3	Comportamento de $(c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t)$ . . . . .	716
14.5.4	Propriedades de Estabilidade . . . . .	717
15.3.1	Exemplo de um Diagrama de Fase . . . . .	737
15.3.2	Steady-State Assintoticamente Estável, $\lambda_1 = 0.8$ e $\lambda_2 = 0.5$ . . . . .	738
15.3.3	Steady-State Instável, $\lambda_1 = 1.2$ e $\lambda_2 = 2$ . . . . .	738
15.3.4	Steady-State de Ponto de Sela, $\lambda_1 = 1.2$ e $\lambda_2 = 0.8$ . . . . .	739
15.3.5	Steady-State Assintoticamente Estável com Raízes Repetidas, $\lambda_1 = 0.8$ e $\lambda_2 = 0.8$ .	739
15.3.6	Steady-State Degenerado, $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 0.8$ . . . . .	740
15.3.7	Autovalores Repetidos com um Autovetor Independente, $\lambda = 0.8$ . . . . .	741
15.3.8	Autovalores Complexos com um Steady State Estável, $\lambda_{1,2} = 0.7 \pm 0.2i$ . . . . .	742
15.3.9	Autovalores Complexos dentro do Círculo Unitário, $\lambda_{1,2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ . . . . .	742
15.4.1	Modelo de Overshooting de Dornbusch . . . . .	747
18.3.1	Comportamento Dinâmico de $k_t$ e $p_1$ . . . . .	791

18.3.2 Diagrama de Irving Fisher: Determinação de  $\mu(r)$  . . . . . 797

---

## INTRODUÇÃO

---

### 1.1 Conceitos

1. Uma **definição** é um enunciado que descreve o significado de um termo.
2. **Proposição** é uma sentença declarativa, na qual são válidos os princípios da identidade, da não contradição e do terceiro excluído.
  - (a) Princípio da identidade: uma proposição é igual a si mesma.
  - (b) Princípio da não contradição: uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
  - (c) Princípio do terceiro excluído: uma proposição ou é verdadeira ou é falsa, não existe uma terceira alternativa.
3. **Axioma** é um ponto de partida de raciocínio, uma proposição assumida como verdadeira e que não precisa de prova.
4. Uma **prova** é um argumento válido que estabelece a verdade de sentenças matemáticas, ou seja, que uma afirmação é verdadeira.
5. Um **teorema** é uma proposição que é garantida por uma prova, ou seja, que se demonstra ser verdadeira baseada em proposições anteriores.
6. **Lemas** são afirmações provadas que ajudam a provar afirmações mais importantes (teoremas). Um lema é normalmente um teorema auxiliar utilizado para provar outros teoremas.
7. Um **corolário** é um teorema que pode ser estabelecido diretamente do teorema que foi provado. Quando um teorema ou uma prova nos ajudam a concluir facilmente que outras afirmações são verdadeiras chamamos estas últimas de corolários do teorema.

## 1.2 A Natureza da Economia Matemática

A economia é uma ciéncia social que estuda como fazer escolhas. Especificamente, ele estuda o comportamento e fenômenos econômicos dos indivíduos, bem como como os indivíduos, como consumidores, famílias, empresas, organizações e agências governamentais, fazem escolhas que alocam recursos limitados entre usos concorrentes<sup>1</sup>.

A economia matemática é uma abordagem da análise econômica, na qual os economistas fazem uso de símbolos matemáticos na formulação do problema e também recorrem a teoremas matemáticos conhecidos para auxiliar no raciocínio.

Visto que a economia matemática é apenas uma abordagem da análise econômica, ela não deve e não difere da abordagem não matemática da análise econômica em nenhum aspecto fundamental. A diferença entre essas duas abordagens é que, na primeira, as suposições e conclusões são expressas em símbolos matemáticos, em vez de palavras, e nas equações, em vez de sentenças, de modo que a relação interdependente entre as variáveis econômicas e as conclusões resultantes são mais rigorosas e concisas por meio do uso de modelos matemáticos e métodos econométricos. Além disso, para estudar, analisar e resolver problemas sociais e econômicos práticos, bem como desenvolver bem suas habilidades de gestão e liderança, acho que a metodologia de pesquisa de “três dimensões e seis naturezas” deve ser usada no estudo e solução de problemas socioeconômicos realistas.

### Três dimensões:

1. lógica teórica
2. conhecimento prático
3. perspectiva histórica

### Seis naturezas:

1. ser científico
2. rigoroso
3. realista
4. pertinente
5. prospectivo
6. instigante

Somente realizando as “três dimensões” e as “seis naturezas”, podemos apresentar percepções lógicas, factuais e históricas, visões de alta perspicácia e recomendações de políticas para o desenvolvimento econômico de uma nação e do mundo, bem como inovações e trabalhos teóricos que

<sup>1</sup> Para detalhes, ver “Backhouse, Roger E., and Steven G. Medema. 2009. “Retrospectives: On the Definition of Economics”. Journal of Economic Perspectives 23 (1): 221–33.”

pode ser testado por dados, prática e história. Somente através das três dimensões, suas avaliações e propostas podem ter a garantia de ter essas seis naturezas e se tornar um bom economista.

O estudo de questões econômicas sociais não pode envolver simplesmente o mundo real em seu experimento, portanto, não só requer uma análise teórica baseada em inferência lógica inerente e, mais frequentemente do que não, comparações verticais e horizontais da perspectiva mais ampla da história para extrair experiências e lições, mas também precisa de ferramentas de estatística e econometria para fazer análises quantitativas empíricas ou teste, os três dos quais são todos indispensáveis. Na economia, a análise teórica geralmente combina teoria, história e estatística, apresentando não apenas a análise teórica da lógica inerente e a análise comparativa da perspectiva histórica, mas também a análise empírica e quantitativa com ferramentas estatísticas para exame e investigação. De fato, em última análise, todo conhecimento é história, toda ciência é lógica e todo julgamento é estatística.

Como tal, não é surpreendente que a matemática e a estatística/ econometria sejam usadas como ferramentas analíticas básicas e mais importantes em todos os campos da economia. Para quem estuda economia e realiza pesquisas, é necessário ter conhecimentos suficientes de matemática e estatística matemática. Portanto, é de grande necessidade dominar conhecimentos matemáticos suficientes se você deseja aprender bem a economia, conduzir pesquisas econômicas e se tornar um bom economista.

Por que descrever o mundo com modelos matemáticos, em vez de usar teoria e lógica verbal? Afinal, esse era o estado da economia até não muito tempo atrás (anos 1950). A abordagem matemática tem as seguintes vantagens:

1. torna a linguagem mais precisa e a formulação de pressupostos mais clara, o que pode reduzir muitos debates desnecessários resultantes de linguagem verbal imprecisa.
2. torna a lógica analítica mais rigorosa e estabelece claramente o limite, o escopo aplicável e as condições para uma conclusão ser válida. Caso contrário, pode ocorrer o abuso de uma teoria.
3. a matemática pode ajudar a obter resultados que não podem ser facilmente obtidos por meio da intuição.
4. ajuda a melhorar e estender as teorias econômicas existentes.

É, entretanto, digno de nota que um bom mestre em matemática não pode garantir ser um bom economista. Também requer uma compreensão total da estrutura analítica e metodologias de pesquisa da economia, e ter uma boa intuição e visão dos ambientes econômicos reais e das questões econômicas. O estudo da economia não exige apenas a compreensão de alguns termos, conceitos e resultados da perspectiva da matemática, mas o mais importante, mesmo quando esses são dados por linguagem matemática ou figura geométrica, precisamos chegar ao seu significado econômico e os pensamentos e ideais econômicos profundos subjacentes. Assim, devemos evitar ser confundidos com fórmulas matemáticas ou símbolos no estudo da economia. Em suma, para se tornar um bom economista, você precisa ter uma forma de pensar original, criativa e acadêmica.

Um conceito-chave é o de modelo. Um modelo econômico é meramente um arcabouço teórico, e não há nenhuma razão inerente para que deva ser matemático. Se o modelo for matemático,

entretanto, geralmente consistirá em um conjunto de equações destinadas a descrever a estrutura do modelo. Ao relacionar uma série de variáveis umas com as outras de certas maneiras, essas equações dão forma matemática ao conjunto de suposições analíticas adotadas. Então, por meio da aplicação das operações matemáticas relevantes a essas equações, podemos buscar derivar um conjunto de conclusões que decorrem logicamente dessas suposições.

Os modelos matemáticos fazem suposições fortes e usam teoremas para fornecer conclusões perspicazes. Mas, lembre-se do Teorema A-A' C-C': seja  $C$  o conjunto de conclusões que seguem do conjunto de suposições  $A$ . Seja  $A'$  uma pequena perturbação de  $A$ . Existe  $A'$  tal que fornece um conjunto de conclusões  $C'$  que é separado de  $C$ .

Assim, o discernimento de  $C$  depende criticamente da plausibilidade de  $A$ . A plausibilidade de  $A$  depende da validade empírica, que precisa ser estabelecida, geralmente usando econometria. Por outro lado, as vezes a teoria nos informa sobre como olhar para os dados existentes, como coletar novos dados e quais ferramentas usar em sua análise.

A teoria é uma abstração do mundo. Você se concentra nas relações mais importantes que considera a priori para a compreensão de algum fenômeno. Isso pode resultar em um modelo econômico.

Outra ideia fundamental é a de equilíbrio. Como qualquer termo econômico, o equilíbrio pode ser definido de várias maneiras. Uma definição é que um equilíbrio para um modelo específico é uma situação em que não há tendência de mudança. De forma mais geral, significa, a partir de um conjunto de escolhas (opções) disponíveis, escolher a “melhor” de acordo com um determinado critério. É por esta razão que a análise de equilíbrio é denominada estática. O fato de que um equilíbrio implica nenhuma tendência para a mudança pode levar alguém a concluir que um equilíbrio constitui necessariamente um estado de coisas desejável ou ideal.

Por fim, é necessário uma distinção relevante. Considere quaisquer duas declarações,  $p$  e  $q$ . Quando dizemos “ $p$  é necessário para  $q$ ”, queremos dizer que  $p$  deve ser verdadeiro para que  $q$  seja verdadeiro. Para  $q$  ser verdadeiro requer que  $p$  seja verdadeiro, então sempre que  $q$  for verdadeiro, sabemos que  $p$  também deve ser verdadeiro. Então, poderíamos ter dito, em vez disso, que “ $p$  é verdadeiro se  $q$  for verdadeiro” ou simplesmente que “ $p$  é implicado por  $q$ ” ( $p \Leftarrow q$ ).

A noção de necessidade é distinta da de suficiência. Quando dizemos “ $p$  é suficiente para  $q$ ”, queremos dizer que sempre que  $p$  é válido,  $q$  deve valer. Podemos dizer, “ $p$  é verdadeiro apenas se  $q$  for verdadeiro” ou que “ $p$  implica  $q$ ” ( $p \Rightarrow q$ ).

## 1.3 Estruturas Algébricas

### 1.3.1 Conjunto dos Números Reais

O conjunto dos números reais, denotado por  $\mathbb{R}$ , tem uma estrutura de corpo com relação as operações usuais de adição e multiplicação. Assim, o conjunto dos números reais tem as seguintes propriedades:

1. Axiomas de Fechamento

- (a)  $\mathbb{R}$  é fechado com relação a operação de adição. Para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  temos que  $x + y \in \mathbb{R}$ .
- (b)  $\mathbb{R}$  é fechado com relação a operação de multiplicação. Para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  temos que  $x \times y \in \mathbb{R}$ .

2. Axiomas da Operação de Adição

- (a) Associatividade: para todos  $x, y, z \in \mathbb{R}$  temos que  $(x + y) + z = x + (y + z)$ .
- (b) Comutatividade: para todos  $x, y \in \mathbb{R}$  temos que  $x + y = y + x$ .
- (c) Elemento neutro: existe um único elemento em  $\mathbb{R}$ , denotado por  $0_{\mathbb{R}}$ , tal que  $x + 0_{\mathbb{R}} = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- (d) Elemento simétrico: todo elemento  $x \in \mathbb{R}$  possui um único elemento simétrico  $(-x) \in \mathbb{R}$  tal que  $x + (-x) = 0_{\mathbb{R}}$ .

3. Axiomas da Operação de Multiplicação

- (a) Associatividade: para qualquer  $x, y, z \in \mathbb{R}$  temos que  $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ .
- (b) Comutatividade: para qualquer  $x, y \in \mathbb{R}$  temos que  $x \times y = y \times x$ .
- (c) Elemento neutro: existe um único elemento em  $\mathbb{R}$ , denotado por  $1_{\mathbb{R}}$ , tal que  $x \times 1_{\mathbb{R}} = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- (d) Inverso multiplicativo: todo elemento  $x \in \mathbb{R}$  com  $x \neq 0_{\mathbb{R}}$  possui um único elemento  $x^{-1} \in \mathbb{R}$  tal que  $x \times x^{-1} = 1_{\mathbb{R}}$ .
- (e) Distributividade: para quaisquer  $x, y, z \in \mathbb{R}$  temos que  $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$ .

### 1.3.2 Conjunto dos Números Complexos

Definimos o conjunto dos números complexos da seguinte forma:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}, \quad (1.3.1)$$

em que  $i = \sqrt{-1}$  é a unidade imaginária.

Considere os números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ . A operação de adição de dois números complexos é definida por:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i. \quad (1.3.2)$$

A operação de multiplicação de dois números complexos é definida por:

$$z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i. \quad (1.3.3)$$

Em particular, temos que  $i^2 = -1$ , que é compatível com a definição da unidade imaginária.

Considere o número complexo  $z = a + bi$ . Definimos a parte real como sendo o número real  $\operatorname{Re}(z) = a$  e a parte imaginária como sendo o número real  $\operatorname{Im}(z) = b$ .

Definimos o complexo conjugado do número complexo  $z = a + bi$ , que denotamos por  $\bar{z}$ , como sendo o número complexo  $z = a - bi$ .

O valor absoluto, ou módulo, do número complexo  $z = a + bi$ , que denotamos por  $|z|$ , é definido como sendo o número real não negativo  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Considere o número complexo  $z = a + bi$ . O argumento principal do número complexo  $z$  é definido da seguinte forma:

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & \text{se } a \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0, b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{se } a = 0, b < 0 \end{cases} \quad (1.3.4)$$

em que  $\theta = \arg(z)$  indica o ângulo formado entre o eixo  $0x$  e a reta que passa pela origem do plano  $\mathbb{R}^2$  e pelo ponto  $(a, b)$ .

Considere o número complexo  $z = a + bi$ . A forma polar do número complexo  $z$  é definida da seguinte forma:

$$z = |z|\exp(i\theta) = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta). \quad (1.3.5)$$

Dados dois números complexos  $z = a + bi$  e  $w = c + di$ , podemos estabelecer as seguintes propriedades:

1.  $\bar{\bar{z}} = z$
2.  $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
3.  $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
4.  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
5.  $|\bar{z}| = |z|$
6.  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
7.  $\bar{z} \cdot \bar{w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
8.  $|z \cdot w| = |z||w|$
9.  $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$
10.  $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

$$11. z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \text{ com } z \neq 0$$

**Lema 1.3.1.** Se  $z, w \in \mathbb{C}$ , então

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}). \quad (1.3.6)$$

*Demonstração.* Inicialmente, vamos escrever

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} + (z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + (z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w). \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Podemos observar que,  $\bar{z} \cdot w$  é o conjugado de  $z \cdot \bar{w}$ . Portanto, temos que  $z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w = 2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})$ , o que completa a prova. ■

FIGURA 1.3.1 – PLANO COMPLEXO

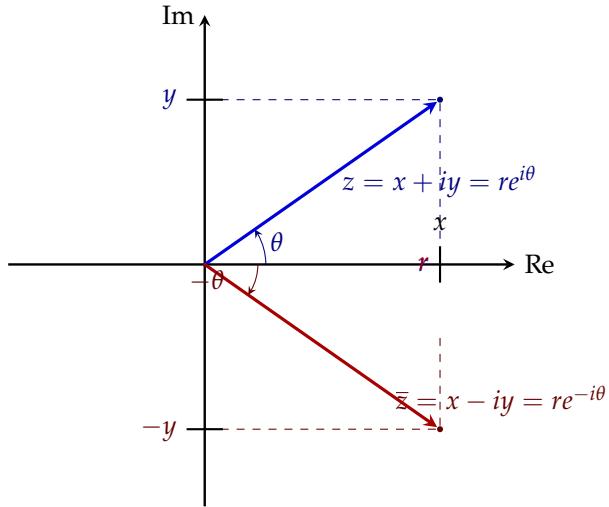


FIGURA 1.3.2 – NÚMEROS COMPLEXOS

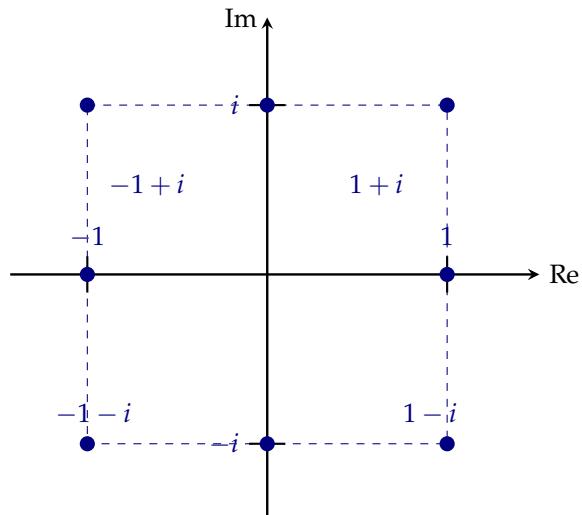
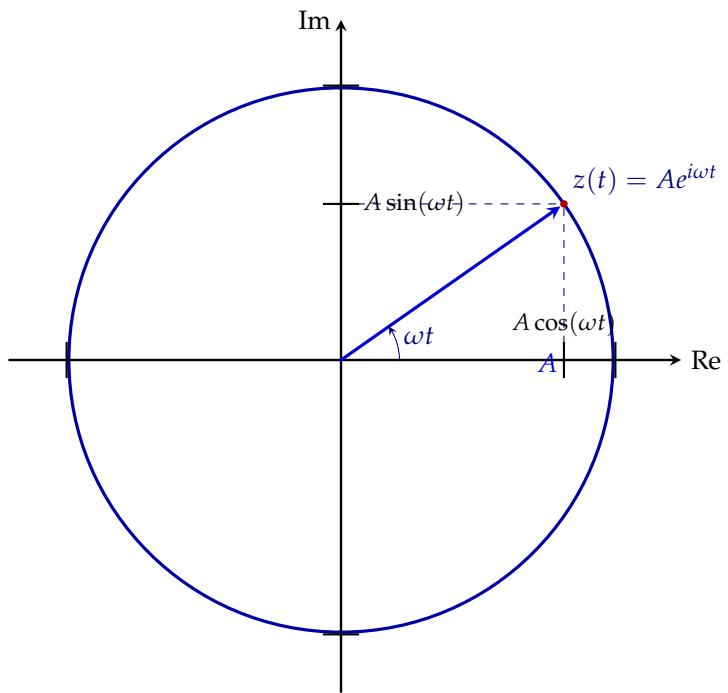


FIGURA 1.3.3 – COORDENADAS POLARES



---

**2**

---

## ESPAÇOS VETORIAIS

---

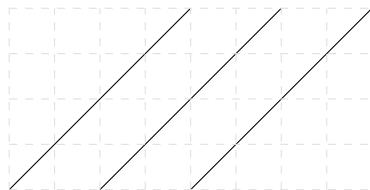
## 2.1 Propriedades

Em vários ramos da matemática, defrontamo-nos com conjuntos, os quais são, combinações lineares de seus elementos. Por exemplo, no estudo de equações lineares, é bastante natural considerar combinações lineares das linhas ou colunas de uma matriz. Em cálculo diferencial trabalhamos com combinações lineares de funções, por exemplo, no estudo de equações diferenciais. De um modo geral, a primeira experiência com vetores é apresentada com o estudo dos espaços euclidianos bidimensional e tridimensional. A Álgebra Linear é o ramo da matemática que trata das propriedades comuns a sistemas algébricos constituídos por um conjunto no qual a noção de combinação linear de seus elementos possa ser definida. Nesta seção vamos definir o objeto matemático que, como a experiência mostrou, é a abstração mais útil e interessante deste tipo de sistema algébrico, o vetor. Antes de proceder ao seu estudo, vamos a algumas definições.

**Definição 2.1.1 (Segmento Orientado).** Um segmento orientado (ou vetor aplicado) é um par ordenado  $(A, B)$  de pontos do espaço Euclidiano, no qual o ponto  $A$  é a origem e o ponto  $B$  é a extremidade. Os segmentos orientados  $(A, A)$  são ditos nulos. É importante observar que se  $A \neq B$ , o segmento orientado  $(A, B)$  é diferente do segmento orientado  $(B, A)$ .

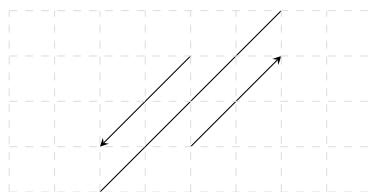
**Definição 2.1.2.** Dizemos que os segmentos orientados  $(A, B)$  e  $(C, D)$  têm a mesma direção se os segmentos geométricos  $AB$  e  $CD$  são paralelos, que indicamos  $AB \parallel CD$ , incluindo o caso em que as retas suportes são coincidentes. Assim, dizemos que os segmentos orientados  $(A, B)$  e  $(C, D)$  são paralelos.

FIGURA 2.1.1 – FEIXE DE RETAS PARALELAS



**Definição 2.1.3.** Dizemos que os segmentos orientados  $(A, B)$  e  $(C, D)$  têm o mesmo sentido se os segmentos geométricos  $AC$  e  $BD$  tenham intersecção vazia.

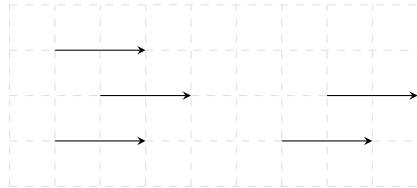
FIGURA 2.1.2 – DOIS SENTIDOS PARA UMA MESMA DIREÇÃO



**Definição 2.1.4 (Segmentos Equipolentes).** Dizemos que os segmentos orientados  $(A, B)$  e  $(C, D)$  são equipolentes, e indicados por  $(A, B) \approx (C, D)$ , caso ocorra uma das seguintes situações:

1. ambos os segmentos orientados são nulos.
2. os segmentos orientados são não-nulos, e têm o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido.

FIGURA 2.1.3 – CONJUNTO DE SEGMENTOS ORIENTADOS EQUIPOLENTES



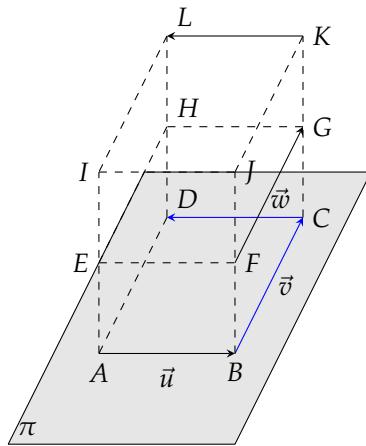
**Definição 2.1.5.** Seja  $X$  o conjunto de todos os segmentos orientados do espaço Euclidiano, e considere um segmento orientado  $(A, B) \in X$  fixo, porém arbitrário. Chama-se classe de equipolência, ou classe de equivalência, que indicamos por  $\overrightarrow{AB}$ , ao conjunto de todos os segmentos orientados que são equipolentes ao segmento orientado  $(A, B)$ . O segmento orientado  $(A, B)$  é o representante da classe de equivalência.

Dessa definição decorre o seguinte corolário, que é muito importante em Economia.

**Corolário 2.1.1.** A relação de equipolência definida sobre  $X$ , que indicamos por  $\approx$ , é uma relação de equivalência.

**Definição 2.1.6.** Diremos que um conjunto de vetores são coplanares se esses vetores possuem representantes contidos no mesmo plano.

FIGURA 2.1.4 – VETORES  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  E  $\vec{w}$  SÃO COPLANARES



**Definição 2.1.7 (Conceito de Vetor).** Considere  $X$  o conjunto de todos os segmentos orientados do espaço Euclidiano. Definimos um vetor no espaço Euclidiano como sendo uma classe de equipolência de segmentos orientados. Se  $(A, B)$  é o segmento orientado representante da classe de equipolência, o vetor correspondente é indicado por  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ . No caso em que os segmentos orientados  $(A, B)$  e  $(C, D)$  são equipolentes, dizemos que os vetores  $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$  e  $\vec{w} = \overrightarrow{CD}$  são iguais, isto é, essas duas classes de equipolência coincidem pela propriedade da transitividade.

Pelos fatos expostos acima, tem-se que um vetor fica bem determinado se apresentamos qualquer um de seus representantes. Definimos o espaço de vetores  $V$ , como sendo o conjunto de todos os vetores no espaço  $n$ -dimensional. É importante observar que nunca devemos utilizar o termo vetores equipolentes, tendo em vista que equipolência é uma relação de equivalência entre segmentos orientados, e o vetor representa uma classe de equipolência associada a um determinado segmento orientado. Com isso, podemos proceder ao conceito de espaço vetorial.

**Definição 2.1.8 (Espaço Vetorial).** Um espaço vetorial consiste do seguinte:

1. Um conjunto não vazio  $\vec{v}$  de objetos, denominados vetores.
2. Um corpo  $\mathbb{F}$  ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) de escalares.
3. Uma operação de adição de vetores, que associa a cada par de elementos  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  um elemento  $\vec{u} + \vec{v} \in V$ , isto é,  $\vec{v}$  é fechado com relação à operação de adição. Esta operação tem as seguintes propriedades:
  - (a) Comutatividade:  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ .
  - (b) Associatividade:  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ .
  - (c) Elemento neutro: existe um elemento  $0_{\vec{v}} \in V$  tal que  $\vec{u} + 0_V = \vec{u}, \forall \vec{u} \in V$ .
  - (d) Elemento simétrico: para todo elemento  $\vec{u} \in V$  existe o elemento  $-\vec{u} \in V$  tal que  $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0_V, \forall \vec{u} \in V$ .
4. Uma operação de multiplicação por escalar, que associa a cada elemento  $\vec{u} \in V$  e cada escalar  $\alpha \in \mathbb{F}$  um elemento  $\alpha\vec{u} \in V$ , isto é,  $\vec{v}$  é fechado com relação à operação de multiplicação por escalar. Esta operação tem as seguintes propriedades:
  - (a) Associatividade:  $(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u}), \forall \vec{u} \in V \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ .
  - (b) Distributividade para a adição de elementos:  $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{F}$ .
  - (c) Distributividade para a multiplicação por escalar:  $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}, \forall \vec{u} \in V \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ .
  - (d) Elemento identidade.  $1_{\mathbb{F}}\vec{u} = u, \forall \vec{u} \in V$ .

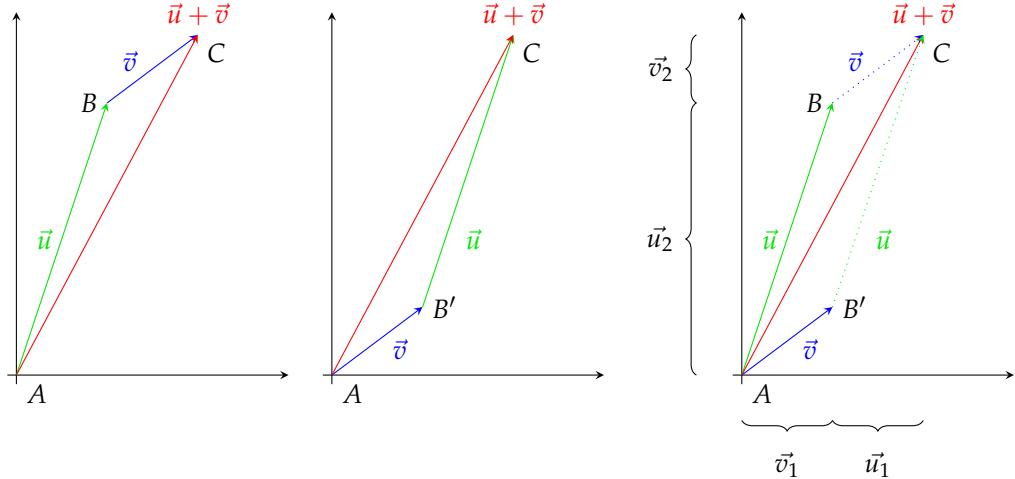
**Exemplo 2.1.1.** Mostre que  $\vec{v} + \vec{v} = 2\vec{v}$ .

Sabemos que

$$\vec{v} + \vec{v} = 1\vec{v} + 1\vec{v} = (1 + 1)\vec{v} = 2\vec{v}. \quad (2.1.1)$$

Na figura abaixo temos a representação geométrica da soma dos vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ . Para isso, consideramos o segmento orientado  $(A, B)$  um representante do vetor  $\vec{u}$ , e o segmento orientado  $(B, C)$  um representante do vetor  $\vec{v}$ . Assim, definimos o segmento orientado  $(A, C)$  com sendo um representante do vetor  $\vec{u} + \vec{v}$ .

FIGURA 2.1.5 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA OPERAÇÃO DE ADIÇÃO DE VETORES



Na Figura 2.1.6 temos a representação geométrica da operação de subtração de vetores. Para isso, consideramos o segmento orientado  $(0, A)$  um representante do vetor  $\vec{u}$ , e o segmento orientado  $(0, B)$  um representante do vetor  $\vec{v}$ . Assim, definimos o segmento orientado  $(B, A)$  um representante do vetor  $\vec{u} - \vec{v}$ , que indicamos  $\overrightarrow{BA} = \vec{u} - \vec{v}$ . Portanto, os segmentos orientados  $(0, C)$  e  $(B, A)$  são equipolentes.

FIGURA 2.1.6 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA OPERAÇÃO DE SUBTRAÇÃO DE VETORES

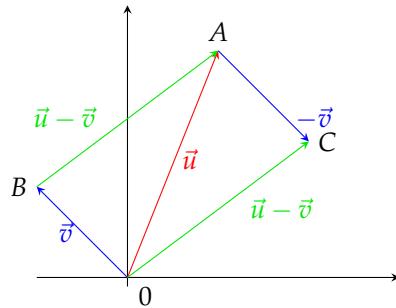


FIGURA 2.1.7 – ILUSTRAÇÃO DA PROPRIEDADE  $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

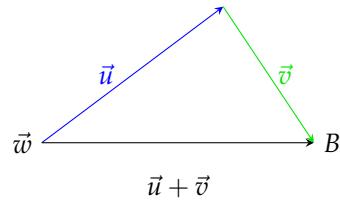
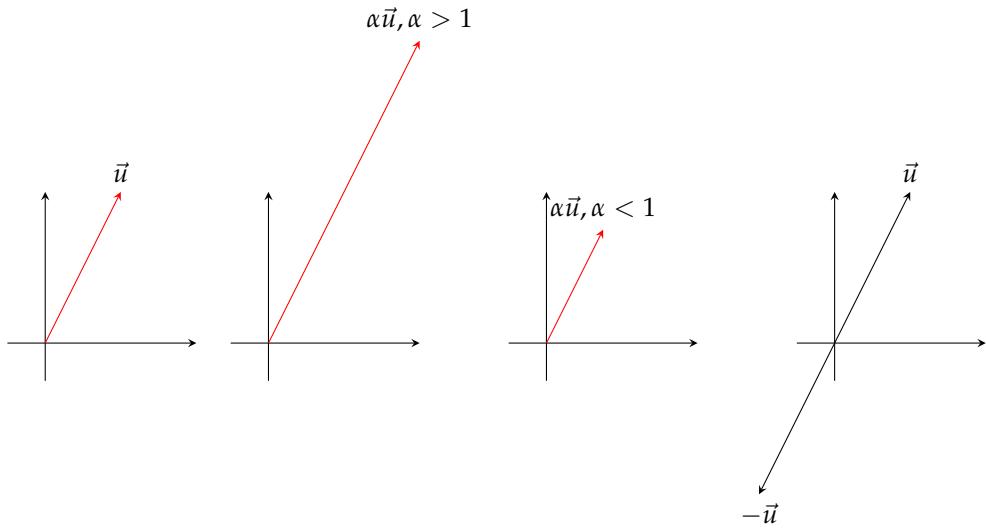
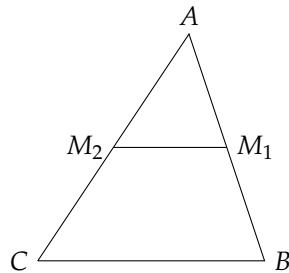


FIGURA 2.1.8 – REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA DA MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR E ELEMENTO NEUTRO



**Exemplo 2.1.2.** Os segmentos que unem os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado.



Seja o triângulo  $\triangle ABC$  e seja  $M_1$  o ponto médio do lado  $\overline{AB}$  e  $M_2$  o ponto médio do lado  $\overline{AC}$ . Como  $M_1$  é o ponto médio do lado  $\overline{AB}$  temos que o vetor  $\overrightarrow{AM_1}$  é igual a metade do vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Analogamente, temos que  $\overrightarrow{AM_2}$  é igual a metade do vetor  $\overrightarrow{AC}$ . Assim,

$$\overrightarrow{AM_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \implies 2\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{AB}, \quad (2.1.2)$$

$$\overrightarrow{AM_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \implies 2\overrightarrow{AM_2} = \overrightarrow{AC}. \quad (2.1.3)$$

Como

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}, \quad (2.1.4)$$

logo temos

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} \\
&= 2\overrightarrow{AM_2} + 2\overrightarrow{AM_1} \\
&= 2(\overrightarrow{AM_2} + \overrightarrow{AM_1}) \\
&= 2\overrightarrow{M_2 M_1}.
\end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Assim,

$$\overrightarrow{M_2 M_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB}. \tag{2.1.6}$$

E assim o segmento  $\overrightarrow{M_2 M_1}$  é paralelo ao segmento  $\overrightarrow{CB}$  e seu comprimento é metade do último.

**Exemplo 2.1.3.** O conjunto dos números reais,  $\mathbb{R}$ , com as operações usuais de adição e multiplicação de números reais, é um espaço vetorial real.

**Exemplo 2.1.4.** O conjunto  $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é uma função}\}$ , com a operação de adição de elementos definida como

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}), \tag{2.1.7}$$

e a operação de multiplicação por escalar definida como:

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad \forall f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \text{ e } \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.1.8}$$

é um espaço vetorial real.

**Teorema 2.1.1 (Unicidade do Elemento Neutro).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ . Então, existe um único elemento neutro da operação de adição  $0_{\vec{v}} \in V$ .

**Teorema 2.1.2 (Unicidade do Elemento Simétrico).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ . Então, todo elemento  $\vec{u} \in V$  possui um único elemento simétrico.

**Teorema 2.1.3 (Lei do Cancelamento).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$  e  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ . Então,  $\vec{v} = \vec{w}$ .

**Teorema 2.1.4.** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ , e  $\vec{u}, \vec{w} \in V$ . Então, existe um único elemento  $\vec{v} \in V$  tal que  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ .

**Teorema 2.1.5.** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ . Então, temos as seguintes propriedades:

1.  $0_{\mathbb{F}} \vec{u} = 0_V$ .

2.  $\alpha 0_V = 0_V$ .
3.  $(-\alpha)\vec{u} = -(\alpha\vec{u}) = \alpha(-\vec{u})$ .
4. Se  $\alpha\vec{u} = 0_V$ , então  $\alpha = 0_F$  ou  $\vec{u} = 0_V$ .
5. Se  $\alpha\vec{u} = \alpha\vec{v}$  e  $\alpha \neq 0_V$ , então  $\vec{u} = \vec{v}$ .
6. Se  $\alpha\vec{u} = \beta\vec{u}$  e  $\vec{u} \neq 0_V$ , então  $\alpha = \beta$ .
7.  $-(\vec{u} + \vec{v}) = (-\vec{u}) + (-\vec{v}) = -\vec{u} - \vec{v}$ .

Essas são importantes estruturas algébricas do  $\mathbb{R}^n$  que nos permitem estudar álgebra linear no  $\mathbb{R}^n$ .

## 2.2 Sistema de Coordenadas

O ferramental geométrico se mostra ineficiente e quiçá insuficiente quando nos deparamos com problemas de maior complexidade. Vamos introduzir a representação algébrica dos vetores e do espaço Euclidiano. É essa representação que nos permite converter problemas geométricos em problemas algébricos e efetivamente realizar cálculos com vetores. Daremos continuidade a estas ideias e veremos como utilizar as propriedades geométricas estudadas até agora para encontrar representações algébricas não apenas para vetores, mas também para os pontos do espaço Euclidiano. Tais representações serão chamadas de sistemas de coordenadas, e serão o foco principal desta subseção.

Mais precisamente, um sistema de coordenadas é uma identificação contínua do plano (espaço) euclideano com uma região de  $\mathbb{R}^2$  ( $\mathbb{R}^3$ ) que nos permita localizar pontos através de pares (triplas) de números reais.

Vejamos, por exemplo, como podemos relacionar vetores e pontos no espaço de modo a obter um sistema de coordenadas. Se considerarmos  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  uma base de  $\mathbb{V}^3$  (conjunto de vetores), pelo teorema da base para o espaço, temos que qualquer vetor  $v$  pode ser representado como:

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3. \quad (2.2.1)$$

em que os coeficientes  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$  são únicos.

Tal igualdade nos permite construir a seguinte bijeção entre  $\mathbb{V}^3$  e  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{aligned} \iota_1: \mathbb{V}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \vec{v} &\longmapsto (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Lembramos ao leitor que bijeção é uma função que identifica univocamente os elementos do domínio com os do contra-domínio. Mais precisamente uma função bijetora é uma aplicação simultaneamente injetora, isto é, que leva elementos distintos do domínio em elementos distintos da imagem, e sobrejetora, ou seja, tal que todo elemento do contra domínio é imagem de algum elemento do domínio. Devido existência da bijeção descrita acima, definimos a seguinte notação:

$$\vec{v}: (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)_{\mathcal{B}}. \quad (2.2.3)$$

E denominamos a tripla  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  de coordenadas do vetor  $\vec{v}$  na base  $\mathcal{B}$ .

Considere agora o espaço Euclidiano ( $\mathbb{E}^3$ ). O primeiro passo necessário para encontrarmos um sistema de coordenadas é “localizar” os pontos no espaço. Observe que para isso não basta uma base de vetores, pois, como já dissemos anteriormente, vetores não são localizados no espaço. Assim torna-se necessária a escolha de um ponto qualquer para nos servir de referência. Fixemos então um ponto  $0 \in \mathbb{E}^3$  a que chamaremos de origem do sistema de coordenadas. A partir de tal ponto as posições de todos os pontos de  $\mathbb{E}^3$  serão determinadas.

Observe que, fixado  $O$ , um ponto  $P$  qualquer em  $\mathbb{E}^3$  pode ser escrito como  $P = 0 + \overrightarrow{OP}$ . Tal igualdade nos permite identificar univocamente pontos de  $\mathbb{E}^3$  com vetores de  $\mathbb{V}^3$ :

$$\begin{aligned} \iota_2: \mathbb{E}^3 &\rightarrow \mathbb{V}^3 \\ P &\longmapsto \overrightarrow{OP}. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

O vetor  $\overrightarrow{OP}$  é denominado vetor posição de  $P$ . Tomando a função composta  $\iota: = \iota_1 \circ \iota_2$  obtemos uma bijeção entre os pontos de  $\mathbb{E}^3$  e os elementos de  $\mathbb{R}^3$ : a cada ponto  $P$  podemos associar a tripla  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

**Definição 2.2.1 (Sistema de Coordenadas).** Um sistema vetorial de coordenadas no espaço  $\mathcal{S}$  é o conjunto formado por uma base de vetores  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  e um ponto  $0$ , chamado de origem do sistema de coordenadas. Denotaremos o sistema de coordenadas por

$$\mathcal{S} = (0, \mathcal{B}). \quad (2.2.5)$$

Se  $i, j$  e  $k$  forem três vetores ortonormais, ou seja, ortogonais dois a dois e de norma 1, então o sistema de coordenadas  $\mathcal{S} = (0, \mathcal{B})$  em que  $\mathcal{B} = (i, j, k)$  é chamado de sistema cartesiano de coordenadas. Daqui em diante as letras  $i, j, k$  sempre denotarão vetores ortonormais.

Um sistema de coordenadas cujos vetores não são ortogonais é dito sistema de coordenadas oblíquo.

FIGURA 2.2.1 – SISTEMA DE COORDENADAS ORTONORMAIS

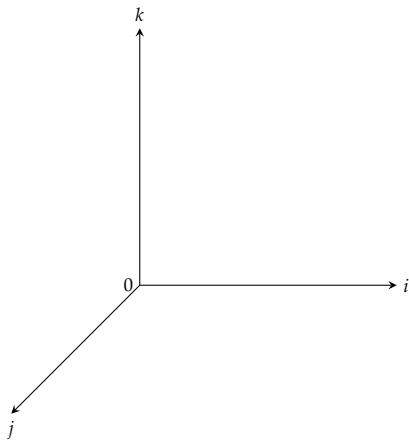
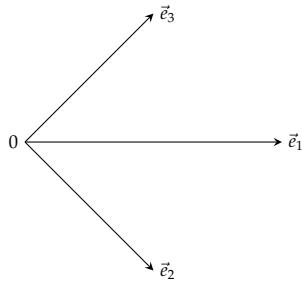


FIGURA 2.2.2 – SISTEMA DE COORDENADAS OBLÍQUO

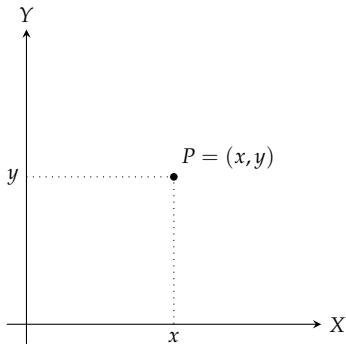


## 2.3 O Plano Cartesiano e o Espaço Tridimensional

O plano cartesiano  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  é o exemplo mais importante de produto cartesiano. Os elementos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  são os pares ordenados de números reais. Os pares ordenados, de certa forma, podem representar as coordenadas cartesianas de um ponto  $P$  de um plano  $\Pi$ , onde  $x$  é a abscissa e  $y$  é a ordenada, quando fixamos nesse plano um par de eixos ortogonais, que vamos indicar por  $0X$  e  $0Y$ , denominados eixo das abscissas e eixos das ordenadas, respectivamente, que se interceptam no ponto  $0 = (0, 0)$ , chamado origem do sistema de coordenadas.

Dado o ponto  $P \in \Pi$ , a abscissa de  $P$  é o número  $x$ , coordenada do pé da perpendicular baixada do  $P$  sobre o eixo  $0X$ , enquanto a ordenada de  $P$  é o número  $y$ , coordenada do pé da perpendicular baixada de  $P$  sobre o eixo  $0Y$ . Assim, dizemos que  $(x, y)$  é o par de coordenadas do ponto  $P$  relativamente ao sistema de eixos ortogonais, como na Figura abaixo.

FIGURA 2.3.1 – O PLANO NUMÉRICO  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$



A aplicação  $f: \Pi \rightarrow \mathbb{R}^2$  que associa a cada ponto  $P$  do plano  $\Pi$  seu único par de coordenadas  $f(P) = (x, y)$ , relativamente ao sistema de eixos ortogonais, é uma bijeção, isto é, uma correspondência biunívoca entre os elementos de  $\mathbb{R}^2$  e de  $\Pi$ . Dessa maneira, temos que a aplicação  $f^{-1}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \Pi$  associa a cada par de coordenadas  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  um único ponto  $f^{-1}(x, y) = P$  do plano  $\Pi$ .

Portanto, a aplicação  $f$  permite traduzir conceitos e propriedades geométricas para uma linguagem algébrica e, reciprocamente, permite interpretar geometricamente relações entre números reais. Assim, podemos dizer que  $\mathbb{R}^2$  é o modelo aritmético do plano  $\Pi$ , enquanto o plano  $\Pi$  é o modelo geométrico do plano numérico  $\mathbb{R}^2$ . Assim, com a identificação entre  $\mathbb{R}^2$  e um plano  $\Pi$  do espaço Euclidiano, realizada pela bijeção  $f$ , podemos olhar para o  $\mathbb{R}^2$  como um plano, plano numérico, e chamaremos seus elementos  $P = (x, y)$  de pontos. Utilizando essa nova linguagem, que relaciona conceitos algébricos com conceitos geométricos, vamos melhorar nosso entendimento sobre as propriedades das funções reais.

De modo análogo, o espaço numérico tridimensional  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  é um outro exemplo importante de produto cartesiano. Os elementos  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  são as ternas ordenadas de números reais. As ternas ordenadas surgem como as coordenadas cartesianas de um ponto  $P$  do espaço tridimensional  $\mathbb{E}^3$ , quando fixamos nesse espaço tridimensional um sistema de três eixos ortogonais, que vamos indicar por  $0X$ ,  $0Y$  e  $0Z$ , que se interceptam no ponto  $0 = (0, 0, 0)$ , chamado origem do sistema de coordenadas.

A aplicação  $f: \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada ponto  $P$  do espaço tridimensional  $\mathbb{E}^3$  sua única terna de coordenadas  $f(P) = (x, y, z)$ , relativas a um sistema de três eixos ortogonais, é uma bijeção, isto é, uma correspondência biunívoca entre os elementos de  $\mathbb{R}^3$  e de  $\mathbb{E}^3$ . Desse modo, temos que a aplicação  $f^{-1}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$  associa a cada terna ordenada  $(x, y, z)$  de  $\mathbb{R}^3$  um único ponto  $f^{-1}(x, y, z) = P$  do espaço tridimensional  $\mathbb{E}^3$ .

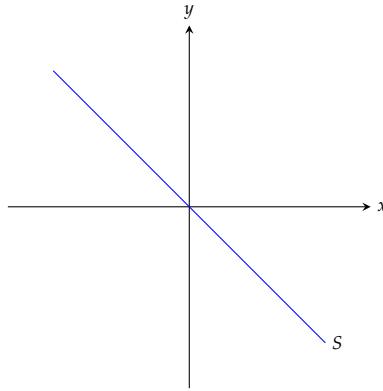
Assim, podemos dizer que o espaço numérico tridimensional  $\mathbb{R}^3$  é o modelo aritmético do espaço tridimensional  $\mathbb{E}^3$ , enquanto que o espaço tridimensional  $\mathbb{E}^3$  é o modelo geométrico do espaço numérico  $\mathbb{R}^3$ . Desse modo, com a identificação entre o espaço numérico  $\mathbb{R}^3$  e o espaço tridimensional  $\mathbb{E}^3$ , da Geometria Euclidiana, realizada pela bijeção  $f$ , podemos olhar para o  $\mathbb{R}^3$  como sendo o espaço numérico tridimensional, e chamaremos seus elementos  $P = (x, y, z)$  de pontos.

## 2.4 Subespaço Vetorial

**Definição 2.4.1 (Subespaço Vetorial).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ . Um subespaço vetorial de  $\vec{v}$  é um subconjunto  $\vec{U}$  de  $\vec{v}$  que é ele mesmo um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  com as operações de adição de vetores e multiplicação por escalar definidas em  $\vec{v}$ .

**Exemplo 2.4.1.** O subconjunto  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - ax = 0, \forall a \in \mathbb{R}\}$  é um subespaço vetorial do  $\mathbb{R}^2$ .

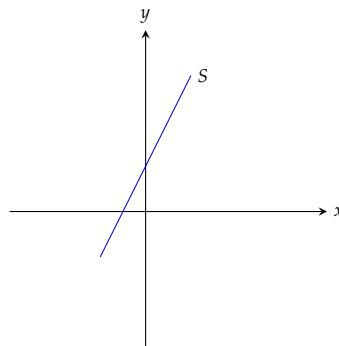
FIGURA 2.4.1 – SUBCONJUNTO  $S$  NO  $\mathbb{R}^2$



**Teorema 2.4.1 (Subespaço Vetorial).** Um subconjunto não vazio  $\vec{U}$  de um espaço vetorial  $\vec{v}$  é um subespaço vetorial de  $\vec{v}$  se, e somente se, para quaisquer elementos  $\vec{u}, \vec{v} \in U$  e para qualquer escalar  $\alpha \in \mathbb{F}$ , tem-se que  $\vec{u} + \vec{v} \in U$  e  $\alpha\vec{u} \in U$ , isto é,  $\vec{U}$  é fechado com relação às operações de adição e multiplicação por escalar.

**Exemplo 2.4.2.** O subconjunto  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y - 2x = 1\}$  não é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^2$ . De fato, o elemento neutro da operação de adição,  $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ , não pertence a  $S$ . Além disso, o subconjunto  $S$  não é fechado com relação às operações de adição de elementos e de multiplicação por escalar.

FIGURA 2.4.2 – SUBCONJUNTO  $S$  NO  $\mathbb{R}^2$

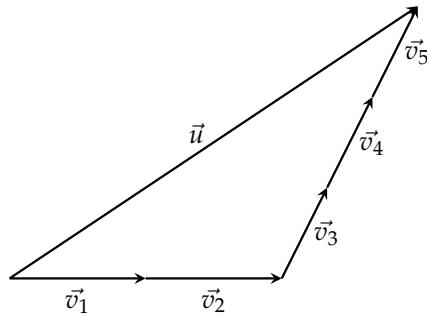


## 2.5 Combinação Linear: Subespaço Gerado

**Definição 2.5.1 (Combinação Linear).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ . Dizemos que o elemento  $\vec{u} \in V$  é uma combinação linear dos elementos  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$  se existem escalares  $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{F}$  tais que:

$$\vec{u} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n. \quad (2.5.1)$$

FIGURA 2.5.1 – FEIXE DE RETAS PARALELAS



**Definição 2.5.2 (Sistema Gerador).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $\mathcal{S}$  um conjunto finito de elementos de  $\vec{v}$ , isto é,  $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ . O subconjunto  $\vec{u}$  construído a partir dos elementos de  $\mathcal{S}$  da seguinte forma:

$$U = \left\{ \vec{u} \in V \mid \vec{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \vec{v}_i, \alpha_i \in \mathbb{F} \right\}, \quad (2.5.2)$$

é um subespaço vetorial de  $\vec{v}$  que vamos denotar por:

$$U = [\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n] \quad \text{ou por} \quad U = [\mathcal{S}], \quad (2.5.3)$$

denominado subespaço gerado pelos elementos de  $\mathcal{S}$ . Dizemos que o conjunto  $\mathcal{S}$  é um sistema de geradores para o subespaço  $\vec{u}$ .

**Exemplo 2.5.1.** Dada a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ , com  $A \in \mathbb{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ , mostre que o elemento  $\vec{v} = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$  pertence ao espaço coluna de  $A$ .

Basta mostrar que o elemento  $\vec{v}$  pode ser representado pela combinação linear

$$(-1, 0, 1) = a(1, 2, 3) + b(1, 1, 1), \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.5.4)$$

Resolvendo o sistema encontramos  $a = 1$  e  $b = -2$ . Assim, mostramos que o elemento  $\vec{v} \in \mathbb{R}(A)$ .

**Definição 2.5.3.** Dizemos que um espaço vetorial  $\vec{v}$  é finitamente gerado se existe um subconjunto finito  $S \subset V$  de maneira que  $V = [S]$ .

**Exemplo 2.5.2.** Considere o subespaço  $W = \{A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R}) | A = A^T\}$ . Mostre que  $\vec{w}$  é gerado pelas matrizes

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5.5)$$

Basta observar que qualquer elemento  $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  é representado de modo único pela combinação linear

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.5.6)$$

## 2.6 Soma e Intersecção

**Teorema 2.6.1 (Intersecção de Subespaços Vetoriais).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$  subespaços vetoriais de  $\vec{v}$ . Então, o subconjunto de  $\vec{v}$  definido por:

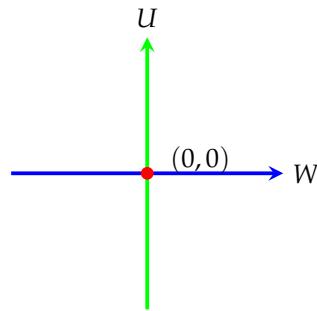
$$U \cap W = \{\vec{v} \in V | \vec{v} \in U \text{ e } \vec{v} \in W\}, \quad (2.6.1)$$

é um subespaço vetorial de  $\vec{v}$ .

**Exemplo 2.6.1.** Considere os subespaços  $U = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0\}$  e  $W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0\}$ . A intersecção de  $U$  e  $W$  é

$$U \cap W = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0, x_2 = 0\}, \quad (2.6.2)$$

ou seja,  $U \cap W = \{(0, 0)\}$ . Geometricamente,  $U$  é o eixo  $y$  dos eixos coordenados, pois são os elementos de  $\mathbb{R}^2$  que tem a primeira coordenada nula e  $W$  é o eixo  $x$ , pois são os elementos de  $\mathbb{R}^2$  que tem a segunda coordenada nula. Assim, a intersecção  $U \cap W$  é a origem  $(0, 0)$ .

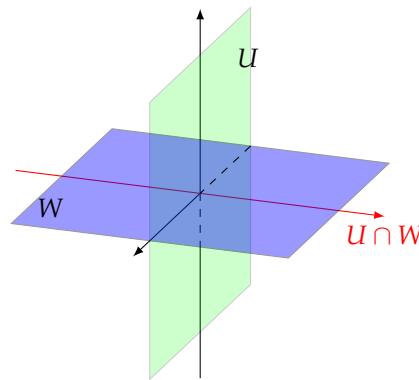


**Exemplo 2.6.2.** Dados os subespaços  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\}$  e  $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 0\}$ . A intersecção dos subespaços  $U$  e  $W$  é

$$U \cap W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, z = 0\}. \quad (2.6.3)$$

Geometricamente,  $U$  é o plano  $yz$  e  $W$  é o plano  $xy$ . A intersecção  $U \cap W$  é a intersecção desses planos, que é o eixo  $y$ , que de fato, é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

FIGURA 2.6.1 – A INTERSECÇÃO DOS SUBESPAÇOS  $U$  E  $W$  É O EIXO  $y$  DOS EIXOS COORDENADOS



**Exemplo 2.6.3.** Determine a intersecção  $U \cap W$  sendo os subespaços  $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$  e  $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - y - z + t = 0\}$ .

Um elemento de  $\mathbb{R}^4$ , que pertence a intersecção de  $U$  e  $W$  deve satisfazer todas as condições dos dois conjuntos  $U$  e  $W$  ao mesmo tempo, ou seja, suas componentes devem satisfazer o sistema:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = t \end{cases} \quad (2.6.4)$$

Substituindo a primeira e a segunda equações na terceira equação, teremos:

$$-y - y - t + t = 0 \implies 2y = 0 \implies y = 0. \quad (2.6.5)$$

Assim, ficamos com as condições:  $x = y = 0$  e  $z = t$  com  $z, t \in \mathbb{R}$  livres. Logo:

$$U \cap W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y = 0 \text{ e } z = t\}. \quad (2.6.6)$$

Podemos também dar um valor para a variável  $z$  que está livre, por exemplo  $z = 1$ , assim teremos  $x = y = 0$  e  $z = t = 1$ , logo a intersecção  $U \cap W$  será o subespaço gerado pelo vetor  $(0, 0, 1, 1)$ , ou seja,  $U \cap W = [(0, 0, 1, 1)]$ .

**Teorema 2.6.2 (Soma de Subespaços Vetoriais).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$  subespaços vetoriais de  $\vec{v}$ . Então, o subconjunto de  $\vec{v}$  definido por:

$$U + W = \{\vec{v} \in V \mid \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} \text{ com } \vec{u} \in U \text{ e } \vec{w} \in W\}, \quad (2.6.7)$$

é um subespaço vetorial de  $\vec{v}$ .

**Definição 2.6.1 (Soma Direta).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$  subespaços vetoriais de  $\vec{v}$  tais que  $U \cap W = \{0_V\}$ . Dizemos que o subespaço  $U + W$  é a soma direta dos subespaços  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ , e denotamos por  $U \oplus W$ .

**Exemplo 2.6.4.** Considere os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^3$ :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \quad e \quad W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}. \quad (2.6.8)$$

Temos que  $\mathbb{R}^3 = U + W$ . Entretanto, não como soma direta dos subespaços  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ . Podemos verificar facilmente que

$$U = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)] \quad e \quad W = [(1, 0, 0), (0, 0, 1)]. \quad (2.6.9)$$

Assim, temos que:

$$U + W = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)] \quad e \quad U \cap W = [(1, 0, 0)]. \quad (2.6.10)$$

Portanto, temos que  $\mathbb{R}^3 = U + W$ , mas não como soma direta.

**Exemplo 2.6.5.** Considere os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^2$ :

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \quad e \quad W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}. \quad (2.6.11)$$

Temos que  $\mathbb{R}^2 = U + W$ . Podemos verificar facilmente que

$$U = [(1, 0)] \quad e \quad W = [(0, 1)]. \quad (2.6.12)$$

Assim, temos que:

$$U + W = [(1, 0), (0, 1)] \quad e \quad U \cap W = \{0_{\mathbb{R}^2}\}. \quad (2.6.13)$$

Portanto, temos que  $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ .

**Definição 2.6.2 (Soma Direta).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$  subespaços vetoriais de  $\vec{v}$ . Dizemos que o espaço vetorial  $\vec{v}$  é a soma direta dos subespaços  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ , e denotamos  $V = U \oplus W$ , se:

1.  $U \cap W = \{0_V\}$ .
2.  $V = U + W$ .

**Definição 2.6.3 (Sistema de Geradores do Subespaço).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $\mathcal{S}$  um conjunto de elementos de  $\vec{v}$ . O subespaço gerado por  $\mathcal{S}$ , que vamos denotar por  $U = [\mathcal{S}]$ , é definido como sendo a intersecção de todos os subespaços de  $\vec{v}$  que contém o conjunto  $\mathcal{S}$ . Quando  $\mathcal{S}$  é um conjunto finito de elementos de  $\vec{v}$ , isto é,  $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ , dizemos que  $\vec{u}$  é o subespaço gerado pelos elementos de  $\mathcal{S}$ . O conjunto  $\mathcal{S}$  também é chamado de sistema de geradores do subespaço  $\vec{u}$ .

**Exemplo 2.6.6.** Considere os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^3$ :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}, \quad (2.6.14)$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}. \quad (2.6.15)$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço  $U \cap W$ .

Inicialmente, vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço  $\vec{u}$ . Para os elementos  $\vec{u} \in U$ , temos que:

$$\vec{u} = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 0) \quad \text{para } a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.6.16)$$

Logo,  $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$  é um sistema de geradores para o subespaço  $\vec{u}$ .

Agora vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço  $\vec{w}$ . Para os elementos  $w \in W$ , temos que:

$$\vec{w} = c(-1, 1, 0) + d(-1, 0, 1) \quad \text{para } c, d \in \mathbb{R}. \quad (2.6.17)$$

Logo,  $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$  é um sistema de geradores para o subespaço  $\vec{w}$ .

Vamos determinar um sistema de geradores para o subespaço  $U \cap W$ . Sabemos que, se  $\vec{v} \in U \cap W$ , então  $\vec{v} \in U$  e  $\vec{v} \in W$ . Assim, temos que

$$a(1, 0, 1) + b(0, 1, 0) = c(-1, 1, 0) + d(-1, 0, 1). \quad (2.6.18)$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} x \implies a = -c - d \\ y \implies b = c \\ z \implies a = d \end{cases} \quad (2.6.19)$$

cuja solução é dada por  $a = d$ ,  $b = -2d$  e  $c = -2d$ . Portanto, os elementos  $\vec{v} \in U \cap W$  são escritos como  $\vec{v} = d(1, -2, -2)$  para  $d \in \mathbb{R}$ . Logo,  $\{(1, -2, -2)\}$  é um sistema de geradores para o subespaço  $U \cap W$ .

**Exemplo 2.6.7.** Considere os seguintes subespaços do  $\mathbb{R}^3$ :

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\}, \quad (2.6.20)$$

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}. \quad (2.6.21)$$

Determine um sistema de geradores para o subespaço  $U \cap W$ .

Os elementos  $\vec{u} = (x, y, z) \in U \cap W$  satisfazem as equações:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad (2.6.22)$$

Escolhendo  $x$  e  $y$  como variáveis básicas e  $z$  como variável livre, temos que:

$$y = \frac{2}{3}z, \quad x = -\frac{5}{3}z, \quad z \in \mathbb{R}. \quad (2.6.23)$$

Desse modo, o conjunto solução do sistema linear homogêneo é escrito da seguinte forma:

$$(x, y, z) = \alpha(-5, 2, 3), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.6.24)$$

Portanto, temos que  $U \cap W = [(-5, 2, 3)]$ .

## 2.7 Dependência e Independência Linear

**Definição 2.7.1 (Linearmente Independente).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ . Dizemos que o conjunto  $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$  é linearmente independente (LI) se, e somente se, toda combinação linear nula

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = 0_V, \quad \alpha_i \in \mathbb{F}, \quad (2.7.1)$$

implicar que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

**Definição 2.7.2 (Linearmente Dependente).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ . Dizemos que o conjunto  $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$  é linearmente dependente (LD) se, e somente se, é possível uma combinação linear nula

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = 0_V, \quad \alpha_i \in \mathbb{F}, \quad (2.7.2)$$

sem que os escalares  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$  sejam todos nulos.

De maneira equivalente, encontramos o conceito de dependência e independência linear apresentado da forma a seguir.

**Definição 2.7.3 (Linearmente Dependente).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ . Um subconjunto  $\mathcal{S}$  de  $\vec{v}$  é dito linearmente dependente se existirem elementos distintos  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  em  $\mathcal{S}$  e escalares  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  em  $\mathbb{F}$ , não todos nulos, tais que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = 0_V. \quad (2.7.3)$$

Um conjunto que não é linearmente dependente é linearmente independente.

Decorrem facilmente da definição as seguintes consequências:

1. Todo conjunto que contém um subconjunto linearmente dependente é LD.
2. Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é LI.
3. Todo conjunto que contém o elemento neutro,  $0_V$ , é linearmente dependente.
4. Um conjunto  $\mathcal{S}$  de vetores é linearmente independente se, e somente se, todo subconjunto finito de  $\mathcal{S}$  é linearmente independente, isto é, se, e somente se, para quaisquer elementos distintos  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in \mathcal{S}$ , com

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = 0_V, \quad (2.7.4)$$

implicar que  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

5. Convencionaremos que o conjunto vazio,  $\emptyset \subset V$  é linearmente independente.

**Teorema 2.7.1 (Linearmente Dependente).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n \in V$ . O conjunto  $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subset V$  é linearmente dependente (LD) se, e somente se, um de seus elementos for uma combinação linear dos outros elementos.

**Exemplo 2.7.1.** O conjunto  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  em que  $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$ ,  $\vec{v}_2 = (1, 4, 5)$  e  $\vec{v}_3 = (3, 6, 5)$  é linearmente dependente no espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ .

Considerando a combinação linear nula  $x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$ , obtemos o seguinte sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 4y + 6z = 0 \\ 5y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \quad (2.7.5)$$

Assim, obtemos que o sistema possui infinitas soluções não-nulas, provando que o conjunto  $S$  é linearmente dependente.

## 2.8 Base e Dimensão

Passamos agora à tarefa de atribuir uma dimensão a certos espaços vetoriais. Apesar de associarmos usualmente dimensão a algo geométrico, precisamos encontrar uma definição algébrica adequada da dimensão de um espaço vetorial. Isto será feito através do conceito de uma base para o espaço vetorial.

**Teorema 2.8.1 (Base).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ . Uma base de  $\vec{v}$  é um conjunto linearmente independente de elementos de  $\vec{v}$  que gera  $\vec{v}$ .

**Exemplo 2.8.1.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ . O conjunto

$$\beta = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}, \quad (2.8.1)$$

é linearmente independente em  $\mathbb{R}^3$  e gera o espaço  $\mathbb{R}^3$ . Logo,  $\beta$  é uma base para  $\mathbb{R}^3$ , denominada base canônica.

**Teorema 2.8.2 (Base).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  finitamente gerado pelos elementos do conjunto  $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ . Então podemos extrair do conjunto  $S$  uma base para  $\vec{v}$ .

**Definição 2.8.1 (Base Canônica).** Na matemática, a base canônica de um espaço vetorial ou de outras estruturas algébricas semelhantes é a base mais primitiva (base geradora) e intuitiva para a estrutura. Por

exemplo, no  $\mathbb{R}^2$  a base canônica é dada pelo conjunto  $\{(1, 0), (0, 1)\}$ . No  $\mathbb{R}^3$  base canônica é dada pelo conjunto  $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ .

**Teorema 2.8.3.** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial gerado por um conjunto finito de elementos  $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \in V$ . Então, todo conjunto linearmente independente de  $\vec{v}$  é finito e contém no máximo  $n$  elementos.

**Teorema 2.8.4 (Base Finita).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ . Dizemos que  $\vec{v}$  é um espaço vetorial de dimensão finita se  $\vec{v}$  possui uma base finita.

**Corolário 2.8.1.** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial de dimensão finita. Então, quaisquer duas bases de  $\vec{v}$  têm o mesmo número (finito) de elementos.

**Exemplo 2.8.2.** Considere o espaço vetorial  $\mathbb{R}^2$ . Podemos verificar facilmente que os conjuntos  $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$  e  $\gamma = \{(1, 1), (1, -1)\}$  são duas bases para o  $\mathbb{R}^2$ .

**Definição 2.8.2 (Dimensão).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial de dimensão finita, que possui uma base com  $n$  elementos. A dimensão de  $\vec{v}$  é definida como sendo o número de elementos de uma base de  $\vec{v}$ . Indicaremos a dimensão do espaço vetorial  $\vec{v}$  por  $\dim(V) = n$ . No caso em que  $V = \{0_V\}$ , temos que o conjunto vazio,  $\emptyset \subset V$ , é uma base de  $\vec{v}$  e dizemos que o espaço vetorial  $\vec{v}$  tem dimensão nula.

**Exemplo 2.8.3.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ . Temos que o conjunto

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (2.8.2)$$

é uma base para  $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ . Desse modo,  $\dim(\mathbb{M}_2(\mathbb{R})) = 4$ .

**Corolário 2.8.2.** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial de dimensão  $n$ . Então,

1. Todo conjunto de elementos em  $\vec{v}$  que contém mais de  $n$  elementos é LD.
2. Nenhum conjunto contendo menos de  $n$  elementos pode gerar  $\vec{v}$ .

**Corolário 2.8.3.** Seja  $\vec{u}$  um subespaço vetorial próprio de um espaço vetorial  $\vec{v}$  de dimensão finita. Então,  $\vec{u}$  é de dimensão finita e  $\dim(U) < \dim(V)$ .

**Teorema 2.8.5.** Sejam  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$  subespaços de dimensão finita de um espaço vetorial  $\vec{v}$ . Então, o subespaço  $U + W$  é de dimensão finita e tem-se que

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W). \quad (2.8.3)$$

**Proposição 2.8.1.** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial de dimensão finita e  $\vec{w}$  um subespaço de  $\vec{v}$ . Se  $\dim(W) = \dim(V)$ , então  $W = V$ .

**Exemplo 2.8.4.** O conjunto  $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  em que

$$\vec{v}_1 = (1, 0, -1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2, 1), \quad \vec{v}_3 = (0, -3, 2), \quad (2.8.4)$$

é uma base para o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ .

Devemos mostrar que  $\mathcal{S}$  é linearmente independente e que gera o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ .

Inicialmente, vamos mostrar que o conjunto  $\mathcal{S}$  é linearmente independente. Considerando a combinação linear nula

$$a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3 = 0_{\mathbb{R}^3}, \quad (2.8.5)$$

obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ 2b - 3c = 0 \\ -a + b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ 2b - 3c = 0 \\ 5c = 0 \end{cases} \quad (2.8.6)$$

Assim, o sistema linear homogêneo possui somente a solução trivial, isto é,

$$a = b = c = 0, \quad (2.8.7)$$

provando que o conjunto  $\mathcal{S}$  é linearmente independente em  $\mathbb{R}^3$ .

Finalmente, vamos mostrar que  $\mathcal{S}$  gera o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ , isto é, que todo elemento  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  é escrito como uma combinação linear dos elementos do conjunto  $\mathcal{S}$ :

$$(x, y, z) = a(1, 0, -1) + b(1, 2, 1) + c(0, -3, 2). \quad (2.8.8)$$

Desse modo, obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a + b = x \\ 2b - 3c = y \\ -a + b + 2c = z \end{cases} \iff \begin{cases} a + b = x \\ 2b - 3c = y \\ 5c = z + x + y \end{cases} \quad (2.8.9)$$

Portanto, podemos obter de modo único os coeficientes da combinação linear,  $a$ ,  $b$  e  $c$ , em função das componentes do elemento  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Assim, provamos que  $\mathbb{R}^3 = [\mathcal{S}]$ . Logo, o conjunto  $\mathcal{S}$  é uma base para o espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemplo 2.8.5.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^5$ . Determine uma base para o subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^5$  dado por:

$$W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_3 + x_5 = 0 \text{ e } x_2 = x_4\}. \quad (2.8.10)$$

Note que  $x_1 = -x_3 - x_5$  e  $x_2 = x_4$ . Assim, temos que os elementos

$$w_1 = (-1, 0, 1, 0, 0) \quad (2.8.11)$$

$$w_2 = (-1, 0, 0, 0, 1) \quad (2.8.12)$$

$$w_3 = (0, 1, 0, 1, 0), \quad (2.8.13)$$

formam uma base para o subespaço  $\vec{w}$ . Desse modo,  $\dim(W) = 3$ .

---

---

3

---

---

## PRODUTO INTERNO

---

Na geometria Euclidiana as propriedades que nos possibilitam expressar o comprimento de vetor e o ângulo entre dois vetores são denominadas de propriedades métricas. No estudo do  $\mathbb{R}^n$ , em geometria analítica, definimos comprimento de vetores e ângulo entre vetores através do produto escalar

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \quad (3.0.1)$$

Nosso objetivo é de estender esses conceitos para os espaços vetoriais sobre um corpo  $\mathbb{F}$ . O conceito de produto interno em um espaço vetorial real (complexo) é uma generalização do conceito de produto escalar definido em  $\mathbb{R}^n$ . Faremos essa generalizaçãoo através do estudo de certos tipos de aplicações que são definidas sobre pares de elementos de um espaço vetorial e tomando valores no corpo.

Denotamos o produto interno entre dois elementos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  de um espaço vetorial da seguinte forma:  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ . Neste capítulo apresentamos um estudo das propriedades geométricas que são atribuídas a um espaço vetorial por meio de algum produto interno definido sobre ele. Mais especificamente, estabelecemos as propriedades básicas, e suas aplicações, dos conceitos de comprimento, ângulo e ortogonalidade determinadas ao espaço vetorial pelo produto interno.

## 3.1 Definição de Produto Interno

**Definição 3.1.1 (Produto Interno).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{R}$ . Uma aplicação

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}, \quad (3.1.1)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1. *Simetria:*  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$ .
2. *Positividade:*  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \geq 0, \forall \vec{u} \in V$  com  $\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \iff \vec{u} = 0_V$ .
3. *Distributividade:*  $\langle \vec{u} + \vec{w}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle, \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$ .
4. *Homogeneidade:*  $\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

define um produto interno no espaço vetorial real  $\vec{v}$ .

Assim, dizemos que o produto interno, em um espaço vetorial real, é uma aplicação bilinear, isto é, é uma aplicação linear nas duas variáveis.

**Definição 3.1.2 (Produto Interno).** Um espaço vetorial com produto interno, que denotamos por  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  é um espaço vetorial  $\vec{v}$  sobre o corpo  $\mathbb{F}$  com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Um espaço vetorial real com produto interno

é denominado espaço Euclidiano. Um espaço vetorial complexo com produto interno é denominado espaço unitário.

**Exemplo 3.1.1.** Seja  $\beta = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$  a base canônica do  $\mathbb{R}^n$ . Todo elemento  $x = (\vec{x}x_1, \dots, \vec{x}_n) \in \mathbb{R}^n$  é escrito de modo único da seguinte forma:

$$x = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \vec{e}_i. \quad (3.1.2)$$

Desse modo, o produto interno usual do  $\mathbb{R}^n$  que vamos denotar por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , denominado produto interno Euclidiano, pode ser escrito como

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = Y^T X = Y^T I_n X. \quad (3.1.3)$$

## 3.2 Matriz do Produto Interno

**Definição 3.2.1 (Matriz do Produto Interno).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{F}$ , munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\beta = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  uma base ordenada de  $\vec{v}$ . Vamos mostrar que o produto interno pode ser completamente descrito em termos de uma dada base por meio de uma determinada matriz.

Considere os elementos  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ , que podem ser representados de modo único da forma:

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^n \vec{x}_j \vec{v}_j \quad e \quad \vec{v} = \sum_{i=1}^n \vec{y}_i \vec{v}_i. \quad (3.2.1)$$

Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n \vec{x}_j \vec{v}_j, \vec{v} \right\rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \vec{x}_j \langle \vec{v}_j, \vec{v} \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \vec{x}_j \langle \vec{v}_j, \vec{v} \rangle \sum_{i=1}^n \vec{y}_i \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle \vec{v}_j, \vec{v}_i \rangle x_j y_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \bar{y}_i \\
&= Y^* AX,
\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

onde  $X, Y \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{F})$  são as matrizes de coordenadas dos elementos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  em relação à base ordenada  $\beta$ , respectivamente. É denominada matriz do produto interno em relação à base ordenada  $\beta$ .

### 3.3 Desigualdade de Cauchy-Schwarz

**Teorema 3.3.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Então, para todos  $u, v \in V$  temos que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2 \leq \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle. \tag{3.3.1}$$

Além disso, a igualdade é válida se, e somente se, os elementos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são linearmente dependentes.

**Teorema 3.3.2 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Então, para todos  $u, v \in V$  temos que

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2| \leq \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle. \tag{3.3.2}$$

Além disso, a igualdade é válida se, e somente se, os elementos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são linearmente dependentes.

Ela é importante porque ela relaciona produto interno que é responsável por dar uma visão geométrica a espaços vetoriais com a noção de comprimento.

**Exemplo 3.3.1.** O fato muito usado em estatística que  $-1 \leq \rho \leq 1$ , onde  $\rho$  é o coeficiente de correlação é uma consequência direta dessa desigualdade. Formalmente, esse resultado ocorre no  $L^2$  (espaço de funções mensuráveis).

**Exemplo 3.3.2.** Um resultado muito comum em cálculo é que o gradiente é um vetor que sempre aponta para o máximo de uma função. Esse resultado é inclusive muito usado em otimização numérica. Sabemos que  $D_u F = \nabla F \cdot u$ , em que  $D_u F$  é a derivada direcional de  $F$  na direção do vetor unitário  $\vec{u}$ . Aplicando o valor absoluto nessa equação, temos que

$$|D_u F| = |\nabla F \cdot \vec{u}| \leq \|\nabla F\| \|\vec{u}\| = \|\nabla F\| \times 1 = \|\nabla F\|. \tag{3.3.3}$$

A igualdade só ocorre quando  $\vec{u}$  tem a mesma direção do gradiente.

## 3.4 Definição de Norma: Norma Euclidiana

**Definição 3.4.1 (Norma).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ . Uma norma, ou comprimento, em  $\vec{v}$  é uma aplicação  $\|\cdot\|$  que para cada elemento  $\vec{u} \in V$  associa um número real  $\|\vec{u}\|$ , que possui as seguintes propriedades:

1. *Positividade:*  $\|\vec{u}\| > 0$  para  $\vec{u} \neq 0_V$ , com  $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = 0_V$ .
2. *Homogeneidade:*  $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$ , para todo  $\vec{u} \in V$  e  $\lambda \in \mathbb{F}$ .
3. *Desigualdade triangular:*  $\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \leq \|\vec{u} + \vec{v}\|$ , para todos  $\vec{u}, \vec{v} \in V$ .

Um espaço vetorial  $\vec{v}$  munido de uma norma  $\|\cdot\|$  é denominado espaço normado, que denotamos por  $(V, \|\cdot\|)$ .

**Exemplo 3.4.1.** Norma do máximo:  $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i \leq 1 \leq n\}$ .

**Exemplo 3.4.2.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . A aplicação

$$\|A\|_\infty = \max \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{ij}|, 1 \leq i \leq n \right\}. \quad (3.4.1)$$

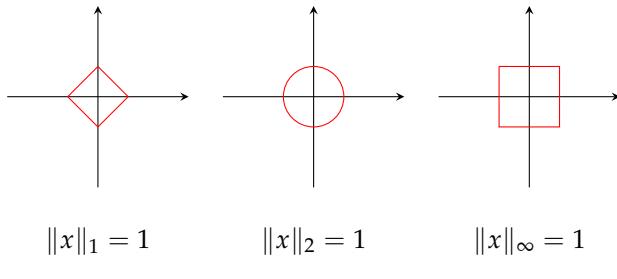
é uma norma.

**Exemplo 3.4.3.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ . A aplicação

$$\|A\|_1 = \max \left\{ \sum_{i=1}^n |a_{ij}|, 1 \leq j \leq n \right\}. \quad (3.4.2)$$

é uma norma.

FIGURA 3.4.1 – ILUSTRAÇÃO DE NORMAS NO  $\mathbb{R}^n$



**Teorema 3.4.1.** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Então, a aplicação  $q(\cdot): V \rightarrow \mathbb{R}$  definida da seguinte forma:

$$q(u) = \sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle}, \forall \vec{u} \in V, \quad (3.4.3)$$

satisfaz as propriedades de uma norma.

## 3.5 Ângulo

Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Observe que utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostramos que para quaisquer elementos não-nulos,  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  o quociente

$$\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2}, \quad (3.5.1)$$

está no intervalo  $[-1, 1]$ . Desse modo, existe um número real  $\theta \in [0, 2\pi]$  tal que

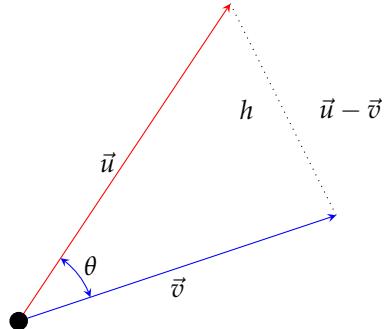
$$\frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2} = \cos(\theta). \quad (3.5.2)$$

Além disso, existe um único valor  $\theta \in [0, \pi]$  satisfazendo a igualdade. Assim, podemos ter a noção de ângulo entre dois elementos de um espaço vetorial munido com um produto interno, que será compatível com a definição de ortogonalidade que apresentamos a seguir.

**Definição 3.5.1 (ângulo entre Vetores).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . O ângulo entre dois elementos não-nulos  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  é definido como sendo o valor  $\theta \in [0, \pi]$  que satisfaz a equação

$$\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2}. \quad (3.5.3)$$

FIGURA 3.5.1 – RELAÇÃO ENTRE O ÂNGULO E O PRODUTO ESCALAR DE DOIS VETORES



O gráfico mostra dois vetores relacionados pelo ângulo  $\theta$ . É importante notar que temos um triângulo, que pode ser generalizado pela lei dos cossenos, o que permite fazer a relação entre o

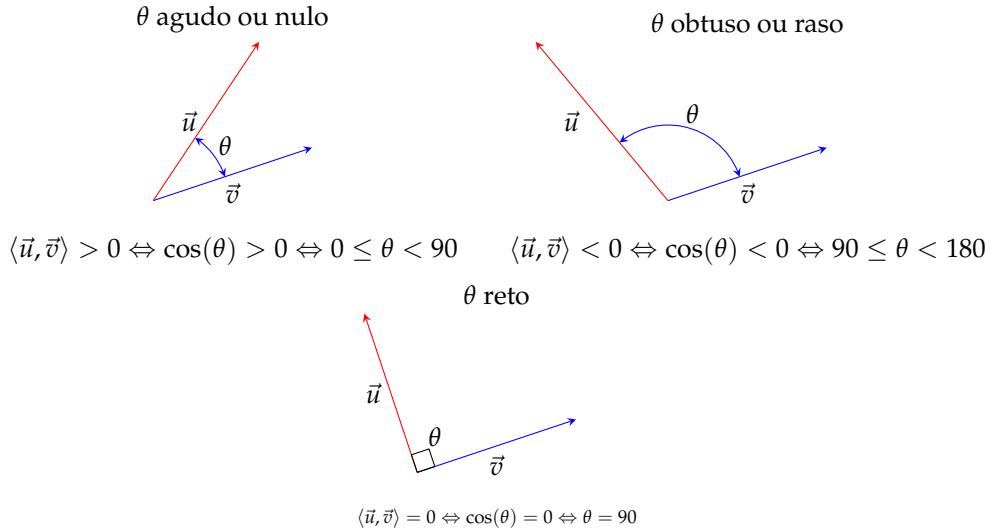
ângulo e os dois vetores.

*Demonstração.* Considerando os vetores na ilustração acima, é possível fazer o cálculo do módulo de sua diferença utilizando a conhecida relação da lei dos cossenos para o triângulo:

$$\begin{aligned}
 |\vec{u} - \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 \cos(\theta) \\
 (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 \cos(\theta) \\
 \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 \cos(\theta) \\
 |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 \cos(\theta) \\
 -2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= -2\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 \cos(\theta) \\
 \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle &= \|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 \cos(\theta). \tag{3.5.4}
 \end{aligned}$$

■

FIGURA 3.5.2 – RELAÇÃO ENTRE O ÂNGULO E O PRODUTO ESCALAR DE DOIS VETORES



**Definição 3.5.2 (Ortogonalidade).** Seja  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  com o produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dizemos que os elementos  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  são ortogonais se, e somente se,  $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ , e denotamos por  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

Podemos observar facilmente que

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0 \iff \cos(\theta) = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \pi, \tag{3.5.5}$$

mostrando a compatibilidade entre os conceitos de ângulo e ortogonalidade.

**Definição 3.5.3.** Num espaço vetorial  $\vec{v}$  munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  temos as seguintes propriedades:

1.  $0_V \perp \vec{v}$  para todo  $\vec{v} \in V$ .
2.  $\vec{u} \perp \vec{v}$  implica  $\vec{v} \perp \vec{u}$ .
3. Se  $\vec{v} \perp \vec{u}$  para todo  $\vec{u} \in V$ , então  $\vec{v} = 0_V$ .
4. Se  $\vec{v} \perp \vec{w}$  e  $\vec{u} \perp \vec{w}$ , então  $(\vec{v} + \vec{u}) \perp \vec{w}$ .
5. Se  $\vec{v} \perp \vec{u}$  e  $\lambda$  é um escalar, então  $\lambda \vec{v} \perp \vec{u}$ .

**Definição 3.5.4 (Ortonormalidade).** Considere  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  munido de produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Seja  $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  um conjunto de elementos de  $\vec{v}$  com  $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$  para  $i \neq j$ . Então, dizemos que  $\mathcal{S}$  é um conjunto ortogonal em  $\vec{v}$  com relação ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Além disso, se  $\|\vec{v}_j\|_2 = 1$  para  $j = 1, \dots, n$ , dizemos que  $\mathcal{S}$  é um conjunto orthonormal em  $\vec{v}$ .

**Teorema 3.5.1.** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  um conjunto ortogonal em  $\vec{v}$  com elementos  $\vec{v}_j \neq 0_V$  para  $j = 1, \dots, n$ . Então,  $\mathcal{S}$  é linearmente independente em  $\vec{v}$ .

**Teorema 3.5.2 (Teorema de Pitágoras).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\|\cdot\|_2$  a norma proveniente do produto interno. Então, os elementos  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  são ortogonais se, e somente se,

$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|_2^2 = \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2. \quad (3.5.6)$$

**Teorema 3.5.3 (Lei do Paralelogramo).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\|\cdot\|_2$  a norma proveniente do produto interno. Então, para todos  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  tem-se que

$$\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|_2^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|_2^2 = 2\|\vec{u}\|_2^2 + 2\|\vec{v}\|_2^2. \quad (3.5.7)$$

**Teorema 3.5.4 (Lei dos Cossenos).** Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial real munido do produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  e  $\|\cdot\|_2$  a norma proveniente do produto interno. Então, para todos  $\vec{u}, \vec{v} \in V$  não-nulos, sendo  $\theta$  o ângulo entre os elementos  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$ , tem-se que

$$\|\vec{u} \pm \vec{v}\|_2^2 = \|\vec{u}\|_2^2 + \|\vec{v}\|_2^2 \pm 2\|\vec{u}\|_2\|\vec{v}\|_2 \cos(\theta). \quad (3.5.8)$$

**Exemplo 3.5.1.** Seja  $\vec{v} = \mathbb{R}^2$  munido do produto interno usual. Então, o ângulo  $\theta$  entre os vetores  $u = (1, 0)$  e  $v = (1, 1)$  é  $\pi/4$ .

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1^2 + 0^2} \sqrt{1^2 + 1^2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

## 3.6 Relação entre Produto Vetorial e ângulo entre Vetores

Seja os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  vetores em  $\mathbb{R}^3$ , é possível provar que o módulo do vetor resultante do produto vetorial destes, é proporcional ao seno do ângulo  $\theta$  entre os dois vetores, relacionando-se da seguinte forma:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\theta). \tag{3.6.1}$$

Seja

$$\vec{u} \times \vec{v} = \langle \vec{v}_y \vec{u}_z - \vec{u}_y \vec{v}_z, \vec{v}_x \vec{u}_z - \vec{u}_x \vec{v}_z, \vec{v}_x \vec{u}_y - \vec{u}_x \vec{v}_y \rangle. \tag{3.6.2}$$

De onde calculamos o seu módulo:

$$\begin{aligned}
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= (\vec{v}_y \vec{u}_z - \vec{u}_y \vec{v}_z)^2 + (\vec{v}_x \vec{u}_z - \vec{u}_x \vec{v}_z)^2 + (\vec{v}_x \vec{u}_y - \vec{u}_x \vec{v}_y)^2 \\
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= \vec{v}_y^2 \vec{u}_z^2 - 2\vec{v}_y \vec{u}_z \vec{u}_y \vec{v}_z + \vec{u}_y^2 \vec{v}_z^2 + \vec{v}_x^2 \vec{u}_z^2 - 2\vec{v}_x \vec{u}_z \vec{u}_x \vec{v}_z + \vec{u}_x^2 \vec{v}_z^2 + \vec{v}_x^2 \vec{u}_y^2 - 2\vec{v}_x \vec{u}_y \vec{u}_x \vec{v}_y + \vec{u}_x^2 \vec{v}_y^2 \\
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= (\vec{v}_x^2 + \vec{v}_y^2 + \vec{v}_z^2)(\vec{u}_x^2 + \vec{u}_y^2 + \vec{u}_z^2) - (\vec{v}_x \vec{u}_x + \vec{v}_y \vec{u}_y + \vec{v}_z \vec{u}_z)^2.
\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Como já sabemos, podemos aplicar as propriedades já estudadas para os vetores:

$$\begin{aligned}
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (u \cdot v)^2 \\
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \cos^2(\theta) \\
|\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 [1 - \cos^2(\theta)] \tag{3.6.4}
\end{aligned}$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 \sin^2(\theta). \tag{3.6.5}$$

Lembremos que:  $a^2 = \sin^2(\theta)$  e  $a = \sin(\theta)$ . Quando  $0 \leq \theta \leq \pi$ , temos:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\theta). \tag{3.6.6}$$

O vetor resultante do produto vetorial apresenta módulo igual à área do paralelogramo delimitado pelos dois vetores que lhe deram origem.

Como já sabemos, os vetores  $\vec{u}, \vec{v}$  que mantêm um ângulo  $\theta$  entre eles, quando multiplicados, podem ser expressos desta forma:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}| |\vec{v}| \sin(\theta). \quad (3.6.7)$$

Considere a seguinte separação:

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}| &= |\vec{u}| \underbrace{|\vec{v}| \sin(\theta)} \\ |\vec{u} \times \vec{v}| &= |\vec{u}| \cdot h. \end{aligned} \quad (3.6.8)$$

Muito convenientemente, podemos verificar que  $h$  é a altura do paralelogramo, que multiplicado pela norma do vetor  $\vec{u}$  nos dá a área do paralelogramo. Da mesma forma verifiquemos que o produto vetorial nos fornece um vetor perpendicular aos dois que lhe deram origem. Façamos:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \\ \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \end{vmatrix} \cdot \langle \vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z \rangle. \quad (3.6.9)$$

Pelas propriedades dos determinantes e do produto escalar temos:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i}\vec{v}_x & \vec{j}\vec{v}_y & \vec{k}\vec{v}_z \\ \vec{v}_x & \vec{v}_y & \vec{v}_z \\ \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \end{vmatrix}. \quad (3.6.10)$$

Sendo o determinante acima nulo, uma vez que uma das suas linhas é múltipla de outra:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0. \quad (3.6.11)$$

Também teremos o mesmo resultado para o segundo vetor, visto que o mesmo também é uma das linhas do determinante, pouanto o produto vetorial fornece um vetor perpendicular aos dois que lhe deram origem, visto que o cosseno do ângulo  $\theta$  é nulo, ou seja, o ângulo é  $\frac{\pi}{2}$ .

## 3.7 Ângulos Diretores

A relação entre produto escalar e cosseno do ângulo entre os vetores nos fornece uma outra possibilidade de referenciar os vetores aos eixos do sistema cartesiano, uma vez que temos versores primários para os eixos, podemos verificar qual o resultado do produto escalar entre estes e um vetor qualquer no espaço. Seja o vetor  $\vec{u} = (\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z)$ , calculemos o produto escalar entre ele e os vetores relacionados aos eixos:  $i, j, k$ :

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot i &= |\vec{u}| |i| \cos(\theta) \\ \vec{v}_x &= |\vec{u}| \cos(\theta) \\ \frac{\vec{v}_x}{|\vec{u}|} &= \cos(\theta).\end{aligned}\tag{3.7.1}$$

Para este caso inicialmente façamos uma breve reflexão. Se para cada vetor de módulo unitário for feita a mesma operação acima, teremos três ângulos para  $\theta$ , os quais são os ângulos do vetor no espaço em relação aos eixos, por esta razão convencionou-se chamá-los de nomes especiais, que são  $\alpha, \beta, \gamma$  respectivamente, para os vetores  $i, j, k$ . Observemos, também, que a operação será sempre a mesma para cada eixo e o resultado será o valor da componente do vetor para o eixo dividido pela norma do mesmo, o que nos fornece três cossenos:

$$\frac{\vec{v}_x}{|\vec{u}|} = \cos(\alpha),\tag{3.7.2}$$

$$\frac{\vec{v}_y}{|\vec{u}|} = \cos(\beta),\tag{3.7.3}$$

$$\frac{\vec{v}_z}{|\vec{u}|} = \cos(\gamma).\tag{3.7.4}$$

Os quais chamamos de cossenos diretores, pois direcionam o vetor no espaço sob a referência dos eixos. Em consequência disto, também chamamos os ângulos de ângulos diretores. Disso decorre que:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1.\tag{3.7.5}$$

## 3.8 Vessor

**Definição 3.8.1.** *Vessor é um vector de valor unitário, ou seja, o módulo é igual a 1. É utilizado para indicar direcção, sentido e o ângulo formado com o eixo referencial:*

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}. \quad (3.8.1)$$

Versores podem ser utilizados como bases de um dado espaço vetorial  $V^n$ . A condição necessária e suficiente para tanto, é que tais versores sejam linearmente independentes entre si.

**Exemplo 3.8.1.** Encontre um vetor unitário paralelo a  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Primeiro computamos a norma de  $x$ ,

$$\|x\| = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}, \quad (3.8.2)$$

em que  $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

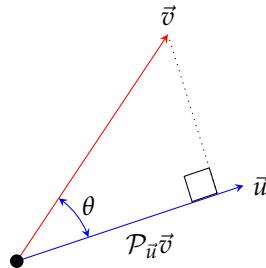
## 3.9 Projeção

**Definição 3.9.1.** Nós definimos a projeção  $\mathcal{P}_u v$  de um vetor  $\vec{v}$  na direção de um outro vetor  $\vec{u}$  como

$$\mathcal{P}_u \vec{v} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \quad (3.9.1)$$

Como você pode ver, nós simplesmente escrevemos uma expressão para a versão mais intuitiva da projeção em questão dada por  $\|\vec{v}\| \cos(\theta) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ . Na figura abaixo, mostramos o diagrama fundamental para a projeção de um vetor na direção de outro.

FIGURA 3.9.1 – PROJEÇÃO DE UM VETOR



**Corolário 3.9.1.** Se os vetores  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  são ortogonais, então  $\mathcal{P}_{\vec{u}} \vec{v} = 0$ .

**Exemplo 3.9.1.** Encontre a projeção do vetor  $\vec{v} = (1, 2, 1)$  sobre o vetor  $\vec{u} = (-2, 1, 3)$ .

Temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\vec{u}}\vec{v} &= \frac{\langle(-2, 1, 3), (1, 2, 1)\rangle}{\|(-2, 1, 3)\|^2}(-2, 1, 3) \\ &= \frac{5}{14}(-2, 1, 3)\end{aligned}\tag{3.9.2}$$

---

# 4

---

## ÁLGEBRA MATRICIAL

---

A álgebra linear é uma ferramenta fundamental da economia matemática, em vários aspectos. Neste capítulo, mostraremos como podemos resolver problemas de álgebra linear por meio das funções matriciais. Uma atenção especial deve ser dedicada aos sistemas lineares de equações simultâneas devido aos teoremas subjacentes envolvidos em suas resoluções. A álgebra linear é amplamente utilizada na economia matemática (e também na econometria) porque vários modelos assumem a linearidade nas relações econômicas, juntamente com a suposição de que essas relações lineares estão todas interconectadas, levando ao uso de uma teoria importante de álgebra linear representada pelos sistemas de equações lineares. Alguns teoremas-chave da álgebra linear são utilizados nas áreas de economia matemática, como os sistemas de equações diferenciais lineares ou a otimização de funções multivariadas. Na economia, duas áreas em que a álgebra linear é tipicamente utilizada são a teoria macroeconômica e a política econômica, em que os agregados econômicos são modelados como equações lineares. Além disso, os modelos de insumo-produto utilizam álgebra linear para explicar as inter-relações entre as diversas indústrias econômicas. Na teoria microeconômica, a álgebra linear pode ser usada para estudar o equilíbrio nos mercados. Este capítulo também explicará alguns modelos relacionados a tudo isso. Aqui estão alguns pontos detalhados sobre o uso de álgebra linear em economia:

- Modelagem de Relações Lineares

Muitos modelos econômicos pressupõem relações lineares entre variáveis. Por exemplo, a lei da oferta e demanda, que é fundamental na economia, muitas vezes é representada por equações lineares. Álgebra linear é usada para expressar e analisar essas relações de maneira matemática.

- Sistemas de Equações Lineares

A resolução de sistemas de equações lineares é uma aplicação direta da álgebra linear na economia. Em economia, os sistemas lineares são frequentemente usados para modelar interações entre diferentes variáveis, como os investimentos em vários setores de uma economia.

- Teoria dos Jogos

A teoria dos jogos, uma ferramenta essencial na economia, frequentemente envolve a resolução de sistemas de equações lineares. A álgebra linear ajuda a modelar estratégias de jogadores e a analisar soluções de equilíbrio.

- Macroeconomia

Na teoria macroeconômica, modelos que descrevem o comportamento agregado de uma economia muitas vezes utilizam equações lineares para representar variáveis como consumo, investimento e produto nacional. A álgebra linear é empregada na análise desses modelos para entender o impacto de diferentes políticas econômicas.

- Econometria

Na análise estatística de dados econômicos, a econometria, técnicas de álgebra linear são frequentemente empregadas. Modelos de regressão, por exemplo, envolvem a manipulação de matrizes e vetores.

- Otimização

A otimização é uma parte essencial da economia, seja na maximização dos lucros de uma empresa ou na alocação eficiente de recursos. Problemas de otimização em economia muitas vezes são formulados e resolvidos usando conceitos de álgebra linear.

- Modelos de Insumo-Produto

A análise insumo-produto, que examina as inter-relações entre diferentes setores da economia, utiliza extensivamente álgebra linear. A representação matricial é comum na modelagem dessas interações.

- Microeconomia

Na teoria da microeconomia, a álgebra linear é usada para modelar e analisar situações de equilíbrio de mercado, como oferta e demanda em diferentes condições.

- Economia Dinâmica

Em modelos dinâmicos que consideram o tempo, equações diferenciais lineares e sistemas dinâmicos lineares são comuns, requerendo técnicas de álgebra linear.

Em resumo, a álgebra linear fornece uma linguagem matemática poderosa e flexível para a análise e modelagem de fenômenos econômicos, sendo uma ferramenta indispensável para economistas teóricos, empíricos e aplicados.

# 4.1 Matrizes e Determinantes

## 4.1.1 Definições

Vamos apresentar duas definições de matriz, uma informal e uma formal. São elas:

**Definição 4.1.1 (Matriz).** Denominamos matriz a um conjunto de números reais, ou a um conjunto de números complexos, dispostos em linhas e colunas, numa certa ordem, e colocados entre colchetes. Assim, uma matriz real, ou uma matriz complexa, que vamos denotar por  $A$ , com  $m$  linhas e  $n$  colunas é representada da forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (4.1.1)$$

com  $a_{ij} \in \mathbb{C}$  ou  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ . Os  $a'_{ij}$ s são chamados de coeficientes da matriz e  $m \times n$  é a sua dimensão.

**Definição 4.1.2 (Matriz).** Considere os seguintes subconjuntos dos naturais ( $\mathbb{N}$ )

$$\mathcal{I}_m = \{1, 2, \dots, m\} \quad e \quad \mathcal{I}_n = \{1, 2, \dots, n\}. \quad (4.1.2)$$

Uma matriz sobre o corpo  $\mathbb{F}$  (seja  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) de ordem  $m \times n$  é uma função matricial

$$A: \mathcal{I}_m \times \mathcal{I}_n \implies \mathbb{F}, \quad (4.1.3)$$

que para cada par ordenado  $(i, j) \in \mathcal{I}_m \times \mathcal{I}_n$  está associado um número escalar

$$a_{ij} = A(i, j) \in \mathbb{F}, \quad (4.1.4)$$

denominado elemento da matriz  $A$ .

**Exemplo 4.1.1.** Considere o seguinte conjunto  $\mathcal{I}_3 = \{1, 2, 3\}$ . Vamos definir uma matriz real  $A: \mathcal{I}_3 \times \mathcal{I}_3 \implies \mathbb{R}$  da seguinte forma:

$$a_{ij} = A(i, j) = \frac{1}{i + j - 1}, \quad (4.1.5)$$

que é denominada matriz de Hilbert de ordem  $3 \times 3$ .

Assim, representamos a matriz  $A$  da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}. \quad (4.1.6)$$

Com base nessa definição, vamos apresentar alguns tipos de matrizes:

**Definição 4.1.3 (Matriz Diagonal).** Uma matriz quadrada ( $m = n$ ) é chamada de matriz diagonal se todos os elementos  $a_{ij}$  para os quais  $i \neq j$  são iguais a zero.

**Definição 4.1.4 (Matriz Triangular).** Uma matriz é triangular quando os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são zero. Mais especificamente, uma matriz triangular superior é aquela em que os elementos abaixo da diagonal principal são nulos:  $\forall i > j, a_{ij} = 0$ ; uma matriz triangular inferior é aquela em que os elementos acima da diagonal principal são nulos:  $\forall i < j, a_{ij} = 0$ .

**Definição 4.1.5 (Matriz Identidade).** Se todos os elementos  $a_{ii}$  são iguais a 1 e  $a_{ij} = 0 \forall i \neq j$ , então a matriz é chamada de matriz identidade, denotada por  $I_m$ , isto é,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.7)$$

**Definição 4.1.6 (Matriz Nula).** Dizemos que uma matriz  $A$  de ordem  $m \times n$  é a matriz nula se seus elementos  $a_{ij}$  são todos nulos. Neste caso, denotamos  $A = 0$ . Frequentemente, indicamos  $0_{m \times n}$  para denotar uma matriz nula de ordem  $m \times n$ .

**Definição 4.1.7 (Matriz Coluna).** Dizemos que uma matriz  $A$  de ordem  $m \times 1$  é uma matriz coluna, que representamos por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}. \quad (4.1.8)$$

**Definição 4.1.8 (Matriz Linha).** Dizemos que uma matriz  $A$  de ordem  $1 \times n$  é uma matriz linha, que representamos por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}. \quad (4.1.9)$$

Em geral, uma matriz coluna também é denominada vetor coluna e uma matriz linha também é denominada vetor linha. Em particular, podemos considerar um escalar  $a \in \mathbb{R}$ , ou  $a \in \mathbb{C}$ , como uma matriz de ordem  $1 \times 1$ .

Agora, tendo visto as definições dos tipos de matrizes acima, vamos ver algumas operações com matrizes.

**Definição 4.1.9 (Adição de Matrizes).** Seja uma matriz  $A$  de dimensão  $m_A \times n_A$  e uma matriz  $B$  de dimensão  $m_B \times n_B$ . Podemos definir a adição de  $A + B = C$  para cada  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  com  $1 \leq i \leq m_A, m_B$  e  $1 \leq j \leq n_A, n_B$ .

**Exemplo 4.1.2.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 10 & 16 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}. \quad (4.1.10)$$

Observe que as dimensões das matrizes  $A$  e  $B$  precisam satisfazer as seguintes condições:  $m_A = m_B$  e  $n_A = n_B$ . Caso contrário, a adição não está definida.

**Definição 4.1.10 (Subtração de Matrizes).** De forma similar, podemos definir a subtração entre uma matriz  $A$  e  $B$  como  $A - B = C$  para cada  $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$  com  $1 \leq i \leq m_A, m_B$  e  $1 \leq j \leq n_A, n_B$ .

**Exemplo 4.1.3.**

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 8 & 11 \\ 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix}. \quad (4.1.11)$$

Observe que as dimensões das matrizes  $A$  e  $B$  precisam satisfazer as seguintes condições:  $m_A = m_B$  e  $n_A = n_B$ . Caso contrário, a subtração não está definida.

**Definição 4.1.11 (Multiplicação por Escalar).** A multiplicação de uma matriz  $A$  por um escalar  $c$  é definida como  $cA = B$ , com  $b_{ij} = ca_{ij}$  para  $1 \leq i \leq m_A$  e  $1 \leq j \leq n_A$ .

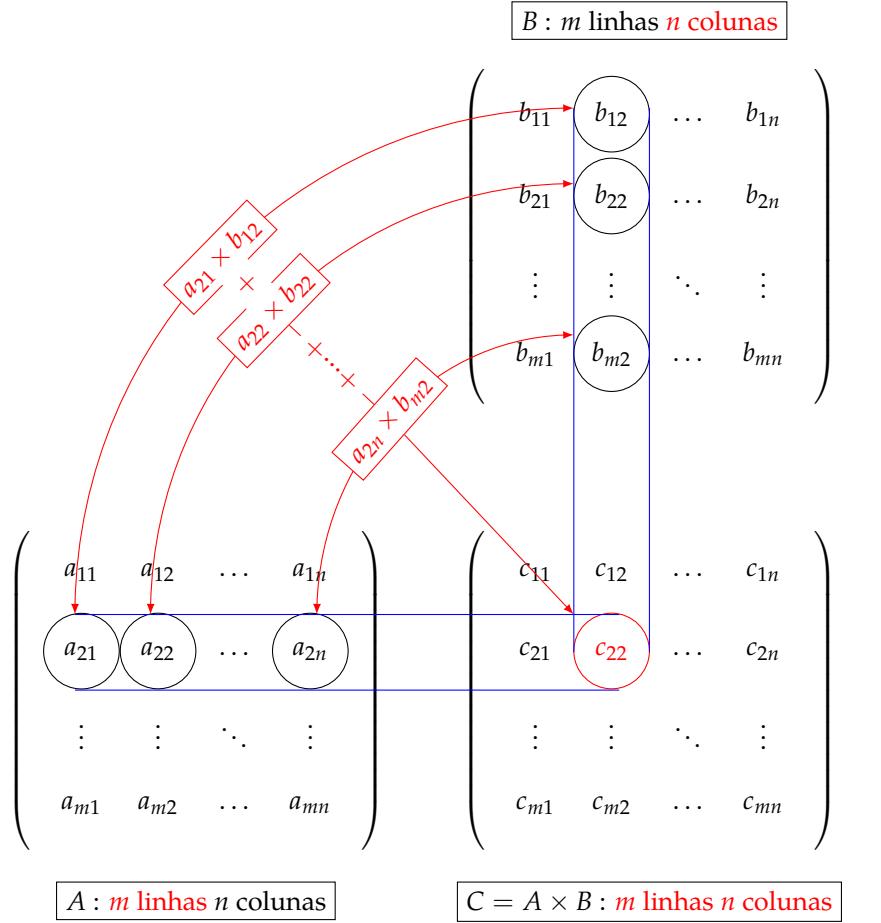
**Exemplo 4.1.4.**

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}. \quad (4.1.12)$$

**Definição 4.1.12 (Multiplicação de Matrizes).** Podemos definir a multiplicação entre uma matriz  $A$  com dimensão  $m_A \times n_A$  e  $B$  com dimensão  $m_B \times n_B$  como  $AB = C$  para cada  $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n_A} a_{ik}b_{kj}$ . Mais uma vez,

vemos que certas condições precisam ser satisfeitas, ou seja,  $n_A = m_B$ . As dimensões da matriz resultante  $C$  são  $m_A \times n_B$ .

FIGURA 4.1.1 – PRODUTO DE MATRIZES



### Exemplo 4.1.5.

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 8 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 37 & 5 & 16 \end{pmatrix}. \quad (4.1.13)$$

**Definição 4.1.13 (Traço (característica)).** Para qualquer matriz  $A, n \times n$ , o traço de uma matriz  $A$ , representado por  $\text{tr}(A)$ , será a soma dos elementos de sua diagonal principal. Matematicamente

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}. \quad (4.1.14)$$

Da definição de traço de uma matriz, seja o seguinte teorema:

**Teorema 4.1.1.** Sejam  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  matrizes de ordem  $n$ . Então,

1.  $\text{tr}(A + B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ .
2.  $\text{tr}(\lambda A) = \lambda \text{tr}(A), \forall \lambda$ .

Com base nas operações com matrizes, sejam as seguintes definições:

**Teorema 4.1.2.** Sejam  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  matrizes de ordem  $n$ . Então,  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

**Definição 4.1.14 (Matriz Transposta).** A transposta de uma matriz  $A$  de dimensão  $m \times n$ ,  $A^T$ , é uma matriz  $n \times m$  que é obtida pelo intercâmbio de linhas e colunas de  $A$ , isto é,  $a_{ij}$  se torna  $a_{ji}, \forall i, j$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \quad (4.1.15)$$

**Exemplo 4.1.6.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}. \quad (4.1.16)$$

Para a transposta da multiplicação de duas matrizes, temos:

$$(AB)^T = B^T A^T. \quad (4.1.17)$$

**Definição 4.1.15 (Matriz Simétrica).** Uma matriz simétrica é uma matriz quadrada  $A$  tal que  $A^T = A$ .

**Definição 4.1.16 (Matriz Anti-Simétrica).** Seja  $A$  uma matriz quadrada. Dizemos que  $A$  é anti-simétrica se  $A^T = -A$ .

**Definição 4.1.17 (Matriz Idempotente).** Em álgebra, uma matriz idempotente é uma matriz que, ao ser multiplicada por si mesma, resulta em si mesma. Em outras palavras, a matriz  $A$ , é idempotente se e somente se  $AA = A$ . Para que este produto  $AA$  seja possível,  $A$  deve necessariamente ser uma matriz quadrada. Ou seja,  $A^2 = A$ .

**Definição 4.1.18 (Matriz Periódica).** Seja  $A$  uma matriz quadrada. Dizemos que  $A$  é periódica, com período  $k$ , se  $A^{k+1} = A$ , onde  $k$  é o menor inteiro positivo com tal propriedade.

**Definição 4.1.19 (Matriz Nilpotente).** Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n \times n$ . Dizemos que  $A$  é nilpotente se existe um  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $A^k = 0_n$ . Se  $k$  é o menor inteiro positivo tal que  $A^k = 0_n$ , dizemos que  $A$  é nilpotente de índice  $k$ .

**Definição 4.1.20 (Matrizes Comutativas).** Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas tais que  $AB = BA$ , dizemos que as matrizes  $A$  e  $B$  são comutativas.

**Definição 4.1.21 (Matrizes Anti-Comutativas).** Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas tais que  $AB = -BA$ , dizemos que as matrizes  $A$  e  $B$  são anti-comutativas.

**Definição 4.1.22 (Matriz Normal).** Seja  $A$  uma matriz real de ordem  $n$ . Dizemos que  $A$  é uma matriz normal se  $A^T A = AA^T$ , isto é, as matrizes  $A$  e  $A^T$  são comutativas.

Uma vez visto mais esse conjunto de matrizes, podemos elencar as seguintes propriedades de matrizes:

1. Comutativa

- (a)  $A + B = B + A$
- (b)  $AB \neq BA$

2. Associativa

- (a)  $A + (B + C) = (A + B) + C$
- (b)  $(cd)A = c(dA)$
- (c)  $A(BC) = (AB)C$

3. Identidade

- (a)  $\exists!B$  tal que  $A + B = A$
- (b)  $\exists!B$  tal que  $AB = A$

4. Inversa

- (a)  $\exists B$  tal que  $A + B = 0$
- (b)  $\exists B$  tal que  $AB = I$

5. Distributiva

- (a)  $c(A + B) = cA + cB$
- (b)  $(c + d)A = cA + dA$
- (c)  $A(B + C) = AB + AC$
- (d)  $(A + B)C = AC + BC$

6. Zero

- (a)  $A0 = 0$
- (b)  $cA = 0 \implies c = 0$  ou  $A = 0$
- (c)  $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$  ou  $B = 0$

**Definição 4.1.23 (Operações Elementares).** As operações elementares com matrizes são operações que mantém tanto a ordem da matriz quanto a sua característica.

**Definição 4.1.24 (Operações Elementares de Linhas).** As operações elementares nas linhas são definidas como:

1. Intercambiar duas linhas, isto é, trocar a  $i$ -ésima linha pela  $j$ -ésima linha, denotada por  $R_{ij}$ ;
2. Multiplicar todos os elementos de uma linha ( $k$ -ésima linha) por uma constante  $c \neq 0$ , denotada por  $R_k(c)$ ;
3. Substituir uma linha pelo produto de uma constante por outra linha, denotada  $R_{jk}(c)$ .

De modo análogo, definimos os mesmos tipos de operações elementares com as colunas da matriz, que são denominadas operações elementares de colunas.

**Definição 4.1.25 (Matrizes Equivalentes em Linha).** Duas matrizes são equivalentes em linha (ou linha equivalente) se uma pode ser obtida por meio da outra a partir de um número finito de operações elementares de linhas.

**Exemplo 4.1.7.** As três matrizes abaixo são equivalentes em linha.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_{12}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\left(\frac{1}{2}\right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.1.18)$$

**Definição 4.1.26 (Matrizes Equivalentes em Coluna).** Duas matrizes são equivalentes em coluna (ou coluna equivalente) se uma pode ser obtida por meio da outra a partir de um número finito de operações elementares de colunas.

**Definição 4.1.27 (Matrizes Equivalentes).** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes de mesma ordem. Dizemos que a matriz  $B$  é equivalente a matriz  $A$ , se a matriz  $B$  pode ser obtida da matriz  $A$  através de uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas e sobre as colunas de  $A$ . Indicamos  $B \sim A$  para denotar que a matriz  $B$  é equivalente a matriz  $A$ .

**Definição 4.1.28 (Matriz Elementar).** Uma matriz quadrada  $E$  de ordem  $n$  é chamada de matriz elementar se foi obtida por meio da aplicação de exatamente uma operação elementar de linha na matriz identidade.

**Exemplo 4.1.8.** Seja a  $(k, \ell)$ -ésima entrada de  $E_{ij}$  definida por

$$(E_{ij})_{k,\ell} = \begin{cases} 1, & \text{se } k = \ell \text{ e } \ell \neq i, j \\ 1, & \text{se } (k, \ell) = (i, j) \text{ ou } (k, \ell) = (j, i) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (4.1.19)$$

Então,

$$E_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1.20)$$

**Definição 4.1.29 (Rank).** O número de linhas diferentes de zero em uma matriz reduzida por linhas é chamado de rank da matriz.

**Exemplo 4.1.9.** Determine o rank de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Para determinar o rank de  $A$  procedemos como segue:

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \xrightarrow{R_{21}(-2), R_{31}(-1)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{R_2(-1), R_{32}(1)} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{R_3\left(\frac{1}{2}\right), R_{12}(-2)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \xrightarrow{R_{23}(-1), R_{13}(1)} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. & & & (4.1.21) \end{array}$$

Portanto, o rank de  $A$  é 3.

**Corolário 4.1.1.** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes de ordem  $m \times n$ . Então, a matriz  $B$  é equivalente à matriz  $A$ , que indicamos por  $B \sim A$ , se, e somente se, existe uma matriz invertível  $P$  de ordem  $m \times m$  e uma matriz invertível  $Q$  de ordem  $n \times n$ , tais que  $B = PAQ$ .

*Demonstração.* Vamos mostrar que a equivalência de matrizes é uma relação de equivalência sobre o conjunto das matrizes de ordem  $m \times n$ , isto é, satisfaz as seguintes propriedades:

1. Reflexão:  $A \sim A$ .

Podemos verificar facilmente que  $A \sim A$ . De fato, pois  $A = I_m A I_n$ , onde  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n \times n$ , e  $I_m$  é a matriz identidade de ordem  $m \times m$ . Assim, mostramos que a equivalência de matrizes satisfaz a propriedade reflexiva.

2. Simetria: se  $A \sim B$ , então  $B \sim A$ .

Considerando que a matriz  $A$  é equivalente à matriz  $B$ ,  $A \sim B$ , existe uma matriz invertível  $P$  de ordem  $m \times m$  e uma matriz invertível  $Q$  de ordem  $n \times n$ , tais que  $A = PBQ$ . Assim, temos que  $B = P^{-1}AQ^{-1}$ . Logo, tomando as matrizes  $P_1 = P^{-1}$  e  $Q_1 = Q^{-1}$ , obtemos  $B = P_1AQ_1$ . Desse modo, a matriz  $B$  é equivalente à matriz  $A$ ,  $B \sim A$ . Portanto, a equivalência de matrizes satisfaz a propriedade simétrica.

3. Transitividade: se  $A \sim B$  e  $B \sim C$ , então  $A \sim C$ .

Considerando que a matriz  $A$  é equivalente à matriz  $B$ , existe uma matriz invertível  $P_1$  de ordem  $m \times m$  e uma matriz invertível  $Q_1$  de ordem  $n \times n$ , tais que  $A = P_1BQ_1$ , e que a matriz  $B$  é equivalente à matriz  $C$ , existe uma matriz invertível  $P_2$  de ordem  $m \times m$  e uma matriz invertível  $Q_2$  de ordem  $n \times n$ , tais que  $B = P_2CQ_2$ . Desse modo, temos que  $A = P_1BQ_1 = P_1(P_2CQ_2)Q_1 = (P_1P_2)C(Q_2Q_1)$ . Sabemos que a matriz  $P_1P_2$  é invertível, pois as matrizes  $P_1$  e  $P_2$  são invertíveis, e que a matriz  $Q_2Q_1$  é invertível, pois as matrizes  $Q_1$  e  $Q_2$  são invertíveis. Desse modo, a matriz  $A$  é equivalente à matriz  $C$ ,  $A \sim C$ . Assim, a equivalência de matrizes satisfaz a propriedade da transitividade.

Portanto, mostramos que a equivalência de matrizes é uma relação de equivalência sobre o conjunto das matrizes de ordem  $m \times n$ . ■

#### 4.1.2 Inversão de Matrizes

**Definição 4.1.30 (Matriz Inversa).** Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ .

Uma matriz quadrada  $B$  é dita a inversa à esquerda de  $A$  se  $BA = I_n$ .

Uma matriz quadrada  $B$  é dita a inversa à direita de  $A$  se  $AB = I_n$ .

Uma matriz  $A$  tem inversa se existe uma matriz  $B$  tal que  $AB = BA = I_n$ .

**Lema 4.1.1.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Suponha que existam matrizes  $B$  e  $C$  de ordem  $n \times n$  tal que  $AB = I_n$  e  $CA = I_n$ . Então  $B = C$ .

*Demonstração.* Note que  $C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B$ . ■

**Corolário 4.1.2.** Do lema acima vemos que se  $A$  é inversível, então a inversa é única. Quando a inversa de  $A$  é única, nós a denotamos por  $A^{-1}$ . Isto é,  $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ .

**Teorema 4.1.3.** Se  $A$  e  $B$  são duas matrizes com inversas  $A^{-1}$  e  $B^{-1}$ , então:

1.  $(A^{-1})^{-1} = A$
2.  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3.  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4.  $(A^k)^{-1} = A^{-1}A^{-1}\dots A^{-1} = (A^{-1})^k$
5.  $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}, c \neq 0$

**Definição 4.1.31.** Uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é dita de rank completo se  $\text{rank}(A) = n$ .

**Teorema 4.1.4.** Para uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , as seguintes assertivas são equivalentes.

1.  $A$  é inversível.
2.  $A$  tem rank completo.
3.  $A$  é equivalente em linhas a uma matriz identidade.

4.  $A$  é o produto de matrizes elementares.

**Teorema 4.1.5.** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ .

1. Suponha que exista uma matriz  $B$  tal que  $AB = I_n$ . Então  $A^{-1}$  existe.
2. Suponha que exista uma matriz  $C$  tal que  $CA = I_n$ . Então  $A^{-1}$  existe.

**Corolário 4.1.3.** Este teorema implica o seguinte: se queremos mostrar que uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$  é inversível, é suficiente mostrar a existência de  $B$  tal que  $AB = I_n$  ou de uma matriz  $C$  tal que  $CA = I_n$ .

**Corolário 4.1.4.** Seja  $A$  uma matriz inversível  $n \times n$ . Suponha que a sequência de operações elementares em linha reduz  $A$  a uma matriz identidade. Então, a mesma sequência quando aplicada a matriz identidade produz  $A^{-1}$ .

**Exemplo 4.1.10.** Encontre a inversa de  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  por meio da eliminação de Gauss-Jordan.

Solução:

$$\begin{array}{ccc}
 \left( \begin{array}{cccccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_1 \left( \frac{1}{2} \right)} & \left( \begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_{21}(-1), R_{31}(-1)} \\
 \left( \begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_2 \left( \frac{2}{3} \right)} & \left( \begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_{32} \left( -\frac{1}{2} \right)} \\
 \left( \begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{R_3 \left( \frac{3}{4} \right)} & \left( \begin{array}{cccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \right) & \\
 & \xrightarrow{R_{23} \left( -\frac{1}{3} \right), R_{13} \left( -\frac{1}{2} \right)} & \left( \begin{array}{ccccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{array} \right) &
 \end{array}$$

$$\overrightarrow{R_{12} \left( -\frac{1}{2} \right)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \quad (4.1.22)$$

$$Portanto, a inversa de A é A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

**Definição 4.1.32.** Uma matriz quadrada é dita ortogonal se sua matriz inversa coincide com sua matriz transposta. Isto é, uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é ortogonal se  $A^{-1} = A^T$ .

### 4.1.3 Determinantes

Em matemática, o determinante é uma função matricial que associa a cada matriz quadrada um escalar; ela transforma essa matriz em um número real. Esta função permite saber se a matriz tem ou não inversa, pois as que não têm são precisamente aquelas cujo determinante é igual a 0. O determinante de uma matriz  $A$  também é escrito como  $|A|$ . Por exemplo, para a matriz  $A$  abaixo, temos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}. \quad (4.1.23)$$

**Teorema 4.1.6.** Dada uma matriz  $A = [A_1, A_2] \in \mathbb{R}^2$ , o valor absoluto de seu determinante,  $|\det(A)|$ , é a área do paralelogramo formado pelos vetores  $A_1$  e  $A_2$ .

*Demonstração.* Seja a seguinte representação:

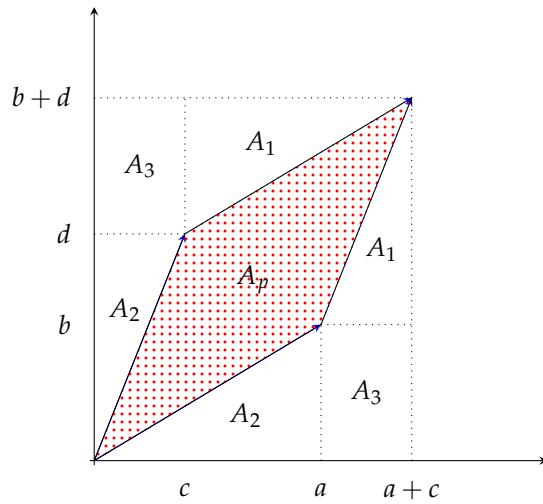
$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}. \quad (4.1.24)$$

Observe que a área do paralelogramo pode ser computada como:

$$\begin{aligned} 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 + A_p &= (a+c)(b+d) \\ 2 \left( \frac{cd}{2} \right) + 2 \left( \frac{ab}{2} \right) + 2cb + A_p &= ab + ad + cb + cd \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
cd + ab + 2cb + A_p &= ab + ad + cb + cd \\
A_p &= |A| \tag{4.1.25}
\end{aligned}$$

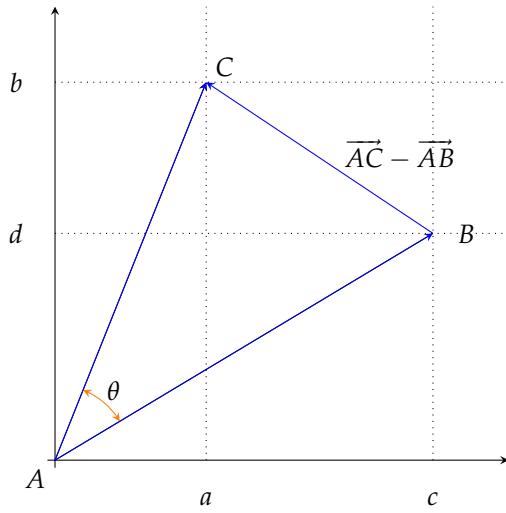
FIGURA 4.1.2 – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO DETERMINANTE: ÁREA DE UM PARALELOGRAMO



■

*Demonstração.* Partindo das ideias de módulo e de produto escalar de dois vetores, pode-se chegar ao ângulo de dois vetores no plano.

FIGURA 4.1.3 – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO DETERMINANTE: ÁREA DE UM PARALELOGRAMO



Pela lei dos cossenos, temos:

$$(|\vec{AC} - \vec{AB}|)^2 = (|\vec{AB}|)^2 + (|\vec{AC}|)^2 - 2 \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \theta. \quad (4.1.26)$$

Também,

$$(\vec{AB} - \vec{AC}) \cdot (\vec{AB} - \vec{AC}) = (\vec{AB}) \cdot (\vec{AB}) + (\vec{AC}) \cdot (\vec{AC}) - 2 \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \theta. \quad (4.1.27)$$

Assim,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AB} - 2 \cdot \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{AC} \cdot \vec{AC} - 2 \cdot |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \cos \theta. \quad (4.1.28)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{AC} &= |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}. \end{aligned} \quad (4.1.29)$$

Partindo dessas relações, pode-se chegar a uma expressão para a área  $S$  do paralelogramo definido por dois vetores, seguindo os passos abaixo:

$$S = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \sin \theta. \quad (4.1.30)$$

Lembre que:

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{(\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AC}|^2}} = \frac{\sqrt{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}. \quad (4.1.31)$$

Logo,

$$\begin{aligned} S &= |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cdot \frac{\sqrt{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} \\ &= \sqrt{|\vec{AB}|^2 \cdot |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}. \end{aligned} \quad (4.1.32)$$

Assim, considerando que o ponto  $A$  tem coordenadas  $(0, 0)$ , temos que:

$$S = \sqrt{(c^2 + d^2)(a^2 + b^2) - (cd + ab)^2}. \quad (4.1.33)$$

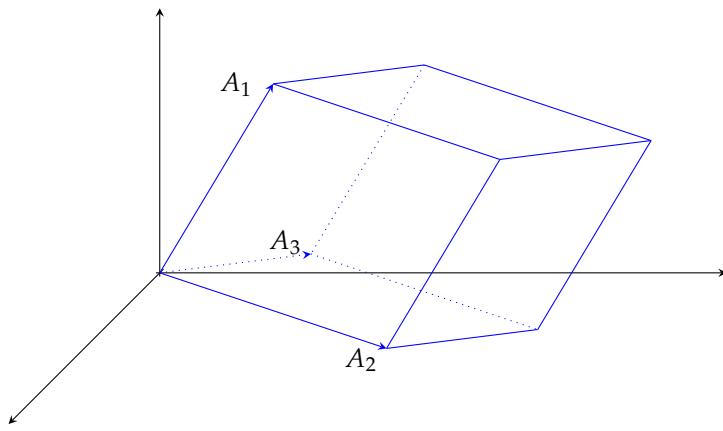
Desenvolvendo, simplificando e fatorando:

$$S = |cd - ab| = \begin{vmatrix} c & a \\ b & d \end{vmatrix}. \quad (4.1.34)$$

■

**Definição 4.1.33.** O valor absoluto do determinante de uma matriz de ordem 3, é o volume de um paralelepípedo formado pelos vetores  $A_1, A_2$  e  $A_3$ .

FIGURA 4.1.4 – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO DETERMINANTE: VOLUME DE UM PARALELEPÍPEDO



**Corolário 4.1.5.** Seja um paralelepípedo  $P$   $m$ -dimensional, temos que  $\text{vol}(P) = |\det(A)|$ .

**Corolário 4.1.6.** Seja  $T$  um triângulo com vértices  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  e  $(x_3, y_3)$ . Então,

$$\text{Area } T = \frac{1}{2} \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{pmatrix} \right|. \quad (4.1.35)$$

Com a definição geométrica de determinante, podemos apresentar algebricamente o determinante de uma matriz. Antes, seja a seguinte definição.

**Definição 4.1.34.** Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz  $n \times n$ . Dado o par  $(i, j)$ , definimos  $M_{ij}$  de ordem  $(n-1) \times (n-1)$  como a matriz obtida ao se remover a  $i$ -ésima linha e a  $j$ -ésima coluna de  $A$ .

**Exemplo 4.1.11.** Seja  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Então,

$$M_{21} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.1.36)$$

Com isso podemos definir formalmente o determinante de uma matriz.

**Definição 4.1.35 (Teorema de Laplace).** Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz  $n \times n$ . Se  $n = 1$ , seu determinante, denotado por  $\det A$ , é igual a  $a_{11}$ . Se  $n > 1$ , então escolhemos arbitrariamente  $i^* \in [1, n]$ , e então definimos o determinante de  $A$  recursivamente como:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i^*+j} \times a_{i^*j} \times \det(M_{i^*j}), \quad (4.1.37)$$

em que  $(-1)^{i^*+j} \times \det(M_{i^*j})$  é o cofator do elemento  $a_{ij}$  e será denotado por  $C_{ij}$ . Além disso,  $\sum_{j=1}^n (-1)^{i^*+j} \times |M_{i^*j}|$  é denominado expansão de cofatores por linhas. O resultado é idêntico procedendo-se por meio de colunas.

**Definição 4.1.36.** A matriz adjunta,  $\text{adj}(A)$ , é a transposta da matriz de cofatores.

**Exemplo 4.1.12.** Calcule o determinante da matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

Solução:

$$\det A = 2 \times 3 - 4 \times (-1) = 10. \quad (4.1.38)$$

Seguindo a definição formal de determinante e escolhendo  $i^* = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{1+1} \times 2 \times \det(M_{11}) + (-1)^{1+2} \times 4 \times \det(M_{12}) \\ &= 1 \times 2 \times 3 + (-1) \times 4 \times (-1) = 10. \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

Escolhendo  $i^* = 2$ , temos:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{2+1} \times (-1) \times \det(M_{21}) + (-1)^{2+2} \times 3 \times \det(M_{22}) \\ &= (-1) \times (-1) \times 4 + 1 \times 3 \times 2 = 10. \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

**Exemplo 4.1.13.** Seja  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calcule  $|A|$ .

Solução:

Escolhendo  $i^* = 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned}\det A &= 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-2) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= 1(0 - 2) - 2(6 - 2) + 1(-3 - 0) = -13.\end{aligned}\quad (4.1.41)$$

Para calcular o determinante de uma matriz  $2 \times 2$  basta fazer:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (4.1.42)$$

O determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 pode ser calculado por meio da Regra de Sarrus. A Regra de Sarrus ou esquema de Sarrus é um método e um esquema de memorização para calcular o determinante de uma matriz  $3 \times 3$ . O nome refere-se ao matemático francês Pierre Frederic Sarrus.

Considerando uma matriz  $3 \times 3$

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.1.43)$$

o seu determinante pode ser calculado pelo seguinte esquema: copie as 2 primeiras colunas da matriz à direita da 3ª coluna, de modo que sejam obtida uma sequência de 5 colunas. Em seguida, some os produtos das diagonais que partem de cima para baixo e subtraia os produtos das diagonais que vão de baixo para cima. Isso produz:

$$\begin{aligned}\det(M) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.\end{aligned}\quad (4.1.44)$$

**Exemplo 4.1.14.** Seja  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Calcule  $|A|$  por meio da regra de Sarrus.

Solução:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}. \quad (4.1.45)$$

Assim,

$$|A| = 0 + 4 + (-3) - [2 + 12] = -13. \quad (4.1.46)$$

Um esquema semelhante baseado em diagonais funciona para matrizes  $2 \times 2$ :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (4.1.47)$$

Na prática, o teorema de Laplace equivale a reduzir o cálculo do determinante de uma matriz de ordem  $n$  ao cálculo de determinantes de matrizes de ordem  $n - 1$ . O Teorema de Laplace pode ser aplicado as vezes que forem necessárias até obter matrizes de ordem 2 ou 3, cujo determinante é mais facilmente calculado através da regra de Sarrus. A escolha da linha ou coluna da matriz a que se aplica este processo é indiferente, contudo, para maior simplicidade dos cálculos, convém escolher a linha ou coluna que contiver mais zeros.

Listamos abaixo algumas das propriedades dos determinantes:

1. O determinante da matriz identidade é igual a 1:  $|I_n| = 1$ .
2. O determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta:  $|A| = |A^T|$ .
3. Se uma matriz quadrada é invertível então, o determinante da sua inversa é o inverso do seu determinante:  $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ . Resulta desta propriedade ainda, que para matrizes invertíveis, verifica-se que  $|A| \neq 0$ .
4. O determinante do produto de matrizes quadradas de mesma ordem é o produto dos determinantes (teorema de Binet):  $|AB| = |A||B|$ .
5. O determinante da multiplicação de um escalar por uma matriz quadrada de ordem  $n$  resulta nesse escalar elevado a  $n$  vezes o determinante dessa matriz:  $|\lambda A| = \lambda^n |A|$ , onde  $n$  é a ordem da matriz  $A$ .
6. Se  $A$  é ortogonal, então  $|A| = \pm 1$ .
7. Se uma matriz é triangular (superior ou inferior) o seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal. Seja  $A$  uma matriz triangular de ordem  $n$ , então  $|A| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^n a_{ii}$ .
8. Se uma fila (linha ou coluna) da matriz  $A$  é composta de zeros, então  $|A| = 0$ .
9. Se escrevermos cada elemento de uma linha ou coluna de  $A$  como soma de duas parcelas, então  $\det A$  é a soma de dois determinantes de ordem  $n$  cada um considerando como elemento daquela linha ou coluna uma das parcelas, e repetindo as demais linhas ou colunas.

10. Multiplicando uma fila (linha ou coluna) de uma matriz  $A$  por um escalar  $\lambda$ , então o determinante da nova matriz é igual ao determinante de  $A$  multiplicado por  $\lambda$ .
11. Se permutarmos duas linhas ou colunas de  $A$ , então o determinante da nova matriz é  $-\det A$ .
12. Se  $A$  tem duas linhas (ou colunas) iguais, então  $\det A = 0$ .
13. Se somarmos a uma linha (ou coluna) de  $A$  um múltiplo de outra linha (ou coluna), o determinante da nova matriz é igual ao de  $A$ .

Do que foi visto anteriormente, uma matriz  $A \in R^{n \times n}$  é dita ortogonal se:

1. For invertível, isto é:  $\det(A) \neq 0$ .
2. Sua matriz inversa  $A^{-1}$  coincide com sua matriz transposta  $A^T$ , isto é:  $A^{-1} = A^T$ .

**Teorema 4.1.7.** *Se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então*

$$A(\text{adj } A) = (\det A)I = (\text{adj } A)A. \quad (4.1.48)$$

Além disso, se  $\det A \neq 0$ , então:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A. \quad (4.1.49)$$

**Exemplo 4.1.15.** Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 9 & 7 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ .

Como  $\det A = -6 \neq 0$ , então  $A$  é invertível e podemos encontrar  $A$  usando a adjunta. Então,

$$\text{adj } A = \begin{pmatrix} -6 & 18 & -27 \\ -4 & 16 & -25 \\ 6 & -24 & 36 \end{pmatrix}. \quad (4.1.50)$$

Logo,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -6 & 18 & -27 \\ -4 & 16 & -25 \\ 6 & -24 & 36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{9}{2} \\ \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{25}{6} \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}. \quad (4.1.51)$$

**Corolário 4.1.7.** Seja  $A$  uma matriz invertível de ordem  $n \times n$ . Então,  $\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$ .

*Demonstração.* Usando a fórmula da adjunta:

$$\begin{aligned} A(\text{adj } A) &= (\det A)I \\ \det(A(\text{adj } A)) &= \det((\det A)I) \\ \det(A) \times \det(\text{adj } A) &= (\det A)^n (\det I) \\ \det(A) \times \det(\text{adj } A) &= (\det A)^n \\ \det(\text{adj } A) &= (\det A)^{n-1}. \end{aligned} \tag{4.1.52}$$

■

Mesmo se  $A$  não for invertível,  $\det(\text{adj } A) = (\det A)^{n-1}$ , mas a prova é mais complicada.

#### 4.1.4 Autovalor e Autovetor de um Operador Linear

Sejam  $V$  um espaço vetorial real e  $T$  um operador linear sobre  $V$ . Podemos fazer a colocação do seguinte problema:

**Problema 4.1.1.** Quais são os elementos  $v \in V$  tais que  $T(v) = -v$ ?

**Exemplo 4.1.16.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^2$ . O operador linear

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\implies \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\implies T(x, y) = (-x, -y), \end{aligned} \tag{4.1.53}$$

é a reflexão em torno da origem, isto é, uma rotação de  $180^\circ$  no sentido anti-horário.

Podemos verificar facilmente que

$$T(x, y) = (-x, -y) = -1(x, y). \tag{4.1.54}$$

Portanto, todo elemento  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  satisfaz a condição acima.

**Exemplo 4.1.17.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^2$ . Seja o operador linear

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\implies \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\implies T(x, y) = (x + 2y, -y). \end{aligned} \tag{4.1.55}$$

Podemos verificar facilmente que

$$T(x, -x) = (-x, x) = -1(x, -x). \tag{4.1.56}$$

Portanto, todo elemento  $v = (x, -x) \in \mathbb{R}^2$  satisfaz a condição acima.

Sejam  $V$  um espaço vetorial real e  $T$  um operador linear sobre  $V$ . Podemos também fazer a colocação do seguinte problema:

**Problema 4.1.2.** Quais são os elementos  $v \in V$ , não-nulos, que são levados pelo operador  $T$  em um múltiplo de si mesmo, isto é, estamos procurando elementos  $v \in V$ , não-nulos, e escalares  $\lambda \in \mathbb{R}$  tais que  $T(v) = \lambda v$ ?

**Definição 4.1.37.** Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $T: V \rightarrow V$  um operador linear. Se existirem  $v \in V$ , diferentes do elemento neutro, e  $\lambda \in \mathbb{F}$  tais que  $T(v) = \lambda v$ , então o escalar  $\lambda \in \mathbb{F}$  é um autovalor de  $T$  e o elemento  $v$  é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda$ .

**Exemplo 4.1.18.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^2$ . O operador linear

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto T(x, y) = (y, x), \end{aligned} \tag{4.1.57}$$

é a reflexão em torno da reta  $\mathbb{R}$  dada pela equação  $y = x$ .

Assim, para qualquer elemento  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , não-nulo, temos que

$$T(x, y) = (x, y) = 1(x, y). \tag{4.1.58}$$

Portanto, todo elemento  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , não-nulo é um autovetor de  $T$  associado ao autovalor  $\lambda = 1$ .

**Teorema 4.1.8.** Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $T$  um operador linear sobre  $V$  e  $v$  um autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ . Então, qualquer elemento  $w = \alpha v$ , com  $\alpha \in \mathbb{F}$  não-nulo, também é um autovetor de  $T$  associado a  $\lambda$ .

**Teorema 4.1.9.** Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $T: V \rightarrow V$  um operador linear. Fixando um autovalor  $\lambda$  do operador  $T$ , o subconjunto

$$V_\lambda = \{v \in V \mid T(v) = \lambda v\}, \tag{4.1.59}$$

é denominado subespaço associado ao autovalor  $\lambda$ .

**Exemplo 4.1.19.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^2$ . O operador linear

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto T(x, y) = (-x, -y), \end{aligned} \tag{4.1.60}$$

é a reflexão em torno origem. Assim, para qualquer elemento  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , não-nulo, temos que  $T(x, y) = (-x, -y) = -1(x, y)$ . Portanto, qualquer elemento  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ , não-nulo, é um autovetor de  $T$  associado ao único autovalor  $\lambda = -1$ .

**Exemplo 4.1.20.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^2$ . O operador linear

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x, y) \implies T(x, y) = (-y, x), \quad (4.1.61)$$

é uma rotação de um ângulo  $\theta = \frac{\pi}{2}$  no sentido anti-horário.

A matriz associada pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} A &= [T]_{\beta}^{\beta} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.1.62)$$

cujo polinômio característico é  $\lambda^2 + 1 = 0$ , com  $\lambda = \pm i$ .

Note que nenhum vetor  $v \in \mathbb{R}^2$  não-nulo é levado por  $T$  em um múltiplo de si mesmo. Logo,  $T$  não tem nem autovalores e nem autovetores. Este é um exemplo de que nem todo operador linear sobre um espaço vetorial real possui autovalores e autovetores.

#### 4.1.5 Autovalor e Autovetor de uma Matriz

Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo  $\mathbb{F}$ , digamos que  $\dim(V) = n$ , e  $T$  um operador linear sobre  $V$ . O problema de encontrar os autovalores do operador  $T$  será resolvido através do cálculo de determinantes. Queremos encontrar escalares  $\lambda \in \mathbb{F}$  de modo que a equação  $T(v) = \lambda v$  tenha solução  $v \in V$  não-nula. A equação  $T(v) = \lambda v$  pode ser escrita na forma:  $(T - \lambda I_V)(v) = 0_V$ .

A equação acima terá solução  $v$  não-nula se, e somente se,  $\text{Ker}(T - \lambda I_V) \neq \{0_V\}$ . Assim, se  $A = [T]_{\beta}^{\beta}$  é a representação matricial do operador  $T$ , com relação a alguma base ordenada de  $V$ , então a matriz  $A - \lambda I_n$  é a representação matricial para o operador  $T - \lambda I_V$ . Desse modo, a matriz  $A - \lambda I_n$  deve ser singular, isto é,  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ .

Portanto,  $\lambda \in \mathbb{F}$  é um autovalor do operador  $T$  se, e somente se, satisfaz a equação

$$\det(A - \lambda I_n) = 0. \quad (4.1.63)$$

Desse modo, dada uma matriz  $A$  de ordem  $n$  sobre um corpo  $\mathbb{F}$ , vamos definir um autovalor de  $A$  como sendo um autovalor do operador linear  $T_A$  sobre  $\mathbb{F}^n$  associado à matriz  $A$ , isto é,  $A = [T_A]_{\beta}^{\beta}$ , onde  $\beta$  é a base canônica de  $\mathbb{F}^n$ . Portanto, os autovetores da matriz  $A$ , associados ao autovalor  $\lambda$ , são soluções não-nulas da equação  $T_A(v) = \lambda v$ , representadas como matriz coluna. Assim, se  $u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$  é um autovetor de  $T_A$  associado ao autovalor  $\lambda \in \mathbb{F}$ , isto é,  $T_A(v) = \lambda v$ , temos que

$$AX = \lambda X, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{F}), \quad (4.1.64)$$

isto é,  $(\lambda, X)$  é um autopar da matriz  $A$ . Note que  $[v]_{\beta} = X$ .

**Definição 4.1.38.** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$  sobre um corpo  $\mathbb{F}$ . Um autovalor da matriz  $A$  é um escalar  $\lambda \in \mathbb{F}$  tal que a matriz  $(A - \lambda I_n)$  seja singular.

Equivalentemente,  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  se, e somente se,  $\det(A - \lambda I_n) = 0$ . Evidentemente, os autovalores de  $A$  são exatamente os escalares  $\lambda \in \mathbb{F}$  que são raízes do polinômio  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ . O polinômio  $p(\lambda)$  é denominado polinômio característico da matriz  $A$ , que é um polinômio de grau  $n$ .

**Exemplo 4.1.21.** Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ . Calcule os autovalores de  $A$ .

Montando o polinômio característico de  $A$ , temos:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda). \quad (4.1.65)$$

Portanto, os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = 3$ .

**Exemplo 4.1.22.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^2$ . Seja o operador linear

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto T(x, y) = (2x + 2y, y). \end{aligned} \quad (4.1.66)$$

Determine o polinômio característico do operador  $T$ .

Temos que a matriz  $A = [T]_{\beta}^{\beta}$  é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.67)$$

Portanto, o polinômio característico do operador  $T$  é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(1 - \lambda). \quad (4.1.68)$$

Portanto, os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 1$ .

**Exemplo 4.1.23.** Considere a matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Determine os autovetores associados aos autovalores.

O polinômio característico do operador  $T$  é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2. \quad (4.1.69)$$

Portanto, os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 1$ .

Para determinar os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = 2$ , temos que determinar os elementos não-nulos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $T(x, y) = 2(x, y)$ . Equivalentemente, temos que encontrar os elementos não-nulos do núcleo do operador  $(T - 2I)$ . Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 0x + 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (4.1.70)$$

Portanto, os autovetores associados a  $\lambda_1 = 2$  são do tipo  $v_1 = (x, 0)$ , com  $x \neq 0$ . Desse modo, podemos escolher  $v_1 = (1, 0)$  o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1 = 2$ .

Para determinar os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_2 = 1$ , temos que determinar os elementos não-nulos  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tais que  $T(x, y) = (x, y)$ . Equivalentemente, temos que encontrar os elementos não-nulos do núcleo do operador  $(T - I)$ . Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \implies x + 2y = 0. \quad (4.1.71)$$

Portanto, os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_2 = 1$  são do tipo  $v_2 = t(-2, 1)$ , para  $t \in \mathbb{R}$  não-nulo. Assim, podemos escolher  $v_2 = (-2, 1)$  o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2 = 1$ .

**Definição 4.1.39.** Definimos a multiplicidade algébrica de um autovalor  $\lambda$  como sendo a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico.

**Definição 4.1.40.** Definimos a multiplicidade geométrica de um autovalor  $\lambda$  como sendo a dimensão do subespaço  $V_\lambda$  associado ao autovalor  $\lambda$ .

**Exemplo 4.1.24.** Considere a matriz  $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad (4.1.72)$$

Determine os autovalores e os autovetores da matriz  $A$ .

O polinômio característico de  $A$  é dado por  $P(\lambda) = \lambda^3 - 8\lambda^2 + 20\lambda - 16 = 0$ .

Da equação do terceiro grau, sabemos que 2 é uma raiz.

TABELA 4.1 – BRIOT-RUFFINI

1	-8	20	16
2	1	2	-12
		1	8
			0

O 1 sempre repete. É só fazer 1 vezes 2 e somar com o 8. Fazer -6 vezes 2 e somar com 20 e assim por diante. O resultado é a equação do segundo grau  $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ .

Logo,  $p(\lambda) = -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$ .

Os autovalores do operador  $T_A$  são  $\lambda_1 = 2$  com multiplicidade algébrica igual a 2, e  $\lambda_2 = 4$  com multiplicidade algébrica igual a 1.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = 2$ , temos que encontrar os elementos não-nulos do núcleo do operador  $(T_A - 2I)$ . Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \quad (4.1.73)$$

Assim, obtemos a solução  $z = y = -x$ . Portanto, os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = 2$  são do tipo  $v_1 = (x, -x, -x)$ , com  $x \neq 0$ . Desse modo, o autovalor  $\lambda_1 = 2$  tem multiplicidade geométrica igual a 1. De modo análogo, obtemos que os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_2 = 4$  são do tipo  $v_2 = (x, -x, x)$ , com  $x \neq 0$ . Note que o autovalor  $\lambda_1 = 2$  tem multiplicidade geométrica igual a 1.

Portanto, podemos escolher os seguintes autovetores para a matriz  $A$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.74)$$

**Corolário 4.1.8.** Seja  $A \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$  uma matriz simétrica. Então, seus autovalores são todos reais. Além disso, autovetores associados a autovalores distintos são ortogonais. A matriz simétrica real é um caso particular de uma matriz Hermitiana.

**Exemplo 4.1.25.** Considere a matriz simétrica  $A$  dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.75)$$

Determine os autovalores de  $A$ .

Seja  $T_A$  o operador linear sobre  $\mathbb{R}^2$  associado a matriz  $A$ . Sabemos que  $A = [T_A]_{\beta}^{\beta}$ , onde  $\beta$  é a base canônica do  $\mathbb{R}^2$ . Desse modo, os autovalores da matriz  $A$  são os autovalores do operador linear  $T_A$ , e os autovetores são os autovetores do operador  $T_A$ , representados na forma de matriz coluna.

O polinômio característico da matriz  $A = [T_A]_{\beta}^{\beta}$  é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3. \quad (4.1.76)$$

Portanto, os autovalores do operador  $T_A$  são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$ .

Para determinar os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = 3$ , temos que encontrar os elementos não-nulos do núcleo do operador  $(T_A - 3I)$ . Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \iff -x + y = 0. \quad (4.1.77)$$

Portanto, os autovetores associados a  $\lambda_1 = 3$  são do tipo  $v_1 = (x, x)$ , com  $x \neq 0$ . Desse modo, podemos escolher  $v_1 = (1, 1)$  o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_1 = 3$  do operador linear  $T_A$ , isto é,  $AX_1 = \lambda_1 X_1$ .

De modo análogo, para determinar os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_2 = -1$ , temos que encontrar os elementos não-nulos do núcleo do operador  $(T_A + I)$ . Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} \iff x + y = 0 \quad (4.1.78)$$

Portanto, os autovetores associados a  $\lambda_2 = -1$  são do tipo  $v_1 = (x, -x)$ , com  $x \neq 0$ . Desse modo, podemos escolher  $v_1 = (1, -1)$  o autovetor associado ao autovalor  $\lambda_2 = -1$ , do operador linear  $T_A$ , isto é,  $AX_2 = \lambda_2 X_2$ . Note que os autovetores  $X_1$  e  $X_2$  são ortogonais.

Relembre que  $p(\lambda) \equiv \det(A - \lambda I) = 0$ . Podemos decompor essa expressão como segue

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^n [\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n] \end{aligned} \quad (4.1.79)$$

em que  $A = [a_{ij}]$ . Os coeficientes  $c_i$  devem ser calculados avaliando o determinante. Observe que identificamos o coeficiente de  $\lambda^n$  como sendo  $(-1)^n$ . Isso decorre de um termo no determinante que é dado pelo produto dos elementos diagonais. Avaliando o determinante via expansão em cofatores, pode-se rapidamente verificar que  $(-1)^n \lambda^n$  é o único termo do polinômio característico que é proporcional a  $\lambda^n$ . É então conveniente fatorar  $(-1)^n$  antes de definir os coeficientes  $c$ .

Dois desses coeficientes são fáceis de obter. Se  $\lambda = 0$ , temos:

$$p(0) = \det A = (-1)^n c_n \quad (4.1.80)$$

Note que  $(-1)^n(-1)^n = +1$  para todo inteiro  $n$ . Segue que

$$c_n = (-1)^n \det A \quad (4.1.81)$$

Por cofatores, podemos escrever

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) + c'_2 \lambda^{n-2} + c'_3 \lambda^{n-3} + \dots + c'_n \quad (4.1.82)$$

O termo  $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$  no lado direito da eq. (4.1.82) é o produto dos elementos diagonais de  $A - \lambda I$ . Nenhum dos termos restantes que surgem na expansão do cofator de  $\det(A - \lambda I)$  (denotado por  $c'_2 \lambda^{n-2} + c'_3 \lambda^{n-3} + \dots + c'_n$ ) é proporcional a  $\lambda^n$  ou  $\lambda^{n-1}$ . Além disso,

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) &= (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n+1} [a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}] + \dots \\ &= (-1)^n [\lambda^n - \lambda^{n-1}(\text{tr } A) + \dots] \end{aligned} \quad (4.1.83)$$

em que ... contém termos que são proporcionais a  $\lambda^p$ , com  $p \leq n-2$ . Isso significa que os termos no polinômio característico que são proporcionais a  $\lambda^n$  e  $\lambda^{n-1}$  surgem apenas do termo  $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$ . Como mostrado na eq. (4.1.83), o termo proporcional a  $-(-1)^n \lambda^{n-1}$  é o traço de  $A$ , que é definido como sendo igual à soma dos elementos diagonais de  $A$ . Segue-se que,

$$c_1 = -\text{tr } A \quad (4.1.84)$$

Para os demais termos as expressões são mais difíceis. Por exemplo,

$$c_2 = \sum_{\substack{i=1 \\ i < j}}^n \sum_{j=1}^n a_{ii} a_{jj} + c'_2 \quad (4.1.85)$$

em que  $c'_2 = - \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i < j}} a_{ij} a_{ji}$ .

Generalizando,  $c_2, c_3, \dots, c_{n-1}$  podem ser determinados a partir dos autovalores, como segue:

$$c_k = (-1)^k \sum_{i_1=1}^n \sum_{\substack{i_2=1 \\ i_1 < i_2}}^n \cdots \sum_{\substack{i_k=1 \\ i_1 < i_2 < \dots < i_k}}^n \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4.1.86)$$

Por exemplo, se  $k = 2 \leq n$ , então

$$c_2 = \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_1 \lambda_n + \lambda_2 \lambda_3 + \dots + \lambda_2 \lambda_n + \dots + \lambda_{n-1} \lambda_n \quad (4.1.87)$$

Concluindo, a forma geral do polinômio característico de  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  é dada por

$$p(\lambda) = (-1)^n \left[ \lambda^n - \lambda^{n-1} \operatorname{tr} A + c_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} c_{n-1} \lambda + (-1)^n \det A \right] \quad (4.1.88)$$

Poderemos fatorar um polinômio em termos de suas raízes. Portanto, a equação (4.1.79) implica que

$$p(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \quad (4.1.89)$$

em que raízes múltiplas aparecem de acordo com sua multiplicidade. Segue que

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (4.1.90)$$

$$\det A = \prod_{i=1}^n \lambda_i \quad (4.1.91)$$

**Teorema 4.1.1** (Cayley-Hamilton). *Dada uma matriz  $A$  de dimensão  $n \times n$ , o polinômio é característico é definido por  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n [\lambda^n + c_1 \lambda^{n-1} + c_s \lambda^{n-2} + \dots + c_{n-1} \lambda + c_n]$ , segue que*

$$p(A) = (-1)^n [A^n + c_1 A^{n-1} + c_s A^{n-2} + \dots + c_{n-1} A + c_n I] = 0 \quad (4.1.92)$$

em que  $A^0 \equiv I$  é uma matriz identidade.

Desse teorema, para uma matriz  $2 \times 2$ , temos que

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda \operatorname{tr} A + \det A \quad (4.1.93)$$

Disso decorre que

$$p(A) = A^2 - A \operatorname{tr} A + I \det A = 0 \quad (4.1.94)$$

Dado que  $\operatorname{tr} A$  para uma matriz  $2 \times 2$  é 2, então

$$\operatorname{tr}(A^2) - (\operatorname{tr} A)^2 + 2 \det A = 0 \quad (4.1.95)$$

Segue que

$$\det A = \frac{1}{2} [(\operatorname{tr} A)^2 - \operatorname{tr}(A^2)] \quad (4.1.96)$$

Desse teorema podemos derivar uma fórmula para a inversa de uma matriz:

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{n+1}}{\det A} [A^{n-1} + c_1 A_{n-2} + \dots + c_{n-2} A + c_{n-1} I] \quad (4.1.97)$$

Para uma matriz  $2 \times 2$ ,

$$A^{-1} = -\frac{1}{\det A} [A - I \operatorname{tr} A] \quad (4.1.98)$$

#### 4.1.6 Diagonalização de Operadores Lineares (Potência de uma Matriz)

Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $T$  um operador linear sobre  $V$ . Nosso objetivo é determinar sob que condições  $V$  possui uma base ordenada com relação a qual a matriz do operador  $T$  seja uma matriz diagonal, que é a forma mais simples de se representar um operador linear. A solução para o problema de diagonalização de operadores lineares também nos leva naturalmente ao conceito de autovalores e autovetores do operador  $T$ .

**Definição 4.1.41.** Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $\mathbb{F}$  e  $T$  um operador linear sobre  $V$ . Dizemos que  $T$  é um operador diagonalizável se existe uma base ordenada  $\beta$  para  $V$  tal que  $[T]_\beta^\beta$  é uma matriz diagonal.

**Definição 4.1.42.** Seja  $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{F})$ . Dizemos que  $A$  é uma matriz diagonalizável se  $A$  é similar a uma matriz diagonal.

**Exemplo 4.1.26.** Considere a matriz simétrica  $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$  dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.99)$$

Sabemos que seus autovalores são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$  com os autovetores associados

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.100)$$

Tomamos a matriz  $P$  e a matriz diagonal  $D$  dadas por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.101)$$

Note que a matriz  $P$  foi construída a partir dos autovetores da matriz  $A$  e a matriz diagonal  $D$  foi construída com os autovalores da matriz  $A$ . Assim, temos que a matriz  $A$  é similar à matriz diagonal  $D$ , onde  $P$  é a matriz que realiza a transformação de similaridade, isto é,  $A = PDP^{-1}$  ou  $D = P^{-1}AP$ .

De fato, podemos verificar facilmente que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \left( \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right). \quad (4.1.102)$$

Portanto, a matriz  $A$  é diagonalizável.

Seja  $A = PDP^{-1}$ . Se quisermos calcular  $A^k$ , notamos que:

$$\begin{aligned} A^k &= PDP^{-1}PDP^{-1}\dots PDP^{-1} \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D\dots DP^{-1} \\ &= PDIDID\dots DP^{-1} \\ &= PD^kP^{-1} \end{aligned} \quad (4.1.103)$$

**Teorema 4.1.10.** Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $\beta$  uma base ordenada para  $V$  e  $T$  um operador linear sobre  $V$ . Então,  $T$  é um operador diagonalizável se, e somente se,  $[T]_{\beta}^{\beta}$  é uma matriz diagonalizável.

**Exemplo 4.1.27.** Considere o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$ . O operador linear  $T$  sobre o  $\mathbb{R}^3$  definido por  $T(x, y, z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$  é um operador diagonalizável.

Temos que a matriz  $A = [T]_{\beta}^{\beta}$ , onde  $\beta$  é a base canônica do  $\mathbb{R}^3$ , é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.1.104)$$

Assim, o polinômio característico do operador  $T$  é dado por:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = -(3 - \lambda)^2(1 + \lambda). \quad (4.1.105)$$

Portanto, os autovalores de  $T$  são  $\lambda_1 = 3$ , com multiplicidade algébrica igual a 2, e  $\lambda_2 = -1$ , com multiplicidade algébrica igual a 1.

Podemos verificar facilmente que os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = 3$  são do tipo  $v = (x, y, 0)$  para  $x, y \in \mathbb{R}$  não-nulos. Assim, podemos escolher os autovetores  $v_1 = (1, 0, 0)$  e  $v_2 = (0, 1, 0)$  associados ao autovalor  $\lambda_1 = 3$ . Logo, o autovalor  $\lambda_1 = 3$  tem multiplicidade geométrica igual a 2.

Os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_2 = -1$  são do tipo  $v = (-4y, 5y, -4y)$  para  $y \in \mathbb{R}$  não-nulo. Assim, podemos escolher o autovetor  $v_3 = (-4, 5, -4)$  associado ao autovalor  $\lambda_2 = -1$ .

Portanto, temos que a matriz  $A = [T]_{\beta}^{\beta}$  é diagonalizável. Podemos verificar que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \right)^{-1}. \quad (4.1.106)$$

Assim, mostramos que  $T$  é um operador diagonalizável.

**Teorema 4.1.11.** Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$  e  $T$  um operador linear sobre  $V$  que possui autovalores distintos  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  com  $v_1, \dots, v_k$  os autovetores associados, respectivamente. Então,  $\{v_1, \dots, v_k\}$  é linearmente independente em  $V$ .

**Teorema 4.1.12.** Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Existe uma matriz invertível  $P$  cujas colunas são autovalores de  $A$  se e somente se a soma das multiplicidades algébricas dos valores próprios de  $A$  é  $n$  e as multiplicidades algébrica e geométrica de cada valor próprio de  $A$  coincidem.

**Definição 4.1.43.** A multiplicidade geométrica é o grau de indeterminação de um sistema de ordem  $n$ , calculado como  $(n - \text{rank})$ . Assim, fazemos  $A - \lambda I$ , escalonamos por linha e calculamos o rank. O grau de indeterminação para o sistema associado ao autovetor  $\lambda$  é a multiplicidade geométrica desse valor próprio.

**Corolário 4.1.9.** Uma matriz quadrada  $A$ , de ordem  $n$ , é diagonalizável se e somente se a soma das multiplicidades algébricas dos valores próprios de  $A$  é  $n$  e as multiplicidades algébrica e geométrica de cada valor próprio de  $A$  coincidem.

**Corolário 4.1.10.** Se uma matriz quadrada  $A$ , de ordem  $n$ , tem  $n$  valores próprios distintos, então é diagonalizável.

Há matrizes diagonalizáveis que não têm valores próprios distintos.

**Exemplo 4.1.28.** Considere a matriz  $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ . Avalie-a.

O polinômio característico é  $p(\lambda) = (-3 - \lambda)(\lambda^2 + 1)$ . Portanto, o único autovalor é  $-3$ .

Para determinar os autovetores associados ao autovalor  $\lambda_1 = -3$ , temos que encontrar os elementos não-nulos do núcleo do operador  $(T_A + 3I)$ . Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 0x = 0 \\ 3y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \quad (4.1.107)$$

Portanto, os autovalores associados a  $\lambda_1 = -3$  são do tipo  $v_1 = (x, y, -3y)$ . Desse modo, podemos escolher  $v_1 = (1, 1, -3)$ .

As multiplicidades algébrica e geométrica do autovalor coincidem (são ambas 1), mas a soma das multiplicidades algébricas dos valores próprios não é 3 e sim 1. Portanto A não é diagonalizável.

Embora o método de diagonalização seja bastante transparente, pois basta seguir uma sequência de passos, ele é muito trabalhoso! Não devemos nos iludir com a aparente simplicidade das contas nos exemplos acima. Na totalidade, os passos envolvem:

1. Calcular o polinômio característico . Aqui já entra uma quantidade significativa de cálculos, cuja quantidade aumenta de acordo com a dimensão do problema.
2. Encontrar as raízes do polinômio característico. Este passo pode ser muito complicado, já que muitas vezes não é possível encontrar raízes explicitamente.
3. Depois de conhecidos os autovalores, calcular cada um dos autoespaços associados, o que demanda a resolução de tantos sistemas lineares quantos forem os autovalores distintos da matriz.
4. Caso todos os geradores de todos os autoespaços formem uma base para o espaço, a matriz é diagonalizável e formamos a matriz como indicado acima.

## 4.2 Sistemas de Equações Lineares

Seja  $A = [a_{ij}]$  uma matriz de ordem  $m \times n$  definida sobre o corpo  $\mathbb{F}$ , isto é, seus elementos  $a_{ij} \in \mathbb{F}$  para  $1 \leq i \leq m$  e  $1 \leq j \leq n$ . Consideremos o problema de encontrar escalares  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$  satisfazendo simultaneamente o seguinte sistema de equações lineares

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = y_i \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = y_m \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

conhecendo os escalares  $y_1, \dots, y_m \in \mathbb{F}$ . Esse problema é denominado sistema linear, com  $m$  equações lineares e  $n$  incógnitas.

Por simplicidade, vamos representar o sistema linear acima na sua forma matricial

$$AX = Y, \quad (4.2.2)$$

em que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}. \quad (4.2.3)$$

A matriz  $A$  de ordem  $m \times n$  é denominada matriz dos coeficientes do sistema linear, o vetor coluna  $X$  de ordem  $n \times 1$  é denominado vetor de incógnitas e o vetor coluna  $Y$  de ordem  $m \times 1$  é denominado vetor de constantes do sistema linear.

Toda  $n$ -upla  $(x_1, \dots, x_n)$  de elementos do corpo  $\mathbb{F}$  que satisfaz cada uma das equações do sistema linear é denominada uma solução do sistema linear. O vetor coluna  $X$ , associado a essa  $n$ -upla, é denominado vetor solução do sistema linear. O conjunto de todas as soluções do sistema linear é chamado conjunto solução.

Quando  $y_1 = \dots = y_m = 0$  dizemos que o sistema linear é homogêneo, isto é, temos que cada equação do sistema linear é uma equação homogênea.

**Teorema 4.2.1.** Considere a equação linear

$$ax = b, \quad (4.2.4)$$

com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

1. Se  $a \neq 0$ , então  $x = \frac{b}{a}$  é a única solução da equação linear.
2. Se  $a = 0$  e  $b \neq 0$ , então a equação linear não possui solução.
3. Se  $a = 0$  e  $b = 0$ , então a equação linear possui infinitas soluções.

**Definição 4.2.1.** Dizemos que a equação linear

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b, \quad (4.2.5)$$

nas incógnitas  $x_1, \dots, x_n$  é degenerada se  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .

**Teorema 4.2.2.** Considere a equação linear degenerada

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b, \quad (4.2.6)$$

com  $a_1 = \dots = a_n = 0$ .

1. Se  $b \neq 0$ , então a equação linear degenerada não possui solução.
2. Se  $b = 0$ , então a equação linear degenerada possui infinitas soluções.

**Definição 4.2.2.** Dizemos que a equação linear

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b, \quad (4.2.7)$$

é não-degenerada se os coeficientes  $a_1, a_2, \dots, a_n$  não são todos nulos. Além disso, a primeira incógnita com coeficiente não-nulo é denominada variável básica. Dito de outra forma,  $x_k$  é a variável básica se  $a_j = 0$  para todo  $j < k$ , mas  $a_k \neq 0$ .

**Teorema 4.2.3.** Considere a equação linear não-degenerada

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = b, \quad (4.2.8)$$

em que  $x_k$  a variável básica.

1. Qualquer conjunto de valores  $x_j$ , para  $j \neq k$ , fornece uma única solução para a equação linear. As incógnitas  $x_j$ , para  $j \neq k$ , são denominadas variáveis livres.
2. Toda solução da equação linear não-degenerada é obtida em (1).

**Exemplo 4.2.1.** O conjunto solução da equação linear

$$2x + 6y - 4z = 10, \quad (4.2.9)$$

nas incógnitas  $x, y$  e  $z$ , é dado por:

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 5 - 3y + 2z, y, z \in \mathbb{R}\}, \quad (4.2.10)$$

onde  $x$  é a variável básica, com  $y$  e  $z$  as variáveis livres.

Considere o sistema de equações lineares não-degeneradas dado por:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (4.2.11)$$

nas incógnitas  $x$  e  $y$ .

Podemos observar facilmente que cada uma das equações do sistema linear representa a equação na forma canônica de uma reta contida no plano numérico  $\mathbb{R}^2$ . Assim, podemos dar uma interpretação geométrica ao conjunto solução do sistema linear.

Podemos descrever três situações geométricas para o conjunto solução, a saber:

1. O gráfico das equações lineares são retas que se interceptam em um único ponto, isto é, são retas concorrentes. Assim, o sistema linear possui somente uma única solução.
2. O gráfico das equações lineares são retas paralelas distintas. Assim, o sistema linear não possui solução.
3. O gráfico das equações lineares são retas paralelas coincidentes. Assim, o sistema linear possui infinitas soluções.

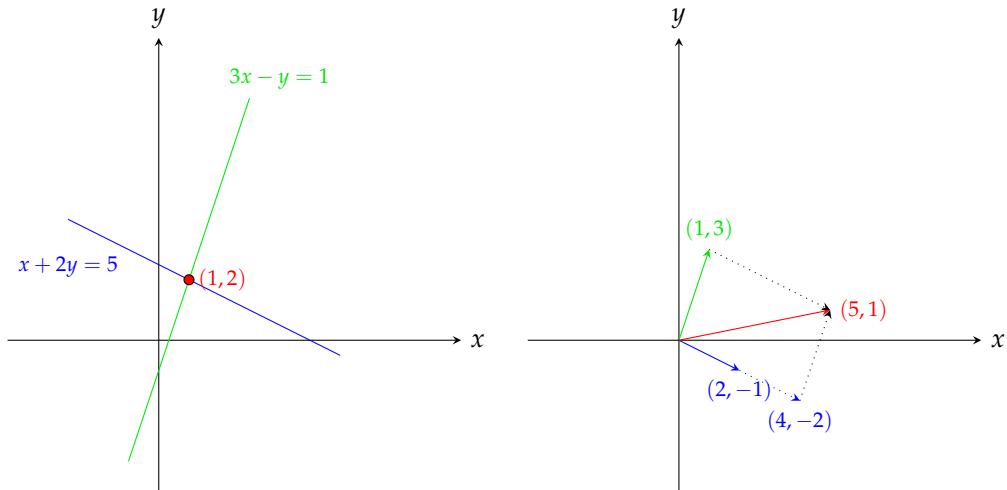
A seguir vamos analisar separadamente cada um dos casos acima.

O caso (1) ocorre quando as retas possuem coeficientes angulares diferentes, isto é,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.2.12)$$

Portanto, o caso (1) ocorre quando a matriz do sistema linear for invertível. Sua representação gráfica pode ser observada abaixo em um exemplo concreto. Olhando para as linhas do sistema, ou seja, para as equações separadamente, observe que a equação  $x + 2y = 5$  é uma reta no plano  $xy$  que passa pelos pontos  $(5, 0)$  e  $(1, 2)$ , por exemplo. Do mesmo modo, a segunda equação  $3x - y = 1$  é uma outra reta, que intercepta a primeira no ponto  $(1, 2)$ ; este ponto de intersecção pertence a ambas as retas e é a única solução para as duas equações. Do ponto de vista das colunas, o problema de resolver o sistema linear é equivalente ao de encontrar a combinação linear dos vetores  $(1, 3)$  e  $(2, -1)$  que resulta no vetor  $(5, 1)$ . A ideia geométrica da solução é que o vetor  $(1, 3)$  multiplicado por 1 somado com o vetor  $(2, -1)$  multiplicado por 2 nos dá o vetor  $(5, 1)$  e esta é a única combinação possível.

FIGURA 4.2.1 – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA POR LINHAS E POR COLUNAS DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES:  
RETAS CONCORRENTES



As situações (2) e (3) ocorrerem quando as retas possuem coeficientes angulares iguais, isto é,

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \iff a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0. \quad (4.2.13)$$

Note que a condição acima pode ser escrita da seguinte forma

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.2.14)$$

onde  $A$  é a matriz do sistema linear. Desse modo, os casos (2) e (3) ocorrerem somente quando a matriz do sistema linear não possui inversa.

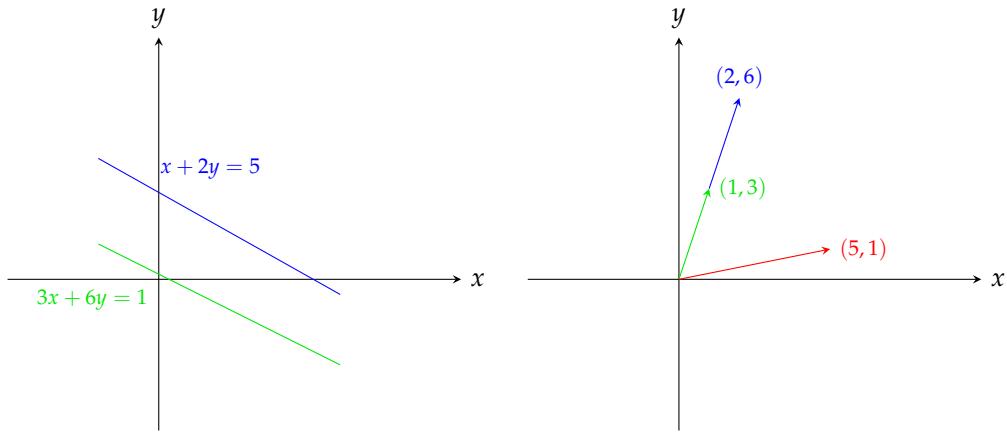
O caso (2) ocorre quando as retas são paralelas e cortam o eixo vertical 0Y em pontos distintos, isto é,

$$-\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2} \iff \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}. \quad (4.2.15)$$

Se tentarmos utilizar a eliminação para esse sistema, subtraindo 3 vezes a primeira equação da segunda equação, obtemos:  $0y + 0x = 14$ . O que não é possível. Isso mostra que não existe um par  $(x, y)$  que resolve as duas equações simultaneamente, ou seja, o sistema linear não possui solução. Geometricamente, olhando para as linhas do sistema, as equações  $x + 2y = 5$  e  $3x + 6y = 1$  representam retas que são paralelas e que, portanto, não se interceptam. Olhando agora o sistema pelas suas colunas temos uma combinação linear dos vetores  $(1, 3)$  e  $(2, 6)$  resultando no vetor  $(5, 1)$ , o que é impossível, uma vez que os vetores  $(1, 3)$  e  $(2, 6)$  são paralelos, ou seja, estão na

mesma direção, e o vetor  $(5, 1)$  está em outra. Assim, não existem valores  $x$  e  $y$  que satisfaçam essa combinação linear.

FIGURA 4.2.2 – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA POR LINHAS E POR COLUNAS DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES: RETAS PARALELAS DISTINTAS

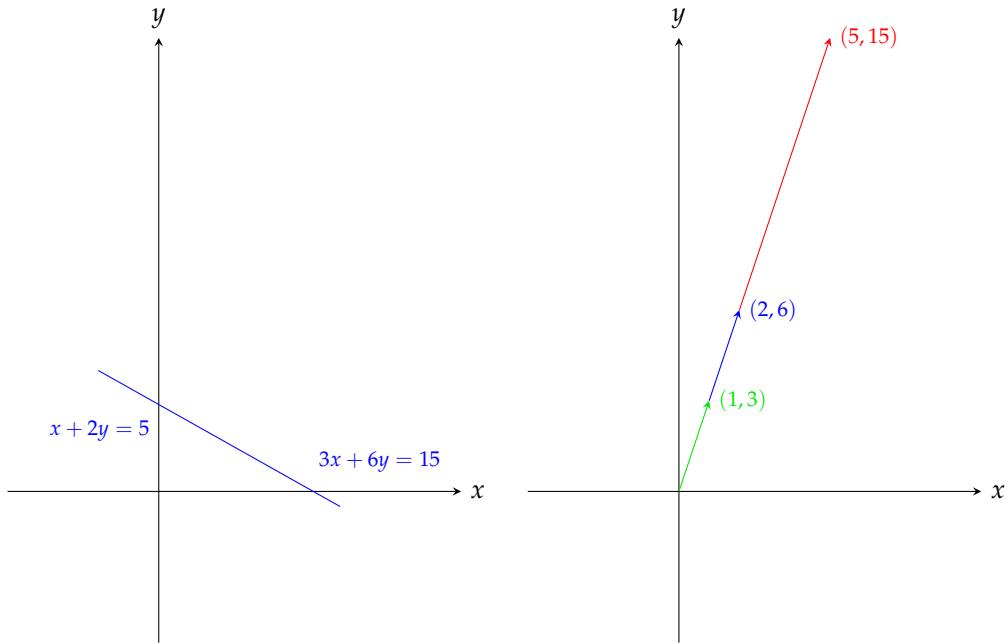


O caso (3) ocorre quando as retas são paralelas e cortam o eixo vertical  $0Y$  nos mesmos pontos, isto é,

$$-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2} \iff \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \iff \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (4.2.16)$$

Olhando as linhas do sistema, observe que a equação  $3x + 6y = 15$  é 3 vezes a equação  $x + 2y = 5$ , ou seja, uma equação é múltipla da outra. Portanto, as equações do sistema são linearmente dependentes e, geometricamente, elas representam a mesma reta. Dessa forma, todos os pontos  $(x, y)$  que satisfazem a equação 1 também satisfazem a equação 2, portanto, o sistema linear possui infinitas soluções. Considerando as colunas do sistema obtemos uma combinação linear dos vetores  $(1, 3)$  e  $(2, 6)$  que resulta no vetor  $(5, 15)$ . Mas, esses vetores estão todos na mesma direção, e portanto existem infinitos valores  $x$  e  $y$  que satisfazem a combinação linear.

FIGURA 4.2.3 – INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA POR LINHAS E POR COLUNAS DE UM SISTEMA DE EQUAÇÕES:  
RETAS PARALELAS COINCIDENTES



Assim, analisamos o conjunto solução do sistema linear tanto do ponto de vista geométrico quanto do ponto de vista algébrico.

**Definição 4.2.3.** Uma equação linear nas incógnitas  $x, y$  e  $z$  representada na forma:

$$ax + by + cz = 0, \quad (4.2.17)$$

conhecendo os escalares  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , é denominada equação linear homogênea.

**Exemplo 4.2.2.** Seja a seguinte equação linear homogênea nas incógnitas  $x, y$  e  $z$ :

$$x - 4y + 3z = 0, \quad (4.2.18)$$

Podemos verificar facilmente que toda solução da equação linear homogênea, dada acima, pode ser escrita como:

$$(x, y, z) = y(4, 1, 0) + z(-3, 0, 1), \quad \forall y, z \in \mathbb{R}, \quad (4.2.19)$$

denominada solução geral.

Desse modo, pode representar o conjunto solução da seguinte forma:

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) = y(4, 1, 0) + z(-3, 0, 1), \quad \forall y, z \in \mathbb{R}\}. \quad (4.2.20)$$

Note que as ternas  $(4, 1, 0)$  e  $(-3, 0, 1)$  são soluções da equação homogênea, utilizadas na representação da solução geral. Essas soluções são chamadas soluções básicas.

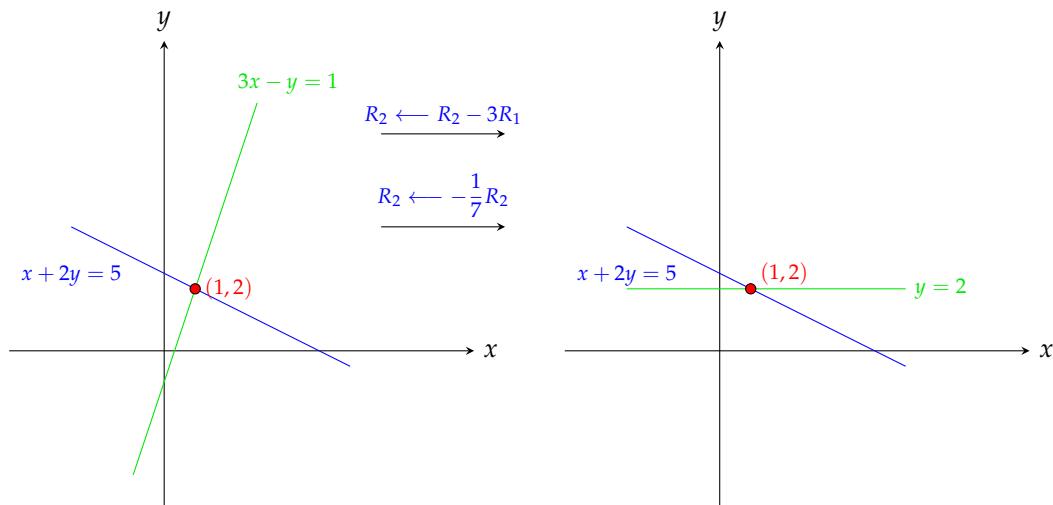
Uma técnica bastante simples e muito importante na obtenção de soluções de um sistema de equações lineares é o método de eliminação que utiliza as operações elementares de linhas. Vamos exemplificar esse método através de um sistema linear homogêneo.

**Exemplo 4.2.3.** Considere o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases} \quad (4.2.21)$$

Ao aplicarmos a operação elementar  $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_1$  sobre as equações do sistema, a equação  $x + 2y = 5$  se mantém e a equação  $3x - y = 1$  se torna a equação  $y = 2$ . Geometricamente, a reta  $3x - y = 1$  é rotacionada em torno do ponto  $(1, 2)$ , que é a solução do sistema, até a reta  $y = 2$ . Aplicando a operação  $R_2 \leftarrow -\frac{1}{7}R_2$  as equações se mantêm, uma vez que  $-7y = -14$  é equivalente a  $y = 2$  e aplicamos esta operação elementar apenas para facilitar os cálculos e a interpretação geométrica.

FIGURA 4.2.4 – SOLUÇÃO GRÁFICA DO SISTEMA



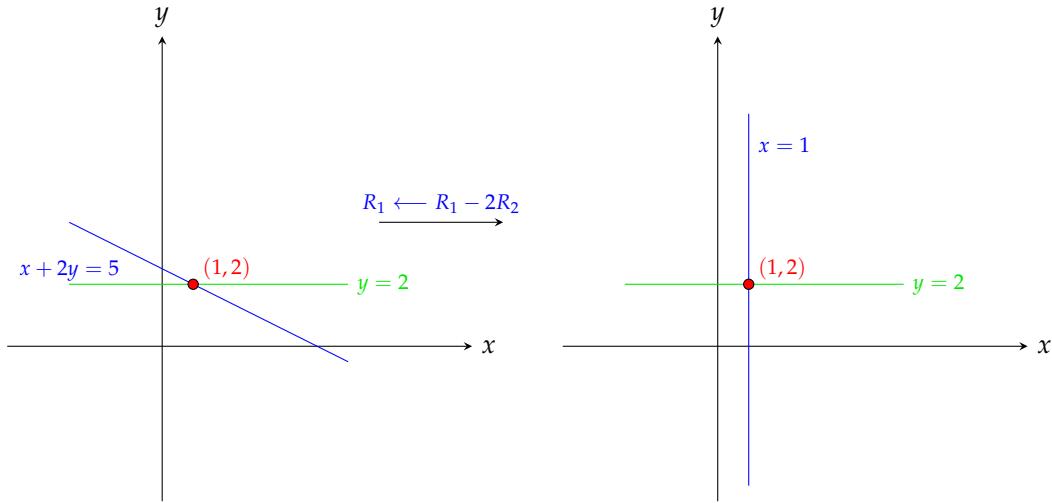
Se continuarmos a eliminação, aplicando a operação elementar  $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$  na matriz ampliada desse novo sistema, obtemos:

$$\begin{cases} 1x + 0y = 1 \\ 0x + 1y = 2 \end{cases} \quad (4.2.22)$$

em que esse novo sistema tem única solução  $x = 1$  e  $y = 2$ , que também é solução para o sistema linear inicial. Ao aplicarmos a operação elementar  $R_1 \leftarrow R_1 - 2R_2$  sobre as equações do sistema, a equação  $y = 2$  se mantém e a equação  $x + 2y = 5$  se torna a equação  $x = 1$ . Geometricamente, a reta  $x + 2y = 5$  é rotacionada

em torno do ponto  $(1, 2)$  até a reta  $x = 1$ .

FIGURA 4.2.5 – SOLUÇÃO GRÁFICA DO SISTEMA



Encontrar a intersecção das retas  $x = 1$  e  $y = 2$ , que claramente é o ponto  $(1, 2)$ , é bem mais simples. E essa é a solução do sistema linear inicial, pois apenas aplicamos uma sequência de operações elementares sobre as equações do sistema, o que garante que obtivemos sistemas equivalentes durante o processo.

**Exemplo 4.2.4.** Considere o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 5y + z = 0 \end{cases} \quad (4.2.23)$$

Aplicando a operação elementar de linhas  $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$  obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases} \quad (4.2.24)$$

Assim, da segunda equação temos que  $y = -z$  para  $z \in \mathbb{R}$ . Substituindo na primeira equação obtemos  $x = -3z$ . Portanto, temos que toda solução do sistema linear homogêneo é escrita da seguinte forma:

$$(x, y, z) = z(-3, -1, 1), \forall z \in \mathbb{R}. \quad (4.2.25)$$

Note que  $(-3, -1, 1)$  é uma solução do sistema linear homogêneo, que é utilizada na representação da solução geral. Assim, essa solução é chamada solução básica. Neste caso, dizemos que o sistema linear homogêneo possui um grau de liberdade, que é a variável livre  $z$ . As variáveis  $x$  e  $y$  são denominadas variáveis básicas.

**Teorema 4.2.4.** O número de variáveis livres na solução de um sistema linear  $m \times n$  com a matriz aumentada  $[A|b]$  é dada por  $n - \text{rank}(A)$ .

**Corolário 4.2.1.** A variável livre, em um sistema linear que possua variável livre, pode ser qualquer variável do sistema. A informação relevante é que há uma variável livre.

Podemos verificar que o sistema linear homogêneo obtido através da operação elementar de linhas, possui o mesmo conjunto solução do sistema linear homogêneo original. Desse modo, dizemos que os dois sistemas lineares são equivalentes. Vamos apresentar uma análise detalhada do processo de eliminação mais a frente.

**Exemplo 4.2.5.** Considere o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} -t + x - 2y + z = 1 \\ 2t + 2x - 3y + z = 3 \end{cases} \quad (4.2.26)$$

Aplicando a operação elementar de linhas  $R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1$  obtemos o sistema linear:

$$\begin{cases} -t + x - 2y + z = 1 \\ 4t + y - z = 1 \end{cases} \quad (4.2.27)$$

Assim, da segunda equação temos que  $y = z - 4t + 1$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Substituindo na primeira equação obtemos  $x = z - 7t + 3$ .

Portanto, temos que a solução geral do sistema linear é escrita da seguinte forma:

$$(x, y, z, t) = z(1, 1, 1, 0) + t(-7, -4, 0, 1) + (3, 1, 0, 0), \quad z, t \in \mathbb{R} \quad (4.2.28)$$

Neste exemplo, temos duas variáveis livres, que são  $z$  e  $t$ , e dizemos que o grau de liberdade do sistema linear é igual a dois.

Podemos verificar facilmente que as ternas  $(1, 1, 1, 0)$  e  $(-7, -4, 0, 1)$  são duas soluções do sistema linear homogêneo associado. Assim, essas soluções são as soluções básicas do sistema linear homogêneo associado. Note que a terna  $(3, 1, 0, 0)$  é uma solução do sistema linear original, denominada solução particular.

**Definição 4.2.4.** Dizemos que um sistema de equações lineares é consistente se possui solução. Quanto não possui solução, dizemos que é inconsistente.

**Teorema 4.2.5.** Sejam  $A$  e  $B$  matrizes de ordem  $m \times n$  que são equivalentes por linha. Então, os sistemas lineares homogêneos  $AX = 0$  e  $BX = 0$  possuem as mesmas soluções.

**Definição 4.2.5.** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$ . Dizemos que  $A$  é uma matriz não-singular se  $AX = 0$  somente para  $X = 0$ . Caso contrário, dizemos que  $A$  é uma matriz singular.

**Teorema 4.2.6.** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$ , com  $m < n$ . Então, o sistema linear homogêneo  $AX = 0$  admite pelo menos uma solução não-trivial.

**Teorema 4.2.7.** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . Então, o sistema linear homogêneo  $AX = 0$  possui somente a solução trivial se, e somente se, a matriz  $A$  é linha equivalente à matriz identidade  $I_n$ .

**Teorema 4.2.8.** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . Então, a matriz  $A$  é invertível se, e somente se, o sistema linear homogêneo  $AX = 0$  possui somente a solução trivial.

**Corolário 4.2.2.** Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$ . Então, a matriz  $A$  é invertível se, e somente se, o sistema linear  $AX = Y$  possui somente uma única solução.

**Teorema 4.2.9.** Sejam  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$  e  $X_1, \dots, X_n$  soluções do sistema linear homogêneo  $AX = 0$ . Então, toda combinação linear

$$X_c = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n, \quad (4.2.29)$$

onde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  são escalares, é também solução do sistema linear  $AX = 0$ .

**Teorema 4.2.10.** Sejam  $A$  uma matriz de ordem  $m \times n$  e  $Y$  um vetor coluna de ordem  $m \times 1$ . Então:

1. O sistema linear  $AX = Y$  é consistente se, e somente se,

$$\text{rank}([A \mid Y]) = \text{rank}(A). \quad (4.2.30)$$

2. O sistema linear  $AX = Y$  possui uma única solução se, e somente se,

$$\text{rank}([A \mid Y]) = \text{rank}(A) = n. \quad (4.2.31)$$

3. O sistema linear  $AX = Y$  possui infinitas soluções se, e somente se,

$$\text{rank}([A \mid Y]) = \text{rank}(A) < n. \quad (4.2.32)$$

4. O sistema linear  $AX = Y$  é inconsistente se, e somente se,

$$\text{rank}(A) < \text{rank}([A \mid Y]). \quad (4.2.33)$$

**Teorema 4.2.11.** Se um sistema linear  $Ax = b$  de ordem  $m \times n$  é consistente e o vetor  $x_p$  é uma solução particular desse sistema, então qualquer solução  $x$  para esse sistema pode ser decomposta como  $x = x_p + x_h$ , em que  $x_h$  é a solução homogênea do sistema linear  $Ax_h = 0$ .

**Lema 4.2.1.** Dizemos que a solução de um sistema linear não-homogêneo é escrita na forma paramétrica quando é expressa como  $x = x_h + x_p$ , em que  $x_h$  é a solução homogênea do sistema e  $x_p$  é a solução particular.

**Teorema 4.2.12.** Se uma matriz  $A = [A_1, \dots, A_n] \in \mathbb{F}^{n,n}$  é invertível, então o sistema de equações lineares  $Ax = b$  tem a solução única  $x = [x_i]$  para todo  $b \in \mathbb{F}^n$  dada por:

$$x_i = \frac{\det(A_i(b))}{\det(A)}, \quad (4.2.34)$$

em que  $A_i(b) = [A_1, \dots, b, \dots, A_n]$  e o vetor  $b$  é substituído no lugar da  $i$ -ésima coluna de  $A$ .

**Exemplo 4.2.6.** Use a regra de Cramer para encontrar a solução do sistema  $Ax = b$  em que  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\text{e } b = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

O determinante de  $A$  é dado por  $\det(A) = 18 - 10 = 8$ .

Então, precisamos computar o determinante das seguintes matrizes:

$$\det(A_1(b)) = \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 32, \quad (4.2.35)$$

$$\det(A_2(b)) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 20. \quad (4.2.36)$$

A solução é:

$$x_1 = \frac{32}{8} = 4, \quad (4.2.37)$$

$$x_2 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}. \quad (4.2.38)$$

## 4.3 Aplicações

### 4.3.1 O Mercado

Considere o mercado de um bem qualquer, digamos, frango. É importante especificar o período de tempo em que a transação é relevante, por exemplo, por semana. Assim, quando se diz que um consumidor consome ou demanda um frango, deve-se subentender que ele demanda um frango por semana. O mesmo vale para a oferta e a mesma unidade de tempo deve subjazer a todas as quantidades mencionadas, a todas as utilidades e funções de custo consideradas. Sem essa especificação, os conceitos de oferta e demanda perdem totalmente o sentido.

Para simplificar, em vez de considerar uma curva de oferta agregada e uma de demanda agregada genéricas, impessoais, suponha que cada demandante demande um e apenas um frango e que, similarmente, cada ofertante oferte um e apenas um frango. Cada um deles terá um nome

(os ofertantes e os demandantes). Os demandantes são ordenados de forma descendente a partir da valoração mais alta<sup>1</sup>, ou seja, desde aquele que está disposto a pagar mais até aquele disposto a pagar menos, como na tabela abaixo.

Assim, o número 3 relativo a Maria significa que Maria possui a terceira maior disposição a pagar pelo frango (R\$ 7), não que ela demande três unidades.

TABELA 4.2 – PREÇOS DE DEMANDA

Demandante	Preço de demanda
1. João	9
2. Pedro	8
3. Maria	7
4. Carla	6,50
5. Antônio	5,50
6. Dora	3
7. Gustavo	1
8. José	0
9. Patrícia	0
10. Amélia	0

Os ofertantes também são pessoas, só que eles serão ordenados de forma ascendente, desde o que está disposto a ofertar por menos até aquele disposto a ofertar por mais, como na tabela abaixo.

TABELA 4.3 – PREÇOS DE OFERTA

Ofertante	Preço de oferta
1. Catarina	1
2. Augusto	2
3. Roberto	3
4. Aline	4
5. Paula	5
6. Marcelo	6
7. Tiago	7
8. Luíza	8
9. Agnes	9
10. César	10

Juntando tudo numa tabela só, temos o seguinte quadro de preços de demanda e de oferta para as diversas quantidades de frango transacionadas:

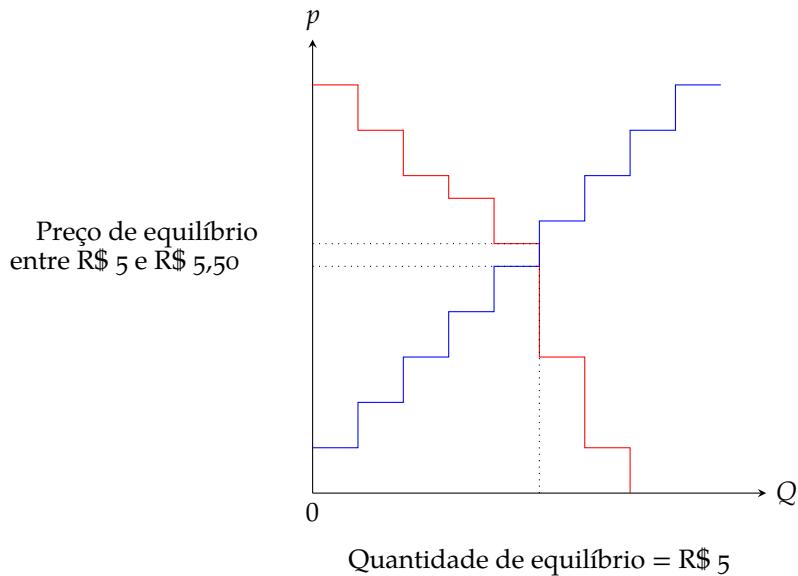
<sup>1</sup> O preço de demanda é o preço que as pessoas estão dispostas a pagar por bens e serviços quando uma determinada quantidade ou quantidade está disponível.

TABELA 4.4 – PREÇOS DE DEMANDA E DE OFERTA POR UNIDADE

Quantidade	Preço de demanda	Preço de oferta
1	9	1
2	8	2
3	7	3
4	6,50	4
5	5,50	5
6	3	6
7	1	7
8	0	8
9	0	9
10	0	10

A lista de preços de oferta e de demanda pode ser melhor visualizada mediante sua representação gráfica. No eixo horizontal coloco as quantidades e no eixo vertical o valor monetário correspondente ao preço, seja de oferta ou de demanda, como na Figura 4.3.1.

FIGURA 4.3.1 – CURVAS DE OFERTA E DE DEMANDA DO MERCADO DE FRANGOS



Pela tabela acima – e com a ajuda do gráfico –, podemos ver que ao preço de R\$ 5 por frango, a quantidade ofertada por semana é igual à quantidade demandada. Um equilíbrio de mercado é o comércio de 5 frangos no período ao preço de R\$ 5 a unidade.

Para mostrarmos que a quantidade de equilíbrio é de 5 unidades, vejamos o que ocorre quando a quantidade comercializada é de 4 unidades ou de 6 unidades. Se a quantidade comercializada fosse de 4 unidades, tanto o quinto ofertante (Paula) quanto o quinto demandante (Antônio) veriam a possibilidade de ganhos no comércio da quinta unidade. Com efeito, o demandante Antônio

pagaria R\$ 5,50 pelo frango e a ofertante Paula aceitaria R\$ 5 por ele, de modo que existe espaço para a troca. Se o sexto ofertante, Marcelo, decidisse ofertar a sexta unidade, ele teria um custo marginal de R\$ 6, mas a sexta demandante, Dora, só estaria disposta a pagar R\$ 3 pela sexta unidade. Assim, Marcelo não conseguiria cobrir o seu custo marginal.

Disse acima que um equilíbrio de mercado é o comércio de 5 frangos no período ao preço de R\$ 5 a unidade. Ora, outro equilíbrio seria o comércio de 5 frangos ao preço de R\$ 5,50 a unidade. Procedendo do mesmo modo como fiz acima, é fácil ver que esse também é um equilíbrio. Mas qual é a diferença entre os dois? É o preço de equilíbrio! Paula exige no mínimo R\$ 5 para ofertar a quinta unidade e Antônio está disposto a pagar no máximo R\$ 5,50 por ela. Portanto, qualquer preço entre R\$ 5 e R\$ 5,50 pode equilibrar a oferta com a demanda. Qual preço prevalecerá? É nesse ponto que a Microeconomia abre espaço para a barganha e para isso há uma literatura abundante e cursos específicos. Independentemente do resultado da barganha, o importante é que o preço final acordado não afetará os ganhos totais de troca, afetará, porém, toda a distribuição dos ganhos de troca entre ofertantes e demandantes.

**Com esta alocação final de equilíbrio, nenhuma outra revisão seria mutuamente aceitável. Esta é uma situação de compensação de mercado (*market-clearing*).**

**A interação entre a demanda e a oferta é importante não simplesmente porque estabelece um preço, mas porque, no processo, revela valores subjetivos relativos; estabelece um preço que permite que as pessoas troquem para que cada uma delas consiga uma combinação preferencial de bens.**

**Ninguém precisa conhecer a estrutura de demanda dos demais potenciais demandantes. Ninguém precisa conhecer a própria estrutura de demanda. Tudo o que é requerido é que diante de uma oportunidade de comprar ou vender, o indivíduo pode tomar uma decisão.**

Qual o propósito dos conceitos de demanda e de oferta?

1. explicar como os mercados reduzem os custos dos agentes para ajustarem seu consumo diante de mudanças nos gostos.
2. mostrar como a competição interpessoal pelos bens existentes é resolvida no mercado.
3. explicar como a negociação ou ajuste de preços facilita a realocação de bens.
4. ver como o mercado economiza os custos do agente para coletar informações.
5. comparar o sistema de negociação em uma situação de liberdade com uma situação em que haja restrições.

Algumas considerações se fazem pertinentes para que você, caro estudante de Economia, compreenda melhor a questão.

1. Seja  $X(p, r)$  a demanda marshalliana pelo bem  $X$  como função do próprio preço  $p$  e da renda  $r$ . Muitos pensam que a Lei de Demanda se reduz à derivada  $\frac{\Delta x}{\Delta p}$ , ou seja, ao efeito-preço de Slutsky. O problema com essa concepção é que se assenta sobre um *ceteris paribus* matematicamente correto, mas economicamente errado. Ela mantém fixos os demais preços e a

renda  $r$ , que é a renda nominal. Gary Becker nos lembra que a renda que deve ser mantida fixa é a renda real, ou seja, a renda  $r$  corrigida por um índice de preços que recupere a viabilidade da cesta marshalliana original, mudando-se apenas a inclinação do conjunto de oportunidades. A forma correta de caracterizar a Lei de Demanda é, portanto, mediante aquilo que se conhece na Teoria Econômica por efeito-preço puro de Becker. O efeito-preço de Slutsky é um efeito-preço composto. Quem desconhece essa diferença incorre no erro de achar que bens de Giffen são uma violação da Lei de Demanda. Não são.

2. Existe uma Segunda Lei de Demanda: no longo-prazo a demanda tem maior elasticidade-preço (em módulo) que no curto-prazo, relativamente a uma variação de preço hoje. Essa é uma aplicação simples do Princípio de Le Chatelier (Samuelson) à demanda. Grosso modo, ajustes da demanda às mudanças atuais de preços tomam tempo.
3. A Terceira Lei de Demanda (sim, existe a terceira) diz que custos fixos comuns a dois bens favorecem o bem mais caro pela redução das taxas marginais de troca. Ela também se chama Teorema de Allen-Alchian. Ela explica, por exemplo, por que o café brasileiro bom é mais consumido lá fora que internamente.
4. Uma forma alternativa de se contemplar a Lei de Demanda com relação a um bem  $X$  é pela Lei de Agregação de Cournot, segundo a qual o negativo da proporção da renda gasta em  $X$  é uma média ponderada das elasticidades-preços de todos os bens relativamente ao preço de  $X$ , a ponderação sendo dada pelas proporções da renda gastas em cada bem. Como enfatizava Becker, a Lei de Demanda não é uma lei derivada da racionalidade, mas da escassez, manifestada no declive do conjunto de oportunidades. No caso particular em que as trocas se dão sob a égide da instituição dos preços de mercado e transferências de direitos de propriedade, aí sim o conjunto de oportunidade se reduz ao conhecido conjunto orçamentário. Se você entender que o modelo simplório de maximização da utilidade sobre o conjunto orçamentário é só um caso particular da verdadeira *Price Theory*, você terá dado um grande passo na sua formação.
5. A Lei de Demanda, no sentido do efeito-preço puro de Becker, continua válida no nível agregado, mesmo que todos os agentes sejam irracionais. Isso é mais uma evidência de que é uma lei derivada da escassez, não da racionalidade.

A contribuição de Gary Becker merece uma atenção maior.

Neste clássico artigo de 1962, "Irrational behavior and economic theory" (Journal of Political Economy, 70: 1-13), Gary Becker mostra que a Lei de Demanda decorre da escassez, não da racionalidade dos agentes cujas demandas compõem a demanda agregada.

A Lei de Demanda estabelece que o efeito puro de um aumento do preço é a redução da quantidade demandada. O epíteto "puro" tem um significado preciso: ele denota uma variação do preço, mantida constante a renda real. Para que a renda real seja constante, a renda nominal deve ser corrigida pelo índice de Laspeyres, de modo que a cesta inicial continue factível. É isso que propicia a análise correta dos efeitos da variação de preço sobre as trocas, pois se, por um lado,

oportunidades de consumo do bem são perdidas por causa do aumento de preço, por outro lado, oportunidades são ganhas em razão da variação relativa de preços que favorece bens alternativos.

Dado que a demanda marshalliana é função dos preços e da renda nominal, a mera derivada parcial da demanda em relação ao próprio preço não captura o efeito puro da variação de preço sobre a quantidade demandada, pois a renda real cai. Logo, na chamada equação de Slutsky o efeito-preço é, na verdade, um efeito-preço composto, não um efeito-preço puro, porquanto ele vem acompanhado de uma variação da renda real. Isto posto, é simplesmente incorreto o uso de um eventual sinal positivo do efeito-preço (bens de Giffen) como prova de violação da Lei de Demanda, pois o usual efeito-preço da equação de Slutsky não é a correta pedra-de-toque da Lei de Demanda.

Com esses esclarecimentos, Becker mostra que, mesmo que todos os agentes sejam irracionais, ainda assim valerá a Lei de Demanda no nível agregado, já que, ao se estudar o efeito-preço puro, pode-se mostrar que a Lei de Demanda dependerá apenas da escassez, ou seja, do fato de que os preços são positivos.

A forma como Becker modela a irracionalidade é genial. Se o agente possui uma estrutura racional de preferências, então, dados os preços e a renda, ele escolherá uma demanda marshalliana na fronteira de seu conjunto orçamentário (ou conjunto de oportunidade, como Becker chama). Becker encara isso como a realização de uma variável aleatória (na verdade, um vetor aleatório) concentrada na cesta marshalliana. Isso implica que, para relaxar a condição de racionalidade rumo à maior irracionalidade possível, basta fugir da distribuição de probabilidade de Dirac (concentrada num vetor) rumo à distribuição uniforme sobre a fronteira do conjunto de oportunidade. Isso é correto na medida em que a distribuição uniforme satisfaz ao critério epistêmico de Laplace da razão suficiente. Como não há qualquer razão (subjetiva) suficiente que faça a escolha pender para um conjunto de cestas ou outro (o que denotaria alguma estrutura de preferências), então a distribuição uniforme modela a total ausência de racionalidade na escolha: qualquer cesta é igualmente provável de ser escolhida.

Referências ao famoso teorema de Sonnenschein-Mantel-Debreu, conhecido de todos que estudaram Equilíbrio Geral, não cabem neste caso, porque o teorema se restringe ao efeito-preço composto, não ao efeito-preço puro.

A única forma de negar a Lei de Demanda no nível agregado é questionando a escassez. Se você não acredita em escassez, considere o seguinte. O preço  $p$  que você vê nos gráficos de oferta e demanda em qualquer curso básico de Introdução à Economia não é o preço de etiqueta do bem. Se você compra um suco de laranja no quiosque da esquina por \$5, não é esse o preço que corresponderá à unidade de suco adquirida. O preço correto é o preço pleno (ou *full price*<sup>2</sup>,

<sup>2</sup> O livro *Universal Economics*, de Armen Alchian e William Allen, traz um glossário no final com o conceito de preço pleno (*full price*): “*the money price of a good or service plus all other costs incurred in making the purchase, such as time, inconvenience, and the like*”. O preço  $p$  que vemos nos gráficos elementares de oferta e demanda não é o preço de etiqueta do bem, ou seja, aquele valor monetário efetivamente pago ao vendedor. Se você paga \$10 por um produto, mas se o tempo de espera na fila ou os custos de busca (*search costs*) custaram-lhe \$5, o preço  $p$  que você pagou não foi \$10, mas \$15. Do ponto de vista econômico, o preço correto pago pelo consumidor, o preço de demanda, inclui o valor monetário de todos os sacrifícios incorridos na realização do ato da compra. Esse sacrifícios podem englobar custos de busca, de barganha, de informação assimétrica, de espera etc. Em um mercado de competição imperfeita, no qual a receita marginal é relevante para os ofertantes, a ideia de preço pleno é muito significativa, o que mostra que, ao fazer trabalhos econométricos com base em preços coletados, o economista deve ter muito cuidado para não negligenciar as outras componentes do preço pleno. Por exemplo, a teoria diz que taxar rendas puras não causa distorções alocativas. Você toma isso como regra de bolso, mas se esquece de que a teoria também traz o conceito de quase-renda. O que à primeira vista parece renda pura

na terminologia de Alchian). O preço pleno deve conter os valores marginais correspondentes a todos os sacrifícios incorridos na aquisição do bem. O valor de \$5 corresponde apenas ao sacrifício de outros bens em que você está disposto a incorrer, no período, em troca dessa unidade de suco. Porém, se você enfrenta uma fila para adquirir o suco, tempo suficiente para sacrificar o retorno da melhor atividade alternativa, então o correspondente valor monetário deve fazer parte do preço correto e acrescido ao preço de etiqueta. Isso significa que, se você não acredita em escassez, é seu ônus de provar por que, então, o preço do bem é zero. Preço significa que à ação escolhida não corresponde a qualquer sacrifício. O preço de etiqueta pode ser zero, mas o preço pleno não.

As Leis de Demanda nada mais são que descrições analíticas de um fenômeno social e psicológico inescapável: o fato de que a toda escolha corresponde um sacrifício. É esse fato que caracteriza a escassez, não a mera limitação das quantidades disponíveis frente às desejadas. Mesmo que a quantidade disponível seja mais que suficiente para cobrir a quantidade total desejada pela sociedade, no período, ainda assim o preço será positivo se, para realizar essa alocação, a sociedade tiver que sacrificar algo.

#### 4.3.2 Análise de Equilíbrio Parcial da Incidência de Impostos

A incidência tributária é o estudo de quem suporta o ônus econômico de um imposto. Em termos gerais, é a análise positiva do impacto dos impostos na distribuição do bem-estar em uma sociedade. Começa com o *insight* muito básico de que a pessoa que tem a obrigação legal de efetuar um pagamento de imposto pode não ser a pessoa cujo bem-estar é reduzido pela presença do imposto. A incidência estatutária de um imposto refere-se à distribuição de pagamentos de impostos com base na obrigação legal de remeter impostos ao governo. Os economistas, com razão, concentram-se na incidência econômica, que mede as mudanças no bem-estar econômico da sociedade decorrentes de um imposto.

A incidência econômica difere da incidência estatutária por causa de mudanças no comportamento e consequentes mudanças nos preços de equilíbrio. Os consumidores compram menos de um produto tributado, e portanto, as empresas produzem menos e compram menos insumos - o que altera o preço líquido de cada insumo. Assim, o trabalho do analista de incidência é determinar como esses outros preços mudam e como essas mudanças afetam diferentes tipos de indivíduos.

As análises de incidência são abundantes na literatura, mas podem ser classificadas em algumas categorias. Em particular, quando esses estudos analisam os efeitos distributivos dos

---

pode ser quase-renda e, portanto, corresponde a um sacrifício. De forma similar, sob seleção adversa temos uma alocação *second best* quando o agente contratado para produzir é do tipo ruim (com custo marginal maior), de modo que a regra de preço é:

$$\text{preço} = \text{custo marginal} + \text{distorção} \quad (4.3.1)$$

Ora, essa distorção é o preço-sombra da elicitação da informação privada e, por conseguinte, também corresponde a um sacrifício e faz parte daquilo que Roger Myerson chama de custo marginal virtual, que inclui os *shadow-prices* de outros sacrifícios que não apenas o operacional. Nunca tome o que você aprendeu nos livros-textos como regra de bolso para raciocinar como economista. Há muito mais na Teoria Econômica que você deve acrescentar aos instrumentos elementares e aos modelos.

impostos entre os grupos, Atkinson e Stiglitz (1980) observam que nós economistas usamos cinco maneiras diferentes de dividir os contribuintes em grupos.

1. Primeiro, podemos nos concentrar no impacto dos impostos sobre os consumidores, em oposição aos produtores ou fornecedores de fatores (como mão-de-obra, capital e terra). Um diagrama de equilíbrio parcial pode identificar tanto a perda do excedente do consumidor quanto a perda do excedente do produtor resultante de um imposto.
2. Segundo, podemos restringir o foco para analisar o impacto de um imposto especificamente nas demandas relativas de diferentes fatores e nos retornos desses fatores (como capital, trabalho ou terra). A análise de equilíbrio geral pioneira de Harberger (1962) simplesmente ignora o lado do consumidor, assumindo que todo mundo gasta seu dinheiro da mesma maneira e, em seguida, ele deduz o ônus de um imposto sobre o capital em oposição ao trabalho.
3. Terceiro, podemos agrupar indivíduos por alguma medida de bem-estar econômico. Qualquer classificação desse tipo nos permite analisar a progressividade de um sistema tributário. Normalmente, os contribuintes são agrupados por alguma medida de renda e, em seguida, os dados nos dizem quanto cada grupo ganha de cada fator e quanto cada grupo gasta em cada produto.
4. Quarto, os impostos podem ser avaliados com base na incidência regional. Essa análise pode se concentrar em diferenças regionais dentro de um país ou pode se concentrar em diferenças internacionais.
5. Finalmente, os impostos podem ter efeitos intergeracionais. Por exemplo, a criação de um sistema de impostos e transferências que seja parcial ou totalmente financiado por dívida trará uma transferência das gerações futuras para alguns ou todos os membros da geração atual.

Muitos dos princípios fundamentais da incidência de impostos podem ser ilustrados no ajuste de equilíbrio parcial mais simples. Portanto, começamos considerando a análise de equilíbrio parcial de um imposto sobre o consumo de um produto.

Na ausência de tributação, o equilíbrio é atingido quando oferta e demanda são iguais e a equação

$$D(p) = S(p), \quad (4.3.2)$$

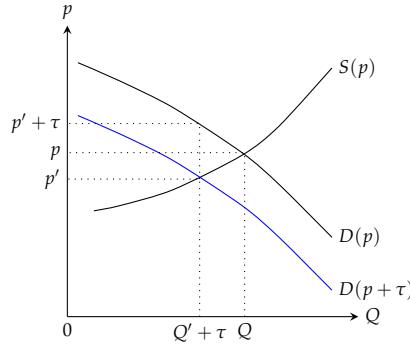
é satisfeita. Agora considere a introdução de um imposto sobre o consumo,  $\tau$ . Se o imposto é recolhido dos consumidores, o novo equilíbrio deverá satisfazer a condição abaixo:

$$D(p + \tau) = S(p), \quad (4.3.3)$$

enquanto que se o imposto é coletado dos produtores, o novo equilíbrio deverá satisfazer a condição

$$D(q) = S(q - \tau). \quad (4.3.4)$$

FIGURA 4.3.2 – INCIDÊNCIA DE UM IMPOSTO



Comparando as equações, é claro que a determinação da quantidade de equilíbrio, o preço pago pelos consumidores e a receita dos produtores não depende de que lado do mercado o imposto é cobrado. Diagramaticamente, a imposição de um imposto pode ser analisada como uma mudança na curva de demanda ou como uma mudança na curva de oferta. O equilíbrio resultante é o mesmo em ambos os casos. Este princípio, de que a incidência de um imposto não depende de que lado do mercado ele é cobrado, transita para contextos muito mais gerais.

Segue-se imediatamente deste princípio que a incidência final de um imposto não pode ser avaliada simplesmente observando onde o imposto é cobrado de forma imediata. A fim de examinar a incidência de um imposto de consumo, começamos por caracterizar a mudança no equilíbrio que resulta da imposição do imposto. Por conveniência, pensamos no imposto como sendo coletado dos consumidores. Diferenciando totalmente a equação (4.3.3), temos:

$$D'(p + \tau)(dp + d\tau) = S'(p)dp \quad (4.3.5)$$

ou

$$\frac{dp}{d\tau} = -\frac{\frac{\partial D(p)}{\partial p}}{\frac{\partial D(p)}{\partial p} - \frac{\partial S(p)}{\partial p}} \quad (4.3.6)$$

Na proximidade de  $\tau = 0$ , lembrando que  $D(p) = S(p)$ , podemos reescrever a expressão acima, como

$$\begin{aligned} \frac{dp}{d\tau} &= -\frac{\frac{\partial D(p)}{\partial p} \frac{p}{D(p)}}{\frac{\partial D(p)}{\partial p} \frac{p}{D(p)} - \frac{\partial S(p)}{\partial p} \frac{p}{S(p)}} \quad [D(p) = S(p) \text{ quando } \tau = 0] \\ &= -\frac{\eta_D}{\eta_S + \eta_D} \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

em que  $\eta_D$  representa a elasticidade-preço da demanda e  $\eta_S$  representa a elasticidade-preço da oferta.

Neste ponto, estamos prontos para avaliar a incidência de um imposto sobre consumo.

Por exemplo, se:

- $\eta_S = 0$ , então a oferta é inelástica e  $\frac{dp}{d\tau} = -1$ . O preço ao consumidor não é afetado pelo imposto, ou seja, os produtores arcaram com o imposto.
- $\eta_D = 0$ , então a demanda é inelástica e  $\frac{dp}{d\tau} = 0$ . O preço ao produtor é fixo, os preços ao consumidor aumentam no valor total do imposto, ou seja, os consumidores arcaram com o imposto.
- $\eta_S = \infty$ , então a oferta é infinitamente elástica e  $\frac{dp}{d\tau} = 0$ . O preço ao consumidor é ajustado pelo valor total do imposto e, novamente, os consumidores pagam o imposto. Isso pode descrever a situação em uma pequena economia aberta que cobra um imposto sobre um único bem.

Disso decorre que  $0 \geq \frac{dp}{d\tau} \geq -1$ .

As equações acima ilustram um princípio fundamental que se repetirá com frequência em nossa discussão sobre incidência tributária. Os impostos tendem a ser suportados por fornecedores ou demandantes inelásticos. É instrutivo considerar os casos limitantes. Se a demanda é completamente inelástica  $\eta_D = 0$  ou a oferta é perfeitamente elástica  $\eta_S = +\infty$ , os consumidores arcarão com todo o ônus de um imposto sobre consumo. Por outro lado, se a oferta é perfeitamente inelástica  $\eta_S = 0$  ou a demanda é perfeitamente elástica  $\eta_D = \infty$ , todo o imposto será suportado pelos fornecedores. Mais geralmente, os impostos são suportados por aqueles que não podem se ajustar facilmente. Quanto maior a capacidade dos compradores de substituir a mercadoria tributada por outras commodities, maior será sua capacidade de transferir impostos. Da mesma forma, se os produtores não têm fatores fixos e podem deixar uma indústria onde os impostos estão sendo cobrados, sua curva de oferta é perfeitamente elástica e o imposto deve ser suportado pelos consumidores. Pois, se os vendedores fossem forçados a arcar com o imposto, ganhariam uma taxa de retorno abaixo do normal, levando-os a cessar a produção. Assim, no novo equilíbrio, os produtores recebem o mesmo preço para produzir como no antigo equilíbrio, enquanto o preço pago pelos consumidores sobe pelo valor total do imposto.

Embora essa análise descreva com precisão os efeitos da introdução de um imposto sobre consumo em um mercado pequeno, onde não há distorções pré-existentes, é difícil se estender a outros casos. Em geral, mudanças na curva de demanda, tais como seriam causadas por uma mudança de impostos, serão associadas a mudanças na demanda por outros produtos. Isso alterará seus preços, levando a mudanças nos preços dos fatores, o que afetará a posição das curvas de oferta e demanda. Ao considerar os impostos que afetam uma grande parte da economia, é necessário, portanto, adotar uma perspectiva de equilíbrio geral, e não a visão de equilíbrio parcial tomada acima. Dois princípios que emergem desta análise de equilíbrio parcial permanecerão válidos. Primeiro, a incidência de impostos não depende de qual lado do mercado o imposto é avaliado.

Segundo, os impostos serão deslocados por esses agentes e fatores que são mais elásticos na oferta ou demanda.

### 4.3.3 Peso Morto

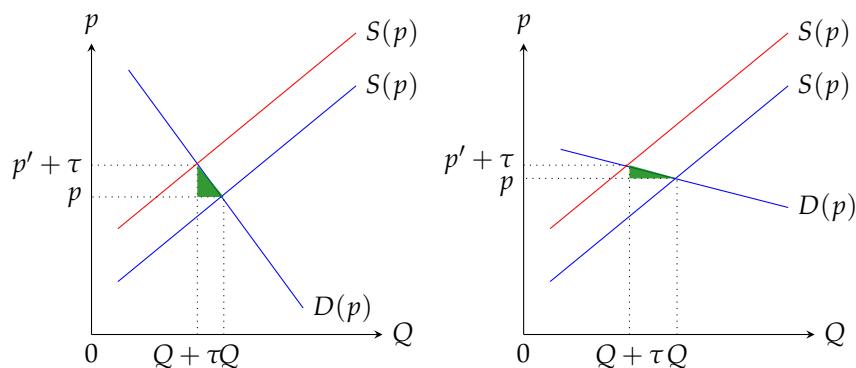
O governo aumenta impostos para aumentar receita para financiar bens ou para redistribuir renda de ricos para pobres. Mas aumentar a receita fiscal geralmente tem um custo de eficiência: para gerar R\$ 1 de receita, precisa reduzir o bem-estar dos indivíduos em mais de R\$ 1. Os custos de eficiência vêm da distorção do comportamento.

A carga de peso morto (também chamada de sobrecarga) da tributação é definida como a perda de bem-estar criada por um imposto para além da receita fiscal gerada pelo imposto. No diagrama simples de oferta e demanda, o bem-estar é medido pela soma do excedente do consumidor e do excedente do produtor.

A perda de bem-estar da tributação é medida como uma mudança no excedente do consumidor e no excedente do produtor menos o imposto cobrado. A ineficiência de qualquer imposto é determinada pela medida em que consumidores e produtores mudam seu comportamento para evitar o imposto; a perda de peso morto é causada por indivíduos e empresas que fazem escolhas ineficientes de consumo e produção, a fim de evitar a tributação. Se não houver alteração nas quantidades consumidas, o imposto não tem custos de eficiência.

Ramsey (1927) pediu para Pigou para resolver o seguinte problema. Considere um consumidor que consome  $K$  bens diferentes. Quais são as taxas de imposto  $\tau_1, \dots, \tau_K$  que aumentam uma determinada quantidade de receita, minimizando a perda de bem-estar para o indivíduo? Taxas de imposto uniformes  $\tau = \tau_1, \dots, \tau_K$  não são ideais se o indivíduo tem demanda mais elástica por alguns bens do que para outros. A regra ótima é chamada de regra tributária de Ramsey: alíquotas ótimas são tais que o peso morto marginal é o mesmo em todos os bens. Disso decorre a seguinte regra de bolso: taxe menos os bens elásticos e mais os bens inelásticos. Graficamente, temos a situação na Figura 4.3.3.

FIGURA 4.3.3 – DEMANDA INELÁSTICA VERSUS DEMANDA ELÁSTICA



Dado um mercado, considere a introdução de um imposto específico (*excise tax*)  $t$ . Sem perda de generalidade, suponha que o imposto incide sobre a oferta. Assim, o ofertante cobra o custo

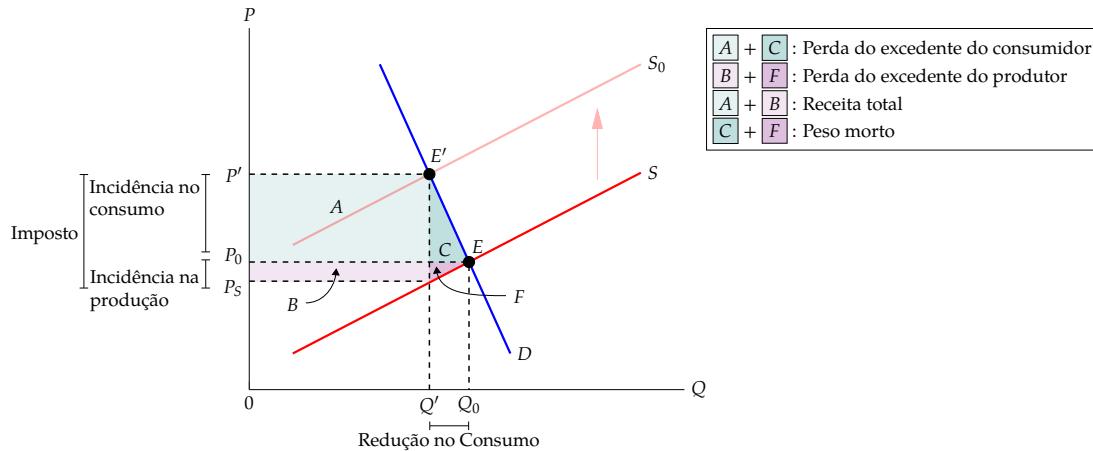
marginal mais o imposto específico  $t$ , deslocando a curva de oferta  $S$  paralelamente para cima e para a esquerda até a curva  $S_0$ , que dista de  $S$  uma distância vertical exatamente igual ao valor do imposto. Graficamente, o peso morto pode ser representado na Figura 4.3.4.

O custo de eficiência, também conhecido como triângulo de Harberger<sup>3</sup>, pode ser computado como

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -\frac{1}{2} (\Delta Q) \Delta P \\ &= -\frac{1}{2} (\Delta Q) t \\ &= \frac{1}{2} |\Delta Q| t\end{aligned}\quad (4.3.8)$$

O custo de eficiência é uma medida da perda social decorrente da distorção de preços causada pela tributação. Vamos deduzir essa medida de forma analítica.

FIGURA 4.3.4 – PESO MORTO



Suponha que as curvas de oferta e demanda são dadas pelas expressões lineares

$$Q^d = a - bP \quad (4.3.9)$$

$$Q^s = c + dP \quad (4.3.10)$$

<sup>3</sup> No seu trabalho empírico, Harberger calcula triângulos de perda de peso morto com base em curvas de demanda construídas ao devolver a receita fiscal aos consumidores de forma global, formando assim uma economia de equilíbrio geral simples, onde todos os mercados se ajustam e nenhum fundo fica sem explicação. Nesse contexto, os impostos afetam os preços e distorcem as decisões individuais, apesar do fato de que as receitas fiscais são eventualmente devolvidas aos consumidores. Como a devolução da receita aos consumidores compensa a quantia dos impostos pagos, mas não compensa a distorção nas decisões individuais, os consumidores são prejudicados pela imposição dos impostos. As curvas de demanda que Harberger utiliza não são demandas marshallianas, uma vez que os consumidores recebem reembolsos fiscais, nem são demandas compensadas ou equivalentes de Hicks, pois as utilidades mudam. Elas são algo diferente: ‘demandas Harbergerianas’. Harberger observa que essas curvas de demanda podem ser usadas para gerar medidas de bem-estar que são aproximações de segunda ordem daquelas baseadas em demandas hicksianas; essa afirmação é tornada mais precisa por Diewert (1976) e McKenzie e Pearce (1976), que identificam várias propriedades de medidas de bem-estar baseadas em demandas Harbergerianas.

O equilíbrio de mercado é o par  $(Q_0, P_0)$ . Ao preço de equilíbrio  $P_0$ , a quantidade  $Q_0$  é a que iguala quantidade demandada com quantidade ofertada. Para determinar o equilíbrio, fazemos  $Q^d = Q^s$ , ou seja, a igualdade da oferta com a demanda, de onde temos  $a - bP = c + dP$ . Portanto, isolando  $P$ , encontramos o preço de equilíbrio:

$$P_0 = \frac{a - c}{b + d} \quad (4.3.11)$$

A esse preço, a quantidade de equilíbrio é:

$$\begin{aligned} Q_0 &= a - bP_0 \\ &= a - b \left( \frac{a - c}{b + d} \right) \\ &= \frac{ab + ad - ad + bc}{b + d} \\ &= \frac{ad + bc}{b + d} \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

Note que encontramos  $Q_0$  substituindo o preço de equilíbrio  $P_0$  na função demanda. Se o tivéssemos substituído na função oferta, o resultado seria o mesmo. De fato:

$$\begin{aligned} Q_0 &= c + dP_0 \\ &= c + d \left( \frac{a - c}{b + d} \right) \\ &= \frac{bc + dc + ad - dc}{b + d} \\ &= \frac{ad + bc}{b + d} \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Quando o governo introduz um imposto sobre o ofertante, a curva de oferta se desloca para cima e para a esquerda. No novo equilíbrio, a quantidade transacionada é menor: ela cai de  $Q_0$  para  $Q_1$ . O ponto crucial é que o preço pago não é mais o preço recebido. À quantidade  $Q_1$ , o demandante paga  $P^d > P_0$ , mas o ofertante recebe  $P_s < P_0$ . A diferença, como já sabemos, é precisamente o valor do imposto:  $t = P^d - P^s$ . Queremos encontrar o valor de  $Q_1$ , que é a quantidade de equilíbrio após o tributo. O consumidor paga  $P^d$  pela quantidade  $Q_1$ , isto é,  $Q_1 = a - bP^d$ , de modo que  $P_d = \frac{a - Q_1}{b}$ . Já o ofertante recebe  $P^s$ , ou seja,  $Q_1 = c + dP^s$ , de modo que  $P^s = \frac{Q_1 - c}{d}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} t &= P^d - P^s \\ &= \frac{a - Q_1}{b} - \frac{Q_1 - c}{d} \end{aligned}$$

$$= \frac{ad + bc - (b + d)Q_1}{bd} \quad (4.3.14)$$

onde  $bdt = ad + bc - (b + d)Q_1$ .

Logo,

$$\left( \frac{bd}{b+d} \right) t = \frac{ad + bc}{b+d} - Q_1 \quad (4.3.15)$$

Como  $Q_0 = \frac{ad + bc}{b+d}$ , então

$$Q_1 - Q_0 = -\frac{bd}{b+d}t \iff \Delta Q = \left( -\frac{bd}{b+d} \right) t \quad (4.3.16)$$

que é a variação da quantidade de equilíbrio em decorrência do imposto.

Temos, assim, uma expressão alternativa para o custo de eficiência:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{1}{2} (\Delta Q) t \\ &= -\frac{1}{2} \left( -\frac{bd}{b+d} t \right) t \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{bd}{b+d} \right) t^2 \end{aligned} \quad (4.3.17)$$

Essa expressão enfatiza o papel das inclinações das curvas de demanda e oferta agregadas no mercado e têm uma função instrumental na teoria, pois as inclinações sugerem a consideração de variações locais.

Quando essas curvas são estimadas econometricamente, surge outra expressão alternativa, baseada nas elasticidades-preço de demanda e oferta. A elasticidade é um conceito local, ou seja, referente a pequenas variáveis de preços. É claro que toda variação observável é discreta, mas, se suficientemente pequena, podemos considerar a elasticidade em termos das derivadas da função. Seja:

$$\eta_0 = \left. \frac{dQ^d}{dP} \frac{P}{Q^d} \right|_{P_0} \quad (4.3.18)$$

a elasticidade-preço da demanda agregada avaliada ao preço de equilíbrio  $P_0$  pré-imposto e seja, analogamente:

$$\varepsilon_0 = \left. \frac{dQ^s}{dP} \frac{P}{Q^s} \right|_{P_0} \quad (4.3.19)$$

a elasticidade-preço da oferta.

Como  $Q^d = a - bP$  e  $Q^s = c + dP$ , temos que  $\frac{dQ^d}{dP} = -b$  e  $\frac{dQ^s}{dP} = d$ . Portanto, substituindo essas derivadas nas expressões para as elasticidades, temos  $\eta_0 = -b \frac{P_0}{Q_0}$  e  $\varepsilon_0 = d \frac{P_0}{Q_0}$ . Isolando os coeficientes  $b$  e  $d$ , encontramos  $b = -\eta_0 \frac{Q_0}{P_0}$  e  $d = \varepsilon_0 \frac{Q_0}{P_0}$ . Defina  $V_0 = P_0 Q_0$ , que é o valor monetário das transações de equilíbrio. Esse valor equivale ao faturamento que o setor tributado gera em equilíbrio pré-tributo. Seja  $\theta = \frac{t}{P_0}$  a taxa que expressa a magnitude do tributo como proporção do preço inicial de mercado:  $t = \theta P_0$ . Substituindo os coeficientes  $b$  e  $d$ , em termos das elasticidades, na expressão  $\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left( \frac{bd}{b+d} \right) t^2$ , encontramos:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \left( \frac{bd}{b+d} \right) t^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{-\eta_0 \frac{Q_0}{P_0} \varepsilon_0 \frac{Q_0}{P_0}}{-\eta_0 \frac{Q_0}{P_0} + \varepsilon_0 \frac{Q_0}{P_0}} \right) t^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{-\eta_0 \varepsilon_0}{-\eta_0 + \varepsilon_0} \right) \frac{\left( \frac{Q_0}{P_0} \right)^2}{\left( \frac{Q_0}{P_0} \right)} t^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\eta_0 \varepsilon_0}{\varepsilon_0 - \eta_0} \right) \frac{Q_0}{P_0} t^2\end{aligned}$$

Ora,  $\frac{Q_0}{P_0} = \frac{P_0 Q_0}{P_0^2}$ , isto é,  $\frac{Q_0}{P_0} = \frac{V_0}{P_0^2}$ . Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\eta_0 \varepsilon_0}{\varepsilon_0 - \eta_0} \right) V_0 \left( \frac{t}{P_0} \right)^2 \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{\eta_0 \varepsilon_0}{\varepsilon_0 - \eta_0} \right) V_0 \theta^2 \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{|\eta_0| \varepsilon_0}{\varepsilon_0 + |\eta_0|} \right) V_0 \theta^2\end{aligned}\tag{4.3.20}$$

Esta expressão é útil quando a variação da quantidade de equilíbrio decorrente do imposto é negligenciável relativamente à quantidade comercializada de equilíbrio antes do imposto. A unidade de tempo subjacente que caracteriza a quantidade como taxa de fluxo pode ser o mês, o trimestre ou o ano, sempre o que for mais conveniente para a análise. Dada essa condição, observa-se o faturamento do setor no período,  $V_0$ , e considera-se o imposto proposto como percentagem  $\theta$  do preço de equilíbrio,  $P_0$ : esses elementos são facilmente observáveis. O trabalho mais técnico repousa sobre as estimativas das elasticidades-preço de demanda e de oferta do setor tributado, o que requer técnicas econômicas apropriada.

Existem, assim, três expressões equivalentes para o custo de eficiência do imposto:

$$\mathcal{H} = \begin{cases} -\frac{1}{2}(\Delta Q)t & \text{ou} & \frac{1}{2}|\Delta Q|t \\ \frac{1}{2}\left(\frac{bd}{b+d}\right)t^2 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\eta_0\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - \eta_0}\right)V_0\theta^2 & \text{ou} & \frac{1}{2}\left(\frac{|\eta_0|\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + |\eta_0|}\right)V_0\theta^2 \end{cases} \quad (4.3.21)$$

Segundo o balanço da ABIT (Associação Brasileira da Indústria Têxtil e de Confecção), o faturamento do setor têxtil em 2021 foi estimado em 194 bilhões de reais. Vamos supor, apenas para efeito de exemplificação, que o setor não seja distorcido por tributações pré-existentes e que estudos econométricos estimaram uma elasticidade-preço da demanda em  $\eta_0 = -1,2154$  e uma elasticidade-preço da oferta em  $\varepsilon_0 = 0,8262$ . O governo cogita de fazer incidir sobre os oferentes uma alíquota de imposto de 10% sobre o preço médio observado no ano. Logo,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2}\left(\frac{|\eta_0|\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + |\eta_0|}\right)V_0\theta^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1,2154 \times 0,8262}{0,8262 + 1,2154}\right) \times 194.000.000.000 \times (0,1)^2 \\ &= 477.100.000 \end{aligned} \quad (4.3.22)$$

Ou seja, um custo de eficiência de aproximadamente 477 milhões de reais. Recorde que essa perda já é líquida da arrecadação tributária do governo. Esse valor consiste de todos os excedentes perdidos dos consumidores expulsos do mercado por que o preço pago subiu e de todos os oferentes expulsos porque o preço recebido caiu.

Um caso extremo é quando a oferta é infinitamente preço-elástica, isto é, variações do preço alteram infinitamente a quantidade ofertada. Em termos gráficos, isso corresponde a uma oferta (inversa) agregada fixa horizontal no plano do preço em função da quantidade. Essa é uma condição natural em mercados nos quais há um número muito grande de ofertantes de um produto homogêneo com a mesma tecnologia de produção. Dizemos que esse é um mercado espesso (*thick market*) no lado da oferta. Analisar esse caso, portanto, é útil quando queremos ter uma estimativa imediata dos custos de eficiência do imposto em mercados espessos. No caso em pauta,  $d = \infty$  e  $\varepsilon_0 = \infty$ . Ora:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow \infty} \mathcal{H} &= \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{|\eta_0|\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + |\eta_0|} \right) V_0\theta^2 \right) \\ &= \frac{1}{2}|\eta_0|V_0\theta^2 \end{aligned} \quad (4.3.23)$$

Alternativamente,

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \mathcal{H} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left( \frac{bd}{b+d} \right) t^2$$

$$= \frac{1}{2}bt^2 \quad (4.3.24)$$

Em outras palavras a magnitude do custo de eficiência, nesse caso, dependerá diretamente das elasticidades-preço da demanda e da oferta.

1. DWB aumenta com o tamanho absoluto das elasticidades ( $\eta_S > 0, -\eta_D > 0$ )  $\Rightarrow$  Mais eficiente para tributar bens relativamente inelásticos
2. DWB aumenta com o quadrado da alíquota  $\tau$ : impostos pequenos têm custos de eficiência relativamente baixos, impostos grandes têm custos de eficiência relativamente altos  $\Rightarrow$  Mais eficiente para distribuir impostos em todos os bens para manter as taxas de imposto baixas
3. Distorções pré-existentes (como uma externalidade positiva que não é corrigida) tornam o custo da tributação mais alto: passar do triângulo para o trapézio

#### 4.3.4 Vantagens Comparativas

Nesta exposição vamos estudar o modelo Ricardiano. Para tanto, vamos nos debruçar sobre os seguintes tópicos

1. o conceito de vantagem comparativa
2. como uma economia de um só fator determina qual bem produzirá
3. como se determinam os preços relativos e a oferta
4. como ocorre o comércio em um mundo de um fator

Os países participam do comércio internacional por dois motivos básicos:

1. são diferentes uns dos outros em termos de capital, trabalho (disponibilidade de mão de obra e nível de qualificação), tecnologia etc.
2. eles podem obter economias de escala na produção.

Sob este argumento, o modelo ricardiano está baseado nas diferenças tecnológicas entre os países. Essas diferenças tecnológicas estão refletidas nas diferenças na produtividade do trabalho.

O conceito de “vantagem comparativa” de David Ricardo é uma das ideias mais famosas e veneráveis em economia. Datada de 1817, a proposta de Ricardo é que os países se especializam em produzir os produtos de forma mais eficiente, em vez de produzir todos os tipos de produtos por si mesmos.

Para entendermos como o modelo proposto por Ricardo é construído e desenvolvido, vamos começar com um exemplo. Suponha que no dia dos namorados a demanda americana por rosas é de 10 milhões. Plantar rosas no inverno dos EUA é muito difícil. Deveria usar-se estufas aquecidas, com altos custos em termos de energia elétrica, capital e trabalho e implementos agrícolas tecnologicamente desenvolvidos. Alguns desses recursos poderiam ser usados na produção de outros bens, por exemplo, computadores. Se isso é possível, por que um país escolhe produzir rosas

e não computadores? A resposta está diretamente relacionada com o custo de oportunidade. Para se entender o conceito de custo de oportunidade, há de se entender primeiramente a diferença entre custo e escolha. Toda ação é percebida por quem a executa como contendo atributos desejáveis e indesejáveis. O indivíduo racional executa determinada ação quando, após um processo psicológico, ele julga que o valor dos atributos desejáveis supera o valor dos atributos indesejáveis. Esse raciocínio está associado à ideia de que o valor da ação é dado pela soma do prazer (com valor positivo) com o sofrimento (com valor negativo) inerentes à ação. O custo de oportunidade, ao contrário, é um conceito relativo. O custo de oportunidade de uma ação só faz sentido se se consideram todas as alternativas possíveis a essa ação. Ele é definido como o valor da melhor alternativa à ação. O custo de oportunidade de uma ação é, portanto, o valor da melhor alternativa de que se abriu mão. Aqui, o custo de oportunidade das rosas em termos dos computadores é o número de computadores que poderiam ser produzidos com os recursos utilizados para produzir um dado número de rosas.

Continuando nosso exemplo, vamos supor que nos Estados Unidos o custo de oportunidade de produzir 10 milhões de rosas é igual a 100 mil computadores e o custo de oportunidade de 100 mil computadores é igual a 10 milhões de rosas. Na América do Sul, por seu turno, o custo de oportunidade de 10 milhões de rosas é de 30 mil computadores, enquanto o custo de oportunidade de 100 mil computadores é de  $100/30 \times 10 = 33,3$  milhões de rosas. Além disso, suponhamos que os trabalhadores da América do Sul são menos produtivos do que os americanos na produção de computadores. A partir das informações acima podemos construir a Tabela 4.5.

TABELA 4.5 – PRODUÇÃO INICIAL

	Rosas (em milhões)	Computadores (em mil)
EUA	10	0
América do Sul	0	30
Total	10	30

O que acontece se os Estados Unidos deixarem de produzir rosas e produzirem somente computadores e a América do Sul deixar de produzir computadores e produzir somente rosas? As mudanças na produção após esta decisão estão elencadas na tabela 4.6.

TABELA 4.6 – MUDANÇAS NA PRODUÇÃO

	Rosas (em milhões)	Computadores (em mil)
EUA	-10	+100
América do Sul	+10	-30
Total	0	70

O resultado que obtemos é que no mundo, o número de rosas é o mesmo, mas o número de computadores aumentou. Portanto, a produção mundial aumentou. Isto aconteceu porque o comércio internacional permitiu que cada país se especializasse na produção de um bem no qual apresenta vantagem comparativa. Vemos que as rosas têm menor custo de oportunidade na

América do Sul e que computadores têm menor custo de oportunidade nos EUA.

Este simples exemplo nos permite apresentar o princípio da vantagem comparativa, o qual afirma que um país apresenta uma vantagem comparativa (VC) na produção de um bem se o custo de oportunidade da produção desse bem em relação aos demais bens é mais baixo nesse país do que em outros. No nosso exemplo, os EUA apresentam vantagem comparativa na produção de computadores. A América do Sul apresenta vantagem comparativa na produção de rosas.

A partir do princípio da vantagem comparativa proposto por Ricardo, depreende-se que o comércio internacional entre dois países pode beneficiar a ambos se cada país exportar os bens em que possui uma vantagem comparativa. Esta afirmação é uma possibilidade, não a realidade. Como sabemos se é sempre verdade? Para responder esta questão devemos aprofundar nossa análise. A resposta nós ajudará a entender como as diferenças entre os países determinam o padrão de comércio.

Para responder a esta questão por meio de uma estrutura formal, vamos estudar o modelo ricardiano, que propõe uma abordagem na qual o comércio internacional é estritamente o resultado das diferenças internacionais na produtividade do trabalho. Iniciaremos analisando uma economia de um só fator. Nesta abordagem, temos os seguintes pressupostos:

- 1 país: local
- 1 fator de produção: trabalho
- 2 bens: vinho ( $V$ ) e queijo ( $Q$ )
- A oferta de trabalho é fixa
- Livre mobilidade do trabalho entre os setores de vinho e queijo
- Prevalece a concorrência perfeita em todos os mercados
- Tecnologia: resumida na produtividade do trabalho em cada indústria.

A produtividade, fator-chave do modelo ricardiano, pode ser medida de duas formas:

- Necessidade de unidades de trabalho
- Número de unidades produzidas em 1 hora de trabalho

Para entender os conceitos de produtividade propostos aqui, vamos trabalhar com um exemplo numérico. Sejam as produtividades apresentadas na tabela 4.7.

Além disso, vamos utilizar o conceito de fronteira de possibilidade de produção (FPP). A FPP mostra a quantidade máxima de vinho que pode ser produzida uma vez que a decisão de produzir uma determinada quantidade de queijo tenha sido tomada e vice-versa. Assim, defina  $Q_V$  como a produção de vinho no país local e  $Q_Q$  como a produção de queijo no país local. Então,

- $a_{LV}Q_V$  é o trabalho utilizado na produção de vinho.
- $a_{LQ}Q_Q$  é o trabalho utilizado na produção de queijo.

TABELA 4.7 – PRODUTIVIDADE

	Local
Queijo	$a_{LQ} = 1$ hora por quilo
	$\frac{1}{a_{LQ}} = \frac{1}{1} = 1$ quilo por hora
Vinho	$a_{LV} = 2$ horas por litro
	$\frac{1}{a_{LV}} = \frac{1}{2}$ litro por hora

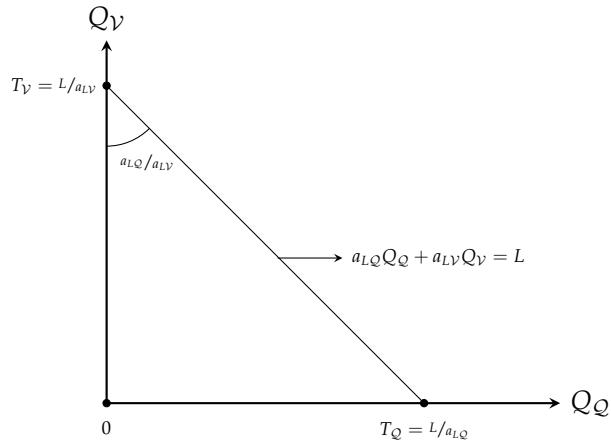
Com estas definições, a FPP de nossa economia é dada pela seguinte equação:

$$a_{LQ}Q_Q + a_{LV}Q_V = L$$

$$Q_V = \frac{L}{a_{LV}} - \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}Q_Q \quad (4.3.25)$$

Representando essa equação sob a forma de um gráfico (Figura 4.3.5), obtemos a abscissa medindo a produção de queijo, enquanto a ordenada nos informa qual a produção de vinho.

FIGURA 4.3.5 – CURVA DE POSSIBILIDADE DE PRODUÇÃO



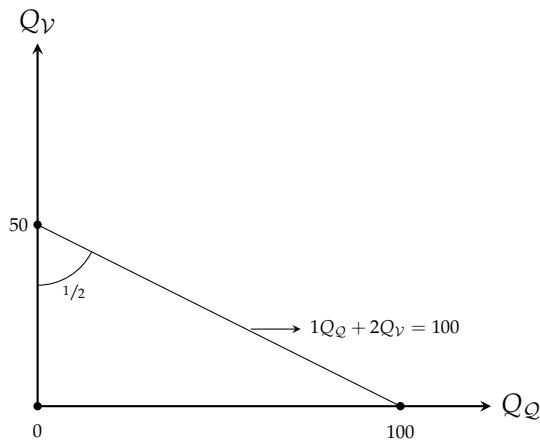
O par ordenado  $(0, T_V)$  nos informa a produção de vinho que obtemos quando a economia escolhe produzir apenas este bem com o nível de produtividade igual a  $a_{LV}$  e zero unidades do outro bem. De forma semelhante, o par ordenado  $(T_Q, 0)$  indica o quanto a economia pode produzir de queijo com um nível de produtividade igual a  $a_{LQ}$  ao abrir mão da produção de vinho. Unindo estes dois pontos, encontramos a fronteira de produção de possibilidade, que mostra todas as possíveis combinações de produção que esta economia, com estes níveis de produtividade, está disposta a fazer. Aqui, a inclinação deste segmento de reta,  $\frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ , representa o custo de oportunidade de

produzir queijo.

Lembre que  $\frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$  é o custo de oportunidade do queijo em termos do vinho (inclinação da FPP). Como a FPP é uma linha reta, neste exemplo, o custo de oportunidade do queijo em termos do vinho é constante.

Com os dados do nosso exemplo, e supondo que o trabalho é igual a 100, a FPP seria representada graficamente como segue na Figura 4.3.6.

FIGURA 4.3.6 – CURVA DE POSSIBILIDADE DE PRODUÇÃO



Agora que sabemos o que a economia pode produzir, para saber que realmente produzirá devemos analisar os preços. As quantidades particulares de cada bem produzidas são determinadas pelos preços. Mais exatamente precisamos conhecer os preços relativos. Lembrando que o preço relativo é o preço de um bem em termos do outro, aqui o preço relativo do queijo em termos do vinho seria a quantidade de vinho que pode ser trocada por uma unidade de queijo.

Para determinarmos os preços relativos, vamos pressupor que a economia é competitiva, ou seja, as decisões de oferta são determinadas pelas tentativas dos indivíduos de maximizarem sua remuneração. A competição perfeita tem três ingredientes fundamentais: bens substitutos perfeitos (no nível dos agentes, ou seja, os vendedores possuem compradores alternativos e os compradores possuem vendedores alternativos), ofertas e demandas perfeitamente elásticas e apropriação plena, ou seja, alinhamento entre os excedentes privados e as contribuições marginais sociais de cada agente. Destarte, a oferta de queijo e vinho será determinada pelo movimento do trabalho para o setor que paga o maior salário. Para tanto, definamos:

- $P_Q$  como o preço do queijo
- $P_V$  como o preço do vinho

Pela definição apresentada acima, o preço relativo do queijo é igual a  $\frac{P_Q}{P_V}$ . Como sob concorrência perfeita não há lucros num modelo de um fator, temos que:

- $\omega_Q = \frac{P_Q}{a_{LQ}}$  é o salário por hora no setor de queijo.

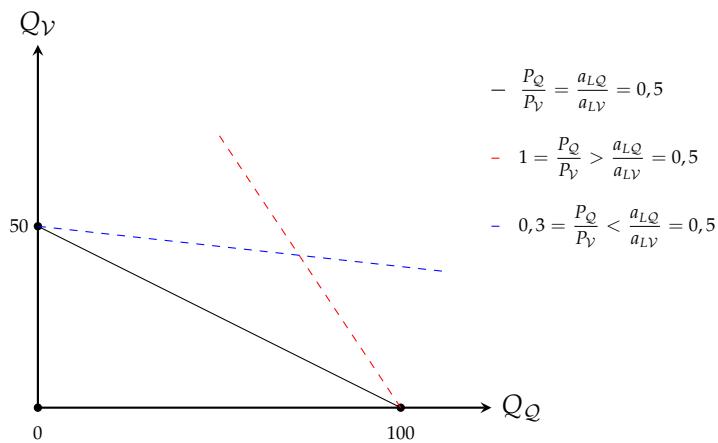
- $\omega_V = \frac{P_V}{a_{LV}}$  é o salário por hora no setor de vinho.

Com base nestas informações, podemos distinguir três casos para determinar qual bem o país produzirá:

1. A economia especializa-se na produção de queijo se  $\frac{P_Q}{a_{LQ}} > \frac{P_V}{a_{LV}}$  (salário no setor de queijo > salário no setor de vinho) ou se  $\frac{P_Q}{P_V} > \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$  (preço relativo do queijo > custo de oportunidade do queijo).
2. A economia especializa-se na produção de vinho se  $\frac{P_Q}{a_{LQ}} < \frac{P_V}{a_{LV}}$  (salário no setor de queijo < salário no setor de vinho) ou se  $\frac{P_Q}{P_V} < \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$  (preço relativo do queijo < custo de oportunidade do queijo).
3. A economia produz ambos os bens se  $\frac{P_Q}{a_{LQ}} = \frac{P_V}{a_{LV}}$  (salário no setor de queijo = salário no setor de vinho) ou se  $\frac{P_Q}{P_V} = \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$  (preço relativo do queijo = custo de oportunidade do queijo).

Lembremos que no nosso exemplo  $\frac{a_{LQ}}{a_{LV}} = 0,5$ . Vamos supor que  $\frac{P_Q}{P_V} = \frac{2}{1}$ , então  $\frac{P_Q}{P_V} > \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ . Assim, o país local se especializaria na produção de queijo, uma vez que o preço relativo do queijo é maior que seu custo de oportunidade. De forma semelhante, caso  $\frac{P_Q}{P_V} = \frac{1}{3}$ , então  $\frac{P_Q}{P_V} < \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ . Assim, o país local se especializaria na produção de vinho, uma vez que o preço relativo do queijo é menor que seu custo de oportunidade. Por fim, se tivessemos  $\frac{P_Q}{P_V} = \frac{1}{2}$ , então  $\frac{P_Q}{P_V} = \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ . Assim, o país local produziria ambos os bens, uma vez que o preço relativo do queijo é igual ao seu custo de oportunidade. Representando estas possibilidades em um gráfico, obteríamos a Figura 4.3.7.

FIGURA 4.3.7 – EXEMPLO ILUSTRATIVO



Os segmentos de reta dispostos no gráfico elucidam três situações. Se  $\frac{P_Q}{P_V} = \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ , tem-se

especialização incompleta no segmento  $T_V T_Q$ . Caso  $\frac{P_Q}{P_V} > \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ , tem-se especialização completa em queijo no ponto  $T_Q$ . E se  $\frac{P_Q}{P_V} < \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ , tem-se especialização completa em vinho no ponto  $T_V$ .

Agora que já avaliamos como um país decide em que bem ele se especializará, podemos incluir mais um país no modelo e entender como ocorre o comércio internacional. Necessitamos relembrar alguns pressupostos, a saber:

- 2 países: local e estrangeiro (\*)
- 1 fator de produção: trabalho
- 2 bens: vinho ( $\mathcal{V}$ ) e queijo ( $\mathcal{Q}$ )
- A produtividade do trabalho é fixa
- A oferta de trabalho é fixa em cada país ( $L$  e  $L^*$ )
- Prevalece a concorrência perfeita em todos os mercados

Vamos adotar as seguintes definições:

- $a_{LV}$  é o número de horas de trabalho necessárias para produzir um litro de vinho.
- $a_{LQ}$  é o número de horas de trabalho necessárias para produzir um quilo de queijo.
- $a_{L^*V}^*$  é o número de horas de trabalho necessárias para produzir um litro de vinho no país estrangeiro.
- $a_{L^*Q}^*$  é o número de horas de trabalho necessárias para produzir um quilo de queijo no país estrangeiro.

Utilizando os argumentos desenvolvidos anteriormente, o país local tem vantagem comparativa na produção de queijo se  $\frac{a_{LQ}}{a_{LV}} < \frac{a_{L^*Q}^*}{a_{L^*V}^*}$ . Isto significa que o custo de oportunidade de produzir queijo no país local é menor do que o custo de oportunidade de produzir queijo no país estrangeiro. De forma equivalente, se  $\frac{a_{LQ}}{a_{L^*Q}^*} < \frac{a_{LV}}{a_{L^*V}^*}$ , a produtividade relativa do queijo no local é maior do que a produtividade relativa do vinho no estrangeiro. Por outro lado, o país estrangeiro tem vantagem comparativa na produção de vinho se  $\frac{a_{L^*V}^*}{a_{L^*Q}^*} < \frac{a_{LV}}{a_{LQ}}$ , ou seja, o custo de oportunidade de produzir vinho no país estrangeiro é menor do que o custo de oportunidade de produzir vinho no país local. De forma equivalente, se  $\frac{a_{L^*V}^*}{a_{LV}} < \frac{a_{L^*Q}^*}{a_{LQ}}$ , a produtividade relativa do vinho no estrangeiro é maior do que a produtividade relativa do queijo no local.

Seja o seguinte exemplo. Se  $a_{LQ} = 1$  hora por quilo,  $a_{LV} = 2$  horas por litro,  $a_{L^*Q}^* = 6$  horas por quilo e  $a_{L^*V}^* = 3$  horas por litro, qual país tem vantagem comparativa em qual bem? Como  $\frac{a_{LQ}}{a_{LV}} = \frac{1}{2} = 0,5 < 2 = \frac{6}{3} = \frac{a_{L^*Q}^*}{a_{L^*V}^*}$ , o país local apresenta vantagem comparativa na produção de

queijo. Por outro lado,  $\frac{a_{LQ}^*}{a_{LV}^*} = \frac{3}{6} = 0,5 < 2 = \frac{a_{LV}}{a_{LQ}}$ , o que implica que o país estrangeiro apresenta vantagem comparativa na produção de vinho.

Disto decorre que, o país local tem vantagem comparativa na produção de queijo se  $\frac{1/a_{LQ}}{1/a_{LV}} > \frac{1/a_{LQ}^*}{1/a_{LV}^*}$ , ou seja, se o trabalho do país local é mais eficiente relativamente na produção de queijo do que o do país estrangeiro. O país estrangeiro tem vantagem comparativa na produção de vinho se  $\frac{1/a_{LQ}^*}{1/a_{LQ}} > \frac{1/a_{LV}}{1/a_{LQ}}$ , ou seja, o trabalho do país estrangeiro é mais eficiente relativamente na produção de vinho do que o do país local.

Vimos anteriormente como determinar os preços relativos. Naquele caso, não havendo comércio internacional, os preços relativos do queijo e do vinho em cada país seriam determinados pelas necessidades relativas de unidades de trabalho. Dito de outra forma, no país local, encontrariamos  $\frac{P_Q}{P_V} = \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ , enquanto no país estrangeiro chegaríamos a  $\frac{P_Q^*}{P_V^*} = \frac{a_{LQ}^*}{a_{LV}^*}$ . Agora, uma vez que se permite o comércio internacional, os preços não serão mais determinados puramente por considerações domésticas. O problema é que por considerações de oferta e demanda, os preços relativos tenderão a igualar-se. Mas, o que determina esse preço de equilíbrio?

Não se pode fazer análise de equilíbrio parcial (um único mercado), mas análise de equilíbrio geral (levar em consideração as ligações entre os dois mercados). Seja a quantidade relativa de queijo:

$$Q = \frac{Q_Q + Q_Q^*}{Q_V + Q_V^*} \quad (4.3.26)$$

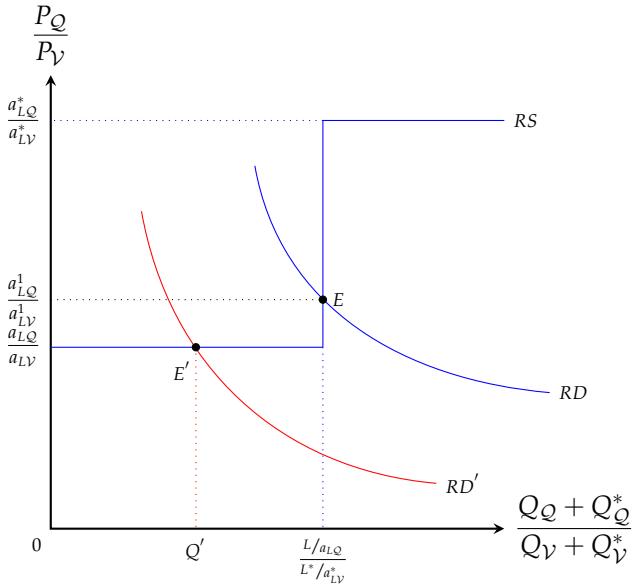
Na Figura 4.3.8 apresentamos a demanda mundial de queijo em relação ao vinho como funções do preço do queijo relativo ao preço do vinho. Temos duas curvas: i) a curva de demanda relativa, doravante  $RD$ ; e ii) a curva de oferta relativa, doravante  $RS$ . Note que estamos diante das curvas de demanda e oferta relativas mundiais. Em equilíbrio,  $RD = RS$ , e, a partir disto, determinamos o preço relativo mundial de equilíbrio. No eixo das abscissas temos as quantidades relativas de queijo e no eixo das ordenadas os preços relativos.

Iniciaremos discutindo a curva de oferta relativa e como seu formato em degrau é obtido. Se  $\frac{P_Q}{P_V} < \frac{a_{LQ}}{a_{LV}} < \frac{a_{LQ}^*}{a_{LV}^*}$ , não existe oferta de queijo. Por quê? Lembre que se  $\frac{P_Q}{P_V} < \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ , o país local se especializa em vinho. Se  $\frac{P_Q}{P_V} < \frac{a_{LQ}^*}{a_{LV}^*}$ , o país estrangeiro se especializa em vinho. Então, não existirá produção de queijo.

Agora, se  $\frac{P_Q}{P_V} = \frac{a_{LQ}}{a_{LV}} < \frac{a_{LQ}^*}{a_{LV}^*}$ , os trabalhadores do país local podem receber o mesmo produzindo vinho ou queijo, assim podem ofertar qualquer quantidade relativa dos dois bens, e temos a primeira parte plana da curva.

Caso  $\frac{a_{LQ}}{a_{LV}} < \frac{P_Q}{P_V} < \frac{a_{LQ}^*}{a_{LV}^*}$ , a oferta relativa de queijo será  $\frac{Q_Q + Q_Q^*}{Q_V + Q_V^*} = \frac{L/a_{LQ}}{L^*/a_{LQ}^*}$ . Por quê? Lembre que se  $\frac{P_Q}{P_V} > \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ , o país local se especializa em queijo e produz  $Q_Q = \frac{L}{a_{LQ}}$  quilos. Se

FIGURA 4.3.8 – OFERTA E DEMANDA MUNDIAL



$\frac{P_Q}{P_V} < \frac{a_{LQ}^*}{a_{LV}^*}$ , podemos escrever alternativamente que  $\frac{P_V}{P_Q} > \frac{a_{LV}^*}{a_{LQ}^*}$ . O país estrangeiro se especializa

em vinho e produz  $Q_V^* = \frac{L^*}{a_{LV}^*}$  litros de vinho. Assim, temos que  $\frac{Q_Q + Q_Q^*}{Q_V + Q_V^*} = \frac{\frac{L}{a_{LQ}} + 0}{0 + \frac{L^*}{a_{LV}^*}} = \frac{\frac{L}{a_{LQ}}}{\frac{L^*}{a_{LV}^*}}$ .

Ainda, se  $\frac{a_{LQ}}{a_{LV}} < \frac{a_{LQ}^*}{a_{LV}^*} = \frac{P_Q}{P_V}$ , os trabalhadores do país estrangeiro podem receber o mesmo produzindo vinho ou queijo, assim podem ofertar qualquer quantidade relativa dos 2 bens, e temos a segunda parte plana da curva.

Por fim, se  $\frac{a_{LQ}}{a_{LV}} < \frac{a_{LQ}^*}{a_{LV}^*} < \frac{P_Q}{P_V}$ , não existe oferta de vinho. Por quê? Lembre que se  $\frac{P_Q}{P_V} > \frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ , o país local se especializa em queijo. Se  $\frac{P_Q}{P_V} > \frac{a_{LQ}^*}{a_{LV}^*}$ , o país estrangeiro se especializa em queijo. Então, não existirá produção de vinho.

A curva de demanda relativa  $RD$  é uma curva de demanda usual. Conforme o preço relativo do queijo aumenta, os consumidores tendem a comprar menos queijo e mais vinho, de modo que a demanda relativa do queijo cai.

O ponto de equilíbrio será dado pela intersecção das curvas de demanda ( $RD$ ) e de oferta ( $RS$ ), o ponto  $E$ . Cada país se especializa na produção do bem em que tem vantagem comparativa. O país local produz somente queijo e o estrangeiro somente vinho.

Agora, vamos supor que a curva de demanda seja  $RD'$ . O preço relativo mundial após o comércio é  $\frac{a_{LQ}}{a_{LV}}$ . Então o país local não necessita especializar-se e produz vinho e queijo. O país estrangeiro se especializa em vinho uma vez que  $\frac{P_Q}{P_V} < \frac{a_{LQ}^*}{a_{LV}^*}$ . Permanece sendo verdade que se um país se especializa, será na produção na qual tem vantagem comparativa.

Vamos generalizar o que vimos até agora. A lei básica da vantagem comparativa é muitas

vezes escrita da seguinte forma:

$$(p^{ak} - p) \cdot (C^k - X^k) \geq 0, \forall k \quad (4.3.27)$$

$$(p^{ak} - p) \cdot M^k \geq 0, \forall k \quad (4.3.28)$$

Perceba que as condições de equilíbrio implicam que:

$$p^{ak} \cdot M^k \geq 0, \forall k \quad (4.3.29)$$

$$p \cdot M^k = 0, \forall k \quad (4.3.30)$$

$$\sum_k M^k = 0 \quad (4.3.31)$$

As condições (4.3.30) e (4.3.31) decorrem diretamente da balança comercial e da condição de *market clearing*. A condição (4.3.29), por seu turno, decorre do fato de que  $C$  é preferível à  $C^a$ :

$$p^a \cdot M = p^a \cdot C - p^a \cdot X \geq p^a \cdot C^a - p^a \cdot X = p^a \cdot X^a - p^a \cdot X \geq 0 \quad (4.3.32)$$

De acordo com esta lei, existe uma “associação” positiva entre a diferença de preço da autarquia ( $p^{ak}$ ) e o preço mundial ( $p$ ) e as importações líquidas ( $M$ ). Em média, cada país importa (exporta) bens com preços autárquicos relativamente mais altos (mais baixos) do que os preços de equilíbrio comercial.

Alternativamente, podemos normalizar os preços para trabalhar com o simplex:  $\sum_i p_i = \sum_i p_i^{ak} = 1 \forall k$ . Isto é equivalente a fixar uma cesta com uma unidade de cada bem como numerário. Com essa normalização,  $\sum_i (p_i^{ak} - p_i) = 0$  e  $(p^{ak} - p) \cdot M^k \geq 0$  implicam que

$$\text{corr}(p^{ak} - p, M^k) \geq 0 \quad (4.3.33)$$

Com somente dois países, podemos obter um resultado mais nítido:

$$\text{corr}(p^{ak} - p^{-ak}, M^k) \geq 0 \quad (4.3.34)$$

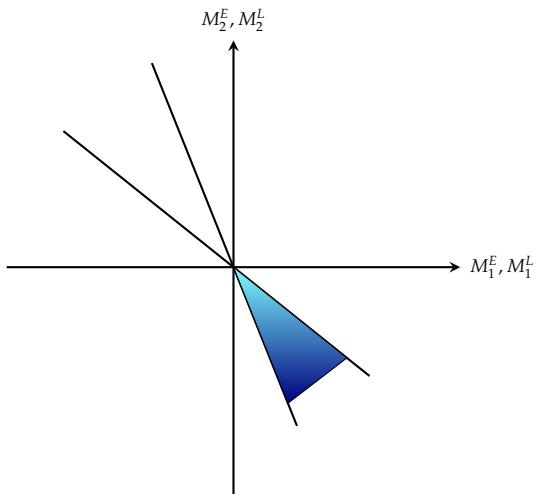
E com dois bens, obteríamos:

$$M_i^k > 0 \iff p^{ak} > p^{-ak} \text{ para } i = 1, 2 \quad (4.3.35)$$

No caso de dois países e dois bens, podemos representar a o vetor de importações líquidas

como segue:

FIGURA 4.3.9 – IMPORTAÇÕES LÍQUIDAS



O vetor  $M_L = -M_E$  deve estar no cone sombreado.

Concluindo, os padrões de comércio dependem da vantagem comparativa, não da vantagem absoluta. Os ganhos do comércio provêm de um uso mais eficiente dos recursos, aumentando as possibilidades de consumo. Os teoremas do bem-estar demonstram que permitir que os indivíduos troquem livremente uns com os outros até que todos os ganhos do comércio sejam esgotados necessariamente beneficia todas as partes. O princípio da vantagem comparativa diz que permitir que os países troquem sempre aumenta o bem-estar em ambos os países de uma maneira similar. Existe uma diferença fundamental entre essas duas conclusões. O comércio não beneficia necessariamente todos os indivíduos. Na verdade, é quase certo que haverá vencedores e perdedores. Mas o princípio da vantagem comparativa combinado com o 1º e 2º teoremas do bem-estar provam que é possível tornar cada indivíduo melhor através do comércio simplesmente redistribuindo os ganhos do comércio para compensar os perdedores (ao tributar os vencedores, por exemplo). Mas se isso acontecerá depende da viabilidade política de implementar políticas redistributivas para contrariar a redistribuição que acompanha a liberalização do comércio.

Assim, os países produzirão os bens nos quais são mais produtivos. Se cada nação se especializar em produzir o bem em que goza de uma vantagem comparativa, a produção de bens no mundo como um todo pode aumentar. Além disso, se, após a especialização, cada país exporta o bem em que goza de uma vantagem comparativa e importa o bem em que sofre uma desvantagem comparativa, os consumidores em cada nação podem ter mais bens disponíveis para aproveitar. Todavia, há muitas limitações. Há apenas um fator de produção, há especialização completa e não tem a capacidade de explicar o comércio intra-indústria, entre outras.

### 4.3.5 Cadeias de Markov: Desemprego

As taxas de desemprego mudam ao longo do tempo à medida que os indivíduos ganham ou perdem o seu emprego. Consideramos um modelo simples, denominado modelo de Markov, que descreve a dinâmica do desemprego utilizando probabilidades de transição. Neste modelo, assumimos:

- Se um indivíduo estiver desempregado em uma determinada semana, a probabilidade é  $p$  desse indivíduo estar empregado na semana seguinte e  $1 - p$  de ele permanecer desempregado;
- Se um indivíduo estiver empregado em uma determinada semana, a probabilidade é  $q$  desse indivíduo permanecer empregado na semana seguinte e  $1 - q$  dele ou dela estar desempregado.

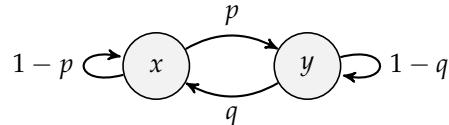
Seja  $x_t$  a proporção de indivíduos empregados na semana  $t$ , e seja  $y_t$  a proporção de indivíduos desempregados na semana  $t$ . Então, as mudanças semanais são dadas por estas equações:

$$x_{t+1} = qx_t + py_t \quad (4.3.36)$$

$$y_{t+1} = (1 - q)x_t + (1 - p)y_t \quad (4.3.37)$$

Graficamente, podemos representar essa cadeia de Markov com dois estados conforme Figura 4.3.10.

FIGURA 4.3.10 – CADEIA DE MARKOV: DOIS ESTADOS



Essas equações são lineares e podem ser escritas da forma  $v_{t+1} = Av_t$ , em que

$$A = \begin{pmatrix} q & p \\ 1 - q & 1 - p \end{pmatrix} \quad (4.3.38)$$

e

$$v_t = \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} \quad (4.3.39)$$

Chamamos  $A$  de matriz de transição e  $v_t$  de vetor de estado do sistema. Qual é o estado do sistema a longo prazo? Existem estados de equilíbrio? Se sim, esses estados de equilíbrio serão alcançados?

O estado do sistema após  $t$  semanas é dado por

$$\begin{aligned}
v_1 &= Av_0 \\
v_2 &= Av_1 = A(Av_0) = A^2v_0 \\
v_3 &= Av_2 = A(A^2v_0) = A^3v_0 \\
&\vdots \\
v_t &= A^t v_0
\end{aligned} \tag{4.3.40}$$

Um steady-state é um vetor de estado  $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  com  $x, y \geq 0$  e  $x + y = 1$  tal que  $Av = v$ . A última condição é uma condição de equilíbrio.

Para os homens brasileiros em 2022, as probabilidades foram  $p = 0,136$  e  $q = 0,998$ . Se a taxa de desemprego for de 5% em  $t = 0$ , expressa por  $x_0 = 0,95$  e  $y_0 = 0,05$ , a situação após 100 semanas seria

$$\begin{pmatrix} x_{100} \\ y_{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,998 & 0,136 \\ 0,002 & 0,846 \end{pmatrix}^{100} \begin{pmatrix} 0,95 \\ 0,05 \end{pmatrix} \tag{4.3.41}$$

Precisamos de autovalores e autovetores para computar  $A^{100}$  de forma eficiente.

A equação  $Av = v$  é um sistema linear, dado que pode ser escrito como  $\begin{pmatrix} 0,998 & 0,136 \\ 0,002 & 0,846 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0,998 - 1 & 0,136 \\ 0,002 & 0,846 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Então, podemos ver que o sistema tem um grau de liberdade e pode ser escrito como  $-0,002x + 0,136y = 0$ , o que implica em  $x = 68y$  e  $y$  é a variável livre. A única solução que satisfaz  $x + y = 1$  é dada por  $x \approx 0,986$  e  $y \approx 0,014$ . Em outras palavras, existe um equilíbrio ou estado estacionário do sistema em que o desemprego é de 1,4%.

A questão de saber se este estado estacionário será alcançado é mais difícil, mas pode ser resolvida usando autovalores. Para tanto, precisamos calcular os autovalores e os autovetores da matriz  $A$ . Nesse caso, temos que

$$P = \begin{pmatrix} -0,88 & 76,88 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.3.42}$$

e

$$D = \begin{pmatrix} 0,88 & 0 \\ 0 & 0,99 \end{pmatrix} \tag{4.3.43}$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} x_{100} \\ y_{100} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,998 & 76,88 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,88^{100} & 0 \\ 0 & 0,99^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,88 & 76,88 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ = \begin{pmatrix} 0,966 & 0,013 \\ 0,011 & 0,855 \end{pmatrix} \quad (4.3.44)$$

Encontramos um valor semelhante de 1,4% como taxa natural de desemprego.

#### 4.3.6 Crescimento e Consumo: Modelo de Leontief

Considere uma economia de  $n$  setores que produz  $n$  bens denotados pelo vetor  $x$ . Todos os bens são usados como insumos na produção e consumidos pelos trabalhadores. As necessidades de produção de insumos de commodities são dadas pela matriz  $A$  de coeficientes de insumos/produção e as necessidades de mão de obra pelo vetor linha de coeficientes de mão de obra/produção  $a$ . Observe que todos os elementos de  $A$  e  $a$  são não negativos. Supõe-se que a cesta de consumo dos trabalhadores é dada pelo vetor coluna  $c$ . Isso pode ser interpretado como uma cesta salarial que reflete o salário mínimo social, determinado pelas condições sociais e históricas da sociedade em questão. Este sistema de produção e seu uso podem ser resumidos da seguinte forma:

$$\text{Produto} = \text{necessidades de insumos de produção} + \text{consumo (de trabalhadores)} \quad (4.3.45)$$

ou

$$x = Ax + cax \quad (4.3.46)$$

Esta economia utiliza todos os seus recursos para a produção e consumo correntes, portanto é incapaz de crescer. Agora vamos introduzir o crescimento neste quadro. Por uma questão de simplicidade, suponhamos que os decisores políticos pretendem fazer crescer todos os setores ao mesmo ritmo, ou seja, numa “trajetória de crescimento equilibrado”. Portanto, a quantidade extra de bens necessária para alcançar este desempenho de crescimento é dada por

$$s = g[Ax + cax] \quad (4.3.47)$$

em que  $g$  é a taxa de crescimento equilibrada (um escalar) da economia. Quando (4.3.47) é levada em consideração, o sistema de produção torna-se

$$x = Ax + cax + g[Ax + cax] \quad (4.3.48)$$

em que o primeiro termo à direita corresponde às necessidades de insumos para o consumo atual e o segundo termo representa as necessidades de insumos para o crescimento. Vamos definir

$$B = A + ca \quad (4.3.49)$$

como a matriz de insumos aumentada. Assim,

$$x = (1 + g)Bx \quad (4.3.50)$$

Suponha que os decisores políticos queiram saber a taxa máxima viável de crescimento dessa economia, dada a tecnologia  $(A, a)$  e cesta de consumo exógena dos trabalhadores,  $c$ . Podemos reescrever (4.3.50) como

$$(\lambda I - B)x = 0 \quad (4.3.51)$$

em que  $\lambda = (1 + g) - 1$ ,  $I$  é a matriz identidade de dimensão  $n$  e  $0$  é o vetor zero de dimensão  $n \times 1$ . De (4.3.51) fica claro que a resposta exigida pode ser obtida pelos autovalores e autovetores correspondentes da matriz  $B$  e escolhendo aquele que permite a taxa máxima de crescimento. Obviamente, neste contexto, um sistema de produção é viável se pelo menos puder se sustentar, ou seja,  $g$  é um escalar não negativo e o autovetor correspondente também é não negativo.

Assumimos que em uma vila há um fazendeiro, um carpinteiro e um alfaiate, que fornecem os três bens essenciais: comida, abrigo e roupas. Suponha que o fazendeiro consome 40% da comida que produz, dá 40% ao carpinteiro e 20% ao alfaiate. Trinta por cento da produção do carpinteiro é consumida por ele mesmo, 40% pelo fazendeiro e 30% pelo carpinteiro. Cinquenta por cento da produção do alfaiate é usada por ele mesmo, 30% pelo fazendeiro e 20% pelo alfaiate. Escreva a matriz que descreve esse modelo fechado.

A matriz pode ser escrita como segue:

$$A = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,40 & 0,30 \\ 0,40 & 0,30 & 0,30 \\ 0,20 & 0,30 & 0,50 \end{pmatrix} \quad (4.3.52)$$

Esta matriz é chamada de matriz de insumo-produto. É importante que leiamos a matriz corretamente. Por exemplo, a entrada  $A_{23}$ , a entrada na linha 2 e coluna 3, representa o seguinte: 20% da produção do alfaiate é usada pelo carpinteiro. De modo semelhante,  $A_{33}$  significa que 50% da produção do alfaiate é usada por ele mesmo.

Quanto cada pessoa deveria receber por seus esforços? Façamos

$\times$  salário do fazendeiro

y salário do carpinteiro

z salário do alfaiate

Como mencionamos anteriormente, neste modelo, a entrada deve ser igual à saída. Ou seja, a quantia paga por cada pessoa é igual à quantia recebida por cada pessoa.

Vamos dizer que ao fazendeiro seja pago  $x$  reais. Agora, vamos analisar os gastos do fazendeiro. O fazendeiro utiliza 40% de sua própria produção, ou seja, dos  $x$  reais que ele recebe, ele paga a si mesmo 0,40x reais, paga 0,40y reais ao carpinteiro e 0,30z ao alfaiate. Como os gastos são iguais aos salários, obtemos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}x &= 0,40x + 0,40y + 0,30z \\y &= 0,40x + 0,30y + 0,20z \\z &= 0,20x + 0,30y + 0,50z\end{aligned}\tag{4.3.53}$$

O sistema pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,40 & 0,30 \\ 0,40 & 0,30 & 0,30 \\ 0,20 & 0,30 & 0,50 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\tag{4.3.54}$$

O sistema é escrito como

$$X = AX \iff (I - A)X = 0\tag{4.3.55}$$

Simplificando,

$$0,60x - 0,40y - 0,30z = 0\tag{4.3.56}$$

$$-0,40x + 0,70y - 0,20z = 0\tag{4.3.56}$$

$$-0,20x - 0,30y + 0,50z = 0\tag{4.3.57}$$

Resolvendo, obtemos:

$$x = \frac{29}{26}t\tag{4.3.58}$$

$$y = \frac{12}{13}t\tag{4.3.58}$$

$$z = t\tag{4.3.59}$$

Supondo  $t = 2600$ , temos  $x = 2900$ ,  $y = 2400$  e  $z = 2600$ .

O modelo aberto é mais realista, pois lida com a economia em que setores da economia não apenas satisfazem as necessidades uns dos outros, mas também atendem a algumas demandas externas. Neste caso, as demandas externas são impostas pelo consumidor. Mas a premissa básica ainda é a mesma; ou seja, tudo o que é produzido é consumido.

Vamos novamente analisar um cenário muito simples. Suponha que a economia seja composta por três pessoas: o fazendeiro  $F$ , o carpinteiro  $C$  e o alfaiate  $T$ . Uma parte da produção do fazendeiro é utilizada por todos os três, e o restante é usado pelo consumidor. Da mesma forma, uma parte da produção do carpinteiro e do alfaiate é utilizada por todos os três, e o restante é usado pelo consumidor.

Vamos assumir que, do que o fazendeiro produz, 20% é usado por ele, 15% pelo carpinteiro, 10% pelo alfaiate, e o consumidor utiliza os outros 40 bilhões de reais em alimentos. Dez por cento da produção do carpinteiro é usada por ele, 25% pelo fazendeiro, 5% pelo alfaiate, e 50 bilhões de reais pelo consumidor. Quinze por cento das roupas são usadas pelo alfaiate, 10% pelo fazendeiro, 5% pelo carpinteiro, e os restantes 60 bilhões de reais pelo consumidor. Escrevemos o consumo interno na tabela a seguir e expressamos a demanda como a matriz  $D$ . Assim,

$$X = AX + D \iff (I - A)X = D \iff X = (I - A)^{-1}D \quad (4.3.60)$$

Logo,

$$\begin{aligned} I - A &= \begin{pmatrix} 0,80 & -0,25 & -0,10 \\ -0,15 & 0,90 & -0,05 \\ -0,10 & -0,05 & 0,85 \end{pmatrix} \\ (I - A)^{-1}D &= \begin{pmatrix} 1.3445 & 0.38351 & 0.1807 \\ 0.2336 & 1.1814 & .097 \\ 0.1719 & 0.1146 & 1.2034 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{pmatrix} \\ X &= \begin{pmatrix} 83,78 \\ 74,23 \\ 84,81 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.3.61)$$

As três indústrias devem produzir a seguinte quantidade de bens em bilhões de reais: fazendeiro, 83,78; carpinteiro, 74,23; alfaiate, 84,81.

Resumindo:

### 1. Modelo fechado de Leontief

Todo o consumo é dado dentro da indústria. Não há demanda externa.

$$\text{INSUMO} = \text{PRODUTO}$$

$$X = AX$$

$$(I - A)X = 0$$

## 2. Modelo aberto de Leontief

Além do consumo interno, existe uma demanda externa por parte do consumidor.

$$\text{INSUMO} = \text{PRODUTO}$$

$$X = AX + D$$

$$X = (I - A)^{-1}D$$

### 4.3.7 Análise de Componentes Principais

A Análise de Componentes Principais ajuda a descobrir as dimensões mais comuns do seu projeto e facilita a análise dos resultados. Considere um cenário em que você lida com um projeto com variáveis e dimensões significativas. Nem todas essas variáveis serão críticas. Algumas podem ser as variáveis-chave, enquanto outras não são. Portanto, o método de Componentes Principais da análise fatorial fornece uma maneira calculada de eliminar algumas variáveis menos importantes, mantendo assim a transparéncia de todas as informações. Isso é possível? Sim, é possível. A Análise de Componentes Principais é chamada, portanto, de um método de redução de dimensionalidade. A estatística do PCA é analisar todas as dimensões e reduzi-las o máximo possível, preservando a informação exata.

E se você precisar lidar com 100 variáveis? Por que não considerar um exemplo em tempo real? Vamos imaginar uma situação em que você precise reconhecer alguns padrões de distribuição de renda. Você acha que na base de dados terá apenas quantidades de duas ou três famílias e poucas variáveis? Definitivamente não! Quando você precisa detectar e reconhecer milhares de amostras, você precisará de um algoritmo para resolver isso. A Análise de Componentes Principais ajuda a resolver esse problema (ver Figura 4.3.11).

- Padronização

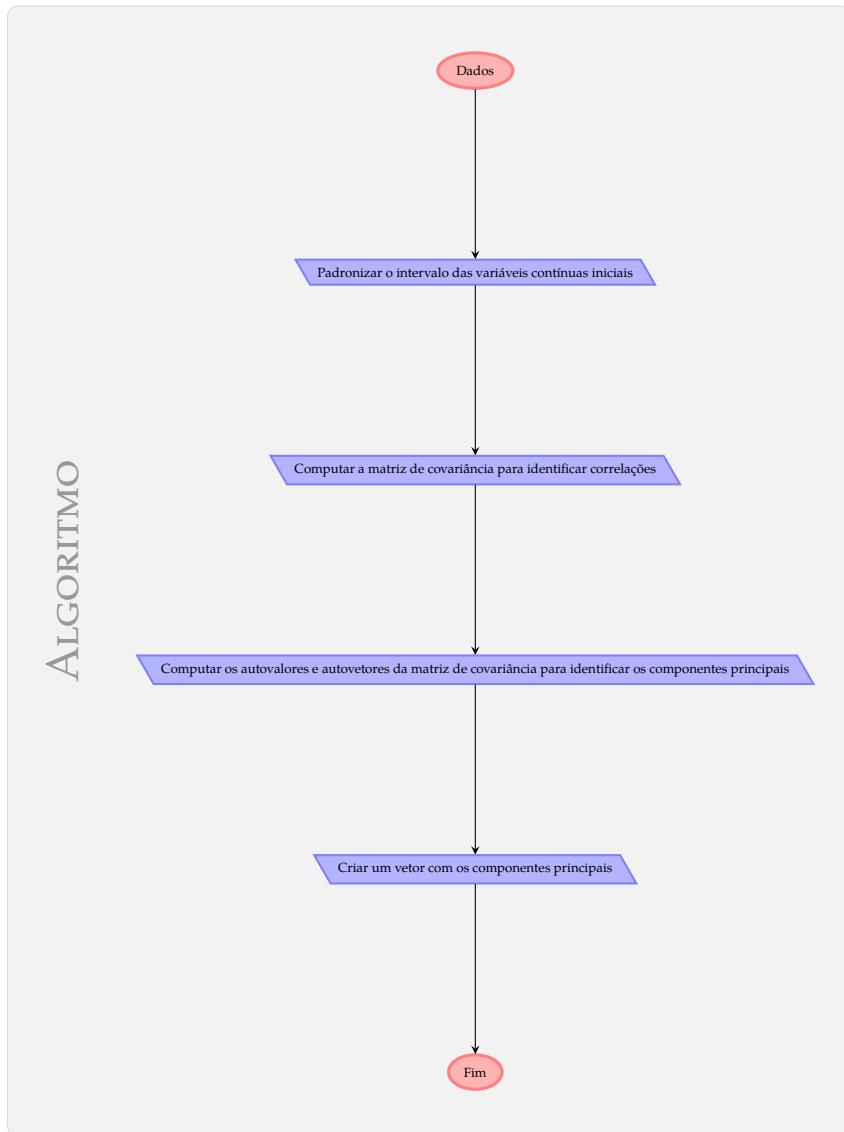
Neste processo, a amplitude das variáveis é calculada e padronizada para analisar a contribuição de cada variável de forma igual. Calcular as variáveis iniciais ajudará a categorizar aquelas que estão dominando outras variáveis de pequenas amplitudes. Isso ajudará a evitar resultados tendenciosos no final da análise. Para transformar as variáveis para o mesmo padrão, você pode seguir a fórmula a seguir

$$z = \frac{x_i - \mu}{\sigma} \quad (4.3.62)$$

em que

FIGURA 4.3.11 – ALGORITMO DA ANÁLISE DE COMPONENTES PRINCIPAIS

ALGORITMO



$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (4.3.63)$$

e

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n}} \quad (4.3.64)$$

em que  $x_i$  é a  $i$ -ésima observação,  $n$  é o tamanho da amostra,  $\mu$  é a média amostral e  $\sigma$  é o desvio-padrão.

Suponha o seguinte conjunto de dados com 5 variáveis (A, B, C, D e E):

	A	B	C	D
1	1	5	3	1
4	4	2	6	3
1	1	4	3	2
4	4	4	1	1
5	5	5	2	3

Calculando a média e o desvio-padrão dos dados, temos:

A	B	C	D
3	4	3	2
1,87	1,223	1,87	1

Padronizando cada variável, temos:

A	B	C	D
-1,0695	0,8196	0	-1
0,5347	-1,6393	1,6042	1
-1,0695	0	0	0
0,5347	0	-1,0695	-1
1,0695	0,8196	-0,5347	1

- Cálculo da Matriz de Covariância

Neste passo, você entenderá como as variáveis dos dados fornecidos variam em relação ao valor médio calculado. Variáveis inter-relacionadas também podem ser identificadas ao final deste passo. Para separar as variáveis altamente inter-relacionadas, você calcula a matriz de covariância com a ajuda da fórmula fornecida. Uma matriz de covariância é uma matriz simétrica  $N \times N$  que contém as covariâncias de todos os conjuntos de dados possíveis.

A matriz de covariância para dados bidimensionais é dada da seguinte forma:

$$\text{Cov} = \begin{bmatrix} \text{cov}(X, X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(Y, X) & \text{cov}(Y, Y) \end{bmatrix} \quad (4.3.65)$$

em que

$$\text{cov} = \frac{\sum_{i=1}^n ((x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y))}{n} \quad (4.3.66)$$

Observe que a covariância de um número consigo mesmo é sua variância ( $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$ ). Da mesma forma, as entradas da matriz de covariância na diagonal principal serão simétricas em relação ao fato de que a covariância é comutativa ( $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$ ). Se o valor da matriz de covariância for positivo, indica que as variáveis estão correlacionadas. Se  $X$  aumenta,  $Y$  também aumenta e vice-versa. Se o valor da matriz de covariância for negativo, indica que as variáveis estão inversamente correlacionadas. Se  $X$  aumenta,  $Y$  diminui e vice-versa. Como resultado, ao final deste passo, você saberá quais pares de variáveis estão correlacionados entre si, facilitando sua categorização.

Logo,

	A	B	C	D
A	$\text{var}(A)$	$\text{cov}(A, B)$	$\text{cov}(A, C)$	$\text{cov}(A, D)$
B	$\text{cov}(B, A)$	$\text{var}(B)$	$\text{cov}(B, C)$	$\text{cov}(B, D)$
C	$\text{cov}(C, A)$	$\text{cov}(C, B)$	$\text{var}(C)$	$\text{cov}(C, D)$
D	$\text{cov}(D, A)$	$\text{cov}(D, B)$	$\text{cov}(D, C)$	$\text{var}(D)$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{var}(A) &= \frac{(-1,0695 - 0)^2 + (0,5347 - 0)^2 + (-1,0695 - 0)^2 + (0,5347 - 0)^2 + (1,069 - 0)^2}{5} \\ &= 0,78 \end{aligned} \quad (4.3.67)$$

Do mesmo modo,

$$\begin{aligned} \text{cov}(A, B) &= \frac{(-1,0695 - 0)(0,8196 - 0) + (0,5347 - 0)(-1,6393 - 0) + (-1,0695 - 0)(0,0000 - 0)}{5} \\ &\quad + \frac{(0,5347 - 0)(0,0000 - 0) + (1,0695 - 0)(0,8196 - 0)}{5} \\ &= -0,8586 \end{aligned} \quad (4.3.68)$$

Da mesma forma, ao resolver todas as características, a matriz de covariância será

	A	B	C	D
A	0,78	-0,8586	-0,055	0,424
B	-0,8586	0,78	-0,607	-0,326
C	-0,055	-0,607	0,78	0,426
D	0,424	-0,326	0,426	0,78

- **Vetorização**

Para determinar os componentes principais das variáveis, é necessário definir o valor próprio (autovalor) e os vetores próprios (autovetores) para as mesmas. Uma vez que você tenha calculado os componentes do vetor próprio, defina os valores próprios em ordem decrescente (para todas as variáveis) e agora você obterá uma lista de componentes principais. Assim, os valores próprios representam os componentes principais e esses componentes representam a direção dos dados. Isso indica que se a linha contém variáveis de grandes variâncias, então há muitos pontos de dados na linha. Portanto, há mais informações na linha também. Por fim, esses componentes principais formam uma linha de novos eixos para uma avaliação mais fácil dos dados e também as diferenças entre as observações podem ser facilmente monitoradas. Os autovalores representam a variância ao longo dos autovetores, e os autovetores indicam a direção dos componentes principais.

Assim,

	A	B	C	D
A	0,78- $\lambda$	-0,8586	-0,055	0,424
B	-0,8586	0,78- $\lambda$	-0,607	-0,326
C	-0,055	-0,607	0,78- $\lambda$	0,426
D	0,424	-0,326	0,426	0,78- $\lambda$

Resolvendo, obtemos:

$$\lambda_1 = 2,11691 \quad (4.3.69)$$

$$\lambda_2 = 0,855413 \quad (4.3.70)$$

$$\lambda_3 = 0,481689 \quad (4.3.71)$$

$$\lambda_4 = 0,334007 \quad (4.3.72)$$

Em seguida, substitua cada valor próprio (autovalor) na equação  $(A - \lambda I) = 0$  e resolva a mesma para diferentes vetores próprios  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_4$ . Por exemplo, para  $\lambda = 2,11691$ , resolvendo a equação acima usando a regra de Cramer, os valores para o vetor  $v$  são  $v_1 = 0,515514, v_2 = -0,616625, v_3 = 0,399314$  e  $v_4 = 0,441098$ . Siga o mesmo processo e você formará a seguinte matriz usando os vetores próprios calculados conforme instruído.

E1	E2	E3	E4
0,5155	-0,6230	0,035	-0,5873
-0,6167	0,1131	0,4523	-0,6343
0,3993	0,7443	-0,2809	-0,4558
0,4411	0,2125	0,8458	0,2122

- Cálculo dos componentes principais

Ordene os autovalores em ordem decrescente. Neste caso, a ordem seria  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4$ . Escolha os  $k$  primeiros autovetores, em que  $k$  é o número de componentes principais desejados. Por exemplo, se quisermos reduzir para 1 componentes principais, escolheríamos  $v_1$ .

O primeiro componente principal é calculado como segue:

$$CP_1 = \text{Dados padronizados} \times v_1 \quad (4.3.73)$$

Assim,

$$CP_1 = \begin{bmatrix} -1,0695 & 0,8196 & 0 & -1 \\ 0,5347 & -1,6393 & 1,6042 & 1 \\ -1,0695 & 0 & 0 & 0 \\ 0,5347 & 0 & -1,0695 & -1 \\ 1,0695 & 0,8196 & -0,5347 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5155 \\ -0,6167 \\ 0,3993 \\ 0,4411 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.49787457 \\ 2.36825122 \\ -0.55132725 \\ -0.5925135 \\ 0.27347422 \end{bmatrix} \quad (4.3.74)$$

Os demais componentes principais são calculados como segue:

$$CP_2 = \text{Dados padronizados} \times v_2 \quad (4.3.75)$$

$$CP_3 = \text{Dados padronizados} \times v_3 \quad (4.3.76)$$

$$CP_4 = \text{Dados padronizados} \times v_4 \quad (4.3.77)$$

---

---

5

---

---

## ANÁLISE FUNCIONAL

---

## 5.1 Introdução

A Álgebra Linear é o estudo dos espaços vetoriais e das transformações lineares entre eles. Seguindo essa linha, podemos definir a Análise Funcional como o estudo dos espaços vetoriais normados, em especial os espaços de Banach, e dos operadores lineares contínuos entre eles. Essas definições, além de precisas, evidenciam as semelhanças e as diferenças entre essas duas teorias matemáticas. Ambas tratam de espaços vetoriais e de transformações lineares, e a diferença central é que na Análise Funcional exigimos também a continuidade. Por que isso? Por que em Álgebra Linear não nos importamos com continuidade e em Análise Funcional dela fazemos questão? O ponto central é que a Álgebra Linear, para ter a valiosa ferramenta que são as matrizes à disposição, trata essencialmente de espaços vetoriais de dimensão finita. Qualquer que seja a maneira com que um espaço vetorial de dimensão finita é normado, as transformações lineares nele definidas são automaticamente contínuas. Ou seja, em dimensão finita a continuidade é consequência automática da linearidade. Já em dimensão infinita a situação é bem diferente. Nem todo operador linear definido em um espaço de dimensão infinita é contínuo. Daí a necessidade de se considerar e estudar aqueles operadores lineares que são contínuos, e é exatamente isso o que faz a Análise Funcional.

## 5.2 Espaços Vetoriais Normados

Seja  $E$  um espaço vetorial e um corpo de escalares  $\mathbb{K}$  (seja o corpo  $\mathbb{R}$  dos números reais ou o corpo  $\mathbb{C}$  dos números complexos). Uma norma em  $E$  é uma função

$$\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad (5.2.1)$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $\|u\| = 0 \iff u = 0$  para todo  $u \in E$
2.  $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$  para todo  $u \in E$  e para todo  $\lambda \in \mathbb{R}$  (homogeneidade)
3.  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  para todo  $u, v \in E$

Sempre que temos uma norma podemos definir uma noção de distância como  $d(u, v) = \|u - v\|$ . Portanto, uma norma torna um espaço vetorial num espaço métrico. Isso significa dizer, por exemplo, que  $(u_n)_n \rightarrow u \iff (\|u_n - u\|)_n \rightarrow 0$ .

**Exemplo 5.2.1.** Seja  $\ell^\infty = \{(x_n)_n : x_n \in \mathbb{K} \text{ tais que } \sup_n |x_n| < \infty\}$  o conjunto, no corpo dos escalares, das sequências limitadas. Temos que  $E = \ell^\infty$  é um espaço vetorial, de tal modo que se temos duas sequências limitadas a soma é limitada, por exemplo.

Considere a seguinte função

$$\|(x_n)_n\| = \sup_n |x_n|. \quad (5.2.2)$$

Então,

1. se  $\sup_n |x_n| = 0$ , então  $x_n = 0$  para todo  $n$
2.  $\|(\lambda x_n)_n\| = \sup_n |\lambda x_n| \iff |\lambda| \|(x_n)_n\| = |\lambda| \sup_n |x_n|$
3.  $\|(x_n)_n + (y_n)_n\| \leq \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n|$

Portanto,  $\|(x_n)_n\| = \sup_n |x_n|$  é uma norma em  $\ell^\infty$  e  $E = \ell^\infty$  é um espaço vetorial com dimensão infinita ( $\dim E = \infty$ ), o que significa que se pode encontrar conjuntos linearmente independentes com tantos elementos quanto se queira.

**Exemplo 5.2.2.** Seja  $X$  um espaço topológico compacto e  $E = C^0(X, \mathbb{K}) = \{\varphi: X \rightarrow \mathbb{K} \text{ contínuas}\}$ . Como o espaço é compacto e a função é contínua nesse espaço, então  $\sup_{x \in X} |\varphi(x)| < \infty$  para todo  $\varphi \in E$ . E podemos definir uma norma como  $\|\varphi\| = \sup_{x \in X} |\varphi(x)|$ . Assim,  $(\varphi_n)_n \rightarrow \varphi$  em  $E$  significa, por definição, que  $(\|\varphi_n - \varphi\|)_n \rightarrow 0$  se e somente se  $(\varphi_n) \rightarrow \varphi$  uniformemente.

**Definição 5.2.1** (Sequência de Cauchy). Para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe uma ordem  $p \geq 1$  tal que para qualquer  $m, n \geq p$  temos  $\|x_n - x_m\| \leq \varepsilon$ .  $E$  é convergente se existe  $u \in E$  para todo  $\varepsilon > 0$  e existe  $k \geq 1$  tal que para todo  $n \geq k$  temos que  $\|x_n - u\| \leq \varepsilon$ .

**Definição 5.2.2.** Dizemos que a norma  $\|\cdot\|$  é completa se toda a sequência  $(x_n)_n$  de Cauchy é convergente.

Com isso chegamos a noção de espaço de Banach, que é um espaço vetorial munido de uma norma completa.

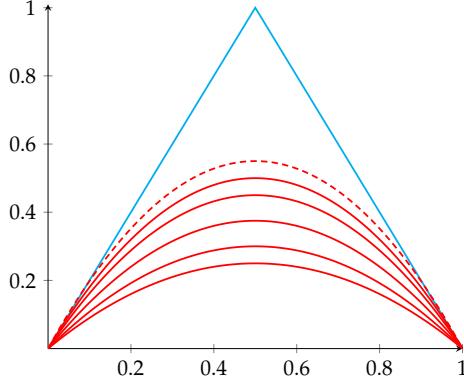
**Exemplo 5.2.3.** Seja  $E = C^0 = ([0, 1], \mathbb{R})$  cuja norma é a norma da convergência uniforme. Assim,  $(E, \|\cdot\|)$  é um espaço de Banach.

**Exemplo 5.2.4.** Seja  $E_0 = C^0 = ([0, 1], \mathbb{R})$  cuja norma é a norma da convergência uniforme. E seja  $E_1 = C^1 = ([0, 1], \mathbb{R})$  cuja norma é a norma da convergência uniforme. Observe que  $E_1$  é um subespaço de  $E_0$ . Porém,  $(E_1, \|\cdot\|)$  não é um espaço de Banach. Vamos ver porquê.

Considere a função em azul claro ( $\varphi$ ), que não é diferenciável. A sequência de funções polinomiais  $\varphi_n$  converge uniformemente para  $\varphi$ . A sequência  $(\varphi_n)_n$  é Cauchy, mas não é convergente.

Dito de outra forma, por Weierstrass, dada qualquer função contínua  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  existem sequências de funções polinomiais convergindo uniformemente para  $\varphi$ .

Ou, também por Weierstrass, existem funções contínuas  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  que não são diferenciáveis em nenhum ponto.



Com isso em mente, como transformar um espaço, como o  $E_1$ , num espaço de Banach?

Dada  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , temos:

$$\|\varphi\|_1 = \sup_{x \in X} |\varphi(x)| + \sup_{x \in X} |\varphi'(x)|. \quad (5.2.3)$$

Como o domínio é compacto e a função é de classe  $C^1$ , a derivada é contínua e limitada. Portanto,  $\|\varphi\|_1 < \infty$ . Assim,

1.  $\|\varphi\|_1$  é uma norma em  $E_1$
2.  $\|\varphi\|_1$  é uma norma completa

*Demonstração.* Seja  $(\varphi_n)_n$  uma sequência de Cauchy para  $\|\varphi\|_1$ , o que significa que  $\|\varphi_m - \varphi_n\|_1 \leq \varepsilon$  para  $m, n$  grandes. Isso implica que  $\sup \|\varphi_m - \varphi_n\| \leq \varepsilon$ . Disso decorre que  $(\varphi_n)_n$  é Cauchy relativamente à convergência uniforme. Logo, existe uma função  $\varphi$  contínua tal que  $(\varphi_n)_n \rightarrow \varphi$  uniformemente. Também temos que  $\sup \|\varphi'_m - \varphi'_n\| \leq \varepsilon$ . Disso decorre que  $(\varphi'_n)_n$  é Cauchy relativamente à convergência uniforme. Logo, existe uma função  $\psi$  contínua tal que  $(\varphi'_n)_n \rightarrow \psi$  uniformemente. Consequentemente,  $\varphi = \psi$ . Concluímos que  $\varphi$  é uma função derivável e, portanto,  $(\varphi_n)_n \rightarrow \varphi$  relativamente a norma  $\|\cdot\|_1$ . ■

**Exemplo 5.2.5.** Se  $E$  é um espaço vetorial de dimensão finita, então toda a norma  $\|\cdot\|$  em  $E$  é completa.

**Exemplo 5.2.6.** Seja  $E = c_0 = \{(x_n)_n \text{ sequência em } \mathbb{K} \text{ convergindo para } 0\}$ . Portanto,  $c_0 \subset \ell^\infty$  é um subespaço vetorial de  $\ell^\infty$ . Desse modo,

$$\|(x_n)_n\| = \sup_n |x_n|. \quad (5.2.4)$$

Sabemos que  $(\ell^\infty, \|\cdot\|)$  é um espaço de Banach. Agora,  $(c_0, \|\cdot\|)$  é um espaço de Banach, isto é,  $\|\cdot\|$  é completa em  $c_0$ ?

Vamos considerar as seguintes sequências de vetores

$$\begin{aligned} u_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0, 0, 0 \dots) \\ u_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0, 0, 0 \dots) \\ u_n &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \end{aligned}$$

Observe as seguintes propriedades de  $(u_n)_n$ :

1.  $\|u_n\| = 1$  para todo  $n$ , isto é,  $u_n \in \bar{B}_1(0)$
2.  $\|u_m - u_n\| = 1$  para todo  $m \neq n$ , o que implica que  $(u_n)_n$  não tem nenhuma subsequência convergente.

À guisa de conclusão, a bola unitária fechada de  $c_0$  não é compacta. Num espaço de Banach, a bola unitária é compacta se e somente se a dimensão do espaço for finita.

Lembre que se temos  $(X, d)$  um espaço métrico completo e consideramos um subespaço  $Y$  de  $X$ , isto é,  $Y \subset X$ . Então,  $(Y, d|_Y)$  é completo se e somente se  $Y$  é fechado em  $X$ . Daí decorre o seguinte corolário

**Corolário 5.2.0.1.** Um subespaço vetorial de um espaço de Banach é um espaço de Banach (para a restrição da norma) se e somente se ele é fechado no espaço de Banach.

Então,  $E_1 = C^1([0, 1], \mathbb{R})$  não é fechado em  $E_0 = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

Seja a seguinte proposição.

**Proposição 5.2.1.** O subespaço  $c_0$  é fechado em  $\ell^\infty$ .

*Demonstração.* Seja  $(u_k)_k$  uma sequência em  $c_0$  convergindo para algum  $u \in \ell^\infty$ , em que  $u_k = (x_{k,n})_n$  e  $u = (x_n)_n$ . Queremos concluir que  $u \in c_0$ .

Então,

$$\sup_n |x_{k,n} - x_n| = \|u_k - u\| \rightarrow 0 \quad \text{quando } k \rightarrow \infty. \quad (5.2.5)$$

Também temos

$$(x_{k,n})_n \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \forall k. \quad (5.2.6)$$

Queremos que  $(x_n)_n \rightarrow 0$ . Então, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $p \geq 1$  tal que para todo  $n \geq p$  temos  $|x_n| < \varepsilon$ .

Dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $q \geq 1$  tal que  $\sup_n |x_{k,n} - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $k \geq q$ . Fixe  $k = q$ , tome  $p \geq 1$  tal que  $|x_{k,n}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  para todo  $n \geq p$ .

Então, para todo  $n \geq p$

$$|x_n| \leq |x_n - x_{k,n}| + |x_{k,n}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \quad (5.2.7)$$

■

Seja um espaço de medida  $(X, \mathcal{B}, \mu)$ , em que  $X$  é um conjunto,  $\mathcal{B}$  é uma  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $X$  (ditos mensuráveis) e  $\mu: \mathcal{B} \rightarrow [0, +\infty]$  satisfaz duas propriedades: (i)  $\mu(\emptyset) = 0$  e (ii)  $\mu$  é enumeravelmente aditiva. Chamamos  $\mathcal{L}^p(\mu)$  o conjunto das funções  $\varphi: X \rightarrow \mathbb{K}$  tais que  $\int |\varphi|^p d\mu < \infty$  com  $1 \leq p \leq \infty$ .

Temos os seguintes casos particulares:

1.  $p = 1$ :  $\mathcal{L}^1(\mu)$  é o conjunto das funções cujo valor absoluto tem integral finita e essas funções são integráveis.
2.  $p = 2$

**Teorema 5.2.1** (Desigualdade de Minkowski). *Para qualquer  $\varphi, \psi \in L^p(\mu)$  e  $1 \leq p < \infty$  vale  $\|\varphi + \psi\|_p \leq \|\varphi\|_p + \|\psi\|_p$ .*

**Teorema 5.2.2** (Desigualdade de Hölder). *Dados  $p, q \in [1, +\infty)$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  vale  $\|\varphi\psi\|_1 \leq \|\varphi\|_p \|\psi\|_q$  para qualquer  $\varphi \in L^p(\mu)$  e  $\psi \in L^q(\mu)$ .*

Se  $\varphi \in \mathcal{L}^p(\mu)$  definimos

$$\|\varphi\|_p = \left[ \int |\varphi|^p d\mu \right]^{1/p}. \quad (5.2.8)$$

**Proposição 5.2.2.**  $\|\varphi\|_p$  é uma norma completa em  $L^p(\mu)$ .

Consideremos em  $\mathcal{L}^p(\mu)$  a seguinte relação:  $\varphi_1 \sim \varphi_2 \iff (\varphi_1 - \varphi_2)(x) = 0$  para  $\mu$ -quase todo  $x \in X$ . Dito de outro modo,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  diferem num conjunto com medida nula. Tem as seguintes propriedades:

1.  $\sim$  é uma relação de equivalência: reflexiva, simétrica e transitiva.
2.  $\varphi_1 \sim \varphi_2$  e  $\psi_1 \sim \psi_2$ , então  $\varphi_1 + \psi_1 \sim \varphi_2 + \psi_2$ . De maneira semelhante, se  $\lambda \in \mathbb{K}$  e  $\varphi_1 \sim \varphi_2$ , então  $\lambda\varphi_1 \sim \lambda\varphi_2$ .

Representamos por  $L^p(\mu)$  o espaço quociente  $\mathcal{L}^p(\mu) / \sim$ . Isto é, os elementos de  $L^p(\mu)$  são as classes de equivalência  $[\varphi]$  para a relação  $\sim$ . O espaço  $L^p(\mu)$  é um espaço vetorial, que apresenta as seguintes propriedades:

1.  $[\varphi] + [\psi] = [\varphi + \psi]$
2.  $\lambda[\varphi] = [\lambda\varphi]$

Além disso, se  $\varphi \in L^p(\mu)$  definimos

$$\|[\varphi]\|_p = \left[ \int |\varphi|^p d\mu \right]^{1/p}. \quad (5.2.9)$$

*Demonstração.* Vamos verificar os axiomas da definição de norma.

1. Se tivermos  $\varphi(x) = 0$  para  $\mu$ -quase todo  $x \in X$ , então  $\int |\varphi|^p d\mu = 0$ . Logo,  $\|\varphi\|_p = 0$ .
2.  $\|\lambda\varphi\|_p = [|\lambda\varphi|^p d\mu]^{1/p} = |\lambda| \|\varphi\|_p$
3.  $\|\varphi + \psi\|_p \leq \|\varphi\|_p + \|\psi\|_p$ : a desigualdade triangular é simplesmente a desigualdade de Minkowski.

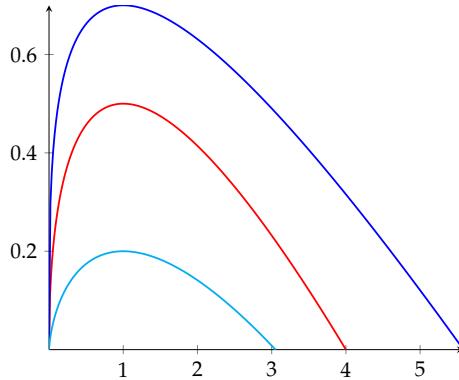
■

Vamos provar a desigualdade de Hölder.

*Demonstração.* Dados  $p, q \in [0, 1]$  com  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  vale  $a^{1/p} b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$ .

Considere  $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  a seguinte função  $t^\alpha - \alpha t$  com  $0 < \alpha < 1$ .

FIGURA 5.2.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $t^\alpha - \alpha t$



Isto implica que  $f(t) \leq f(1)$  para todo  $t > 0$ , isto é,  $t^\alpha \leq \alpha t + (1 - \alpha)$  para todo  $t > 0$ .

Com isso podemos fazer  $t = \frac{a}{b}$  e  $\alpha = \frac{1}{p}$ . Então,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^{1/p} &\leq \left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{q} \\ a^{1/p} b^{1/q-1} &\leq \left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{a}{b}\right) + \frac{1}{q} \\ a^{1/p} b^{1/q} &\leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}. \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Tomando  $a = \frac{|\varphi(x)|^p}{\|\varphi\|_p^p}$  e  $b = \frac{|\psi(x)|^q}{\|\psi\|_q^q}$ , temos:

$$\left(\frac{|\varphi(x)|^p}{\|\varphi\|_p^p}\right)^{1/p} \left(\frac{|\psi(x)|^q}{\|\psi\|_q^q}\right)^{1/q} \leq \frac{|\varphi(x)|^p}{p\|\varphi\|_p^p} + \frac{|\psi(x)|^q}{q\|\psi\|_q^q}$$

$$\begin{aligned}
\frac{|\varphi(x)||\psi(x)|}{\|\varphi\|_p\|\psi\|_q} &\leq \frac{|\varphi(x)|^p}{p\|\varphi\|_p^p} + \frac{|\psi(x)|^q}{q\|\psi\|_q^q} \\
|\varphi(x)||\psi(x)| &\leq \left[ \frac{|\varphi(x)|^p}{p\|\varphi\|_p^p} + \frac{|\psi(x)|^q}{q\|\psi\|_q^q} \right] \|\varphi\|_p\|\psi\|_q \\
\|\varphi\psi\|_1 &\leq \|\varphi\|_p\|\psi\|_q \left[ \frac{1}{p} \frac{\int |\varphi|^p d\mu}{\|\varphi\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{\int |\psi|^q d\mu}{\|\psi\|_q^q} \right] \\
\|\varphi\psi\|_1 &\leq \|\varphi\|_p\|\psi\|_q. \tag{5.2.11}
\end{aligned}$$

■

Vamos provar a desigualdade de Minkowski.

*Demonstração.* Observe que

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) + \psi(x)|^p &\leq (|\varphi(x)| + |\psi(x)|)^p \leq (2 \max\{|\varphi(x)|, |\psi(x)|\})^p \\
&\leq 2^p \max\{|\varphi(x)|^p, |\psi(x)|^p\} \\
&\leq 2^p (|\varphi(x)|^p + |\psi(x)|^p). \tag{5.2.12}
\end{aligned}$$

Lembre-se que  $\varphi \in L^p(\mu)$  e  $\psi \in L^p(\mu)$ . Isso implica que  $|\varphi|^p d\mu < \infty$  e  $|\psi|^p d\mu < \infty$ . Por sua vez, isso implica que  $|\varphi + \psi|^p d\mu < \infty$  se e somente se  $\varphi + \psi \in L^p(\mu)$ .

Agora, vamos reescrever

$$|\varphi(x) + \psi(x)|^p = |\varphi(x) + \psi(x)| |\varphi(x) + \psi(x)|^{p-1} = (|\varphi(x)| + |\psi(x)|) |\varphi(x) + \psi(x)|^{p-1}. \tag{5.2.13}$$

Vamos verificar que  $|\varphi(x) + \psi(x)|^{p-1} \in L^q(\mu)$ , isto é,  $\int [|\varphi(x) + \psi(x)|^{p-1}]^q d\mu < \infty$ . Então,

$$\int [|\varphi(x) + \psi(x)|^{p-1}]^q d\mu = \int |\varphi(x) + \psi(x)|^p d\mu < \infty \quad \left[ \text{pois } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right]. \tag{5.2.14}$$

Logo, pela desigualdade de Hölder

$$\int |\varphi||\varphi + \psi|^{p-1} d\mu \leq \left( \int |\varphi|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int (|\varphi + \psi|^{p-1})^q d\mu \right)^{1/q}, \tag{5.2.15}$$

$$\int |\psi||\varphi + \psi|^{p-1} d\mu \leq \left( \int |\psi|^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int (|\varphi + \psi|^{p-1})^q d\mu \right)^{1/q}. \tag{5.2.16}$$

Assim,

$$\int (|\varphi| + |\psi|) |\varphi + \psi|^{p-1} d\mu \leq (\|\varphi\|_p + \|\psi\|_p) \left( \int |\varphi + \psi|^p d\mu \right)^{1/q}. \tag{5.2.17}$$

Temos que

$$\int (|\varphi| + |\psi|) |\varphi + \psi|^{p-1} d\mu \geq \int |\varphi + \psi| |\varphi + \psi|^{p-1} d\mu = \int |\varphi + \psi|^p d\mu. \quad (5.2.18)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\varphi + \psi\|_p^p &\leq (\|\varphi\|_p + \|\psi\|_p) \|\varphi + \psi\|_p^{p/q} \\ \|\varphi + \psi\|_p &\leq (\|\varphi\|_p + \|\psi\|_p) \|\varphi + \psi\|_p^{p/q} \|\varphi + \psi\|_p^{1-p} \\ \|\varphi + \psi\|_p &\leq (\|\varphi\|_p + \|\psi\|_p). \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

■

**Teorema 5.2.3.**  $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$  é um espaço de Banach para todo  $p \in [1, \infty]$ .

*Demonstração.* Temos que  $\|\cdot\|_p$  é uma norma em  $L^p(\mu)$ . Falta verificar que essa norma é completa.

Seja  $(\varphi_n)_n$  uma sequência de Cauchy. Queremos mostrar que  $(\varphi_n)_n$  é convergente. Basta encontrar alguma subsequência convergente, pois a sequência  $(\varphi_n)_n$  de Cauchy será convergente.

Consideremos uma subsequência  $\psi_k = \varphi_{n_k}$  tal que  $\|\psi_{k+1} - \psi_k\| \leq \frac{1}{2^k}$  para todo  $k \geq 1$  (observe que é uma sequência geométrica). Definimos

$$\psi(x) = |\psi_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |(\psi_{k+1} - \psi_k)(x)| \quad (5.2.20)$$

Observe que  $\sum_{k=1}^{\infty} |(\psi_{k+1} - \psi_k)(x)|$  está bem definida, pois é uma soma de termos positivos.

Assim, ela converge ou vai para  $+\infty$ .

Seja a seguinte afirmação:  $\psi \in L^p(\mu)$ .

*Demonstração.* Vamos provar a afirmação.

$$\begin{aligned} |\psi(x)|^p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( |\psi_1(x)| + \sum_{k=1}^n |(\psi_{k+1} - \psi_k)(x)| \right)^p \\ \int |\psi|^p d\mu &= \int \lim_{n \rightarrow \infty} \left( |\psi_1| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1} - \psi_k| \right)^p d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left( |\psi_1| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1} - \psi_k| \right)^p d\mu \\ \|\psi\|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \int \left( |\psi_1| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1} - \psi_k| \right)^p d\mu \right]^{1/p} \end{aligned}$$

$$\|\varphi\|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| |\psi_1| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1} - \psi_k| \right\|_p \quad (5.2.21)$$

em que tiramos o limite para fora da integral porque a sequência é monótona (usamos o teorema da convergência monótona) e  $\left\| |\psi_1| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1} - \psi_k| \right\|_p \leq \|\psi_1\|_p + \sum_{k=1}^n \|\psi_{k+1} - \psi_k\|_p$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_p &\leq \|\psi_1\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|\psi_{k+1} - \psi_k\|_p \\ &\leq \|\psi_1\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

e, assim,  $\int |\psi|^p d\mu$  é finita. Isso implica que  $\{x : \psi(x) = \infty\}$  tem medida nula. Portanto, a série  $\sum_{k=1}^{\infty} |\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)|$  converge em  $\mathbb{R}$  para  $\mu$ -quase todo  $x$ . ■

Definimos

$$\varphi(x) = \begin{cases} \psi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)) & \text{se } \psi(x) < \infty \\ 0 & \text{se } \psi(x) = \infty \end{cases} \quad (5.2.23)$$

Note que

1.  $\varphi(x)$  está definida para todo  $x$ : isso significa que se  $\psi(x) < \infty$ , a série  $\psi(x) = |\psi_1(x)| + \sum_{k=1}^{\infty} |(\psi_{k+1} - \psi_k)(x)|$  é convergente [toda série absolutamente convergente é convergente]
2.  $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \psi_1(x) + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_{n+1}(x)$  (observe que  $\sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x))$  é uma soma telescópica)

Provamos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(x)$  existe para todo  $x$  (aqui a convergência é pontual). Resta verificar que

1.  $\varphi \in L^p(\mu)$
2.  $\|\varphi_{n_m} - \varphi\|_p \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$

Então,

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \psi_1(x) + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)) \right) \quad (5.2.24)$$

Portanto,

$$\int |\varphi|^p d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \psi_1(x) + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)) \right|^p d\mu \quad (5.2.25)$$

Observe que  $\left| \psi_1 + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1} - \psi_k) \right| \leq |\psi_1| + \sum_{k=1}^n |\psi_{k+1} - \psi_k| \leq \psi$  para todo  $n$ . Logo,  
 $\left| \psi_1 + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1} - \psi_k) \right|^p \leq |\psi|^p$  para todo  $n$ . Além disso,  $\int |\psi|^p d\mu < \infty$ . Pelo teorema da convergência dominada,

$$\int |\varphi|^p d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left| \psi_1(x) + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1}(x) - \psi_k(x)) \right|^p d\mu \quad (5.2.26)$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_p^p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \psi_1 + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1} - \psi_k) \right\|_p^p \\ \|\varphi\|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \psi_1 + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1} - \psi_k) \right\|_p \end{aligned} \quad (5.2.27)$$

Pela desigualdade de Minkowski  $\left\| \psi_1 + \sum_{k=1}^n (\psi_{k+1} - \psi_k) \right\|_p \leq \|\psi_1\|_p + \sum_{k=1}^n \|\psi_{k+1} - \psi_k\| \leq \|\psi_1\|_p + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$ .  
Consequentemente,

$$\|\varphi\|_p \leq \|\psi_1\|_p + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} < \infty \quad (5.2.28)$$

E, assim,  $\varphi \in L^p(\mu)$ .

Agora vamos verificar que  $\|\varphi_{n_m} - \varphi\|_p \rightarrow 0$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Sabemos que

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \psi_1(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k)(x) \\ &= \psi_1(x) + \sum_{k=1}^{m-1} (\psi_{k+1} - \psi_k)(x) + \sum_{k=m}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k)(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \psi_m(x) + \sum_{k=m}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k)(x) \\
\varphi(x) - \psi_m(x) &= \sum_{k=m}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k)(x), \quad \forall m
\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{n_m} - \varphi\|_p &= \left\| \sum_{k=m}^{\infty} (\psi_{k+1} - \psi_k) \right\|_p \\
&\leq \sum_{k=m}^{\infty} \|\psi_{k+1} - \psi_k\| \quad [\text{usando o teorema da convergência dominada}] \\
&\leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\
&= \frac{1}{2^{m-1}}
\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

que tende a 0 quando  $m \rightarrow \infty$ . ■

Seja o espaço  $L^\infty(\mu) = \{\varphi: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ essencialmente limitadas}\}$ . Essencialmente limitadas significa que existe  $K > 0$  tal que  $\{x: |\varphi(x)| > K\}$  tem medida nula.  $K$  é dito majorante essencial de  $|\varphi|$ .

Se  $\varphi \in L^\infty(\mu)$ , definimos:

$$\|\cdot\|_\infty = \text{menor dos majorantes essenciais} \tag{5.2.31}$$

A título de curiosidade,  $\|\cdot\|_\infty$  também é chamado de supremo essencial.

**Teorema 5.2.4.**  $(L^\infty(\mu), \|\cdot\|_\infty)$  é um espaço de Banach.

Dado um espaço de medida  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  temos uma família de espaços de Banach associado a ele,  $L^p(\mu)$  com  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Exemplo 5.2.7.** Suponha que  $(X, \mathcal{B}, \mu)$  é um espaço de probabilidades, o que significa que  $\mu(X) = 1$ . Dada uma função  $\varphi \in L^p(\mu)$  com  $1 < p \leq \infty$ . Pela desigualdade de Hölder

$$\int |\varphi \cdot 1| d\mu \leq \underbrace{\|\varphi\|_p}_{< \infty} \underbrace{\|1\|_q}_{=1} < \infty \tag{5.2.32}$$

Observe que  $\|1\|_q = \left[ \int |1|^q d\mu \right]^{1/q} = \mu(X)$ .

Portanto,  $L^p(\mu) \subset L^1(\mu)$  para todo  $p$ . Aqui, basta apenas que  $\mu(X) < \infty$ .

**Exemplo 5.2.8.** Dada  $\varphi \in L^\infty(\mu)$ , temos que

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_p &= \left[ \int |\varphi|^p d\mu \right]^{1/p} \\ &\leq \left[ \int \|\varphi\|_\infty^p d\mu \right]^{1/p} \\ &= \|\varphi\|_\infty \left[ \int 1^p d\mu \right]^{1/p}\end{aligned}\tag{5.2.33}$$

Se  $\mu(X)$  é uma probabilidade, então  $\|\varphi\|_p < \infty$ . Portanto,  $L^\infty(\mu) \subset L^p(\mu)$  para todo  $p$ .

Se  $\mu$  é uma medida finita, então para  $1 \leq t < s \leq \infty$  tem-se que  $L^t(\mu) \supset L^s(\mu)$ .

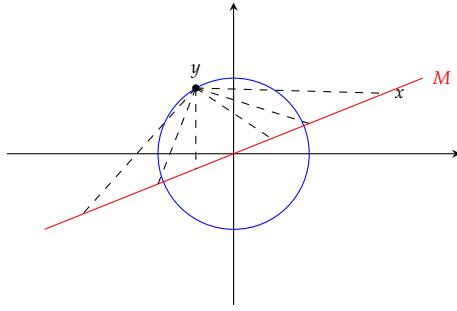
Se  $E$  é um espaço normado com dimensão finita, então os compactos de  $E$  são fechados limitados.

**Teorema 5.2.5.** Se  $E$  é um espaço normado, então a bola unitária fechada é compacta se e somente se  $E$  tem dimensão finita.

Vamos mostrar que se  $\dim E = \infty$ , então existe  $(x_n)_n$  na bola unitária fechada tal que  $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$  para todo  $m \neq n$ . Essa propriedade implica que  $(x_n)_n$  não é Cauchy e, por consequência, nenhuma subsequência é Cauchy. Assim,  $(x_n)_n$  não tem nenhuma subsequência convergente. E disso segue que a bola fechada não é compacta.

**Lema 5.2.1** (Lema de Riesz). Se  $E$  é espaço normado e  $M$  é um subespaço vetorial fechado, então para todo  $0 < \theta < 1$  existe  $y \in E$  com  $\|y\| = 1$  tal que  $\|x - y\| \geq \theta$  para todo  $x \in M$ .

FIGURA 5.2.2 – LEMA DE RIESZ



*Demonstração.* Fixe  $y_0 \in E \setminus M$ . Seja  $d = (y_0, M) := \inf\{\|x - y_0\| : x \in M\}$ .

Note que  $d > 0$  porque  $y_0 \notin M$  e  $M$  é fechado.

Tome  $x_0 \in M$  tal que  $\|x_0 - y_0\| \leq \frac{d}{\theta}$  (note que  $\frac{d}{\theta} > d$ ).

Escolhemos  $y = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$  e as condições requeridas são satisfeitas. É claro que  $\|y\| = 1$  e não pertence a  $M$ .

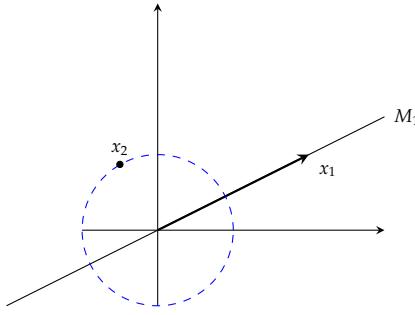
Agora, tome qualquer  $x \in M$ . Como  $M$  é um subespaço vetorial,  $(x_0 + \|y_0 - x_0\|x) \in M$ , e portanto,  $d \leq \|y_0 - (x_0 + \|y_0 - x_0\|x)\|$ . Por fim,

$$\|x - y\| = \left\| x - \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} \right\| = \frac{\|x\| \|x_0 - y_0\| - x_0 + y_0\|}{\|x_0 - y_0\|} \geq \frac{d}{(d/\theta)} = \theta \quad (5.2.34)$$

Note que  $x_0 - x\|x_0 - y_0\|$ . Logo,  $\|y_0 - (x_0 - x\|x_0 - y_0\|)\| \geq d$  é a distância entre  $y_0$  a um elemento de  $M$ . ■

Vamos à demonstração do teorema.

*Demonstração.* Vamos fixar  $\theta = \frac{1}{2}$ . Tome  $x_1 \in E$  qualquer com  $\|x_1\| = 1$ .



Seja  $M_1$  o subespaço gerado por  $x_1$ , que é igual a  $\mathbb{K}x_1$ . Além disso,  $M_1$  é um subespaço fechado porque  $\dim M < \infty$ . Pelo Lema de Riesz, existe  $x_2 \in E$  com  $\|x_2\| = 1$  tal que  $\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$ .

Seja  $M_2$  o subespaço gerado por  $\{x_1, x_2\}$  (plano). Pelo Lema de Riesz, existe  $x_3 \in E$  com  $\|x_3\| = 1$  tal que  $\|x_1 - x_3\| \geq \frac{1}{2}$  e  $\|x_2 - x_3\| \geq \frac{1}{2}$ . ■

Dizemos que um espaço normado  $E$  é separável se ele admite algum subconjunto enumerável denso.

Em topologia um subconjunto de um espaço topológico é dito denso se para cada ponto  $x$  desse espaço for possível encontrar um ponto  $d$  do subconjunto denso tão próximo quanto se quiser de  $x$ .

Seja  $X$  um espaço topológico; dizemos que  $D \subseteq X$  é denso no espaço  $X$  se para cada aberto  $V \subseteq X$  a intersecção  $V \cap D$  for não-vazia. Verifica-se, facilmente, que as seguintes afirmações são equivalentes:

1.  $D$  é denso
2.  $\overline{D} = X$
3. Para cada elemento  $U$  de uma base  $\mathcal{B}$  de  $X$ , se verifica  $U \cap D \neq \emptyset$
4. Para cada  $x \in X$ , cada base local  $\mathcal{B}(x)$  e cada  $U \in \mathcal{B}(x)$ , se verifica  $U \cap D \neq \emptyset$

A cada espaço topológico  $X$  pode ser associado um cardinal  $d(X)$ , chamado de densidade do espaço  $X$  dado por

$$d(X) = \min\{|D| : D \text{ é denso em } X\} \quad (5.2.35)$$

Dizemos que um espaço  $X$  é separável se possuir um denso enumerável, i.e.  $d(X) \leq \omega$ . O conjunto dos racionais  $\mathbb{Q}$  é denso em  $\mathbb{R}$ .

**Exemplo 5.2.9.** Considere o espaço das aplicações contínuas  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  e considere a norma  $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in [0, 1]\}$ . Vamos verificar que  $E$  é separável.

Vamos usar o teorema da aproximação de Weierstrass. Para toda  $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e todo  $\varepsilon > 0$  existe uma função polinomial  $P : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\sup\{|\varphi(x) - P(x)| : x \in [0, 1]\} \leq \varepsilon$ . Em outras palavras, o conjunto das funções polinomiais é denso em  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ , mas não é enumerável. Porém, o conjunto das funções polinomiais com coeficientes racionais é denso no conjunto das funções polinomiais. Logo, o conjunto das funções polinomiais com coeficientes racionais é um subconjunto enumerável denso de  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ .

**Teorema 5.2.6.** Se  $M$  é um espaço métrico compacto, então  $E = C^0(M, \mathbb{K})$  é um espaço de Banach separável.

**Exemplo 5.2.10.** Seja  $\ell^1 = \left\{ (x_n)_n : x_n \in \mathbb{K} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$  e seja a norma  $\|(x_n)_n\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ .

Vamos verificar que  $\ell^1$  é separável.

Seja  $X$  o conjunto das sequências  $(x_n)_n$  tais que  $x_n \in \mathbb{Q}$  para todo  $n \geq 1$  e existe  $k \geq 1$  tal que  $x_n = 0$  para todo  $n \geq k$ . Dito de outra forma,

$$\begin{aligned} X = & \{(x_1, 0, \dots, 0, \dots) : x_1 \in \mathbb{Q}\} \cup \\ & \{(x_1, x_2, 0, \dots, 0, \dots) : x_1, x_2 \in \mathbb{Q}\} \cup \\ & \dots \end{aligned} \quad (5.2.36)$$

$X$  é a união enumerável de conjuntos enumeráveis. Logo, é enumerável.

Para ver que  $X$  é denso em  $\ell^1$ , dado  $(y_n)_n \in \ell^1$  e  $\varepsilon > 0$ , fixe  $k$  tal que  $\sum_{n=k+1}^{\infty} |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Escolhemos  $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{Q}$  tais que  $|x_i - y_i| < \frac{\varepsilon}{2k}$ . De modo que

$$\begin{aligned} \|(y_1, \dots, y_k, y_{k+1}, \dots, y_n) - (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0, \dots)\|_1 &= \sum_{i=1}^k |y_i - x_i| + \sum_{i=k+1}^{\infty} |y_i| \\ &< k \frac{\varepsilon}{2k} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

**Exemplo 5.2.11.** Seja  $\ell^\infty = \left\{ (x_n)_n : x_n \in \mathbb{K} \text{ e } \sup_n |x_n| < \infty \right\}$ . O espaço  $\ell^\infty$  não é separável.

Seja  $X$  um subconjunto enumerável tal que  $X = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots\}$  em que  $\xi_k = (x_{k,n})_n$ . Para mostrar que  $X$  não é separável, basta mostrar que ele não é denso. Vamos encontrar um elemento  $\eta \in \ell^\infty$  e

$c > 0$  tal que  $\|\eta - \xi_k\|_\infty \geq c$  para todo  $k$ . A norma  $\|(x_n)_n\|_\infty = \sup_n |x_n|$ . Logo,  $X$  não é denso em  $\ell^\infty$ .

Assim,

$$\xi_1 = (x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{1n}, \dots) \quad (5.2.38)$$

$$\xi_2 = (x_{21}, x_{22}, x_{23}, \dots, x_{2n}, \dots) \quad (5.2.39)$$

$$\xi_3 = (x_{31}, x_{32}, x_{33}, \dots, x_{3n}, \dots) \quad (5.2.40)$$

Desse modo, podemos fazer

$$\eta = (x_{11} + c, x_{12} + c, x_{13} + c, \dots, x_{1n} + c, \dots) \quad (5.2.41)$$

Tome  $\eta_k = \begin{cases} x_{k,k} + 1 & \text{se } |x_{k,k}| < c \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ . Note que  $\|(n_k)_k\| = \sup_k |\eta_k| \leq 2$ . Logo,  $(n_k)_k \in \ell^\infty$ .

Desse modo,

$$\|\eta - \xi_k\|_\infty = \sup_n |\eta_k - \xi_{k,n}| \geq |\eta_k - \xi_{k,k}| = \begin{cases} 1 & \text{se } |x_{k,k}| < c \\ |x_{k,k}| & \text{se } |x_{k,k}| > c \end{cases} \quad (5.2.42)$$

Observação:  $\ell^1$  é o conjunto das sequências que convergem, enquanto  $\ell^\infty$  é o conjunto das sequências limitas. Logo,  $\ell^1 \subsetneq c_0 \subsetneq \ell^\infty$ .

**Proposição 5.2.3.** Se  $E$  é um espaço normado separável então todo subespaço de  $E$  é separável.

**Teorema 5.2.7.** O conjunto das funções contínuas  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  é denso em  $L^p([0, 1], m)$ .

**Exemplo 5.2.12.** Seja o espaço  $L^p([0, 1], m)$  em que  $m$  é a medida de Lebesgue. Vamos verificar que espaço  $L^p([0, 1], m)$  é separável para todo  $1 \leq p < \infty$ .

Vimos que o espaço das funções contínuas  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$  é separável. O conjunto das funções polinomiais com coeficientes racionais é um subconjunto denso do espaço  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ . E, também, o conjunto das funções contínuas é denso em  $L^p([0, 1], m)$ . Existe  $X$  enumerável denso em  $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ . Para toda  $\varphi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  existe  $\psi \in X$  tal que  $\sup_x |\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$  para todo  $\varepsilon > 0$ . E isso implica que  $\|\varphi - \psi\|_p < \varepsilon$ . Ao mesmo tempo, para todo  $\rho \in L^p([0, 1], m)$  existe  $\varphi \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$  tal que  $\|\varphi - \rho\|_p < \varepsilon$ . Assim, para todo  $\rho \in L^p([0, 1], m)$  existe  $\psi \in X$  tal que  $\|\psi - \rho\|_p < 2\varepsilon$ . Logo,  $X$  é denso em  $L^p([0, 1], m)$ .

## 5.3 Operadores Lineares Contínuos

Sejam  $E$  e  $F$  espaços normados. E consideremos a aplicação linear (operador linear)  $L: E \rightarrow F$ , tal que

1.  $L(x+y) = L(x) + L(y)$  para todo  $x, y \in E$  e todo  $c \in \mathbb{K}$
2.  $L(cx) = cL(x)$  para todo  $x \in E$  e todo  $c \in \mathbb{K}$

**Proposição 5.3.1.** Dado um operador linear  $L: E \rightarrow F$ , são equivalentes:

1.  $L$  é contínuo
2. existe  $C > 0$  tal que  $\|L(x) - L(y)\| < C\|x - y\|$  para todo  $x, y \in E$
3.  $\sup_x \left\{ \frac{\|L(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0 \right\} < \infty$

*Demonstração.* Vamos provar cada item. O item (2) implica o item (1). O item (2) significa que a função é Lipschitziana. E toda aplicação Lipschitziana é contínua.

O item (2) implica o item (3). Temos que  $\frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|L(x) - L(0)\|}{\|x - 0\|} \leq C$ .

O item (3) implica o item (2). Seja  $C = \sup_z \left\{ \frac{\|L(z)\|}{\|z\|} : z \neq 0 \right\}$ . Então,  $\frac{\|L(x) - L(y)\|}{\|x - y\|} = \frac{\|L(x - y)\|}{\|x - y\|} \leq C$  para todo  $x \neq y$ .

O item (1) implica o item (3). Por hipótese  $L$  é contínua e isso implica que  $L$  é contínua em 0. Então, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $\|y\| \leq \delta$  implica que  $\|L(y)\| \leq \varepsilon$ . Agora, dado qualquer  $x \neq 0$  podemos fazer

$$\frac{\|L(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|(L(\delta x))\|}{\|\delta x\|} = \frac{\left\| L\left(\frac{\delta x}{\|x\|}\right) \right\|}{\|\delta\|} \leq \frac{\delta}{\varepsilon} \quad (5.3.1)$$

em que  $y = \frac{\delta x}{\|x\|}$  e  $\|y\| = \delta$  e, portanto,  $\|L(y)\| \leq \varepsilon$  para todo  $x \neq 0$ . ■

**Exemplo 5.3.1.** Seja a aplicação  $L: \ell^1 \rightarrow \ell^\infty$  definida da seguinte forma:  $(x_n)_n \mapsto (x_n)_n$ . Existe  $C > 0$  tal que  $\|L(x_n)_n\|_\infty \leq C \|(x_n)_n\|_1$  para todo  $(x_n)_n \in \ell^1$ ? Dito de outra forma, existe  $C > 0$  tal que  $\sup_n |x_n| \leq C \sum_{n=1}^\infty |x_n|$  para todo  $(x_n)_n \in \ell^1$ ? Sim, basta fazer  $C = 1$ .

**Exemplo 5.3.2.** Considere o conjunto  $E$  das funções polinomiais  $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in [0, 1]\}$ . Considere  $L: E \rightarrow E$  em que  $L$  é a aplicação derivação. Sabemos que  $L$  é linear. Queremos saber se  $L$  é contínua. Isto é, existe  $C > 0$  tal que  $\sup_{x \in [0, 1]} |a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1}| \leq C \sup_{x \in [0, 1]} |a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n|$  para todo  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in E$ ?

Seja  $\varphi_n(x) = x^n$  e  $L(\varphi_n(x)) = nx^{n-1}$ . Temos que  $\|\varphi_n\| = 1$  e  $\|L(\varphi_n)\| = n$ . Assim,  $\frac{\|L(\varphi_n)\|}{\|\varphi_n\|} = n$  não é limitada. Logo,  $L$  não é contínua.

Dados os espaços de Banach  $E$  e  $F$  e  $L: E \rightarrow F$  linear, seja  $\mathcal{L}(E, F)$  o conjunto das aplicações lineares e contínuas. Podemos definir

$$\begin{aligned}\|L\|_{\text{op}} &= \sup \left\{ \frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E} : x \neq 0 \right\} \\ &= \sup \{ \|L(x)\| : \|x\| \leq 1 \}\end{aligned}\tag{5.3.2}$$

Então,  $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$  é um espaço normado de Banach.

Um caso particular, importante, é quando  $F = \mathbb{K}$  (todo corpo é um espaço vetorial sob si mesmo de dimensão 1). Assim, temos o dual de  $E$ , que é o conjunto das aplicações lineares contínuas do espaço vetorial no corpo  $\mathbb{K}$ :

$$E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})\tag{5.3.3}$$

**Teorema 5.3.1** (Princípio da Limitação Uniforme (teorema de Banach-Steinhaus)). *Seja  $E$  um espaço de Banach,  $F$  um espaço normado e  $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(E, F)$ . Para qualquer  $x \in E$ , se  $\sup \{\|L(x)\| : L \in \mathcal{F}\} < \infty$ , então  $\sup \{\|L\| : L \in \mathcal{F}\} < \infty$ .*

Isto é, se para qualquer  $x$  do domínio a norma de todas as imagens é finita (limitação pontual), então a norma do operador é limitada (limitação uniforme).

**Teorema 5.3.2** (Teorema de Baire). *Seja  $E$  um espaço métrico completo e seja  $(F_n)_n$  uma sequência de fechados tal que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = E$ . Então, existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\text{int}(F_m) \neq \emptyset$ .*

Vamos demonstrar o teorema 5.3.1.

*Demonstração.* Para cada  $n \in \mathbb{N}$  e  $L \in \mathcal{F}$  considere o conjunto  $A(n, L) = \{x \in E : \|L(x)\| \leq n\}$ . A aplicação  $x \mapsto L(x) \mapsto \|L(x)\|$  é contínua (o operador é contínuo e a norma também). Portanto,  $A(n, L)$  é fechado em  $E$ . Desse modo,  $A(n) = \bigcap_{L \in \mathcal{F}} A(n, L)$  é fechado em  $E$ . A hipótese de limitação pontual significa que todo  $x \in E$  pertence a  $A(n)$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ , isto é,  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A(n) = E$ . Pelo teorema de Baire existe algum  $m \in \mathbb{N}$ , existe algum  $a \in E$  e existe algum  $r > 0$  tal que  $B_E(a, r) \subset A(m)$ .

Considere qualquer  $y \in E$  com  $\|y\| = 1$ . Seja  $x = a + ry \in B_E(a, r) \subset A(m)$ . Portanto,  $\|L(x)\| \leq m$  para todo  $L \in \mathcal{F}$  se e somente se  $\|L(a) + rL(y)\| \leq m$  para todo  $L \in \mathcal{F}$ . Isso implica que

$$\begin{aligned}r\|L(y)\| - \|L(a)\| &\leq m \\ \|L(y)\| &\leq \frac{1}{r}(m + \|L(a)\|) \\ &\leq \frac{2m}{r}\end{aligned}\tag{5.3.4}$$

para todo  $L \in \mathcal{F}$  e para todo  $y \in E$  com  $\|y\| = 1$ .

Observe que  $a \in A(m)$  e isso implica que  $\|L(a)\| \leq m$ .

$$\text{Portanto, } \sup \{\|L\| : L \in \mathcal{F}\} \leq \frac{2m}{r} < \infty.$$

■

**Corolário 5.3.2.1.** Seja  $E$  espaço de Banach,  $F$  espaço normado e  $(L_n)_n$  uma sequência em  $\mathcal{L}(E, F)$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x)$  existe para  $x \in E$ . Então, a aplicação  $L: E \rightarrow F$  definida por  $L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x)$  é um operador linear contínuo.

Isto é, qualquer limite pontual de operadores lineares contínuos é operador linear contínuo.

*Demonstração.* Por hipótese que a sequência  $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(x)$  converge em todo o ponto, isso significa que  $(L_n(x))_n$  é limitada para todo  $x \in E$ . Pelo teorema de Banach-Steinhaus,  $(\|L_n\|)_n$  é limitada. Portanto, existe  $C > 0$  tal que  $\|L_n\| \leq C$  para todo  $n$ . Logo,  $\|L_n(x)\| \leq \|L_n\| \|x\| \leq C \|x\|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e todo  $x \in E$ . Passando ao limite, obtemos  $\|L(x)\| \leq C \|x\|$  para todo  $x \in E$ . Assim,  $L$  é contínuo.  $C$  é uma cota superior para  $\frac{\|L(x)\|_F}{\|x\|_E}$ . ■

**Exemplo 5.3.3.** Seja  $c_{00} = \{(x_k)_k : x_k \in \mathbb{K}\}$  tal que existe  $p \geq 1$  de modo que  $x_k = 0$  para qualquer  $k \geq p$ . É o conjunto das sequências que só tem um número finito de termos distintos de zero. Observe que  $c_{00} \subset c_0$ .

Em  $c_{00}$  podemos definir a seguinte norma:  $\|(x_n)_n\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|$ .

Vamos considerar a seguinte família de aplicações lineares:  $L_n: c_{00} \rightarrow \mathbb{K}$  que associa  $(x_k)_k \mapsto nx_n$ . Fixado qualquer  $(x_k)_k \in c_{00}$ , temos que  $L_n((x_k)_k) = nx_n = 0$  para todo  $n \geq p$ . Portanto,  $\{L_n((x_k)_k) : n \in \mathbb{N}\}$  é limitada. Portanto, pelo teorema de Banach-Steinhaus,  $\{\|L_n\| : n \in \mathbb{N}\}$  é limitado.

Ao mesmo tempo,

$$\begin{aligned} \|L_n\| &= \sup \{\|L((x_k)_k)\| : \|(x_k)_k\| \leq 1\} \\ &= \sup \left\{ |nx_n| : \sup_k \|x_k\| \leq 1 \right\} \\ &= n \end{aligned} \tag{5.3.5}$$

Então,  $c_{00}$  não é um espaço de Banach (não é um espaço completo) e, logo,  $\|L_n\|$  não é limitado. Dito de outro modo,  $c_{00}$  não é fechado em  $c_0$  e, portanto, não é completo e não podemos usar o princípio da limitação uniforme.

**Teorema 5.3.3** (Teorema da Aplicação Aberta). Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach e  $L: E \rightarrow F$  uma aplicação linear contínua sobrejetiva. Então,  $L$  é uma aplicação aberta, isto é,  $A$  aberto de  $E$  implica que  $L(A)$  é uma aberto de  $F$ .

**Lema 5.3.1.** Se  $E$  e  $F$  são espaços de Banach e  $L: E \rightarrow F$  é um operador linear contínuo e  $R, r > 0$  são tais que  $\overline{L(B_E(0, R))} \supset B_F(0, r)$ , então  $L(B_E(0, R)) \supset B_F\left(0, \frac{r}{2}\right)$ .

Vamos provar o teorema 5.3.3.

*Demonstração.* Temos que  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B_E(0, n)}$ . Portanto, sendo  $L$  sobrejetiva, temos que  $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} L(B_E(0, n))$  ou  $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{L(B_E(0, n))}$ . Pelo teorema de Baire, existe algum  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a \in F$  e  $r > 0$  tais que  $\overline{L(B_E(0, m))} \supset B_F(a, r)$

1. o conjunto  $\overline{L(B_E(0, m))}$  é tal que se  $y \in \overline{L(B_E(0, m))}$  então  $-y \in \overline{L(B_E(0, m))}$
2. o conjunto  $\overline{L(B_E(0, m))}$  é convexo, isto é, se  $y_1, y_2 \in \overline{L(B_E(0, m))}$  e  $t_1 + t_2 = 1$ , então  $t_1 y_1 + t_2 y_2 \in \overline{L(B_E(0, m))}$ . Esse conjunto é convexo porque a bola é convexa e a imagem de um convexo por uma aplicação linear é convexa. E o fecho de um conjunto convexo é convexo.

Assim, a propriedade (1) e o fato de que  $B_F(a, r) \subset \overline{L(B_E(0, m))}$  implica que  $B_F(-a, r) \subset L(B_E(0, m))$ . Esse fato e a propriedade (2) implicam que  $B_F(0, r) \subset \overline{L(B_E(0, m))}$ .

Portanto, concluímos que  $\overline{L(B_E(0, m))} \supset B_F(0, r)$ . Pelo lema,  $L(B_E(0, m)) \supset B_F\left(0, \frac{r}{2}\right)$ .

Seja  $A$  aberto de  $E$ . Dado qualquer  $y \in L(A)$ , tome  $b \in A$  tal que  $L(b) = y$ . Como  $A$  é aberto, existe  $\delta > 0$  tal que  $B_E(b, \delta) \subset A$ . Sendo  $B_E(b, \delta) = \{b + x : x \in B_E(0, \delta)\} \subset L(A)$ , temos que  $L(B_E(b, \delta)) = L(b) + L(B_E(0, \delta))$ . Como a aplicação linear é linear, temos que  $L(B_E(0, cm)) \supset B_F\left(0, \frac{cr}{2}\right)$  para todo  $c > 0$  e  $L(B_E(0, \delta)) \supset B_F\left(0, \frac{\delta r}{2m}\right)$ . ■

---

6

---

---

CÁLCULO

---

Todo mundo sabe que Newton e Leibniz são os fundadores do Cálculo. Alguns podem pensar que basta saber apenas este fato. Mas vale a pena, de fato, entrar em mais detalhes e estudar a história do desenvolvimento de Cálculo, em particular, até a época de Newton e Leibniz. Em nossos cursos de Cálculo, geralmente começamos com a diferenciação e depois venha mais tarde para a integração. Isso é inteiramente justificado, uma vez que a diferenciação é mais simples e mais fácil do que integração. Por outro lado, o desenvolvimento histórico começa com integração; computar áreas, volumes ou comprimentos de arcos eram os primeiros problemas ocorridos na história do cálculo. Tais problemas foram discutidos por matemáticos gregos antigos, especialmente por Arquimedes, cujas realizações notáveis e penetrantes marcam o auge de toda a matemática antiga e também o início da teoria da integração. O método aplicado por Arquimedes para suas provas foi o chamado método da exaustão, que é, no caso de áreas planas, o método de polígonos inscritos e circunscritos com um número crescente de arestas.

É bem sabido que Arquimedes foi o primeiro a determinar a área e o comprimento do círculo, que é, dar valores aproximados adequados de  $\pi$ , e, além disso, determinar o volume e a área da superfície da esfera e dos cilindros e cones. Mas ele foi muito além disso; ele encontrou as áreas de elipses, de segmentos parabólicos<sup>1</sup>, e também de setores de uma espiral, os volumes dos segmentos dos sólidos de revolução de segundo grau, os centróides dos segmentos de uma parábola, de uma cone, de um segmento da esfera, etc. Essas foram conquistas incríveis, de fato. Arquimedes provou seus resultados da maneira clássica, pelo método da exaustão. Às vezes, o tipo de aproximação é exatamente o mesmo que usariamo. Por exemplo, a fim de obter o volume de um sólido de revolução de segundo grau, Arquimedes aproxima o volume por uma soma de placas cilíndricas. Mas a avaliação direta do limite de tais somas era complicada. Portanto, podemos perguntar: qual é o método usado por Arquimedes para encontrar seus resultados? Há uma indicação de seu método no início de seu livro sobre a quadratura da parábola. Mas uma explicação completa de seu procedimento foi dada por ele em uma obra redescoberta até 1906. É seu *Method Concerning Mechanical Theorems, dedicated to Eratosthenes*, conhecido como Método de Arquimedes. Este manuscrito foi encontrado em Istambul como um chamado palimpsesto. Ou seja, no século 10 D.C., o manuscrito do Método foi escrito neste pergaminho; mais tarde, no século XIII, como ninguém mais se interessava por ele ou sequer conseguia entender, o método foi lavado e um texto religioso da igreja ortodoxa, o chamado *eucologion*, foi escrito no pergaminho. Felizmente, a maior parte do texto arquimediano pôde ser restaurada.

É de se esperar que as maravilhosas realizações de Arquimedes tenham se tornado um grande estímulo para o desenvolvimento da matemática grega, semelhante à grande influência de Newton e Leibniz na produção matemática das gerações seguintes. Mas é surpreendente que Arquimedes não tenha encontrado quase nenhum sucessor para continuar seu trabalho. A este respeito, apenas um dos matemáticos subsequentes deve ser mencionado, a saber, Dionysodorus, que encontrou o volume do toro. Claro, é preciso lembrar que na época de Arquimedes vivia outro notável matemático grego, Apolônio, cerca de 25 anos mais jovem que Arquimedes. Apolônio, de forma magistral, completou a teoria grega das seções cônicas. É muito estranho que logo depois de Arquimedes e Apolônio a matemática grega declinou e que o desenvolvimento posterior tomou

<sup>1</sup> Sejam A e B os pontos da interseção de uma reta com uma parábola. A região delimitada pelo segmento de reta AB e pela porção da parábola que vai de A até B é chamada Segmento Parabólico.

essencialmente uma direção diferente. Sob a influência das necessidades da astronomia, um novo ramo da matemática (cujas raízes, no entanto, remontam também a Arquimedes), a trigonometria, foi estabelecido e, além disso, muito mais tarde, a teoria dos números foi desenvolvida pelo trabalho de Diofanto. Contribuições originais na direção do trabalho de Arquimedes foram finalmente feitas por um dos mais recentes matemáticos gregos, Pappus (final do século III D.C.), que afirmou os importantes teoremas gerais nomeados em sua homenagem, em particular, o teorema de que o volume de um corpo de revolução é igual à área da figura do plano giratório vezes o comprimento do caminho do centróide dessa área.

Quando tribos teutônicas, ainda bárbaras na época, invadiram o Império Romano e o conquistaram, o interesse pela matemática quase desapareceu ali; a matemática retrocedeu para o Oriente onde pelo menos manuscritos valiosos foram preservados, para a Pérsia e depois para os países árabes, onde – com base na tradição grega, a matemática floresceu no período de cerca de 800-1200 D.C. Um desses matemáticos, o mesopotâmico Ibn Al Haitham (cerca de 1000 D.C.), foi capaz de calcular o volume de um sólido que é gerado pela rotação de um segmento de uma parábola em torno de uma linha perpendicular ao seu eixo.

Sob a influência do Oriente, o interesse pela matemática foi lentamente despertado na Europa, em particular nos séculos XII e XIII. Já no século XVI, grandes descobertas na álgebra foram feitas por matemáticos italianos, nomeadamente a solução das equações algébricas de terceiro e quarto graus. Simultaneamente, as obras de Arquimedes foram estudadas e novamente compreendidas. Então, por volta do início do século 17, o desenvolvimento das ideias de Arquimedes começa. Este foi o mesmo grande período em que a ciência moderna foi estabelecida pela primeira vez por Galileu. O engenheiro flamengo Simon Stevin (já em 1586) e o matemático italiano Luca Valerio (1604) foram os primeiros que, pela passagem direta ao limite, tenderam a evitar a dupla reductio ad absurdum do método da exaustão. Valerio mostrou diretamente que as áreas sob certas curvas podem ser aproximadas por somas de retângulos circunscritos e inscritos, cuja diferença pode ser arbitrariamente pequena.

Depois, em particular, devemos mencionar o grande astrônomo alemão Johannes Kepler que, em 1615, publicou um livro, *Nova stereometria doliorum vinariorum*, sobre a determinação dos volumes dos tonéis de vinho. Um pouco antes, havia ocorrido um ano de fartura e havia necessidade de barris para armazenar o grande suprimento de vinho; além disso, Kepler ficou intrigado com as regras que os negociantes aplicavam para estimar o conteúdo aproximado de um barril. Por isso, ele discutiu de forma popular os volumes de vários barris e, em particular, perguntou qual barril tem a forma mais econômica. Ele descobriu que o barril austríaco era o mais econômico. Kepler usou os resultados e métodos de Arquimedes, mas também discutiu alguns casos novos. Por causa de seu propósito popular, ele substituiu as provas rigorosas de Arquimedes por um raciocínio infinitesimal intuitivo, desta forma enfatizando os pontos essenciais.

Outro matemático da época teve grande influência no progresso posterior; este foi o italiano Bonaventura Cavalieri que publicou em 1635 um importante livro sobre os chamados indivisíveis, intitulado *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Indivisíveis significam elementos de uma determinada dimensão que, por seu movimento, geram figuras da dimensão imediatamente superior. Assim, um ponto móvel gera uma linha, uma linha móvel (paralela a

uma linha fixa) gera uma figura plana, uma figura plana móvel (paralela a um plano fixo) gera um sólido. Bem conhecido é o princípio de Cavalieri: dois sólidos (situados entre dois planos paralelos) têm o mesmo volume se eles cruzam cada plano paralelo intermediário em duas áreas iguais. As opiniões de Cavalieri, influenciadas por especulações do final da Idade Média, têm um pouco do espírito do Método de Arquimedes, que, entretanto, não era conhecido naquela época.

Em relação a Cavalieri, devemos mencionar também o suíço Paul Guldin que, além de criticar Cavalieri, redescobriu os teoremas de Pappus, o matemático flamengo Gregorius a St. Vincentio que foi o primeiro a observar (1647) que a área entre uma hipérbole e uma assíntota se comporta como um logaritmo, e também o matemático e físico italiano Evangelista Torricelli e o matemático francês Gil Persone de Roberval. As importantes conquistas desses dois últimos homens serão discutidas a seguir. Por volta dessa época, outro evento marcante ocorreu na matemática, a invenção da Geometria Analítica por Descartes (1637) e, simultaneamente e independentemente, por Fermat; essa invenção, é claro, teve grande influência no desenvolvimento do cálculo. Tanto Descartes como, em particular, Fermat também deram valiosas contribuições diretas ao Cálculo.

René Descartes, em sua Geometria, deu um método para encontrar as tangentes, ou melhor, os normais, para as curvas algébricas. Ele desenha um círculo com centro no eixo  $x$ , que corta a curva dada em dois pontos. Se esses dois pontos coincidirem, ele obtém o normal. Portanto, a questão é reduzida a determinar raízes duplas de uma equação algébrica. Um pouco mais tarde, em uma carta, Descartes observou que, em vez de círculos, linhas retas que se cruzam também poderiam ser usadas para o mesmo propósito.

As conquistas de Fermat no cálculo foram ainda mais importantes. Na verdade, ele foi o maior matemático da primeira parte do século 17, não só em geral, mas particularmente no domínio do cálculo. Pierre Fermat era jurista, conselheiro do parlamento de Toulouse, no sul da França. Esta posição lhe deu tempo suficiente para atividades matemáticas intensivas. Seu notável trabalho na teoria dos números é bem conhecido. Agora, qual era o seu método de encontrar tangentes? Seu procedimento foi aplicado pela primeira vez por ele ao caso particular de determinação de máximos e mínimos. Ele descobriu esse método já em 1629, comunicou-o a Descartes em 1638 e publicou-o em 1642. Para encontrar o máximo ou mínimo de uma expressão, substitui-se o  $A$  desconhecido por  $A + E^2$ , e ambas as expressões obtidas desta maneira são considerados aproximadamente iguais. Deve-se cancelar em ambos os lados tudo o que é possível cancelar. Desta forma, apenas os termos contendo  $E$  são deixados. Agora divida por  $E$  e elimine todos os termos que ainda contêm  $E$ . Resta uma equação que fornece o valor de  $A$  que resulta no máximo ou mínimo desejado. Isso significa que, se escrevermos  $F(A)$  para a expressão dada, temos que determinar  $A$  a partir da equação

$$\left[ \frac{F(A + E) - F(A)}{E} \right]_{E=0} = 0. \quad (6.0.1)$$

Este é o nosso método usual. Claro, a condição é apenas necessária, mas não suficiente para o extremo, e a declaração de Fermat produz o resultado apenas para polinômios.

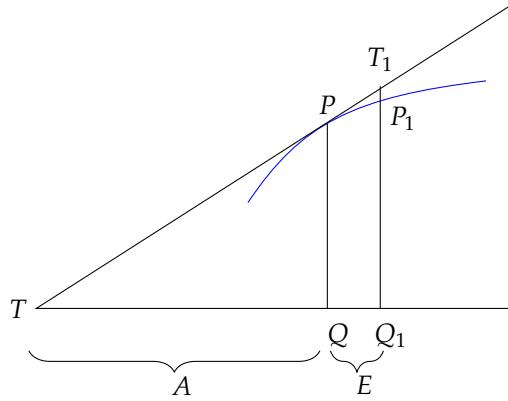
Fermat deu ao mesmo tempo um método geral para encontrar a tangente, na forma de

---

<sup>2</sup> Fermat sempre usou  $A$  para a variável e  $E$  para o incremento.

determinar a subtangente. Seja  $PT$  (com  $T$  situado no eixo  $x$ ) a linha tangente de uma dada curva  $\mathfrak{G}$  no ponto  $P$ . Seja  $P_1$  um ponto de  $\mathfrak{G}$  na vizinhança de  $P$ , seja  $Q$  e  $Q_1$  as projeções de  $P$  e  $P_1$  no eixo  $x$ , respectivamente, e seja  $T_1$  o ponto na linha tangente cuja projeção no eixo  $x$  é  $Q_1$ . Para encontrar o subtangente  $A (= TQ)$ , cujo incremento  $QQ_1$  é novamente designado por  $E$ , Fermat usa a similaridade dos triângulos  $TQP$  e  $TQ_1T_1$  e substitui  $T_1$  aproximadamente por  $P_1$ . Então ele obtém aproximadamente:  $\frac{A}{QP} = \frac{E}{(Q_1P_1 - QP)}$ , isto é, em nossa notação usual se escrevermos a equação da curva na forma  $y = F(x)$ ,

FIGURA 6.0.1 – MÉTODO DE FERMAT



$$\frac{A}{F(x)} = \frac{E}{F(x + E) - F(x)} \quad (6.0.2)$$

Portanto,

$$A = \frac{F(x) \cdot E}{F(x + E) - F(x)} \quad (6.0.3)$$

Agora, novamente, divide-se o denominador por  $E$  e, em seguida, define-se  $E = 0$ .

Deve ser mencionado aqui que, nessa época, um método inteiramente diferente de construção de tangentes de curvas, usando o paralelogramo, foi inventado também por Roberval e Torricelli, independentemente um do outro; ambos o publicaram em 1644. Por outro lado, um pouco mais tarde (antes de 1659), dois holandeses Johannes Hudde, por muitos anos prefeito de Amsterdã, e René François de Sluse avançaram ao longo da estrada aberta por Descartes e Fermat, dando regras formais bastante explícitas para encontrar extremos e subtangentes de curvas algébricas.

Mas voltemos a Fermat. Ele teve grande sucesso também na teoria da integração. Ele foi o primeiro que, por volta de 1636 ou antes, encontrou e provou a fórmula de integração de potência para expoentes positivos  $n$ , ou seja, uma declaração geométrica equivalente à fórmula que agora escrevemos como

$$\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1} \quad (6.0.4)$$

Roberval também, por sugestão de Fermat, então encontrou e provou o mesmo teorema. Posteriormente, Cavalieri o descobriu independentemente e foi o primeiro a publicá-lo (1639, 1647); mas ele o provou explicitamente apenas para os primeiros casos, incluindo  $n = 4$ , enquanto, como ele afirmou, a prova geral que ele publicou foi comunicada a ele por um matemático francês Beaugrand, que muito provavelmente a obteve de Fermat. Naquela época, Fermat, e também Torricelli, já havia generalizado essa fórmula de potência para expoentes racionais  $n (\neq -1)$ . Fermat determinou áreas sob curvas que chamou de “parábolas gerais” e “hipérboles gerais”, isto é, curvas

$$y = cx^n \quad (6.0.5)$$

que, com a nossa notação atual, leva a

$$c \int_0^a x^{n/m} dx, \quad m > 1 \quad (6.0.6)$$

É notável que Fermat neste trabalho não use subdivisões em partes iguais, mas subdivisões de acordo com uma progressão geométrica. Outras áreas foram reduzidas por ele a áreas sob tais parábolas e hipérboles gerais.

Fermat fez um trabalho interessante também na retificação de curvas, em um livro de memórias publicado em 1660, onde aproximou o arco por segmentos de tangentes, usando assim uma figura em forma de serra. Naquela época, vários matemáticos obtiveram retificações de curvas que hoje são consideradas clássicas. Em 1645, Torricelli retificou a espiral logarítmica. A parábola semicúbica foi retificada de maneira independente pelo inglês William Neil (1657), pelo holandês Hendrik van Heuraet e por Fermat. A retificação do ciclóide foi realizada pela primeira vez pelo matemático e grande arquiteto inglês Christopher Wren (1658), e então por Fermat e Roberval, após terem ouvido falar de seu resultado. Vale ressaltar que Fermat, Neil, van Heuraet, e também Wallis e Huygens, reduziram as retificações de curvas à determinação de áreas de outras curvas.

Revendo as realizações de Fermat, vemos que ele estava ciente da relação entre vários problemas de cálculo diferencial e, da mesma forma, para vários problemas sobre integrais definidas. Mas ele não havia observado a relação geral entre diferenciação e integração.

Outro famoso matemático francês da época foi Blaise Pascal (um amigo mais jovem de Fermat e Roberval), que pode ser considerado um mestre da integração. Roberval foi o primeiro a integrar certas funções trigonométricas. Pascal foi capaz de integrar mais funções trigonométricas, bem como algumas funções algébricas. Como um meio importante para alguns de seus resultados, Pascal usou relações entre integrais obtidas pela troca da ordem de integração em integrais duplas. Claro, ele fez isso de forma geométrica. Ou seja, certos volumes foram encontrados por meio de interseções paralelas a um plano e também por interseções paralelas a outro plano. Como o volume

é sempre o mesmo, Pascal obteve assim uma relação entre duas integrais diferentes, o que pode ser considerado uma espécie de integração por partes.

Quase ao mesmo tempo, contribuições importantes foram feitas pelo matemático inglês John Wallis, cujo livro *Arithmetica Infinitorum* de 1656 foi escrito em contraste com o trabalho geométrico da maioria de seus predecessores. Ele enfatizou a noção de limite. Por outro lado, era muito ousado nas generalizações e interpolações, mas seu forte poder de intuição o mantinha no caminho certo. Por exemplo, ele declarou a fórmula geral de integração para qualquer expoente real  $n$  ( $\neq -1$ ).

A noção de limite foi cuidadosamente considerada naquela época pelo italiano Pietro Mengoli em seu livro *Geometria Speciosa* de 1659. Em particular, ao modificar o procedimento de Luca Valerio, ele deu de forma precisa uma representação da área sob certas curvas especiais como limites de somas de retângulos. Mais tarde, o mesmo método também foi empregado por Newton.

Devemos agora mencionar dois outros matemáticos que, como Wallis e Mengoli, foram contemporâneos de Newton e Leibniz, mas começaram seu trabalho antes, de modo que também devem ser considerados, pelo menos parcialmente, como predecessores de Newton e Leibniz. Um desses homens é o grande físico e matemático holandês Christiaan Huygens que, entre outros resultados importantes, introduziu a noção de evolução e involução. É notável que Huygens usou em grande medida os métodos clássicos de Arquimedes, e apenas para diferenciação empregou o método de Fermat.

O segundo desses dois matemáticos é o escocês James Gregory, que como Torricelli e Pascal morreu no auge da vida, com apenas 37 anos, e cujo gênio encontrou seu pleno reconhecimento apenas recentemente. Ele fez um excelente trabalho de integração; por exemplo, em 1668 ele publicou um resultado tão difícil como o seguinte (escrito em notação moderna):

$$\int_0^a \sec x dx = -\log(\sec a - \tan a) \quad (6.0.7)$$

e outras integrais trigonométricas. Além disso, por exemplo, ele obteve a fórmula de interpolação de Newton, independentemente de Newton. Mas talvez as conquistas mais importantes de Gregório pertençam à teoria das séries.

O primeiro grande resultado na teoria das séries deve-se ao matemático alemão Nicolaus Mercator (1668), que encontrou a série logarítmica. Para este propósito, Mercator usou a integração termo a termo de uma série geométrica. Este método foi descoberto independentemente, mas não publicado, por Newton. As contribuições subsequentes foram feitas por William Lord Brouncker, o primeiro presidente da Royal Society em Londres. Então, os resultados mais notáveis relativos às séries infinitas foram obtidos por Newton e Gregory, que trabalharam essencialmente independentes um do outro, embora Gregory tenha sido influenciado pelo conhecimento de algumas das declarações de Newton, mas não de seus métodos. Ambos descobriram a série binomial e também muitas séries para funções trigonométricas e trigonométricas inversas.

De tudo o que foi discutido até agora, vimos que certamente houve um amplo desenvolvimento da teoria da integração e da diferenciação no período imediatamente anterior a Newton e Leibniz, e que muitos matemáticos de várias nações deram grandes contribuições.

Portanto, perguntaremos: O que estava faltando naquele momento? Um ponto muito importante que ainda faltava era o fato geral de que diferenciação e integração são processos inversos, ou seja, o chamado teorema fundamental do cálculo integral. É verdade que alguns matemáticos já haviam chegado bem perto desse conhecimento. Em primeiro lugar, devemos mencionar Torricelli. Em manuscritos deixados em sua morte (1647) e publicados até 1919, ele obteve a distância  $s(t)$  de um ponto em movimento por meio da quadratura da velocidade  $v(t)$ , enquanto pela construção da tangente da curva  $s(t)$  ele poderia recuperar  $v(t)$ . É muito duvidoso, entretanto, se ele realmente concebeu o significado dessa relação. Em segundo lugar, como já dissemos, alguns dos matemáticos da época conheciam a ideia de retificação de uma curva. Fermat em suas memórias, publicado em 1660, encontrou a relação entre as inclinações dessas duas curvas. Além disso, James Gregory, em seu livro *Geometriae pars universalis* (1668), resolveu o seguinte problema. Dada uma certa curva, encontre outra curva cujo comprimento seja igual à área da anterior. Na solução deste problema, Gregory usou a quadratura de uma curva auxiliar, que de fato corresponde a obter a função primitiva de uma derivada por meio de integração. Apesar disso, pode-se novamente duvidar se, naquela época, ele percebia em geral que diferenciação e integração são operações inversas. O primeiro a fazer essa importante descoberta de maneira geral foi Isaac Barrow, o professor de Newton na Universidade de Cambridge. Barrow primeiro foi professor de língua grega em Cambridge, depois foi professor de matemática primeiro em Londres e depois novamente em Cambridge. Em 1669, ele renunciou a sua cadeira para seu aluno Newton, cujo gênio superior ele havia reconhecido. Barrow então dedicou o resto de sua vida à teologia. Seu principal trabalho matemático foi sua *Lectiones Geometricae*, publicada em 1670, junto com a segunda edição de sua *Lectiones Opticae*. Essas aulas de geometria continham contribuições sistemáticas importantes para a teoria da diferenciação e integração, quase todas na forma puramente geométrica. Aqui, pela primeira vez, o caráter inverso de diferenciação e integração foi explicitamente declarado e provado.

Neste ponto notável do desenvolvimento da teoria, devemos novamente fazer a mesma pergunta acima: O que mais resta a ser feito? A resposta é: o que tinha que ser criado era apenas o cálculo, um método geral simbólico e sistemático de operações analíticas, a ser executado por regras estritamente formais, independentemente do significado geométrico. Ora, é justamente esse cálculo que foi estabelecido por Newton e Leibniz, independentes um do outro e usando diferentes tipos de simbolismo. As primeiras descobertas de Newton foram feitas cerca de dez anos antes das de Leibniz; por outro lado, as publicações de Leibniz precederam as de Newton, e – o que é mais importante – o simbolismo de Leibniz, o mesmo usado por todos os matemáticos atualmente, é superior ao de Newton.

Isaac Newton, influenciado por seu professor Barrow e também pela obra de Wallis, iniciou seu “method of fluxion” nos anos de 1665-1666, seu período mais criativo, aos 23 anos. Alguns de seus primeiros manuscritos eram conhecidos por amigos seus e as indicações de seu método estavam contidas em algumas de suas cartas. Ele escreveu seu *Methodus fluxionum et serierum infinitarum* em 1670-1671; mas não foi publicado até 1736, nove anos após sua morte. Em sua obra profunda *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687) Newton evitou seu método de fluxões, exceto por algumas indicações, e apresentou suas grandes descobertas na forma geométrica clássica, embora simplificado pelo uso da noção de limites. A primeira publicação do método e da notação de

Newton foi encontrada apenas em 1693 nas obras de Wallis, onde Wallis incluiu duas das cartas de Newton para ele. O próprio Newton publicou então um relato de seu método, intitulado *Tractatus de quadratura curvarum*, como um apêndice de sua *Optica* em 1704.

Newton, considerando os movimentos, pegou o tempo  $t$  como a variável independente, chamando a variável dependente  $x$  de “fluente” e sua velocidade “fluxion”, e usou  $\dot{x}$  para a fluxão, ou seja, para a derivada em relação a  $t$ . As derivadas mais altas foram então designadas por  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{\dot{x}}$ , etc. Para o incremento da variável independente  $t$  Newton usou a letra  $o$  e chamou  $\dot{x}o$  (isto é, o diferencial de  $x$ ) o “momento” de  $x$ . No caso do processo inverso, isto é, se a variável  $x$  é dada como uma fluxão, ele primeiro designou o fluente (isto é, a antiderivada de  $x$ ) por  $\square x$  ou  $[x]$ , depois por  $\dot{x}$ , e então usado para integração iterada  $\ddot{x}$ , etc. Deve ser enfatizado que Newton foi o primeiro a usar sistematicamente os resultados da diferenciação para obter antiderivadas e, portanto, para avaliar integrais.

Nossas notações, agora geralmente usadas em Cálculo, são devidas a Gottfried Wilhelm Leibniz. Ele era um espírito universal, extremamente versátil e interessado em todo tipo de conhecimento e erudição, talvez o mais famoso como filósofo. Ele começou como jurista, logo atuou na diplomacia, depois se tornou bibliotecário e historiador em Hanover e, mais tarde (1700), fundou a Academia de Ciências de Berlim. Em matemática, sua primeira publicação, como estudante de graduação, tratava de combinações e permutações; então ele logo se interessou pela teoria das diferenças e pela construção de uma máquina de computação. Por sugestão de Huygens (1673), Leibniz estudou exaustivamente os trabalhos de matemáticos anteriores sobre integração e diferenciação. Em particular, ele foi muito influenciado pela obra de Pascal. A história das próprias descobertas de Leibniz pode ser traçada em todos os detalhes, já que seus manuscritos com seus esboços datados foram encontrados na biblioteca de Hanover. A nova notação de Leibniz foi introduzida por ele pela primeira vez em 29 de outubro de 1675. Nesse dia, como nos dias anteriores, Leibniz discutiu integrações usando as “omnes lineae” de Cavalieri. Aqui, ele abreviou “omnes” ou “omnia” para “omn.” e aplicou algumas operações formais a este símbolo. Em seguida, ele comentou: “Será útil escrever  $\int$  para omn., portanto,  $\int l$  para  $omn.l$ , ou seja, a soma desses  $l$ s.” Portanto,  $\int$  é derivado da primeira letra da palavra *summa*. Posteriormente no mesmo manuscrito, ele chegou ao “cálculo contrário” e continuou assim: “Se  $\int l \sqcap ya$  ( $\sqcap$  é o sinal de igual de Leibniz), então, vamos definir  $l \sqcap \frac{ya}{d}$ . Certamente, como *int* aumentará as dimensões, então  $d$  irá diminuí-los.  $\int$ , entretanto, designa uma soma,  $d$  uma diferença.” Portanto, Leibniz escreveu primeiro o sinal diferencial  $d$  no denominador da variável. Mas duas ou três semanas depois ele escreve  $dx$ ,  $dy$ ,  $\frac{dx}{dy}$  e as integrais  $\int ydy$  ou  $\int xdx$ . Então ele chegou à notação, agora clássica.

Em 1684, Leibniz publicou pela primeira vez seu cálculo diferencial em um artigo (publicado na recém-fundada *Acta Eruditorum*) com o título *Nova methodus pro maximis, itemque tangentibus*. Aqui ele lida com diferenciais, e é notável que ele introduz  $dx$  como um intervalo finito arbitrário. Então, em 1686, ele publicou também um artigo contendo sua notação da integral. A palavra “integral” foi introduzida por Jakob Bernoulli em 1690.

Embora Newton e Leibniz tivessem ideias bastante razoáveis sobre os fundamentos do novo Cálculo, o desenvolvimento posterior extremamente rápido fez com que os conceitos básicos fossem negligenciados ou tratados de uma maneira muito insatisfatória. Em particular, Euler é um exemplo

dessa tendência. Alguns matemáticos, entre eles D'Alembert, enfatizaram a necessidade de se usar a noção de limite como fundamento do Cálculo. Mas foi Cauchy no início do século 19 que, dessa forma, desenvolveu o Cálculo de forma sistemática e consistente. Então, finalmente, Cauchy e seus muitos sucessores deram uma base sólida ao Cálculo.

---

---

7

---

---

SEQUÊNCIAS, SÉRIES E LIMITES

---

# 7.1 Limites de Funções

Seja a seguinte definição.

**Definição 7.1.1 (Limite).** Se  $f$  é alguma função, então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad (7.1.1)$$

é lido “o limite de  $f(x)$  quando  $x$  se aproxima de  $a$  é  $L$ ”. Isso significa que se você escolher valores de  $x$  próximos, mas não iguais a  $a$ , então  $f(x)$  estará próximo do valor  $L$ ; além disso,  $f(x)$  se aproxima cada vez mais de  $L$  quando  $x$  se aproxima mais e mais de  $a$ .

A seguinte notação alternativa é usada às vezes:

$$f(x) \rightarrow L \text{ quando } x \rightarrow a. \quad (7.1.2)$$

**Exemplo 7.1.1.** Por exemplo, se  $f(x) = x + 3$ , então  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 7$  é verdade, porque se você substituir números de  $x$  perto de 4 em  $f(x) = x + 3$ , o resultado será próximo de 7.

**Exemplo 7.1.2.** Agora, suponha que tenhamos a seguinte função:  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$ . O que acontece quando  $x \rightarrow 2$ ? Aqui  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$  e  $a = 2$ . Se substituirmos  $x = 2$  isso leva a

$$f(2) = \frac{2^2 - 2 \times 2}{2^2 - 4} = \frac{0}{0}, \quad (7.1.3)$$

que não existe. Em seguida, tentamos substituir valores de  $x$  próximos, mas não iguais a 2. A Tabela abaixo sugere que  $f(x)$  se aproxima de 0,5.

$x$	$f(x)$
3.000000	0.600000
2.500000	0.555556
2.100000	0.512195
2.010000	0.501247
2.001000	0.500125

O exemplo anterior mostra que nossa primeira definição de limite não é muito precisa, porque diz  $x$  perto de  $a$ , mas não quão perto o suficiente. A descrição informal do limite usa frases como “cada vez mais perto” e “realmente muito pequeno”. No final, não sabemos realmente o que eles significam, embora sejam sugestivos. Felizmente existe uma boa definição, isto é, que não é ambígua e pode ser usada para resolver qualquer disputa sobre a questão de se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  é igual a algum

número  $L$  ou não. Aqui está a definição.

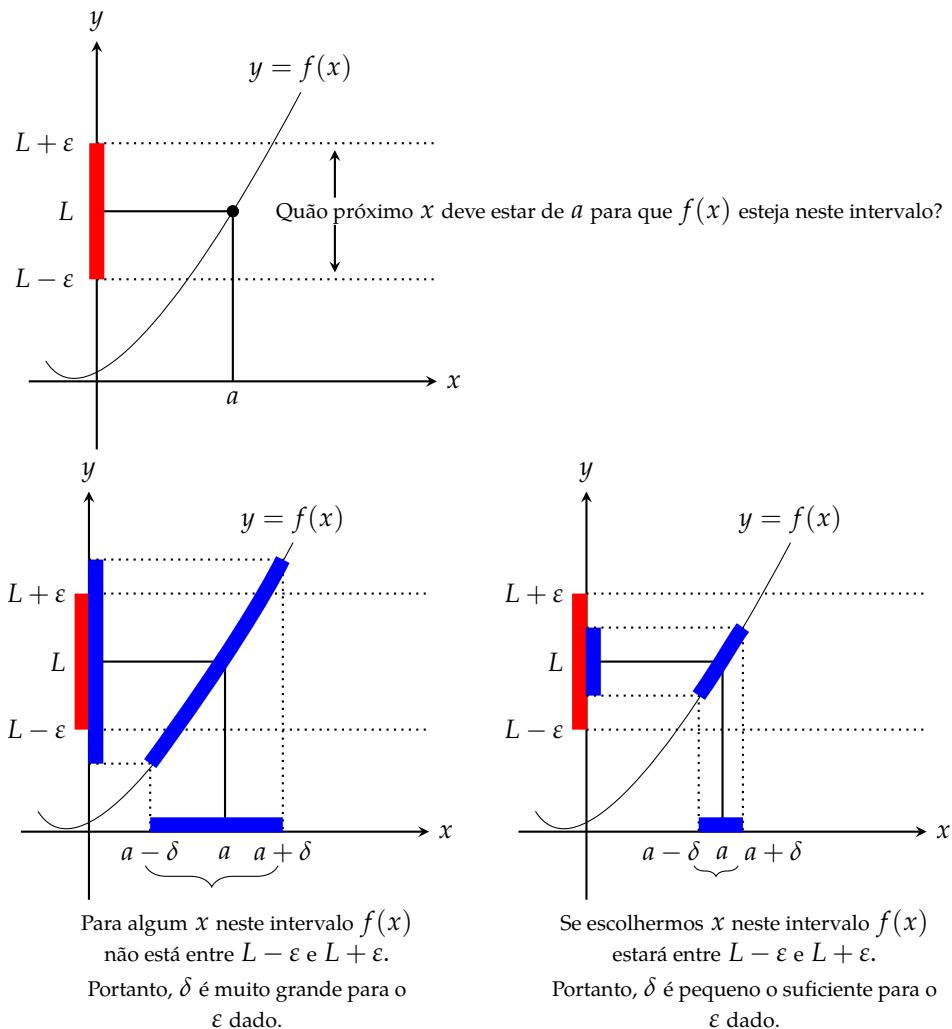
**Definição 7.1.2 (Límite).** Dizemos que  $L$  é o limite de  $f(x)$  quando  $x \rightarrow a$  se:

1.  $f(x)$  não precisa ser definido em  $x = a$ , mas deve ser definido para todos os outros valores de  $x$  em algum intervalo que contenha  $a$ .
2. para todo  $\varepsilon > 0$  pode-se encontrar um  $\delta > 0$  tal que para todo  $x$  no domínio de  $f$  tem-se que

$$|x - a| < \delta \text{ implica } |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (7.1.4)$$

Graficamente, a noção de limite pode ser vista como segue:

FIGURA 7.1.1 – NOÇÃO GRÁFICA DE LIMITES



Por que os valores absolutos? A quantidade  $|x - a|$  é a distância entre os pontos  $x$  e  $a$  na reta e pode-se medir quão próximo  $x$  é de  $a$  calculando-se  $|x - a|$ . A desigualdade  $|x - a| < \delta$  diz que a

distância entre  $x$  e  $a$  é menor que  $\delta$  ou que  $x$  e  $a$  estão próximos que  $\delta$  é muito pequeno.

O que são  $\varepsilon$  e  $\delta$ ? A quantidade  $\varepsilon$  é quanto próximo você gostaria que  $f(x)$  estivesse de seu limite  $L$ ; a quantidade  $\delta$  é o quanto perto você tem que escolher  $x$  para conseguir isso. Para provar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , você deve assumir que alguém lhe deu um valor desconhecido  $\varepsilon > 0$  e, em seguida, encontrar um  $\delta > 0$  pelo qual (7.1.4) é verdadeiro. O valor de  $\delta$  encontrado dependerá de  $\varepsilon$ . Por isso, muitas vezes é escrito como  $\delta(\varepsilon)$ .

**Exemplo 7.1.3.** Por exemplo, mostre que  $\lim_{x \rightarrow 5} 2x + 1 = 11$ . Nós temos que  $f(x) = 2x + 1$ ,  $a = 5$  e  $L = 11$ , e a questão que nós devemos responder é quanto próximo  $x$  deve estar de 5 se quisermos ter certeza que  $f(x) = 2x + 1$  difere de  $L = 11$  em uma quantidade menor que  $\varepsilon$ . Para descobrir isso, tentamos ter uma ideia de quanto grande é  $|f(x) - L|$ :

$$|f(x) - L| = |(2x + 1) - 11| = |2x - 10| = 2 \cdot |x - 5| = 2 \cdot |x - a|. \quad (7.1.5)$$

Então, se  $2 \cdot |x - a| < \varepsilon$ , nós temos  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , isto é, se

$$|x - a| < \frac{1}{2}\varepsilon, \text{ então } |f(x) - L| < \varepsilon. \quad (7.1.6)$$

Nós podemos escolher  $\delta = \frac{1}{2}\varepsilon$ .

**Exemplo 7.1.4.** Agora suponha o seguinte exemplo. Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1$ . Nós sabemos que  $f(x) = x^2$ ,  $a = 1$ ,  $L = 1$  e a questão é quanto pequeno deve ser  $|x - 1|$  para garantir que  $|x^2 - 1| < \varepsilon$ ? Começamos decompondo  $|x^2 - 1|$  como:

$$|x^2 - 1| = |(x - 1) \cdot (x + 1)| = |x - 1| \cdot |x + 1|. \quad (7.1.7)$$

À medida que  $x$  se aproxima de 1, o termo  $|x - 1|$  se torna pequeno, e se o outro termo  $|x + 1|$  for uma constante, então poderíamos encontrar  $\delta$  como antes, dividindo  $\varepsilon$  por essa constante.

Aqui está um truque que permite substituir o fator  $|x + 1|$  por uma constante. Nós concordamos que nós sempre escolhemos o  $\delta$  de modo a que  $\delta \leq 1$ . Se fizermos isso, então sempre teremos

$$|x - 1| < \delta \leq 1 \Rightarrow |x - 1| < 1, \quad (7.1.8)$$

e, portanto,  $x$  sempre estará entre 0 e 2. Logo,

$$|x^2 - 1| = |x - 1| \cdot |x + 1| < 3|x - 1|. \quad (7.1.9)$$

Se agora queremos ter certeza de que  $|x^2 - 1| < \varepsilon$ , esse cálculo mostra que devemos exigir  $3|x - 1| < \varepsilon$ , ou seja,  $|x - 1| < \frac{1}{3}\varepsilon$ . Portanto, devemos escolher  $\delta \leq \frac{1}{3}$ . Nós também devemos lembrar de nunca escolher

$\delta > 1$ . Assim, se  $\frac{1}{3}\varepsilon > 1$ , escolhemos  $\delta = 1$ . Disso depreende-se que  $\delta = \min\left(1, \frac{1}{3}\varepsilon\right)$ .

No caso de limites temos as seguintes propriedades:

1.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
2.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x), \alpha \in \mathbb{R}$
4.  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
5.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, g(x) \neq 0$

Todas estas propriedades podem ser provadas por meio da desigualdade triangular.

## 7.2 Limites Indeterminados

Para limites indeterminados do tipo  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$  ( $\frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{-\infty}$ ), aplica-se diretamente a regra de L'Hôpital. Segundo essa regra, suponha que  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  tome alguma das formas indeterminadas acima. O limite pode ser calculado a partir da relação:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ , que é a regra de L'Hôpital. Exige-se que  $f(x)$  e  $g(x)$  sejam contínuas e  $g'(x) \neq 0$ .

Para aplicar essa regra, é necessário certificar-se de que o limite é indeterminado do tipo  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ . Se o limite for de uma dessas duas formas, derivamos em separado o numerador e o denominador. Calculamos novamente o limite. Se ainda for indeterminado, repetimos o procedimento.

**Exemplo 7.2.1.** Calcule o seguinte limite:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ .

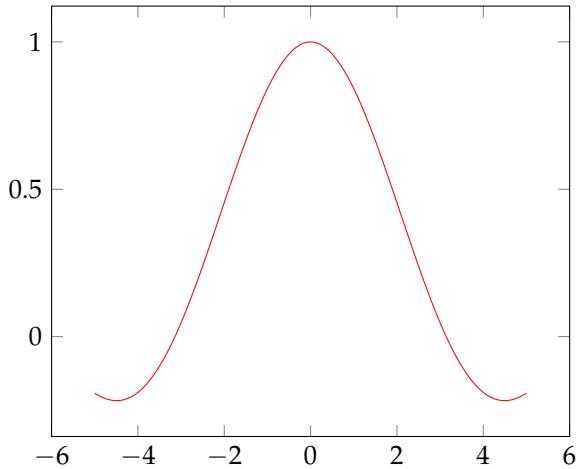
Calculamos o limite no ponto específico:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(0)}{0} = \frac{0}{0} \quad (7.2.1)$$

O limite é indeterminado e do tipo  $\frac{0}{0}$ . Aplicamos, portanto, a regra de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1 \quad (7.2.2)$$

FIGURA 7.2.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = \sin(x)/x$



O método de resolução de limites do tipo  $0 \cdot \infty$  ou  $\infty - \infty$  é muito similar ao utilizado anteriormente para os limites do tipo  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ . Basta reescrevê-los para que eles assumam algum desses dois últimos formatos e depois aplicar a regra de L'Hôpital.

**Exemplo 7.2.2.** Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} x \exp(1/x)$

Como  $x \rightarrow 0$ , os valores podem ser positivos  $x \rightarrow 0^+$  ou negativos  $x \rightarrow 0^-$ . Os limites laterais serão calculados em separado, pois essa diferença de sinal tem consequência muito relevante.

1. Se  $x \rightarrow 0^+$  (limite à direita)

Observe que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \exp(1/x) = 0 \cdot \infty$ . O limite é indeterminado, mas não aparece no formato  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ . Devemos, portanto, reescrevê-lo em algum desses formatos para que seja possível a aplicação da regra de L'Hôpital. Para tanto, devemos inverter uma das funções do limite e colocá-la no denominador. Neste problema, a escolha recai sobre a função  $x$ , que é mais fácil de inverter que  $\exp(1/x)$ . Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \exp(1/x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(1/x)}{1/x} = \frac{\infty}{\infty} \quad (7.2.3)$$

Esse limite que apresentava uma indeterminação do tipo  $0 \cdot \infty$  agora é escrito com a indeterminação do tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ . Podemos, portanto, aplicar a regra de L'Hôpital. Entretanto, no caso específico deste problema, fazemos uma troca de variáveis para simplificar o problema, que não é necessária, mas que facilita a resolução do problema:  $y = 1/x$ . Reescrevendo o limite, temos que quando  $x \rightarrow 0^+$ ,  $y \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp(1/x)}{1/x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\exp(y)}{y} = \frac{\infty}{\infty} = ? \quad (7.2.4)$$

Aplicando L'Hôpital, encontramos:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\exp(y)}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\exp(y)}{1} = \infty \quad (7.2.5)$$

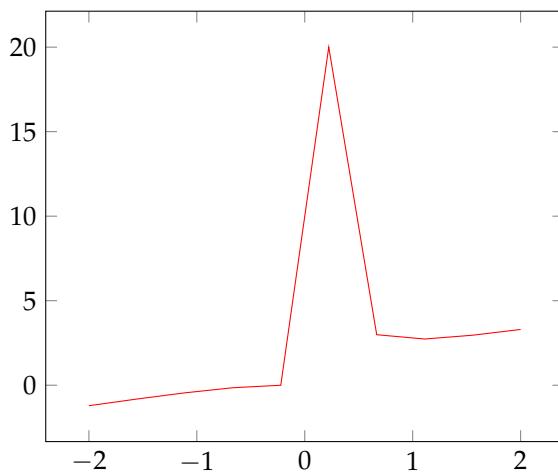
2. Se  $x \rightarrow 0^-$  (limite à esquerda)

Seguindo os mesmos passos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \exp(1/x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\exp(1/x)}{1/x} = \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\exp(y)}{y} = \frac{0}{-\infty} = 0 \quad (7.2.6)$$

Como os limites laterais são distintos, o limite não existe.

FIGURA 7.2.2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $x \exp(1/x)$



Disso decorre que é necessário que os limites laterais existam e sejam iguais para o limite existir.

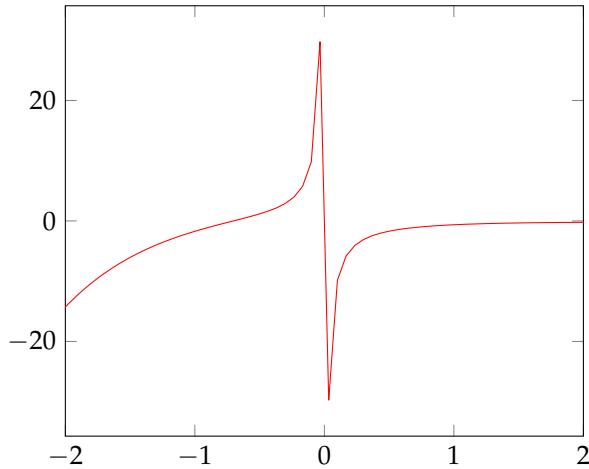
**Exemplo 7.2.3.** Calcule o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\exp(x) - 1} - \frac{1}{x} \right)$ .

Assim como os limites do tipo  $0 \cdot \infty$ , os limites do tipo  $\infty - \infty$  também devem ser reescritos nos formatos  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\exp(x) - 1} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x - (\exp(x) - 1)}{(\exp(x) - 1)x} \right) = \frac{0 - \exp(0) + 1}{(\exp(0) - 1)0} = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \exp(x)}{x \exp(x) + (\exp(x) - 1)} \right) = \frac{0}{0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\exp(x)}{\exp(x) + x \exp(x) + \exp(x)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-\exp(x)}{\exp(x)(2 + x)} \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \quad (7.2.7)$$

FIGURA 7.2.3 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $1/(\exp(x) - 1) - 1/x$



Também é possível que haja limites do tipo  $0^0$ ,  $\infty^0$  e  $1^\infty$ .

**Exemplo 7.2.4.** Calcule o limite  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$ .

Em indeterminações desse tipo devemos utilizar as funções logaritmo e exponencial para reescrever o limite nos formatos  $\frac{0}{0}$  ou  $\frac{\infty}{\infty}$ .

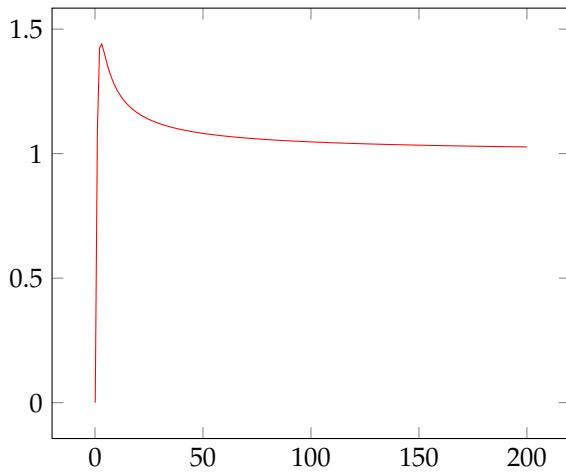
Utiliza-se as funções logaritmo e exponencial sem alterar a função original. Passa-se então o limite para o expoente da exponencial, pois a função exponencial é contínua.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\ln x^{1/x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(1/x \ln x) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x \ln x\right) \end{aligned} \quad (7.2.8)$$

Resolvemos o limite separadamente e depois o reintroduzimos no expoente na exponencial:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} 1/x \ln x &= 0 \cdot \infty \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x}{1}} = 0 \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} 1/x \ln x\right) = \exp(0) = 1 \end{aligned} \quad (7.2.9)$$

FIGURA 7.2.4 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $x^{1/x}$



## 7.3 Limite de Funções de Duas ou Mais Variáveis

Desejamos estender a noção de limite estudada anteriormente. Lembre-se que quando escrevemos  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ , queremos dizer que  $f$  pode estar o mais próximo que queremos de  $L$ , tomando  $x$  perto o suficiente de  $a$  mas não igual a  $a$ . Neste processo,  $f$  tem que ser definido perto de  $a$ , mas não necessariamente em  $a$ . A informação que estamos tentando derivar é o comportamento de  $f(x)$  quando  $x$  se aproxima de  $a$ . Quando estendemos essa noção para funções de duas variáveis (ou mais), veremos que existem muitas semelhanças. Vamos discutir essas semelhanças. No entanto, há também uma diferença principal. O domínio de funções de duas variáveis é um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$ , em outras palavras, é um conjunto de pares. Um ponto em  $\mathbb{R}^2$  é da forma  $(x, y)$ . Então, o equivalente de  $x \rightarrow a$  será  $(x, y) \rightarrow (a, b)$ . Para funções de três variáveis, o equivalente a  $x \rightarrow a$  será  $(x, y, z) \rightarrow (a, b, c)$  e assim por diante. Isso tem uma consequência muito importante, que dificulta os limites de computação para funções de diversas variáveis. Enquanto  $x$  só pode se aproximar de duas direções, da esquerda ou da direita,  $(x, y)$  pode se aproximar de  $(a, b)$  de infinitas direções. De fato, ele não precisa nem se aproximar de  $(a, b)$  ao longo de um caminho reto. Com funções de uma variável, uma maneira de mostrar que um limite existia era mostrar que o limite de ambas as direções existia e era igual a  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . Equivalentemente, quando os limites das duas direções não eram iguais, concluímos que o limite não existia. Para funções de diversas variáveis, teríamos que mostrar que o limite ao longo de todo caminho possível existe e é o mesmo. O problema é que existem infinitos desses caminhos. Para mostrar que um limite não existe, é suficiente encontrar dois caminhos ao longo dos quais os limites não são iguais. Em vista do número de caminhos possíveis, nem sempre é fácil saber quais caminhos tentar.

Com isso em mente seja a seguinte definição.

**Definição 7.3.1.** Nós escrevemos  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$  e lemos que o limite de  $f(x,y)$  quando  $(x,y)$  tende a  $(a,b)$  é  $L$ , se nós podemos fazer  $f(x,y)$  o mais perto que queremos de  $L$ , simplesmente tomando  $(x,y)$  perto o suficiente de  $(a,b)$  mas não igual a  $(a,b)$ .

Listamos agora propriedades dos limites para funções de duas variáveis. Propriedades semelhantes são válidas para funções de mais variáveis. Suponhamos que  $L, M$  e  $k$  sejam números reais e que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y) = L$  e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} g(x,y) = M$ . Então as seguintes propriedades são válidas:

1.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} x = a$
2.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} y = b$
3.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} c = c$ , com  $c$  constante
4.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y) \pm g(x,y)] = L \pm M$
5.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [kf(x,y)] = kL$
6.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y)g(x,y)] = LM$
7.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{L}{M}$
8.  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} [f(x,y)]^{r/s} = L^{r/s}$ ,  $s \neq 0$  e  $r$  inteiros.

Com essas propriedades temos o seguinte teorema:

**Teorema 7.3.1.** Para encontrar o limite de um polinômio, simplesmente o calculamos no ponto. Para encontrar o limite de uma função racional, calculamos o limite desde que o denominador não seja 0.

Como para funções de uma variável, as regras não se aplicam quando a substituição resulta em uma forma indeterminada. Nesse caso, devemos usar técnicas semelhantes àquelas usadas para funções de uma variável. Tais técnicas incluem fatorar, multiplicando pelo conjugado. Nós as ilustramos com exemplos.

**Exemplo 7.3.1.** Encontre  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x - y}$ .

*Não podemos plugar o ponto, pois obtemos 0 no denominador. Nós tentamos reescrever a fração para ver se podemos simplificar.*

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - y^3}{x - y} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x - y)(x^2 + xy + y^2)}{x - y} \\
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + xy + y^2) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{7.3.1}$$

Muitas vezes é importante analisar o limite ao longo de um caminho específico. Em particular, uma maneira de provar que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x,y)$  não existe é provar que esse limite tem valores diferentes ao longo de dois caminhos diferentes. Agora analisamos alguns exemplos para ver como isso pode ser feito. Em geral, você precisa lembrar que especificar um caminho equivale a dar alguma relação entre  $x$  e  $y$ . Ao calcular o limite ao longo deste caminho, use a relação que define o caminho. Por exemplo, ao calcular o limite ao longo do caminho  $y = 0$ , substitua  $y$  por 0 na função.

**Exemplo 7.3.2.** Considere a função  $f(x,y) = \frac{y}{x+y-1}$ . O objetivo é tentar encontrar o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = \frac{y}{x+y-1}$ .

Como mencionado na introdução, alguns caminhos óbvios que podemos tentar são o caminho  $x = 1$  e  $y = 0$ .

Limite ao longo do caminho  $y = 0$ . Primeiro, encontramos o que a função se torna ao longo deste caminho. Nós vamos usar a notação  $\frac{y}{x+y-1} \Big|_{y=0}$  para denotar  $\frac{y}{x+y-1}$  ao longo da trajetória  $y = 0$  e

$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ y=0}} \frac{y}{x+y-1}$  para denotar  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{y}{x+y-1}$  ao longo da trajetória  $y = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{y}{x+y-1} \Big|_{y=0} &= \frac{0}{x-1} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.3.2}$$

Além disso, observe que ao longo do caminho  $y = 0$ ,  $y$  é constante, portanto  $(x,y) \rightarrow (1,0)$  pode ser substituído por  $x \rightarrow 1$ . Portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=0}} \frac{y}{x+y-1} = \lim_{x \rightarrow 1} 0 = 0 \tag{7.3.3}$$

De forma semelhante, ao longo do caminho  $x = 1$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{y}{x+y-1} \Big|_{x=1} &= \frac{y}{1+y-1} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{7.3.4}$$

Portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=1}} \frac{y}{x+y-1} = \lim_{y \rightarrow 0} 1 = 1 \tag{7.3.5}$$

Como os limites são diferentes, o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = \frac{y}{x+y-1}$  não existe.

## 7.4 Continuidade

Uma vez visto a ideia de limite, podemos dar um passo além e analisar a noção de continuidade. Uma função é contínua quando, intuitivamente, pequenas variações nos objetos correspondem a pequenas variações nas imagens. Nos pontos onde a função não é contínua, diz-se que a função é descontínua, ou que se trata de um ponto de descontinuidade. Há diferentes definições de continuidade. São elas:

1. Em um espaço topológico, diz-se que uma função  $f: X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos é contínua se a imagem recíproca (dada uma função  $f: X \rightarrow Y$  e um conjunto  $A \subset Y$ , o conjunto  $f^{-1}(A) = \{x \in X | f(x) \in A\}$ ) de qualquer aberto de  $Y$  é um aberto de  $X$ .

**Exemplo 7.4.1.** Seja  $X$  um conjunto com a topologia discreta (todos conjuntos são abertos)  $\tau_X = P(X)$  e  $Y$  com qualquer topologia, então qualquer função  $f: X \rightarrow Y$  é contínua. Basta ver que,  $\forall A \in Y$  aberto temos que  $f^{-1}(A) \in P(X)$  e, portanto, é aberto, o que mostra que  $f$  é uma função contínua.

2. Em um espaço métrico, diz-se que uma função  $f$  é contínua no ponto  $x = a$  se  $a$  é um ponto isolado do domínio ou, caso seja ponto de acumulação de  $X$ , se existir o limite de  $f(x)$  com  $x$  tendendo a  $a$  e esse limite for igual a  $f(a)$ . Dito de outra forma, diz-se que uma função  $f$  é contínua num ponto  $a$  do seu domínio se, dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall x \in X, a - \delta < x < a + \delta$  então  $f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon$ . Esta definição, com uma pequena adaptação, pode ser usada para uma função de um espaço métrico  $E$  em outro espaço métrico  $F$ : a função  $f$  é contínua em  $a \in E$  quando dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $\forall x \in E, d_E(x, a) < \delta \rightarrow d_F(f(x), f(a)) < \epsilon$ .

**Exemplo 7.4.2.** Seja  $f: X \Rightarrow Y$ ,  $X$  e  $Y$  espaços métricos não vazios. Se  $\forall x, y \in X$  tivermos que  $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ , então a aplicação  $f$  é contínua e a constante  $c$  é chamada de constante de Lipschitz. Na reta Real toda aplicação Lipschitziana é uniformemente contínua.

3. Equivalência de definições: se  $E$  e  $F$  são espaços métricos, e  $\tau_E$  e  $\tau_F$  as topologias geradas pelas métricas em  $E$  e  $F$ , então uma função  $f: E \rightarrow F$  é contínua pela definição topológica se, e somente se, ela é contínua pela definição métrica.
4. Limites: uma função  $f(x)$  é dita ser contínua em um ponto  $a$  de seu domínio se:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Observa-se que esta definição exige que o limite à esquerda exista assim como o limite da direita e que a função esteja definida no ponto com o mesmo valor de limite para o ponto.

Se  $f(x)$  é descontínua em  $a$ , então:

1.  $f$  tem uma descontinuidade removível em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe.
2.  $f$  tem uma descontinuidade de salto (jump) em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existem, mas  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  (quando afirmamos que  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  existem, queremos dizer que ambos são valorizados e que nenhum dos dois assume os valores  $\pm\infty$ )

3.  $f$  tem uma descontinuidade infinita (assíntona) em  $a$  se  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$

FIGURA 7.4.1 – DESCONTINUIDADE REMOVÍVEL

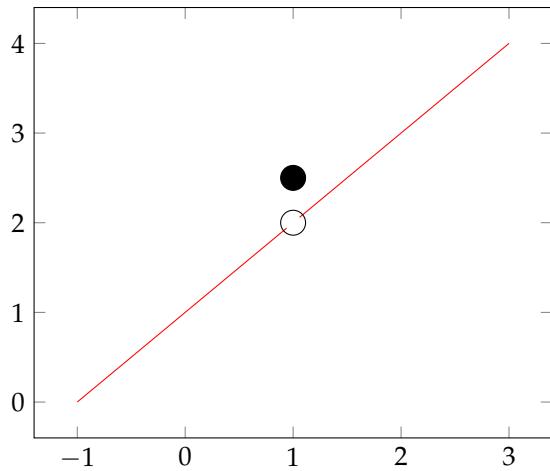


FIGURA 7.4.2 – DESCONTINUIDADE DE SALTO

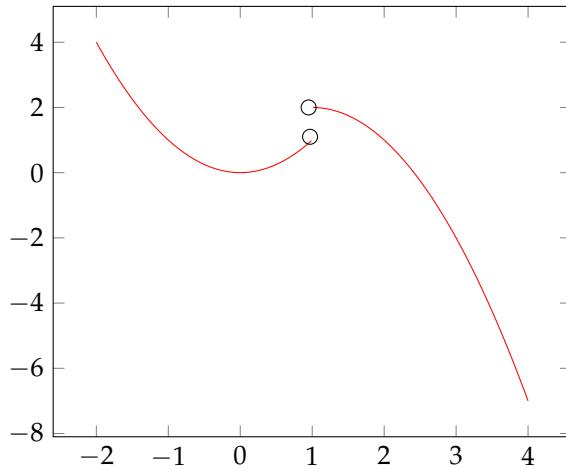
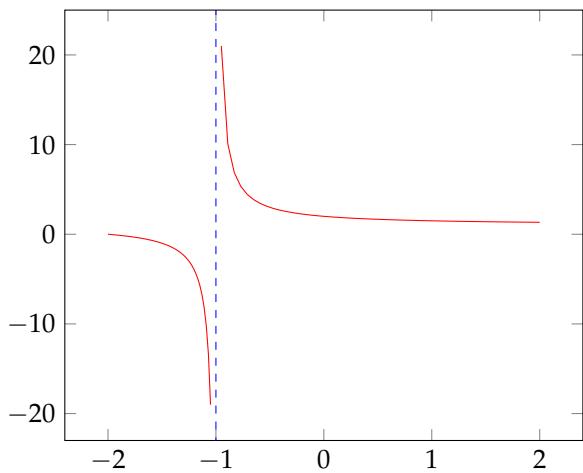


FIGURA 7.4.3 – DESCONTINUIDADE INFINITA



## 7.5 Sequências

Estudaremos aqui os limites de sequências de números reais, e em particular, trataremos das séries ou somas infinitas. Todos os conceitos e resultados importantes em análise matemática se referem, quer explícita quer implicitamente, a limites. Por isso seu papel central. Os limites de sequências de números reais são os mais simples. Há outros tipos, como derivadas, integrais, sequências de funções, entre outros.

Do ponto de vista intuitivo, pode-se pensar uma sequência  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de números reais como uma sequência de pontos da reta e no seu limite. Dados os números reais  $a$ ,  $x$  e  $\varepsilon$ , com  $\varepsilon > 0$ , as três afirmações seguintes são equivalentes:

1.  $|x - a| < \varepsilon$
2.  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$
3.  $x$  pertence ao intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

Isto é, o intervalo aberto  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , que chamamos o intervalo aberto de centro  $a$  e raio  $\varepsilon$ , é formado pelos pontos cuja distância ao ponto  $a$  é menor do que  $\varepsilon$ .

Da mesma forma, os pontos  $x$  do intervalo fechado  $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$  são caracterizados pela propriedade de estarem situados a uma distância menor do que ou igual a  $\varepsilon$  do centro  $a$ , ou seja,  $|x - a| \leq \varepsilon$ . Seja a seguinte definição:

**Definição 7.5.1.** Um corpo ordenado é um corpo  $\mathbb{K}$ , no qual se destacou um subconjunto  $P \subset \mathbb{K}$ , chamado o conjunto dos elementos positivos de  $\mathbb{K}$ , tal que:

1. A soma e o produto de elementos positivos são positivos, isto é,  $x, y \in P \Rightarrow x + y \in P$  e  $x \cdot y \in P$ .
2. Dado  $x \in \mathbb{K}$ , exatamente uma das três alternativas seguintes ocorre:  $x = 0$ , ou  $x \in P$  ou  $-x \in P$ .

Um resultado importante para justificar a interpretação geométrica é dada pelo seguinte teorema.

**Teorema 7.5.1.** *Sejam  $x$  e  $a$  elementos de um corpo ordenado  $\mathbb{K}$ . Então, são equivalentes:*

1.  $-a \leq x \leq a$
2.  $x \leq a$  e  $-x \leq a$
3.  $|x| \leq a$

Outro resultado simples, mas importante no estudo dos limites de sequências é o seguinte teorema:

**Teorema 7.5.2.** *Seja  $A \subset I_n$ . Se existir uma bijeção  $f: I_n \Rightarrow A$ , então  $A = I_n$ .*

Esse teorema afirma que um subconjunto  $X \subset \mathbb{N}$  é infinito se, e somente se, é ilimitado. Quando  $X \subset \mathbb{N}$  é um conjunto infinito, diz-se que  $X$  contém números naturais arbitrariamente grandes. Dito de outra forma, dado qualquer  $n_1 \in \mathbb{N}$ , existe  $n \in X$  tal que  $n > n_1$ . Em particular, se existir um número  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $X$  contém todos os números naturais  $n > n_0$ , então  $X$  é infinito.

### 7.5.1 Sequências

Uma sequência de números reais é uma função  $x: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}$ , definida no conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  dos números naturais e tomando valores no conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. O valor  $x(n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , será representado por  $x_n$  e chamado o termo de ordem  $n$  ou  $N$ -ésimo termo da sequência. Escrevemos  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  ou  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(x_n)$  para indicar a sequência  $x$ . É importante ter em mente que a função  $x: \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{R}$  não é necessariamente injetiva: pode-se ter  $x_m = x_n$  com  $m \neq n$ . O conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  pode ser finito, ou até mesmo, conter um único elemento, como no caso de uma sequência constante, em que  $x_n = a \in \mathbb{R}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Quando a sequência for injetiva, isto é, quando  $m \neq n$  implicar  $x_m \neq x_n$ , diremos que ela é uma sequência de termos dois a dois distintos.

Diz-se que a sequência  $(x_n)$  é limitada quando o conjunto dos seus termos é limitado, isto é, quando existirem números reais  $a$  e  $b$  tais que  $a \leq x_n \leq b$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto significa que os termos da sequência pertencem ao intervalo  $[a, b]$ .

Todo intervalo  $[a, b]$  está contido num intervalo da forma  $[-c, c]$ , com  $c > 0$ . Para ver isto, basta tomar  $c = \max\{|a|, |b|\}$ . Como a condição  $x_n \in [-c, c]$  é equivalente a  $|x_n| \leq c$ , vemos que uma sequência  $(x_n)$  é limitada se, e somente se, existe um número real  $c > 0$  tal que  $|x_n| \leq c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Disso decorre que  $(x_n)$  é limitada se, e somente se,  $(|x_n|)$  é limitada. Quando uma sequência não é limitada, diz-se que ela é ilimitada.

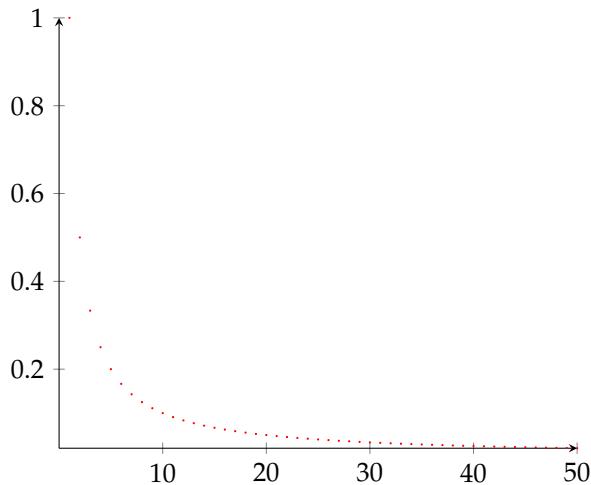
Uma sequência diz-se limitada superiormente quando existe um número real  $b$  tal que  $x_n \leq b$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Isto significa que todos os termos  $x_n$  pertencem à semi-reta  $(-\infty, b]$ . Analogamente, diz-se que  $(x_n)$  é limitada inferiormente quando existe um  $a \in \mathbb{R}$  tal que  $a \leq x_n$  (ou seja,  $x_n \in [a, +\infty)$ ) para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Com esses conceitos, percebemos que a sequência é limitada se, e somente se, é limitada inferiormente e superiormente.

Dada uma sequência  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de números reais, uma subsequência de  $x$  é a restrição da função  $x$  a um subconjunto infinito  $\mathbb{N}' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots\}$  de  $\mathbb{N}$ . Escreve-se  $x' = (x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}'}$  ou  $(x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_i}, \dots)$  ou  $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$  para indicar a subsequência  $x' = x|_{\mathbb{N}'}$ .

Uma sequência  $(x_n)$  chama-se crescente quando  $x_1 < x_2 < \dots$ , isto é, quando  $x_n < x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se vale  $x_n \leq x_{n+1}$  para todo  $n$ , a sequência é dita não-decrescente. Analogamente, quando  $x_1 > x_2 > \dots$ , isto é, quando  $x_n > x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , a sequência é dita decrescente. Ela é chamada não-crescente quando  $x_n \geq x_{n+1}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . As sequências crescentes, não-decrescentes e não-crescentes são chamadas sequências monótonas.

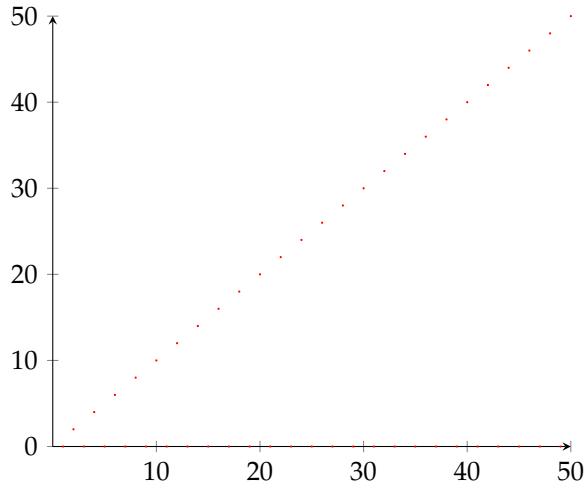
**Exemplo 7.5.1.** Seja a sequência  $x_n = \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Temos que a sequência  $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$  é monótona decrescente e limitada.

FIGURA 7.5.1 – SEQUÊNCIA  $x_n = \frac{1}{n}$



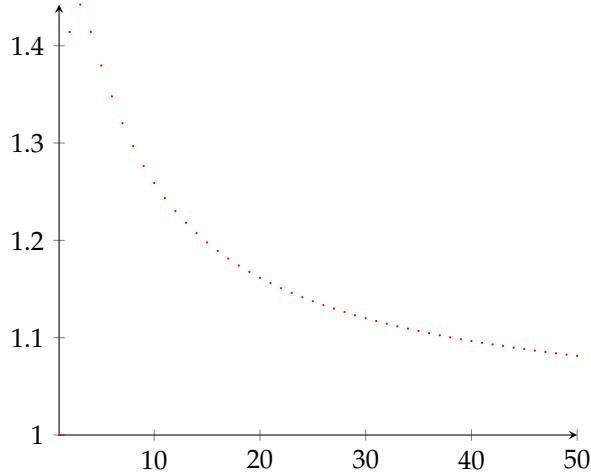
**Exemplo 7.5.2.** Seja a sequência  $x_n = (1 + (-1)^{n+1}) \frac{n}{2}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então,  $x_n = n$  para  $n$  ímpar e  $x_n = 0$  para  $n$  par. A sequência  $(x_n)$  tem a forma  $(1, 0, 3, 0, 5, 0, \dots)$ . Ela é limitada inferiormente, ilimitada superiormente, não monótona. Seus termos de ordem ímpar constituem uma subsequência monótona crescente ilimitada,  $x_{2n-1} = 2n - 1$ , enquanto os termos de ordem par constituem uma subsequência constante,  $x_{2n} = 0$ .

FIGURA 7.5.2 – SEQUÊNCIA  $x_n = (1 + (-1)^{n+1}) \frac{n}{2}$



**Exemplo 7.5.3.** Seja a sequência  $x_n = \sqrt[n]{n}$ . Trata-se de uma sequência de números positivos, portanto, limitada inferiormente. Vejamos se é monótona. Para que seja  $\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$  é necessário e suficiente que  $n^{n+1} > (n+1)^n$ , isto é, que  $n > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ . Isto de fato ocorre para todo  $n \geq 3$ , pois sabemos que  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$  para qualquer  $n$ . Assim, concluímos que a sequência dada por  $\sqrt[n]{n}$  é decrescente a partir do seu terceiro termo. Assim,  $(\sqrt[n]{n})$  é limitada.

FIGURA 7.5.3 – SEQUÊNCIA  $x_n = \sqrt[n]{n}$



## 7.5.2 Limite de uma Sequênciа

Dizer que o número real  $a$  é o limite da sequência  $(x_n)$  significa afirmar que, para valores muito grandes de  $n$ , os termos  $x_n$  tornam-se e se mantêm tão próximos de  $a$  quanto se deseje.

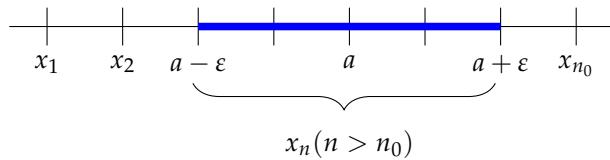
Especificamente, estipulando-se um erro por meio de um número real  $\varepsilon > 0$ , existe um índice  $n_0$  tal que todos os termos  $x_n$  da sequência que têm índice  $n$  maior do que  $n_0$  são valores aproximados de  $a$  com erro inferior a  $\varepsilon$ . O índice  $n_0$  deve depender de  $\varepsilon$ , sendo de se esperar que, para valores cada vez menores de  $\varepsilon$ , necessita-se tomar  $n_0$  cada vez maior. Com isso, temos a seguinte definição.

**Definição 7.5.2.** Diz-se que o número real  $a$  é limite da sequência  $(x_n)$  de números reais, e escreve-se  $a = \lim x_n$ , ou  $a = \lim_n x_n$ , ou  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , quando para cada número real  $\varepsilon > 0$ , dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - a| < \varepsilon$ , sempre que  $n > n_0$ . Isto é,

$$\lim x_n = a \equiv \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}; n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon. \quad (7.5.1)$$

Assim, a definição acima significa que, para todo número real  $\varepsilon > 0$ , existe um número natural  $n_0$  tal que  $n > n_0$  implica  $|x_n - a| < \varepsilon$ . Observamos que se  $\lim x_n = a$  então qualquer intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , de centro  $a$  e raio  $\varepsilon > 0$ , contém todos os termos  $x_n$  da sequência, com exceção no máximo de um número finito de índices  $n$ . Com efeito, dado o intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ , como  $\lim x_n = a$ , obtemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$ . Ou seja,  $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ . Graficamente, temos a seguinte situação.

FIGURA 7.5.4 – NOÇÃO GEOMÉTRICA DE LIMITE



Assim, fora do intervalo  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  só poderão estar, no máximo, os termos  $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$ .

Quando  $\lim x_n = a$ , diz-se que a sequência  $(x_n)$  converge para  $a$ , ou tende para  $a$  e escreve-se  $x_n \rightarrow a$ . Uma sequência que possui limite chama-se convergente. Do contrário, ela se chama divergente. Explicitamente, uma sequência  $(x_n)$  diz-se divergente quando, para nenhum número real  $a$ , é verdade que se tenha  $\lim x_n = a$ .

Vamos analisar agora alguns resultados interessantes sobre limites.

**Teorema 7.5.3 (Unicidade do Limite).** Se  $\lim x_n = a$  e  $\lim x_n = b$  então  $a = b$ .

**Teorema 7.5.4.** Se  $\lim x_n = a$ , então toda subsequência de  $(x_n)$  converge para o limite  $a$ .

**Corolário 7.5.1.** Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  então, para todo  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+k} = a$ . Com efeito,  $(x_{1+k}, x_{2+k}, \dots, x_{n+k}, \dots)$  é uma subsequência de  $(x_n)$ .

**Teorema 7.5.5.** Toda sequência convergente é limitada.

**Teorema 7.5.6.** Toda sequência monótona limitada é convergente.

**Exemplo 7.5.4.** Seja a sequência  $x_n = (1 + (-1)^{n+1})^{1/2}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então,  $x_n = n$  para  $n$  ímpar e  $x_n = 0$  para  $n$  par. A sequência  $(x_n)$  tem a forma  $(1, 0, 3, 0, 5, 0, \dots)$ . Ela é limitada inferiormente, ilimitada superiormente, não monótona. Seus termos de ordem ímpar constituem uma subsequência monótona crescente

ilimitada,  $x_{2n-1} = 2n - 1$ , enquanto os termos de ordem par constituem uma subsequência constante,  $x_{2n} = 0$ .

Neste exemplo, os termos de ordem ímpar constituem uma sequência crescente limitada:

$$x_{2n-1} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} \right] = \frac{2}{3} \left[ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right]. \quad (7.5.2)$$

Vemos que  $\left| x_{2n-1} - \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n$ . Como  $0 < \frac{1}{4} < 1$ , dado que  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente, podemos obter  $n_0$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < \varepsilon$ . Com maior razão,  $n > n_0 \Rightarrow \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n < \varepsilon$ , ou seja,  $n > n_0 \Rightarrow \left| x_{2n-1} - \frac{2}{3} \right| < \varepsilon$ . Assim,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n-1} = \frac{2}{3}$ .

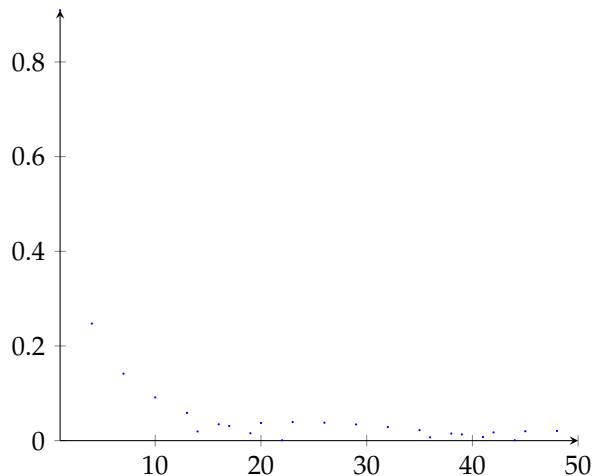
### 7.5.3 Propriedades Aritméticas dos Limites

Veremos agora como se comportam os limites de sequências relativamente às operações de soma, de multiplicação, de divisão e às desigualdades.

**Teorema 7.5.7.** Se  $\lim x_n = 0$  e  $(y_n)$  é uma sequência limitada, então  $\lim(x_n \cdot y_n) = 0$  (mesmo que não exista  $\lim y_n$ ).

**Exemplo 7.5.5.** Qualquer que seja  $x \in \mathbb{R}$ , temos  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(nx)}{n} = 0$ . Com efeito  $\frac{\sin(nx)}{n} = \sin(nx) \cdot \frac{1}{n}$ , com  $|\sin(nx)| \leq 1$  e  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ .

FIGURA 7.5.5 – SEQUÊNCIA  $x_n = \frac{\sin(nx)}{n}$

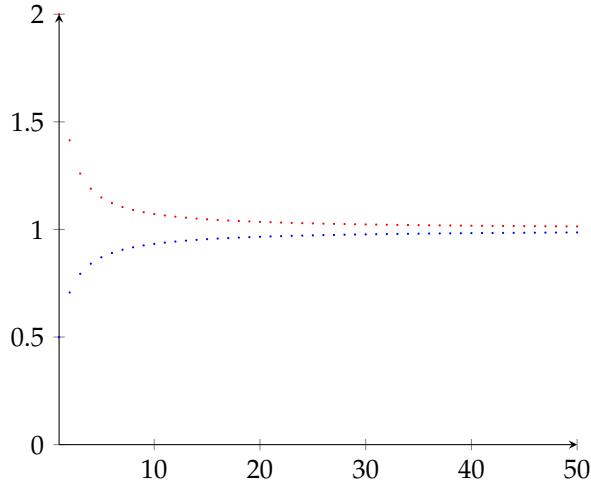


**Teorema 7.5.8.** Se  $\lim x_n = a$  e  $\lim y_n = b$ , então:

1.  $\lim(x_n + y_n) = a + b$
2.  $\lim(x_n - y_n) = a - b$
3.  $\lim(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$
4.  $\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}, \text{ se } b \neq 0$

**Exemplo 7.5.6.** Examinemos a sequência de números reais positivos  $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ , onde  $a > 0$ . Ela é decrescente se  $a > 1$  e crescente se  $0 < a < 1$ , sendo limitada em qualquer hipótese. Existe portanto  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n}$ . Podemos garantir que  $\ell = 1$ . Afirmamos que se tem  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/n} = 1$ .

FIGURA 7.5.6 – SEQUÊNCIA  $x_n = \sqrt[n]{a}$



**Exemplo 7.5.7.** Mostremos agora que  $\lim \sqrt[n]{n} = \lim n^{1/n} = 1$ . Sabemos que este limite existe porque a sequência é monótona decrescente a partir do seu terceiro termo. Escrevendo  $\ell = \lim n^{1/n}$ , vemos que  $\ell = \inf\{n^{1/n}; n \in \mathbb{N}\}$ . Como  $n^{1/n} > 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , temos  $\ell \geq 1$ . Em particular,  $\ell > 0$ . Considerando a subsequência  $(2n)^{1/2n}$ , temos  $\ell^2 = \lim[(2n)^{1/2n}]^2 = \lim[(2n)^{1/n}] = \lim[2^{1/n} \cdot n^{1/n}] = \lim 2^{1/n} \cdot \lim n^{1/n} = \ell$ . Como  $\ell \neq 0$ , de  $\ell^2 = \ell$  concluímos  $\ell = 1$ .

**Exemplo 7.5.8.** Em relação ao limite  $\frac{x_n}{y_n}$ , vejamos o que pode acontecer quando  $\lim y_n = 0$ . Façamos, então, esta hipótese. Se, ainda assim, existir  $\lim \frac{x_n}{y_n}$  (ou pelo menos a sequência  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$  for limitada) deve-se ter necessariamente  $\lim x_n = 0$ , pois  $x_n = \left(\frac{x_n}{y_n}\right)y_n$ . Em outras palavras, quando  $\lim y_n = 0$  e a sequência  $(x_n)$  diverge ou tem limite diferente de zero, o quociente  $\frac{x_n}{y_n}$  não converge (nem sequer mantém-se limitado). Suponhamos agora que  $\lim x_n = \lim y_n = 0$ . Neste caso, o quociente  $\frac{x_n}{y_n}$  pode ter limite ou não. Por exemplo, se  $x_n = \frac{1}{n}$  e  $y_n = \frac{1}{an}$ , então  $\lim \frac{x_n}{y_n} = a$ . Mas se  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$  e  $y_n = \frac{1}{n}$ , então  $\frac{x_n}{y_n} = (-1)^n$ , logo não existe  $\lim \frac{x_n}{y_n}$ .

FIGURA 7.5.7 – SEQUÊNCIA  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $y_n = \frac{1}{0.5n}$  E  $\frac{x_n}{y_n}$

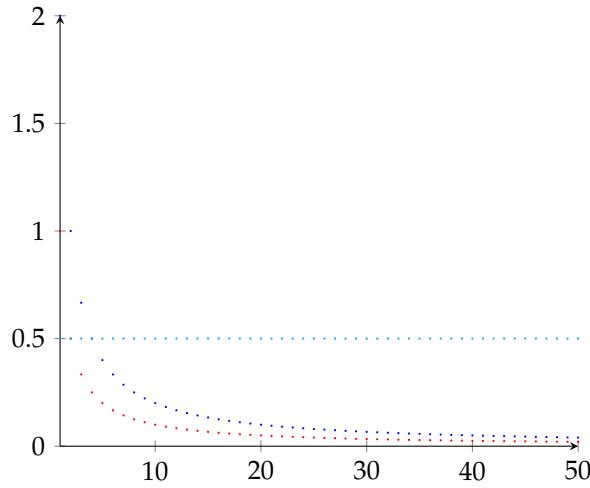
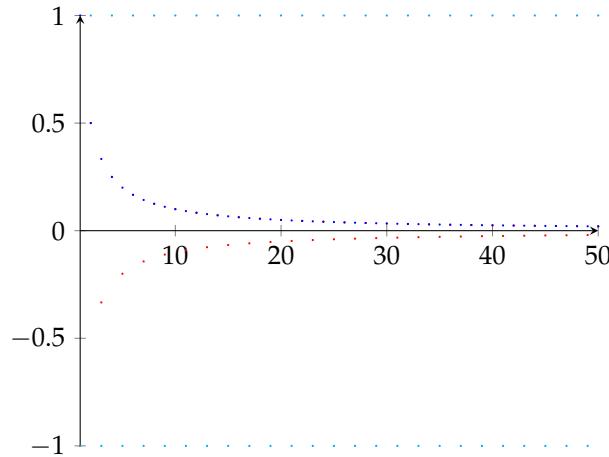


FIGURA 7.5.8 – SEQUÊNCIA  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $y_n = \frac{1}{n}$  E  $(-1)^n$



**Teorema 7.5.9 (Permanência do Sinal).** Se  $\lim x_n = a > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n > 0$ . Isso significa que se uma sequência tem limite positivo, a partir de uma certa ordem todos os seus termos são positivos. De forma semelhante, se  $\lim x_n = b < 0$  então, a partir de certa ordem, todos os termos  $x_n$  são negativos.

**Corolário 7.5.2.** Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  sequências convergentes. Se  $x_n \leq y_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  então  $\lim x_n \leq \lim y_n$ .

**Corolário 7.5.3.** Seja  $(x_n)$  convergente. Se  $x_n \geq a$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  então  $\lim x_n \geq a$ .

**Teorema 7.5.10.** Sejam  $x_n \leq z_n \leq y_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se  $\lim x_n = \lim y_n = a$ , então  $\lim z_n = a$ .

Esses resultados são muito utilizados quando fazemos testes de comparação entre sequências.

#### 7.5.4 Subsequências

A definição de limite pode ser reformulada. O número real  $a$  é o limite da sequência  $x = (x_n)$  se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$ , o conjunto

$$x^{-1}(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}; x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}, \quad (7.5.3)$$

tem complementar finito em  $\mathbb{N}$ . Sabemos que isto equivale a dizer que existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .

Mostraremos agora que  $a \in \mathbb{R}$  é limite de uma sequência  $(x_n)$  se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$ , o conjunto

$$x^{-1}(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}; x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)\}, \quad (7.5.4)$$

é um subconjunto infinito de  $\mathbb{N}$ . É claro que se um conjunto de  $\mathbb{N}$  possui complementar finito ele é um subconjunto infinito, mas a recíproca é falsa.

**Teorema 7.5.11.** *A fim de que  $a \in \mathbb{R}$  seja limite de uma sequência  $(x_n)$  é necessário e suficiente que, para todo  $\varepsilon > 0$ , exista uma infinidade de índices  $n$  tais que  $x_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ .*

**Definição 7.5.3.** *Um número real  $a$  chama-se valor de aderência de uma sequência  $(x_n)$  quando  $a$  é o limite de alguma subsequência de  $(x_n)$ .*

Seja  $(x_n)$  uma sequência limitada; digamos, com  $\alpha \leq x_n \leq \beta$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Escrevemos  $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ . Temos  $[\alpha, \beta] \supset X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$ . Logo, escolhendo  $a_n = \inf X_n$  e  $b_n = \sup X_n$ , temos:

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq \beta. \quad (7.5.5)$$

Existem, portanto, os limites:

$$a = \lim a_n = \sup a_n = \sup_n \inf X_n, \quad (7.5.6)$$

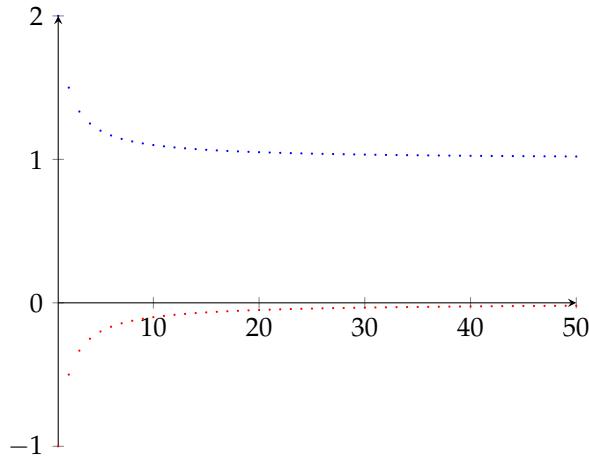
$$b = \lim b_n = \inf b_n = \inf_n \sup X_n. \quad (7.5.7)$$

Escreveremos  $a = \liminf x_n$  e  $b = \limsup x_n$  e diremos que  $a$  é o limite inferior e que  $b$  é o limite superior da sequência  $(x_n)$ . Tem-se evidentemente,

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n. \quad (7.5.8)$$

**Exemplo 7.5.9.** Sejam  $x_{2n-1} = -\frac{1}{n}$  e  $x_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$ . Verifica-se que  $\inf X_{2n-2} = \inf X_{2n-1} = -\frac{1}{n}$  e  $\sup X_{2n-1} = \sup X_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$ . Logo,  $\liminf x_n = 0$  e  $\limsup x_n = 1$ .

FIGURA 7.5.9 – SEQUÊNCIA  $x_{2n-1} = -\frac{1}{n}$  E  $x_{2n} = 1 + \frac{1}{n}$



**Teorema 7.5.12.** Seja  $(x_n)$  uma sequência limitada. Então  $\liminf x_n$  é o menor valor de aderência e  $\limsup x_n$  é o maior valor de aderência de  $(x_n)$ .

**Corolário 7.5.4.** Uma sequência limitada de números reais  $(x_n)$  é convergente se, e somente se,  $\liminf x_n = \limsup x_n$ , isto é, se, e somente se, possui um único valor de aderência.

### 7.5.5 Sequências de Cauchy

Já salientamos a importância do teorema “toda sequência monótona limitada é convergente”. Este teorema nos permite saber, em certos casos, que uma sequência possui limite, mesmo sem conhecermos o valor desse limite. Mas é claro que muitas sequências convergentes não são monótonas, de modo que aquele critério de convergência não é o mais geral possível. Veremos agora o critério de Cauchy, que nos dará uma condição, não somente suficiente mas também necessária, para a convergência de uma sequência de números reais.

Seja  $(x_n)$  uma sequência de números reais. Ela se chama uma sequência de Cauchy quando cumpre a seguinte condição: dado arbitrariamente um número real  $\varepsilon > 0$ , pode-se obter  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $m > n_0$  e  $n > n_0$  implicam  $|x_m - x_n| < \varepsilon$ .

Para que uma sequência  $(x_n)$  seja uma sequência de Cauchy, exige-se que seus termos  $x_m$  e  $x_n$ , para valores suficientemente grandes dos índices  $m$  e  $n$ , se aproximem arbitrariamente uns dos outros. Compare-se com a definição de limite, onde se exige que os termos  $x_n$  se aproximem arbitrariamente de um número real  $a$ , dado a priori. Aqui se impõe uma condição apenas sobre os termos da própria sequência.

**Teorema 7.5.13.** Toda sequência convergente é de Cauchy.

Intuitivamente, se  $\lim x_n = a$  então, para valores grandes de  $n$ , os termos  $x_n$  se aproximam de  $a$ . Nesse caso, eles devem necessariamente aproximar-se uns dos outros.

**Lema 7.5.1.** *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

**Lema 7.5.2.** *Se uma sequência de Cauchy ( $x_n$ ) possui uma subsequência convergindo para  $a \in \mathbb{R}$  então  $\lim x_n = a$ .*

**Teorema 7.5.14.** *Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.*

## 7.5.6 Limites Infinitos

Entre as sequências divergentes, destacaremos um tipo que se comporta com certa regularidade, a saber, aquelas cujos valores se tornam e se mantêm arbitrariamente grandes positivamente ou arbitrariamente grandes negativamente.

Seja  $(x_n)$  uma sequência de números reais. Diremos que  $x_n$  tende para mais infinito e escreveremos  $\lim x_n = +\infty$  quando, para todo número real  $A > 0$  dado arbitrariamente, pudermos encontrar  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $n > n_0 \Rightarrow x_n > A$  (ou seja, para qualquer  $A > 0$  dado, existe apenas um número finito de índices  $n$  tais que  $x_n \leq A$ ).

Evidentemente, se  $\lim x_n = +\infty$ , então  $(x_n)$  é ilimitada superiormente mas é limitada inferiormente. Além disso, se  $\lim x_n = -\infty$ , então toda subsequência de  $(x_n)$  tende para  $-\infty$ . De modo análogo, diz-se que  $\lim x_n = -\infty$  se, e somente se,  $\lim(-x_n) = +\infty$ . Portanto, se  $\lim x_n = -\infty$  então  $(x_n)$  é ilimitada inferiormente mas limitada superiormente. Há séries que não respeitam nenhum dos casos acima. Por exemplo,  $x_n = (-1)^n \cdot n$  não tem limite  $+\infty$  nem  $-\infty$  pois é ilimitada nos dois sentidos.

As sequências  $(x_n)$  para as quais  $\lim x_n = +\infty$  ou  $\lim x_n = -\infty$  não são convergentes. Deve-se observar que  $+\infty$  e  $-\infty$  não são números reais. Estas notações servem apenas para dar informação sobre o comportamento das sequências para valores grandes de  $n$ .

**Teorema 7.5.15.** *Sejam as seguintes operações aritméticas com limites infinitos:*

1. Se  $\lim x_n = +\infty$  e  $(y_n)$  é limitada inferiormente, então,  $\lim(x_n + y_n) = +\infty$ .
2. Se  $\lim x_n = +\infty$  e existe  $c > 0$  tal que  $y_n > c$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , então,  $\lim(x_n \cdot y_n) = +\infty$ .
3. Seja  $x_n > 0$  para todo  $n$ . Então,  $\lim x_n = 0 \iff \lim \frac{1}{x_n} = +\infty$ .
4. Sejam  $(x_n)$  e  $(y_n)$  sequências de números positivos. Então:

(a) se existe  $c > 0$  tal que  $x_n > c$  para todo  $n$  e se  $\lim y_n = 0$  tem-se  $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$ ;

(b) se  $(x_n)$  é limitada e  $\lim y_n = +\infty$  então  $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$ .

Também  $\frac{\infty}{\infty}$  é indeterminado. Isto quer dizer que se  $\lim x_n = +\infty$  e  $\lim y_n = +\infty$ , nada se pode dizer a respeito de  $\lim \frac{x_n}{y_n}$ . Dependendo do caso, o quociente  $\frac{x_n}{y_n}$  pode convergir, pode-se ter  $\lim \frac{x_n}{y_n} = +\infty$ , ou pode não existir o limite. Por exemplo, se  $x_n = n + 1$  e  $y_n = n - 1$  então

$\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim \frac{n+1}{n-1} = \lim \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = 1$ . Já se  $x_n = n^2$  e  $y_n = n$ , temos  $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim n = +\infty$ .

Finalmente, sejam  $x_n = [2 + (-1)^n]n$  e  $y_n = n$ . Temos que o  $\lim x_n = \lim y_n = +\infty$ , mas  $\lim \frac{x_n}{y_n} = \lim [2 + (-1)^n]$  não existe.

## 7.6 Séries Numéricas

Nesta etapa, estenderemos a operação de adição (até agora definida para um número finito de números reais) de modo a atribuir significado a uma igualdade do tipo  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1$ , na qual o primeiro membro é uma “soma” com uma infinidade de parcelas. É claro que não faz sentido somar uma sequência infinita de números reais. O que o primeiro membro da igualdade exprime é o limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)$ . A afirmação contida na igualdade significa que, dado arbitrariamente  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > n_0$ , a soma  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$  difere de 1 por menos de  $\varepsilon$ .

Portanto, vamos estudar séries através de limites. Assim sendo, pode-se esperar que algumas somas possam ser efetuadas, isto é, converjam, e outras não, já que nem todas possuem limite. Vamos nos referir a uma série em vez de soma infinita. O problema principal da teoria das séries é determinar quais são convergentes e quais não são. A questão de calcular o valor da soma é melhor abordada por meio da teoria das séries de funções, como séries de Taylor e séries de Fourier.

Seja  $(a_n)$  uma sequência de números reais. A partir dela, formamos uma nova sequência  $(s_n)$  cujos elementos são as somas

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad (7.6.1)$$

que se chama as reduzidas da série  $\sum a_n$ . A parcela  $a_n$  é chamada o  $n$ -ésimo termo ou o termo geral da série.

Se existir o limite

$$s = \lim s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n), \quad (7.6.2)$$

diz-se que a série  $\sum a_n$  é convergente e o limite  $s$  será chamado a soma da série. Escreve-se então,

$$s = \sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (7.6.3)$$

Se a sequência das reduzidas não convergir, diremos que a série  $\sum a_n$  é divergente.

A primeira condição necessária para a convergência de uma série é que o seu termo geral tenda para zero.

**Teorema 7.6.1.** Se  $\sum a_n$  é uma sequência convergente, então  $\lim a_n = 0$ . A recíproca não é verdadeira.

**Exemplo 7.6.1.** Seja a série harmônica  $\sum \frac{1}{n}$ . Seu termo geral,  $\frac{1}{n}$ , tende para zero, mas a série diverge. Com efeito, temos:

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{n} \\ &= 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{>1/2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{>1/2} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{>1/2} + \dots = 1 + \frac{1}{2}n. \end{aligned} \quad (7.6.4)$$

Segue-se que  $\lim s_n = +\infty$ . Resulta daí que, para  $0 < r < 1$ , a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$  diverge, pois  $\frac{1}{n^r} > \frac{1}{n}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exemplo 7.6.2.** A série  $\sum \frac{1}{n(n+1)}$  é convergente. Com efeito, sendo  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , a reduzida de ordem  $n$  é  $s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ . Logo,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim s_n = 1$ .

Uma série  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge se, e somente se,  $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$  converge, onde  $n_0 \in \mathbb{N}$  é fixado arbitrariamente. Com efeito, se as reduzidas da primeira série são  $s_n$ , as da segunda são  $t_{n+1} = s_{n+n_0} - s_{n_0}$ . Isto se exprime dizendo que o caráter de convergência de uma série não se altera se dela omitirmos (ou a ela acrescentarmos) um número finito de termos. Uma série  $\sum a_n$  pode divergir por dois motivos. Ou porque as reduzidas  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  não são limitadas ou porque elas oscilam em torno de alguns valores de aderência. Quando os termos da série têm todos o mesmo sinal, esta última possibilidade não ocorre, pois, neste caso, as reduzidas formam uma sequência monótona. Temos então o seguinte teorema:

**Teorema 7.6.2.** Seja  $a_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . A série  $\sum a_n$  converge se, e somente se, as reduzidas  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  formam uma sequência limitada, isto é, se, e somente se, existe  $k > 0$  tal que  $a_1 + \dots + a_n < k$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Deste teorema depreende-se o seguinte corolário.

**Corolário 7.6.1.** Sejam  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  séries de termos não-negativos. Se existem  $c > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que  $a_n \leq c \cdot b_n$  para todo  $n > n_0$  então a convergência de  $\sum b_n$  implica a convergência de  $\sum a_n$ , enquanto a divergência de  $\sum a_n$  acarreta a de  $\sum b_n$ .

Apresentamos agora um outro critério de convergência.

**Teorema 7.6.3 (Critério de Cauchy para Séries).** A fim de que a série  $\sum a_n$  seja convergente, é necessário e suficiente que, para cada  $\varepsilon > 0$ , exista  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$  quaisquer que sejam  $n > n_0$  e  $p \in \mathbb{N}$ .

Este teorema é muito utilizado para mostrar que se a série  $\sum |a_n|$  converge então  $\sum a_n$  também

converge. Este fato merece destaque. Uma série  $\sum a_n$  chama-se absolutamente convergente quando  $\sum |a_n|$  é uma série convergente.

**Exemplo 7.6.3.** Toda série convergente cujos termos não mudam de sinal é absolutamente convergente. Quando  $-1 < a < 1$ , a série geométrica  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$  é absolutamente convergente. Mas nem toda série convergente é absolutamente convergente. Um exemplo de uma série convergente  $\sum a_n$  tal que  $\sum |a_n| = +\infty$  é dado por

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}. \quad (7.6.5)$$

Suas reduzidas de ordem par são:

$$\begin{aligned} s_2 &= 1 - \frac{1}{2} \\ s_4 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ s_6 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

Tem-se  $s_2 < s_4 < s_6 < \dots < s_{2n} < \dots$ , pois cada par de parênteses encerra um número positivo. Enquanto isso, as reduzidas de ordem ímpar são:

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_3 &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ s_5 &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) \end{aligned}$$

Portanto,  $s_1 > s_3 > s_5 > \dots > s_{2n-1}$ . Logo, existem  $s' = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n}$  e  $s'' = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1}$ . Como  $s_{2n-1} - s_{2n} = \frac{1}{2n+1} \Rightarrow 0$ , segue-se que  $s' = s''$ . Assim,  $\lim s_n = s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$ . A série é convergente, mas não é absolutamente convergente. Quando uma série  $\sum a_n$  converge mas  $\sum |a_n|$  é divergente, diz-se que  $\sum a_n$  é condicionalmente convergente.

Assim, temos o seguinte teorema:

**Teorema 7.6.4.** Toda série absolutamente convergente é convergente.

**Corolário 7.6.2.** Seja  $\sum b_n$  uma série convergente, com  $b_n \geq 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Se existem  $k > 0$  e  $n_0 \in \mathbb{N}$  tais que  $|a_n| \leq k \cdot b_n$  para todo  $n > n_0$ , então a série  $\sum a_n$  é (absolutamente) convergente.

**Corolário 7.6.3.** Se, para todo  $n > n_0$ , tem-se  $|a_n| \leq k \cdot c^n$  em que  $0 < c < 1$  e  $k$  é uma constante positiva, então a série  $\sum a_n$  é (absolutamente) convergente.

**Corolário 7.6.4 (Teste da Raiz).** Se existe  $c$  tal que  $\sqrt[n]{|a_n|} \leq c < 1$  para todo  $n > n_0$  então  $\sum a_n$  é

(absolutamente) convergente. Em outras palavras, se  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$  então a série  $\sum a_n$  converge (absolutamente).

**Corolário 7.6.5.** Se  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} < 1$  então a série  $\sum a_n$  é (absolutamente) convergente.

Se existe uma infinidade de índices  $n$  para os quais  $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$  então a série  $\sum a_n$  é evidentemente divergente porque seu termo geral não tende para zero. Em particular, isto ocorre quando  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ . Às vezes, se tem que  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ . Aí não é possível dizer nada. Por exemplo, sejam as séries  $\sum \frac{1}{n}$  e  $\sum \frac{1}{n^2}$ . Em ambos os casos,  $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$ . No entanto, a primeira série é divergente e a segunda é convergente.

**Teorema 7.6.5 (Teste da Razão).** Sejam  $\sum a_n$  uma série de termos todos não-nulos e  $\sum b_n$  uma série convergente com  $b_n > 0$  para todo  $n$ . Se existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \frac{|b_{n+1}|}{|b_n|}$  para todo  $n > n_0$  então  $\sum a_n$  é (absolutamente) convergente.

**Corolário 7.6.6.** Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$  então a série  $\sum a_n$  é (absolutamente) convergente.

**Exemplo 7.6.4.** Seja a série  $\sum n \cdot a^n$ . Do teste da razão, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|(n+1)a^{n+1}|}{|n \cdot a^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |a| = |a|. \quad (7.6.6)$$

Logo, a série  $\sum n \cdot a^n$  converge quando  $|a| < 1$ .

**Exemplo 7.6.5.** Seja a série  $1 + 2a + a^2 + 2a^3 + a^4 + \dots$

Temos  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|a|}{2}$  se  $n$  for par, e  $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|a|$  se  $n$  for ímpar. Portanto,  $\limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 2|a|$  e o teste da razão só permite concluir a convergência da série para  $|a| < \frac{1}{2}$ , enquanto que o teste da raiz garantiria a mesma, mas geralmente, para  $|a| < 1$ .

Isto indica que o teste da raiz é mais eficaz do que o da razão. Assim, temos que  $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  e que, se existe  $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  então existe também  $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$  e os dois limites são iguais.

Assim, com o teste da raiz, se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$  nada se pode concluir. Então, seja o seguinte teorema:

**Teorema 7.6.6.** Seja  $(a_n)$  uma sequência limitada de números reais positivos. Tem-se  $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ . Em particular, se existir  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$  existirá também  $\lim \sqrt[n]{a_n}$  e os dois limites serão iguais.

**Teorema 7.6.7 (Teste da Integral).** Seja  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, positiva e decrescente. Seja  $(a_n) = f(n)$  uma sequência limitada de números reais. A série  $\sum a_n$  é convergente se, e somente se, a integral imprópria  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  for convergente.

**Exemplo 7.6.6.** A série de Riemann  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  converge se  $\alpha > 1$ .

Veja:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{X \rightarrow \infty} \int_1^X \frac{1}{x^\alpha} dx \\
&= \lim_{X \rightarrow \infty} \left[ \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^X \\
&= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{X \rightarrow \infty} (X^{1-\alpha} - 1) \\
&= \frac{1}{\alpha-1}.
\end{aligned} \tag{7.6.7}$$

Vamos agora ver outro critério de convergência, que não garante a convergência absoluta, o critério de Dirichlet.

**Teorema 7.6.8 (Critério de Dirichlet).** Seja  $\sum a_n$  uma série (não necessariamente convergente) cujas reduzidas  $s_n = a_1 + \dots + a_n$  formam uma sequência limitada. Seja  $(b_n)$  uma sequência não-crescente de números positivos com  $\lim b_n = 0$ . Então a série  $\sum a_n b_n$  é convergente.

A partir deste teorema, extraímos dois corolários importantes.

**Corolário 7.6.7 (Abel).** Se  $\sum a_n$  é convergente e  $(b_n)$  é uma sequência não-crescente de números positivos (não necessariamente tendendo para zero) então a série  $\sum a_n b_n$  é convergente.

Enfraquecemos a hipótese sobre os  $b_n$  mas, em compensação, exigimos que a série  $\sum a_n$  seja convergente.

**Exemplo 7.6.7.** Sendo  $\theta$  a medida em radianos de um ângulo tal que  $\cos(\theta) \neq 1$ , seja  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ . Avalie a convergência.

Observe que  $a_n = \sin(n\theta)$  e  $b_n = \frac{1}{n}$ . Nesse caso,  $b_n \rightarrow 0$  e, portanto, é não-crescente com  $\lim b_n = 0$ . Por sua vez,

$$\sum_{n=1}^N \sin(n\theta) = \sin(N\theta) + \frac{\sin((N-1)\theta) - \sin(N\theta) + \sin(\theta)}{2 - \cos(\theta)} < M \tag{7.6.8}$$

Portanto,  $a_n$  é limitada e a série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$  é convergente.

**Corolário 7.6.8 (Leibiniz).** Se  $(b_n)$  é uma sequência não-crescente com  $\lim b_n = 0$  então a série  $\sum (-1)^n b_n$  é convergente.

Embora a série  $\sum (-1)^n$  não converja, suas reduzidas formam uma sequência limitada.

Vamos analisar se as propriedades aritméticas, tais como associatividade, comutatividade, entre outras, se estendem das somas finitas para as séries.

### 1. Associatividade

Dada uma série convergente  $\sum a_n$ , o que ocorre se inserirmos parênteses entre seus termos? Seja  $(s_n)$  a sequência das reduzidas da série  $\sum a_n$ . Ao inserirmos parênteses entre os termos de  $\sum a_n$  obteremos uma nova série cuja sequência de reduzidas é uma subsequência de  $(s_n)$ .

Se a série  $\sum a_n$  converge, então  $(s_n)$  converge e portanto toda subsequência de  $(s_n)$  também converge para o mesmo limite. Assim, ainda obtemos uma série convergente com a mesma soma que a original.

## 2. Dissociatividade

O mesmo não ocorre se dissociamos termos de uma série convergente. Neste caso poderemos obter uma série divergente. A série antiga pode ser considerada como obtida da nova por associação de termos: as reduzidas da série original formam uma subsequência das reduzidas da nova série. Aquelas podiam convergir sem que estas convirjam.

Existe uma situação em que se pode garantir que a dissociação de termos de uma série não afeta sua convergência nem o valor da soma. É o caso de uma série absolutamente convergente  $\sum a_n$ , na qual se decompõem seus termos como somas finitas de parcelas com o mesmo sinal.

## 3. Comutatividade

Dada uma série  $\sum a_n$ , mudar a ordem dos seus termos significa tomar uma bijeção  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  e considerar a série  $\sum b_n$ , em que  $b_n = a_{\varphi(n)}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . O problema é, então, o seguinte: supondo  $\sum a_n$  convergente, será ainda  $\sum b_n$  convergente? No caso afirmativo, vale  $\sum a_n = \sum b_n$ ?

Diremos que uma série  $\sum a_n$  é comutativamente convergente quando, para toda bijeção  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , pondo-se  $b_n = a_{\varphi(n)}$ , a série  $\sum b_n$  é convergente e  $\sum a_n = \sum b_n$ .

**Exemplo 7.6.8.** A série  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$  é condicionalmente convergente. Seja  $s$  a sua soma; então

$$\begin{aligned} s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \dots \\ \frac{s}{2} &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + \dots \end{aligned}$$

multiplicando por  $1/2$  e acrescentando parcelas nulas. Somando agora termo a termo as duas séries anteriores, obtém-se

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

que é uma série com os mesmos termos da série inicial, tomados por uma ordem diferente. Esta reordenação conduziu a uma soma diferente da inicial, logo a série não é comutativamente convergente.

Os dois próximos resultados mostram que as séries comutativamente convergentes são séries absolutamente convergentes.

**Teorema 7.6.9.** Toda a série absolutamente convergente é comutativamente convergente.

**Teorema 7.6.10 (Riemann).** Seja  $\sum a_n$  uma série condicionalmente convergente. Dado um número real qualquer  $\sigma$ , existe uma bijeção  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  tal que  $\sum a_{\varphi(n)} = \sigma$ .

Um raciocínio análogo permite demonstrar que existem reordenações dos termos da série que dão origem a séries divergentes, com sucessões associadas a tender para  $+\infty$  (ou  $-\infty$ ).

O raio de convergência da série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , sempre que exista o limite de  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , é dado por  $\frac{1}{L} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ .

**Exemplo 7.6.9.** Seja a seguinte série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n} \quad (7.6.9)$$

O limite é  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ . Como  $r = 1/L = R = 1$ . Assim, sendo a série centrada em  $a = 2$ , temos que  $(a - R, a + R) = (1, 3)$ . Quando  $x = 1$ , a série retorna:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ . Como converge,  $x = 1$  pertence ao intervalo de convergência. Quando  $x = 3$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)^n}{n}$  diverge. Então o raio de convergência é  $[1, 3]$ .

## 7.7 Sucessões de Funções

Seja  $X \subset \mathbb{R}$  e  $\mathcal{F}$  o conjunto das funções reais definidas em  $X$ . Uma aplicação de  $\mathbb{N}$  em  $\mathcal{F}$  é dita uma sucessão de funções. Ao invés das sucessões numéricas, para as quais só existe uma noção de limite, para as sucessões de funções são várias as possibilidades de definir o limite. Analisamos em seguida as mais usuais.

**Definição 7.7.1.** Uma sucessão de funções  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  converge simplesmente (ou pontualmente) para uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  se, para todo  $x \in X$ , se tem  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , i.e.,

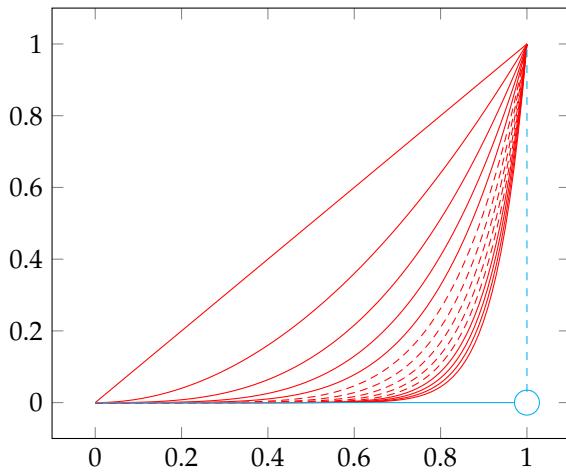
$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (7.7.1)$$

A interpretação geométrica desta noção de limite é a seguinte: para cada ponto  $x \in X$ , a sucessão de pontos  $(x, f_n(x))$ , correspondente à intersecção da reta vertical que passa por  $x$  com os gráficos das funções  $f_n$ , converge para  $(x, f(x))$ , o ponto de intersecção da mesma reta com o gráfico de  $f$ .

**Exemplo 7.7.1.** Seja  $f_n = x^n$ ,  $x \in [0, 1]$ . Para cada  $x \in [0, 1)$ , a sucessão numérica  $x^n$  converge para 0; já para  $x = 1$ , a sucessão constante  $1^n$  tende para 1. O limite é pois a função  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases} \quad (7.7.2)$$

FIGURA 7.7.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f_n = x^n$



Na definição da convergência simples, a ordem  $n_0$  depende não apenas de  $\varepsilon$  mas também do ponto  $x_0$ . Para o mesmo  $\varepsilon$ , nada obriga que, para pontos diferentes, o  $n_0$  seja o mesmo. A definição considera cada ponto isoladamente e não a função como um todo. Como consequência, algumas propriedades, por exemplo a continuidade, perdem-se na passagem ao limite (cf. o exemplo anterior). A definição seguinte vem dar resposta a estas limitações.

**Definição 7.7.2.** Uma sucessão de funções  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente para uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X. \quad (7.7.3)$$

A interpretação geométrica é a seguinte: para cada  $\varepsilon > 0$ , a faixa de raio  $\varepsilon$  em torno do gráfico de  $f$

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X; |y - f(x)| < \varepsilon \right\}, \quad (7.7.4)$$

contém, a partir da ordem  $n_0$ , os gráficos de todas as funções  $f_n$ .

É evidente que se uma sucessão converge uniformemente para um dado limite também converge simplesmente para o mesmo limite. O limite uniforme, se existir, será, portanto, o limite simples.

A definição dada é trivialmente equivalente a afirmar que a sucessão numérica definida como

$$M_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \quad (7.7.5)$$

é um infinitésimo. Esta observação constitui um critério prático para investigar se, identificado o limite simples de uma dada sucessão de funções, a convergência é uniforme.

**Exemplo 7.7.2.** Seja  $f_n(x) = x^n(1-x)^n$  para  $x \in [0, 1]$ .

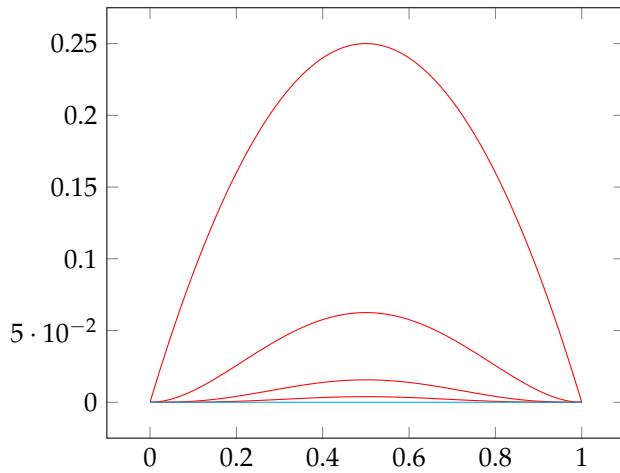
Usando a noção de convergência simples, é fácil verificar que o limite é a função nula em  $[0, 1]$ .

Sob a definição de convergência uniforme,

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} |x^n(1-x)^n - 0| = \frac{1}{4}. \quad (7.7.6)$$

Logo, a convergência não é uniforme.

FIGURA 7.7.2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f_n = x^n(1-x)^n$



O primeiro teorema apresentado abaixo justifica a afirmação heurística de que o limite uniforme de funções contínuas é uma função contínua.

**Teorema 7.7.1.** Seja  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  uma sucessão de funções uniformemente convergente para  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . Se cada  $f_n$  for contínua no ponto  $a \in X$  então  $f$  também é contínua no ponto  $a$ .

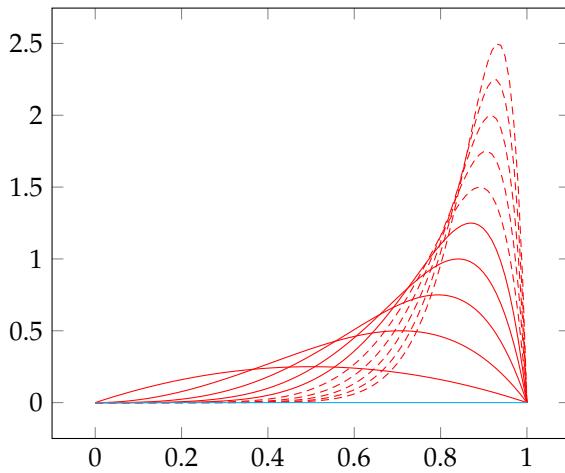
**Exemplo 7.7.3.** Verifiquemos que o resultado não é válido se se exigir apenas a convergência simples: a sucessão de funções  $f_n(x) = nx^n(1-x^n)$  converge simplesmente, no intervalo  $[0, 1]$ , para a função nula. Tem-se

$$0 = \int_0^1 0 dx \neq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)(2n+1)} = \frac{1}{2}. \quad (7.7.7)$$

A convergência não é uniforme já que, por inspeção da monotonia da função, se conclui que

$$M_n = \sup_{x \in [0,1]} |nx^n(1-x^n) - 0| = \frac{n}{4} \Rightarrow +\infty. \quad (7.7.8)$$

FIGURA 7.7.3 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = nx^n(1 - x^n)$



A condição relevante é a convergência uniforme das derivadas, como se precisa a seguir.

**Teorema 7.7.2.** Seja  $(f_n)$  uma sucessão de funções de classe  $C^1$  em  $[a, b]$ . Se, para um certo  $c \in [a, b]$ , a sucessão numérica  $(f_n(c))$  convergir e a sucessão das derivadas  $(f'_n)$  convergir uniformemente em  $[a, b]$  para uma função  $g$ , então  $(f_n)$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para uma função  $f$ , de classe  $C^1$ , tal que  $f' = g$ .

## 7.8 Séries de Funções

Por analogia com o caso das séries numéricas, definimos séries de funções convergente através da sua sucessão (de funções) associada. Assim, dadas funções  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que a série  $\sum f_n(x)$  é convergente e tem soma  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  se a sua sucessão associada

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, x \in X, \quad (7.8.1)$$

for convergente para  $f$ .

A série converge uniformemente se a sua sucessão associada  $(s_n)$  convergir uniformemente para  $f$ , o que é equivalente a dizer que a sucessão dos restos

$$r_n(x) = \sum_{k>n} f_k(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots, \quad n \in \mathbb{N}, x \in X, \quad (7.8.2)$$

converge uniformemente para zero. Esta equivalência é evidente pois

$$r_n = f - s_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (7.8.3)$$

Os teoremas relativos à convergência demonstrados anteriormente têm análogos óbvios no contexto das séries de funções:

- Se  $\sum f_n$  convergir uniformemente para  $f$  e cada  $f_n$  for contínua no ponto  $a$  então  $f$  também é contínua no ponto  $a$ .
- Se  $\sum f_n$  convergir uniformemente para  $f$  e cada  $f_n$  for integrável em  $[a, b]$  então  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e  $\int_a^b f(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx$ .
- Se cada  $f_n$  for de classe  $C^1$  em  $[a, b]$ , se, para um certo  $c \in [a, b]$ , a série  $\sum f_n(c)$  convergir e se a série das derivadas  $\sum f'_n$  convergir uniformemente em  $[a, b]$ , então  $\sum f_n$  converge uniformemente em  $[a, b]$  para uma função de classe  $C^1$  e  $(\sum f_n)' = \sum f'_n$ .

A forma mais conveniente de concluir que uma série converge uniformemente é dada pelo seguinte critério.

**Teorema 7.8.1 (Critério de Weierstraß).** *Sejam  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\sum a_n$  uma série numérica convergente, de termos  $a_n \geq 0$ , tal que*

$$|f_n(x)| \leq a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X. \quad (7.8.4)$$

*Então as séries  $\sum |f_n|$  e  $\sum f_n$  são uniformemente convergentes.*

## 7.9 Aplicações

### 7.9.1 Relações de Preferência

A continuidade de  $\succsim$  em  $X$  implica que para qualquer sequência de pontos  $(y_n)$  com  $x \succsim y_n, \forall n$  e  $y_n$  convergindo para  $y$ , temos  $x \succsim y$ . E isso implica que o conjunto de contorno inferior  $L(x) = \{y \in X: x \succsim y\}$  é fechado.

A relação de preferência  $\succsim$  em  $X \subset \mathbb{R}_+$  é contínua se for preservada sob limites. Ou seja, para qualquer sequência de pares  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$  com  $x_n \succsim y_n$  para todo  $n$ ,  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  e  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , temos  $x \succsim y$ . Em palavras, se você tem uma sequência de reais  $x_n$  e  $y_n$  em que cada termo em  $x_n$  é maior ou igual a  $y_n$  e  $x_n \rightarrow x$  e  $y_n \rightarrow y$ , então tem-se  $x \succsim y$ .

A definição acima implica o seguinte: para qualquer sequência de pares  $\{(x_n, y_n)\}_{n=1}^\infty$  com  $x_n \succsim y_n$  para todo  $n$ , em que  $x_n = x \forall n$  e  $y_n$  convergindo para  $y$ , temos  $x \succsim y$ .

A primeira parte implica a segunda. Suponha, por exemplo, que  $x_n = 2, 2, \dots$ , tal que  $x = 2$  e  $y = 1$ . Como o conjunto das sequências  $y_n$  que satisfaz essa condição realmente se parece na linha real? Cada termo tem que ser menor ou igual a 2, mas estamos no espaço não-negativo de bens  $\mathbb{R}_+$ , então temos um conjunto de sequências limitadas no intervalo  $[0, 2]$  mas convergente ao número 1. Este exemplo ainda é válido para qualquer par de sequências de reais  $x_n \succsim y_n$ . A sequência

de reais é uma sequência limitada em  $[0, x]$  convergindo para qualquer ponto  $y \in [0, x]$  enquanto  $x_n = x, x, x, \dots$ , temos  $x \geq y$ .

Defina o conjunto de contorno inferior como  $L(x) = \{y \in X: x \succsim y\}$ . Então, a segunda parte implica que  $L(x)$  é fechado. Para qualquer par de sequências de reais  $x_n \geq y_n$ , em que  $y_n$  é uma sequência limitada em  $[0, x]$  convergindo para qualquer ponto  $y \in [0, x]$  e  $x_n = x, x, x, \dots$ , temos  $x \geq y$ . O conjunto de contorno inferior é exatamente uma coleção de números reais  $y$  tal que é menor ou igual a algum  $x$  na linha real. Então para qualquer número real  $y \in [0, x]$ , tem-se uma sequência de reais delimitada por 0 e  $x$  que converge para aquele  $y$ . Então,  $L(x)$  contém todos os seus pontos limites. Por isso, é fechado.

### 7.9.2 Sequências de Eventos e o Lema de Borel-Cantelli

Vamos apresentar o lema de Borel-Cantelli, uma das ferramentas mais úteis na Teoria da Probabilidade e uma peça importante na prova da Lei Forte dos Grandes Números.

Se  $A_1, A_2, \dots$  é uma sequência de eventos, isto é, se  $A_n \subset \Omega$  para  $n = 1, 2, \dots$ , o limite superior da sequência é definido por

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad (7.9.1)$$

o limite inferior é, por definição,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k. \quad (7.9.2)$$

O evento  $\limsup A_n$  é o evento “ocorrência de um número infinito dos  $A_n$ ”, pelo seguinte raciocínio. Se  $\omega \in \limsup A_n$ , então

$$\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \forall n. \quad (7.9.3)$$

Como

$$\omega \in \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \omega \in A_{k_1} \quad (7.9.4)$$

para algum  $k_1$ . Mas

$$\omega \in \bigcup_{k=k_1+1}^{\infty} A_k, \quad (7.9.5)$$

logo  $\omega \in A_{k_2}$  para algum  $k_2 > k_1$ . Continuando, temos

$$\omega \in \bigcup_{k=k_2+1}^{\infty} A_k, \quad (7.9.6)$$

logo  $\omega \in A_{k_3}$  para algum  $k_3 > k_2$ , etc. Desta maneira obtemos uma sequência crescente de inteiros positivos  $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ , que dependem de  $\omega$ , tais que  $\omega \in A_{k_n}, \forall n$ . Portanto,  $\omega$  pertence a um número infinito dos  $A_n$ .

Reciprocamente, se  $\omega$  pertence a um número infinito dos  $A_n$ , então:

$$\omega \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \forall n, \quad (7.9.7)$$

de modo que  $\omega \in \limsup A_n$ . Concluímos que  $\omega \in \limsup A_n$  se, e somente se,  $\omega$  pertence a um número infinito dos  $A_n$ .

A notação  $\limsup A_n$  com  $A_n$  infinitas vezes significa que o evento  $A_n$  infinitas vezes é o evento ocorrência de um número infinito dos  $A_n$ . Cada  $A_n$  ocorre ou não, portanto é importante não cair no erro de pensar em infinitas ocorrências de, por exemplo,  $A_1$ .

O evento  $\liminf A_n$  também tem uma interpretação intuitiva. É o evento ocorrência de  $A_n$  para todo  $n$  suficientemente grande. Para ver isso, note que  $\omega \in \liminf A_n$  se, e somente,  $\omega \in \cap_{k=n_0}^{\infty} A_k$  para algum  $n_0 = n_0(\omega)$ , ou seja,  $\omega \in A_k$  para todo  $k$  suficientemente grande ( $k \geq n_0$ ).

Caso  $\limsup A_n = \liminf A_n \stackrel{\text{def}}{=} A$ , este evento é chamado limite de  $A_n$  e escrevemos  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  ou  $A_n \rightarrow A$ . Neste caso,  $P(A_n)$  converge para  $P(A)$ , se os eventos são aleatórios, de modo que probabilidade é contínua não somente para sequências monótonas, como também para sequências convergentes neste sentido mais geral.

Com isso em mente, seja o seguinte lema.

**Lema 7.9.1 (Lema de Borel-Cantelli).** Sejam  $A_1, A_2, \dots$  eventos aleatórios em  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , sto é,  $A_n \in \mathcal{A} \forall n$ .

- Se  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , então  $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 0$
- Se  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$  e os  $A_n$  são independentes, então  $P(A_n \text{ infinitas vezes}) = 1$

Consideremos uma sequência de ensaios binomiais independentes com probabilidade  $p_n$  de sucesso no  $n$ -ésimo ensaio. Sejam  $X_n = 1$  se o  $n$ -ésimo ensaio é sucesso e  $X_n = 0$  se o  $n$ -ésimo ensaio é fracasso. Então, vale o seguinte: se  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = +\infty$ , então  $P(\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty) = 1$ , por outro lado, se  $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty$ , então  $P(\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty) = 0$ . Em outras palavras,

1.  $\sum p_n < \infty$ : um número finito de sucessos, quase certamente.
2.  $\sum p_n = \infty$ : um número infinito de sucessos, quase certamente.

### 7.9.3 Convergência Estocástica

Vamos estender a noção do limite de uma sequência de números para a da convergência de uma sequência de variáveis aleatórias.

**Definição 7.9.1.** *Convergência em probabilidade: seja uma sequência  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de variáveis aleatórias e  $X$  uma variável aleatória. Dizemos que  $\{X_n\}_{n \geq 1}$  converge em probabilidade em  $X$  se, dado  $\varepsilon > 0$ ,*

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad \therefore \quad X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X \quad (7.9.8)$$

**Definição 7.9.2.** *Um estimador  $\hat{\theta}_n$  é consistente para um parâmetro  $\theta$  se  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \theta$ .*

**Definição 7.9.3.** *Convergência em média  $r$  ou  $L^r$ :*

$$X_n \xrightarrow{r} X \text{ se } \mathbb{E}|X_n - X|^r \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty \quad (7.9.9)$$

Observe que se  $r = 2$ , então tem-se o erro quadrático médio, que é uma das medidas preferidas para medir o desempenho de uma estimativa de um escalar  $\theta$ . Sabe-se que se  $X_n \xrightarrow{r} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ . Assim, com  $r = 2$ ,  $\mathbb{E}(\hat{\theta}_n - \theta)^2 = \text{MSE}(\hat{\theta}_n)$ . Logo, se  $\text{MSE}(\hat{\theta}_n) \rightarrow 0$ , então  $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathcal{P}} \theta$ .

Lembre-se da lei dos grandes números.

- Caso típico:  $X_1, \dots, X_n$  i.i.d. com  $\mathbb{E}(X) = \mu$ . Então,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{\mathcal{P}} \mu$ .
- Caso matricial: suponha que  $\mathbb{E}\left(\vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}_i'\right) < +\infty$  elemento a elemento,  $i = 1, \dots, n$ , e  $\vec{\mathbf{X}}_1, \dots, \vec{\mathbf{X}}_n$  é i.i.d. Então,  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}_i' \xrightarrow{\mathcal{P}} Q_{k \times k}$  finita<sup>1</sup>.

Sabemos do estimador de MQO, que:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}^{MQO} &= \left( \underbrace{\sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}_i'}_{k \times k} \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{y}}_i \right). \\ \hat{\beta}^{MQO} &= \left( \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}_i' \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}_i' \beta \right) + \left( \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}_i' \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\epsilon}_i \right) \\ \hat{\beta}^{MQO} &= \underbrace{\left( \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}_i' \right)}_{= I}^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}_i' \right) \beta + \left( \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}_i' \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\epsilon}_i \right). \end{aligned} \quad (7.9.10)$$

<sup>1</sup> Se  $Q$  for positiva definida ela possui inversa.

Considerando que  $\mathbb{E} \left( \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}'_i \right)$  é finita e tem posto igual a  $k$  e usando este resultado no estimador de MQO, obtemos:

$$\hat{\beta}^{MQO} - \beta = \underbrace{\left( n^{-1} \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}'_i \right)^{-1}}_{\xrightarrow{\mathcal{P}} Q^{-1}} \underbrace{\left( n^{-1} \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\varepsilon}_i \right)}_{\xrightarrow{\mathcal{P}} 0}. \quad (7.9.11)$$

Pela LGN,

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}'_i \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{E}(\vec{\mathbf{X}}_i \vec{\mathbf{X}}'_i), \quad (7.9.12)$$

e

$$n^{-1} \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{X}}_i \vec{\varepsilon}_i \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathbb{E}(\vec{\mathbf{X}}_i \vec{\varepsilon}_i). \quad (7.9.13)$$

Então,  $\hat{\beta}^{MQO} - \beta \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ . Logo,  $\hat{\beta}^{MQO}$  é consistente.

---

8

---

---

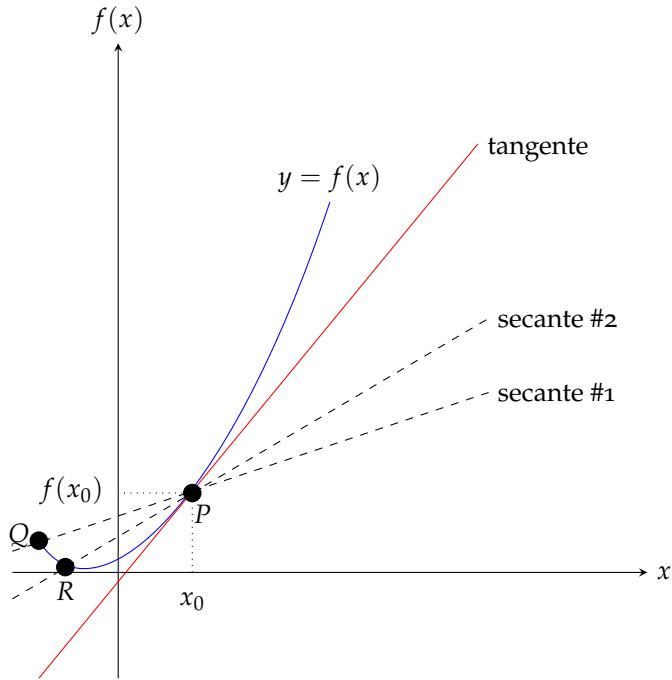
DERIVADAS

---

## 8.1 Introdução

Para trabalhar com derivadas você precisa saber o que é um limite, mas para motivar por que vamos estudar limites, vamos primeiro olhar para os dois problemas clássicos que deram origem à noção de derivada: a reta tangente a uma curva e a velocidade instantânea de um objeto em movimento.

FIGURA 8.1.1 – APROXIMANDO UMA RETA TANGENTE POR UMA SÉQUÊNCIA DE SECANTES



Seja  $P(x_0, f(x_0))$  o ponto no gráfico em que se deseja desenhar a tangente à curva  $y = f(x)$ . Se você estiver fazendo um desenho real de papel e tinta, você pegaria uma régua, verificaria se ela passava por  $P$  e depois a giraria até não cruzar o gráfico em nenhum outro lugar.

Se você estiver usando equações para descrever a curva e as linhas, poderá escolher um ponto  $Q(x_0 + h_1, f(x_0 + h_1))$  no gráfico e construir a linha por meio de  $P$  e  $Q$  ("construir" significa encontrar uma equação para). Essa linha é chamada de "secante" e, claro, não é a tangente que você está procurando. Mas se você escolher um ponto  $Q$  muito próximo de  $P$ , então a secante estará próxima da tangente.

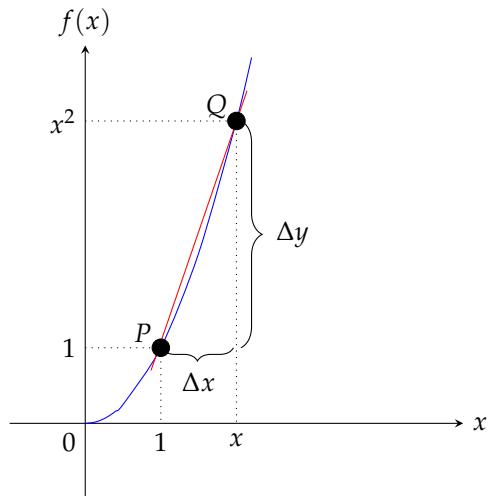
Então esta é a nossa "fórmula" para construir a tangente através de  $P$ : escolha outro ponto no gráfico e encontre a linha através de  $P$  e  $Q$ , e veja o que acontece com esta linha à medida que você aproxima  $Q$  de  $P$ . Para isso, escolha o ponto  $R(x_0 + h_2, f(x_0 + h_2))$ . Depois aproxime-se cada vez mais de uma linha, e essa linha é a tangente. Nós vamos descrever isso em fórmulas, mas primeiro vamos nos preocupar sobre quão próximo  $R$  deve ser de  $P$ . Não podemos definir  $R$  igual a  $P$ , porque então  $P$  e  $R$  não determinariam uma linha (você precisa de dois pontos para determinar

uma linha). Se você escolher  $R$  diferente de  $P$  então você não obtém a tangente, mas na melhor das hipóteses algo que está “próximo” a ela. Algumas pessoas sugeriram que se deveria tomar  $R$  “infinitamente próximo” de  $P$ , mas não está claro o que isso significaria. O conceito de limite serve para resolver esse problema confuso.

## 8.2 Tangente a uma Parábola

Para tornar as coisas mais concretas, suponha que a função que tínhamos fosse  $f(x) = x^2$  e que o ponto fosse  $P(1, 1)$ . O gráfico de  $f$  é obviamente uma parábola. Qualquer linha através do ponto  $P(1, 1)$  tem a equação  $y - 1 = m(x - 1)$ , em que  $m$  é a inclinação da reta. Então, em vez de encontrar a equação das linhas secantes e tangentes, encontraremos suas inclinações.

FIGURA 8.2.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $y = x^2$



Seja  $Q$  o outro ponto na parábola, com coordenadas  $(x, x^2)$ . Nós podemos “mover  $Q$  ao longo do gráfico” mudando  $x$ . Seja qual for o  $x$  que escolhemos, deve ser diferente de 1, pois de outro modo  $P$  e  $Q$  seriam o mesmo ponto. O que queremos descobrir é como a linha através de  $P$  e  $Q$  muda se  $x$  é alterado (e, em particular, se  $x$  é escolhido muito próximo de  $a$ ). A secante ainda passa por  $P$ . Então, para descrever a secante precisamos apenas conhecer sua inclinação. A inclinação da linha secante que une  $P$  e  $Q$  é

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1, \quad (8.2.1)$$

em que  $\Delta y = x^2 - 1$  e  $\Delta x = x - 1$ .

Quando  $x$  se aproxima de 1, a inclinação  $m_{PQ}$ , sendo  $x + 1$ , se aproxima de 2. Dizemos que “o limite da inclinação  $m_{PQ}$  quando  $Q$  se aproxima de  $P$  é 2”. Em notação simbólica,

$$\lim_{Q \rightarrow P} m_{PQ} = 2, \quad (8.2.2)$$

ou, como  $Q$  se aproximando de  $P$  é o mesmo que  $x$  se aproximando de 1,

$$\lim_{x \rightarrow 1} m_{PQ} = 2. \quad (8.2.3)$$

Então nós achamos que a linha tangente à parábola  $y = x^2$  no ponto  $(1, 1)$  tem a seguinte equação

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \therefore \quad y = 2x - 1. \quad (8.2.4)$$

Um aviso: você não pode substituir  $x = 1$  na equação (8.2.1) para obter (8.2.3) mesmo que pareça que foi o que fizemos. A razão pela qual você não pode fazer isso é que quando  $x = 1$  o ponto  $Q$  coincide com o ponto  $P$  e então a linha através de  $P$  e  $Q$  não é definida; também, se  $x = 1$ , então,  $x = y = 0$ , de modo que:

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0} = \text{indefinido}. \quad (8.2.5)$$

Mas se os passos intermediários que levam a  $m_{PQ} = x + 1$  não são válidos para  $x = 1$ , por que o resultado final deve significar algo para  $x = 1$ ? Algo mais complicado aconteceu. Fizemos um cálculo que é válido para todos os valores de  $x \neq 1$  e depois analisamos o que acontece se  $x$  fica muito próximo de 1. Este é o conceito de limite e vamos estudá-lo em mais detalhes mais adiante nesta seção, mas primeiro outro exemplo.

## 8.3 Velocidade Instantânea

Se você tentar definir velocidade instantânea, você acabará tentando dividir zero por zero. Quando você está dirigindo seu carro, o velocímetro diz a você o quanto rápido você está indo, ou seja, qual é a sua velocidade. O que é essa velocidade? O que significa se o velocímetro diz “50km/h”?

Nós todos sabemos o que é velocidade média. Ou seja, se você leva duas horas para percorrer 100 km, então o seu velocidade média foi

$$\frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo}} = 50\text{km/h}. \quad (8.3.1)$$

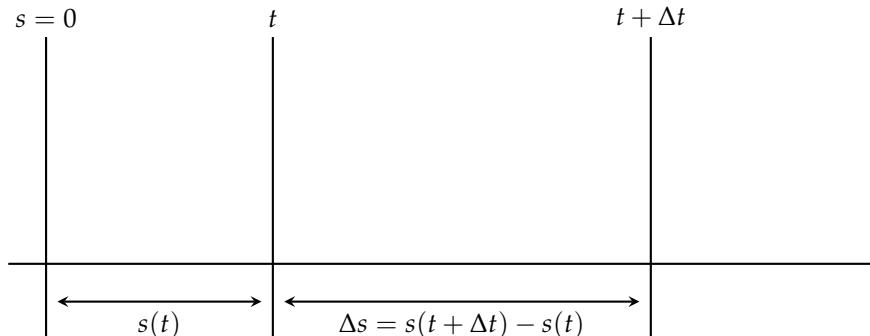
Este não é o número que o velocímetro oferece a você – ele não espera duas horas, mede até onde você foi e calcule distância/tempo. Se o velocímetro do seu carro lhe disser que você está dirigindo 50km/h, essa deve ser a sua velocidade no momento em que você olha para o seu velocímetro, ou seja, a distância percorrida ao longo do tempo no momento em que você olha para o velocímetro. No momento em que você olha para o seu velocímetro, não passa nenhum tempo (porque um momento não tem comprimento) e você não percorreu nenhuma distância, então sua velocidade nesse momento é  $\frac{0}{0}$ , ou seja, indefinido. Mas então o que é o velocímetro mostra?

Para expressar isso em fórmulas, precisamos introduzir alguma notação. Seja  $t$  o tempo (em horas) que passou desde que chegamos à estrada, e seja  $s(t)$  a distância que percorremos desde então. Em vez de tentar encontrar a velocidade exatamente no tempo  $t$ , encontramos uma fórmula para a velocidade média durante algum intervalo de tempo (curto) começando no tempo  $t$ . Vamos denotar por  $\Delta t$  o tamanho do intervalo de tempo.

No momento  $t$  percorremos  $s(t)$  quilômetros. Um pouco mais tarde, em  $t + \Delta t$  nós percorremos  $s(t + \Delta t)$ . Portanto, durante o intervalo entre  $t$  e  $t + \Delta t$  nós nos movemos  $s(t + \Delta t) - s(t)$ . Nossa velocidade neste intervalo de tempo é:

$$\frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \text{ km/h.} \quad (8.3.2)$$

FIGURA 8.3.1 – VELOCIDADE INSTANTÂNEA



Quanto mais curto fizermos o intervalo de tempo, ou seja, quanto menor escolhermos  $\Delta t$ , mais próximo este número deverá ser da velocidade instantânea no instante  $t$ .

Então nós temos a seguinte fórmula (definição, na verdade) para a velocidade no tempo  $t$ :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}. \quad (8.3.3)$$

## 8.4 Taxas de Mudança

Os dois exemplos anteriores têm muito em comum. Se ignorarmos todos os detalhes sobre geometria, gráficos, rodovias e movimento, ocorreu o seguinte em ambos os exemplos. Nós tínhamos uma função  $y = f(x)$ , e nós queríamos saber quanto  $f(x)$  muda se  $x$  muda. Se você alterar  $x$  para  $x + \Delta x$ , então  $y$  mudará de  $f(x)$  para  $f(x + \Delta x)$ . A mudança em  $y$  é, portanto,

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x), \quad (8.4.1)$$

e, portanto, a taxa média de mudança é:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (8.4.2)$$

Esta é a taxa média de mudança de  $f$  ao longo do intervalo de  $x$  para  $x + \Delta x$ . Para definir a taxa de mudança da função  $f$  em  $x$ , deixamos que o comprimento  $\Delta x$  do intervalo se torne menor e menor, na esperança de que a taxa média de mudança nos intervalos de tempo mais curtos e mais curtos se aproximarão de algum número. Se isso acontecer, então esse número é chamado de taxa de variação de  $f$  em  $x$ , ou a derivada de  $f$  em  $x$  e pode ser escrito como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (8.4.3)$$

## 8.5 Derivadas

Anteriormente, vimos problemas matemáticos que levaram a expressões da forma  $\frac{0}{0}$ . Agora que sabemos trabalhar com limites, podemos apresentar a definição da derivada de uma função. Depois de computar algumas derivadas usando a definição, passaremos a maior parte desta seção desenvolvendo o cálculo diferencial, que é uma coleção de regras que permitem calcular derivadas sem ter que usar a definição básica.

**Definição 8.5.1 (Derivada).** Seja  $f$  uma função que é definida em algum intervalo  $(c, d)$  e seja  $a$  um número neste intervalo. A derivada da função  $f$  em  $a$  é do ponto de vista geométrico a inclinação da reta tangente em  $(a, f(a))$ , ou do ponto de vista analítico o valor do limite

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \quad (8.5.1)$$

Dizemos que  $f$  é diferenciável em  $a$  se esse limite existe e é o mesmo para qualquer sequência  $\{x\}$  que converge para  $a$ . Assim,  $f$  é diferenciável no intervalo  $(c, d)$  se é diferenciável em cada ponto  $a$  em  $(c, d)$ .

Outras notações para derivadas são:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (8.5.2)$$

A ideia é que, depois de deixar que  $\Delta x$  tenda a zero, ele não desapareceu, mas, em vez disso, tornou-se uma quantidade nitidamente pequena que Leibniz chamou de  $dx$ . O resultado de aumentar  $x$  por essa quantidade nitidamente pequena  $dx$  é que  $y = f(x)$  aumenta em outra quantidade nitidamente pequena  $dy$ . A proporção dessas duas quantidades nitidamente pequenas é o que chamamos de derivada de  $f(x)$ .

A derivada da função  $f(x)$  também é uma função, com o domínio consistindo desses pontos nos quais  $f(x)$  é diferenciável. A computação da derivada é chamada de “diferenciação” de uma função.

O quociente que aparece no limite (8.5.1) é chamado de “quociente diferencial”. O quociente diferencial, isto é, o aumento da função dividido pelo aumento do argumento determina a taxa média de aumento da função  $f(x)$  sobre o intervalo  $[x, x+h]$  (se  $h > 0$ ). Assim, a interpretação da derivada é a taxa de mudança instantânea da função dada. A derivada também possui interpretação geométrica. O quociente diferencial em (8.5.1) é a tangente do ângulo de inclinação  $\phi$  da secante para o gráfico de  $f(x)$ . Esta secante intercepta o gráfico em dois pontos  $(x, f(x))$  e  $(x+h, f(x+h))$ . Quando  $h \rightarrow 0$ , a secante converge para a tangente e, assim, geometricamente, a derivada é o ângulo de inclinação da tangente ao gráfico em um determinado ponto. A existência da derivada significa simplesmente a existência da tangente ao gráfico.

**Exemplo 8.5.1.** Com isso em mente, qual a derivada de  $f(x) = x^2$ ? Usando a definição,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) \\ &= 2x. \end{aligned} \quad (8.5.3)$$

Um resultado interessante é que se uma função é diferenciável, então ela é contínua.

**Teorema 8.5.1.** Se uma função  $f$  é diferenciável em algum ponto  $a$  em seu domínio, então  $f$  também é contínua em  $a$ .

Antes de provarmos que isso é verdade, vamos relembrar a definição de continuidade. Uma

função  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^1$  é contínua em  $a \in D$  se dada qualquer sequência  $\{a_n\}$  que converge para  $a$  em  $D$ ,  $f(a_n)$  converge a  $f(a)$ . Uma função é contínua no conjunto  $U \subset D$  se é contínua em cada  $a \in U$ . Finalmente, dizemos que uma função é contínua quando ela é contínua em cada ponto de seu domínio.

*Prova do teorema 8.5.1.* Vamos provar que se uma função é diferenciável ela é contínua. Ao afirmar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (8.5.4)$$

existe, então deve ser mostrado que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a) + f(a)] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) + \lim_{x \rightarrow a} f(a) \\ &= f'(a) \cdot 0 + f(a) \\ &= f(a). \end{aligned} \quad (8.5.5)$$

■

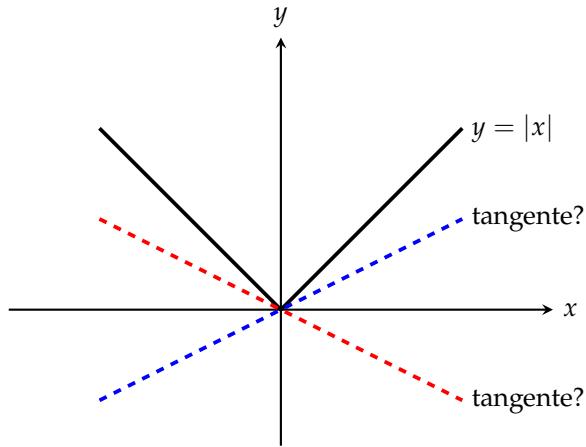
Observe que o contrário desta declaração geralmente não é verdadeiro; se uma função é contínua em um ponto, a derivada não precisa existir nesse ponto. Assim, algumas funções não são diferenciáveis. Vamos analisar três exemplos.

**Exemplo 8.5.2.** *Função com um canto*

Considere a seguinte função, cujo gráfico está abaixo:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (8.5.6)$$

FIGURA 8.5.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $y = |x|$  E CANDIDATOS A TANGENTE



Esta função é contínua em todo  $x$ , mas não é diferenciável em  $x = 0$ . Vamos analisar para três casos:  $x > 0$ ,  $x < 0$  e  $x = 0$ .

- $x > 0$

Para  $\Delta x$  suficientemente perto de zero nós teríamos  $x + \Delta x > 0$ . Então,  $f(x) = |x| = x$  e  $f(x + \Delta x) = |x + \Delta x| = x + \Delta x$ . Substituindo isso na definição de limite, temos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1. \quad (8.5.7)$$

- $x < 0$

Para  $\Delta x$  suficientemente perto de zero nós teríamos  $x + \Delta x < 0$ . Então,  $f(x) = -x$  e  $f(x + \Delta x) = -(x + \Delta x)$ . Substituindo isso na definição de limite, temos:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1. \quad (8.5.8)$$

- $x = 0$

Observe que quando  $\Delta x \rightarrow 0^+$ ,  $x + \Delta x = \Delta x > 0$ . Quando  $\Delta x \rightarrow 0^-$ ,  $x + \Delta x = \Delta x < 0$ . Os limites laterais não são iguais e a derivada não existe.

Se você olhar para o gráfico de  $y = |x|$ , então você verá o que está errado: o gráfico tem um canto na origem e não está claro qual linha, se alguma, merece ser chamada de tangente ao gráfico na origem.

### Exemplo 8.5.3. Cúspide

Outro exemplo de uma função sem derivada em  $x = 0$  é

$$f(x) = \sqrt{|x|}. \quad (8.5.9)$$

Quando você tenta calcular a derivada, você obtém esse limite

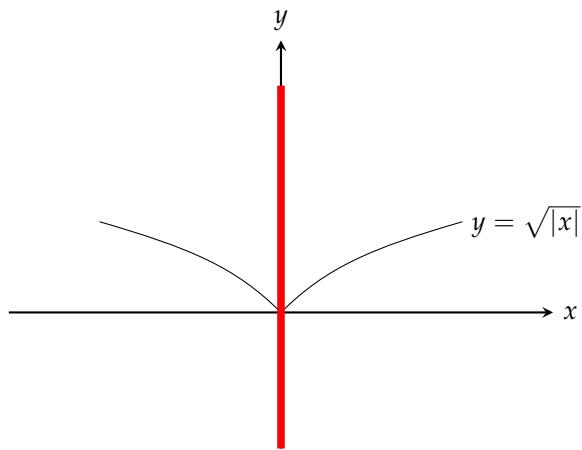
$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = ? \quad (8.5.10)$$

O limite à direita é

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \searrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad (8.5.11)$$

que não existe ( $\rightarrow +\infty$ ). Da mesma forma, o limite à esquerda também não existe ( $\rightarrow -\infty$ ). No entanto, um desenho para o gráfico de  $f$  sugere uma tangente óbvia ao gráfico em  $x = 0$ , ou seja, o eixo  $y$ . Essa observação não nos dá uma derivada, porque o eixo  $y$  é vertical e, portanto, não tem inclinação. Observe no gráfico a seguir.

FIGURA 8.5.2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $y = \sqrt{|x|}$  É UMA POSSÍVEL CANDIDATA A TANGENTE



Uma função continuamente diferenciável  $f(x)$  é uma função cuja função derivada  $f'(x)$  é também contínua no ponto em questão. Se isso é verdade, dizemos que a função original  $f$  é  $C^1$ .

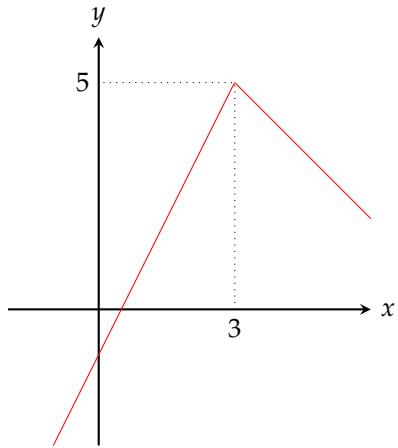
#### Exemplo 8.5.4. Movimento browniano

Os dois exemplos anteriores eram sobre funções que não tinham uma derivada em  $x = 0$ . Em ambos os exemplos, o ponto  $x = 0$  era o único ponto em que a função não tinha uma derivada. É fácil dar exemplos de funções que não são diferenciáveis em mais de um valor de  $x$ , mas aqui eu gostaria de mostrar uma função  $f$  que não tem um derivado em nenhum lugar em seu domínio. Um exemplo é a trajetória típica de um movimento browniano, isto é,  $t$  é tempo, e  $x(t)$  é a posição de uma partícula que sofre um movimento browniano.

#### Exemplo 8.5.5. Determine se a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x < 3 \\ 8 - x, & \text{se } x \geq 3 \end{cases} \quad (8.5.12)$$

é derivável em  $x = 3$ .



Primeiro passo: verificar se  $f$  é contínua em  $x = 3$  (porque se não for, não pode ser derivável). Temos

$$f(3) = 8 - 3 = 5, \quad (8.5.13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} 8 - x = 8 - 3 = 5. \quad (8.5.14)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2 \cdot 3 - 1 = 5. \quad (8.5.15)$$

Portanto,  $f(x)$  é contínua em  $x = 3$ .

Será  $f$  diferenciável em  $x = 3$ ?

$$\begin{aligned} f'_- &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{2(3 + \Delta x) - 1 - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{2(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= 2. \end{aligned} \quad (8.5.16)$$

$$\begin{aligned} f'_+ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{8 - (3 + \Delta x) - 5}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{-(\Delta x)}{\Delta x} \\ &= -1. \end{aligned} \quad (8.5.17)$$

Temos que  $f'_- \neq f'_+$ . Portanto,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$  não existe, isto é,  $f(x)$  não é diferenciável em  $x = 3$ .

## 8.6 Regras Básicas

Você poderia continuar e calcular mais derivadas a partir da definição. Cada vez que você precisasse calcular um novo limite, esperaria que houvesse algum truque que permitisse encontrar esse limite. Felizmente, isso não é necessário. Acontece que se você conhece algumas derivações básicas, você pode encontrar derivadas de funções arbitrariamente complicadas, dividindo-as em partes menores. Veremos agora as regras que informam como diferenciar uma função que é a soma, a diferença, o produto e o quociente de duas outras funções.

Constante	$c' = 0$	$\frac{dc}{dx} = 0$
Soma	$(u \pm v)' = u' \pm v'$	$\frac{d(u \pm v)}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$
Produto	$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$	$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx}$
Quociente	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$
Logaritmo	$(\log x)' = \frac{1}{x}$	$\frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$

*Prova da Regra da Soma.* Suponha que  $f(x) = u(x) + v(x)$  para todo  $x$  em que  $u$  e  $v$  são diferenciáveis. Veja que:

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(u(x) + v(x)) - (u(a) + v(a))}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{u(x) - u(a)}{x - a} + \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \right) + \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{v(x) - v(a)}{x - a} \right) \\
 &= u'(a) + v'(a).
 \end{aligned} \tag{8.6.1}$$

*Prova da Regra do Produto.* Suponha que  $f(x) = u(x)v(x)$  para todo  $x$  em que  $u$  e  $v$  são diferenciáveis. Para encontrar a derivada, devemos expressar a mudança em  $f$  em termos de mudanças de  $u$  e de  $v$ . Veja que:

$$\begin{aligned} f(x) - f(a) &= u(x)v(x) - u(a)v(a) \\ &= u(x)v(x) - u(x)v(a) + u(x)v(a) - u(a)v(a) \\ &= u(x)(v(x) - v(a)) + v(a)(u(x) - u(a)). \end{aligned} \quad (8.6.2)$$

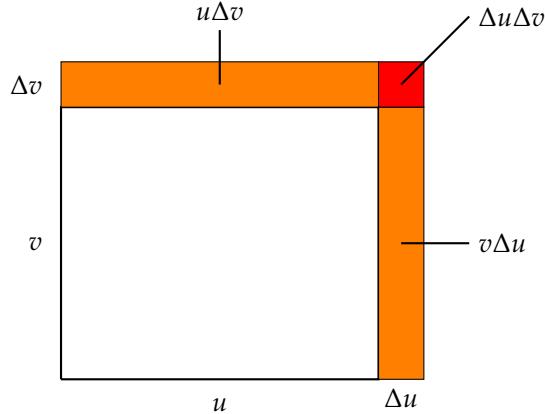
Agora, divida por  $x - a$  e faça  $x \rightarrow a$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} u(x) \frac{(v(x) - v(a))}{x - a} + v(a) \frac{(u(x) - u(a))}{x - a} \\ &= \left( \lim_{x \rightarrow a} u(x) \right) \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{(v(x) - v(a))}{x - a} \right) + v(a) \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{(u(x) - u(a))}{x - a} \right) \\ &= u(a)v'(a) + v(a)u'(a). \end{aligned} \quad (8.6.3)$$

■

A regra do produto pode ser representada por meio da figura abaixo.

FIGURA 8.6.1 – REGRA DO PRODUTO



Se  $u$  e  $v$  são grandezas que dependem de  $x$ , e se um aumento em  $x$  por um fator  $\Delta x$  faz com que  $u$  e  $v$  aumentem por um fator  $\Delta u$  e  $\Delta v$ , então o produto de  $u$  e  $v$  irá mudar em:

$$\Delta(uv) = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v. \quad (8.6.4)$$

Se  $u$  e  $v$  são funções diferenciáveis de  $x$ , então as mudanças  $\Delta u$  e  $\Delta v$  serão da mesma ordem de grandeza que  $\Delta x$ , e assim espera-se que  $\Delta u\Delta v$  seja muito menor. Ignorando, portanto, o último

termo em (8.6.4) chegamos a:

$$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u. \quad (8.6.5)$$

*Prova da Regra do Quociente.* A regra do quociente pode ser apresentada por meio da regra do produto supondo que  $\omega = \frac{u}{v}$ . Então,

$$\omega \cdot v = u. \quad (8.6.6)$$

Pela regra do produto, temos:

$$\begin{aligned} \omega' \cdot v + \omega \cdot v' &= u' \\ \omega' &= \frac{u' - \omega \cdot v'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v} \cdot v'}{v} = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}. \end{aligned} \quad (8.6.7)$$

■

*Prova da Regra do Logaritmo.* Suponha que  $f(x) = \log(x)$ .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log\left(\frac{x+h}{x}\right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \log\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}. \end{aligned} \quad (8.6.8)$$

Como o logaritmo é uma função contínua, podemos tomar o limite do argumento da função e posteriormente tomar o logaritmo.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( \left( 1 + \frac{1}{\frac{h}{x}} \right)^{\frac{x}{h}} \right)^{\frac{1}{x}}. \end{aligned} \quad (8.6.9)$$

Observe que quando  $h \rightarrow 0^+$ , então  $\frac{x}{h} \rightarrow +\infty$ ;  $h \rightarrow 0^-$ , então  $\frac{x}{h} \rightarrow -\infty$  (como  $x \in D_{\log}$ ,  $x > 0$ ). Lembre que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \implies \lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{h}}\right)^{\frac{x}{h}} = e. \quad (8.6.10)$$

Substituindo na definição acima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \log \left( \frac{x+h}{x} \right)^{\frac{1}{h}} \\ &= \log e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}. \end{aligned} \quad (8.6.11)$$

■

*Prova da Regra da Potência.* Para derivar  $f(x) = x^n$  procedemos como segue:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}. \quad (8.6.12)$$

Vamos simplificar  $\frac{x^n - a^n}{x - a}$ . Sabemos que:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}. \quad (8.6.13)$$

Logo,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \{x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}\} \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + a^{n-3}a^2 + \dots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1}. \end{aligned} \quad (8.6.14)$$

■

Combinando as diferentes regras podemos encontrar as derivadas de muitas funções. Por exemplo, a derivada da função  $f(x) = 2x^4 - x^3 + 7$  é  $f'(x) = 8x^3 - 3x^2$ , enquanto a derivada da função  $f(x) = \sqrt{x}$  é  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ .

## 8.7 Derivadas de Funções Trigonométricas

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são diferenciáveis, e suas derivadas são dados pelas seguintes fórmulas:

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x. \quad (8.7.1)$$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x. \quad (8.7.2)$$

$$\frac{d \tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad (8.7.3)$$

Por definição,

$$\sin'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}. \quad (8.7.4)$$

*Prova da Derivada da Função Seno.* Para simplificar o numerador vamos usar a fórmula da soma do seno:  $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ .

Substituindo na definição de limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \right\} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sin(x) \cos(h) + \cos(x) \sin(h) - \sin(x)}{h} \right\} \\ &= \cos(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} + \sin(x) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} \\ &= \cos(x) \cdot 1 + \sin(x) \cdot 0 \\ &= \cos(x). \end{aligned} \quad (8.7.5)$$

■

Por definição,

$$\cos'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h}. \quad (8.7.6)$$

*Prova da Derivada da Função Cosseno.*

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(h) - \sin(x) \sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \cos(h) - \cos(x)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(h)}{h} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1)(\cos(h) + 1)}{h(\cos(h) + 1)} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(\cos^2(h) - 1)}{h(\cos(h) + 1)} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(h)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x)(-\sin^2(h))}{h(\cos(h) + 1)} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(h)}{h} \\
&= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \sin(h) \sin(h)}{h(\cos(h) + 1)} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \sin(h)}{h} \\
&= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x) \sin(h)}{\cos(h) + 1} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} \\
&= -\frac{\cos(x) \cdot 0}{1 + 1} \cdot 1 - \sin(x) \cdot 1 \\
&= -\sin(x).
\end{aligned} \tag{8.7.7}$$

■

O cálculo da derivada das função tangente segue a mesma abordagem.

## 8.8 Teorema da Função Inversa

Sabemos que dada uma função  $f$ , nem sempre esta é bijetora, ou seja, nem sempre podemos falar na função inversa. Porém, podemos fazer restrições no domínio e/ou no contradomínio de maneira a torná-la bijetora e consequentemente inversível. Se a função  $f$  satisfaz certas condições, seremos capazes de garantir que a sua inversa será derivável em um ponto  $f(x_0)$ . Além disso, somos capazes de explicitar o valor da derivada da inversa em  $f(x_0)$ . Seja o teorema abaixo:

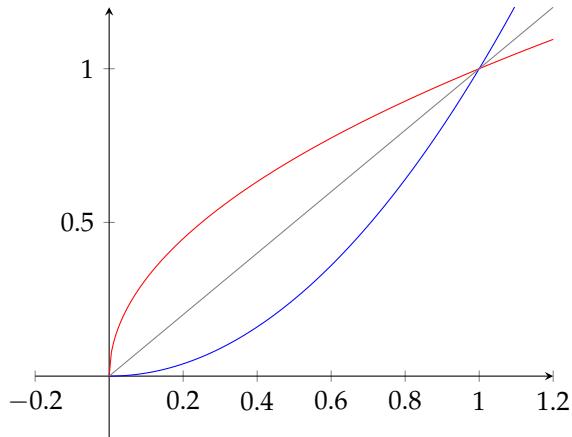
**Teorema 8.8.1 (Teorema da Função Inversa).** *Seja  $f$  uma função inversível e derivável em um ponto  $x_0$  do seu domínio com  $f'(x_0) \neq 0$ . Então  $f^{-1}$  será derivável em  $y_0 = f(x_0)$  e além disso*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \tag{8.8.1}$$

**Exemplo 8.8.1.** Começamos com um exemplo simples. Podemos simplificar a equação  $y = \sqrt{x}$  ( $x > 0$ ), fazendo um quadrado de ambos os lados para obter  $y^2 = x$ . Poderíamos usar a notação de função aqui para dizer que  $y = f(x) = \sqrt{x}$  e  $x = g(y) = y^2$ . Em geral, procuramos as funções  $y = f(x)$  e  $g(y) = x$  para as quais  $g(f(x)) = x$ . Se este é o caso, então  $g$  é o inverso de  $f$  (escrevemos  $g = f^{-1}$ ) e  $f$  é o inverso de  $g$  (escrevemos  $f = g^{-1}$ ).

Como os gráficos de uma função e seu inverso estão relacionados? Nós começamos por representação gráfica  $f(x) = \sqrt{x}$ . Em seguida, queremos representar graficamente o inverso de  $f$ , que é  $g(y) = x$ . Mas este é exatamente o gráfico que acabamos de desenhar. Para comparar os gráficos das funções  $f$  e  $f^{-1}$  temos que trocar  $x$  e  $y$  na equação por  $f^{-1}$ . Assim para comparar  $f(x) = \sqrt{x}$  ao seu inverso substituímos  $y$  por  $x$  e graficamente  $g(x) = x^2$ .

FIGURA 8.8.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $y = x^2$ , DA FUNÇÃO  $y = \sqrt{x}$  E DA FUNÇÃO  $y = x$



Em geral, se você tiver o gráfico de uma função  $f$ , poderá encontrar o gráfico de  $f^{-1}$  trocando as coordenadas  $x$  e  $y$  de todos os pontos no gráfico. Em outras palavras, o gráfico de  $f^{-1}$  é o reflexo do gráfico de  $f$  ao longo da linha  $y = x$ . Isto sugere que se  $\frac{dy}{dx}$  é a inclinação de uma linha tangente ao gráfico de  $f$ , então

$$\frac{1}{\frac{dy}{dx}}, \quad (8.8.2)$$

é a inclinação de uma linha tangente ao gráfico de  $f^{-1}$ .

## 8.9 Regra da Cadeia

Dadas duas funções  $f$  e  $g$ , pode-se definir uma nova função chamada composição de  $f$  e  $g$ . A notação para a composição é  $f \circ g$ , e é definida pela fórmula

$$f \circ g = f(g(x)). \quad (8.9.1)$$

O domínio da composição é o conjunto de todos os números  $x$  para os quais esta fórmula fornece algo bem definido. Se você pensar em funções como expressando dependência de uma quantidade em outra, a composição de funções surge da seguinte maneira. Se uma quantidade  $z$  é uma função de outra quantidade  $y$ , e se  $y$  depende de  $x$ , então  $z$  depende de  $x$  por meio de  $y$ .

**Definição 8.9.1 (Regra da Cadeia).** Se  $f$  e  $g$  são diferenciáveis, o mesmo acontece com a composição  $f \circ g$ . A derivada de  $f \circ g$  é dada por

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x). \quad (8.9.2)$$

A regra da cadeia informa como encontrar a derivada da composição  $f \circ g$ . Quando escrito na notação de Leibniz, a regra da cadeia parece particularmente fácil. Suponha que  $y = g(x)$  e  $z = f(y)$ , então  $z = f \circ g(x)$ , e a derivada de  $z$  com respeito a  $x$  é a derivada da função  $f \circ g$ . A derivada de  $z$  em relação a  $y$  é a derivada da função  $f$ , e a derivada de  $y$  em relação a  $x$  é a derivada da função  $g$ . Então, a regra da cadeia afirma que

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}. \quad (8.9.3)$$

*Prova da Regra da Cadeia.* Vamos provar que  $(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$ . Por definição, o lado esquerdo é

$$(f \circ g)'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f \circ g)(x) - (f \circ g)(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a}. \quad (8.9.4)$$

As derivadas do lado direito são dadas por:

$$g'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \text{ e } f'(g(a)) = \lim_{y \rightarrow g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)}. \quad (8.9.5)$$

Como  $g$  é uma função diferenciável, também deve ser uma função contínua e, portanto,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ . Então podemos substituir  $y = g(x)$  na definição de limite em  $f'(g(a))$ , tal que:

$$f'(g(a)) = \lim_{y \rightarrow g(a)} \frac{f(y) - f(g(a))}{y - g(a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)}. \quad (8.9.6)$$

Pondo tudo junto, vemos que:

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(g(x)) - f(g(a))}{g(x) - g(a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \\ &= f'(g(a)) \cdot g'(a). \end{aligned} \quad (8.9.7)$$

■

**Exemplo 8.9.1.** Vamos ver um exemplo onde realmente precisamos da regra da cadeia. Sabemos qual é a derivada do seno de  $x$  em relação a  $x$ , mas nenhuma das regras que encontramos até agora nos diz como diferenciar  $f(x) = \sin(2x)$ . A função  $f(x) = \sin 2x$  é a composição de duas funções mais simples, a saber  $f(x) = g(h(x))$  em que  $g(u) = \sin u$  e  $h(x) = 2x$ . Nós sabemos como diferenciar cada uma das duas funções  $g$  e  $h$ :  $g'(u) = \cos u$  e  $h'(x) = 2$ . Portanto, a regra da cadeia implica que

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = \cos(2x) \cdot 2 = 2\cos(2x). \quad (8.9.8)$$

Muitas vezes temos que aplicar a regra da cadeia mais de uma vez para calcular um derivada. Assim, se  $y = f(u)$ ,  $u = g(v)$  e  $v = h(x)$ , temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}. \quad (8.9.9)$$

Em notação funcional, temos:

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x). \quad (8.9.10)$$

Note que cada uma das três derivadas à direita é avaliada em um ponto diferente. Assim, se  $b = h(a)$  e  $c = g(b)$ , a regra da cadeia é

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{dy}{du} \right|_{u=c} \cdot \left. \frac{du}{dv} \right|_{v=b} \cdot \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=a}. \quad (8.9.11)$$

**Exemplo 8.9.2.** Por exemplo, se  $y = \frac{1}{1 + \sqrt{9 + x^2}}$ , então  $y = \frac{1}{1 + u}$  em que  $u = 1 + \sqrt{v}$  e  $v = 9 + x^2$ .

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{(1+u)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{v}} \cdot 2x = -\frac{1}{(1+u)^2} \frac{x}{\sqrt{v}}. \quad (8.9.12)$$

Se  $x = 4$ ,  $v = 25$  e  $u = 6$ , teríamos:

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{x=4} = \left. \frac{dy}{du} \right|_{u=6} \cdot \left. \frac{du}{dv} \right|_{v=25} \cdot \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=4} = -\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{10} \cdot 8. \quad (8.9.13)$$

## 8.10 Derivadas de Ordem Superior

Note que a derivada é uma função. Se a derivada  $f'(a)$  de alguma função  $f$  existe para todos os valores de  $a$  no domínio de  $f$ , então temos uma nova função: a saber, para cada número no domínio de  $f$  calculamos a derivada de  $f$  naquele número. Essa função é chamada de função derivada de  $f$ , e é denotada por  $f'$ . Agora que concordamos que a derivada de uma função é uma função, podemos repetir o processo e tentar diferenciar a derivada. O resultado, se existir, é chamado de segunda derivada de  $f$  e é denotado  $f''$ . A derivada da segunda derivada é chamada de terceira derivada, escrita  $f'''$  e assim por diante. A  $n$ -ésima é denotada por  $f^{(n)}$ . A notação de Leibniz equivalente é  $\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ .

**Exemplo 8.10.1.** Por exemplo, se  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ , então:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x, \quad (8.10.1)$$

$$f''(x) = 12x^2 - 4, \quad (8.10.2)$$

$$f^{(3)}(x) = 24x, \quad (8.10.3)$$

$$f^{(4)}(x) = 24, \quad (8.10.4)$$

$$f^{(5)}(x) = 0. \quad (8.10.5)$$

## 8.11 Derivadas Parciais

Vamos analisar agora o caso em que uma função apresenta mais de um argumento, isto é,  $y = f(x_1, \dots, x_n)$  e como derivamos uma função neste caso. Em matemática, uma derivada parcial de uma função de várias variáveis é a sua derivada com respeito a uma daquelas variáveis, com as outras variáveis mantidas constantes. Este conceito é útil no cálculo vetorial e na geometria diferencial.

A derivada parcial de uma função  $f(x, y, \dots)$  em relação à variável  $x$  é diferentemente denotada por:

$$f'_x, f_x, \partial_x f, D_x f, D_1 f, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (8.11.1)$$

Seja  $f(x, y)$  uma função de duas variáveis. Queremos ser capazes de “ampliar” e descrever como  $f$  está mudando em um ponto  $(a, b)$ . Um único número não é suficiente para capturar todas essas informações. Usamos dois números, as derivadas parciais de  $f$  em relação a  $x$  e  $y$ . Mais tarde, descreveremos como as derivadas parciais são, na verdade, os componentes de um vetor chamado

gradiente. E usaremos essas derivadas parciais para construir o plano tangente de  $f$  em  $(a, b)$ , que é uma aproximação linear.

**Definição 8.11.1 (Derivada Parcial).** Seja a função  $z = f(x, y)$ . A derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $(a, b)$ , escrito  $f_x(a, b)$ , é a taxa à qual  $z$  muda perto de  $(a, b)$  quando você mantém  $y$  constante, mas permite que  $x$  varie.

Mais precisamente, se fizermos  $y = b$  mas deixarmos  $x$  indeterminado, obtemos uma função de variável única  $g(x) = f(x, b)$ . A derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  em  $(a, b)$  é a derivada de  $g(x)$  em  $x = a$ . A derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$  no ponto  $(a, b)$ , escrito  $f_y(a, b)$ , é a taxa na qual  $z$  muda perto de  $(a, b)$  quando você mantém  $x$  constante mas permite que  $y$  varie.

Formalmente, para uma função de duas variáveis  $f(x, y)$ , a derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  em  $(a, b)$  é definida por

$$f_x(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} = \left( \frac{d}{dx} f(x, b) \right) \Big|_{x=a}. \quad (8.11.2)$$

Em outras palavras, tratar  $f(x, b)$  como uma função de variável única de  $x$ , e tomar sua derivada em  $x = a$ .

De forma semelhante, para uma função de duas variáveis  $f(x, y)$ , a derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$  em  $(a, b)$  é definida por:

$$f_y(a, b) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h} = \left( \frac{d}{dy} f(a, y) \right) \Big|_{y=b}. \quad (8.11.3)$$

Em vez de observar as derivadas parciais em um ponto específico  $(a, b)$ , podemos considerá-las como funções multivariáveis de  $x$  e  $y$ :

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}. \quad (8.11.4)$$

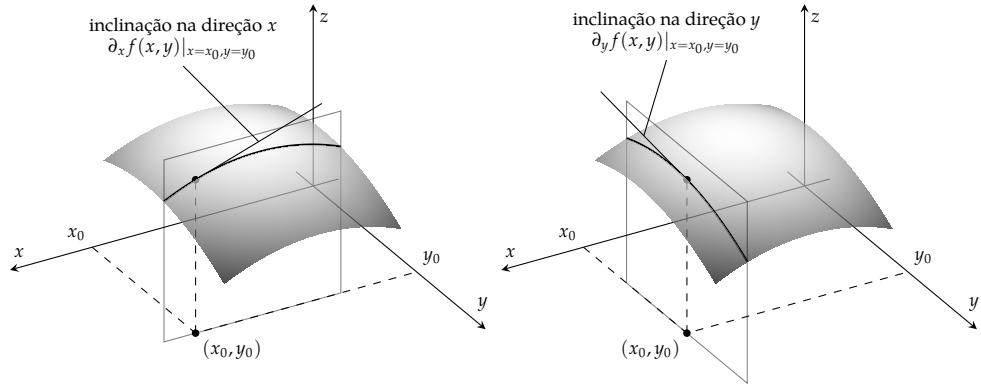
$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}. \quad (8.11.5)$$

Para encontrar a derivada parcial  $f_x(x, y)$ , pegue a derivada de  $f(x, y)$  em relação a  $x$  como se  $y$  fosse uma constante. De forma análoga, para encontrar a derivada parcial  $f_y(x, y)$ , pegue a derivada de  $f(x, y)$  em relação a  $y$  como se  $x$  fosse uma constante.

Generalizando, se uma variável é uma função de  $n$  outras variáveis  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  então tem  $n$  derivadas parciais:  $\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n}$ . Para encontrar a derivada parcial de  $f$  em relação a uma variável  $x_i, i = 1, \dots, N$ , trate todas as outras variáveis como constantes e tome a derivada como se  $x_i$  fosse a única variável.

**Exemplo 8.11.1.** Vamos ver um exemplo. Seja  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $f(x)$  definida por  $f(x) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x})^2$ , em que  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^4$  é o vetor  $\mathbf{c} = \langle 4, -3, 2, -1 \rangle$ . Assuma que  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^4 = \langle 1, 3, 2, 4 \rangle$ . Seja  $\mathbf{e}_2 = \langle 0, 1, 0, 0 \rangle$  a base canônica. Então, a derivada parcial de  $f$  em relação a  $x_2$  avaliada em  $\mathbf{x}_0$  é dada por:

FIGURA 8.11.1 – DERIVADAS PARCIAIS: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA



$$\begin{aligned}
 f_{x_2}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_2) - f(\mathbf{x}_0)}{h} \\
 f_{x_2}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{x}_0 + h\mathbf{e}_2))^2 - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0)^2}{h} \\
 f_{x_2}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0 + h\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_2)^2 - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0)^2}{h} \\
 f_{x_2}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0)^2 + 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0) \cdot (h\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_2) + (h\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_2)^2 - (\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0)^2}{h} \\
 f_{x_2}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0)(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_2) + h^2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_2)^2}{h} \\
 f_{x_2}(\mathbf{x}_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0)(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_2) + h(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_2)^2 \\
 f_{x_2}(\mathbf{x}_0) &= 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{x}_0)(\mathbf{c} \cdot \mathbf{e}_2) \\
 f_{x_2}(\mathbf{x}_0) &= 2(\langle 4, -3, 2, -1 \rangle \cdot \langle 1, 3, 2, 4 \rangle)(\langle 4, -3, 2, -1 \rangle \cdot \langle 0, 1, 0, 0 \rangle) \\
 f_{x_2}(\mathbf{x}_0) &= 2[4(1) - 3(3) + 2(2) - 1(4)](-3) \\
 f_{x_2}(\mathbf{x}_0) &= 30. \tag{8.11.6}
 \end{aligned}$$

Observe que o mesmo resultado pode ser obtido definindo

$$g(x_2) = f(1, x_2, 2, 4) = (\mathbf{c} \cdot \langle 1, x_2, 2, 4 \rangle)^2 = (\langle 4, -3, 2, -1 \rangle \cdot \langle 1, x_2, 2, 4 \rangle)^2 = (4 - 3x_2)^2. \tag{8.11.7}$$

Diferenciando com relação a  $x_2$  e avaliando em  $x_2 = 3$ , obtém-se:

$$g'(x_2) = 2(4 - 3x_2)(-3) \implies g'(3) = 30. \tag{8.11.8}$$

Vamos agora apresentar a definição de uma curva regular para posteriormente a expormos a regra da cadeia e, por sua vez, as derivadas direcionais e o vetor gradiente.

**Definição 8.11.2 (Curva Regular).** Uma curva  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$  é dita regular se, e somente se, cada  $x'_i(t)$  é contínua em  $t$  e  $(x'_1(t), \dots, x'_n(t)) \neq (0, \dots, 0)$  para cada  $t$ .

Seja  $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ , para  $a \leq t \leq b$ , uma curva regular. Frequentemente queremos saber como se comporta ao longo da curva uma função  $f$  definida  $\mathbb{R}^n$ . Calculando  $f$  ao longo da curva, somos levados a estudar a função de uma variável

$$g(t) = f(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad a \leq t \leq b. \quad (8.11.9)$$

Como  $g: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ , sua derivada unidimensional  $g'(t)$  dá a taxa de variação de  $f$  ao longo da curva  $\mathbf{x}(t)$ . Se  $x(t)$  tivesse só um componente, então  $g(t) = f(x(t))$  e utilizariammos a regra da cadeia para calcular

$$g'(t) = f'(x(t)) \cdot x'(t). \quad (8.11.10)$$

Quando há mais de uma função, tomamos a derivada em relação a cada função de dentro, uma de cada vez:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t))x'_1(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}(t))x'_2(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t))x'_n(t). \quad (8.11.11)$$

**Definição 8.11.3 (Função Continuamente Diferenciável).** Uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  é continuamente diferenciável (ou  $C^1$ ) em um conjunto aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  se, e somente se, para cada  $i$ , a derivada parcial  $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x})$  existe em cada  $\mathbf{x}$  de  $U$  e é contínua em  $\mathbf{x}$ . Analogamente, uma curva  $\mathbf{x}: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é continuamente diferenciável se cada uma de suas funções componentes  $x_i(t)$  é continuamente diferenciável.

**Teorema 8.11.1 (Regra da cadeia I).** Se  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  é uma curva  $C^1$  num intervalo em torno de  $t_0$  e  $f$  é uma função  $C^1$  numa bola em torno de  $x(t_0)$ , então  $t(t) \equiv f(x_1(t), \dots, x_n(t))$  é uma função  $C^1$  em  $t_0$

$$\frac{dg}{dt}(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}(t_0))x'_1(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}(t_0))x'_2(t_0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}(t_0))x'_n(t_0). \quad (8.11.12)$$

**Teorema 8.11.2 (Regra da cadeia II).** Considerando que a função que vamos derivar é composta e que  $u: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n, u(t) = (u_1(t_1, \dots, t_s), u_2(t_1, \dots, t_s), \dots, u_n(t_1, \dots, t_s))$ , para qualquer função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ , a função composta  $g(t_1, \dots, t_s) \equiv f(u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$  é uma função de  $\mathbb{R}^s$  em  $\mathbb{R}^1$ . Logo,

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u(t)) \frac{\partial u_1}{\partial t_i}(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(u(t)) \frac{\partial u_2}{\partial t_i}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(u(t)) \frac{\partial u_n}{\partial t_i}(t). \quad (8.11.13)$$

Com base no exposto, podemos calcular a taxa de variação de uma função  $f(x_1, \dots, x_n)$  em um dado ponto  $x^*$  na direção de qualquer vetor  $v = (v_1, \dots, v_n)$  dado. Para parametrizar a direção  $v$  a partir do ponto  $x^*$ , escreva a equação paramétrica da reta dada por  $x^*$  na direção  $v$ :

$$x = x^* + tv. \quad (8.11.14)$$

Para ver como  $F$  varia ao longo desta reta, inicialmente calculamos  $F$  ao longo desta reta:

$$g(t) \equiv F(x^* + tv) = F(x_1^* + tv_1, \dots, x_n^* + tv_n), \quad (8.11.15)$$

e em seguida usamos a regra da cadeia para tomar a derivada de  $g$  em  $t = 0$ :

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)v_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*)v_n, \quad (8.11.16)$$

ou, em notação matricial,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = DF_{x^*} \cdot v. \quad (8.11.17)$$

A expressão (8.11.17) é denominada derivada de  $F$  em  $x^*$  na direção  $v$ . Estamos escrevendo a derivada de  $y = F(X_1, \dots, x_n)$  em um dado ponto  $x^*$  como matriz-linha

$$DF_{x^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}, \quad (8.11.18)$$

interpretando-a como uma função linear que aproxima  $F$  em torno de  $x^*$ . Às vezes, escrevemos a derivada de  $F$  em  $x^*$  como uma matriz-coluna

$$DF_{x^*} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}. \quad (8.11.19)$$

Este vetor, que é denotado por  $\nabla F(x^*)$  ou  $\text{grad } F(x^*)$ , é denominado vetor gradiente de  $F$  em  $x^*$  ou gradiente de  $F$  em  $x^*$ .

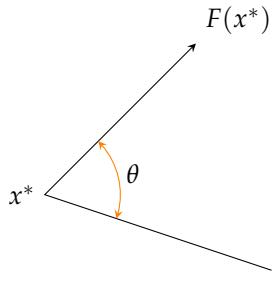
Note que podemos escrever a derivada direcional de  $F$  em torno de  $x^*$  na direção  $v$  como:

$$\nabla F(x^*) \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) v_i. \quad (8.11.20)$$

Ou seja, a derivada direcional mensura a taxa de crescimento ou decrescimento de  $F$  quando nos movemos para  $v$  a partir de  $x^*$ . Vamos trabalhar com vetores  $v$  de tamanho unitário, isto é,  $\|v\|=1$ . Assim, podemos reescrever a derivada direcional como:

$$\nabla F(x^*) \cdot v = \|\nabla F(x^*)\| \|v\| \cos \theta = \|\nabla F(x^*)\| \cos \theta. \quad (8.11.21)$$

FIGURA 8.11.2 – VETOR GRADIENTE



Disso decorre que, como  $\cos \theta$  está definido no intervalo  $[-1, 1]$ ,  $\nabla F(x^*) \cdot v$  será maior entre os vetores  $v$  de tamanho unitário quando  $\cos \theta = 1$ . Portanto,  $\nabla F(x^*) \cdot v$  será a maior quando  $\nabla F(x^*)$  e  $v$  estiverem na mesma direção.

**Teorema 8.11.3.** Seja  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$  uma função  $C^1$ . Em qualquer ponto  $x$  no domínio de  $F$  no qual  $\nabla F(x^*) \neq 0$ , o vetor gradiente  $\nabla F(x^*)$  aponta na direção na qual  $F$  cresce mais rapidamente.

Dada uma função  $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$  nós sabemos que a derivada  $\frac{df}{dx}(x_0)$  nos dá a inclinação da linha tangente ao gráfico da função  $f$  em  $x_0$ . Se tivermos uma função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  seu gráfico é uma superfície no  $\mathbb{R}^3$ . Portanto, para uma função  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$  a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$  é a inclinação da linha tangente a intersecção do gráfico  $f$  com o plano  $x = x_0$ . De forma semelhante, a derivada parcial  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$  é a inclinação da linha tangente a intersecção do gráfico  $f$  com o plano  $y = y_0$ . Geometricamente, temos a seguinte situação:

Agora que sabemos como trabalhar com derivadas parciais e entendemos o conceito de gradiente, vamos verificar a noção de derivadas superiores e um importante teorema. Como no caso univariado, podemos definir a segunda derivada. As segundas derivadas parciais de  $z = f(x, y)$  são as derivadas parciais das derivadas parciais de  $f$ .

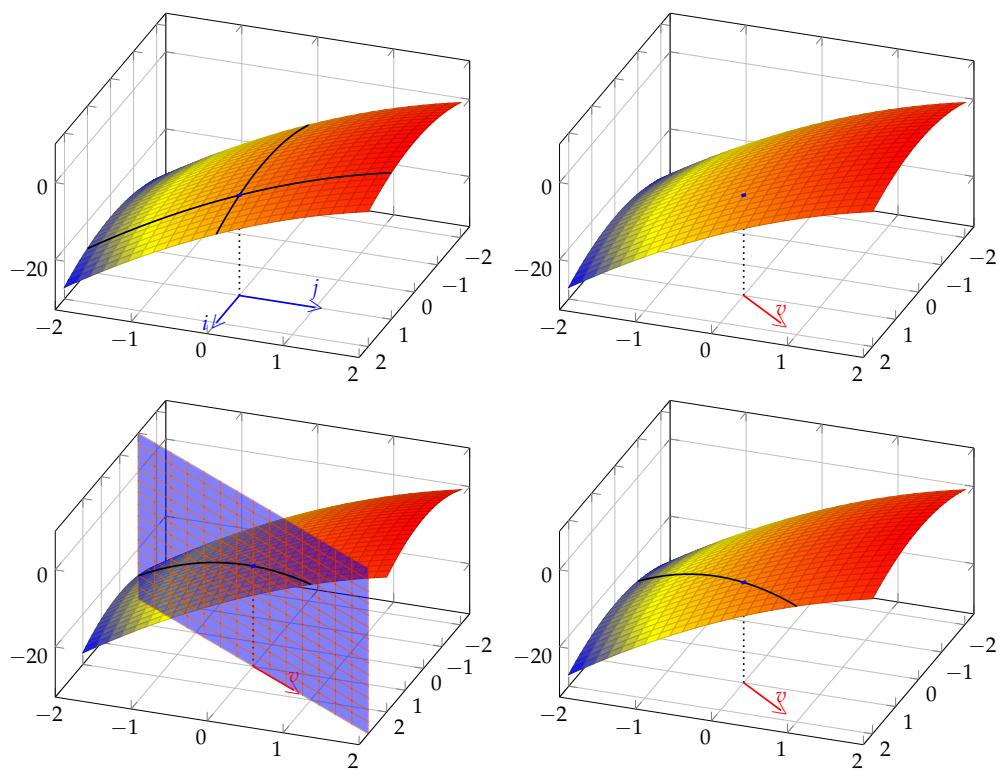
$$f_{xx} = (f_x)_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad (8.11.22)$$

$$f_{yx} = (f_y)_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad (8.11.23)$$

$$f_{xy} = (f_x)_y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad (8.11.24)$$

$$f_{yy} = (f_y)_y = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \quad (8.11.25)$$

FIGURA 8.11.3 – DERIVADAS PARCIAIS



Estas são algumas vezes chamadas de parciais duplas. Por exemplo,  $f_{xx}$  é a dupla parcial de  $z$  em relação a  $x$ . Uma função de  $n$  variáveis tem  $n$  derivadas parciais e  $n^2$  derivadas parciais de segunda ordem (e  $n^3$  derivadas parciais de terceira ordem, etc.).

Um teorema importante que obtemos a partir das derivadas parciais é o teorema de Young (ou teorema de Schwarz ou teorema de Clairaut). Vamos ao teorema.

**Teorema 8.11.4 (Teorema de Young).** Suponha que  $f(x, y)$  seja definida em uma vizinhança de um ponto  $(a, b)$ . Se  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  existem e são contínuos em uma vizinhança de  $(a, b)$ , então  $f_{yx}(a, b) = f_{xy}(a, b)$ .

Temos que  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  são sempre os mesmos, exceto talvez em pontos onde  $f$  é descontínua ou não é completamente diferenciável.

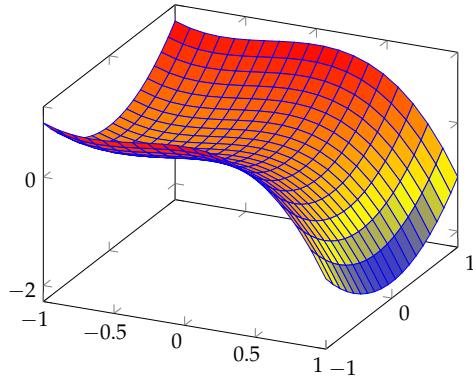
**Exemplo 8.11.2.** Para fixarmos os conceitos, vamos calcular as derivadas parciais puras e cruzadas de  $z = x^2 + 3xy + y - 1$ . Para encontrarmos  $\frac{\partial z}{\partial x}$  tratamos  $y$  como uma constante e diferenciamos em relação a  $x$ . Nós obtemos  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$ . De forma similar,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x + 1$ . As derivadas  $f_{xy} = 3$  e  $f_{yx} = 3$ , o que está de acordo com o teorema de Young.

## 8.12 Derivada de uma Função Implícita

Lembre-se que uma função implicitamente definida é uma função  $y = f(x)$  que é definida por uma equação da forma  $F(x, y) = 0$ . Chamamos esta equação de definidora da função  $y = f(x)$ . Para encontrar  $y = f(x)$  para um dado valor de  $x$  você deve resolver a equação de definição  $F(x, y) = 0$  para  $y$ .

**Exemplo 8.12.1.** Um exemplo de uma função que é definida implicitamente é  $z(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$ , cuja representação gráfica está abaixo:

FIGURA 8.12.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $z(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$



Nesse sentido, como poderíamos aplicar o que aprendemos até aqui sobre cálculo diferencial para o caso de uma função implícita. Vamos começar de uma forma intuitiva. Aqui está uma receita para calcular a derivada de uma função implicitamente definida.

1. Diferencie a equação  $F(x, y) = 0$ . Você pode usar a regra da cadeia para lidar com as ocorrências de  $y$  em  $F(x, y)$ .
2. Você pode reorganizar os termos no resultado da etapa 1 para obter uma equação da forma

$$G(x, y) \frac{dx}{dy} + H(x, y) = 0, \quad (8.12.1)$$

em que  $G$  e  $H$  são expressões contendo  $x$  e  $y$ , mas não a derivada.

3. Resolva esta equação para  $\frac{dx}{dy}$ :

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{H(x,y)}{G(x,y)}. \quad (8.12.2)$$

E se tivermos equações da forma  $F_1(x,y) = F_2(x,y)$ . Se a definição implícita da função não é da forma  $F(x,y) = 0$ , mas sim da forma  $F_1(x,y) = F_2(x,y)$ , então você deve mover todos os termos para o lado esquerdo, e proceda como acima.

**Exemplo 8.12.2.** Por exemplo, considere a função acima:

$$F(x,y) = y^2 - x^3 - x^2 = 0. \quad (8.12.3)$$

Diferencie ambos os lados em relação a  $x$  (e lembre-se que  $y = f(x)$ , então  $y$  aqui é uma função de  $x$ ), e você obtém:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}y^2 - \frac{d}{dx}x^3 - \frac{d}{dx}x^2 &= \frac{d}{dx}0 \\ \frac{d}{dx}(f(x))^2 - \frac{d}{dx}x^3 - \frac{d}{dx}x^2 &= \frac{d}{dx}0 \\ 2f(x)f'(x) - 3x^2 - 2x &= 0 \\ 2yy' - 3x^2 - 2x &= 0 \\ 2yy' &= 3x^2 + 2x \\ y' &= \frac{3x^2 + 2x}{2y}. \end{aligned} \quad (8.12.4)$$

**Exemplo 8.12.3.** Vamos ver mais um exemplo. Suponha que temos a função  $x^2 + x + 6y^2 + z^2 - 15 = 0$  e queremos saber  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}x^2 + \frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial y}6y^2 + \frac{\partial}{\partial y}z^2 - \frac{\partial}{\partial y}15 &= \frac{\partial}{\partial y}0 \\ 0 + 0 + 12y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ 2z\frac{\partial z}{\partial y} &= -12y \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{6y}{z}. \end{aligned} \quad (8.12.5)$$

Vamos formalizar a estrutura que desenvolvemos anteriormente. Suponha que  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Então, dizemos que  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução local de

$$f(x, y) = 0 \text{ e } f(x, g(x)) = 0, \quad (8.12.6)$$

os para cada  $x$  no intervalo  $I$ . Se  $\xi$  é um ponto interior do intervalo  $I$  e  $\eta = g(\xi)$ , então podemos dizer que  $g: I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução local de  $f(x, y) = 0$  no ponto  $(\xi, \eta)$ .

A condição apropriada para a existência de uma solução local para  $f(x, y) = 0$  no ponto  $(\xi, \eta)$  satisfazendo  $f(\xi, \eta) = 0$  é que  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ . Se  $\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0$ , então  $f$  admite uma função inversa  $g$ .

Vamos generalizar a discussão acima por meio de um teorema. Suponha que  $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  tem uma derivada contínua e considere a equação:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (8.12.7)$$

**Teorema 8.12.1 (Teorema da Função Implícita).** *Se no ponto  $(\xi, \eta)$  para o qual  $f = 0$  nós temos que  $\det \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \neq 0$ , então há uma única solução  $y = g(x)$  para a equação  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  no ponto  $(\xi, \eta)$ , com derivada dada por*

$$\frac{dx}{dy} = - \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x}. \quad (8.12.8)$$

**Exemplo 8.12.4.** *Seja novamente a função  $z = y^2 - x^3 - x^2$ . Vamos calcular  $\frac{dx}{dy}$  por meio do teorema da função implícita. Temos que*

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y, \quad (8.12.9)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3x^2 - 2x. \quad (8.12.10)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= -(2y)^{-1}(-3x^2 - 2x) \\ &= \frac{3x^2 + 2x}{2y}. \end{aligned} \quad (8.12.11)$$

## 8.13 Classes de Diferenciabilidade

O conjunto de funções  $\mathcal{C}^0$  é a primeira classe de diferenciabilidade que veremos. Como o nome diferenciabilidade pode sugerir, nas classes de diferenciabilidade estaremos lidando com as funções derivadas parciais. Além disso, precisaremos que essas derivadas parciais sejam contínuas.

**Definição 8.13.1 (Função de Classe  $\mathcal{C}^0$ ).** Uma função  $f: X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dita ser de classe  $\mathcal{C}^0$  (ou simplesmente dita ser  $\mathcal{C}^0$ ) se é contínua em todos os pontos do seu domínio.

**Definição 8.13.2 (Função de Classe  $\mathcal{C}^1$ ).** Uma função  $f: X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , com derivadas parciais  $f_x(x, y)$  e  $f_y(x, y)$ , é dita ser de classe  $\mathcal{C}^1$  (ou simplesmente dita ser  $\mathcal{C}^1$ ) se é contínua em todos os pontos do seu domínio e  $f_x$  e  $f_y$  são contínuas em  $X$ .

O algoritmo abaixo dá todos os passos para verificarmos se uma função  $f$  dada é de classe  $\mathcal{C}^1$  ou não. Uma observação se faz necessária antes de prosseguirmos: o processo de determinação é longo e confuso, porém não é dos mais difíceis. É recomendado seguir por partes seguindo os exatos passos abaixo.

1.  $f$  é contínua?
  - (a) Se sim, calcule as derivadas parciais. As derivadas parciais são contínuas? Se sim,  $f$  é  $\mathcal{C}^1$ .
  - (b) Se sim, calcule as derivadas parciais. As derivadas parciais são contínuas? Se não,  $f$  não é  $\mathcal{C}^0$ .
  - (c) Se não,  $f$  não é  $\mathcal{C}^0$  e  $f$  não é  $\mathcal{C}^1$ .

Primeiro verificamos a continuidade de  $f$ , para depois calcularmos as derivadas parciais e verificar a continuidade das mesmas.

**Definição 8.13.3 (Função de Classe  $\mathcal{C}^k$ ).** Uma função  $f: X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , é dita ser de classe  $\mathcal{C}^k$  (ou simplesmente dita ser  $\mathcal{C}^k$ ) se é contínua em todos os pontos do seu domínio e possui todas as derivadas até ordem  $k$  contínuas. No caso em que a função é de classe  $\mathcal{C}^k$  para qualquer  $k \in \mathbb{N}$ , dizemos que a função é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Exemplo 8.13.1.** Verifique se a função

$$\begin{cases} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (8.13.1)$$

é de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Observemos que o domínio de  $f$  é  $X = \mathbb{R}^2$ , de forma que o primeiro passo é determinar se a função  $f$  é contínua em  $X$ .

1.  $f$  é contínua em  $X = \mathbb{R}^2$ ?

Observemos agora que a função  $f$  é dada por duas partes: uma fora da origem  $(0,0)$  e  $f(0,0) = 0$ . Desta forma, precisamos analisar a continuidade da função em  $(x,y) \neq (0,0)$  e  $(x,y) = (0,0)$ . Separemos os dois casos:

$$(a) (x,y) \neq (0,0)$$

Esse geralmente é o caso mais simples. Isso se dá porque em  $(x,y) \neq (0,0)$  a função é dada por  $\frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2}$  e, neste caso, temos divisão de polinômios. Como polinômios são contínuos e divisão de funções contínuas é uma função contínua, temos  $f$  contínua desde que  $x^2 + y^2 \neq 0$ , ou seja,  $x,y \neq (0,0)$ .

$$(b) (x,y) = (0,0)$$

Lembremos que, a fim de determinar a continuidade de uma função num determinado ponto, a definição de continuidade nos diz que devemos observar o comportamento da função ao redor do ponto em questão e esse comportamento também deve ser igual ao valor da função no ponto. No nosso caso em particular, como estamos analisando o ponto  $(x,y) = (0,0)$ , a fim de que  $f$  seja contínua no ponto devemos mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0). \quad (8.13.2)$$

Desta forma, devemos analisar o limite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2}$ .

Observe inicialmente que a substituição de  $(x,y)$  por  $(0,0)$  nos dá uma indeterminação. Para lidar com o limite, escreva

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left( \frac{xy^3}{x^2 + y^2} - \frac{x^3y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{y^2}{x^2 + y^2} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2}{x^2 + y^2}. \end{aligned} \quad (8.13.3)$$

Observe que as funções  $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$  e  $\frac{x^2}{x^2 + y^2}$  são limitadas e  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy = 0$ . Em matemática, uma função é dita limitada se sua imagem é um conjunto limitado. Analogamente, dizemos que uma função é ilimitada quando ela não é limitada. Uma função real  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada se existe uma constante  $M \geq 0$  tal que  $|f(x)| \leq M$ ,  $\forall x \in D$ .

Desta forma, temos

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 0, \quad (8.13.4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0. \quad (8.13.5)$$

Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{y^2}{x^2 + y^2} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \frac{x^2}{x^2 + y^2} = 0. \quad (8.13.6)$$

Desta forma, concluímos que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2} = 0 = f(0,0). \quad (8.13.7)$$

e a função  $f$  é contínua em  $(0,0)$ . Como ela é contínua em  $(0,0)$  e  $(x,y) \neq (0,0)$ ,  $f$  é contínua em  $X = \mathbb{R}^2$ .

2. Calcule as derivadas parciais.

Como as derivadas parciais são funções definidas em pontos do domínio de  $f$ , devemos calculá-las em todos os pontos. Por mais que pareça uma tarefa impossível, o procedimento é muito parecido com o da continuidade: temos os casos  $(x,y) \neq (0,0)$  e  $(x,y) = (0,0)$ . Separemos novamente os dois casos:

(a)  $(x,y) \neq (0,0)$

Para  $(x,y) \neq (0,0)$ , a função é dada por  $f(x,y) = \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2}$ . Neste caso, as derivadas parciais são calculadas diretamente pela regra do quociente:

$$f_x(x,y) = \frac{(y^3 - 3x^2y)(x^2 + y^2) - (xy^3 - x^3y)2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^5 - x^4y - 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad (8.13.8)$$

$$f_y(x,y) = \frac{(3xy^2 - x^3)(x^2 + y^2) - (xy^3 - x^3y)2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^5 + x^4y + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (8.13.9)$$

(b)  $(x,y) = (0,0)$

Observe que as derivadas parciais obtidas no item anterior não estão definidas em  $(0,0)$ . Desta forma, devemos utilizar a definição de derivada parcial no ponto para determinar  $f_x(0,0)$  e  $f_y(0,0)$ :

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = \frac{f(h,0)}{h}, \quad (8.13.10)$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - 0}{h} = \frac{f(0,h)}{h}. \quad (8.13.11)$$

Observe que como  $h \rightarrow 0$ , temos  $h \neq 0$  bem próximo de 0. Desta forma,  $f(h,0)$  e  $f(0,h)$  devem ser calculados fazendo  $(x,y) = (h,0)$  e  $(x,y) = (0,h)$ :

$$f(h, 0) = \frac{h \cdot 0 - h^3 \cdot 0}{h^2 + 0^2} = 0, \quad (8.13.12)$$

$$f(0, h) = \frac{0 \cdot h^3 - 0 \cdot h}{0^2 + h^2} = 0. \quad (8.13.13)$$

Substituindo nas expressões para as derivadas no ponto  $(0, 0)$ , encontramos

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0, \quad (8.13.14)$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0. \quad (8.13.15)$$

Juntando os itens (a) e (b), encontramos que as funções derivadas parciais são dadas por

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^4y - 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (8.13.16)$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{-x^5 + x^4y + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (8.13.17)$$

O próximo passo é determinar se as derivadas parciais são contínuas.

### 3. As derivadas parciais são contínuas?

No item anterior obtivemos duas funções derivadas parciais. Precisamos verificar, de maneira análoga ao item 1, se cada uma das duas derivadas é contínua.

(a) Verifiquemos se  $f_x$  é contínua.

Em  $(x, y) \neq (0, 0)$  temos que  $f_x$  é contínua por ser divisão de polinômios.

No ponto  $(0, 0)$ , precisamos mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = 0 = f_x(0, 0). \quad (8.13.18)$$

A fim de calcular o limite, escreva

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^5 - x^4y - 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^5}{(x^2 + y^2)^2} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} - \\
&\quad 4 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} \\
&= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} \\
&\quad - 4 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \tag{8.13.19}
\end{aligned}$$

Observe que  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y = 0$ . Suspeitamos que a função  $\frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2}$  seja limitada. Lembre que  $\frac{y^2}{x^2 + y^2}$  é limitada, isto é  $0 \leq \frac{y^2}{x^2 + y^2} \leq 1$ . Elevando as três parcelas ao quadrado, temos:

$$0 \leq \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} \leq 1. \tag{8.13.20}$$

Desta forma, a função acima é limitada. Assim,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \tag{8.13.21}$$

De maneira análoga,  $\frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2}$  é limitada. Portanto,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \tag{8.13.22}$$

Agora temos que verificar se  $\frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$  é limitada:

$$0 \leq x^2 y^2 \leq 2x^2 y^2 \leq x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2. \tag{8.13.23}$$

Após dividir os extremos por  $(x^2 + y^2)^2$ , temos:

$$0 \leq \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \leq 1, \tag{8.13.24}$$

e a função  $\frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$  é limitada. Assim,

$$4 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \quad (8.13.25)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f_x(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{y^4}{(x^2 + y^2)^2} - \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^2} \\ &- 4 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0, \end{aligned} \quad (8.13.26)$$

de onde segue que  $f_x$  é contínua em  $(0, 0)$  e, portanto, a função  $f_x$  é contínua em  $\mathbb{R}^2$ .

- (b) A função  $f_y$  é contínua seguindo exatamente o mesmo raciocínio e os passos exatos são deixados a cargo do leitor. Recomenda-se, todavia, repetir o procedimento para melhor entendimento.

Portanto, como as derivadas parciais são contínuas, concluímos que  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Uma das classes de diferenciabilidade mais especiais é a  $\mathcal{C}^2$ , a classe de funções contínuas, de derivadas parciais contínuas e segundas derivadas parciais contínuas. Isso se deve por causa de um resultado bastante importante que nos diz que funções de classe  $\mathcal{C}^2$  2 possuem derivadas mistas iguais.

**Teorema 8.13.1 (Teorema de Clairaut-Schwarz).** Seja  $f: X \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^2$ . Então, para qualquer  $(x_0, y_0) \in X$ , temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0). \quad (8.13.27)$$

Em termos mais explícitos, o Teorema de Clairaut-Schwarz (também conhecido como Teorema de Clairaut ou Teorema de Schwarz) diz que se uma função  $f(x, y)$  é de classe  $\mathcal{C}^2$ , então suas derivadas mistas  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  devem ser iguais. Observemos aqui que o resultado continua válido para uma função de três ou mais variáveis. Por exemplo, se  $f(x, y, z)$  é de classe  $\mathcal{C}^2$ , então as derivadas mistas devem satisfazer:

$$f_{xy} = f_{yx}, \quad (8.13.28)$$

$$f_{xz} = f_{zx}, \quad (8.13.29)$$

$$f_{yz} = f_{zy}. \quad (8.13.30)$$

Uma aplicação importante do Teorema de Clairaut-Schwarz é a sua negativa: se  $f_{xy}(x_0, y_0) \neq f_{yx}(x_0, y_0) \implies f$  não é de classe  $\mathcal{C}^2$ .

**Exemplo 8.13.2.** Verifique se a função

$$\begin{cases} \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (8.13.31)$$

é de classe  $\mathcal{C}^2$ .

As funções derivadas parciais são dadas por

$$f_x(x, y) = \begin{cases} \frac{y^5 - x^4y - 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (8.13.32)$$

$$f_y(x, y) = \begin{cases} \frac{-x^5 + x^4y + 4x^3y^2}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (8.13.33)$$

Desta forma, para verificar que  $f$  é de classe  $\mathcal{C}^2$ , devemos calcular as derivadas parciais de cada derivada parcial, ou seja, devemos calcular  $f_{xx}$ ,  $f_{xy}$ ,  $f_{yx}$  e  $f_{yy}$  e verificar se todas as quatro são contínuas. Comecemos pelas derivadas mistas  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$ . Pelo Teorema de Clairaut-Schwarz, a fim de que  $f$  seja de classe  $\mathcal{C}^2$  devemos ter  $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$  e, em particular,  $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$ . Comecemos pelas derivadas mistas no ponto  $(0, 0)$ :

$$f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial f_x}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, 0 + h) - f_x(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h)}{h}, \quad (8.13.34)$$

$$f_{yx}(0, 0) = \frac{\partial f_y}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(0 + h, 0) - f_y(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0) - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0)}{h}. \quad (8.13.35)$$

Observe que como  $h \rightarrow 0$ ,  $h$  é um número diferente de zero suficientemente próximo dele. Assim

$$f_x(0, h) = \frac{h^5 - 0^4 \cdot h - 4 \cdot 0^2 \cdot h^3}{(0^2 + h^2)^2} = h, \quad (8.13.36)$$

$$f_y(h, 0) = \frac{-h^5 + h \cdot 0 + 4 \cdot h^3 \cdot 0^2}{(0^2 + h^2)^2} = -h. \quad (8.13.37)$$

Substituindo nas expressões para  $f_{xy}(0, 0)$  e  $f_{yx}(0, 0)$ , obtemos

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0, h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1, \quad (8.13.38)$$

$$f_{yx}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -1 = -1. \quad (8.13.39)$$

As derivadas parciais mistas em  $(0, 0)$  não são iguais. Pela negação do Teorema de Clairaut-Schwarz,  $f$  não é de classe  $C^2$ .

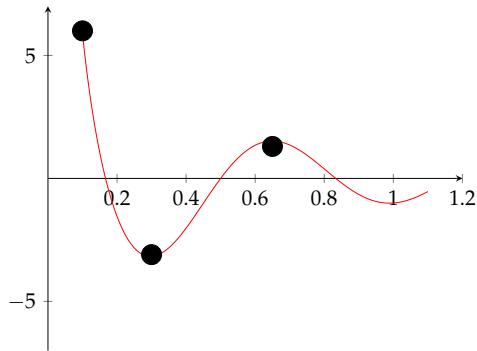
## 8.14 Aplicações do Cálculo Diferencial

### 8.14.1 Pontos Críticos para Funções de uma Variável

Uma das aplicações mais importantes do cálculo é a otimização de funções. Os valores extremos de uma função podem ser:

1. Máximo e mínimo
2. Global ou local

FIGURA 8.14.1 – GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO COM MÁXIMOS GLOBAL E LOCAL E MÍNIMOS GLOBAL E LOCAL



**Definição 8.14.1 (Extremo Global).** Seja  $f(x)$  uma função definida no intervalo  $I$  e seja  $a \in I$ .

1. Dizemos que  $f(x)$  tem um máximo absoluto em  $x = a$  se  $f(a)$  é o valor máximo de  $f(x)$  em  $I$ . Isso é  $f(a) \geq f(x) \forall x \in I$ .
2. Dizemos que  $f(x)$  tem um mínimo absoluto em  $x = a$  se  $f(a)$  é o valor mínimo de  $f(x)$  em  $I$ . Isso é  $f(a) \leq f(x) \forall x \in I$ .

**Definição 8.14.2 (Extremo local).** Seja  $f(x)$  uma função.

1. Dizemos que  $f(x)$  tem um máximo local em  $x = a$  se  $f(a)$  é o valor máximo de  $f(x)$  em algum intervalo aberto  $I$  dentro do domínio de  $f$  contendo  $a$ .
2. Dizemos que  $f(x)$  tem um mínimo absoluto em  $x = a$  se  $f(a)$  é o valor mínimo de  $f(x)$  em algum intervalo aberto  $I$  dentro do domínio de  $f$  contendo  $a$ .

**Definição 8.14.3 (Ponto Crítico).** Dizemos que  $x = c$  é um ponto crítico da função  $f(x)$  se  $f(c)$  existe e se qualquer um dos itens a seguir for verdadeiro.

$$f'(c) = 0 \text{ ou } f(c) \text{ não existe.} \quad (8.14.1)$$

Note que nós requeremos que  $f(c)$  exista para que  $x = c$  seja realmente um ponto crítico. Este é um ponto importante e muitas vezes negligenciado.

FIGURA 8.14.2 – PONTO CRÍTICO SE  $f'(c) = 0$

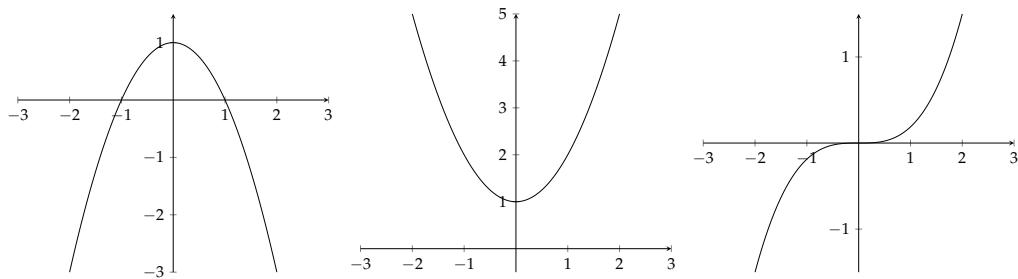
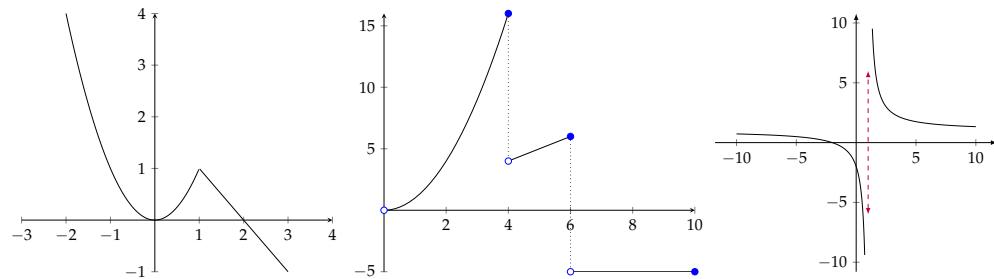


FIGURA 8.14.3 – PONTO CRÍTICO SE  $f'(c)$  NÃO EXISTE



**Teorema 8.14.1.** Se  $f(c)$  é um máximo ou mínimo local, então  $c$  é um ponto crítico de  $f(x)$ .

O inverso não é válido, ou seja, se  $f'(c) = 0$ , então  $f(c)$  não é necessariamente um máximo ou mínimo.

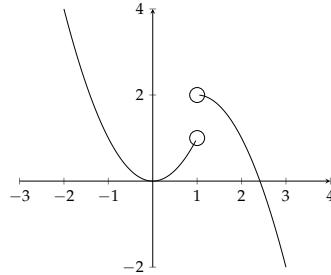
**Exemplo 8.14.1.** Encontre os mínimos e máximos locais de  $f(x) = x^3$ . Pelo teorema, temos que encontrar os pontos críticos. Como  $f'(x) = 3x^2$ , que é definido em todos os valores de  $x$ , os pontos críticos ocorrem onde  $f'(x) = 0$ . De  $f'(x) = 3x^2 = 0$ , encontramos  $x = 0$  como o único ponto crítico. Para todo  $x < 0$  temos  $f(x) < 0$  e para  $x > 0$  temos  $f(x) > 0$  e nós vemos que  $f(0) = 0$  não é um extremo local. A função  $f(x) = x^3$  não possui mínimos ou máximos locais.

**Teorema 8.14.2.** Suponha que  $f(x)$  seja contínua no intervalo fechado  $[a, b]$ . Então  $f(x)$  atinge seus valores absolutos máximo e mínimo em  $[a, b]$  em qualquer um:

1. um ponto crítico ou
2. um dos pontos finais  $a$  ou  $b$

Se  $f(x)$  não é contínua em  $[a, b]$  então este teorema falha.

**Exemplo 8.14.2.** Qual é o valor máximo de  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  no gráfico abaixo? Não há solução.



**Exemplo 8.14.3.** Encontre os pontos críticos para a função  $f(x) = 3x - x^3$  e encontre os valores máximo e mínimo de  $f(x) = 3x - x^3$  no intervalo  $[-1, 3]$ .

Solução:

1. Seja  $f(x) = 3x - x^3$ .

$$f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2) \implies f'(x) = 0 \iff x = \pm 1. \quad (8.14.2)$$

Observe que  $f'(x)$  existe para todos os números reais. Os pontos críticos são  $-1$  e  $1$ .

2. Vemos que

$$\text{se } x = 1, \text{ então } f(x) = 2 \quad (8.14.3)$$

$$\text{se } x = -1, \text{ então } f(x) = -2 \quad (8.14.4)$$

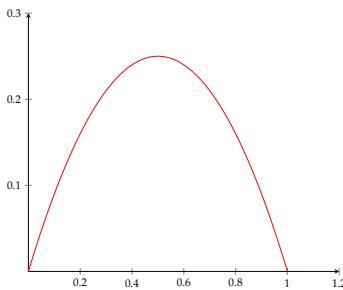
$$\text{se } x = 3, \text{ então } f(x) = -18 \quad (8.14.5)$$

O valor máximo de  $f(x)$  é  $2$  no ponto  $x = 1$ ; o valor mínimo, é  $-18$  em  $x = 3$ .

**Teorema 8.14.3 (Teorema de Rolle).** Suponha que  $f(x)$  é uma função contínua em  $[a, b]$ , é diferenciável em  $(a, b)$  e  $f(a) = f(b)$ . Então existe um  $c$  em  $(a, b)$  com  $f'(c) = 0$ .

Pode haver mais de um desses valores de  $c$ . A figura a seguir apresenta graficamente o teorema de Rolle.

FIGURA 8.14.4 – FUNÇÃO QUE SATISFAZ AS CONDIÇÕES DO TEOREMA DE ROLLE



**Exemplo 8.14.4.** Seja  $f(x) = x^2 - 3x$ . Mostre que todas as hipóteses do Teorema de Rolle estão satisfeitas para o intervalo  $[1, 2]$  e encontre todos os valores de  $c$  como no teorema.

Solução: como  $f(x)$  é um polinômio, é contínua em  $[1, 2]$  e a derivada é  $f'(x) = 2x - 3$  e existe no intervalo  $(1, 2)$ . Logo,

$$f(1) = 1^2 - 3 \cdot 1 = -2, \quad (8.14.6)$$

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 = -2, \quad (8.14.7)$$

$$f'(x) = 2x - 3 = 0 \implies 2x = 3 \implies x = \frac{3}{2}. \quad (8.14.8)$$

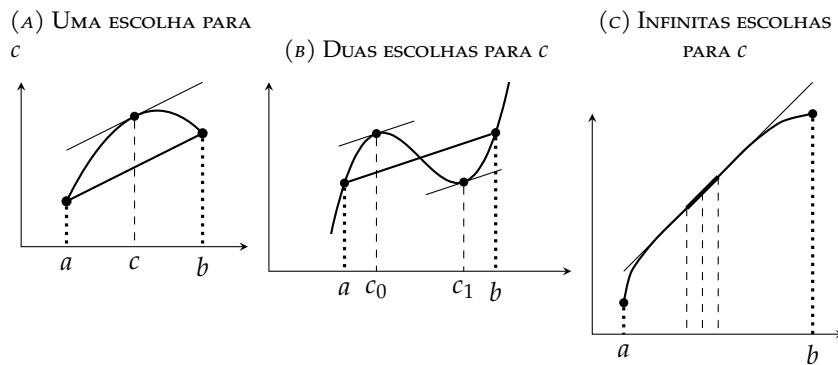
Assim,  $f(x)$  satisfaz a conclusão do Teorema de Rolle.

**Teorema 8.14.4 (Teorema do Valor Médio).** Suponha que  $f(x)$  é uma função contínua em  $[a, b]$  e é diferenciável em  $(a, b)$ . Então existe um  $c$  em  $(a, b)$  com

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (8.14.9)$$

Aqui,  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  é a inclinação da linha secante e  $f'(c)$  é a inclinação da linha tangente. A representação gráfica do teorema do valor médio segue abaixo:

FIGURA 8.14.5 – TEOREMA DO VALOR MÉDIO



Se a função não for diferenciável, essa abordagem não funciona. Por exemplo, seja a função  $f(x) = |x|$ . A linha tangente sempre toca o gráfico primeiro em  $x = 0$ , não importa qual seja a inclinação, e  $f(0)$  é indefinida.

**Exemplo 8.14.5.** Seja  $f(x) = x^3$ . Encontre todos os  $c$  em  $[-1, 3]$  que satisfazem o teorema do valor médio.

Solução: primeiro note que  $f(x)$  é contínua em  $[-1, 3]$  e diferenciável em  $(-1, 3)$ .

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = 7 \quad (8.14.10)$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad (8.14.11)$$

$$7 = 3c^2 \implies c = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}. \quad (8.14.12)$$

Como somente  $c = \sqrt{\frac{7}{3}}$  está no intervalo  $(-1, 3)$ , então  $c = \sqrt{\frac{7}{3}}$  satisfaz o teorema do valor médio.

**Teorema 8.14.5.** A condição de monotonicidade implica que:

$$f'(x) > 0 \implies f(x) \text{ é crescente}, \quad (8.14.13)$$

$$f'(x) < 0 \implies f(x) \text{ é decrescente}, \quad (8.14.14)$$

$$f'(x) = 0 \implies f(x) \text{ é constante}, \quad (8.14.15)$$

em que crescente significa  $a < b \implies f(a) < f(b)$  e decrescente significa  $a < b \implies f(a) > f(b)$ .

*Demonstração.* Seja  $a < b$  e  $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$ . Como  $f'(c) > 0$  e  $(b - a) > 0$ , então:

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a) > f(a). \quad (8.14.16)$$

Logo,  $f'(x) > 0 \implies f(x)$  é crescente. ■

*Demonstração.* Seja  $a > b$  e  $f(b) = f(a) + f'(c)(b - a)$ . Como  $f'(c) > 0$  e  $(b - a) > 0$ , então:

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a) > f(b). \quad (8.14.17)$$

Logo,  $f'(x) < 0 \implies f(x)$  é decrescente. ■

*Demonstração.* Veja que

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a) = f(a) + 0(b - a) = f(a). \quad (8.14.18)$$

Logo,  $f'(x) = 0 \implies f(x)$  é constante. ■

Uma vez identificados os pontos críticos, podemos fazer o teste da primeira derivada. Assuma que  $f'(c) = 0$ . Então:

**Teorema 8.14.6** (Teste da Derivada Primeira).

$$f'(x) > 0 \text{ para } x < c \text{ e } f'(x) < 0 \text{ para } x > c \implies f(c) \text{ é um máximo local} \quad (8.14.19)$$

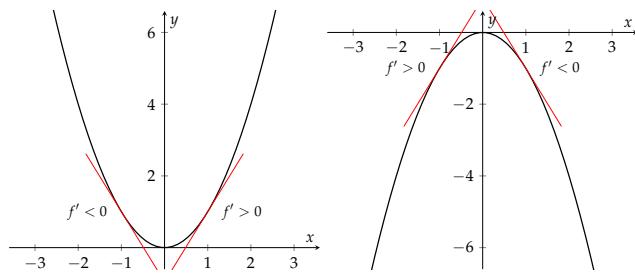
$$f'(x) < 0 \text{ para } x < c \text{ e } f'(x) > 0 \text{ para } x > c \implies f(c) \text{ é um mínimo local} \quad (8.14.20)$$

## 8.14.2 Concavidade para Funções com uma Variável

Vamos começar de uma forma intuitiva. Uma curva é côncava para cima em um intervalo  $I$  se o formato dela se aproxima de um "U". É côncava para baixo se o formato dela se aproxima de um "U" invertido.

**Definição 8.14.4.** Se  $f$  é uma função, dizemos que  $f$  é côncava para cima em se  $f'$  está aumentando em  $I$ . Dizemos que  $f$  é côncava para baixo em  $I$  se  $f'$  está diminuindo em  $I$ .

FIGURA 8.14.6 – GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO E SUA CONCAVIDADE



**Teorema 8.14.7.** Seja  $f$  uma função. Então:

1. Se  $f''(x) > 0 \forall x \in I$ , então  $f$  é côncava para cima em  $I$ . Formalmente, a função é convexa.
2. Se  $f''(x) < 0 \forall x \in I$ , então  $f$  é côncava para baixo em  $I$ . Formalmente, a função é côncava.

Note que o primeiro gráfico acima tem um mínimo local e o segundo tem um máximo local. Isso leva ao seguinte teorema:

**Teorema 8.14.8** (Teste da Derivada Segunda). Suponha que  $c$  seja um ponto crítico para a função  $f$ . Então:

1. Se  $f''(c) > 0$ , então  $f$  tem um mínimo local em  $c$ .
2. Se  $f''(c) < 0$ , então  $f$  tem um máximo local em  $c$ .
3. Se  $f''(c) = 0$ , então o teste falha.

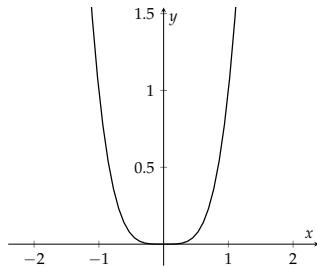
Observe que o teste da derivada segunda é mais fácil de usar, mas às vezes falha. O primeiro teste da derivada primeira sempre funciona.

Qualquer ponto no qual a concavidade de uma função muda de para baixo ou vice-versa é chamado de ponto de inflexão.

**Teorema 8.14.9.** Se  $c$  é um ponto de inflexão para  $f$ , então ou  $f''(c) = 0$  ou  $f''(x)$  não existe.

Tome cuidado que  $f''(c) = 0$  não implica imediatamente que  $c$  é um ponto de inflexão. Para ver isso, considere  $f(x) = x^4$ . O gráfico de  $f$  é uma parábola e é sempre côncavo ainda que  $f''(0) = 0$ .

FIGURA 8.14.7 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = x^4$



O gráfico mostra que o sinal de  $f''(x)$  é positivo para os dois lados de zero.

### 8.14.3 Pontos Críticos para Funções Multivariadas

Assuma que  $f(x_1, \dots, x_n) = f(\mathbf{x})$  seja uma função de  $n$  variáveis e que  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 8.14.5 (Ponto crítico).** Dizemos que  $f$  tem um máximo local em  $\mathbf{x}_0$  se  $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$  para todo  $\mathbf{x}$  perto de  $\mathbf{x}_0$ .

Dizemos que  $f$  tem um mínimo local em  $\mathbf{x}_0$  se  $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$  para todo  $\mathbf{x}$  perto de  $\mathbf{x}_0$ .

**Teorema 8.14.10.** Se  $f(x_1, \dots, x_n)$  tem um máximo ou mínimo local em  $P$ , ou:

1.  $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n} \text{ em } P$  (isto é,  $\nabla f(P) = 0$ ) ou

2. Uma ou mais das derivadas parciais não existem em  $P$ .

**Definição 8.14.6.** Dizemos que  $P$  é um ponto crítico de  $f$  se  $\nabla f(P) = 0$ .

**Exemplo 8.14.6.** Seja a função  $g(x, y) = x^2 + 6xy + 4y^2 + 2x - 4y$ . Quais são os pontos críticos?

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 0 \iff 2x + 6y + 2 = 0, \quad (8.14.21)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 \iff 6x + 8y - 4 = 0, \quad (8.14.22)$$

ou seja,  $x = 2$  e  $y = -1$ .

Há um ponto crítico e ele é dado por  $(2, -1)$ .

### 8.14.4 Concavidade para Funções Multivariadas

Seja  $f(x_0, y_0)$  o ponto crítico da função  $f(x, y)$  tal que

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \quad (8.14.23)$$

e assuma que  $f$  tem uma derivada de segunda ordem em torno do ponto  $(x_0, y_0)$ .

Para determinar a natureza do ponto crítico, calculamos o determinante de uma matriz chamada Hessiana, cuja estrutura é apresentada a seguir:

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}. \quad (8.14.24)$$

Para determinar o tipo de ponto crítico precisamos olhar para a matriz  $\mathbb{H}$ .

**Teorema 8.14.11 (Teste da Derivada Segunda).** Seja  $f(x_0, y_0)$  o ponto crítico da função  $f(x, y)$  tal que

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \quad (8.14.25)$$

e assuma que  $f$  tem uma derivada contínua de segunda ordem em torno do ponto  $(x_0, y_0)$ . Há quatro possíveis casos dependendo do determinante de  $\mathbb{H}$ ,  $\det(\mathbb{H})$ , e de  $f_{xx}(x_0, y_0)$ :

1.  $\det(\mathbb{H}) > 0$  em  $(x_0, y_0)$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ : a função  $f$  assume um valor mínimo no ponto  $(x_0, y_0)$ .
2.  $\det(\mathbb{H}) > 0$  em  $(x_0, y_0)$  e  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ : a função  $f$  assume um valor máximo no ponto  $(x_0, y_0)$ .
3.  $\det(\mathbb{H}) < 0$  em  $(x_0, y_0)$ : a função  $f$  tem um ponto de sela em  $(x_0, y_0)$ .
4.  $\det(\mathbb{H}) = 0$ : o teste é inconclusivo.

**Exemplo 8.14.7.** Seja a função  $g(x, y) = x^2 + 6xy + 4y^2 + 2x - 4y$ .

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 1, \quad (8.14.26)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4, \quad (8.14.27)$$

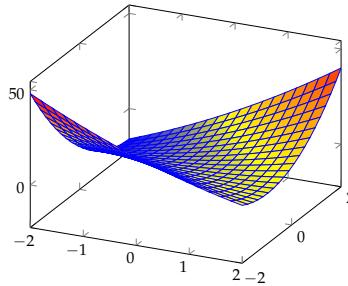
$$\frac{\partial g}{\partial x \partial y} = 3. \quad (8.14.28)$$

Montando o hessiano, temos:

$$|\mathbb{H}| = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -5. \quad (8.14.29)$$

O ponto crítico  $(2, -1)$  é um ponto de sela da função  $g(x, y) = x^2 + 6xy + 4y^2 + 2x - 4y$ .

FIGURA 8.14.8 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $g(x, y) = x^2 + 6xy + 4y^2 + 2x - 4y$



### 8.14.5 Taxa de Crescimento

Para entender os conceitos desenvolvidos até aqui, considere a seguinte função de produção Cobb-Douglas:  $f(K, L) = Q = 4K^{3/4}L^{1/4}$ . Suponha que os insumos variam com o tempo  $t$  e com a taxa de juros  $r$ , por meio das seguintes expressões:

$$K(t, r) = \frac{10t^2}{r} \quad (8.14.30)$$

$$L(t, r) = 6t^2 + 250r. \quad (8.14.31)$$

Calcule a taxa de mudança no nível de produção com relação a  $t$  quando  $t = 10$  e  $r = 0.1$ .

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} &= \frac{\partial Q}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial L} \frac{\partial L}{\partial t} \\ &= \left(3K^{-1/4}L^{1/4}\right)(20tr^{-1}) + \left(K^{3/4}KL^{-3/4}\right)(12t). \end{aligned} \quad (8.14.32)$$

Dado que  $K(10, 0.1) = 10000$  e  $L(10, 0.1) = 625$  em  $t = 10$  e  $r = 0.1$ , a expressão acima vale 3960.

A derivada dessa função no ponto  $F(10000, 625)$  na direção  $(1, 1)$  é simplesmente:

$$\frac{\partial F}{\partial K}(10000, 625) \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial L}(10000, 625) \cdot 1 = 9,5. \quad (8.14.33)$$

A qual taxa a produção aumenta se  $K$  e  $L$  aumentarem na mesma magnitude?

$$\frac{\partial F}{\partial K}(10000, 625) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\partial F}{\partial L}(10000, 625) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6,7175. \quad (8.14.34)$$

Para saber em quais proporções aumentar  $K$  e  $L$  para aumentar mais rapidamente a produção, nós devemos computar o vetor gradiente:

$$\nabla F(10000, 625) = \begin{pmatrix} 1, 5 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (8.14.35)$$

### 8.14.6 Aproximação por Diferenciais

Por exemplo, digamos que estamos estudando  $F = f(f_1, \dots, f_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  em um ponto específico  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  de  $\mathbb{R}^n$  e que queremos usar a aproximação por diferenciais para estimar o efeito de uma variação em  $x^*$  de  $\Delta x = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ . Em primeiro lugar derivamos em relação a cada componente  $f_i$  de  $F$ :

$$f_1(x^* + \Delta x) - f_1(x^*) \approx \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*)\Delta x_n, \quad (8.14.36)$$

$$f_2(x^* + \Delta x) - f_2(x^*) \approx \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x^*)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x^*)\Delta x_n, \quad (8.14.37)$$

⋮

$$f_m(x^* + \Delta x) - f_m(x^*) \approx \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^*)\Delta x_1 + \dots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^*)\Delta x_n. \quad (8.14.38)$$

Utilizando notação vetorial e matricial podemos combinar esses resultados:

$$F(x^* + \Delta x) - F(x^*) \approx \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix}. \quad (8.14.39)$$

em que a matriz do lado direito de (8.14.39) é a derivada jacobiana de  $F$  em  $x^*$ .

**Exemplo 8.14.8.** Para entender este conceito, suponha o exemplo a seguir. Seja o par de funções de demanda

$$q_1 = 6p_1^{-2}p_2^{3/2}y, \quad (8.14.40)$$

$$q_2 = 4p_1p_2^{-1}y^2, \quad (8.14.41)$$

em que  $p_1^* = 6$ ,  $p_2^* = 9$  e  $y = 2$ . Se cada função for independente da outra, calculamos:

$$\begin{aligned} dq_1 &= \frac{\partial q_1}{\partial p_1}dp_1 + \frac{\partial q_1}{\partial p_2}dp_2 + \frac{\partial q_1}{\partial y}dy \\ &= (-12p_1^{-3}p_2^{3/2}y)dp_1 + (9p_1^{-2}p_2^{1/2}y)dp_2 + (6p_1^{-2}p_2^{3/2})dy \\ &= -3dp_1 + 1,5dp_2 + 4,5dy \quad \text{em } (6, 9, 2), \end{aligned} \quad (8.14.42)$$

$$\begin{aligned}
dq_2 &= \frac{\partial q_2}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial q_2}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial q_2}{\partial y} dy \\
&= (4p_2^{-1}y^2) dp_1 + (-4p_1p_2^{-2}y^2) dp_2 + (8p_1p_2^{-1}) dy \\
&= \frac{16}{9} dp_1 - \frac{32}{27} dp_2 + \frac{32}{3} dy \quad \text{em } (6, 9, 2).
\end{aligned} \tag{8.14.43}$$

Suponha que ambos os preços aumentam por 0,1 (ou seja,  $dp_1 = dp_2 = 0,1$ ) e a renda cai por 0,1 ( $dy = -0,1$ ). Qual a variação nas demandas?

$$\begin{pmatrix} dq_1 \\ dq_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial p_1} & \frac{\partial q_1}{\partial p_2} & \frac{\partial q_1}{\partial y} \\ \frac{\partial q_2}{\partial p_1} & \frac{\partial q_2}{\partial p_2} & \frac{\partial q_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dp_1 \\ dp_2 \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1,5 & 4,5 \\ \frac{16}{9} & -\frac{32}{27} & \frac{32}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,1 \\ -0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,6 \\ -1,0074 \end{pmatrix}.$$
(8.14.44)

### 8.14.7 Expansão de Taylor

A linha tangente se aproxima de  $f(x)$  e fornece uma boa aproximação perto do ponto de tangência  $x_0$ . À medida que você se afasta de  $x_0$ , no entanto, a aproximação fica menos precisa. Da definição de derivada segue que:

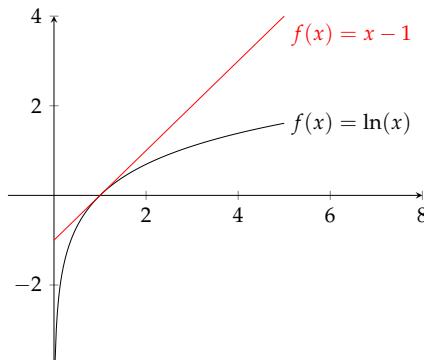
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{8.14.45}$$

**Exemplo 8.14.9.** Seja  $f(x) = \ln x$  no ponto  $x_0 = 1$ . Suponha que queremos aproximar essa função por meio da derivada de primeira ordem. Então,

$$\begin{aligned}
f(x) &\approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\
&\approx \ln(1) + \left. \frac{1}{x} \right|_{x=1} (x - 1) \\
&\approx x - 1.
\end{aligned} \tag{8.14.46}$$

Logo,  $\ln(x) \approx x - 1$ . Graficamente, temos:

FIGURA 8.14.9 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = \ln x$



Às vezes precisamos de aproximações mais acuradas. A aproximação quadrática, que permite um melhor ajuste a uma função, é apresentada a seguir:

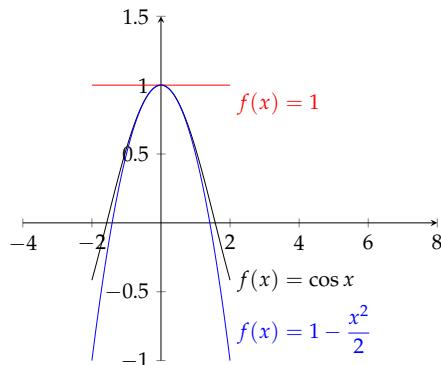
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x)}{2}(x - x_0)^2. \quad (8.14.47)$$

**Exemplo 8.14.10.** Assim, se quiséssemos aproximar a função  $f(x) = \cos x$  em torno de  $x_0 = 0$  por meio da expansão de Taylor, obteríamos:

$$\begin{aligned} f(x) &\approx \cos(0) - \sin(0)(x - 0) - \frac{\cos(0)}{2}(x - 0)^2 \\ &\approx 1 - 0(x) - \frac{1}{2}x^2 \\ &\approx 1 - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned} \quad (8.14.48)$$

Graficamente, temos:

FIGURA 8.14.10 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = \cos x$



Generalizando, em matemática, uma série de Taylor é a série de funções da forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \quad \text{sendo} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad (8.14.49)$$

em que  $f(x)$  é uma função analítica dada. Neste caso, a série acima é dita ser a série de Taylor de  $f(x)$  em torno do ponto  $x = a$ . Associadamente, o polinômio de Taylor de ordem  $n$  em torno de  $x = a$  de uma dada função  $n$ -vezes diferenciável neste ponto é dado por

$$p(x) = f(a) + f'(a) \frac{(x-a)^1}{1!} + f''(a) \frac{(x-a)^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}. \quad (8.14.50)$$

No caso particular de  $a = 0$ , série acima também é chamada de Série de Maclaurin ou, quando for o caso, de polinômio de Maclaurin.

A série de Taylor pode também ser definida para funções de  $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ . Nesse caso, tem-se que a série de Taylor de  $f$  em torno do ponto  $X_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$  é dada por:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) (x_i - x_i^0) \right)^k, \quad (8.14.51)$$

em que  $\left( \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \right)^k$  denota  $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}(X_0)$ .

Ou seja, tem-se:

$$\left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) (x_i - x_i^0) \right)^k = \sum_{\alpha_i \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n \alpha_i = k} \left( \frac{k!}{\alpha_1! \dots \alpha_n!} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(X_0) \cdot (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n} \right). \quad (8.14.52)$$

No caso particular  $n = 2$  temos que  $X_0 = (x_0, y_0)$ . Assim,

$$f(x, y) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k \frac{k!}{i!(k-i)!} \cdot \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(X_0) \cdot \frac{\partial^{k-i} f}{\partial y^{k-i}}(X_0) \cdot (x - x_0)^i \cdot (y - y_0)^{k-i}. \quad (8.14.53)$$

---

9

---

---

## OTIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES

---

## 9.1 Introdução

Vamos motivar esse capítulo com algumas aplicações iniciais.

**Exemplo 9.1.1. Maximização do Lucro:** você quer vender um determinado número  $n$  de itens para maximizar seu lucro. A pesquisa de mercado informa que, se você definir o preço em \$1,50, poderá vender 5.000 itens e, para cada 10 centavos que reduzir o preço abaixo de \$1,50, poderá vender outros 1.000 itens. Suponha que seus custos fixos (“custos iniciais”) totalizem \$2.000 e o custo de produção por item (“custo marginal”) seja de \$0,50.

Encontre o preço a ser definido por item e o número de itens vendidos para maximizar o lucro e também determine o lucro máximo que você pode obter.

### Solução

O primeiro passo é converter o problema em um problema de maximização de função. Como queremos maximizar o lucro definindo o preço por item, devemos procurar uma função  $P(x)$  representando o lucro quando o preço por item é  $x$ . O lucro é a receita menos os custos, e a receita é o número de itens vendidos vezes o preço por item, então obtemos  $P = nx - 2000 - 0,50n$ .

O número de itens vendidos é em si uma função de  $x$

$$n = 5000 + 1000 \times \frac{(1,50 - x)}{0,10} \quad (9.1.1)$$

porque  $\frac{(1,50 - x)}{0,10}$  é o número de múltiplos de 10 centavos que o preço está abaixo de \$1,50. Agora substituímos por  $n$  na função lucro:

$$\begin{aligned} P &= nx - 2000 - 0,50n \\ &= \left(5000 + 1000 \times \frac{(1,50 - x)}{0,10}\right)x - 2000 - 0,50 \left(5000 + 1000 \times \frac{(1,50 - x)}{0,10}\right) \\ &= -10000x^2 + 25000x - 12000 \end{aligned} \quad (9.1.2)$$

Queremos saber o valor máximo desta função quando  $x$  está \$0,00 e \$1,50 [por quê?]. A derivada é  $P'(x) = -20000x + 25000$ , que é zero quando  $x = 1,25$ . Como  $P''(x) = -20000 < 0$ , esse de fato é o preço que maximiza o lucro da firma. Como esse é o único valor crítico, ele também deve ser um máximo global. Portanto, o lucro máximo é \$3.625, obtido quando definimos o preço em \$1,25 e vendemos 7.500 itens.

Faça você mesmo: suponha que o lucro mensal que um fabricante realiza com a venda de  $q$  unidades é dada por  $P(q) = -5q^2 + 1300q - 15000$  reais. Qual o lucro máximo por mês?

**Exemplo 9.1.2. Maximização do Lucro do Monopolista.** – Um monopolista vende em três mercados com as seguintes funções de demanda inversa:

$$p_1 = 36 - q_1, \quad p_2 = 24 - \frac{q_2}{2}, \quad p_3 = 12 - \frac{q_3}{2} \quad (9.1.3)$$

Por simplicidade, assuma que a produção não tem custo ( $c = 0$ ). Além disso, suponha que o monopólio é incapaz de discriminar preços, portanto, deve cobrar o mesmo preço em todos os três mercados,  $p = p_1 = p_2 = p_3$ . Calcule o preço  $p$  que maximiza o lucro do monopólio. [Dica: comece fazendo os gráficos das funções de demanda, avalie os intervalos de preço que vão surgir da observação desse gráfico e compare os níveis de lucro].

### Solução

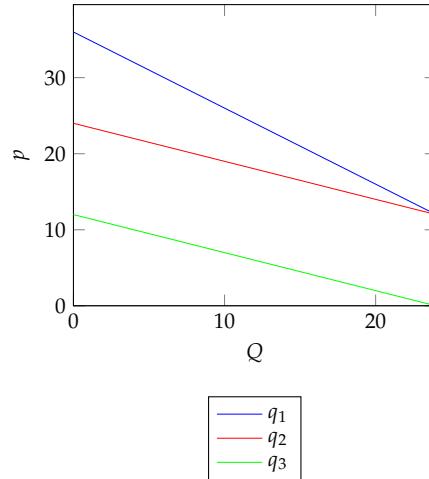
Primeiro, devemos resolver as funções de demanda. Em seguida, devemos examinar três faixas de preço possíveis e comparar os níveis de lucro resultantes.

$$q_1 = 36 - p_1 \quad (9.1.4)$$

$$q_2 = 48 - 2p_2 \quad (9.1.5)$$

$$q_3 = 24 - 2p_3 \quad (9.1.6)$$

FIGURA 9.1.1 – FUNÇÕES DE DEMANDA



1. Se  $p > 24$ , temos que  $q_2 = 0$  e  $q_3 = 0$ .

Escrevendo a função lucro, temos:

$$\pi_A = (36 - q_1)q_1 \quad (9.1.7)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_A}{\partial q_1} = 0 &\implies 36 - 2q_1 = 0 \implies q_1 = 18 \implies p = 36 - 18 = 18 < 24 \\ &\implies \text{Contradição!}\end{aligned}\tag{9.1.8}$$

2. Se  $12 < p \leq 24$ , temos que  $q_3 = 0$ .

Portanto, a demanda agregada é  $q_{12} = q_1 + q_2 = 84 - 3p$

Escrevendo a função lucro, temos:

$$\pi_B = \left( \frac{84 - q_{12}}{3} \right) q_{12} \tag{9.1.9}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_B}{\partial q_{12}} = 0 &\implies \frac{84 - 2q_{12}}{3} = 0 \implies q_{12} = 42 \implies p = \frac{84 - 42}{3} = 14 \\ &\implies \pi_B = 14 \times 42 = 588\end{aligned}\tag{9.1.10}$$

3. Se  $p < 12$ .

Portanto, a demanda agregada é  $q_{123} = q_1 + q_2 + q_3 = 108 - 5p$

Escrevendo a função lucro, temos:

$$\pi_C = \left( \frac{108 - q_{123}}{5} \right) q_{123} \tag{9.1.11}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \pi_C}{\partial q_{123}} = 0 &\implies \frac{108 - 2q_{123}}{5} = 0 \implies q_{123} = 54 \implies p = \frac{108 - 54}{3} = \frac{54}{5} \\ &\implies \pi_B = 54 \times \frac{54}{5} = 583.2\end{aligned}\tag{9.1.12}$$

O preço  $p = 10,8$  maximiza lucro.

**Exemplo 9.1.3.** Um investidor visa um investimento lucrativo de \$10.000. As opções de investimento disponíveis compreendem 3 fundos de investimento de diferentes rendimentos e riscos resumidos na Tabela abaixo:

Fundo	Retorno anual estimado	Risco
A	10%	4
B	7%	2
C	4%	1

O objetivo do investidor é obter um rendimento de \$600 no final do primeiro ano. No entanto, o investidor é conservador e quer investir pelo menos 40% no fundo C para reduzir o risco. Determine a distribuição ótima dos 10.000 para atender a esses requisitos.

### Solução

Vamos denotar os percentuais de investimento em cada fundo por  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente. Isso implica que

$$x + y + z = 1 \implies z = 1 - x - y \quad (9.1.13)$$

O desejo de ganho mínimo de \$600, implica que

$$\begin{aligned} 10000(0,1 + 0,07y + 0,04z) &\geq 600 \\ 10000(0,1 + 0,07y + 0,04(1 - x - y)) &\geq 600 \\ 600x + 300y &\geq 200 \\ 6x + 3y &\geq 2 \end{aligned} \quad (9.1.14)$$

O investimento mínimo no fundo C pode ser expresso como

$$10000z = 10000(1 - x - y) \geq 4000 \implies x + y \leq 0,6 \quad (9.1.15)$$

Além disso, é necessário que  $x, y, z \geq 0$ .

Minimizar o risco pode ser expresso como um problema de otimização com função objetivo linear, isto é,

$$\min_{x,y,z} 4x + 2y + z \iff \min_{x,y} 3x + y + 1 \quad (9.1.16)$$

Com essas informações, o problema de otimização estática pode ser escrito como

$$\min_{x,y} 3x + y + 1 \quad (9.1.17)$$

sujeito a

$$2 - 6x - 3y \leq 0 \quad (9.1.18)$$

$$x + y - 0,6 \leq 0 \quad (9.1.19)$$

$$x + y - 1 \leq 0 \quad (9.1.20)$$

$$-x \leq 0 \quad (9.1.21)$$

$$-y \leq 0 \quad (9.1.22)$$

**Exemplo 9.1.4.** Um trem transporta 2000 passageiros diariamente de uma cidade da região metropolitana para a capital. O custo para andar de trem é de \$7,00 por pessoa. A pesquisa de mercado mostra que 40 pessoas a menos viajariam de trem para cada aumento de \$0,10 na tarifa e mais 40 pessoas viajariam de trem para cada redução de \$0,10. Se a capacidade do trem é de 2600 passageiros e transportar menos de 1600 passageiros significa que os custos excedem a receita, que tarifa a ferrovia deve cobrar para obter a maior receita possível?

### Solução

Para maximizar a receita, precisamos de uma função de receita. Sabemos que

$$\text{receita} = \text{número de passageiros} \times \text{tarifa por passageiro} \quad (9.1.23)$$

Para formar uma função de receita, a escolha mais direta para a variável independente vem da observação de que tanto o número de passageiros quanto a tarifa por passageiro mudam a cada \$0,10 de aumento ou diminuição na tarifa. Se deixarmos  $x$  representar o número de aumentos de \$0,10 na tarifa (por exemplo,  $x = -3$  representa um aumento de \$0,30 na tarifa, enquanto  $x = -1$  representa uma redução de \$0,10 na tarifa), então podemos escrever expressões para o número de passageiros e a tarifa por passageiro em termos de  $x$ , como segue:

- a tarifa por passageiro é  $7 + 0,10x$
- o número de passageiros é  $2000 - 40x$

Como o número de passageiros deve ser de pelo menos 1600, temos que  $2000 - 40x \geq 1600$ , e  $x \leq 10$ . Como o número de passageiros não pode exceder 2600,  $2000 - 40x \leq 2600$  e  $x \geq -15$ . O domínio é, portanto,  $-15 \leq x \leq 10$ .

A função receita é,

$$R(x) = (7 + 0,10x)(2000 - 40x) \quad (9.1.24)$$

$$= -4x^2 - 80x + 14000 \quad (9.1.25)$$

Portanto, o problema de otimização é

$$\max_{-15 \leq x \leq 10} -4x^2 - 80x + 14000 \quad (9.1.26)$$

cuja solução é  $x = -10$ . Portanto, a receita máxima ocorre quando há reajustes tarifários de \$0,10 cada, ou uma redução de tarifa de \$6,00, de modo que a receita diária é 14400, e o número de passageiros é 2400.

## 9.2 Formas Quadráticas

Seja a seguinte definição:

**Definição 9.2.1 (Forma quadrática).** Uma forma quadrática no  $\mathbb{R}^n$  é uma função real da forma

$$\mathcal{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i \leq j} a_{ij} x_i x_j, \quad (9.2.1)$$

na qual cada termo é um monômio de grau dois.

Toda forma quadrática  $\mathcal{Q}$  pode ser representada por uma matriz simétrica  $A$ , como segue:

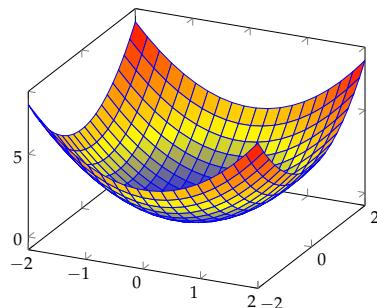
$$\mathcal{Q}(x) = x' \cdot A \cdot x. \quad (9.2.2)$$

Uma forma quadrática sempre assume valor zero no ponto  $x = 0$ . A característica que distingue as formas quadráticas é o conjunto de valores que a forma assume quando  $x \neq 0$ . Por exemplo, a função  $y = ax^2$  é sempre  $\geq 0$  se  $a > 0$  e é igual a zero quando  $x = 0$ . Tal forma é chamada positiva e  $x = 0$  é o mínimo global. De forma semelhante, a função  $y = ax^2$  é sempre  $\leq 0$  se  $a < 0$  e é igual a zero quando  $x = 0$ . Tal forma é chamada negativa e  $x = 0$  é o máximo global.

Em duas dimensões, podemos ter mais que dois casos:

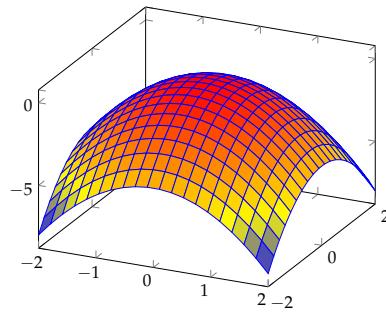
1. A forma quadrática  $\mathcal{Q}_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  é sempre maior do que zero em  $(x_1, x_2) \neq 0$ . Dizemos que  $\mathcal{Q}_1$  é positiva.

FIGURA 9.2.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $\mathcal{Q}_1(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$



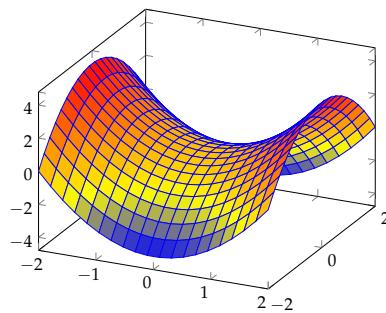
2. A forma quadrática  $\mathcal{Q}_2(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$  é sempre menor do que zero em  $(x_1, x_2) \neq 0$ . Dizemos que  $\mathcal{Q}_2$  é negativa.

FIGURA 9.2.2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $Q_2(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$



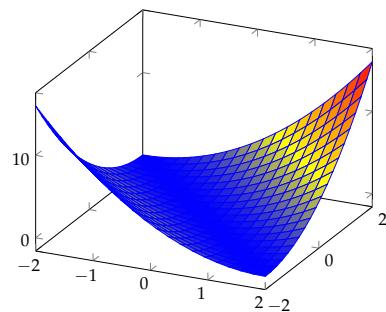
3. A forma quadrática  $Q_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$  assume valores positivos e negativos em  $(x_1, x_2) \neq 0$ . Dizemos que  $Q_3$  é indefinida.

FIGURA 9.2.3 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $Q_3(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$



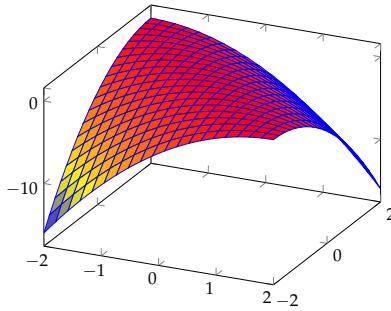
4. Uma forma quadrática que é sempre  $\geq 0$  mas pode ser zero em alguns  $x$  não-nulos, é chamada não-negativa. Por exemplo, a função  $Q_4(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$ .

FIGURA 9.2.4 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $Q_4(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$



5. Uma forma quadrática que é sempre  $\leq 0$  mas pode ser zero em alguns  $x$  não-nulos, é chamada não-positiva. Por exemplo, a função  $Q_5(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$ .

FIGURA 9.2.5 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $\mathcal{Q}_5(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2$



Isto posto, seja a seguinte definição.

**Definição 9.2.2 (Formas Quadráticas).** Seja  $A$  uma matriz simétrica  $n \times n$ . Então  $A$  é:

1. positiva se  $x'Ax > 0$  para qualquer  $x \neq 0$  em  $\mathbb{R}^n$ ;
2. não-negativa se  $x'Ax \geq 0$  para qualquer  $x \neq 0$  em  $\mathbb{R}^n$ ;
3. negativa se  $x'Ax < 0$  para qualquer  $x \neq 0$  em  $\mathbb{R}^n$ ;
4. não-positiva se  $x'Ax \leq 0$  para qualquer  $x \neq 0$  em  $\mathbb{R}^n$ ;
5. indefinida se  $x'Ax > 0$  para alguns  $x$  em  $\mathbb{R}^n$  e  $x'Ax < 0$  para outros  $x$  em  $\mathbb{R}^n$ ;

Com isso, vamos descrever um teste simples para determinar a classificação de uma forma quadrática ou de uma matriz simétrica.

**Definição 9.2.3 (Menor Principal).** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Uma submatriz principal de ordem  $k$  de  $A$  é uma submatriz  $A$  de tamanho  $k \times k$  formada a partir de  $A$  suprimindo  $n - k$  colunas e as mesmas  $n - k$  linhas. O determinante de uma submatriz principal  $k \times k$  é denominado um menor principal de ordem  $k$  de  $A$ .

**Definição 9.2.4 (Menor Principal Líder).** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . A submatriz principal de ordem  $k$  de  $A$  obtida suprimindo as últimas  $n - k$  colunas e as últimas  $n - k$  linhas é denominada a submatriz principal líder de ordem  $k$  de  $A$ . Seu determinante é denominado o menor principal líder de ordem  $k$  de  $A$ . Vamos denotar a submatriz principal líder de ordem  $k$  por  $A_k$  e o correspondente menor principal líder por  $|A_k|$ .

Uma matriz  $n \times n$  tem  $n$  submatrizes principais líderes.

**Exemplo 9.2.1.** Para uma matriz  $3 \times 3$ , os três menores principais líderes são:

$$\left| a_{11} \right|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \quad (9.2.3)$$

**Teorema 9.2.1.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  simétrica. Então,

1.  $A$  é positiva se, e somente se, todos os  $n$  menores principais líderes de  $A$  são estritamente positivos.

2.  $A$  é negativa se, e somente se, os  $n$  menores principais líderes de  $A$  alternam de sinal, como segue:

$$|A_1| < 0, \quad |A_2| > 0, \quad |A_3| < 0, \dots \quad (9.2.4)$$

O  $k$ -ésimo menor principal líder deveria ter o mesmo sinal de  $(-1)^k$ .

Se as condições acima não forem satisfeitas, então a matriz pode ser semidefinida ou indefinida. Nesse caso, precisamos verificar todos os menores principais de  $A$ .

**Teorema 9.2.2.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$  simétrica. Então,  $A$  é não-negativa se, e somente se, todos os menores principais de  $A$  são  $\geq 0$ ;  $A$  é não-positiva se, e somente se, cada menor principal de  $A$  de ordem ímpar é  $\leq 0$  e cada menor principal de  $A$  de ordem par é  $\geq 0$ .

**Exemplo 9.2.2.** Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}. \quad (9.2.5)$$

$A$  é positiva, pois  $|A_1| = 2$  e  $|A_2| = 5$ .  $B$  é indefinida, pois  $|B_1| = 2$  e  $|B_2| = -2$ .

Os autovalores fornecem uma maneira mais conveniente de determinar a definição de formas quadráticas. Como estamos lidando com matrizes simétricas, que são diagonalizáveis, podemos reescrever nossa forma quadrática como

$$Q(x) = x' \cdot A \cdot x = x' P D P' x = y' D y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \quad (9.2.6)$$

em que  $y = P'x$ . Assim,

1.  $Q(x)$  é positiva semi-definida se e somente se  $\lambda_r \geq 0$  para  $r = 1, \dots, n$ .
2.  $Q(x)$  é positiva definida se e somente se  $\lambda_r > 0$  para  $r = 1, \dots, n$ .
3.  $Q(x)$  é negativa semi-definida se e somente se  $\lambda_r \leq 0$  para  $r = 1, \dots, n$ .
4.  $Q(x)$  é negativa definida se e somente se  $\lambda_r < 0$  para  $r = 1, \dots, n$ .

## 9.3 Restrições Lineares e Matrizes Orladas

Determinar a classificação de uma forma quadrática  $Q$  é equivalente a determinar se  $x = 0$  é um máximo, um mínimo, ou nenhum dos dois para a função real  $Q$ . A caracterização do Teorema 9.2.1 funciona somente se não houver restrições no problema em questão, ou seja, se  $x$  puder assumir qualquer valor no  $\mathbb{R}^n$ . Com restrições, precisamos incluir os coeficientes das restrições como orlas no topo e à esquerda da nova matriz. Assim, vamos escrever a forma quadrática como:

$$\mathcal{Q}(x) = x^\top Ax = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad (9.3.1)$$

no conjunto-restricção linear dado por

$$\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (9.3.2)$$

Colocamos uma orla na matriz da forma quadrática (9.3.1), acrescentando a matriz da restrição linear (9.3.2) no topo e à esquerda:

$$H = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & \dots & 0 & | & B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & | & B_{m1} & \dots & B_{mn} \\ \hline B_{11} & \dots & B_{m1} & | & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{1n} & \dots & B_{mn} & | & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{array} \right). \quad (9.3.3)$$

Com base em (9.3.3) temos o seguinte teorema:

**Teorema 9.3.1.** Para determinar a classificação da forma quadrática (9.3.1) de  $n$  variáveis, restrita ao conjunto-restricção (9.3.2)  $Bx = 0$  dado por  $m$  equações lineares, construa a matriz simétrica orlada  $H$  de tamanho  $(n+m) \times (n+m)$  colocando os coeficientes  $B$  da restrição linear na orla acima e à esquerda de  $A$ :

$$H = \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^\top & A \end{pmatrix}. \quad (9.3.4)$$

Confira os sinais dos últimos  $n-m$  menores principais líderes de  $H$ , começando com o determinante de  $H$  mesmo.

1. Se  $\det(H)$  tem o mesmo sinal de  $(-1)^n$  e se estes  $n-m$  menores principais líderes alternam de sinal, então  $\mathcal{Q}$  é negativa no conjunto-restricção  $Bx = 0$  e  $x = 0$  é um máximo global estrito de  $\mathcal{Q}$  neste conjunto-restricção.
2. Se  $\det(H)$  e estes  $n-m$  menores principais líderes têm todos o mesmo sinal de  $(-1)^m$ , então  $\mathcal{Q}$  é positiva no conjunto-restricção  $Bx = 0$  e  $x = 0$  é um mínimo global estrito de  $\mathcal{Q}$  neste conjunto-restricção.

3. Se ambas as condições são violadas, então  $\mathcal{Q}$  é indefinida no conjunto-restrição  $Bx = 0$  e  $x = 0$  não é nem máximo nem mínimo de  $\mathcal{Q}$  neste conjunto-restrição.

**Exemplo 9.3.1.** Seja a forma quadrática  $\mathcal{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 4x_2x_3 - 2x_1x_4$  no conjunto-restrição  $x_2 + x_3 + x_4 = 0$  e  $x_1 - 9x_2 + x_4 = 0$ . Para verificar a sua classificação, construa a matriz orlada

$$H_6 = \left( \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -9 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right). \quad (9.3.5)$$

Como este problema tem  $n = 4$  e  $m = 2$  restrições, precisamos calcular  $n - m = 2$  submatrizes principais líderes de  $H_6$ : a própria  $H_6$  e  $H_5$ :

$$H_5 = \left( \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -9 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right). \quad (9.3.6)$$

Como  $m = 2$  e  $(-1)^2 = 1$ , precisamos  $\det(H_6) > 0$  e  $\det(H_5) > 0$  para verificar a positividade de  $\mathcal{Q}$ . Como  $n = 4$  e  $(-1)^4 = 1$ , precisamos  $\det(H_6) > 0$  e  $\det(H_5) < 0$  para verificar a negatividade de  $\mathcal{Q}$ . Como  $\det(H_6) = 24$  e  $\det(H_5) = 77$ , concluímos que  $\mathcal{Q}$  é positiva no conjunto-restrição e  $x = 0$  é um mínimo de  $\mathcal{Q}$  restrita ao conjunto-restrição.

## 9.4 Otimização Não-Condicionada

### 9.4.1 Condições de Primeira Ordem

A CPO para um ponto  $x^*$  ser um máximo ou um mínimo de uma função  $f$  de uma variável é que  $f'(x^*) = 0$ , ou seja, que  $x^*$  seja um ponto crítico de  $f$ . Para uma função de  $n$  variáveis queremos que  $\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$  em  $x^*$ . Neste caso,  $x^*$  é um ponto interior do domínio de  $F$  se existir uma bola  $B_r(x^*)$  em torno de  $x^*$  contida no domínio de  $F$ .

**Teorema 9.4.1 (Condição de Primeira Ordem).** Seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^1$  uma função  $C^1$  definida num subconjunto  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $x^*$  é um máximo ou mínimo local de  $F$  em  $U$  e se  $x^*$  é um ponto interior de  $U$ , então:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n. \quad (9.4.1)$$

**Exemplo 9.4.1.** Para encontrar os máximos e mínimos locais de  $F(x, y) = x^3 - y^3 + 9xy$ , calculamos as derivadas parciais de primeira ordem e as igualamos a zero:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff 3x^2 + 9y = 0, \quad (9.4.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff -3y^2 + 9x = 0. \quad (9.4.3)$$

Os candidatos a máximo ou mínimo local são estes dois pontos:  $(0, 0)$  e  $(3, -3)$ .

## 9.4.2 Condições de Segunda Ordem

Para determinar se um ponto crítico é um máximo ou um mínimo, necessitamos usar uma condição sobre as derivadas segundas de  $F$ . Uma função  $C^2$  de  $n$  variáveis tem  $n^2$  derivadas parciais de segunda ordem em cada ponto do seu domínio e é natural combiná-las em uma matriz  $n \times n$ , denominada matriz hessiana de  $F$  ou hessiana de  $F$ :

$$D^2F(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(x^*) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(x^*) \end{pmatrix}. \quad (9.4.4)$$

Como pelo teorema de Young as derivadas mistas são iguais para uma função  $C^2$ ,  $D^2F(x^*)$  é uma matriz simétrica.

A CSO suficiente para um ponto crítico  $x^*$   $n$ -dimensional de uma função ser um máximo local é que  $D^2F(x^*)$  seja negativa; analogamente, a CSO suficiente para um ponto crítico  $x^*$   $n$ -dimensional de uma função ser um mínimo local é que  $D^2F(x^*)$  seja positiva.

**Teorema 9.4.2 (Condição de Segunda Ordem).** Seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^1$  uma função  $C^2$  cujo domínio é um conjunto aberto  $U$  em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que  $x^*$  é um ponto crítico de  $F$ :

1. Se a hessiana  $D^2F(x^*)$  é uma matriz simétrica negativa, então  $x^*$  é um máximo local estrito de  $F$ .
2. Se a hessiana  $D^2F(x^*)$  é uma matriz simétrica positiva, então  $x^*$  é um mínimo local estrito de  $F$ .
3. Se a hessiana  $D^2F(x^*)$  é uma matriz simétrica indefinida, então  $x^*$  não é nem um máximo local nem um mínimo local de  $F$ .

Podemos reescrever o teorema acima em três outros teoremas.

**Teorema 9.4.3 (Máximo Local Estrito).** Seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^1$  uma função  $\mathcal{C}^2$  cujo domínio é um conjunto aberto  $U$  em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \quad (9.4.5)$$

e que os  $n$  menores principais líderes de  $D^2F(x^*)$  alternam de sinal em  $x^*$ :

$$\left| F_{x_1 x_1} \right| < 0, \quad \begin{vmatrix} F_{x_1 x_1} & F_{x_1 x_2} \\ F_{x_2 x_1} & F_{x_2 x_2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} F_{x_1 x_1} & F_{x_1 x_2} & F_{x_1 x_3} \\ F_{x_2 x_1} & F_{x_2 x_2} & F_{x_2 x_3} \\ F_{x_3 x_1} & F_{x_3 x_2} & F_{x_3 x_3} \end{vmatrix} < 0 \quad \dots \quad (9.4.6)$$

Então,  $x^*$  é um máximo local estrito de  $F$ .

**Teorema 9.4.4 (Mínimo Local Estrito).** Seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^1$  uma função  $\mathcal{C}^2$  cujo domínio é um conjunto aberto  $U$  em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \quad (9.4.7)$$

e que os  $n$  menores principais líderes de  $D^2F(x^*)$  são todos positivos em  $x^*$ :

$$\left| F_{x_1 x_1} \right| > 0, \quad \begin{vmatrix} F_{x_1 x_1} & F_{x_1 x_2} \\ F_{x_2 x_1} & F_{x_2 x_2} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} F_{x_1 x_1} & F_{x_1 x_2} & F_{x_1 x_3} \\ F_{x_2 x_1} & F_{x_2 x_2} & F_{x_2 x_3} \\ F_{x_3 x_1} & F_{x_3 x_2} & F_{x_3 x_3} \end{vmatrix} > 0 \quad \dots \quad (9.4.8)$$

Então,  $x^*$  é um mínimo local estrito de  $F$ .

**Teorema 9.4.5 (Ponto de Sela).** Seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^1$  uma função  $\mathcal{C}^2$  cujo domínio é um conjunto aberto  $U$  em  $\mathbb{R}^n$ . Suponha que

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x^*) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, n, \quad (9.4.9)$$

e que alguns menores principais não-nulos violam o padrão de sinal dos dois teoremas acima. Então,  $x^*$  é um ponto de sela de  $F$ .

**Exemplo 9.4.2.** Para encontrar os máximos e mínimos locais de  $F(x, y) = x^3 - y^3 + 9xy$ , calculamos as derivadas parciais de primeira ordem e as igualamos a zero:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \iff 3x^2 + 9y = 0, \quad (9.4.10)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \iff -3y^2 + 9x = 0. \quad (9.4.11)$$

Os candidatos a máximo ou mínimo local são estes dois pontos:  $(0, 0)$  e  $(3, -3)$ .

As derivadas segundas são:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -6y, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 9. \quad (9.4.12)$$

A matriz hessiana é

$$H = \begin{pmatrix} 6x & 9 \\ 9 & -6y \end{pmatrix}. \quad (9.4.13)$$

O menor principal líder de primeira ordem é  $F_{xx} = 6x$  e o menor principal líder de segunda ordem é  $\det D^2F(x) = -36xy - 81$ . Em  $(0,0)$  estes dois menores são 0 e  $-81$  e, portanto,  $(0,0)$  é uma sela de  $F$ . Em  $(3, -3)$  estes dois menores são 18 e 243 e, portanto,  $(3, -3)$  é um mínimo local de  $F$ .

Vamos verificar como essa condição de segunda ordem surge por meio do teorema de Taylor. Para tanto, seja o seguinte polinômio de Taylor de ordem 1 para uma função de duas variáveis.

$$P_1(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (9.4.14)$$

Observe que esta equação representa o plano tangente.

Lembre que a função  $f(x, y)$  pode ser escrita como

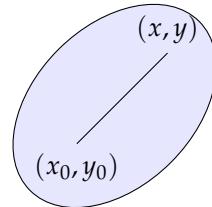
$$f(x, y) = P_1(x, y) + R(x, y), \quad (9.4.15)$$

que é a soma de um polinômio de Taylor de ordem 1 e um termo de resto, em que

$$R(x, y) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})(y - y_0)^2 \right]. \quad (9.4.16)$$

Seja o domínio de uma função. O segmento de reta entre  $(x_0, y_0)$  e  $(x, y)$  será denotado por  $S$ . O ponto  $(\bar{x}, \bar{y}) \in S$ .

FIGURA 9.4.1 – DOMÍNIO DA FUNÇÃO



Se  $(x_0, y_0)$  é ponto crítico de  $f$ , então

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}, \bar{y})h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}, \bar{y})hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}, \bar{y})k^2 \right], \quad (9.4.17)$$

em que  $h = x - x_0$  e  $k = y - y_0$  para algum  $(\bar{x}, \bar{y})$  no segmento  $S$  que liga  $(x_0, y_0)$  e  $(x, y)$ .

Observe que podemos ver o resultado acima como uma forma quadrática em  $h, k$ , uma vez que  $f(x_0, y_0)$  é uma constante:

$$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2. \quad (9.4.18)$$

Vamos reescrever esse resultado como

$$\begin{aligned} Q(h, k) &= ah^2 + 2bhk + ck^2 \\ &= a \left[ h^2 + 2 \frac{b}{a} hk + \frac{c}{a} k^2 \right] \\ &= a \left[ h^2 + 2 \frac{b}{a} hk + \left( \frac{b}{a} k \right)^2 - \left( \frac{b}{a} k \right)^2 + \frac{c}{a} k^2 \right] \\ &= a \left[ \left( h + \frac{b}{a} k \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} k^2 \right] \\ &= a \left[ \left( h + \frac{b}{a} k \right)^2 + \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a^2} k^2 \right]. \end{aligned} \quad (9.4.19)$$

Então, temos os seguintes casos:

1. Se  $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$  e  $a > 0$ , então  $Q(h, k) > 0$ .

2. Se  $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} > 0$  e  $a < 0$ , então  $Q(h, k) < 0$ .

3. Se  $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} < 0$ , temos:

- com  $a = 0 \implies b \neq 0$ . Logo,  $Q(h, k) = 2bkh + ck^2$ . Supondo  $Q(h, 1) = 2bh + c$ , existem  $h_1$  e  $h_2$  tais que  $Q(h_1, 1) > 0$  e  $Q(h_2, 1) < 0$ .

- com  $a = 0$  e  $\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \neq 0$ . Supondo  $Q(1, 0) = a$ . Supondo  $Q\left(\frac{b}{a}, -1\right) = a\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2b\left(\frac{b}{a}\right)(-1) + c = \frac{b^2}{a} - \frac{2b^2}{a} + c = \frac{-b^2 + ac}{a} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}}{a}$ . Então,  $Q(1, 0) = a$  e  $Q\left(\frac{b}{a}, -1\right)$

têm sinais contrários.

Seja  $f$  uma função  $\mathcal{C}^2$  em  $D \subset \mathbb{R}^2$  aberto. Defina o hessiano de  $f$ :

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix}. \quad (9.4.20)$$

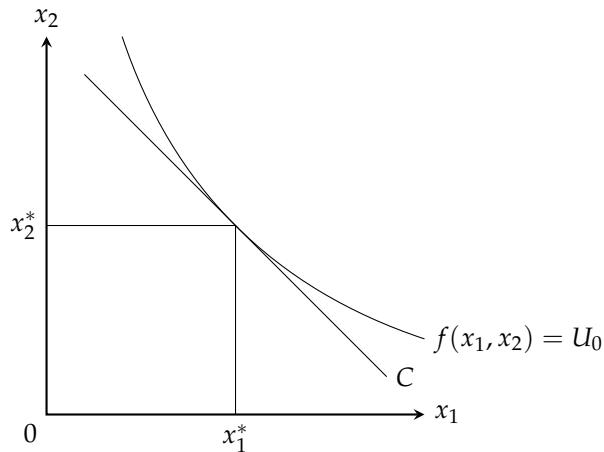
Observe a similaridade entre esses dois determinantes. Assim, entendemos as condições de segunda ordem.

## 9.5 Otimização Condicionada

### 9.5.1 Otimização com Restrição de Igualdade

Começamos com o problema de maximização condicionada mais simples, o de maximizar uma função  $f(x_1, x_2)$  de duas variáveis sujeita a uma única restrição de igualdade:  $h(x_1, x_2) = c$ . Em economia, um problema semelhante seria o de maximizar a função utilidade.

FIGURA 9.5.1 – A CURVA DE NÍVEL DE  $f$  DE VALOR MAIS ALTO É TANGENTE AO CONJUNTO RESTRIÇÃO  $C$



A curva de nível de  $f$  ser tangente ao conjunto-restrição  $C$  no máximo condicionado  $x^*$  significa que, em  $x^*$ , a inclinação do conjunto de nível de  $f$  é igual à inclinação da curva de restrição  $C$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)} &= \frac{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)}, \\ \end{aligned} \tag{9.5.1}$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)} &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)}. \\ \end{aligned} \tag{9.5.2}$$

Para evitarmos denominadores nulos, seja  $\mu$  o valor comum dos dois quocientes em (9.5.2):

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*)}{\frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*)} = \mu, \tag{9.5.3}$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*) = 0, \tag{9.5.4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x^*) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) = 0. \tag{9.5.5}$$

Juntando a equação de restrição com as duas equações acima, obtemos um sistema de três equações a três incógnitas:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_1}(x) = 0, \tag{9.5.6}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) - \mu \frac{\partial h}{\partial x_2}(x) = 0, \tag{9.5.7}$$

$$h(x_1, x_2) - c = 0. \tag{9.5.8}$$

Podemos reescrever o sistema acima por meio da função lagrangeana:

$$L(x_1, x_2, \mu) \equiv f(x_1, x_2) - \mu(h(x_1, x_2) - c). \tag{9.5.9}$$

Para encontrar os pontos críticos do lagrangeano  $L$ , calculamos  $\frac{\partial L}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial x_2}$  e  $\frac{\partial L}{\partial \mu}$  e igualamos cada uma a zero.

Esta nova variável  $\mu$  que multiplica a restrição é denominada multiplicador de Lagrange. Com este processo, reduzimos um problema de otimização com restrições em duas variáveis a um problema de três variáveis sem restrições. A penalidade para esta redução é a inclusão da variável  $\mu$ .

Esta redução não teria funcionado se  $\frac{\partial h}{\partial x_1}$  e  $\frac{\partial h}{\partial x_2}$  fossem zero no máximo  $x^*$ . Por isso, precisamos criar a hipótese de que a parcial  $\frac{\partial h}{\partial x_1}$ , ou a parcial  $\frac{\partial h}{\partial x_2}$ , ou ambas, são não-nulas no máximo condicionado. Como esta é uma imposição no conjunto-restrição, é denominada qualificação de restrição. Se a restrição é linear, esta qualificação é satisfeita automaticamente.

**Teorema 9.5.1 (Otimização com Igualdade).** *Sejam  $f$  e  $h$  funções  $C^1$  de duas variáveis. Suponha que  $x^* = (x_1^*, x_2^*)$  é uma solução do problema*

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & f(x_1, x_2) \\ \text{sujeto a} \quad & h(x_1, x_2) = c. \end{aligned}$$

Então, existe um número real  $\mu^*$  tal que  $(x_1^*, x_2^*, \mu^*)$  é um ponto crítico da função lagrangeana

$$L(x_1, x_2, \mu) \equiv f(x_1, x_2) - \mu [h(x_1, x_2) - c]. \quad (9.5.10)$$

Em outras palavras, em  $(x_1^*, x_2^*, \mu^*)$  temos:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad (9.5.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \quad (9.5.12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0. \quad (9.5.13)$$

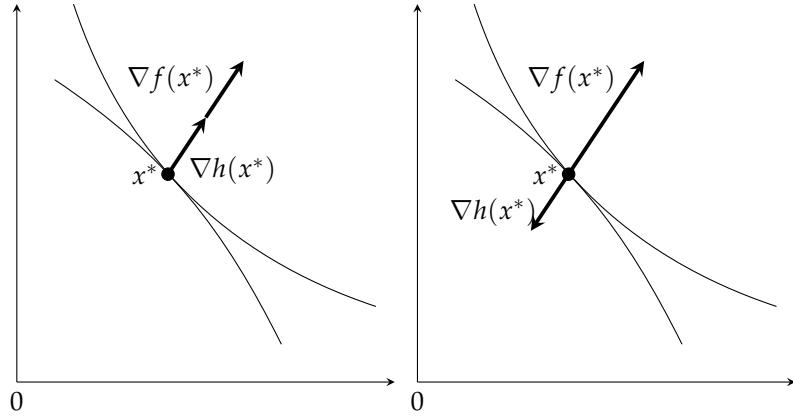
Geometricamente, podemos ver esse teorema por meio dos vetores gradientes:

$$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla h(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad (9.5.14)$$

considerados como vetores-deslocamento ou flechas no ponto  $x$ , são perpendiculares aos conjuntos de nível de  $f$  e de  $h$ , respectivamente. Como os conjuntos de nível de  $f$  e de  $h$  têm a mesma inclinação em  $x^*$ , os vetores gradiente  $\nabla f(x^*)$  e  $\nabla h(x^*)$  devem estar alinhados em  $x^*$ , ou seja, têm a mesma direção. Os gradientes são múltiplos escalares um do outro. Se escrevermos esse multiplicador como  $\mu^*$ , obteremos  $\nabla f(x^*) = \mu^* \nabla h(x^*)$ , ou seja,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \mu^* \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \quad (9.5.15)$$

FIGURA 9.5.2 –  $\nabla f(x^*)$  E  $\nabla h(x^*)$  ESTÃO ALINHADOS NO MÁXIMO OU NO MÍNIMO CONDICIONADO  $x^*$



**Exemplo 9.5.1.** Seja o seguinte problema de maximização

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & h(x_1, x_2) \equiv x_1 + 4x_2 = 16. \end{aligned} \quad (9.5.16)$$

Como o gradiente de  $h$  é  $\nabla h = (1, 4)$ ,  $h$  não tem pontos críticos e a qualificação de restrição está satisfeita. Montando o lagrangeano

$$L(x_1, x_2, \mu) = x_1 x_2 - \mu(x_1 + 4x_2 - 16), \quad (9.5.17)$$

e igualando as derivadas parciais a zero

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \iff x_2 - \mu = 0, \quad (9.5.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \iff x_1 - 4\mu = 0, \quad (9.5.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \iff -(x_1 + 4x_2 - 16) = 0. \quad (9.5.20)$$

Das duas primeiras equações acima decorre que

$$\mu = x_2 = \frac{1}{4}x_1, \quad (9.5.21)$$

e, portanto,

$$x_1 = 4x_2. \quad (9.5.22)$$

Substituindo (9.5.22) na terceira equação de (9.5.18), obtemos  $x_2 = 2$ . Disso concluímos que  $x_1 = 8$  e  $\mu = 2$ .

Em seguida consideramos o problema de maximizar uma função  $f(x_1, \dots, x_n)$  de  $n$  variáveis condicionada por  $m$  restrições de igualdade. Em outras palavras,

$$\begin{aligned} & \text{maximizar ou minimizar} && f(x_1, \dots, x_n) \\ & \text{sujeito a} && C_h = \{x = (x_1, \dots, x_n) | h_1(x) = a_1, \dots, h_m(x) = a_m\}. \end{aligned}$$

Precisamos generalizar para  $m$  funções a qualificação de restrição que utilizamos para uma função de duas variáveis:

$$\left( \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*), \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*) \right) \neq (0, 0), \quad (9.5.23)$$

como

$$\left( \frac{\partial h}{\partial x_1}(x^*), \frac{\partial h}{\partial x_2}(x^*), \dots, \frac{\partial h}{\partial x_n}(x^*) \right) \neq (0, \dots, 0). \quad (9.5.24)$$

Se estivermos tratando com  $m$  funções de restrição,  $m > 1$ , a generalização natural de (9.5.23) e (9.5.24) envolve a derivada jacobiana

$$Dh(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix}, \quad (9.5.25)$$

das funções de restrição. Em geral, um ponto  $x^*$  é denominado ponto crítico de  $h$  se o posto da matriz  $Dh(x^*)$  é menor que  $m$ . Portanto, a generalização natural da qualificação de restrição é que o posto  $Dh(x^*)$  seja  $m$ . Dizemos que  $(h_1, \dots, h_m)$  satisfaz a qualificação de restrição não-degenerada em  $x^*$  se o posto da matriz  $Dh(x^*)$  é  $m$ . A QRND é uma condição de regularidade e implica que o conjunto-restrição tem um plano tangente  $(n - m)$ -dimensional bem-definido em todos os pontos.

**Teorema 9.5.2.** *Sejam  $f, h_1, \dots, h_m$  funções  $\mathcal{C}^1$  de  $n$  variáveis. Considere o problema de maximizar (minimizar)  $f(x)$  no conjunto-restrição*

$$C_h \equiv \{x = (x_1, \dots, x_n) : h_1(x) = a_1, \dots, h_m(x) = a_m\}. \quad (9.5.26)$$

*Suponha que  $x^* \in C_h$  e que  $x^*$  é uma máxima ou mínima (local) de  $f$  em  $C_h$ . Suponha também que  $x^*$  satisfaz a QRND. Então existem  $\mu_1^*, \dots, \mu_m^*$  tais que  $(x_1^*, \dots, x_n^*, \mu_1^*, \dots, \mu_m^*) \equiv (x^*, \mu^*)$  é um ponto crítico do lagrangeano*

$$L(x, \mu) \equiv f(x) - \mu_1 [h_1(x) - a_1] - \mu_2 [h_2(x) - a_2] - \dots - \mu_m [h_m(x) - a_m]. \quad (9.5.27)$$

*Em outras palavras,*

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*, \mu^*) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*, \mu^*) = 0, \quad (9.5.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1}(x^*, \mu^*) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial \mu_m}(x^*, \mu^*) = 0. \quad (9.5.29)$$

**Exemplo 9.5.2.** *Seja o seguinte problema de otimização:*

$$\begin{aligned} & \max_{x,y,z} && f(x, y, z) = yz + xz \\ & \text{sujeto a} && y^2 + z^2 = 1 \\ & && xz = 3 \end{aligned} \quad (9.5.30)$$

*Monte o lagrangeano,*

$$L = yz + xz - \mu_1(y^2 + z^2 - 1) - \mu_2(xz - 3). \quad (9.5.31)$$

*As CPO's são:*

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \iff z - \mu_2 z = 0, \quad (9.5.32)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \iff z - 2y\mu_1 = 0, \quad (9.5.33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \iff y + x - 2z\mu_1 - x\mu_2 = 0, \quad (9.5.34)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = 0 \iff 1 - y^2 - z^2 = 0, \quad (9.5.35)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} = 0 \iff 3 - xz = 0. \quad (9.5.36)$$

De (9.5.32),  $\mu_2 = 1$ . Isolando  $\mu_1$  em (9.5.33) e (9.5.34), temos que

$$\mu_1 = \frac{z}{2y}, \quad (9.5.37)$$

$$\mu_1 = \frac{y}{2z}. \quad (9.5.38)$$

Igualando (9.5.37) e (9.5.38):

$$\frac{z}{2y} = \frac{y}{2z} \implies y = z. \quad (9.5.39)$$

Substituindo (9.5.39) em (9.5.35), encontramos que

$$\begin{aligned} 1 - y^2 - z^2 &= 0 \\ 1 - y^2 - y^2 &= 0 \\ 1 &= 2y^2 \\ y &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \quad (9.5.40)$$

Assim, temos que os seguintes pontos:  $(x^*, y^*, z^*, \mu_1^*, \mu_2^*) = \left(-3\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$  e  $(x^*, y^*, z^*, \mu_1^*, \mu_2^*) = \left(3\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$ .

## 9.5.2 Otimização com Restrição de Igualdade e de Desigualdade

Contudo, a maioria dos problemas econômicos têm suas restrições definidas por desigualdades:

$$g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1, \dots, g_k(x_1, \dots, x_n) \leq b_k. \quad (9.5.41)$$

Comecemos novamente observando o caso mais simples, o de duas variáveis e uma restrição de desigualdade:

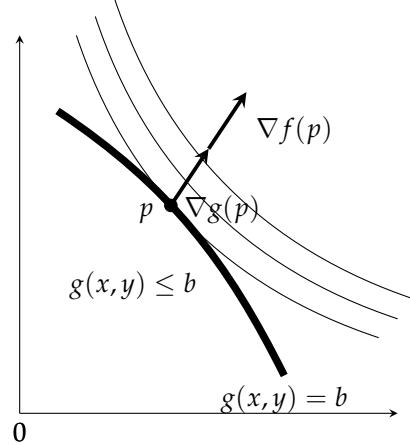
$$\begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(x, y) \\ \text{sujeito a} & g(x, y) \leq b. \end{array}$$

Na Figura a seguir, a curva mais grossa é a área  $g(x, y) = b$ ; a região à esquerda e abaixo dessa curva é conjunto-restrição  $g(x, y) \leq b$ . As linhas mais finas são as curvas de nível da função objetivo  $f$ . O ponto de tangência entre as curvas é o ponto  $p$ . Como  $p$  está na fronteira do conjunto-restrição, onde  $g(x, y) = b$ , dizemos que a restrição é ativa (ou vinculadora, eficaz, justa) em  $p$ . Isso significa que  $\nabla f(p)$  e  $\nabla g(p)$  estão alinhados e, portanto, que  $\nabla f(p)$  é um múltiplo de  $\nabla g(p)$ . Se  $\lambda$  denotar esse múltiplo, então  $\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p)$ , ou

$$\nabla f(p) - \lambda \nabla g(p) = 0. \quad (9.5.42)$$

Já vimos que  $\nabla g(p)$  aponta para o conjunto  $g(x, y) \geq b$  e não para o conjunto  $g(x, y) \leq b$ . Como  $p$  maximiza  $f$  no conjunto  $g(x, y) \leq b$ , o gradiente de  $f$  não pode apontar para o conjunto-restrição. Se apontasse, poderíamos aumentar  $f$  e ainda manter  $g(x, y) \leq b$ . Assim,  $\nabla f(p)$  deve apontar para a região em que  $g(x, y) \geq b$ . Isto significa que  $\nabla f(p)$  e  $\nabla g(p)$  apontam no mesmo sentido. Assim,  $\lambda \geq 0$ .

FIGURA 9.5.3 –  $\nabla f$  E  $\nabla g$  APONTAM NA MESMA DIREÇÃO E SENTIDO NO MÁXIMO  $p$



Consequentemente, a função lagrangeana será dada por

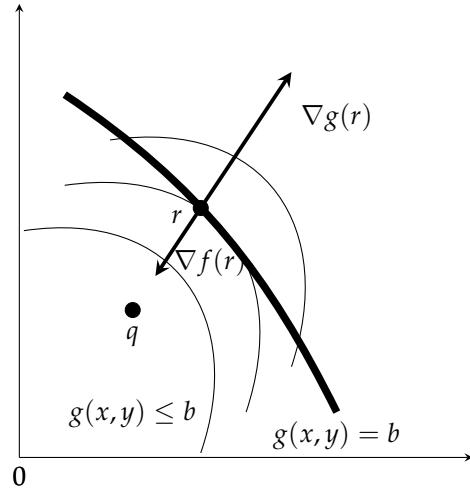
$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - b]. \quad (9.5.43)$$

Suponha que o máximo de  $f$  sob a restrição  $g(x, y) \leq b$  ocorra em um ponto em que  $g(x, y) < b$  e não em  $g(x, y) = b$ . O máximo de  $f$  ocorre em um ponto  $q$  no interior do conjunto-restrição. Há um ponto  $r$  em que o conjunto-restrição e a função objetivo são tangentes, mas  $\nabla f$  e

$\nabla g$  apontam em direções opostas em  $r$ . Dado que  $g(x, y)$  é menor do que  $b$  em  $q$ , dizemos que a restrição não é ativa em  $q$ .

Disso decorre que a restrição é ativa,  $g(x, y) - b = 0$ , caso em que o multiplicador  $\lambda$  é  $\geq 0$ , ou a restrição é inativa e  $\lambda = 0$ . Esta condição é conhecida como condição de folga complementar.

FIGURA 9.5.4 – SITUAÇÃO EM QUE A RESTRIÇÃO É INATIVA



Uma forma de sumarizar este resultado é afirmar que ou  $\lambda = 0$  ou  $g(x, y) - b = 0$ , isto é,

$$\lambda \cdot [g(x, y) - b] = 0. \quad (9.5.44)$$

Como não sabemos a priori se a restrição será ativa, não podemos usar a condição  $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ , uma vez que isso implicaria que  $g(x, y) - b = 0$ .

**Teorema 9.5.3.** Suponha que  $f$  e  $g$  são funções  $C^1$  no  $\mathbb{R}^2$  e que  $(x^*, y^*)$  maximiza  $f$  no conjunto-restrição  $g(x, y) \leq b$ . Se  $g(x^*, y^*) = b$ , suponha que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) \neq 0 \quad e \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \neq 0. \quad (9.5.45)$$

Nesse caso, seja o lagrangeano

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda[g(x, y) - b]. \quad (9.5.46)$$

Então, há um multiplicador  $\lambda^*$  tal que:

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x^*, y^*, \lambda^*) = 0, \quad (9.5.47)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x^*, y^*, \lambda^*) = 0, \quad (9.5.48)$$

$$\lambda^*[g(x^*, y^*) - b] = 0, \quad (9.5.49)$$

$$\lambda^* \geq 0, \quad (9.5.50)$$

$$g(x^*, y^*) \leq b. \quad (9.5.51)$$

Observe que há diferenças entre otimização sob restrição de igualdade e otimização sob restrição de desigualdade:

1. Ambas usam a função lagrangeana e ambas requerem que as derivadas de  $L$  com relação aos  $x_i$ 's sejam zero.
2. A condição  $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = h(x, y) - c = 0$  para igualdades pode não ser verdadeira para restrições de desigualdade, uma vez que a restrição não precisa ser ativa no problema de maximização sob restrição de desigualdade. Nesse caso, é substituída por duas condições:

$$\lambda[g(x, y) - b] = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) - b \leq 0. \quad (9.5.52)$$

3. A qualificação de restrição deve ser checada em ambas as restrições. Entretanto, só precisamos checar a qualificação de restrição para uma restrição de desigualdade se a restrição é ativa no candidato a solução.
4. Não há restrição para o sinal do multiplicador no caso de uma restrição de igualdade. Porém, deve ser não-negativo em um contexto de restrição de desigualdade.
5. As CPO's em igualdade são as mesmas para maximização e para minimização. Sob desigualdade, não.

**Exemplo 9.5.3.** Considere o problema de maximizar  $f(x, y) = 2y^2 - x$  sob o conjunto-restrição  $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 1$ . O único ponto de  $g$  ocorre na origem. Então, a qualificação de restrição será satisfeita. Seja o lagrangeano:

$$L(x, y, \lambda) = 2y^2 - x - \lambda(x^2 + y^2 - 1). \quad (9.5.53)$$

As CPO's são:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \iff -1 - 2x\lambda = 0, \quad (9.5.54)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \iff 4y - 2y\lambda = 0, \quad (9.5.55)$$

$$\lambda[x^2 + y^2 - 1] = 0, \quad (9.5.56)$$

$$\lambda \geq 0, \quad (9.5.57)$$

$$x^2 + y^2 \leq 1. \quad (9.5.58)$$

Casos:

1. Se  $\lambda = 0$ , então (9.5.54) não é satisfeita.

2. Se  $\lambda \neq 0$ , então ou  $y = 0$  ou  $\lambda = 2$ . Logo,  $x = -\frac{1}{4}$  e  $y = \pm \frac{\sqrt{15}}{4}$ .

Os possíveis candidatos a máximo são:  $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ ,  $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ .

$$f\left(-\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{34}{16}, \quad (9.5.59)$$

$$f\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right) = \frac{34}{16} \quad (9.5.60)$$

Agora, vamos generalizar e supor que existem várias restrições de desigualdade.

**Teorema 9.5.4.** Suponha que  $f$  e  $g_1, \dots, g_k$  são funções  $C^1$  de  $n$  variáveis. Suponha que  $x^* \in \mathbb{R}^n$  maximiza  $f$  no conjunto-restrição definido pelas  $k$  desigualdades:

$$g_1(x_1, \dots, x_n) \leq b_1, \dots, g_k(x_1, \dots, x_n) \leq b_k. \quad (9.5.61)$$

Vamos assumir que as  $k_0$  primeiras restrições são ativas em  $x^*$  e as demais não o são. Suponha que a seguinte qualificação de restrição não-degenerada é satisfeita em  $x^*$ . O rank da matriz jacobiana das restrições ativas

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{k_0}}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial g_{k_0}}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix} \quad (9.5.62)$$

avaliada em  $x^*$  é  $k_0$ .

Nesse caso, seja o lagrangeano

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) \equiv f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1[g_1(x) - b_1] - \dots - \lambda_k[g_k(x) - b_k]. \quad (9.5.63)$$

Então, há multiplicadores  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*$  tal que:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*, \lambda^*) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad (9.5.64)$$

$$\lambda_1^*[g_1(x^*) - b_1] = 0, \dots, \lambda_k^*[g_k(x^*) - b_k] = 0, \quad (9.5.65)$$

$$\lambda_1^* \geq 0, \dots, \lambda_k^* \geq 0, \quad (9.5.66)$$

$$g_1(x^*) \leq b_1, \dots, g_k(x^*) \leq b_k. \quad (9.5.67)$$

**Exemplo 9.5.4.** Maximize a função  $f(x, y) = 2y^2 - x$  sujeito a  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

Montando o lagrangeano

$$L = 2y^2 - x - \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) + \lambda_2(x) + \lambda_3(y). \quad (9.5.68)$$

Montando a matriz jacobiana, temos que:

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (9.5.69)$$

Como as colunas são linearmente independentes, o rank da matriz é 2 e duas das três restrições são ativas. A QRND está satisfeita.

As CPO's são:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \iff -1 - 2x\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad (9.5.70)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \iff 4y - 2y\lambda_1 + \lambda_3 = 0, \quad (9.5.71)$$

$$\lambda_1[x^2 + y^2 - 1] = 0, \quad (9.5.72)$$

$$\lambda_2 x = 0, \quad (9.5.73)$$

$$\lambda_3 y = 0, \quad (9.5.74)$$

$$\lambda_1 \geq 0, \quad (9.5.75)$$

$$\lambda_2 \geq 0, \quad (9.5.76)$$

$$\lambda_3 \geq 0, \quad (9.5.77)$$

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad (9.5.78)$$

$$x \geq 0, \quad (9.5.79)$$

$$y \geq 0. \quad (9.5.80)$$

Casos:

1. Se  $x = 0$  e  $y = 0$ , então  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 0$ .

2. Se  $x = 0$  e  $y > 0$ , então  $\lambda_2 = 1$  e  $y = 1$  (por (9.5.78)). Assim,  $\lambda_3 = 0$  (por (9.5.74)) e  $\lambda_1 = 2$  (por (9.5.71)).
3. Se  $x > 0$  e  $y = 0$ , então  $\lambda_3 = 0$  e  $\lambda_2 = 0$  (por (9.5.73)). De (9.5.70) observamos que  $2x\lambda_1 = -1$ . Pelas condições de não-negatividade, não há valores de  $x$  e de  $\lambda_1$  que satisfaçam a condição acima.
4. Se  $x > 0$  e  $y > 0$ , então  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 = 0$ . De (9.5.71) decorre que  $\lambda_1 = 2$ . Porém,  $x = -\frac{1}{4}$  (não satisfazendo a condição de não-negatividade) e  $y = 0$  (contra o enunciado).

Os possíveis candidatos a máximo são:  $(0, 1)$ .

$$f(0, 1) = 2. \quad (9.5.81)$$

A solução é  $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0, 1, 2, 1, 0)$ .

Para o problema de minimização, teríamos o seguinte teorema:

**Teorema 9.5.5.** Suponha que  $f, g_1, \dots, g_k$  e  $h_1, \dots, h_m$  são funções  $C^1$  de  $n$  variáveis. Suponha que  $x^* \in \mathbb{R}^n$  minimiza  $f$  no conjunto-restrição definido pelas  $k$  desigualdades e  $m$  igualdades:

$$g_1(x_1, \dots, x_n) \geq b_1, \dots, g_k(x_1, \dots, x_n) \geq b_k, \quad (9.5.82)$$

$$h_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \dots, h_m(x_1, \dots, x_n) = c_m. \quad (9.5.83)$$

Vamos assumir que as  $k_0$  primeiras restrições são ativas em  $x^*$  e as demais não o são. Suponha que a seguinte qualificação de restrição não-degenerada é satisfeita em  $x^*$ . O rank da matriz jacobiana das restrições de desigualdade ativas e das restrições de igualdade

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{k_0}}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial g_{k_0}}{\partial x_n}(x^*) \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x^*) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(x^*) \end{pmatrix} \quad (9.5.84)$$

avaliado em  $x^*$  é  $k_0 + m$ .

Nesse caso, seja o lagrangeano

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu_1, \dots, \mu_m) \equiv f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1[g_1(x) - b_1] - \dots - \lambda_k[g_k(x) - b_k] +$$

$$-\mu_1[h_1(x) - c_1] - \dots - \mu_m[h_m(x) - c_m]. \quad (9.5.85)$$

Então, há multiplicadores  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*, \mu_1^*, \dots, \mu_m^*$  tal que:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n}(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0, \quad (9.5.86)$$

$$\lambda_1^*[g_1(x^*) - b_1] = 0, \dots, \lambda_k^*[g_k(x^*) - b_k] = 0, \quad (9.5.87)$$

$$h_1(x^*) = c_1, \dots, h_m(x^*) = c_m, \quad (9.5.88)$$

$$\lambda_1^* \geq 0, \dots, \lambda_k^* \geq 0, \quad (9.5.89)$$

$$g_1(x^*) \geq b_1, \dots, g_k(x^*) \geq b_k. \quad (9.5.90)$$

**Exemplo 9.5.5.** Minimize a função  $f(x, y) = 2y - x^2$  sujeito a  $x^2 + y^2 \leq 1$ ,  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ .

Montando o lagrangeano

$$L = 2y - x^2 - \lambda_1(-x^2 - y^2 + 1) - \lambda_2(x) - \lambda_3(y). \quad (9.5.91)$$

As CPO's são:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \iff -2x + 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0, \quad (9.5.92)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \iff 2 + 2y\lambda_1 - \lambda_3 = 0, \quad (9.5.93)$$

$$\lambda_1[x^2 + y^2 - 1] = 0, \quad (9.5.94)$$

$$\lambda_2x = 0, \quad (9.5.95)$$

$$\lambda_3y = 0, \quad (9.5.96)$$

$$\lambda_1 \geq 0, \quad (9.5.97)$$

$$\lambda_2 \geq 0, \quad (9.5.98)$$

$$\lambda_3 \geq 0, \quad (9.5.99)$$

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad (9.5.100)$$

$$x \geq 0, \quad (9.5.101)$$

$$y \geq 0. \quad (9.5.102)$$

Casos:

1. Se  $x = 0$  e  $y = 0$ , então  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 = 2$ .

2. Se  $x = 0$  e  $y > 0$ , então  $\lambda_2 = 0$  e  $\lambda_3 = 0$ . Porém, nenhum valor satisfaz (9.5.93).

3. Se  $x > 0$  e  $y = 0$ , então  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 2$  e  $x = 1$ . Porém,  $x = \frac{\lambda_2}{2\lambda_1 - 2}$ , o que gera uma indeterminação.

4. Se  $x > 0$  e  $y > 0$ , então  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 0$ ,  $\lambda_3 = 0$  e  $y = -1$ .

Os possíveis candidatos a mínimo são  $(0, 0)$ , o que implica que

$$f(0, 0) = 0. \quad (9.5.103)$$

A solução é  $(x^*, y^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_3^*) = (0, 0, 0, 0, 2)$ .

### 9.5.3 Condições de Segunda Ordem

Agora que sabemos como determinar os pontos críticos em um problema de otimização com restrições, precisamos determinar sob quais circunstâncias esses pontos serão de máximo e de mínimo local da função  $f$ . Vamos ver dois teoremas que dão condições suficientes de segunda ordem para garantir que um ponto seja a solução de um problema de otimização com restrição.

**Teorema 9.5.6.** Sejam  $f, g_1, \dots, g_m$  e  $h_1, \dots, h_k$  funções  $C^2$  no  $\mathbb{R}^n$ . Considere o problema de maximizar  $f$  sob o conjunto-restrição

$$C_{g,h} \equiv \{x : g_1(x) \leq b_1, \dots, g_m(x) \leq b_m, h_1(x) = c_1, \dots, h_k(x) = c_k\}. \quad (9.5.104)$$

Monte o lagrangeano

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_k) = f(x) - \lambda_1(g_1(x) - b_1) - \dots - \lambda_m(g_m(x) - b_m) + \\ - \mu_1(h_1(x) - c_1) - \dots - \mu_k(h_k(x) - c_k). \end{aligned} \quad (9.5.105)$$

Suponha que existam multiplicadores  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \dots, \mu_k^*$ , isto é,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \quad \text{em} \quad (x^*, \lambda^*, \mu^*), \quad (9.5.106)$$

$$\lambda_1^* \geq 0, \dots, \lambda_m^* \geq 0, \quad (9.5.107)$$

$$\lambda_1^*(g_1(x^*) - b_1) = 0, \dots, \lambda_m^*(g_m(x^*) - b_m) = 0, \quad (9.5.108)$$

$$h_1(x^*) = c_1, \dots, h_k(x^*) = c_k. \quad (9.5.109)$$

Suponha que  $g_1, \dots, g_e$  são ativas em  $x^*$  e que  $g_{e+1}, \dots, g_m$  são inativas. Escreva  $(g_1, \dots, g_e) = g_E$ . Suponha que o hessiano de  $L$  com respeito a  $x$  em  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  é negativo definido sob o conjunto-restrição

$$\{v : Dg_E(x^*)v = 0 \quad \text{e} \quad Dh(x^*)v = 0\}, \quad (9.5.110)$$

isto é,

$$v \neq 0, Dg_E(x^*)v = 0, Dh(x^*)v = 0 \implies v^\top (D_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*)v < 0). \quad (9.5.111)$$

Então,  $x^*$  é um máximo restrito local restrito de  $f$  sob o conjunto-restrição  $C_{g,h}$ . O Hessiano orlado nesse caso é dado por

$$H = \left( \begin{array}{cccc|cc|cc} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \frac{\partial g_e}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_e}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n} \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_e}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & | & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g_e}{\partial x_n} & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n} & | & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{array} \right). \quad (9.5.112)$$

Se os últimos  $n - (e + k)$  menores principais líderes alternam de sinal, sendo o sinal do determinante da maior matriz igual a  $(-1)^n$ , então o hessiano é negativo definido.

**Teorema 9.5.7.** Sejam  $f, g_1, \dots, g_m$  e  $h_1, \dots, h_k$  funções  $\mathcal{C}^2$  no  $\mathbb{R}^n$ . Considere o problema de minimizar  $f$  sob o conjunto-restrição

$$C_{g,h} \equiv \{x : g_1(x) \geq b_1, \dots, g_m(x) \geq b_m, h_1(x) = c_1, \dots, h_k(x) = c_k\}. \quad (9.5.113)$$

Monte o lagrangeano

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_k) = f(x) - \lambda_1(g_1(x) - b_1) - \dots - \lambda_m(g_m(x) - b_m) + \\ - \mu_1(h_1(x) - c_1) - \dots - \mu_k(h_k(x) - c_k). \end{aligned} \quad (9.5.114)$$

Suponha que existam multiplicadores  $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \dots, \mu_k^*$ , isto é,

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0 \quad \text{em } (x^*, \lambda^*, \mu^*), \quad (9.5.115)$$

$$\lambda_1^* \geq 0, \dots, \lambda_m^* \geq 0, \quad (9.5.116)$$

$$\lambda_1^*(g_1(x^*) - b_1) = 0, \dots, \lambda_m^*(g_m(x^*) - b_m) = 0, \quad (9.5.117)$$

$$h_1(x^*) = c_1, \dots, h_k(x^*) = c_k. \quad (9.5.118)$$

Suponha que  $g_1, \dots, g_e$  são ativas em  $x^*$  e que  $g_{e+1}, \dots, g_m$  são inativas. Escreva  $(g_1, \dots, g_e) = g_E$ . Suponha que o hessiano de  $L$  com respeito a  $x$  em  $(x^*, \lambda^*, \mu^*)$  é positivo definido sob o conjunto-restricção

$$\{v : Dg_E(x^*)v = 0 \text{ e } Dh(x^*)v = 0\}, \quad (9.5.119)$$

isto é,

$$v \neq 0, Dg_E(x^*)v = 0, Dh(x^*)v = 0 \implies v^\top (D_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*)v) > 0. \quad (9.5.120)$$

Então,  $x^*$  é um mínimo estriado local restrito de  $f$  sob o conjunto-restricção  $C_{g,h}$ .

O Hessiano orlado nesse caso é dado por

$$H = \left( \begin{array}{cccc|cc|cc} 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \frac{\partial g_e}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_e}{\partial x_n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & | & \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n} \end{array} \right) \quad (9.5.121)$$
  

$$\left( \begin{array}{ccccc|cc|cc} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_e}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_1} & | & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & | & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g_e}{\partial x_n} & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial h_k}{\partial x_n} & | & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 x_n} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{array} \right)$$

Se os últimos  $n - (e + k)$  menores principais líderes têm todos o mesmo sinal de  $(-1)^{e+k}$ , então o hessiano é positivo definido.

**Exemplo 9.5.6.** Maximize a função  $f(x, y) = x^2y$  no conjunto-restricção  $h(x, y) = 2x^2 + y^2 = 3$  e prove que a solução se trata de um máximo.

Montando o lagrangeano, temos:

$$L = x^2y - \mu(2x^2 + y^2 - 3). \quad (9.5.122)$$

As CPO's são:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \iff 2xy - 4x\mu = 0, \quad (9.5.123)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \iff x^2 - 2y\mu = 0, \quad (9.5.124)$$

$$2x^2 + y^2 - 3 = 0. \quad (9.5.125)$$

Igualando as duas primeiras condições de primeira ordem para  $\mu$ , obtemos  $x = y$ . Portanto,  $x = \pm 1$  e  $y = \pm 1$ .

Assim, temos os seguintes candidatos a máximo:

$$(1, 1), \\ (-1, -1)$$

Agora vamos utilizar as condições de segunda ordem. Montando o hessiano, temos:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 4x & 2y \\ 4x & 2y & 2x \\ 2y & 2x & 0 \end{pmatrix} = 8y(4x^2 - y^2). \quad (9.5.126)$$

Como  $n = 2$  e  $k = 1$  basta conferir o sinal de  $n - k = 1$  determinante, o determinante de  $H$ . Se  $\det H$  tiver o mesmo sinal de  $(-1)^n = 1$ , o ponto é de máximo local; se  $\det H$  tiver o mesmo sinal de  $(-1)^k = -1$ , o ponto é de mínimo local.

- Se  $(x^*, y^*) = (1, 1)$ , então  $H = 24$ . Logo, temos um máximo local.
- Se  $(x^*, y^*) = (-1, -1)$ , então  $H = -24$ . Logo, temos um mínimo local.

#### 9.5.4 O Lagrangeano

Lembre-se do problema de otimização por meio da função Lagrangeana:

$$Z = L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda[m - g(x_1, x_2)].$$

Encontre os pontos críticos da função Lagrangeana  $L(x_1, x_2, \lambda)$  calculando  $\frac{\partial L}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial x_2}$  e  $\frac{\partial L}{\partial \lambda}$  e definindo cada expressão igual a 0 para resolver para o ótimo  $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad (9.5.127)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0, \quad (9.5.128)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0. \quad (9.5.129)$$

Note que como  $\lambda$  apenas multiplica a restrição na definição de  $L$ , a equação  $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$  é equivalente à restrição  $m - g(x_1, x_2) = 0$ .

Note que introduzindo o multiplicador de Lagrange  $\lambda$  no problema restrito, transformamos um problema restrito de duas variáveis no problema irrestrito de três variáveis de encontrar os pontos críticos de uma função  $L(x_1, x_2, \lambda)$ .

O multiplicador de Lagrange  $\lambda$  mede a sensibilidade de  $Z^*$  (que é o valor de  $Z$  no ótimo) a alguma mudança na restrição. Em outras palavras, nos dá uma nova medida de valor dos recursos escassos (o efeito de um aumento em  $m$  indicaria como a solução ótima é afetada por um relaxamento da restrição). Se pudermos expressar os valores ótimos de  $(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$  como funções implícitas de  $m$ , teríamos:

$$x_1^* = x_1^*(m), \quad (9.5.130)$$

$$x_2^* = x_2^*(m), \quad (9.5.131)$$

$$\lambda^* = \lambda^*(m). \quad (9.5.132)$$

Vamos assumir que todas essas expressões têm derivadas contínuas, isto é, são funções de classe  $C^1$ . Disso, temos as seguintes identidades:

$$f_{x_1}(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* g_{x_1}(x_1^*, x_2^*) = 0, \quad (9.5.133)$$

$$f_{x_2}(x_1^*, x_2^*) - \lambda^* g_{x_2}(x_1^*, x_2^*) = 0, \quad (9.5.134)$$

$$m - (x_1^*, x_2^*) = 0. \quad (9.5.135)$$

Com isso, podemos escrever a função Lagrangeana na solução ótima como:

$$Z^* = L(x_1^*, x_2^*, \lambda) = f(x_1^*, x_2^*) + \lambda^* [m - g(x_1^*, x_2^*)]. \quad (9.5.136)$$

Dissemos que o valor de  $\lambda$  media a sensibilidade da função Lagrangeana a uma mudança em  $m$  quando dos valores ótimos. Vamos ver isso.

$$\frac{dZ^*}{dm} = f_{x_1} \frac{dx_1^*}{dm} + f_{x_2} \frac{dx_2^*}{dm} + \frac{d\lambda^*}{dm} [m - g(x_1^*, x_2^*)] + \lambda^* \left[ 1 - \left( g_{x_1} \frac{dx_1^*}{dm} + g_{x_2} \frac{dx_2^*}{dm} \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= f_{x_1} \frac{dx_1^*}{dm} + f_{x_2} \frac{dx_2^*}{dm} + \lambda^* \left[ 1 - \left( g_{x_1} \frac{dx_1^*}{dm} + g_{x_2} \frac{dx_2^*}{dm} \right) \right], \quad (m - (x_1^*, x_2^*) = 0) \\
&= (f_{x_1} - \lambda^* g_{x_1}) \frac{dx_1^*}{dm} + (f_{x_2} - \lambda^* g_{x_2}) \frac{dx_2^*}{dm} + \lambda^* \\
&= \lambda^*, \tag{9.5.137}
\end{aligned}$$

em que  $f_{x_1}$  e  $f_{x_2}$  medem a contribuição marginal (ou benefício) de cada  $x$  a função a ser maximizada, ou a mudança aproximada em  $f$  decorrente de uma mudança unitária em  $x$ . De forma semelhante,  $g_{x_1}$  e  $g_{x_2}$  dão o “custo marginal” de se utilizar cada  $x$ , ou a mudança aproximada em  $g$  decorrente de uma mudança unitária em  $x$ . Lembre-se que você pode escrever

$$\lambda^* = \frac{f_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}{g_{x_1}(x_1^*, x_2^*)}, \tag{9.5.138}$$

$$\lambda^* = \frac{f_{x_2}(x_1^*, x_2^*)}{g_{x_2}(x_1^*, x_2^*)}, \tag{9.5.139}$$

ou seja,  $\lambda^*$  nos dá uma razão benefício-custo de se utilizar  $x_i$ :

$$\lambda^* = \frac{\text{benefício marginal de } x_i}{\text{custo marginal de } x_i}. \tag{9.5.140}$$

Como normalmente  $m$  significa restrições impostas (orçamento, custo, limitação de produção), o valor do multiplicador indica o chamado custo de oportunidade (dessa restrição). Se pudéssemos reduzir a restrição (ou seja, aumentar  $m$ ), então o custo extra é  $-\lambda$ . Claramente para o tomador de decisão econômica, tal informação sobre os custos de oportunidade é de considerável importância.

Note que esta expressão só é válida quando  $x_1 = x_1^*$  e  $x_2 = x_2^*$ . Se  $x_1$  e  $x_2$  não estivessem em seus valores ótimos, então a derivada total de  $L$  em relação a  $m$  também incluiria termos parciais cruzados adicionais. Essas derivadas parciais cruzadas são zero em  $x_1 = x_1^*$  e  $x_2 = x_2^*$ . A variável  $\lambda$  também é conhecida como preço-sombra. Observe que esse preço-sombra não é definido exclusivamente, pois corresponde à utilidade marginal da renda em “utils”, que é um valor ordinal.

Note que, embora  $Z^*$  seja de fato um tipo padrão de extremo com referência às variáveis de escolha, não é assim com referência ao multiplicador de Lagrange. A equação mostra que, diferentemente de  $(x_1^*, x_2^*)$ , se  $\lambda^*$  é substituído por qualquer outro valor de  $\lambda$ , nenhum efeito será produzido em  $Z^*$ , já que  $m - g(x_1^*, x_2^*) = 0$ . Assim, o papel desempenhado por  $\lambda^*$  na solução ótima difere do papel desempenhado por  $x_1^*$  e  $x_2^*$ . Embora seja seguro tratar  $\lambda$  como outra variável de escolha na discussão das condições de primeira ordem, devemos tratar  $\lambda^*$  de maneira diferente na discussão das condições de segunda ordem. As condições de segunda ordem podem ser novamente declarados em termos do diferencial total  $d^2Z$ .

A restrição  $g(x_1, x_2) = m$  implica que  $dg = g_{x_1} dx_1 + g_{x_2} dx_2 = 0$ .  $dx_1$  e  $dx_2$  não são mais arbitrários: podemos tomar  $dx_1$  como uma mudança arbitrária, mas então  $dx_2$  depende de  $dx_1$ , isto é,  $dx_2 = -\left(\frac{g_{x_1}}{g_{x_2}}\right) dx_1$ . Observe que, como  $g_{x_1}$  e  $g_{x_2}$  dependem de  $x_1$  e  $x_2$ ,  $dx_2$  também depende de

$x_1$  e  $x_2$ . Assim,

$$\begin{aligned}
d^2Z = d(dZ) &= \frac{\partial(dZ)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial(dZ)}{\partial x_2} dx_2 \\
&= \left( \frac{\partial(f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2)}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left( \frac{\partial(f_{x_1}dx_1 + f_{x_2}dx_2)}{\partial x_2} \right) dx_2 \\
&= \left[ f_{x_1x_1}dx_1 + \left( f_{x_1x_2}dx_2 + f_{x_2}\frac{\partial dx_2}{\partial x_1} \right) \right] dx_1 + \left[ f_{x_1x_2}dx_1 + \left( f_{x_2x_2}dx_2 + f_{x_2}\frac{\partial dx_2}{\partial x_2} \right) \right] dx_2 \\
&= f_{x_1x_1}dx_1^2 + 2f_{x_1x_2}dx_1dx_2 + f_{x_2x_2}dx_2^2 + \left( f_{x_2}\frac{\partial dx_2}{\partial x_1}dx_1 + f_{x_2}\frac{\partial dx_2}{\partial x_2}dx_2 \right) \\
&= f_{x_1x_1}dx_1^2 + 2f_{x_1x_2}dx_1dx_2 + f_{x_2x_2}dx_2^2 + f_{x_2}d^2x_2.
\end{aligned} \tag{9.5.141}$$

O último termo desqualifica  $d^2Z$  como uma forma quadrática. Mas  $d^2Z$  pode ser transformado em uma forma quadrática em virtude da restrição  $g(x_1, x_2) = m$ :

$$dg = 0 \implies d(dg) = g_{x_1x_1}dx_1^2 + 2g_{x_1x_2}dx_1dx_2 + g_{x_2x_2}dx_2^2 + g_{x_2}d^2x_2 = 0. \tag{9.5.142}$$

Resolvendo a última equação para  $d^2x_2$  e substituindo o resultado na expressão de  $d^2Z$ , obtemos:

$$\begin{aligned}
d^2Z &= \left( f_{x_1x_1} - \frac{f_{x_2}}{g_{x_2}}g_{x_1x_1} \right) dx_1^2 + 2 \left( f_{x_1x_2} - \frac{f_{x_2}}{g_{x_2}}g_{x_1x_2} \right) dx_1dx_2 + \left( f_{x_2x_2} - \frac{f_{x_2}}{g_{x_2}}g_{x_2x_2} \right) dx_2^2 \\
&= (f_{x_1x_1} - \lambda g_{x_1x_1}) dx_1^2 + 2(f_{x_1x_2} - \lambda g_{x_1x_2}) dx_1dx_2 + (f_{x_2x_2} - \lambda g_{x_2x_2}) dx_2^2.
\end{aligned} \tag{9.5.143}$$

Para um problema extremo restrito, as condições necessárias e suficientes ainda são determinadas pela diferencial total  $d^2Z$  para  $dx_1$  e  $dx_2$  satis fazendo  $dg = g_{x_1}dx_1 + g_{x_2}dx_2 = 0$ .

**Teorema 9.5.1** (Condição Suficiente). *Para um máximo temos que ter  $d^2Z$  negativo definido sujeito a  $dg = 0$ . Para um mínimo temos que ter  $d^2Z$  positivo definido sujeito a  $dg = 0$ .*

**Teorema 9.5.2** (Condição Necessária). *Para um máximo temos que ter  $d^2Z$  negativo definido sujeito a  $dg = 0$ . Para um mínimo temos que ter  $d^2Z$  positivo definido sujeito a  $dg = 0$ .*

Como vimos, um consumidor tem um conjunto bem definido de desejos, ou “preferências”, que podem ser representados por uma função de utilidade numérica. Além disso, supomos que o consumidor escolhe otimamente, no sentido de que eles escolhem a opção com a maior utilidade entre as disponíveis para elas. Isso significa que um consumidor está resolvendo um problema de otimização. Essa é uma classe importante de problemas que surgem várias vezes ao longo da economia (por exemplo, supõe-se também que as empresas resolvam problemas de otimização). Portanto, vale a pena descrever como são esses problemas em termos gerais.

Um problema de otimização tem três componentes principais:

- Os objetos de escolha: o que é isso que está sendo escolhido? No caso do nosso consumidor, serão as diferentes cestas de bens que eles podem comprar.
- A função objetivo: o que o consumidor está tentando maximizar? No caso do consumidor, esta é a função de utilidade.
- Restrições: quais restrições existem nas escolhas que podem ser feitas? No caso do consumidor, este é o conjunto de bens que eles podem pagar.

Isto pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \max_{\text{cesta de consumo}} & \quad \text{preferências (ou utilidade) sujeito a uma restrição orçamentária} \\ & \quad \text{ou} \\ & \max_{x,y} U(x,y) - \lambda [g(x,y) - m] \end{aligned}$$

Uma das habilidades mais importantes para aprender em economia é ser capaz de formular problemas de otimização. Aqui estão alguns exemplos:

**Exemplo 9.5.7.** Um estudante, Pedro, está tentando decidir quais cursos que ele vai fazer. Ele quer obter a maior média possível de notas, mas também quer fazer cursos com concentração em Economia. Ele escolhe os cursos oferecidos por uma universidade, a fim de maximizar a média de notas, satisfazendo as exigências da concentração em Economia.

**Exemplo 9.5.8.** O governo brasileiro está inscrito para reduzir as emissões de CO<sub>2</sub> em 25%. No entanto, eles querem fazer isso de uma maneira que minimize os danos à economia. O ideal (ótimo) é escolher uma política fiscal (impostos e subsídios) para maximizar a produção econômica sujeita à redução das emissões de gases de efeito estufa em 25%.

## 9.6 Aplicações

### 9.6.1 Otimização sem Restrição

#### Estimador de Mínimos Quadrados Ordinários

Suponha que queiramos entender como o salário se forma. O objetivo é saber quais as variáveis são seus determinantes e qual a importância de cada uma. Podemos aproximar tal relevância por meio do parâmetro associado a cada variável. De outro modo, podemos escrever, por exemplo,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 \text{Idade}_i + \beta_2 \text{Educação}_i + \beta_3 \text{Experiência}_i + \beta_4 \text{Habilidade}_i + \varepsilon_i, \quad (9.6.1)$$

em que  $i$  denota cada indivíduo ( $i = 1, \dots, N$ ). Para observações individuais, vamos usar um subscrito  $i$  que vai de 1 a  $n$ , portanto, a  $i$ -ésima observação é  $(y_i, x_i)$ . O número  $n$  é o tamanho da amostra. Cada parâmetro  $\beta_k$  ( $k = 0, \dots, 4$ ) mede a correlação parcial entre o salário ( $y_i$ ) e a variável independente.

O melhor preditor de  $y$  dado  $x$  para um par de variáveis aleatórias  $(y, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$  é o modelo de projeção linear.

Agora estamos interessados em estimar os parâmetros desse modelo, em particular o coeficiente de projeção

$$\beta = [\mathbb{E}(xx')]^{-1} \mathbb{E}(xy). \quad (9.6.2)$$

Podemos estimar  $\beta$  usando amostras que incluem medidas conjunta de  $(y, x)$ . Vamos diferenciar *observações* (*realizações*) das variáveis aleatórias. Variáveis aleatórias são  $(y, x)$ , enquanto as observações são  $(y_i, x_i)$ . Do ponto de vista do pesquisador, os últimos são números. Do ponto de vista da teoria estatística elas são realizações de variáveis aleatórias.

Uma amostra aleatória é dada pelas observações

$$\{(y_1, x_1), (y_2, x_2), \dots, (y_i, x_i), \dots, (y_n, x_n)\}. \quad (9.6.3)$$

De forma mais simplificada temos  $\{(y_i, x_i) : i = 1, \dots, n\}$ . As observações individuais podem ser extraídas de uma distribuição comum (homogênea) ou podem ser extraídas de distribuições heterogêneas. A abordagem mais simples é assumir a homogeneidade – que as observações são realizações de uma população subjacente idêntica.

Assumimos que as variáveis  $\{(y_1, x_1), (y_2, x_2), \dots, (y_i, x_i), \dots, (y_n, x_n)\}$  são identicamente distribuídas e são retirados de uma distribuição comum  $\mathcal{F}$ . Vamos nos referir à distribuição comum  $\mathcal{F}$  como sendo a população.

O modelo de projeção linear se aplica às variáveis aleatórias  $(y, x)$ . É o modelo de probabilidade que é o melhor preditor linear.

Para estimar tal relação apresentada na equação (9.6.1), vamos procurar minimizar o erro ao quadrado. O análogo empírico da esperança do erro ao quadrado é o erro quadrático médio amostral, como definido a seguir:

$$\begin{aligned} S_n(\beta) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i)^2 \\ S_n(\beta) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x'_i \beta)^2 \\ &= \frac{1}{n} SQE_n(\beta), \end{aligned} \quad (9.6.4)$$

em que

$$SQE_n(\beta) = \sum_{i=1}^n (y_i - x'_i \beta)^2 \quad (9.6.5)$$

é chamada de função da soma dos quadrados dos erros. Um estimador para  $\beta$  é obtido pela minimização da função  $S_n(\beta)$ :

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^k} S_n(\beta). \quad (9.6.6)$$

O  $\hat{\beta}$  é conhecido como o estimador de Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) de  $\beta$ . O parâmetro populacional  $\beta$  é fixo na população, enquanto o estimador  $\hat{\beta}$  varia entre as amostras.

Vamos considerar, em primeiro lugar, o estimador de mínimos quadrados para um regressor, isto é,  $k = 1$ , tal que o coeficiente de  $\beta$  é um escalar. Assim, a SQE é dada por:

$$\begin{aligned} SQE_n(\beta) &= \sum_{i=1}^n (y_i - x_i \beta)^2 \\ &= \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - 2\beta \left( \sum_{i=1}^n y_i x_i \right) + \beta^2 \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right). \end{aligned} \quad (9.6.7)$$

O estimador de MQO minimiza esta função. Assim, o resultado da minimização do  $SQE_n(\beta)$  é:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i x_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \quad (9.6.8)$$

O modelo com apenas o intercepto é um caso especial de  $x_i = 1$ . Neste caso encontramos:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sum_{i=1}^n 1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y}, \quad (9.6.9)$$

que é a média de  $y_i$ .

Por esse resultado, o estimador de MQO num modelo com apenas o intercepto é a média amostral. O estimador  $\hat{\beta}$  existe apenas se o denominador é não-zero. Por ser uma soma dos quadrados, necessariamente é não-negativo. Portanto,  $\hat{\beta}$  existe se  $\sum_{i=1}^n x_i^2 > 0$ .

Agora, seja o caso do estimador de mínimos quadrados para vários regressores, isto é,  $k \geq 1$ , tal que o coeficiente de  $\beta$  agora é um vetor. Assim, a SQE é dada por:

$$SQE_n(\beta) = \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - 2\beta' \left( \sum_{i=1}^n y_i x_i \right) + \beta' \left( \sum_{i=1}^n x_i x_i' \right) \beta. \quad (9.6.10)$$

A condição de primeira ordem para minimização de  $SQE_n(\beta)$  é:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} SQE_n(\hat{\beta}) = \mathbf{0} \iff -2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2 \sum_{i=1}^n x_i x_i' \hat{\beta} = \mathbf{0}. \quad (9.6.11)$$

Por essa expressão temos um sistema de  $k$  equações com  $k$  elementos desconhecidos  $\hat{\beta}$ . Resolvendo esse sistema encontramos uma fórmula explícita para o estimador de MQO:

$$\hat{\beta} = \left( \sum_{i=1}^n x_i x_i' \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right). \quad (9.6.12)$$

Este é um estimador natural do coeficiente de  $\beta$  da melhor projeção linear e também é conhecido como estimador da projeção linear.

Para verificar se de fato  $\hat{\beta}$  é o único que minimiza a função  $SQE_n$ , precisamos verificar a condição de segunda ordem. Fazendo a segunda derivada da equação (9.6.11), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta'} SQE_n(\beta) &= 2 \sum_{i=1}^n x_i x_i' \\ &= 2 \mathbf{X}' \mathbf{X} \\ &= 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_{i1}^2 & \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{i1} x_{ik} \\ \sum_{i=1}^n x_{i2} x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{i2}^2 & \dots & \sum_{i=1}^n x_{i2} x_{ik} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_{ik} x_{i1} & \sum_{i=1}^n x_{ik} x_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n x_{ik}^2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.6.13)$$

Além disso, este Hessiano pode ser mostrado como sendo semi-definido positivo:

$$\beta' (2 \mathbf{X}' \mathbf{X}) \beta = 2 (\mathbf{X} \beta)' \mathbf{X} \beta = 2 \|\mathbf{X} \beta\|_2^2 \geq 0 \quad \forall \beta. \quad (9.6.14)$$

Assim, pelas condições de segunda ordem para convexidade, a função de perda do MQO é

convexa e, portanto, o estimador encontrado acima é o único minimizador global para o problema.

Podemos escrever o coeficiente de projeção  $\beta$  como uma função explícita dos momentos populacionais  $Q_{xy}$  e  $Q_{xx}$ . O estimador dos momentos são os momentos amostrais:

$$\hat{Q}_{xy} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad (9.6.15)$$

$$\hat{Q}_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i x'_i. \quad (9.6.16)$$

O estimador dos momentos de  $\beta$  substitui o momento populacional pelos momentos amostrais:

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \hat{Q}_{xx}^{-1} \hat{Q}_{xy} \\ &= \left( \sum_{i=1}^n x_i x'_i \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right). \end{aligned} \quad (9.6.17)$$

**Definição 9.6.1.** O estimador de mínimos quadrados  $\hat{\beta}$  é

$$\hat{\beta} = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^k} S_n(\beta), \quad (9.6.18)$$

em que

$$S_n(\beta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x'_i \beta)^2, \quad (9.6.19)$$

e tem como solução

$$\hat{\beta} = \left( \sum_{i=1}^n x_i x'_i \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right). \quad (9.6.20)$$

**Teorema 9.6.1.** Se  $\sum_{i=1}^n x_i x'_i > 0$ , o estimador de Mínimos Quadrados é único e igual a

$$\hat{\beta} = \left( \sum_{i=1}^n x_i x'_i \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right). \quad (9.6.21)$$

Estes são resultados algébricos e se mantêm verdadeiros para todas estimativas da regressão

linear.

As  $n$  equações lineares  $y = \mathbf{x}'\beta + \varepsilon$  formam um sistema de  $n$  equações. Podemos empilhar estas  $n$  equações juntas como:

$$y_1 = \mathbf{x}'_1 \beta + \varepsilon_1, \quad (9.6.22)$$

$$y_2 = \mathbf{x}'_2 \beta + \varepsilon_2, \quad (9.6.23)$$

⋮

$$y_n = \mathbf{x}'_n \beta + \varepsilon_n. \quad (9.6.24)$$

Agora defina

$$\mathbf{y}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (9.6.25)$$

$$\mathbf{X}_{n \times k} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}'_1 \\ \mathbf{x}'_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}'_n \end{pmatrix}, \quad (9.6.26)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n \times 1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}. \quad (9.6.27)$$

O sistema de  $n$  equações pode ser compactado em uma única equação

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon. \quad (9.6.28)$$

Somas de amostras pode ser escritas em notação matricial. Por exemplo

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i \mathbf{x}'_i = \mathbf{X}' \mathbf{X}, \quad (9.6.29)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_i y_i = \mathbf{X}' \mathbf{y}. \quad (9.6.30)$$

E o estimador de mínimos quadrados pode ser escrito como:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}'\mathbf{y}). \quad (9.6.31)$$

### Estimador de Máxima Verossimilhança

Na seção anterior apresentamos o método dos mínimos quadrados ordinários para estimar um ou mais parâmetros  $\theta$  em um modelo paramétrico. Nesta seção, discutimos um método diferente chamado estimativa de máxima verossimilhança. Calcular o estimador de máxima verossimilhança é um problema de otimização.

O primeiro passo é definir um modelo paramétrico. Um modelo paramétrico para  $X$  é uma função de probabilidade completa que depende de um vetor de parâmetro desconhecido  $\theta$ . Para o caso contínuo, podemos escrever ela como uma função densidade  $f(x|\theta)$ . O parâmetro  $\theta$  pertence ao um conjunto  $\Theta$ , que é chamado de espaço de parâmetros.

Um modelo paramétrico especifica uma distribuição da população que pertence a uma coleção específica de distribuições. Costumamos chamar de família paramétrica. Por exemplo, suponha que uma variável aleatória  $x$  é distribuído exponencialmente com densidade

$$f(x|\lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right), \quad (9.6.32)$$

com parâmetro  $\lambda > 0$ .

**Definição 9.6.2.** *Um modelo paramétrico especifica a distribuição de todas as observações.*

**Definição 9.6.3.** *Um modelo para uma amostra aleatória é o pressuposto que  $x_i, i = 1, \dots, n$ , são i.i.d. com função densidade conhecida  $f(x|\theta)$  ou função massa  $\pi(x|\theta)$  com parâmetro  $\theta \in \Theta$ .*

**Definição 9.6.4.** *O modelo é corretamente especificado quando existe um parâmetro tal que o modelo corresponde a verdadeira distribuição dos dados.*

**Definição 9.6.5.** *Um modelo é corretamente especificado quando há um único valor do parâmetro  $\theta \in \Theta$  tal que  $f(x|\theta_0) = f(x)$ , a verdadeira distribuição dos dados. O valor do parâmetro  $\theta_0$  é chamado de verdadeiro valor do parâmetro. O parâmetro  $\theta$  é único se não existe outro  $\theta$  tal que  $f(x|\theta_0) = f(x|\theta)$ . Um modelo é mal-especificado se não existe nenhum valor de parâmetro  $\theta \in \Theta$  tal que  $f(x|\theta) = f(x)$ .*

A teoria da verossimilhança é desenvolvida sob o pressuposto que o modelo é corretamente especificado.

**Definição 9.6.1.** *Um modelo é corretamente especificado quando há um valor único para o parâmetro  $\theta_0 \in \Theta$  tal que  $f(x|\theta_0) = f(x)$ , a verdadeira distribuição. Este parâmetro  $\theta_0$  é chamado de verdadeiro parâmetro.*

O parâmetro  $\theta_0$  é único se não há nenhum outro  $\theta$  tal que  $f(x|\theta_0) = f(x)$ .

A verossimilhança é a densidade conjunta das observações calculadas usando o modelo. Independência das observações significa que a densidade conjunta é o produto das densidades individuais. Distribuições idênticas significa que todas as densidades são idênticas. Isso significa que a densidade conjunta é igual a seguinte expressão:

$$f(x_1, \dots, x_n | \theta) = f(x_1 | \theta) f(x_2 | \theta) \dots f(x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta). \quad (9.6.33)$$

A função verossimilhança é a densidade conjunta avaliada nos dados observados e vista como função de  $\theta$ .

**Definição 9.6.6.** A função de verossimilhança para uma variável contínua é:

$$L_n(\theta) \equiv f(x_1, \dots, x_n | \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta). \quad (9.6.34)$$

**Definição 9.6.7.** A função de verossimilhança para uma variável discreta é:

$$L_n(\theta) \equiv \prod_{i=1}^n \pi(x_i | \theta). \quad (9.6.35)$$

A teoria da probabilidade usa a densidade para descrever a probabilidade de  $x$  assumir valores específicos. Na análise de verossimilhança, mudamos o uso. À medida que os dados nos são fornecidos, usamos a função de verossimilhança para descrever quais valores de  $\theta$  são mais compatíveis com os dados. O objetivo da estimação é encontrar o valor de  $\theta$  que melhor descrever os dados. Como a função densidade  $f(x|\theta)$  nos mostra que valores de  $x$  são mais prováveis de ocorrer, dado um valor específico de  $\theta$  a função de verossimilhança  $\ell_n(\theta)$  nos mostra os valores de  $\theta$  que são mais prováveis de gerar as observações.

O valor de  $\theta$  mais compatível com as observações é o valor que maximiza a verossimilhança. Esse é um estimador razoável de  $\theta$ .

**Definição 9.6.8.** O estimador de máxima verossimilhança  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  é o valor que maximiza  $L_n(\theta)$ :

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} L_n(\theta). \quad (9.6.36)$$

Vamos ver um exemplo. Considere a densidade dada por  $f(x|\lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$ . A função de verossimilhança é:

$$L_n(\lambda) = \prod_{i=1}^n \left( \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{X_i}{\lambda}\right) \right) = \frac{1}{\lambda^n} \exp\left(-\frac{n\bar{X}_n}{\lambda}\right). \quad (9.6.37)$$

A condição de primeira ordem para maximização é dada por:

$$\frac{\partial L_n(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \iff -n \frac{1}{\lambda^{n+1}} \exp\left(-\frac{n\bar{X}_n}{\lambda}\right) + \frac{1}{\lambda^n} \exp\left(-\frac{n\bar{X}_n}{\lambda}\right) \frac{n\bar{X}_n}{\lambda^2} = 0. \quad (9.6.38)$$

Cancelando os termos comuns e resolvendo, encontramos uma solução única que é um EMV para  $\lambda$ :

$$\hat{\lambda} = \bar{X}_n. \quad (9.6.39)$$

Em alguns casos é mais conveniente calcular e maximizar o logaritmo da função.

**Definição 9.6.9.** O logaritmo da função de verossimilhança é dado por:

$$\ell_n(\theta) \equiv \log L_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i|\theta). \quad (9.6.40)$$

Fazemos isso por duas razões:

1. É mais conveniente porque o logaritmo da verossimilhança é a soma dos log da densidade individual
2. Em muitos modelos paramétricos o logaritmo da densidade é computacionalmente mais robusto (menos intensivo)

De modo semelhante,  $\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \ell_n(\theta)$ .

Por exemplo, considere a densidade dada por  $f(x|\lambda) = \frac{1}{\lambda} \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$ . O logaritmo da densidade é  $\log f(x|\lambda) = -\log \lambda - \frac{x}{\lambda}$ . O log da função de verossimilhança é:

$$\ell_n(\theta) \equiv \log L_n(\theta) = \sum_{i=1}^n \left( -\log \lambda - \frac{X_i}{\lambda} \right) = -n \log \lambda - \frac{n\bar{X}_n}{\lambda}. \quad (9.6.41)$$

A condição de primeira ordem é dada por:

$$\frac{\partial \ell_n(\lambda)}{\partial \lambda} = 0 \iff -\frac{n}{\lambda} + \frac{n\bar{X}_n}{\lambda^2} = 0. \quad (9.6.42)$$

A solução é única e dada por  $\hat{\lambda} = \bar{X}_n$ .

A condição de segunda ordem é:

$$\frac{\partial^2 \ell_n(\lambda)}{\partial \lambda^2} = \frac{n}{\hat{\lambda}^2} - 2 \frac{n\bar{X}_n}{\hat{\lambda}^3} = -\frac{n}{\bar{X}_n^2} < 0. \quad (9.6.43)$$

Vamos ver um exemplo para o caso discreto. Considere a função massa dada por  $\pi(x|p) = p^x(1-p)^{1-x}$ . O logaritmo da função massa é  $\log \pi(x) = x \log p + (1-x) \log(1-p)$ . O logaritmo da função de verossimilhança é

$$\begin{aligned}\ell_n(p) &= \sum_{i=1}^n X_i \log p + (1-X_i) \log(1-p) \\ &= n\bar{X}_n \log p + n(1-\bar{X}_n) \log(1-p)\end{aligned}\tag{9.6.44}$$

A condição de primeira ordem da equação (9.6.44) é dada por:

$$\frac{\partial \ell_n(p)}{\partial p} = 0 \iff \frac{n\bar{X}_n}{p} - \frac{n(1-\bar{X}_n)}{1-p} = 0\tag{9.6.45}$$

A solução é única e dada por  $\hat{p} = \bar{X}_n$ .

A condição de segunda ordem é:

$$\frac{\partial^2 \ell_n(\hat{p})}{\partial p^2} = -\frac{n\bar{X}_n}{\hat{p}^2} - \frac{n(1-\bar{X}_n)}{(1-\hat{p})^2} = -\frac{n}{\bar{X}_n} < 0\tag{9.6.46}$$

## 9.6.2 Otimização com Restrição

### Maximizando o Lucro: Elasticidade-Preço

A elasticidade-preço mede a variação percentual da quantidade demandada em relação a uma variação percentual do preço. Nada mais óbvio. Vamos ver um exemplo para entender este conceito de forma adequada.

Para começar, imagine o vendedor de um certo bem que observa um volume de vendas a um dado preço. Ao testar o comportamento dos consumidores após uma pequena redução de preços, ele observa um aumento do seu volume de vendas, em decorrência da queda de preço, de tal magnitude que a receita aumenta. Diante desse cenário, ele percebe que uma pequena redução de preço proporciona-lhe-á um aumento significativo da receita.

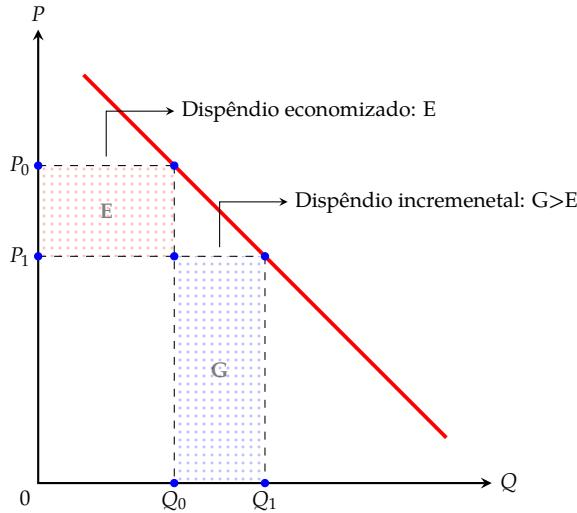
Antes que você pense que isso é óbvio, suponha que a \$100 o volume de vendas é de 400 unidades por mês, mas que a \$99 o volume é de 402 unidades. Então, a \$100 a receita é de \$40.000, mas a \$99, a receita é de \$39.798, ou seja, um faturamento menor. Portanto, a receita pode cair, mesmo com o aumento do volume.

O segredo da elasticidade-preço não está na comparação da variação percentual das quantidades consumidas em relação à variação percentual do preço. Esse é apenas o aspecto matemático superficial que surge a partir de algo mais fundamental. O segredo está na comparação absoluta dos dispêndios aos referidos preços. Essa comparação se apresenta idêntica tanto para os consumidores quanto para os ofertantes, pois se baseia nas observações empíricas dos dispêndios

com o bem (do ponto de vista dos consumidores) ou das receitas de venda (do ponto de vista dos vendedores).

Quando o preço é  $P_0$  e a quantidade demandada é  $Q_0$  unidades, o gasto com o bem é  $P_0 Q_0$ . Se o preço cai de  $P_0$  para  $P_1$  e a quantidade consumida sobe para  $Q_1$ , o gasto com o bem é  $P_1 Q_1$ . Por um lado, economiza-se um dispêndio  $E$  por causa da queda do preço. Por outro, aumenta-se o gasto em  $G$  com o bem, em razão da quantidade maior demandada. Esses valores estão na Figura 9.6.1.

FIGURA 9.6.1 – DISPÊNDIOS DECORRENTES DE UMA MUDANÇA NO PREÇO



Note que  $E = (-\Delta P)Q_0$  e  $G = P_1(\Delta Q)$ . Se  $G > E$ , então é porque a queda de preço provoca, por um lado, uma economia, mas um gasto maior por outro. Por que ocorre isso? Porque os consumidores, em termos agregados, gostam tanto do bem que a pequena queda de preço foi o gatilho para que se dispusessem a abrir mão de um valor maior dos seus outros recursos privados (na forma de consumo de outros bens) em troca do consumo maior do bem. Ora,  $G > E$  significa que:

$$P_1(\Delta Q) > (-\Delta P)Q_0. \quad (9.6.47)$$

Se a queda de preço é pequena, então podemos substituir  $P_1$  por  $P_0$  e dividir tudo por  $P_0 Q_0$ . Portanto:

$$\frac{\Delta Q}{Q_0} > \frac{-\Delta P}{P_0}. \quad (9.6.48)$$

Defina:

$$\Delta\%Q = \frac{\Delta Q}{Q_0} \quad (9.6.49)$$

$$\Delta\%P = \frac{\Delta P}{P_0} \quad (9.6.50)$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\%Q}{\Delta\%P}. \quad (9.6.51)$$

Observe que  $\frac{-\Delta P}{P_0} = -\Delta\%P$ . Então, como  $\Delta P$  é negativo, na divisão inverte-se a desigualdade, de onde temos:

$$\varepsilon = \frac{\Delta\%Q}{\Delta\%P} < -1, \quad (9.6.52)$$

ou seja, a demanda pelo bem é preço-elástica: a quantidade demandada é muito sensível ao preço; a elasticidade é negativa, pois a quantidade demandada aumenta com a queda de preço, e em módulo ela é maior que 1. Decorre daí, analogamente, que, se  $G < E$ , então a demanda é preço-inelástica. Se, por fim,  $G = E$ , então a elasticidade-preço é unitária.

Chegamos, portanto, à seguinte interpretação alternativa da elasticidade-preço. Suponha que a um dado preço o consumidor gaste um montante de sua renda em um bem. Então:

1. A demanda por esse bem é preço-elástica se uma pequena queda do preço faz o consumidor aumentar a quantidade consumida em tal magnitude que o montante monetário dispendido no bem seja maior que antes. Em outras palavras, a demanda por esse bem é preço-elástica se a economia de gastos causada por uma pequena queda do preço é integralmente gasta na compra de mais unidades desse mesmo bem e se, além disso, o consumidor ainda sacrifica consumo de outros bens para gastar ainda mais no bem em questão.
2. A demanda pelo bem é preço-inelástica se uma pequena queda do preço faz o consumidor aumentar pouco a quantidade consumida, tão pouco a ponto de o montante monetário dispendido no bem ser menor que antes. Dito de outra forma, a demanda pelo bem é preço-inelástica se a economia causada por uma pequena queda do preço não é integralmente usada para comprar mais unidades desse bem: o consumidor usa parte dessa economia na compra de outros bens.
3. A demanda tem elasticidade-preço unitária se uma pequena queda do preço faz o consumidor aumentar a quantidade consumida sem alterar o montante monetário dispendido no bem, ou seja, toda economia causada por uma queda pequena do preço do bem é toda ela revertida na compra de unidades adicionais do mesmo bem.

Sabemos que a elasticidade-preço é uma propriedade local da curva de demanda. Porém, os próprios ofertantes podem captar a magnitude da elasticidade-preço da demanda que enfrentam mediante a observação empírica do volume de vendas a preços distintos, desde que próximos. Portanto, não é preciso que os ofertantes conheçam a curva de demanda para saberem se os seus

consumidores têm pelo produto que demandam uma maior ou menor sensibilidade ao preço. Basta observar o faturamento a preços próximos.

Ao preço de \$100, o volume de vendas era de 400 unidades por mês. Ao preço de \$99 o volume era de 402 unidades. Assim, a \$100 a receita era de \$40.000, mas a \$99, a receita era de \$39.798, ou seja, um faturamento menor. Portanto, a receita cai, mesmo com o aumento do volume. Isso ocorre porque a demanda é preço-inelástica. Se à queda do preço de \$100 para \$99 correspondesse um aumento da quantidade demandada de 400 para 410 unidades, por exemplo, então a receita de venda subiria de \$40.000 para \$40.590. Isso ocorrerá se a demanda for preço-elástica. Se a quantidade vendida aumentasse de 400 para 404, então a receita seria a mesma. Neste caso, a elasticidade-preço é unitária.

Finalmente, o que significa a demanda ser preço-elástica? A um dado preço, o consumidor gasta determinado montante monetário no bem e o restante nos outros bens. Quando o preço cai, ele passa a gastar imediatamente um montante menor nesse bem. Isso representa uma economia de gastos imediata, realizada no preciso momento em que o consumidor compra o bem ao preço menor. Como ele deseja o bem em questão mais intensamente, então, ao adquirir as unidades adicionais desse bem em razão da queda do preço, o consumidor está disposto a abrir mão de outros bens, em variadas quantidades. Essa redução no consumo de outros bens se traduz em um valor monetário que ele decide economizar dos outros bens para gastar no bem cujo preço caiu. De fato, com a queda de preço do bem, os preços relativos entre esse bem e os demais se tornaram mais favoráveis ao bem em questão, alterando, assim, as taxas às quais o consumidor está disposto a trocar um conjunto de outros bens em certas quantidades pelo bem cujo preço caiu. Isso não se dá instantaneamente, pois o consumidor possui estoques de bens que precisam ser renovados apenas de tempos em tempos. Em outras palavras, a economia descrita por E no gráfico é imediata, mas o gasto adicional descrito por G toma ainda um certo tempo. O fato é que a demanda pelo bem será preço-elástica se o valor que ele economiza dos outros bens para gastar a mais no bem em questão (ao longo do tempo de ajuste) é maior do que a economia de gastos que ele teve com a queda de preço (no momento inicial da queda).

Se o consumidor desejasse o bem menos intensamente do que deseja os outros, então teríamos o efeito contrário: uma demanda preço-inelástica. Apesar da queda do preço do bem, ele prefere tão mais intensamente os outros bens (e não este) que, apesar da imediata redução de dispêndio em função da queda de preço, ele não está tão disposto assim a abrir mão dos outros bens para adquirir mais unidades do bem em questão. O valor gasto no bem na verdade diminui, pois ele prefere utilizar a economia imediata de riqueza nos outros bens, aumentando o consumo do bem em questão apenas um pouco, mas retirando dele parte do que gastava para gastar nos outros bens.

A elasticidade-preço, apesar de ser um conceito associado à demanda, não exige que se tenha conhecimento da curva de demanda propriamente dita e nem que não seja útil ao ofertante, que é quem enfrenta a demanda. Para qualquer agente, bastam as observações dos dispêndios a preços próximos (do ponto de vista do consumidor) ou, equivalentemente, das receitas de venda (do ponto de vista do vendedor).

Vamos usar o conceito de elasticidade-preço para mostrar como o lucro pode ser maximizado pela regra “receita marginal=custo marginal” sem que o empresário tenha qualquer função de

lucro na cabeça. O conceito de elasticidade-preço é matemático. Porém, mediante um raciocínio econômico muito mais elementar e natural, devido a Armen Alchian, vamos ver que o empresário, ao agir, utiliza a elasticidade-preço da demanda sem necessidade de saber que está se valendo da elasticidade-preço e que, mesmo se soubesse, poderia estimá-la sem qualquer conhecimento da função de demanda Marshalliana do consumidor e muito menos de sua função de utilidade. Vamos em frente.

Suponha que ao preço de \$30 por entrada você vai ao cinema 40 vezes por ano, gastando, portanto, \$1.200 em cinema por ano. Se o preço da entrada cai pra \$25, então você teria uma economia de \$200 se mantivesse a mesma taxa de consumo por ano, ou seja, se continuasse a ir ao cinema 40 vezes por ano.

O que você faz com essa economia? Se você gastar esses \$200 em cinema, ou seja, comprar mais 8 entradas agora ao preço de \$25, então a elasticidade-preço da sua demanda por cinema pode ser considerada como sendo unitária. A aproximação será tanto melhor quanto menor for a variação de preço. Neste caso, você continua gastando \$1.200 em cinema por ano.

Se, porém, você resolver gastar apenas uma parte desses \$200 em idas adicionais ao cinema, digamos, 6 idas a mais por ano, o que, ao preço de \$25, lhe custarão \$150, e destinar a parte restante, \$50, pra gastar com outros bens, então a sua demanda por cinema é preço-inelástica. Neste caso, após a queda de preço você passa a gastar \$1.150 em cinema por ano, menos que os \$1.200 que você gastava antes.

Se, ao contrário, você usar os \$200 economizados pra comprar mais 8 entradas ao preço de \$25 cada e, além disso, sacrificar o consumo de outros bens, digamos, \$50, pra comprar mais 2 entradas além daquelas 8 adicionais, então sua demanda por cinema é preço-elástica. Neste caso, você passa a gastar \$1.250 em cinema por ano, mais que os \$1.200 que você gastava quando o preço era \$30.

O dono do cinema pode ter as mesmas estimativas com os mesmos dados observáveis: número de espectadores por ano a cada preço da entrada. A diferença é que a economia de \$200 do consumidor é a perda de receita do vendedor em razão da queda do preço da entrada de \$30 para \$25. Similarmente, o dispêndio adicional do consumidor após a queda é a receita adicional do vendedor. Dessa forma, o vendedor tem a noção da receita incremental para uma dada variação de preço.

Imagine que o dono do cinema está na situação em que ao baixar o preço de \$30 pra \$25, a quantidade de entradas sobe de 40 pra 50 (aqueles 8 adicionais com a economia de \$200 mais as outras 2, com \$50), ou seja, demanda preço-elástica. Ao realizar essa variação de preço, ele tem então a noção da receita incremental, que é de \$50 ( $= 1250 - 1200$ ). Qual é o custo de oferecer essas 10 entradas a mais? Se o custo for, suponhamos, \$35, então vale a pena. Ele continua fazendo essas experiências até o ponto em que a receita incremental quase não compensa o custo incremental.

O nosso dono do cinema maximizou seu lucro igualando receita marginal ao custo marginal.

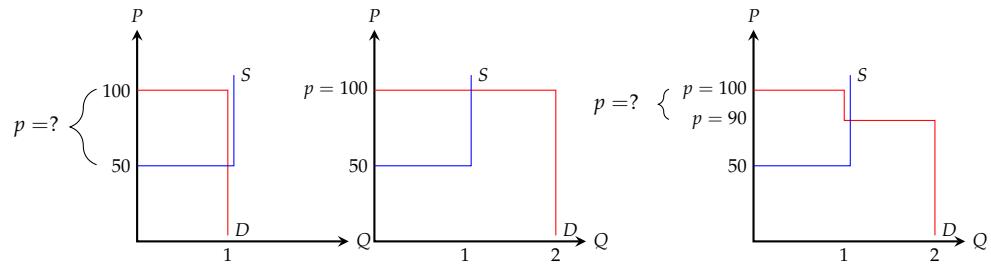
Isso foi pra mostrar que podemos avaliar a elasticidade-preço da demanda por um certo bem (isto é, dizer se é preço-elástica, preço-inelástica ou de elasticidade unitária, ao menos aproximadamente) sem necessidade de termos conhecimento da curva de demanda e muito menos da função de utilidade e que essa avaliação pode ser feita tanto pelo consumidor quanto pelo

vendedor a partir de dados observáveis: as quantidades transacionadas a preços distintos (e próximos). E nem é preciso que nos restrinjamos à definição de elasticidade como razão entre variações percentuais. Basta ao empresário fazer o seguinte raciocínio. “Se a um determinado preço eu vendo tantas unidades e se o preço cai, quanto de receita eu perco se vendesse essa mesma quantidade ao preço mais baixo? Ora, se o preço cai, as pessoas, por outro lado, vão comprar uma quantidade maior. Quanto de receita eu ganho, ao preço mais baixo, em decorrência dessa quantidade adicional? Comparamento então a receita perdida por um lado com a receita ganha pelo outro. Se o ganho líquido é positivo, então temos uma receita incremental positiva. Mas não é só isso! Posso ainda dizer que a demanda pelo meu produto é preço-elástica. Vale a pena baixar o preço? Depende, eu tenho que saber quanto vai me custar oferecer essas unidades adicionais. Todo empresário sabe quanto isso vai custar, mesmo que seja em termos esperados. Se esse custo incremental é menor do que a receita incremental, então vale a pena. Sigo fazendo isso regularmente. Vai chegar um momento em que o preço que eu adoto é tal que, a esse preço, a receita incremental é quase igual ao custo incremental”.

### Oferta da Firma no Curto Prazo

Na linguagem comum, “competição” está associada à rivalidade ativa entre alternativos vendedores potenciais e entre alternativos compradores potenciais. Mas na teoria do equilíbrio geral Walrasiana, “competição” está associada ao comportamento passivo de precificação (*passive price-taking behavior*). As duas visões são consistentes? Se a competição ativa entre potenciais vendedores e entre potenciais compradores for suficientemente intensa, quando a poeira for eliminada (ou seja, em equilíbrio), nenhum vendedor ou comprador poderá influenciar os termos de troca resultantes da competição ativa. Assim, em equilíbrio, as pessoas devem agir como tomadoras de preços. A competição ativa envolve uma forma particular de rivalidade. Mesmo sob monopólio bilateral, a rivalidade na forma de barganha sobre um preço pode ser muito intensa. A competição adiciona um novo elemento: opções externas. Para ilustrar o ponto, considere um mercado com apenas um vendedor e um comprador, o comprador está disposto a pagar até \$100 por uma unidade de um objeto indivisível, enquanto o vendedor está disposto a aceitar \$50 ou mais pelo objeto (seu custo de oportunidade = \$50). Supondo que eles façam um acordo, qualquer preço entre \$50 e \$100 é possível, o preço real dependerá de suas habilidades relativas de barganha, como ilustrado na Figura 9.6.2.

FIGURA 9.6.2 – A COMPETIÇÃO ATIVA ENVOLVE UMA FORMA PARTICULAR DE RIVALIDADE: RIVALIDADE ENTRE COMPRADORES ALTERNATIVOS E/OU VENDEDORES ALTERNATIVOS – SEM COMPETIÇÃO, COMPETIÇÃO PERFEITA, COMPETIÇÃO IMPERFEITA



Agora, considere o que acontece se outro comprador com disposição de pagar \$100 entrar no mercado. Mesmo que ele não seja um negociador muito duro, a situação do vendedor melhorou consideravelmente, pois agora ele tem a opção externa de negociar com o segundo comprador e não com o primeiro. Na verdade, ele pode jogar um comprador contra o outro. A competição entre os dois compradores forçará o preço até \$100, enquanto o vendedor se senta e aproveita o espetáculo. Inicialmente, a segunda situação pode até parecer envolver muito menos rivalidade do que a primeira: pode haver muito menos persuasão, bajulação ou vociferantes ameaças no ar na segunda situação, porque o primeiro comprador percebe que suas ameaças não mais ser eficazes; o vendedor agora tem a opção externa de lidar com o segundo comprador. Para desenvolver o exemplo mais um passo, suponha agora que a disposição do segundo comprador em pagar é de apenas \$90, em vez de \$100. Assim, o segundo comprador não é mais um substituto perfeito para o primeiro, no que diz respeito ao vendedor. Ele ainda pode jogar com um comprador contra o outro, mas agora os lances entre os compradores serão de \$90, em seguida, o segundo comprador vai cair fora da negociação. Assim, nesta variação permanece \$10 do excesso de monopólio bilateral para o vendedor e o comprador da primeira para negociar. Em relação à situação (a), a concorrência reduziu a faixa de indeterminação pelo preço final, mas não a eliminou. Exprimindo um pouco diferente, nesta variação, porque os dois compradores concorrentes têm diferentes disposições para pagar pelo objeto do vendedor, a competição entre eles não é mais “perfeita”: a concorrência perfeita requer competição entre compradores substitutos perfeitos.

Como a empresa competitiva deve ver o preço de mercado como determinado (no equilíbrio não há mais possibilidade de ganhar algo com a arbitragem), seu problema de maximização do lucro é o seguinte. A empresa determina o nível de produto  $y$  para resolver o seguinte problema:

$$\max_y py - c(y), \quad (9.6.53)$$

em que  $y$  é o produto produzido pela empresa,  $p$  é o preço do produto e  $c(y)$  é a função de custo da produção.

A condição de primeira ordem para uma solução interior nos dá

$$p = c'(y) \equiv CM(y). \quad (9.6.54)$$

A condição de primeira ordem torna-se uma condição suficiente se a condição de segunda ordem é satisfeita

$$c''(y) > 0. \quad (9.6.55)$$

Tomadas em conjunto, essas duas condições determinam a função de oferta de uma empresa competitiva: a qualquer preço  $p$ , a firma fornecerá uma quantidade de produto  $y(p)$  tal que  $p = c'(y(p))$ . Como  $p = c'(y(p))$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} p &= \frac{\partial}{\partial p} c'(y(p)) \\ 1 &= c''(y(p))y'(p), \end{aligned} \quad (9.6.56)$$

e, portanto,  $y'(p) > 0$ , o que significa que a lei da oferta é válida.

Lembre-se que  $p = c'(y^*)$  é a condição de primeira ordem que caracteriza o ótimo apenas se  $y^* > 0$ , isto é, somente se  $y^*$  é um ótimo interior. Pode acontecer que, a um preço baixo, uma empresa possa muito bem decidir sair do negócio. Para o caso de curto prazo,

$$c(y) = c_v(y) + c_f. \quad (9.6.57)$$

O lucro da firma é  $\pi(y) = py(p) - c_v(y(p)) - c_f$  se  $y > 0$  e  $\pi(0) = -c_f$  se  $y = 0$ . Assim, a empresa deve produzir se  $\pi(y) > \pi(0)$ , isto é,

$$py(p) - c_v(y(p)) - c_f \geq -c_f, \quad (9.6.58)$$

o que implica que

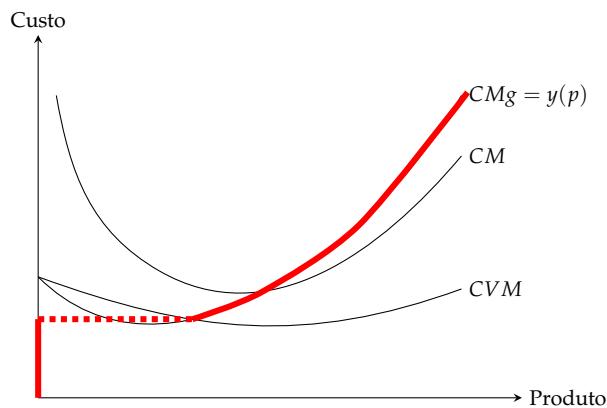
$$p \geq \frac{c_v(y(p))}{y(p)} \equiv CVM, \quad (9.6.59)$$

ou seja, a condição necessária para a empresa produzir uma quantidade positiva de produto é que o preço seja maior ou igual ao custo variável médio.

Assim, a curva de oferta para a firma competitiva é em geral dada por:  $p = c'(y)$  se  $p \geq \frac{c_v(y(p))}{y(p)}$  e  $y = 0$  se  $p \leq \frac{c_v(y(p))}{y(p)}$ . Ou seja, a curva de oferta coincide com a porção inclinada para cima da curva de custo marginal, desde que o preço cubra o custo variável médio, e a curva de

oferta é zero se o preço for menor do que o custo variável médio<sup>1</sup>.

FIGURA 9.6.3 – CURVA DE OFERTA DA FIRMA COMPETITIVA



Se é no longo prazo, não há custo fixo e, portanto, o custo variável médio coincide com o custo médio; se é no curto-prazo, há diferença.

Vamos ver a curva de oferta de outra forma. Ela mede, na verdade, o valor que a sociedade atribui aos recursos econômicos que são deslocados para a produção do bem em questão. Para tornar inteligível o significado da curva de oferta, vamos conectar com o princípio da utilidade marginal decrescente. Sim, a curva de oferta é crescente e convexa precisamente por causa do princípio da utilidade marginal decrescente.

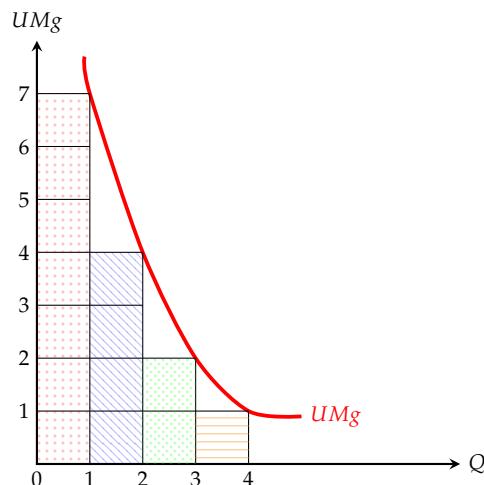
Para produzir um bem, o produtor se vale de insumos. Esses insumos são recursos existentes na economia. Não importa se você os chama de trabalho, capital ou terra ou qualquer outra coisa. São recursos escassos que a sociedade valoriza precisamente porque são escassos. Quando o produtor produz uma unidade do bem, ele tem que deslocar recursos da economia para a produção dessa

<sup>1</sup> A primeira formulação completa da geometria das curvas de custos, baseada na curva de custo médio com forma de "U", se encontra no artigo de Jacob Viner (1931) "Cost Curves and Supply Curves". Não é criação integral, porém, de Viner, mas uma síntese de um conhecimento que já se discutia ao longo das três primeiras décadas do século XX. Viner reconhece as contribuições de Sraffa, Pigou, Harrod, Robertson e outros, mas não menciona Barone e Edgeworth, dois dos primeiros economistas a conceber a curva de custo médio na forma de "U". Piero Sraffa (1925), em "Sulle relazioni fra costo e quantità prodotta" (Annali di economia, 11:277–88), estuda o que então se conhecia por leis de variação do custo. Ele cita particularmente o último de uma série de quatro artigos de Francis Ysidro Edgeworth no Economic Journal entre 1911 e 1913, intitulados "Contributions to the Theory of Railway Rates", I, II, III e IV, no qual Edgeworth apresenta pela primeira vez a ideia da curva de custo médio com formato de "U" e sua relação geométrica com a curva de custo marginal [F. Edgeworth 1913, vide especialmente a figura 3 da página 214]. Foi Enrico Barone, em seu livro Principi di Economia Política, de 1908, quem primeiro formulou a curva de custo em um diagrama com quantidades no eixo das abscissas e o custo no eixo das ordenadas. Infelizmente ele não grafou a curva de custo médio, mas as curvas de receita total e de custo total, sendo que esta tem exatamente a seguinte forma: inicialmente côncava e depois convexa. Se ele tivesse grafado a curva de custo médio, teria grafado a curva em forma de "U". Barone escreve: "se o custo da unidade do produto fosse diminuindo indefinidamente, à medida que a quantidade aumenta, haveria vantagem em que a produção de cada mercadoria estivesse concentrada em uma única empresa (...). Em geral, a realidade não é assim. A experiência ensina que, a partir de um certo ponto, quando a empresa se expande ainda mais, os custos por unidade não vão mais diminuindo, mas, em vez disso, começam a crescer (...), seja pelas dificuldades inerentes às organizações que ultrapassam certas dimensões, seja pela dificuldade de poder dispor da quantidade de alguns fatores de produção que seria necessária na combinação mais vantajosa". [Barone (parte I (L'equilibrio economico), seção 9, pp. 9-10]. O que Barone escreve em palavras é exatamente a curva de custo médio (o custo por unidade) na forma de "U". O custo médio vai diminuindo, mas chega a um ponto a partir do qual começa a aumentar. Para mais detalhes sobre as contribuições antes de Jacob Viner, veja o artigo de Jan Keppler e Lallement (2006) "The origins of the U-shaped average cost curve: understanding the complexities of the modern theory of the firm" (History of Political Economy).

unidade. Imagine que os recursos estão disponíveis em pacotinhos de igual magnitude. Cada pacotinho é um quantum de recursos contendo bens e serviços que, aos olhos do produtor, são vistos como insumos ou fatores de produção. Para simplificar, suponha que existam 4 quanta (plural de quantum) de recursos na sociedade.

Isso é o que a sociedade tem de recursos. Como eles são escassos, a sociedade os valoriza. É aqui que entra o princípio da utilidade marginal decrescente. Se a sociedade não tivesse nada e adquirisse o 1º quantum de recursos, isso lhe daria uma imensa satisfação, uma utilidade incremental pela qual ela estivesse disposta a pagar, no máximo, digamos, \$7. Ao adquirir o 2º quantum de recursos, a sociedade também fica feliz, mas numa intensidade menor. Suponha que ela estivesse disposta a pagar por esse 2º quantum \$4. Tendo adquirido o 2º quantum, ela adquire o 3º e por ele está disposta a pagar \$2. O 4º quantum vale para a sociedade \$1. Note que expressei a satisfação pelos quanta em termos monetários. É que estou supondo efeito-renda nulo, só para simplificar, de modo que a utilidade marginal possa ser expressa como valor monetário. Os valores acima ilustram o princípio da utilidade marginal decrescente e estão dispostos na Figura 9.6.4:

FIGURA 9.6.4 – UTILIDADE MARGINAL DA SOCIEDADE



Esses recursos estão, neste momento, sendo usados pelas pessoas na economia em suas trocas (produções e consumos). Você, que faz parte da economia, decide, de repente, produzir um bem. Para produzir a 1ª unidade, você tem que deslocar um quantum de recursos da economia para o seu processo de produção.

Dos 4 quanta de recursos de que a sociedade dispunha, ela tem que abrir mão de 1 quantum para que você produza a 1ª unidade de seu bem. Quanto valem esses recursos deslocados da sociedade? Valem \$1. Você tem de ler o gráfico da utilidade marginal da sociedade de trás para a frente. Ela não está numa situação em que aos poucos adquire unidades adicionais, mas numa em que aos poucos perde as que já possui. Ela tem bastante e não se importa tanto em perder um pouco. Assim, o custo econômico social da 1ª unidade produzida é  $C(1) = \$1$ . Se não há externalidades, esse custo incremental social é exatamente igual ao seu custo incremental privado. Como isso é possível? É possível desde que os preços sejam livremente determinados pelo mercado segundo

a lei de oferta e demanda, pois assim os preços refletirão as valorações marginais das unidades comercializadas. Como o custo de produzir zero é  $C(0) = \$0$  (já que nada é deslocado da economia nesse caso), então o custo incremental da 1<sup>a</sup> unidade é  $CMg(1) = \$1$ .

Qual é o preço que você deve cobrar por essa 1<sup>a</sup> unidade? Deve ser o preço que cubra o valor do qual a sociedade abriu mão:  $P = \$1$ . Nem adianta cobrar mais, pois a receita incremental não seria igual ao custo incremental e, portanto, não seria uma boa ideia: você teria tomado a decisão errada.

Você agora quer produzir a 2<sup>a</sup> unidade. Como você já deslocou um quantum de recursos da economia, privando-a de um pacotinho, tem de deslocar um segundo quantum.

Para a sociedade, esse 2º quantum vale \$2. Esse valor é o custo marginal social da 2<sup>a</sup> unidade:  $CMg(2) = \$2$ . De fato, com a 2<sup>a</sup> unidade deslocada, a sociedade já abriu mão de  $\$3 = \$1 + \$2$ . Com apenas a 1<sup>a</sup>, ela tinha aberto mão de \$1. A diferença é \$2.

Qual é o preço que você deve cobrar por essa 2<sup>a</sup> unidade? Deve ser o preço que cubra o valor incremental do qual a sociedade abriu mão:  $P = \$2$ .

Você agora quer produzir a 3<sup>a</sup> unidade. Como você já deslocou 2 quanta de recursos da economia, privando-a de dois pacotinhos, tem de deslocar um 3º quantum.

Para a sociedade, esse 3º quantum vale \$4. Esse valor é o custo marginal social da 3<sup>a</sup> unidade,  $CMg(3) = \$4$ , e, pelas mesmas razões anteriores, o preço que você deve cobrar por essa 3<sup>a</sup> unidade é  $P = \$4$ .

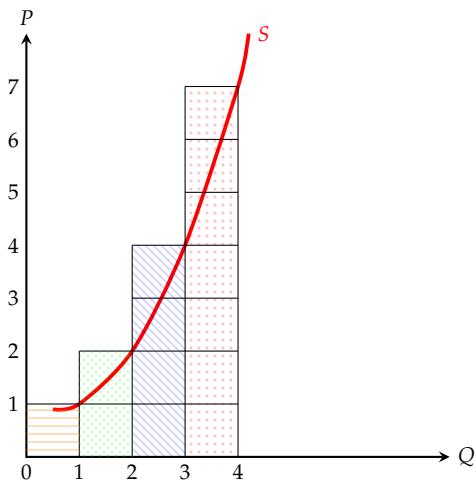
Finalmente, você quer produzir a 4<sup>a</sup> e última unidade. Como você já deslocou 3 quanta de recursos da economia, privando-a de três pacotinhos, tem de deslocar agora o 4º quantum.

Para a sociedade, esse 4º quantum vale \$7. Esse valor é o custo marginal social da 4<sup>a</sup> unidade:  $CMg(4) = \$7$  e, pelas mesmas razões anteriores, o preço que você deve cobrar por essa 4<sup>a</sup> unidade é  $P = \$7$ . A sociedade ficou sem nada, voltou à estaca zero. Se ela pudesse reaver um pacotinho, seria o 1º pacotinho em relação a zero. Como vimos, esse 1º pacotinho vale \$7 para a sociedade.

Temos, finalmente, a sua curva de oferta (ou de custo marginal privado, que coincide com o custo marginal social), como pode ser visto na Figura 9.6.5.

Observe como a curva de oferta é o reflexo especular da curva de utilidade marginal da sociedade sobre os recursos escassos disponíveis. A conexão é entre a curva de oferta e a valoração marginal que a sociedade inteira atribui aos recursos escassos disponíveis. A ideia de custo marginal como explicadora da curva de oferta é uma ideia intermediária. Ela é a parte visível, mas por trás dela está a sociedade. No fundo, ler a curva de oferta dessa maneira equivale também a compreender o que é a função custo econômico, cuja diferença em relação ao custo contábil torna-se assim patente. A valoração marginal que a sociedade atribui a cada pacotinho condensa o valor que a sociedade atribui a tudo aquilo que pode resultar do uso ótimo de cada pacotinho. Se você desloca um pacotinho e o vende por um preço igual a essa valoração marginal, você está simplesmente deixando a sociedade indiferente entre (a) usar esse pacotinho para os usos que ela tinha em mente e (b) deixar esse pacotinho na sua mão para que você produza um bem que ela valoriza tanto quanto o pacotinho deslocado.

FIGURA 9.6.5 – CURVA DE OFERTA



A demanda tem uma natureza essencialmente privada. Já a produção, além de seu caráter privado, possui também uma natureza social, que se manifesta na relação entre a curva de oferta privada e a valoração marginal da sociedade sobre os recursos deslocados para a produção do bem. Como dizia William Stanley Jevons e, depois dele, John Bates Clark, a produção é um fenômeno social e, por isso, distinto da demanda.

Suponha que tenhamos  $J$  firmas no mercado. A função de oferta da indústria é simplesmente a soma das funções de oferta de todas as firmas, de modo que é dada por:

$$\hat{y}(p) = \sum_{j=1}^J y_j(p), \quad (9.6.60)$$

em que  $y_j(p)$  é a função de oferta da firma  $j$  para  $j = 1, \dots, J$ . Como cada empresa escolhe um nível de produção em que o preço é igual ao custo marginal, cada empresa que produz uma quantidade positiva de produto deve ter o mesmo custo marginal. A função de oferta da indústria mede a relação entre a produção da indústria e o custo comum de produzir esse produto. A função de demanda agregada (indústria) mede a produção total demandada a qualquer preço que é dado por

$$\hat{x}(p) = \sum_{i=1}^n x_i(p), \quad (9.6.61)$$

em que  $x_i(p)$  é a função de demanda do consumidor  $i$  para  $i = 1, \dots, n$ .

### Maximização da Utilidade

Uma hipótese fundamental sobre o comportamento individual na economia moderna em geral e a teoria do consumidor em particular é que um agente racional sempre escolherá uma cesta

preferida do conjunto de alternativas acessíveis. Derivaremos funções de demanda considerando um modelo de comportamento de maximização de utilidade associado a uma descrição de restrições econômicas subjacentes.

Nesta seção, vamos pensar sobre as ferramentas que precisamos para resolver o problema de otimização e, portanto, completar nosso modelo de comportamento do consumidor. Para começar, vamos pensar sobre o problema intuitivamente, e então mostraremos como podemos usar as ferramentas de cálculo para encontrar a solução.

No problema básico da maximização de preferências, o conjunto de alternativas acessíveis é apenas o conjunto de todas as cestas que satisfazem a restrição orçamentária do consumidor que discutimos anteriormente. Ou seja, o problema da maximização de preferência pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} & \max u(x) \\ \text{sujeito a } & px \leq m \\ & x \in X. \end{aligned} \tag{9.6.62}$$

Haverá uma solução para esse problema se a função de utilidade for contínua e se o conjunto de restrições for fechado e limitado. O conjunto de restrições está certamente fechado. Se  $p_\ell > 0$  para  $\ell = 1, \dots, L$  e  $m > 0$ , não é difícil mostrar que o conjunto de restrições será limitado. Se algum preço for zero, o consumidor pode querer uma quantidade infinita do correspondente bem.

**Proposição 9.6.1.** *Sob a hipótese de não-saciedade local, uma cesta  $x^*$  que maximiza a utilidade deve atender à restrição orçamentária com igualdade.*

Esta proposição nos permite reescrever o problema do consumidor como

$$\begin{aligned} & \max u(x) \\ \text{sujeito a } & px = m. \end{aligned} \tag{9.6.63}$$

O valor de  $x$  que resolve esse problema é a cesta demandada pelo consumidor: ela expressa quanto de cada bem o consumidor deseja em um determinado nível de preços e renda. Em geral, o ótimo não é único. Denote por  $x(p, m)$  o conjunto de todos as cestas maximizadoras de utilidade, chamado de correspondência de demanda do consumidor. Quando há uma cesta de demanda única para cada  $(p, m)$ ,  $x(p, m)$  se torna uma função e isso é chamado de função de demanda do consumidor. Veremos a partir da seguinte proposição que a convexidade estrita das preferências garantirá a unicidade da cesta ótima.

**Proposição 9.6.2** (Unicidade da cesta demandada). *Se as preferências são estritamente convexas, então para cada  $p > 0$  existe uma cesta única  $x$  que maximiza  $u$  no conjunto orçamentário do consumidor,  $B(p, m)$ .*

Suponha que tenhamos o seguinte problema

$$\begin{aligned} & \max_{x,y} \left( -(x-4)^2 - (y-4)^2 \right) \\ & \text{sujeto a } x + y \leq 4 \\ & \quad x + 3y \leq 9. \end{aligned} \tag{9.6.64}$$

A função Lagrangeana é

$$L = \left( -(x-4)^2 - (y-4)^2 \right) - \lambda(x+y-4) - \mu(x+3y-9). \tag{9.6.65}$$

As condições de Kuhn-Tucker são:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \iff -2(x-4) - \lambda - \mu = 0, \tag{9.6.66}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \iff -2(y-4) - \lambda - 3\mu = 0, \tag{9.6.67}$$

$$x + y - 4 = 0, \tag{9.6.68}$$

$$x + 3y - 9 = 0, \tag{9.6.69}$$

$$\lambda(x+y-4) = 0, \tag{9.6.70}$$

$$\mu(x+3y-9) = 0, \tag{9.6.71}$$

$$\lambda \geq 0, \tag{9.6.72}$$

$$\mu \geq 0. \tag{9.6.73}$$

Temos os seguintes casos:

1.  $\lambda = 0$  e  $\mu = 0$

Nesse caso,  $x = 4$  e  $y = 4$ . Mas viola  $x + y \leq 4$ .

2.  $\lambda = 0$  e  $\mu \neq 0$

Nesse caso,  $x = \frac{19}{10}$  e  $y = \frac{33}{10}$ . Mas viola  $x + y \leq 4$ .

3.  $\lambda \neq 0$  e  $\mu = 0$

Nesse caso,  $x = 2$  e  $y = 2$ .

4.  $\lambda \neq 0$  e  $\mu \neq 0$

Nesse caso,  $x = 2$  e  $y = 2$ . Porém,  $\mu = -1$  (contradição!).

A QRND é satisfeita.

As condições de suficiência exigem que

1.  $f$  seja côncava

2.  $g_j$  seja quase-convexa

Para a concavidade da função objetivo temos que:

$$\left( -(w-4)^2 - (z-4)^2 \right) - \left( -(x-4)^2 - (y-4)^2 \right) \leq \begin{pmatrix} -2(x-4) & -2(y-4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (w-x) \\ (z-y) \end{pmatrix}. \quad (9.6.74)$$

Resolvendo, obtemos:

$$-(x-w)^2 - (y-z)^2 \leq 0, \quad (9.6.75)$$

que é verdade para todo  $(x, y)$  e  $(w, z)$  no  $\mathbb{R}^2$ .

As restrições são lineares e, portanto, convexas (quase-convexas) e côncavas (quase-côncavas).

### Maximização da Utilidade Intertemporal

Vamos resolver o problema de maximização de utilidade em dois períodos. Para tanto, seja a função de utilidade

$$U(c_1, c_2) = \log(c_1) + \beta \log(c_2) \quad (9.6.76)$$

e as restrições nos períodos 1 e 2 como seguem

$$c_1 + b \leq Z_1 \quad (9.6.77)$$

$$c_2 \leq b(1+r) + Z_2 \quad (9.6.78)$$

com  $c_1 > 0$  e  $c_2 > 0$ , em que  $b$  é a poupança e  $Z_j, j = 1, 2$ , é a renda disponível.

Se mantivermos os termos de consumo, mas eliminarmos o termo  $b$ , então o problema se torna um problema de maximização restrita com uma restrição de renda:

$$c_2 = (Z_1 - c_1)(1+r) + Z_2 \quad (9.6.79)$$

Note que substituímos o símbolo de desigualdade por um símbolo de igualdade. As restrições de renda sempre serão vinculativas, pois os domicílios não desperdiçarão renda dada a utilidade logarítmica, que é sempre crescente no consumo. Isso também significa que não precisamos nos preocupar com as restrições positivas de consumo, porque os domicílios nunca vão consumir zero, já que a utilidade não é definida. Podemos reescrever a restrição orçamentária da seguinte forma:

$$c_1(1+r) + c_2 = Z_1(1+r) + Z_2 \quad (9.6.80)$$

A reescrita do problema como fizemos acima tem uma interpretação interessante. Neste modelo, não há produção, o *endowment* é fixo, e permitimos que o domicílio transfira livremente recursos de hoje para amanhã e vice-versa. Então, na prática, estamos comprando dois bens,  $c_1$  e  $c_2$ . Eles parecem ser o mesmo bem, então deveriam ter o mesmo preço, mas não têm, porque o consumo no primeiro período é mais caro, já que se você não consome no primeiro período e economiza, pode ganhar juros e ter  $c_2$  mais alto. O preço de  $c_1$  é, portanto,  $1+r$ . Por outro lado, o preço de  $c_2$  é apenas 1. O recurso total disponível está no lado direito da equação. Sua avó está transferindo recursos  $Z_1$  e  $Z_2$  para você, mas os recursos transferidos no primeiro período valem mais por causa da possibilidade de poupar. Novamente, podemos unir os dois períodos porque o domicílio pode tomar emprestado e economizar. Dado que não temos incerteza, nosso problema intertemporal de dois períodos tem, na verdade, apenas uma restrição orçamentária. Não podemos fazer isso para o problema com incerteza.

O problema aqui é formulado para  $c_1$  e  $c_2$  e é o problema de escolha intertemporal ótima. No entanto, substitua  $c_1$  por maçãs consumidas hoje,  $c_2$  por bananas consumidas hoje, e altere o orçamento para que  $Z_1$  seja o *endowment* da sua avó que é uma produtora de maçãs, e  $Z_2$  seja o *endowment* da sua outra avó que é uma produtora de bananas. Todas as soluções seguem. Substituiríamos  $1+r$  por  $P_M$ , o preço das maçãs, e também poderíamos adicionar  $P_B$ , o preço das bananas. A coisa fundamental sobre a construção desses modelos é que podemos rotular facilmente as variáveis de maneira diferente e usar o mesmo *framework* para analisar diferentes tipos de problemas. Para cada tipo de problema, poderíamos modificar como o orçamento funciona, o que exatamente está na função de utilidade, mas a estrutura de otimizar a utilidade dada uma restrição orçamentária é a mesma.

Observe novamente que já conhecemos a solução desse problema a partir do problema sem restrições. O que estamos fazendo aqui é resolver o problema, mas agora diretamente para  $c_1$  e  $c_2$  em vez de  $b$ . No entanto, os resultados são os mesmos porque, uma vez que você conhece  $b$ , você sabe as escolhas de consumo a partir do orçamento, e vice-versa. O método de solução aqui é mais complicado porque passamos de um problema de uma escolha no problema sem restrições para um problema de três escolhas abaixo. Mas a solução aqui é mais geral, permitindo-nos ter restrições adicionais que não podem ser facilmente incorporadas diretamente na função de utilidade.

Para resolver o problema, escrevemos o Lagrangiano e resolvemos um problema com três escolhas

$$L = \log(c_1) + \beta \log(c_2) - \mu (c_1(1+r) + c_2 - Z_1(1+r) - Z_2) \quad (9.6.81)$$

As três derivadas parciais do Lagrangeano são tais que

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = 0 \iff \frac{1}{c_1^*} = \mu(1+r), \quad (9.6.82)$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_2} = 0 \iff \frac{\beta}{c_2^*} = \mu, \quad (9.6.83)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \iff c_1^*(1+r) + c_2^* = Z_1(1+r) + Z_2, \quad (9.6.84)$$

Manipulando as equações (9.6.82) e (9.6.83), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{c_2^*} &= \frac{1}{c_1^*(1+r)} \\ \frac{c_1^*}{c_2^*} &= \frac{1}{\beta(1+r)} \\ c_1^* &= \frac{1}{\beta(1+r)} c_2^* \end{aligned} \quad (9.6.85)$$

Isso nos diz que a razão ótima de consumo nos dois períodos não é determinada pelo recurso total disponível, mas sim pela taxa de juros  $r$  e pela preferência pelo futuro  $\beta$ . Se a taxa de juros for mais alta, alguém consumirá menos hoje em relação ao amanhã. Se  $\beta$  for maior, o que significa que gostamos mais do futuro, alguém também consumirá menos hoje em relação ao amanhã.

Usando a terceira CPO e a razão de consumo ótimo, encontramos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta(1+r)} c_2^*(1+r) + c_2^* &= Z_1(1+r) + Z_2 \\ \frac{c_2^*}{\beta} + c_2^* &= Z_1(1+r) + Z_2 \\ c_2^* &= \frac{Z_1(1+r) + Z_2}{1 + \frac{1}{\beta}} \end{aligned} \quad (9.6.86)$$

Agora temos o nível ótimo de consumo. Se os *endowments* no primeiro ou segundo períodos forem maiores, o domicílio consumirá mais no segundo período. Se a taxa de juros for maior, o domicílio consumirá mais no segundo período. Se  $\beta$  se move de 1 para 0, o numerador aumenta, e a escolha ótima diminui: isso significa que quanto mais você desgostar do futuro em relação ao presente, menos você consumirá no futuro.

Com a solução para  $c_2^*$ , sabemos que

$$c_1^* = \frac{1}{\beta(1+r)} \frac{Z_1(1+r) + Z_2}{1 + \frac{1}{\beta}}$$

$$c_1^* = \frac{Z_1 + Z_2 \left( \frac{1}{1+r} \right)}{1+\beta} \quad (9.6.87)$$

Isso significa que, de maneira semelhante à escolha ótima para  $c_2$ , os domicílios consumirão mais se os recursos forem maiores. Agora, ao contrário do que acontecia antes, se a taxa de juros for maior, o numerador diminui, e o domicílio consome menos no primeiro período. Se  $\beta$  se aproxima de 0, o domicílio consumirá mais hoje também.

As soluções aqui são do tipo Marshallianas.

Agora também podemos encontrar a escolha ótima de empréstimo e poupança, que é, dado por  $c_1^* + b^* = Z_1$ :

$$\begin{aligned} b^* &= Z_1 - \frac{Z_1 + \left( \frac{1}{1+r} \right) Z_2}{1+\beta} \\ b^* &= \frac{\beta Z_1 - \left( \frac{1}{1+r} \right) Z_2}{1+\beta} \end{aligned} \quad (9.6.88)$$

Ao analisar a escolha ótima de empréstimo e poupança, podemos ver que às vezes o domicílio deseja tomar empréstimos, às vezes poupar, dependendo do numerador, especificamente:

$$b^* > 0 \text{ se } \beta(1+r) > \frac{Z_2}{Z_1} \quad (9.6.89)$$

$$b^* \leq 0 \text{ se } \beta(1+r) \leq \frac{Z_2}{Z_1} \quad (9.6.90)$$

Isso nos diz que se uma família deseja tomar empréstimos depende da razão de recursos  $\frac{Z_2}{Z_1}$  e da taxa de desconto multiplicada por  $(1+r)$ . A preferência pelo futuro multiplicada pelo retorno total à poupança deve ser maior do que a razão do *endowment* amanhã em relação ao hoje para que as famílias queiram poupar. Em outras palavras, suponha que  $\beta(1+r) > 1$ , a família estará disposta a poupar mesmo se houver mais *endowment* amanhã do que hoje.

### Como as Elasticidades Estimadas Podem ser Utilizadas para Prever os Efeitos “Unilaterais” de uma Fusão

Com o intuito de motivar a importância da estimação de demanda, ilustramos aqui como as elasticidades podem ser utilizadas para prever os efeitos de um ato de concentração sobre preços, decorrentes do exercício unilateral de poder de mercado. Consideraremos uma indústria de bens diferenciados onde as firmas concorrem à Bertrand, cada firma tomando os preços dos bens oferecidos por firmas rivais como dados ao estabelecer seus preços.

Começamos considerando uma indústria de bens diferenciados onde diferentes firmas detêm inicialmente apenas um produto (ou seja, uma marca) cada uma. Ao estabelecer o preço, cada firma

há de equilibrar dois efeitos distintos sobre seu lucro decorrentes de um acréscimo (infinitesimal) no preço de seu produto. Por um lado, um aumento de preço resulta em um aumento de lucro a ser realizado de consumidores que continuarão comprando seu produto, apesar do aumento de preço. Esses consumidores são os chamados “consumidores inframarginais”, por desfrutarem de um excedente suficientemente alto no consumo desse produto a ponto de continuarem comprando-o ainda que a um preço mais alto. Por outro lado, o aumento de preço fará com que alguns consumidores – os chamados “consumidores marginais” – deixem de consumir o produto da firma em questão, seja porque irão optar agora por consumir um outro produto (marca) ou porque deixarão de comprar produtos nesse mercado (ou seja, optarão agora pelo produto externo). Claramente, enquanto o primeiro efeito sobre o lucro é positivo, o segundo efeito é negativo: o preço escolhido pela firma em equilíbrio é aquele que balanceia os dois efeitos.

Esses dois efeitos podem ser vistos imediatamente a partir do problema de otimização da firma e a correspondente condição de primeira ordem. Assumamos que existam  $n$  firmas, cada uma com um único produto, indexados por  $i = 1, \dots, n$ . O lucro da firma  $i$  (proprietária do produto  $i$ ) é dado por  $(p_i - c_i)D_i(p)$ , em que  $p_i$  é o preço,  $c_i$  é o custo marginal (assumindo que seja constante, isto é, que não varie em função de quantidade no intervalo relevante), e  $q_i := D_i(p)$  é a demanda pelo produto quando os preços de todos os produtos no mercado são dados pelo vetor de preços  $p := (p_1, p_2, \dots, p_n)$ . Diante da premissa de concorrência em preços (Bertrand), a condição de primeira ordem (CPO) da firma  $i$  é

$$D_i(p) + (p_i - c_i) \frac{\partial D_i(p)}{\partial p_i} = 0. \quad (9.6.91)$$

Ao passo que o segundo termo captura a perda de vendas para os “consumidores marginais” (o termo é negativo para funções de demanda decrescentes em preço, e onde há uma margem  $p_i - c_i$  positiva), o primeiro termo reflete o efeito do aumento de preço nas vendas para os “consumidores inframarginais” remanescentes<sup>2</sup>. A CPO pode ser reescrita na forma de *markup* preço-custo no lado esquerdo:

$$\frac{p_i - c_i}{p_i} = \frac{-D_i(p)}{\frac{\partial D_i(p)}{\partial p_i} p_i} = -\frac{1}{\eta_{ii}(p)}. \quad (9.6.92)$$

Referimo-nos à recíproca da expressão do lado direito como a elasticidade-preço própria de demanda: esta é claramente uma função de preços, denotada por  $\eta_{ii}(p)$ . Corresponde, em valores absolutos, à queda percentual na demanda pelo produto  $i$ .

A CPO é satisfeita no equilíbrio: o equilíbrio é dado por um sistema de equações composto de uma CPO para cada produto. A equação acima pode então ser usada para estimar os *markups* preço-custo a partir das elasticidades-preço estimadas, assumindo que o modelo Bertrand seja um modelo suficientemente apropriado de comportamento na indústria. Alternativamente, as elasticidades-preço podem ser utilizadas junto com uma medida direta de *markups* (obtida das

<sup>2</sup> Aqueles que mais valorizam a próxima unidade dentre os que não estão no mercado.

firms) de forma a testar a premissa de conduta Bertrand.

Vê-se, claramente, da CPO acima que no caso de firmas proprietárias de apenas um produto no mercado, um produto com alto *markup* em equilíbrio estará associado a uma baixa elasticidade-preço própria em equilíbrio. A intuição desse resultado é clara a partir da primeira condição de primeira ordem: se, no equilíbrio, um produto usufrui de alta margem  $p_i - c_i$  é porque a proporção de consumidores marginais necessária a compensar o efeito “inframarginal” positivo de um aumento de preços é baixa. Por exemplo, considere um produto com preço de 20 e custo de 10 cujo consumo no mercado seja de 1.000 unidades em equilíbrio. A razão pela qual a firma especifica o produto em 20 é porque o coeficiente angular da curva de demanda nesse ponto da curva é de  $\frac{\partial D_i(p)}{\partial p_i} = -100$ , tal que  $1000 + (20 - 10) \cdot (-100) = 0$ . Ou seja, o preço não é maior do que 20 porque um aumento (marginal) unitário acarretaria a perda de vendas de 100 unidades, resultando em um aumento de preços não lucrativo. Considere agora outro produto com preço de 30 e o mesmo custo marginal de 10 com consumo da mesma quantidade de 1.000 unidades em equilíbrio. A razão pela qual cobra-se um preço mais elevado por esse outro produto reside no fato de a curva de demanda ter coeficiente angular de apenas  $-50$ , já que  $1000 + (30 - 10) \cdot (-50) = 0$ . Ou seja, quanto maior a margem preço-custo, menor é a proporção de vendas marginais necessária para tornar o acréscimo de preço não-lucrativo.

Fica claro a partir dessas considerações que (em condições normais) são os consumidores marginais, e não os consumidores inframarginais “leais”, que a firma considera ao fixar seus preços. Assim, o que restringe o aumento de preços são as alternativas dos consumidores ao se depararem com esse aumento: o quão atraente é a opção de deixar de comprar o produto (ou reduzir sua compra) cujo preço está sendo acrescido, seja para deixar de consumir no mercado (ou seja, optar por consumir o produto externo) ou optar pelo consumo de produtos rivais, ou substitutos. Dessa forma, a existência de produtos substitutos restringe o preço de um produto: quanto maior a proporção de consumidores marginais prestes a trocar sua decisão de consumo por um produto rival, maior é a substituibilidade, ou a “proximidade”, entre o produto cujo preço está sendo acrescido e os produtos-destino dos consumidores marginais. Enquanto a elasticidade-preço própria captura a proporção de consumidores marginais, a elasticidade-preço cruzada reflete a proximidade entre dois produtos. Define-se a elasticidade-preço cruzada de demanda pelo produto  $i$  com relação ao preço do produto  $j$ , denotada  $\eta_{ij}(p)$ , como sendo a alteração percentual na demanda pelo produto  $i$  que resulta do aumento de 1% no preço do produto  $j$ , ou seja,  $\eta_{ij}(p) = \frac{\partial D_i(p)}{\partial p_j} \frac{p_j}{D_i(p)}$ .

Uma fusão entre firmas proprietárias de produtos suficientemente próximos poderá, assim, levar a um aumento não-desprezível de preços, na medida em que uma parcela importante da restrição competitiva antes imposta pelo(s) produto(s) substituto(s) é eliminada. Considere a fusão entre duas empresas 1 e 2, proprietárias de produtos substitutos 1 e 2, respectivamente. A firma proprietária do produto 1 que, antes da fusão, não aumentava o preço além de um certo patamar, devido à existência de um suficiente número de consumidores marginais prestes a trocar o produto 1 pelo produto 2, após a fusão já não perderá as vendas advindas desses consumidores caso eleve o preço do produto 1. A resposta ótima à fusão – na ausência de alterações de custo, como veremos adiante – será então aumentar o preço do produto 1 (e muito provavelmente aumentar também

o preço do produto 2). A atenuação (ou internalização) das restrições competitivas advinda do ato de concentração, com o consequente aumento de preços, é o chamado “efeito unilateral” sobre preços.

Esse efeito pode novamente ser evidenciado pela condição de primeira ordem da firma fusionada. Lembrando nosso ponto de partida, onde cada firma detém inicialmente um produto (uma marca), consideremos a fusão entre firmas 1 e 2. A firma fusionada irá agora escolher os preços dos produtos 1 e 2 de forma a maximizar seu lucro pós-fusão, equivalente a  $(p_1 - c_1)D_1(p) + (p_2 - c_2)D_2(p)$ . A CPO com relação a  $p_1$  (inverter os algarismos 1 e 2 para obter a CPO em relação a  $p_2$ ) é, agora:

$$D_1(p) + (p_1 - \tilde{c}_1) \frac{\partial D_1(p)}{\partial p_1} + (p_2 - \tilde{c}_2) \frac{\partial D_2(p)}{\partial p_1} = 0, \quad (9.6.93)$$

em que  $\tilde{c}_i$  corresponde ao respectivo custo marginal pós-fusão (como veremos, a fusão poderá ou não alterar os custos marginais dos produtos envolvidos, a parte marginal das chamadas “eficiências” da fusão). Uma rápida comparação entre a CPO da entidade fusionada e a CPO da firma quando independente aponta para a presença de um terceiro termo, referente ao efeito cruzado: alguns consumidores marginais do produto 1, deparados com um aumento no preço do produto 1, trocarão sua decisão de consumo pelo produto 2, e essa troca que ocorre em favor do produto 2 já não conta como uma perda para a firma fusionada quando esta estabelece o preço do produto 1. Em outras palavras, ao ser internalizada pela fusão, essa troca não mais restringe a precificação do produto 1. Como fizemos, a CPO pode ser reescrita em termos de *markups* e elasticidades. Multiplicando os dois lados da CPO acima por  $p_1$  e dividindo pela receita total da indústria,  $\sum_{i=1}^n p_i D_i(p)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} & \frac{p_1 D_1(p)}{\sum_{i=1}^n p_i D_i(p)} + \frac{p_1 D_1(p)}{\sum_{i=1}^n p_i D_i(p)} \frac{p_1 - \tilde{c}_1}{p_1} \frac{p_1}{D_1(p)} \frac{\partial D_1(p)}{\partial p_1} + \\ & \frac{p_2 D_2(p)}{\sum_{i=1}^n p_i D_i(p)} \frac{p_2 - \tilde{c}_2}{p_2} \frac{p_1}{D_2(p)} \frac{\partial D_2(p)}{\partial p_1} = 0, \end{aligned} \quad (9.6.94)$$

ou, denotando a fatia (participação) da receita total da indústria correspondente ao produto  $i$  (*share* de valor) como  $s_i(p) = \frac{p_1 D_1(p)}{\sum_{i=1}^n p_i D_i(p)}$ , e lembrando a definição das elasticidades-preço própria e cruzada, temos:

$$s_1(p) + s_1(p) \frac{p_1 - \tilde{c}_1}{p_1} \eta_{11}(p) + s_2(p) \frac{p_2 - \tilde{c}_2}{p_2} \eta_{21}(p) = 0. \quad (9.6.95)$$

As CPOs das  $n - 2$  firmas remanescentes, cada uma detendo apenas um produto, são dadas por:

$$s_i(p) + s_i(p) \frac{p_i - c_i}{p_i} \eta_{ii}(p) = 0. \quad (9.6.96)$$

Os *markups* pós-fusão podem ser calculados a partir da divisão elemento-por elemento do vetor de markup  $\times$  share de valor  $\omega$  por  $s(p)$ , ou seja:

$$\frac{p_i - \tilde{c}_i}{p_i} = \frac{\omega_i}{s_i(p)}. \quad (9.6.97)$$

Como podemos então determinar os efeitos estimados de uma fusão proposta sobre preços? Tipicamente, esse exercício consiste em duas etapas:

1. Estima-se o sistema de demanda a partir do equilíbrio pré-fusão, de forma a obter estimativas consistentes das elasticidades-preço próprias e cruzadas.
2. Assume-se um modelo comportamental (que poderá, em princípio, variar com a fusão) e calcula-se, a partir do sistema de demanda estimado na primeira etapa, as elasticidades-preço e *shares* de valor para cada produto para o equilíbrio após a fusão. Quanto ao modelo comportamental, manteremos aqui a premissa de conduta Bertrand como sendo suficientemente apropriada, utilizando assim as CPOs recém-deduzidas. Quanto à estimativa das elasticidades e *shares* pós-fusão, uma possível aproximação é utilizar as mesmas elasticidades e *shares* da situação pré-fusão para a situação pós-fusão. Evidentemente trata-se de uma aproximação de primeira ordem (pois, ao alterar preços, a fusão impactará elasticidades e *shares*), que poderá ser mais adequada na medida em que a variação de preços seja pequena. Efetua-se, então, o cálculo dos *markups* preço-custo e dos *markups* pós-fusão.

Assumimos agora que o sistema de demanda, na primeira etapa, já tenha sido estimado. Mantemos nosso exemplo de uma indústria com  $n$  bens diferenciados, inicialmente com  $n$  firmas, cada uma proprietária de um produto. Propõe-se a fusão das firmas 1 e 2. Suponhamos que a seguinte situação exista para os produtos 1 e 2:

Dados referentes à situação pré-fusão	Produto 1	Produto 2
Share de valor	20%	10%
Elasticidade-preço própria de demanda	-2,0	-3,0
Elasticidade-preço cruzada de demanda com relação ao preço do outro produto	0,20	0,20

Os *markups* pré-fusão para os produtos 1 e 2 – já que antes da fusão ora proposta esses produtos pertenciam a firmas donas de apenas um produto – correspondem simplesmente ao valor recíproco das respectivas elasticidades-preço próprias (multiplicados por  $-1$ ):

$$\frac{p_1^{pre} - c_1}{p_1^{pre}} = -\frac{1}{2} = 50\%, \quad (9.6.98)$$

$$\frac{p_2^{pre} - c_2}{p_2^{pre}} = -\frac{1}{3} = 33,33\%. \quad (9.6.99)$$

Aproximando os *shares* e as elasticidades pós-fusão por seus respectivos valores pré-fusão, as primeiras duas equações do sistema de condições de primeira ordem, referentes à situação após a fusão, são

$$0.2 + 0.2 \frac{p_1 - \tilde{c}_1}{p_1} (-2) + 0.1 \frac{p_2 - \tilde{c}_2}{p_2} (0.20) = 0, \quad (9.6.100)$$

$$0.1 + 0.2 \frac{p_1 - \tilde{c}_1}{p_1} (0.20) + 0.1 \frac{p_2 - \tilde{c}_2}{p_2} (-3) = 0. \quad (9.6.101)$$

Os *markups* pós-fusão que satisfazem esse par de equações simultâneas são dados por:

$$\frac{p_1^{pos} - \tilde{c}_1}{p_1^{pos}} = 52\%, \quad (9.6.102)$$

$$\frac{p_2^{pos} - \tilde{c}_2}{p_2^{pos}} = 40,3\%. \quad (9.6.103)$$

Assim, estima-se que o *markup* do produto 1 aumente de 50% para 52% mediante a fusão, ao passo que o *markup* do produto 2 eleve-se de 33% para 40%. Com relação ao efeito da fusão sobre preços, assumindo inicialmente que a fusão não alterará custos marginais, ou seja, que eficiências não são previstas ( $\tilde{c}_i = c_i$ ), temos a partir dos *markups* para o produto que  $c_1 = (1 - 0.5)p_1^{pre}$  e  $\tilde{c}_1 = c_1 = (1 - 0.520)p_1^{pos}$  e, portanto,  $\frac{p_1^{pos}}{p_1^{pre}} = \frac{(1 - 0.50)}{(1 - 0.520)} = 1.042$  correspondendo a um aumento de 4,2% no preço do produto 1. De maneira semelhante,  $\frac{p_2^{pos}}{p_2^{pre}} = \frac{(1 - 0.333)}{(1 - 0.403)} = 1.116$ , o que se traduz em um aumento de preço de 11,6% para o produto 2.

### Modelo Farrell e Shapiro (1990)

O objetivo é analisar os efeitos sobre o bem-estar de uma fusão de firmas. Para tanto, seja a seguinte estrutura do modelo:

- $N$  firmas competindo em Cournot (em quantidade)
- A demanda é dada por  $P(X)$ , em que  $X = \sum_i x_i$  e  $x_i$  é o produto da firma  $i$
- A firma  $i$  tem custo  $c_i(x)$ , e o custo marginal é positivo, isto é,  $c'_i > 0$

Pressupostos:

- (P1):  $P'(X) < 0$  para todo  $X$ , isto é, preço é decrescente em quantidade

- (P2):  $P'(X) + x_i P''(X) < 0$  para todo  $x_i$  e  $X$ , isto é, um aumento na produção dos rivais  $X - x_i$  reduz a receita marginal da empresa (e, com isso, reduz a quantidade)
- (P3):  $c_i''(x_i) > P'(X)$  para todo  $x_i$  e  $X$

A firma  $i$  escolhe seu produto  $\hat{x}_i$  ao resolver

$$\max_{x_i} \pi_i \iff \hat{x}_i = \arg \max_{x_i} \{x_i P(x_i + y_i) - c_i(x_i)\}, \quad (9.6.104)$$

em que  $y_i = \sum_{j \neq i} x_j$ .

Dado o objetivo acima, a condição de primeira ordem desse problema é

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = 0 \iff \hat{x}_i P'(\hat{X}) + P(\hat{X}) - c_i'(\hat{x}_i) = 0, \quad (9.6.105)$$

em que  $\hat{X} = \sum_i \hat{x}_i$ .

Qual é o efeito de uma mudança na produção agregada dos rivais,  $y_i$ , no produto da firma  $i$ ,  $x_i$ ?

Para responder a essa pergunta reescrevemos a condição de primeira ordem acima deixando claro a dependência de  $x_i$  com relação a  $y_i$ , isto é:

$$x_i(y_i) P'(x_i(y_i) + y_i) + P(x_i(y_i) + y_i) - c_i'(x_i(y_i)) = 0. \quad (9.6.106)$$

Agora, usando a ideia de estática comparativa, derivamos a condição de primeira ordem em relação a  $y_i$ :

$$x_i(y_i) P''(x_i(y_i) + y_i)[x_i'(y_i) + 1] + P'(x_i(y_i) + y_i)x_i'(y_i) + \\ + P'(x_i(y_i) + y_i)[x_i'(y_i) + 1] - c_i''(x_i(y_i))x_i'(y_i) = 0$$

$$x_i'(y_i) [x_i(y_i) P''(x_i(y_i) + y_i) + 2P'(x_i(y_i) + y_i) - c_i''(x_i(y_i))] + \\ + x_i(y_i) P''(x_i(y_i) + y_i) + P'(x_i(y_i) + y_i) = 0$$

$$x_i'(y_i) = -\frac{x_i(y_i) P''(x_i(y_i) + y_i) + P'(x_i(y_i) + y_i)}{x_i(y_i) P''(x_i(y_i) + y_i) + 2P'(x_i(y_i) + y_i) - c_i''(x_i(y_i))}$$

$$R_i = x_i'(y_i) = -\frac{P'(\hat{X}) + x_i P''(\hat{X})}{2P'(\hat{X}) + x_i P''(\hat{X}) - c_i''(\hat{X})}. \quad (9.6.107)$$

Usando os pressupostos P2 e P3, temos que  $R_i \in (-1, 0)$ . A interpretação é que se os rivais expandem a produção em conjunto, a empresa  $i$  contrai, mas em menor proporção que a expansão dos rivais.

Suponha que as firmas 1 e 2 contemplam uma fusão. Duas questões:

1. Sob quais condições as melhorias de custo são boas para uma fusão reduzir o preço?
2. O fato de uma fusão proposta ser rentável para as partes pode ser usado para ajudar a examinar se essa fusão aumenta o excedente agregado?

**Condições necessárias e suficientes para uma fusão aumentar o excedente do consumidor**

A firma  $i$  escolhe seu produto  $\hat{x}_i$  para resolver

$$\hat{x}_i = \arg \max_{x_i} \{x_i P(X) - c_i(x_i)\}. \quad (9.6.108)$$

Sendo  $\hat{X}$  a produção agregada pré-fusão, as condições de primeira ordem das empresas 1 e 2 são

$$\hat{x}_1 P'(\hat{X}) + P(\hat{X}) - c'_1(\hat{x}_1) = 0, \quad (9.6.109)$$

$$\hat{x}_2 P'(\hat{X}) + P(\hat{X}) - c'_2(\hat{x}_2) = 0. \quad (9.6.110)$$

Suponha que  $\hat{x}_1 \geq \hat{x}_2 > 0$ .

Agregando as duas condições de primeira ordem, obtemos:

$$(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)P'(\hat{X}) + 2P(\hat{X}) - c'_1(\hat{x}_1) - c'_2(\hat{x}_2) = 0. \quad (9.6.111)$$

Suponha que a função de custo da empresa pós-fusão seja  $c_M(\cdot)$ .

A nova firma escolhe

$$x_M = \arg \max_x \{x P(x) - c_M(x)\}. \quad (9.6.112)$$

Abordagem de força bruta:

- Calcule os novos produtos de equilíbrio e compare com o produto agregado
- Não vai funcionar! (não tratável)

Abordagem das externalidades:

Se  $x_M > \hat{x}_1 + \hat{x}_2$ , o novo produto agregado  $X_M > \hat{X}$ , e, portanto, o preço irá cair.

A melhor resposta da empresa pós-fusão  $\hat{X}_{12}$  é maior que  $\hat{x}_1 + \hat{x}_2$  se e somente se

$$\begin{aligned} (\hat{x}_1 + \hat{x}_2)P'(\hat{X}) + P(\hat{X}) - c'_M(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) &> 0 \\ \iff P(\hat{X}) - c'_M(\hat{x}_1 + \hat{x}_2)[P(\hat{X}) - c'_1(\hat{x}_1)] + [P(\hat{X}) - c'_2(\hat{x}_2)], \end{aligned} \quad (9.6.113)$$

isto é, o preço cairá se e somente se o *markup* de  $M$  for maior que a soma dos *markups* pré-fusão das empresas 1 e 2 nos produtos anteriores à fusão.

A suposição  $\hat{x}_1 > \hat{x}_2$  implica que  $c'_1(\hat{x}_1) \leq c'_2(\hat{x}_2)$ , de modo que isso possa acontecer apenas se

$$c'_M(\hat{x}_1 + \hat{x}_2) < c'_1(\hat{x}_1), \quad (9.6.114)$$

ou seja, para que o preço caia, o custo marginal da empresa fundida deve estar abaixo do custo marginal do parceiro de fusão mais eficiente.

A partir dessa condição, podemos ver que alguns tipos de fusões nunca podem reduzir o preço.

1. Uma fusão que reduz custos fixos, mas não os custos marginais.

Suponha que  $c_1(x) = c_2(x) = F + cx$  e  $c_M(x) = F_M + cx$ , em que  $F_M < 2F$ . Pela condição acima, sabemos que essa fusão não pode reduzir o preço.

2. Uma fusão que não envolve sinergias (ou seja, cuja única eficiência envolve uma realocação de produção entre empresas)

Suponha que  $c_M(x) = \min_{x_1, x_2} \{c_1(x_1) + c_2(x_2) : x_1 + x_2 = x\}$ . Suponha custos de produção convexos. Então,  $\{x_1, x_2\}$  será escolhido tal que  $c'_1(x_1) = c'_2(x - x_1)$ . Então,  $c'_M(x) \in (c'_1(\hat{x}_1), c'_2(\hat{x}_2))$ , em que  $x = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$ .

Se o preço pós-fusão cair, a ausência de outras considerações aumenta o excedente do consumidor e, portanto, não deve ser bloqueado.

### **Condições suficientes para uma fusão aumentar o excedente do consumidor**

Suponha que a fusão aumente o preço. Em que condições, no entanto, aumenta também o excedente agregado?

Suponha que as empresas do conjunto  $I$  contemplam a fusão e seja  $X_I = \sum_{i \in I} x_i$ .

Resumo da abordagem:

- Em geral, uma fusão altera a produção de todas as empresas em equilíbrio.
- Os consumidores se preocupam apenas com o efeito líquido na produção agregada  $\Delta X$ .

- Ao examinar os efeitos de bem-estar de uma fusão, podemos tratar  $\Delta X_I$  como exógeno e perguntar qual é o seu efeito nos lucros das outras empresas e no excedente do consumidor (denote isso por  $E$ ).
- Vamos decompor  $\Delta X_I$  na integral dos efeitos das mudanças infinitesimais  $dX_I$  que compõem  $\Delta X_I$ .

Considere o efeito de uma pequena redução no produto  $X_I$ , digamos  $dX_I < 0$  e a redução que acompanha o produto agregado  $dX < 0$ . Se o preço aumentar, a produção agregada deve diminuir e, como  $R_i \in (-1, 0)$ , deve ser a produção das empresas que estão em fusão. Seja  $dx_i$  e  $dp$  as mudanças correspondentes na produção da empresa  $i$  (para  $i \neq I$ ) e no preço.

Suponha que a fusão proposta seja rentável para as empresas que se fundem. Derivaremos uma condição favorável para que a fusão aumente o excedente agregado, com base na externalidade da fusão para os não participantes.

O bem-estar dos não participantes é dado por

$$E = \int_{P(X)}^{\infty} x(s)ds + \sum_{i \neq I} [x_i P(X) - c_i(x_i)], \quad (9.6.115)$$

em que  $\int_{P(X)}^{\infty} x(s)ds$  é o bem-estar do consumidor e  $\sum_{i \neq I} [x_i P(X) - c_i(x_i)]$  é o lucro das firmas que não se fundiram.

Se uma fusão (lucrativa em particular) aumenta  $E$ , também aumenta o excedente agregado. Uma fusão reduz a produção geral do mercado:  $dX = dX_I + \sum_{i \neq I} dx_i < 0$ . Qual é o efeito de uma pequena alteração em  $X$  para  $E$ ? Diferenciamos a expressão acima<sup>3</sup>:

$$dE = -\hat{X}P'(\hat{X})dX + \sum_{i \neq I} \hat{x}_i P'(\hat{X})dX + \sum_{i \neq I} [P(\hat{X}) - c'_i(\hat{x}_i)] dx_i. \quad (9.6.116)$$

- Primeiro termo: perda de bem-estar dos consumidores
- Segundo termo: ganho de bem-estar das empresas não incorporadas devido ao aumento de preços
- Terceiro termo: mudança nos lucros das empresas que não se fundiram devido à reorganização da produção

Lembre-se de que a condição de primeira ordem de cada empresa satisfaz  $\hat{x}_i P'(\hat{X}) + P(\hat{X}) - c'_i(\hat{x}_i) = 0$ . Usando essa igualdade e o fato de que  $\hat{X} = \hat{X}_I + \sum_{i \neq I} \hat{x}_i$ , podemos escrever

---

<sup>3</sup> Utilizamos o teorema fundamental do cálculo e encontramos  $\frac{d}{dx} \left[ \int_{a(x)}^{b(x)} f(x)dx \right] = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$ .

$$\begin{aligned}
dE &= -\widehat{X}P'(\widehat{X})dX + \sum_{i \neq I} \widehat{x}_i P'(\widehat{X})dX + \sum_{i \neq I} [P(\widehat{X}) - c'_i(\widehat{x}_i)] dx_i \\
&= -\left[\widehat{X}_I + \sum_{i \neq I} \widehat{x}_i\right] P'(\widehat{X})dX + \sum_{i \neq I} \widehat{x}_i P'(\widehat{X})dX + \sum_{i \neq I} [P(\widehat{X}) - c'_i(\widehat{x}_i)] dx_i \\
&= -\widehat{X}_I P'(\widehat{X})dX - \sum_{i \neq I} \widehat{x}_i P'(\widehat{X})dX + \sum_{i \neq I} \widehat{x}_i P'(\widehat{X})dX + \sum_{i \neq I} [P(\widehat{X}) - c'_i(\widehat{x}_i)] dx_i \\
&= -\widehat{X}_I P'(\widehat{X})dX + \sum_{i \neq I} [P(\widehat{X}) - c'_i(\widehat{x}_i)] dx_i \\
&= P'(\widehat{X})dX \left( \sum_{i \neq I} \lambda_i \widehat{x}_i - \widehat{X}_I \right) \left[ \text{usando } \widehat{x}_i P'(\widehat{X}) + P(\widehat{X}) - c'_i(\widehat{x}_i) = 0 \right] \\
&= P'(\widehat{X}) \widehat{X} dX \left( \sum_{i \neq I} \lambda_i s - s_I \right), \tag{9.6.117}
\end{aligned}$$

em que  $s_i$  é o *market-share* pré-fusão (isto é,  $s_i = \frac{\widehat{x}_i}{\widehat{X}}$ ) e  $\lambda_i = -\frac{dx_i}{dX} > 0$ .

Considere uma redução infinitesimal em  $X_I$  por um subconjunto de firmas pós-fusão. Então o bem-estar líquido afeta as empresas de fora (isto é,  $i \notin I$ ) e os consumidores  $dE \geq 0$  se e somente se  $s_I \leq \sum_{i \in I} \lambda_i s_i$ . Interpretação: uma fusão “infinitesimal” só aumenta o bem-estar se as firmas em fusão tiverem uma fatia de mercado muito pequena.

Uma redução em  $X_I$  aumenta os lucros das empresas que não se fundem e diminui o bem-estar do consumidor. Se as empresas que não se incorporaram não responderam à redução de  $X_I$ , então  $\lambda_i = 0$ , e o efeito externo da fusão seria negativo (ou seja, os rivais se beneficiariam, mas os consumidores perderiam mais). Muitas fusões que reduzem a produção beneficiam mais as empresas que não se fundem do que prejudicam os consumidores.

Vamos extrapolar esse resultado para mostrar que  $\Delta E > 0$ , isto é,

$$\Delta E = \int_{x_I^{inicial}}^{x_I^{final}} \frac{dE}{dX_I} dX_I = \int_{x_I^{final}}^{x_I^{inicial}} \left( \sum_{i \neq I} \lambda_i \widehat{x}_i - \widehat{X}_I \right) [-P'(\widehat{X})] \frac{dX}{dX_I} dX_I \geq 0. \tag{9.6.118}$$

Suponha que a participação de mercado inicial (conjunta)  $s_I \leq \sum_{i \neq I} \lambda_i s_i$  e que  $[P'', P''', c''_i] \geq 0$  e  $c'''_i \leq 0$ . Então, se a fusão for lucrativa e aumentar o preço de mercado, também aumentaria o bem-estar agregado.

### Salário Eficiência

Assume-se que as firmas são competitivas. O problema de otimização é dado por:

$$\max \pi = Y - \omega L \quad (9.6.119)$$

A função de produção é dada por:

$$Y = F(eL), F'(\cdot) > 0, F''(\cdot) < 0 \quad (9.6.120)$$

em que “ $e$ ” é o esforço do trabalhador e  $L$  é a oferta de mão de obra (assume-se que seja inelástica).

Define-se que o esforço depende do salário do trabalhador, isto é,

$$e = e(\omega), e'(\cdot) > 0 \quad (9.6.121)$$

Reescrevendo o problema da firma representativa temos:

$$\max_{L,\omega} \pi = F(e(\omega)L) - \omega L \quad (9.6.122)$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0 \iff F'(e(\omega)L)e(\omega) - L = 0 \iff F'(e(\omega)L) = \frac{\omega}{e(\omega)} \quad (9.6.123)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \omega} = 0 \iff F'(e(\omega)L)e'(\omega) - L = 0 \quad (9.6.124)$$

Substituindo (9.6.123) em (9.6.124) e dividindo por  $L$  temos:

$$\frac{\omega}{e(\omega)} \cdot e'(\omega) \frac{L}{L} - \frac{L}{L} = 0 \implies \omega \frac{e'(\omega)}{e(\omega)} = 1 \quad (9.6.125)$$

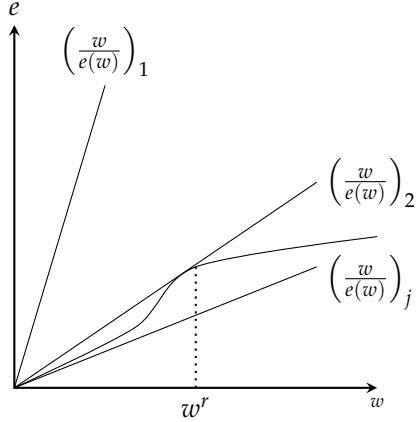
em que  $\omega \frac{e'(\omega)}{e(\omega)}$  é a elasticidade-salário do esforço e  $PMg(eL) = CMg$ .

Veja que  $\frac{\omega}{e(\omega)}$  representa o custo unitário do trabalho-efetivo. A firma tenta minimizar o custo unitário do trabalho-efetivo e obedecer à restrição (9.6.125): esse é o **salário-eficiência**.

Seja  $\bar{L}$  a oferta de trabalho e  $L = NL^*$  a demanda por trabalho. Assim,

- se  $\bar{L} > NL^*$  é possível implementar  $\omega^*$  e o desemprego é  $\bar{L} - NL^* > 0$ .
- se  $\bar{L} < NL^*$  é possível implementar  $\omega^*$  e  $NL^* = \bar{L}$ . Portanto, o desemprego é  $\bar{L} - NL^* = 0$ .

Defina



$$e = e(\underbrace{\omega}_{+}, \underbrace{\omega_a}_{-}, \underbrace{u}_{+}) \quad (9.6.126)$$

em que  $\underbrace{\omega_a}_{-}$  é o salário das outras firmas.

Novamente, o problema de maximização torna-se:

$$\max_{L, \omega} \pi = F(e(\omega, \omega_a, u)L) - \omega L \quad (9.6.127)$$

As condições de primeira ordem implicam que:

$$\omega \frac{e'(\omega, \omega_a, u)}{e(\omega, \omega_a, u)} = 1 \quad (9.6.128)$$

No equilíbrio, temos que  $\omega^* = \omega_a$ .

- Se  $\bar{L} < NL^*$  é possível implementar  $\omega^*$ . Assim, o desemprego é  $\bar{L} - NL^* > 0$ .
- Se  $\bar{L} > NL^*$  o mercado aceita aumentos de salário.

O esforço do trabalhador "e" é definido como segue:

$$e = \begin{cases} \left( \frac{\omega - x}{x} \right)^\beta, & \text{se } \omega > x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (9.6.129)$$

em que  $x$  é o índice de oportunidade no mercado de trabalho e  $\beta \in (0, 1)$ . Considere que  $x = (1 - bu)\omega_a$ , em que  $b > 0$ . Há três possibilidades:

- Se  $b = 1$ ,  $x = (1 - u)\omega_a$ .
- Se  $b < 1$ ,  $u$  tem pouco impacto na definição de esforço.
- Se  $b > 1$ ,  $u$  é muito importante na definição de esforço.

Substituindo esta forma funcional para “ $e$ ” no problema de otimização e derivando temos:

$$\omega \frac{\left( \beta \left( \frac{\omega - x}{x} \right)^{\beta-1} \frac{1}{x} \right)}{\left( \left( \frac{\omega - x}{x} \right)^\beta \right)} = 1 \quad (9.6.130)$$

Disto decorre que:

$$\omega = \frac{x}{1 - \beta} \text{ ou } \omega = \left( \frac{1 - bu}{1 - \beta} \right) \omega_a \quad (9.6.131)$$

No equilíbrio  $\omega^* = \omega_a$ . Então,

$$\begin{aligned} (1 - \beta) &= (1 - bu) \\ u^* &= \frac{\beta}{b} \end{aligned} \quad (9.6.132)$$

Se  $\beta \rightarrow 0$  observe que  $\frac{1}{1 - \beta} \sim 1 + \beta$ . Substituindo (9.6.131) na equação de esforço e usando o fato de que  $\beta \rightarrow 0$ , temos:

$$e^* = \left[ \frac{\omega_a - (1 - bu^*)\omega_a}{(1 - bu^*)\omega_a} \right]^\beta = \left[ \frac{1 - (1 - \beta)}{1 - \beta} \right]^\beta = \left( \frac{\beta}{1 - \beta} \right)^\beta \quad (9.6.133)$$

Lembre-se que no equilíbrio o salário  $\omega^*$  exige:

$$\begin{aligned} F'(eL) &= \frac{\omega}{e} \\ \omega^* &= eF'(eL) \\ N^* &= (1 - u^*)\bar{L} \end{aligned}$$

Note que  $u^* = f(\beta, b)$ , i.e., a função de produção não é relevante para determinar  $u^*$ . Assim, as firmas têm pouco incentivo para ajustar preços e salários à mudanças no  $u^*$  agregado.

### Precificação Homogênea

O objetivo da empresa é maximizar o lucro. No entanto, o preço que o monopolista cobra afeta a quantidade que vende. A relação entre a quantidade vendida e o preço cobrado é regida

pela curva de demanda (agregada),  $q(p)$ . Note, para focar na relação entre  $q$  e  $p$ , suprimimos os argumentos de riqueza na função de demanda agregada.

Podemos assim afirmar o problema do monopolista da seguinte forma:

$$\max_q pq(p) - c(q(p)). \quad (9.6.134)$$

Note, no entanto, que existe uma correspondência de um para um entre o preço cobrado e a quantidade que o monopolista vende. Assim, podemos reescrever o problema em termos de quantidade vendida, em vez do preço cobrado. Seja  $p(q)$  a função de demanda inversa. Ou seja,  $p(q(p)) = p$ . O problema de maximização do lucro da empresa pode então ser escrito como

$$\max_q p(q)q - c(q). \quad (9.6.135)$$

Acontece que normalmente é mais fácil olhar para o problema em termos de definir a quantidade e deixar que o preço seja determinado pelo mercado. Por esse motivo, usaremos a abordagem de definição de quantidade.

Para que a solução seja única, precisamos que a função objetivo seja estritamente côncava, ou seja,  $\frac{d^2}{dq^2} < 0$ . Temos que

$$\frac{d}{dq} = 0 \iff p(q) + qp'(q) - c'(q). \quad (9.6.136)$$

A segunda derivada do lucro em relação a  $q$  é dada por

$$\frac{d^2}{dq^2} = p''(q)q + 2p'(q) - c''(q). \quad (9.6.137)$$

Se o custo é estritamente convexo, temos  $c''(q) > 0$ . Como a demanda se inclina para baixo,  $p'(q) < 0$ . Portanto, o segundo e terceiro termos são negativos. Por causa disso, não precisamos que a demanda inversa seja côncava. No entanto, não pode ser “muito convexo”. De modo geral, vamos supor que a função objetivo é côncava sem fazer suposições adicionais sobre  $p(\cdot)$ . Na verdade, para garantir que a quantidade maximizadora seja finita, precisamos assumir que, eventualmente, os custos se tornam grandes o suficiente em relação à demanda. Isso sempre será satisfeito se, por exemplo, as curvas de demanda e de custo marginal se cruzam.

A função objetivo é maximizada observando a primeira derivada. Na quantidade ideal,  $q^*$ , encontramos:

$$p'(q^*)q^* + p(q^*) = c'(q^*). \quad (9.6.138)$$

No lado esquerdo da expressão está a receita marginal do aumento da produção. Esse aumento tem duas partes – a receita adicional devido à venda de mais uma unidade,  $p(q^*)$  (área  $B$  na Figura 9.6.6), e a diminuição da receita devido ao fato de a empresa receber um preço mais baixo em todas as unidades que vende (área  $A$  na Figura 9.6.6). Assim, a quantidade ótima do monopolista é onde a receita marginal é igual ao custo marginal, e o preço é definido pela curva de demanda  $p(q^*)$ <sup>4</sup>. Ver Figura 9.6.7 para uma descrição gráfica do ótimo.

FIGURA 9.6.6 – RECEITA MARGINAL DO MONOPOLISTA

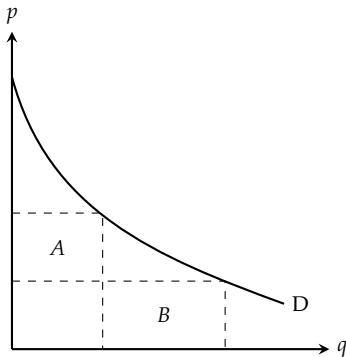
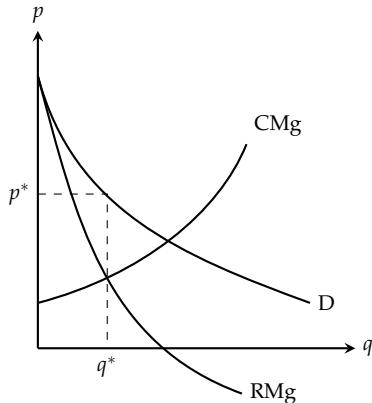


FIGURA 9.6.7 – PREÇO E QUANTIDADE ÓTIMA DO MONOPOLISTA

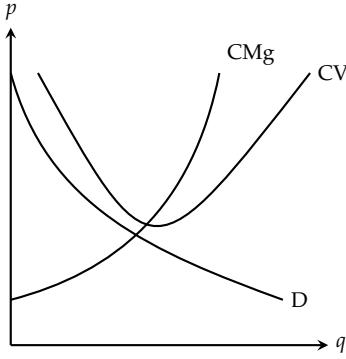


Se o lucro do monopolista é maximizado em  $q = 0$ , devemos ter  $p(0) \leq c'(0)$ . Isso corresponde ao caso em que o custo de produzir até mesmo a primeira unidade é maior do que o que os consumidores estão dispostos a pagar. Geralmente, assumimos que  $p(0) > c'(0)$  para focarmos no caso interessante em que o monopolista deseja produzir uma quantidade positiva de produto. No entanto, mesmo se assumirmos que  $p(0) > c'(0)$ , o monopolista pode não querer escolher um nível de produto positivo. Pode ser que “fechar” ainda seja preferível a produzir um produto positivo. Ou seja, o monopolista pode ter custos fixos tão grandes que preferiria sair do setor. Tal situação é ilustrada na Figura 9.6.8. Assim, interpretamos a condição  $p(0) > c'(0)$

<sup>4</sup> Isso também é verdade para a empresa competitiva. No entanto, como as empresas competitivas são tomadoras de preço, sua receita marginal é igual ao preço.

(juntamente com as condições de segunda ordem apropriadas) dizendo que, se o monopolista não sair da indústria, produzirá uma quantidade positiva de produto.

FIGURA 9.6.8 – CASO EM QUE O MONOPOLISTA NÃO APRESENTA LUCRO



Se houver um máximo em um nível positivo de produto, deve ser tal que a primeira derivada seja igual a zero ou:

$$p'(q^*)q^* + p(q^*) = c'(q^*). \quad (9.6.139)$$

Note que podemos reescrever o lado esquerdo da equação acima como:

$$p'(q^*)q^* + p(q^*) = p(q^*) \left( \frac{dp(q^*)}{dq^*} \frac{q^*}{p(q^*)} + 1 \right) = p(q^*) \left( 1 - \frac{1}{|\varepsilon_p^*|} \right), \quad (9.6.140)$$

em que  $\varepsilon_p^*$  é a elasticidade-preço da demanda avaliada em  $(q^*, p^*)$ . Agora podemos reescrever a condição de primeira ordem do monopolista como:

$$\frac{p(q^*) - c'(q^*)}{p(q^*)} = p'(q^*) \frac{-q^*}{p(q^*)} = \frac{1}{|\varepsilon_p^*|}. \quad (9.6.141)$$

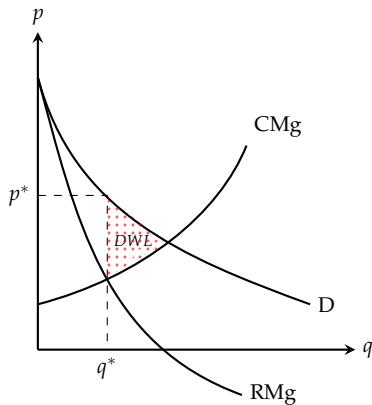
A quantia  $\frac{p(q^*) - c'(q^*)}{p(q^*)}$  é o *markup* do preço sobre o custo marginal e é expressa como uma fração do preço. Essa quantidade, chamada de índice de Lerner, é frequentemente usada para medir o grau de poder de mercado em uma indústria.

Note que na quantidade onde  $RMg = CMg$ , temos  $p > CMg$  (já que  $p'(q)q$  é negativo). Assim, o monopolista cobra mais do que o custo marginal<sup>15</sup>. O ideal social seria o monopolista vender desde que os consumidores estejam dispostos a pagar mais pela última unidade produzida do que o custo para produzi-la. Ou seja, produzir até o ponto em que  $p = CMg$ . Mas, o monopolista reduz a produção porque se preocupa com o lucro, não com a otimização social. E está disposto a

<sup>5</sup> Além disso, a partir dessas duas equações, podemos mostrar que o monopolista sempre escolherá uma quantidade tal que o preço seja elástico, ou seja,  $|\varepsilon_p^*| > 1$ .

reduzir  $q$  para aumentar o lucro. Isso resulta no que é conhecido como peso morto do monopólio, e é igual à área entre a curva de demanda e a curva de custo marginal, e à direita da quantidade ótima, como na Figura 9.6.9. Esta área representa o excedente social que pode ser gerado, mas não está no resultado do monopólio.

FIGURA 9.6.9 – PESO MORTO DO MONOPOLISTA



Assim, o preço cobrado pelo monopolista será:

$$p(q^*) = c'(q^*) \left( \frac{|\varepsilon_p^*|}{|\varepsilon_p^*| - 1} \right). \quad (9.6.142)$$

### Discriminação de Preços de Primeiro Grau

Discriminação de preço de primeiro grau, ou discriminação de preço perfeita, significa que o vendedor vende cada unidade do bem ao preço máximo que alguém está disposto a pagar por aquela unidade do bem. Alternativamente, a discriminação perfeita de preços é às vezes definida como ocorrendo quando o vendedor faz uma única oferta a cada consumidor que extraí o máximo possível do mercado.

Embora a equivalência dessas duas definições tenha sido afirmada há muito tempo - Pigou a menciona em sua discussão sobre a discriminação de preço em primeiro grau - não está inteiramente claro como geralmente as duas definições coincidem. A equivalência é verdadeira apenas no caso da utilidade quase-linear, ou ela é verdadeira de maneira mais geral? A proposição, como veremos, é válida em circunstâncias bastante gerais.

Para ver isso, considere um modelo simples com dois bens,  $x$  e  $y$ , e um único consumidor. Nós escolhemos  $y$  como o bem numerário, e normalizamos seu preço para 1. O consumidor está consumindo inicialmente 0 unidades do bem  $x$ , e o monopolista deseja vender  $x^*$  unidades para a maior quantidade possível do bem  $y$ . Seja  $y^*$  a quantidade do bem  $y$  que o consumidor tem após efetuar esse pagamento; então  $y^*$  é a solução para a equação

$$u(x^*, y^*) = u(0, y), \quad (9.6.143)$$

e o pagamento é simplesmente  $y - y^*$ . Esta é claramente a maior quantidade possível do bem  $x$  que o consumidor pagaria em uma base de *take-it* ou *leave-it* para consumir  $x^*$  unidades do bem  $x$ .

Suponha, em vez disso, que o monopolista divida  $x^*$  em  $n$  partes de tamanho  $\Delta x$  e venda cada parte ao consumidor ao preço máximo que o consumidor estaria disposto a pagar por essa unidade. Seja  $(x_i, y_i)$  a quantidade que o consumidor tem no estágio  $i$  deste processo, de modo que  $y_{i-1} - y_i$  é o valor pago pela unidade  $i$  do bem  $x$ . Como a utilidade permanece constante durante este processo, temos:

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) - u(0, y) &= 0, \\ u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1) &= 0, \\ &\vdots \\ u(x^*, y_n) - u(x_{n-1}, y_{n-1}) &= 0. \end{aligned} \quad (9.6.144)$$

Queremos mostrar que  $y_n$ , o montante total detido do bem  $y$  depois de concluído este processo, é igual a  $y^*$ , o montante pago pela oferta *take-or-leave-it* descrita acima.

Mas isso é fácil. Basta somar as equações em (9.6.144) para encontrar

$$u(x^*, y_n) - u(0, y) = 0. \quad (9.6.145)$$

Examinando (9.6.143), vemos que  $y_n = y^*$ , como deveria ser mostrado.

É bem sabido que um monopolista perfeitamente discriminador produz uma quantidade Pareto eficiente de produto. Seja  $u(x, y)$  a função de utilidade do consumidor, como antes, e por simplicidade suponha que o monopolista se preocupa apenas com o consumo do bem  $y$ . O monopolista é dotado de uma tecnologia que lhe permite produzir  $x$  unidades do bem  $x$  usando  $c(x)$  unidades do bem  $y$ . A dotação inicial do consumidor é denotada por  $(x_c, y_c)$  e, por suposição, o monopolista tem uma dotação inicial de zero de cada bem.

O monopolista quer escolher um nível de produção (positivo)  $x_c$  e um pagamento (negativo) do bem  $y$  que maximize sua utilidade sujeita à restrição de que o consumidor realmente compra o bem  $x$  do monopolista. Assim, o problema de maximização se torna:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} & y - c(x) \\ \text{sujeito a } & u(x_c + x, y_c - y) \geq u(x_c, y_c). \end{aligned} \quad (9.6.146)$$

Mas esse problema simplesmente nos pede para encontrar uma alocação viável que maximize

a utilidade de uma parte, o monopolista, sujeita à restrição de que a outra parte, o consumidor, tenha algum nível de utilidade. Esta é a definição de uma alocação eficiente de Pareto. Portanto, um monopolista perfeitamente discriminador escolherá um nível de produção Pareto-eficiente.

Pelo Segundo Teorema do Bem-Estar e pelas condições apropriadas de convexidade, esse nível de produção eficiente em Pareto é um equilíbrio competitivo para algumas dotações. Para ver isso diretamente, denote a solução para o problema de maximização do monopolista por  $(x^*, y^*)$ . Esta solução deve satisfazer as condições de primeira ordem:

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \iff 1 - \lambda \frac{\partial u(x_c + x^*, y_c - y^*)}{\partial y} = 0, \quad (9.6.147)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0 \iff -c'(x^*) + \lambda \frac{\partial u(x_c + x^*, y_c - y^*)}{\partial x} = 0 \quad (9.6.148)$$

Dividindo a segunda equação pela primeira e rearranjando, temos:

$$\frac{\frac{\partial u(x_c + x^*, y_c - y^*)}{\partial x}}{\frac{\partial u(x_c + x^*, y_c - y^*)}{\partial y}} = c'(x^*). \quad (9.6.149)$$

Se o consumidor tem uma dotação de  $(x_c + x^*, y_c - y^*)$  e a firma se defronta com um preço determinado por  $p^* = \frac{\frac{\partial u(x_c + x^*, y_c - y^*)}{\partial x}}{\frac{\partial u(x_c + x^*, y_c - y^*)}{\partial y}}$ , então o problema de maximização da firma se torna:

$$\max_x p^* x - c(x). \quad (9.6.150)$$

Nesse caso, fica claro que a empresa escolherá otimamente produzir  $x^*$  unidades de produto, conforme necessário.

É claro que a prova de que o nível de produção de um monopolista perfeitamente discriminatório é o mesmo que o de uma firma competitiva só é válida se a realocação adequada das dotações iniciais for feita. No entanto, se estivermos dispostos a descartar os efeitos de renda, essa advertência poderá ser eliminada.

Para ver isso, vamos supor agora que a função de utilidade para o consumidor assume a forma quase-linear  $u(x) + y$ . Neste caso  $\frac{\partial u}{\partial y} = 1$ , então as condições de primeira ordem se reduzem a

$$\frac{\partial u(x_c + x^*)}{\partial x} = c'(x^*). \quad (9.6.151)$$

Isso mostra que o nível de produção eficiente de Pareto produzido pelo monopolista perfeitamente discriminativo é independente da dotação de  $y$ , que é o que exigimos. Claramente, a

quantidade do bem  $x$  produzida é a mesma que a de uma empresa competitiva que enfrenta um preço dado por  $p^* = \frac{\partial u(x_c + x^*)}{\partial x}$ .

As ofertas de “pegar ou largar” não são formas muito comuns de negociação por dois motivos. Em primeiro lugar, a ameaça “*leave-it*” carece de credibilidade: normalmente, um vendedor não tem como se comprometer a romper as negociações se uma oferta for rejeitada. E uma vez que uma oferta inicial tenha sido rejeitada, é geralmente racional que o vendedor continue negociando.

Em segundo lugar, mesmo que o vendedor tenha uma maneira de se comprometer com o fim das negociações, ele normalmente não tem informações completas sobre as preferências dos compradores. Assim, o vendedor não pode determinar com certeza se sua oferta será realmente aceita e deve negociar os custos da rejeição com os benefícios de lucros adicionais.

Se o vendedor fosse capaz de antecipar o *take-it-or-leave-it*, e tivesse informações perfeitas sobre as preferências dos compradores, seria de se esperar que as transações fossem feitas de acordo com esse mecanismo. Afinal, ele oferece ao vendedor o maior lucro possível.

No entanto, vestígios da tentativa de discriminação de preços em primeiro grau ainda podem ser detectados em alguns acordos de marketing. Alguns tipos de mercadorias - desde aeronaves, por um lado, a refrigeradores e aparelhos de som, por outro - ainda são vendidos por pechinchar. Certamente isso deve ser devido a uma tentativa de discriminação de preços entre os clientes em potencial.

Na medida em que essa negociação é bem-sucedida na extração do excedente total dos consumidores, ela tende a estimular a produção de uma quantidade eficiente de produto. Uma análise completa do bem-estar das tentativas de se envolver nesse tipo de discriminação de preços não pode negligenciar os custos de transação envolvidos na própria negociação.

### Discriminação de Preços de Segundo Grau

A discriminação de preço de segundo grau, ou discriminação de preço não-linear, ocorre quando os indivíduos enfrentam esquemas de preços não-lineares, ou seja, o preço pago depende da quantidade comprada. O exemplo padrão dessa forma de discriminação de preços são os descontos por quantidade.

Curiosamente, a determinação de preços ótimos não lineares não foi cuidadosamente examinada até Spence (1976). Desde então, tem havido uma série de contribuições nesta área; veja a pesquisa bibliográfica em Brown e Sibley (1986). Grande parte de seu trabalho usa técnicas originalmente desenvolvidas por Mirrlees (1971, 1976), Roberts (1979) e outros, com o propósito de analisar problemas na tributação ótima. Grande parte do trabalho descrito por Brown e Sibley é motivado pelo preço dos serviços públicos. Vamos seguir a excelente discussão em Tirole (1988), que por sua vez é baseada em Maskin e Riley (1984). No entanto, conduzimos a derivação principal usando uma estrutura de utilidade geral e recorremos ao caso especial considerado por esses autores apenas quando necessário.

É útil começar considerando uma situação em que existem apenas dois tipos de consumidores, uma fração  $f_1$  do tipo  $t_1$  e uma fração  $f_2$  do tipo  $t_2$ . O monopolista quer vender  $x_1$  para os consumidores tipo  $t_1$  e  $x_2$  para os consumidores tipo  $t_2$ , recebendo os pagamentos totais de  $r_1$  e  $r_2$  de cada tipo.

As funções de utilidade dos consumidores são da forma quase-linear  $u(x_i, t_i) + y_i$  em que  $y_i$  é o consumo do bem numerário. Por conveniência, consideramos a dotação do numerário como zero. Também assumimos que  $u(x, t_2) > u(x, t_1)$  e que  $\frac{\partial u(x, t_2)}{\partial x} > \frac{\partial u(x, t_1)}{\partial x}$ . Essas premissas implicam que não apenas o consumidor 2 está disposto a pagar mais do que o consumidor 1 por um determinado montante do bem, mas também que a disposição marginal a pagar do consumidor 2 excede a do consumidor 1. Vamos nos referir ao consumidor 2 como consumidor de alta demanda e o consumidor 1 como consumidor de baixa demanda. As suposições implicam que a função de demanda para o consumidor de alta demanda é sempre mais alta do que a função de demanda para o consumidor de baixa demanda, uma propriedade às vezes conhecida como condição de não-cruzamento.

As restrições de demanda enfrentadas pelo monopolista são as seguintes. Primeiro, cada consumidor deve querer consumir a quantidade  $x_i$  e estar disposto a pagar o preço  $r_i$ , isto é, deve satisfazer as seguintes restrições de participação (ou restrição de racionalidade individual):

$$u(x_1, t_1) - r_1 \geq 0, \quad (9.6.152)$$

$$u(x_2, t_2) - r_2 \geq 0. \quad (9.6.153)$$

Isso é simplesmente definir o domínio do problema que analisaremos.

Em segundo lugar, cada consumidor deve preferir esse consumo ao consumo do outro consumidor:

$$u(x_1, t_1) - r_1 \geq u(x_2, t_1) - r_2, \quad (9.6.154)$$

$$u(x_2, t_2) - r_2 \geq u(x_1, t_2) - r_1. \quad (9.6.155)$$

Estas são as chamadas restrições de auto-seleção. Se o plano  $(x_1, x_2)$  for viável no sentido de que será voluntariamente escolhido pelos consumidores, então cada consumidor deve preferir consumir a cesta destinada a ele em comparação ao consumo da cesta da outra pessoa. Em outras palavras, essas restrições evitam a arbitragem pessoal: cada consumidor obtém um excedente tão grande quanto a escolha do pacote projetado para ele.

Nossas suposições sobre as funções de utilidade e o fato de que o monopolista quer que os preços sejam os mais altos possíveis, implicam que duas das quatro desigualdades acima indicadas serão restrições vinculantes (*binding*).

Demonstração de quais restrições são satisfeitas com igualdade.

De (9.6.152) e (9.6.154), temos que:

$$r_1 \leq u(x_1, t_1) \quad (9.6.156)$$

$$r_1 \leq u(x_1, t_1) - u(x_2, t_1) + r_2 \quad (9.6.157)$$

De (9.6.153) e (9.6.155), temos que:

$$r_2 \leq u(x_2, t_2) \quad (9.6.158)$$

$$r_2 \leq u(x_2, t_2) - u(x_1, t_2) + r_1 \quad (9.6.159)$$

O monopolista deseja maximizar os lucros e, portanto, escolherá os valores mais alto possíveis de  $r_1$  e  $r_2$ . Como consequência, apenas uma das duas primeiras desigualdades será vinculativa (ou seja, ela será satisfeita com a igualdade). O mesmo vale para o segundo par de desigualdades. A suposição de que o consumidor 2 é o consumidor de alta demanda e o consumidor 1 é o consumidor de baixa demanda ( $u(x_2, t_2) > u(x_1, t_1) \forall x$  e  $u'(x_2, t_2) > u'(x_1, t_1) \forall x$ ) é suficiente para determinar quais restrições são *binding*.

Suponha que (9.6.158) é satisfeita com a igualdade e, portanto,  $r_2 = u(x_2, t_2)$ . Então  $r_2 \leq r_2 - u(x_1, t_2) + r_1 \implies r_1 \geq u(x_1, t_2)$ . Dado que o consumidor 2 é o consumidor de alta demanda  $u_2(x_2, t_2) > u_1(x_1, t_1) \forall x$ . Ou seja,  $r_1 \geq u(x_1, t_2) > u_1(x_1, t_1)$ , o que significa que a restrição (9.6.156) não seria *binding*, o que é uma contradição. O fato de a restrição de participação do consumidor de alta demanda estar satisfeita com a igualdade não é compatível com o fato de o consumidor de baixa demanda comprar o bem. Como conclusão, (9.6.156) não é *binding* e (9.6.157) é satisfeita com a igualdade

$$r_2 = u(x_2, t_2) - u(x_1, t_2) + r_1 \quad (9.6.160)$$

Especificamente, o consumidor de baixa demanda será cobrado por sua disposição máxima a pagar, e o consumidor de alta demanda será cobrado pelo preço mais alto que apenas o induzirá a consumir  $x_2$  em vez de  $x_1$ .

Suponha que a condição (9.6.157) seja satisfeita com a igualdade e, portanto, que  $r_1 = u(x_1, t_1) - u(x_2, t_1) + r_2$ . Ao substituir  $r_2$  da condição (9.6.160), obtemos:

$$r_1 = u(x_1, t_1) - u(x_2, t_1) + u(x_2, t_2) - u(x_1, t_2) + r_1 \quad (9.6.161)$$

o que implica que

$$\begin{aligned} u(x_2, t_2) - u(x_1, t_2) &= u(x_2, t_1) - u(x_1, t_1) \\ \int_{x_1}^{x_2} u'(t_2) dt_2 &= \int_{x_1}^{x_2} u'(t_1) dt_1 \end{aligned} \quad (9.6.162)$$

Mas isso contradiz a suposição de que o consumidor 2 é o consumidor de alta demanda,  $u'(t_2) > u'(t_1) \forall x$ . Portanto, (9.6.157) não é *binding* e (9.6.156) é satisfeita com a igualdade.

Assim,

$$r_1 = u(x_1, t_1), \quad (9.6.163)$$

$$r_2 = u(x_2, t_2) - u(x_1, t_2) + u(x_1, t_1). \quad (9.6.164)$$

O monopolista cobra do consumidor 1 uma tarifa igual à sua disposição máxima a pagar, uma vez que o consumidor de baixa demanda não tem incentivo para se envolver em arbitragem pessoal. Dado que o consumidor de alta demanda tem incentivo para se envolver em arbitragem pessoal (e imitar o consumidor de baixa demanda), o monopolista cobra o preço máximo que o induz a escolher o pacote projetado para ele (a quantidade de dinheiro que o deixa indiferente entre a sua cesta e a que foi designada para o consumidor de baixa demanda).

O problema do monopolista era

$$\begin{aligned} \max_{r_1, x_1, r_2, x_2} \pi &= [r_1 - cx_1]f_1 + [r_2 - cx_2]f_2 \\ \text{sujeito a } &u(x_1, t_1) - r_1 \geq 0 \\ &u(x_2, t_2) - r_2 \geq 0 \\ &u(x_1, t_1) - r_1 \geq u(x_2, t_1) - r_2 \\ &u(x_2, t_2) - r_2 \geq u(x_1, t_2) - r_1 \end{aligned} \quad (9.6.165)$$

e com as novas restrições (*binding*) se torna:

$$\max_{x_1, x_2} \pi = [r_1 - cx_1]f_1 + [r_2 - cx_2]f_2 \quad (9.6.166)$$

$$= [u(x_1, t_1) - cx_1]f_1 + [u(x_2, t_2) - u(x_1, t_2) + u(x_1, t_1) - cx_2]f_2. \quad (9.6.167)$$

Esta expressão deve ser maximizada em relação a  $x_1$  e  $x_2$ . Diferenciando, nós temos

$$\left[ \frac{\partial u(x_1, t_1)}{\partial x_1} - c \right] f_1 + \left[ \frac{\partial u(x_1, t_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x_1, t_2)}{\partial x_1} \right] f_2 = 0, \quad (9.6.168)$$

$$\frac{\partial u(x_2, t_2)}{\partial x_2} - c = 0. \quad (9.6.169)$$

em que  $\left( \frac{\partial u(x_1, t_1)}{\partial x_1} - c \right)$  é o lucro marginal oriundo do consumidor 1: uma mudança na quantidade fornecida a esse consumidor implica uma mudança no lucro obtido pelo monopolista e  $\left( \frac{\partial u(x_1, t_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x_1, t_2)}{\partial x_1} \right)$  é o lucro marginal oriundo do consumidor 2: uma mudança na quantidade fornecida ao consumidor 1 implica uma mudança no excedente que o monopolista deve deixar ao consumidor 2 para evitar arbitragem pessoal.

A equação (9.6.168) pode ser rearranjada para nos dar:

$$\frac{\partial u(x_1, t_1)}{\partial x_1} = c - \left[ \frac{\partial u(x_1, t_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x_1, t_2)}{\partial x_1} \right] \frac{f_2}{f_1}, \quad (9.6.170)$$

o que significa que o consumidor de baixa demanda tem um valor (marginal) para o bem que excede o custo marginal. Assim, ele consome uma quantidade inefficientemente pequena do bem. A equação (9.6.169) diz que aos preços não lineares ideais, o consumidor de alta demanda tem uma disposição a pagar marginal que é igual ao custo marginal. Assim, ele consome a quantidade socialmente correta, ou seja,  $P = CMg$  e, portanto, é a solução de concorrência perfeita.

O resultado de que o consumidor com a maior demanda enfrenta um preço marginal igual ao custo marginal é muito geral. Se o consumidor com maior demanda enfrentasse um preço marginal superior ao custo marginal, o monopolista poderia reduzir o preço marginal cobrado ao maior consumidor em uma pequena quantia, induzindo-o a comprar mais. Como o preço marginal ainda excede o custo marginal, o monopolista teria lucro com essas vendas. Além disso, tal política não afetaria os lucros do monopolista de nenhum outro consumidor, já que todos eles são otimizados com valores de consumo mais baixos. Para obter resultados mais explícitos sobre o esquema ótimo de preços, é necessário fazer suposições mais explícitas sobre os gostos. Por exemplo, é comum observar descontos de preços em certos tipos de mercadorias - consumidores de alta demanda pagam um custo por unidade menor do que os consumidores de baixa demanda. Maskin e Riley (1984) mostram que se as preferências tomam a forma específica  $u(x, t) + y = tv(x) + y$ , então a política de preços ótima exibirá descontos por quantidade.

Observe que podemos reescrever o lucro marginal associado ao consumidor do tipo 1:

$$\underbrace{\left[ \frac{\partial u(x_1, t_1)}{\partial x_1} - c \right] f_1}_{>0} - \underbrace{\left[ \frac{\partial u(x_1, t_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial u(x_1, t_1)}{\partial x_1} \right] f_2}_{>0} \quad (9.6.171)$$

Se esta expressão for negativa, o monopolista teria aumento do lucro ao reduzir a quantidade vendida ao grupo do tipo 1. Dito de outra forma, o monopolista irá escolher oferecer o bem aos dois grupos de consumidores se o lucro conjunto for superior ao lucro obtido com a venda apenas para o grupo 2.

### Principais Resultados

1. O monopolista fornece ao consumidor de alta demanda a quantidade eficiente e deixa um excedente positivo. De (9.6.163) e de (9.6.164), vemos que o consumidor 2, de alta demanda, ganha do monopolista um excedente dado por  $u(x_2, t_2) - r_2 = u(x_1, t_2) - u(x_1, t_1)$ . E como  $\frac{\partial u(x_2, t_2)}{\partial x_2} - c = 0$ , a quantidade consumida é a eficiente.
2. O monopolista oferece ao consumidor de baixa demanda uma quantidade menor que a quantidade eficiente e não o deixa com excedente.

Suponha agora que há um continuum de tipos e seja  $f(t)$  a densidade de consumidores do tipo  $t$ . Por conveniência, os tipos variam de 0 a  $T$ . A função de utilidade de um consumidor do tipo  $t$  é dada por  $u(x, t) + y$ . Mais uma vez, assumimos que o aumento de  $t$  aumenta tanto a disposição como a remuneração total a pagar, o que, nesse contexto, significa que

$$\frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} > 0, \quad (9.6.172)$$

$$\frac{\partial^2 u(x(t), t)}{\partial t \partial x} > 0. \quad (9.6.173)$$

Seja  $x(t)$  o consumo ótimo de um consumidor do tipo  $t$ . As restrições de auto-seleção implicam que um consumidor do tipo  $t$  prefere seu consumo a um consumidor do tipo  $s$ , o que significa

$$u(x(t), t) - r(x(t)) \geq u(x(s), t) - r(x(s)). \quad (9.6.174)$$

Considere a função  $g(s)$  definida por:

$$g(s) = [u(x(t), t) - r(x(t))] - [u(x(s), t) - r(x(s))]. \quad (9.6.175)$$

Acabamos de ver que  $g(s) \geq 0$  e, claro,  $g(t) = 0$ . Segue que  $g(s)$  alcança seu valor mínimo quando  $s = t$ . Portanto, a derivada de  $g$  em relação a  $s$  deve ser nula em  $s = t$ , o que implica:

$$\frac{\partial u(x(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial r(x(t))}{\partial x} = 0. \quad (9.6.176)$$

Este é o análogo da restrição de auto-seleção dada acima.

Seja  $V(t)$  a utilidade maximizada de um agente do tipo  $t$ , isto é,

$$V(t) \equiv u(x(t), t) - r(x(t)). \quad (9.6.177)$$

Derivando  $V(t)$ , obtemos:

$$\begin{aligned} V'(t) &= \left( \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial x} - \frac{\partial r(x(t))}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (9.6.178)$$

Este é simplesmente o teorema do envelope – a derivada total da utilidade se reduz a derivada parcial após a substituição nas condições de primeira ordem para maximização. O monopolista quer escolher  $x(t)$  para maximizar os lucros sujeitos às restrições de auto-seleção. Os lucros são

dados por

$$\pi = \int_0^T [r(x(t)) - cx(t)]f(t)dt. \quad (9.6.179)$$

O truque é construir as restrições de auto-seleção na função objetivo de uma maneira útil. Usando (9.6.177) podemos reescrever os lucros como

$$\pi = \int_0^T [u(x(t), t) - cx(t)]f(t)dt - \int_0^T V(t)f(t)dt. \quad (9.6.180)$$

Integrando o último termo por partes, temos

$$\int_0^T V(t)f(t)dt = V(t)(F(t) - 1)|_0^T - \int_0^T V'(t)[F(t) - 1]dt. \quad (9.6.181)$$

Aqui nós usamos  $F(t) - 1$  como a integral de  $f(t)$ . A utilidade do tipo 0 é normalizada para ser 0, e  $F(T) = 1$ . Portanto, o primeiro termo do lado direito dessa expressão desaparece. Logo,

$$\int_0^T V(t)f(t)dt = - \int_0^T \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} [F(t) - 1]dt. \quad (9.6.182)$$

Substituindo isso de volta na função objetivo, a equação (9.6.180) nos dá a forma final da função lucro:

$$\pi = \int_0^T \left\{ [u(x(t), t) - cx(t)]f(t) - \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial t} [1 - F(t)] \right\} dt. \quad (9.6.183)$$

Ao longo do caminho ótimo, a derivada do integrando com respeito a cada  $x(t)$  deve desaparecer. Isso nos dá a condição de primeira ordem:

$$\left[ \frac{\partial u(x(t), t)}{\partial x} - c \right] f(t) - \frac{\partial^2 u(x(t), t)}{\partial t \partial x} [1 - F(t)] = 0. \quad (9.6.184)$$

Resolvendo para  $\frac{\partial u(x(t), t)}{\partial x}$ , obtemos:

$$\frac{\partial u(x(t), t)}{\partial x} = c + \frac{\partial^2 u(x(t), t)}{\partial t \partial x} \left( \frac{1 - F(t)}{f(t)} \right). \quad (9.6.185)$$

Como no caso de dois consumidores, todos os consumidores pagam um preço superior ao custo marginal, exceto para o consumidor com a maior disposição a pagar, o consumidor  $T$ .

**Exemplo 9.6.1.** Suponha que um monopolista se defronte com  $N$  consumidores de alta renda e  $n$  consumidores de baixa renda com as respectivas funções de demanda:

$$P_H = A - Q \quad (9.6.186)$$

$$P_L = a - Q \quad (9.6.187)$$

com  $A > a > 0$ . E o custo é igual a  $C = cQ$  com  $0 < c < a$ . Denote por  $W_H(Q)$  a disposição a pagar dos consumidores de alta renda e  $W_L(Q)$  a disposição a pagar dos consumidores de baixa renda.

Podemos calcular essas disposições como:

$$W_H(Q) = \int_0^Q P_H(x)dx = \int_0^Q (A - x)dx = Ax - \frac{x^2}{2} \Big|_0^Q = AQ - \frac{Q^2}{2} \quad (9.6.188)$$

$$W_L(Q) = \int_0^Q P_L(x)dx = \int_0^Q (a - x)dx = Ax - \frac{x^2}{2} \Big|_0^Q = aQ - \frac{Q^2}{2} \quad (9.6.189)$$

O monopolista decide vender pacotes  $(Q, V)$  consistindo de  $Q$  unidades ao preço  $P$ . Ele tem três opções:

1. Oferecer somente um pacote para os consumidores de alta renda, uma vez que  $V > W_L(Q)$  e  $V \leq W_H(Q)$ . A função objetivo do monopolista será

$$\begin{aligned} \pi_1 &= N[W_H(Q) - cQ] \\ &= N \left[ AQ - \frac{Q^2}{2} - cQ \right] \end{aligned} \quad (9.6.190)$$

A condição de primeira ordem implica que

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial Q} = 0 \iff N[A - c - Q] = 0 \implies Q_1^* = A - c \quad (9.6.191)$$

Assim

$$\begin{aligned} V_1^* &= W_H(Q_1^*) = AQ_1^* - \frac{(Q_1^*)^2}{2} \\ &= Q_1^* \left( A - \frac{A - c}{2} \right) \\ &= \frac{A^2 - c^2}{2} \end{aligned} \quad (9.6.192)$$

Logo, o lucro será:

$$\begin{aligned}\pi_1^* &= N \left[ Q_1^*(A - c) - \frac{(Q_1^*)^2}{2} \right] \\ &= N \left[ \frac{(A - c)^2}{2} \right]\end{aligned}\tag{9.6.193}$$

2. Oferecer somente um pacote para os dois grupos. Nesse caso,  $V = W_L(Q)$ . A função objetivo do monopolista será

$$\begin{aligned}\pi_2 &= (N + n)[W_L(Q) - cQ] \\ &= (N + n) \left[ aQ - \frac{Q^2}{2} - cQ \right]\end{aligned}\tag{9.6.194}$$

A condição de primeira ordem implica que

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial Q} = 0 \iff (N + n)[a - c - Q] = 0 \implies Q_2^* = a - c\tag{9.6.195}$$

Assim

$$\begin{aligned}V_2^* &= W_L(Q_2^*) = aQ_2^* - \frac{(Q_2^*)^2}{2} \\ &= Q_2^* \left( a - \frac{a - c}{2} \right) \\ &= \frac{a^2 - c^2}{2}\end{aligned}\tag{9.6.196}$$

Logo, o lucro será:

$$\begin{aligned}\pi_2^* &= (N + n) \left[ Q_2^*(a - c) - \frac{(Q_2^*)^2}{2} \right] \\ &= (N + n) \left[ \frac{(a - c)^2}{2} \right]\end{aligned}\tag{9.6.197}$$

3. Oferecer dois pacotes:  $(Q_H, V_H)$  para os consumidores de alta renda e  $(Q_L, V_L)$  para os consumidores de baixa renda.

Nesse caso, temos que as seguintes condições devem ser satisfeitas:

(a)  $V_L \leq W_L(Q_L)$ : os consumidores de baixa renda estão dispostos a comprar o "seu" pacote.

(b)  $W_L(Q_L) - V_L \geq W_L(Q_H) - V_H$ : é o incentivo de compatibilidade, ou seja, os consumidores de baixa renda não preferem o pacote dos consumidores de alta renda.

(c)  $V_H \leq W_H(Q_H)$ : os consumidores de alta renda estão dispostos a comprar o "seu" pacote.

(d)  $W_H(Q_H) - V_H \geq W_H(Q_L) - V_L$ : é o incentivo de compatibilidade, ou seja, os consumidores de alta renda não preferem o pacote dos consumidores de baixa renda.

Segue de (a) e de (d) que:

$$\begin{aligned}
 V_L - W_L(Q_L) &\leq 0 \\
 W_L(Q_L) - V_L &\geq 0 \\
 W_H(Q_L) - V_L &\geq 0 \quad [\text{usando o fato de que } W_H(Q_L) > W_L(Q_L)] \\
 W_H(Q_H) - V_H &\geq W_H(Q_L) - V_L \\
 W_H(Q_H) - V_H &> 0 \\
 W_H(Q_H) &> V_H
 \end{aligned} \tag{9.6.198}$$

Portanto, a partir do incentivo de compatibilidade para os consumidores de alta renda eles terão um excedente positivo.

Também segue das condições (a) e (d) que:

$$V_L = W_L(Q_L) \tag{9.6.199}$$

e

$$\begin{aligned}
 V_H &= W_H(Q_H) - W_H(Q_L) + W_L(Q_L) \\
 &= A Q_H - \frac{Q_H^2}{2} - A Q_L + \frac{Q_L^2}{2} + a Q_L - \frac{Q_L^2}{2} \\
 &= A Q_H - \frac{Q_H^2}{2} - (A - a) Q_L
 \end{aligned} \tag{9.6.200}$$

Com isso, a função lucro se torna:

$$\begin{aligned}
 \pi_3 &= N(V_H - c Q_H) + n(V_L - c Q_L) \\
 &= N \left[ A Q_H - \frac{Q_H^2}{2} - (A - a) Q_L - c Q_H \right] + n \left[ a Q_L - \frac{Q_L^2}{2} - c Q_L \right]
 \end{aligned} \tag{9.6.201}$$

O objetivo do monopolista é

$$\max_{Q_H, Q_L} N \left[ A Q_H - \frac{Q_H^2}{2} - (A - a) Q_L - c Q_H \right] + n \left[ a Q_L - \frac{Q_L^2}{2} - c Q_L \right] \quad (9.6.202)$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial \pi_3}{\partial Q_H} = 0 \iff N[A - Q_H - c] = 0 \implies Q_H^* = A - c \quad (9.6.203)$$

$$\frac{\partial \pi_3}{\partial Q_L} = 0 \iff N[-(A - a)] + n[a - Q_L - c] = 0 \implies Q_L^* = a - c - \frac{N}{n}(A - a) \quad (9.6.204)$$

Note que  $A > a$ , o que implica que  $Q_H^* > Q_L^*$ . Note que esta solução é aceitável se  $Q_L^* > 0$ , o que é verdade se e somente se  $n(a - c) > N(A - a)$ .

Agora, de (a) tínhamos que  $W_L(Q_L) = V_L$ . Substituindo em (b), encontramos que

$$W_L(Q_H^*) - V_H^* = -(A - a)(Q_H^* - Q_L^*) < 0 \quad (9.6.205)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \pi_3^* &= N \left[ A Q_H^* - \frac{(Q_H^*)^2}{2} - (A - a) Q_L^* - c Q_H^* \right]^+ n \left[ a Q_L^* - \frac{(Q_L^*)^2}{2} - c Q_L^* \right] \\ &= N(A - c) \left( A - c - \frac{A - c}{2} \right) + \\ &\quad + \left( a - c - \frac{N}{n}(A - a) \right) \left( -N(A - a) + na - nc - \frac{n}{2} \left( a - c - \frac{N}{n}(A - a) \right) \right) \\ &= \frac{N}{2}(A - c)^2 + \frac{n}{2} \left( a - c - \frac{N}{n}(A - a) \right)^2 \\ &= \pi_2^* + \frac{(N + n)N(A - a)^2}{2n} \end{aligned} \quad (9.6.206)$$

Isso implica que a opção 3 é a escolhida.

Agora, devemos comparar a opção 1 e a opção 3. A opção 3 será escolhida se  $\pi_3^* > \pi_1^*$ . Isto é,

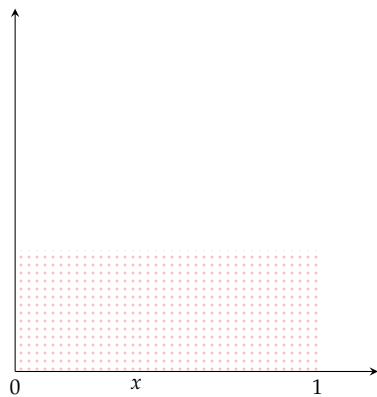
$$\begin{aligned} \pi_3^* - \pi_1^* &> 0 \\ \frac{n}{2} \left( a - c - \frac{N}{n}(A - a)^2 \right) &> 0 \\ \frac{1}{2n} [n(a - c) - N(A - a)]^2 &> 0 \end{aligned} \quad (9.6.207)$$

*Se  $n(a - c) < N(A - a)$ , o monopolista vende somente para os consumidores de alta renda. Se  $n(a - c) > N(A - a)$ , o monopolista vende para os dois grupos e cada um paga um preço diferente.*

### Modelo de Hotelling

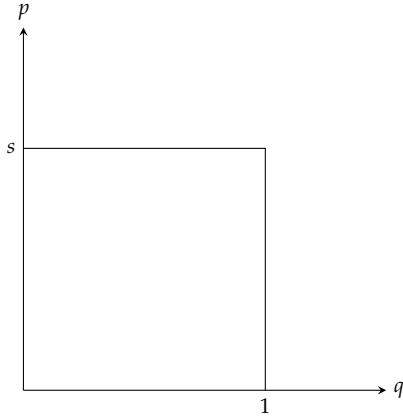
Aqui trato do modelo de diferenciação horizontal de produto de Hotelling. Há diferenciação horizontal quando as preferências dos consumidores divergem sobre as características de um determinado bem. Um consumidor pode considerar uma determinada característica da marca como ideal, mas apenas algumas características estão disponíveis aos fornecedores, então o consumidor terá que comprar do fornecedor cuja característica do produto seja o mais próximo possível do que ela deseja. Presumo que as características sejam representadas escalarmente no intervalo unitário. Por exemplo, o intervalo pode representar o grau de doçura de uma barra de chocolate. A localização de um consumidor no intervalo unitário refere-se ao grau de doçura que ele deseja. Os consumidores são heterogêneos em seus gostos no sentido de que todo o intervalo unitário coincide com o conjunto de consumidores. Da mesma forma, as empresas estão localizadas em um conjunto finito de pontos. A distância entre um consumidor e uma empresa é interpretada como a desutilidade do consumidor em comprar um chocolate com doçura abaixo do ideal. A desutilidade equivale a um custo de transporte [Shy (1995), p. 145]. A história toda consiste em encontrar a maneira ideal de atribuir consumidores às empresas.

FIGURA 9.6.10 – DISTRIBUIÇÃO DOS CONSUMIDORES



Os consumidores são distribuídos uniformemente ao longo do intervalo  $[0, 1]$ . Um consumidor prefere a variedade de produtos  $x$ . Por fim, assumimos que o consumidor tem demanda unitária:

FIGURA 9.6.11 – DEMANDA UNITÁRIA



A desutilidade de consumir uma variedade de produtos  $y$  é dada por  $t(|y - x|)$ . Pode ser visto como um custo de transporte. Vamos assumir um custo de transporte linear, isto é,  $t(d) = td$ . Suponha que a firma 1 localizada em 0 tem preço  $p_1 + tx$  e a firma 2 localizada em 1 tem preço  $p_2 + t(1 - x)$ .

O consumidor é indiferente entre as firmas, tal que:

$$s - p_1 - t\tilde{x} = s - p_2 - t(1 - \tilde{x}) \iff \tilde{x}(p_1, p_2) = \frac{1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t}. \quad (9.6.208)$$

Assim,

$$D_1(p_1, p_2) = \tilde{x}(p_1, p_2) = \frac{1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t}, \quad (9.6.209)$$

$$D_2(p_1, p_2) = 1 - \tilde{x}(p_1, p_2) = \frac{1}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t}. \quad (9.6.210)$$

Assumindo que o custo de produção é  $c$ , o lucro é dado por:

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c) \left[ \frac{1}{2} + \frac{p_2 - p_1}{2t} \right], \quad (9.6.211)$$

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c) \left[ \frac{1}{2} + \frac{p_1 - p_2}{2t} \right]. \quad (9.6.212)$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial \pi_1(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 0 \iff p_1 = \frac{c + t + p_2}{2}, \quad (9.6.213)$$

$$\frac{\partial \pi_2(p_1, p_2)}{\partial p_2} = 0 \iff p_2 = \frac{c + t + p_1}{2}, \quad (9.6.214)$$

o que implica que  $p_1^* = p_2^* = c + t$ .

O consumidor é indiferente a comprar se

$$\begin{aligned} s - p - t\tilde{x} &\geq 0 \\ s &\geq p + \frac{t}{2} \\ s &\geq p - t + \frac{t}{2} + t \\ s &\geq c + \frac{3}{2}t. \end{aligned} \tag{9.6.215}$$

Da condição de primeira ordem, temos a função melhor resposta:

$$p_1 = \frac{1}{2}(p_2 + c + t), \tag{9.6.216}$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(p_1 + c + t). \tag{9.6.217}$$

O grau de diferenciação do produto é  $t$ . A diferenciação do produto torna as empresas menos agressivas em seus preços.

Mas são 0 e 1 as variações de produto de equilíbrio das firmas? Vamos ver por meio de um jogo de diferenciação de produto em dois estágios: na etapa 1 as empresas escolhem locais em  $[0, 1]$  e na etapa 2 as empresas escolhem os preços. Vamos assumir que os custos de transporte são quadráticos.

Começando pelo estágio 2, as firmas se localizam em  $a$  e  $1 - b$  com  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  e  $a + b \leq 1$ . O consumidor é indiferente entre as firmas, tal que:

$$p_1 + t(\tilde{x} - a)^2 = p_2 + t(1 - b - \tilde{x})^2 \iff \tilde{x}(p_1, p_2) = a + \frac{1}{2}(1 - a - b) + \frac{p_2 - p_1}{2t(1 - a - b)}. \tag{9.6.218}$$

Assim,

$$\begin{aligned} D_1(p_1, p_2) &= \tilde{x}(p_1, p_2) = a + \frac{1}{2}(1 - a - b) + \frac{p_2 - p_1}{2t(1 - a - b)} \\ &= \frac{1}{2}(1 + a - b) + \frac{p_2 - p_1}{2t(1 - a - b)} \end{aligned} \tag{9.6.219}$$

$$\begin{aligned} D_2(p_1, p_2) &= 1 - \tilde{x}(p_1, p_2) = 1 - \left[ a + \frac{1}{2}(1 - a - b) + \frac{p_2 - p_1}{2t(1 - a - b)} \right] \\ &= \frac{1}{2}(1 - a + b) + \frac{p_1 - p_2}{2t(1 - a - b)}. \end{aligned} \tag{9.6.220}$$

Assumindo que o custo de produção é  $c$ , o lucro é dado por:

$$\pi_1(p_1, p_2) = (p_1 - c) \left[ \frac{1}{2}(1 + a - b) + \frac{p_2 - p_1}{2t(1 - a - b)} \right], \quad (9.6.221)$$

$$\pi_2(p_1, p_2) = (p_2 - c) \left[ \frac{1}{2}(1 - a + b) + \frac{p_1 - p_2}{2t(1 - a - b)} \right]. \quad (9.6.222)$$

As condições de primeira ordem são:

$$\frac{\partial \pi_1(p_1, p_2)}{\partial p_1} = 0 \iff 2p_1 - p_2 = c + t(1 - a - b)(1 + a - b), \quad (9.6.223)$$

$$\frac{\partial \pi_2(p_1, p_2)}{\partial p_2} = 0 \iff 2p_2 - p_1 = c + t(1 - a - b)(1 - a + b). \quad (9.6.224)$$

Em equilíbrio,

$$p_1 = c + t(1 - a - b) \left( 1 + \frac{a - b}{3} \right), \quad (9.6.225)$$

$$p_2 = c + t(1 - a - b) \left( 1 + \frac{b - a}{3} \right). \quad (9.6.226)$$

Se a localização for a mesma, isto é,  $a = b$ , então  $p_1 = p_2 = c + t(1 - 2a)$ .

O preço de uma empresa diminui quando a outra empresa se aproxima, isto é,  $\frac{\partial p_1}{\partial b} < 0$  e  $\frac{\partial p_2}{\partial a} < 0$ .

Assim, no estágio 1, temos:

$$\pi_1(a, b) = (p_1(a, b) - c)D_1(a, b, p_1(a, b), p_2(a, b)). \quad (9.6.227)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_1(a, b)}{\partial a} &= D_1 \frac{\partial p_1}{\partial a} + (p_1 - c) \left[ \frac{\partial D_1}{\partial a} + \frac{\partial D_1}{\partial p_1} \frac{\partial p_1}{\partial a} + \frac{\partial D_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial a} \right] \\ &= \frac{\partial p_1}{\partial a} \left[ D_1 + (p_1 - c) \frac{\partial D_1}{\partial p_1} \right] + (p_1 - c) \left[ \frac{\partial D_1}{\partial a} + \frac{\partial D_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial a} \right] \\ &= (p_1 - c) \left[ \frac{\partial D_1}{\partial a} + \frac{\partial D_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial a} \right], \end{aligned} \quad (9.6.228)$$

em que  $\frac{\partial D_1}{\partial a} > 0$  é o efeito direto e  $\frac{\partial D_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial a} < 0$  é o efeito estratégico com  $\frac{\partial D_1}{\partial p_2} > 0$  e  $\frac{\partial p_2}{\partial a} < 0$ .

Mover-se para o meio tem um efeito direto positivo versus um efeito estratégico negativo.

Veja que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D_1}{\partial a} + \frac{\partial D_1}{\partial p_2} \frac{\partial p_2}{\partial a} &= \frac{3 - 5a - b}{6(1 - a - b)} + \frac{1}{2t(1 - a - b)} \frac{2}{3} t(a - 2) \\ &= -\frac{3a + b + 1}{6(1 - a - b)} < 0.\end{aligned}\tag{9.6.229}$$

O efeito estratégico é mais forte que o efeito direto. Assim, temos diferenciação máxima em equilíbrio.

### As Teorias de Determinação da Taxa de Câmbio no Curto e no Longo Prazo

Nesta aula vamos apresentar as principais teorias de determinação da taxa de câmbio. Os determinantes das flutuações da taxa de câmbio são bastante diferentes no curto prazo, médio prazo e longo prazo e ajudam a entender os movimentos observados nas trajetórias do câmbio. Para tanto, vamos estudar

1. a lei do preço único
2. a PPP (relativa e absoluta)
3. o modelo Balassa-Samuelson
4. a abordagem do mercado de ativos (*asset market*)
5. a paridade descoberta de juros
6. o enfoque monetário para a determinação da taxa de câmbio: preços flexíveis
7. o enfoque monetário para a determinação da taxa de câmbio: preços rígidos
8. a substituição de moeda
9. o enfoque do portfólio

No curto prazo, as transações cambiais são dominadas por transferências de ativos financeiros que respondem às diferenças nas taxas de juros reais e à mudança das expectativas de taxas de câmbio futuras; tais transações têm a maior influência nas taxas de câmbio de curto prazo. A médio prazo, as taxas de câmbio são regidas por fatores cíclicos, como as flutuações cíclicas da atividade econômica. A longo prazo, as transações cambiais são dominadas por fluxos de bens e serviços e capital de investimento, que respondem a forças como taxas de inflação, rentabilidade de investimentos, gastos dos consumidores, produtividade e política comercial do governo; tais transações têm o impacto dominante nas taxas de câmbio de longo prazo.

A disposição a pagar um determinado preço pela moeda estrangeira deve, em última instância e essencialmente, ser devida ao fato de que essa moeda possui um poder de compra em relação a commodities e serviços nesse país. Nossa avaliação de uma moeda estrangeira em termos de nossa própria, portanto, depende principalmente do poder de compra relativo das duas moedas em seus respectivos países. Assim, dizia Gustav Cassel em seu livro de 1922. A teoria da PPP

(*purchasing power parity*) tem uma longa história em economia, que remonta a vários séculos, mas a terminologia específica da paridade do poder de compra foi introduzida nos anos após a Primeira Guerra Mundial durante o debate de política internacional sobre o nível apropriado para as taxas de câmbio nominais entre os principais países industrializados após as altas inflações durante e depois da guerra. Desde então, a idéia de PPP tornou-se muito conhecida. Se os mesmos bens entrarem na cesta de mercado de cada país usado para construir o nível de preço agregado - e com o mesmo peso -, então, a lei do preço único implica que a PPP deve valer entre os países em questão. Possíveis objeções a esta linha de raciocínio são imediatas. Por exemplo, a presença de custos de transação - talvez decorrentes de custos de transporte, impostos, tarifas e direitos e barreiras não tarifárias - podem induzir uma violação da lei do preço único. Os bens não comercializáveis também levam violação da lei do preço único.

Vamos estudar inicialmente a lei do preço único. A lei do preço único diz que um bem deve custar o mesmo no exterior e no país local. Formalmente, se for válida, então

$$\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_i^* S, \quad (9.6.230)$$

em que

- $\mathcal{P}_i$  é o preço em moeda nacional do bem  $i$ .
- $\mathcal{P}_i^*$  é o preço em moeda estrangeira do bem  $i$ .
- $S$  é a taxa de câmbio nominal (preço da moeda nacional por 1 unidade de moeda estrangeira)

Exemplos de produtos para os quais a lei do preço único é válida incluem o ouro, trigo, bens de consumo de luxo (gravatas Hermes, canetas MontBlanc, relógios Rolex etc.), dentre outros. Por sua vez, exemplos de produtos para os quais a lei do preço único falha incluem o Big Mac, terrenos para habitação, transporte, cortes de cabelo, restaurantes, etc.

As razões pelas quais a lei do preço único pode falhar abarcam bens que têm insumos não-comercializáveis, tais como trabalho, aluguel e eletricidade; políticas/regulamentos governamentais (impostos); barreiras ao comércio (tarifas, cotas); preços específicos para um mercado (produtos farmacêuticos).

Como podemos “sair” da lei do preço único para a PPP? Ou seja, como podemos generalizar a lei do preço único para uma cesta de bens? Vamos assumir as seguintes definições:

- Seja  $\mathcal{P}$  o preço em moeda nacional de uma cesta de bens doméstica.
- Seja  $\mathcal{P}^*$  o preço em moeda estrangeira de uma cesta de produtos estrangeira.
- Seja  $S$  a taxa de câmbio nominal (moeda nacional por unidade de moeda estrangeira).

Defina a taxa de câmbio real como segue:

$$e = S \left( \frac{\mathcal{P}^*}{\mathcal{P}} \right) \quad (9.6.231)$$

Da taxa real de câmbio, depreende-se que:

- Se  $e = 1$ , dizemos que a PPP é válida. Ou seja, se o nível de preços praticados internamente e internacionalmente forem os mesmos.
- Se  $e > 1$ , a cesta de bens doméstica está subvalorizada ou a cesta estrangeira está sobrevalorizada.
- Se  $e < 1$ , a cesta de bens doméstica está sobrevalorizada ou a cesta estrangeira está subvalorizada.

Assim,

1. Se  $\Delta e > 0$ , dizemos que a taxa de câmbio real se deprecou.
2. Se  $\Delta e < 0$ , dizemos que a taxa de câmbio real se apreciou.

Da PPP temos duas distinções. Dizemos que a PPP absoluta é válida quando  $e = 1$ . E dizemos que a PPP relativa é válida quando  $\Delta e = 0$ . Agora, suponha que a lei do preço único seja válida para todos os produtos. A PPP deve ser válida? Não necessariamente. Por quê? Porque as cestas estrangeiras e domésticas poderiam conter itens diferentes e ter pesos diferentes para os mesmos itens.

Observe que a lei do preço único não é necessária nem suficiente para a PPP relativa. Como testar a PPP relativa? Tome os logs de (9.6.231):

$$\ln(e_t) = \ln(S_t \mathcal{P}_t^*) - \ln(\mathcal{P}_t) \quad (9.6.232)$$

Se a PPP relativa é verdadeira, então  $\Delta e_t = 0$  e, portanto,  $\ln(S_t \mathcal{P}_t^*)$  deve estar se movendo ao longo do tempo em conjunto com  $\ln(\mathcal{P}_t)$ . Isto é, os preços nacionais e internacionais, corrigidos, devem estar próximos de si e se movendo de forma harmônica. As evidências suportam esta predição teórica? Os dados de índices de preços ao consumidor nos EUA e U.K, durante o período 1820-2001, coletados por Taylor e Taylor (2004) em "The Purchasing Power Parity Debate" indicam que no geral, os co-movimentos dos preços entre os EUA e o Reino Unido nos últimos 180 anos foram muito próximos. Isso sugere que a PPP relativa se mantém no longo prazo.

Outra maneira de testar a PPP relativa é a seguinte. Tome a  $k$ -ésima diferença de (9.6.231):

$$\ln(e_t) - \ln(e_{t-k}) = \ln\left(\frac{\mathcal{P}_t^*}{\mathcal{P}_{t-k}^*}\right) - \ln\left(\frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_{t-k}}\right) + \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-k}}\right) \quad (9.6.233)$$

Se a PPP relativa é válida no longo prazo, então teríamos

$$\ln(e_t) - \ln(e_{t-k}) = 0 \quad (9.6.234)$$

Isso implica que

$$\ln \left( \frac{\mathcal{P}_t^*}{\mathcal{P}_{t-k}^*} \right) - \ln \left( \frac{\mathcal{P}_t}{\mathcal{P}_{t-k}} \right) = -\ln \left( \frac{S_t}{S_{t-k}} \right) \quad (9.6.235)$$

Esta equação diz que a diferença entre a inflação externa a longo prazo e a inflação de longo prazo de um país deve ser igual à taxa de depreciação da moeda estrangeira em relação a moeda do país. Isso é intuitivo, a moeda de um país estrangeiro com uma maior taxa de inflação do que a do país local deve se depreciar em relação a moeda do país local. Taylor e Taylor (2004) testam se a PPP relativa se mantém a longo prazo considerando os diferenciais de inflação média e as taxas médias de depreciação em relação ao dólar americano durante o período de 29 anos entre 1970 e 1998 para 20 países industrializados e 26 países em desenvolvimento. Os autores fornecem suporte para a afirmação de que, no longo prazo, a PPP relativa é válida.

Por outro lado, a PPP relativa deve ser válida no curto prazo? A resposta é não. Rogoff (1996, p. 647) apresentou o quebra-cabeça desta forma: como se pode conciliar a volatilidade de curto prazo das taxas de câmbio reais com a lenta taxa em que os desvios parecem desaparecer? A maioria das explicações sobre a volatilidade da taxa de câmbio a curto prazo aponta para choques financeiros e monetários. Tais choques podem ter efeitos substanciais na economia real na presença de salários nominais e preços rígidos (veja, por exemplo, o modelo Dornbusch).

Agora que discutimos a PPP relativa, vamos estudar a PPP absoluta. Por que a PPP absoluta falha? Uma das razões é que muitos produtos não são negociados internacionalmente (bens *nontradables*) e, portanto, as discrepâncias de preços não serão arbitradas por meio do comércio. Lembre-se que um índice de preços é uma média de todos os preços na economia, preços de bens comercializados,  $\mathcal{P}_T$  e preços de bens não comercializáveis,  $\mathcal{P}_N$ , isto é,

$$\mathcal{P} = \phi(\mathcal{P}_T, \mathcal{P}_N). \quad (9.6.236)$$

Suponha que a lei do preço único seja válida para bens comercializáveis,  $\mathcal{P}_T = S\mathcal{P}_T^*$ , mas não seja válida para bens não-comercializáveis,  $\mathcal{P}_N \neq S\mathcal{P}_N^*$ .

Suponha que o nível de preços estrangeiros,  $\mathcal{P}^*$ , seja construído como:

$$\mathcal{P}^* = \phi(\mathcal{P}_T^*, \mathcal{P}_N^*) \quad (9.6.237)$$

Então, a taxa de câmbio real será:

$$\begin{aligned} e &= S \left[ \frac{\mathcal{P}^*}{\mathcal{P}} \right] \\ &= S \left[ \frac{\phi(\mathcal{P}_T^*, \mathcal{P}_N^*)}{\phi(\mathcal{P}_T, \mathcal{P}_N)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= S \left[ \frac{\mathcal{P}_T^* \phi \left( 1, \frac{\mathcal{P}_N^*}{\mathcal{P}_T^*} \right)}{\mathcal{P}_T \phi \left( 1, \frac{\mathcal{P}_N}{\mathcal{P}_T} \right)} \right] \\
&= \frac{\phi \left( 1, \frac{\mathcal{P}_N^*}{\mathcal{P}_T^*} \right)}{\phi \left( 1, \frac{\mathcal{P}_N}{\mathcal{P}_T} \right)}
\end{aligned} \tag{9.6.238}$$

Se o preço relativo dos bens não transacionáveis for maior no país estrangeiro, a taxa de câmbio real é maior que 1, ou seja, se  $\frac{\mathcal{P}_N^*}{\mathcal{P}_T^*} > \frac{\mathcal{P}_N}{\mathcal{P}_T}$ , então  $e > 1$ .

A partir do que vimos, podemos estudar o modelo Balassa-Samuelson. Sabendo que  $e = \frac{\phi \left( 1, \frac{\mathcal{P}_N^*}{\mathcal{P}_T^*} \right)}{\phi \left( 1, \frac{\mathcal{P}_N}{\mathcal{P}_T} \right)}$ , a taxa de câmbio real se deprecia se  $\frac{\mathcal{P}_N^*}{\mathcal{P}_T^*}$  aumenta em relação a  $\frac{\mathcal{P}_N}{\mathcal{P}_T}$ . O que poderia fazer  $\frac{\mathcal{P}_N^*}{\mathcal{P}_T^*}$  aumentar em relação a  $\frac{\mathcal{P}_N}{\mathcal{P}_T}$ ? O crescimento da produtividade no setor de bens transacionáveis em relação ao setor não transacionável no país estrangeiro ser mais rápido do que no país doméstico. O efeito Balassa-Samuelson é a tendência para os países com maior crescimento de produtividade em bens transacionáveis, em comparação com os não transacionáveis, terem preços mais elevados (e, portanto, apreciar as taxas de câmbio reais).

O modelo pressupõe:

- Dois bens:  $\mathcal{Q}_T$  e  $\mathcal{Q}_N$ .
- Função de produção do bem transacionável:  $\mathcal{Q}_T = a_T L_T$ .
- Função de produção do bem não transacionável:  $\mathcal{Q}_N = a_N L_N$ .
- $L_T$  é o insumo trabalho no setor comercializável.
- $L_N$  é o insumo trabalho no setor não comercializável.
- $a_T$  é a produtividade exógena do trabalho no setor comercializável.
- $a_N$  é a produtividade exógena do trabalho no setor não comercializável.

As firmas que produzem bens transacionáveis escolhem  $\mathcal{Q}_T$  e  $L_T$  que maximizam o lucro:

$$\max_{\mathcal{Q}_T^*, L_T^*} \pi_T = \mathcal{P}_T \mathcal{Q}_T - \omega L_T \tag{9.6.239}$$

$$\text{sujeto a } \mathcal{Q}_T = a_T L_T \tag{9.6.240}$$

Reescreva a expressão do lucro:

$$\pi_T = \mathcal{P}_T a_T L_T - \omega L_T \quad (9.6.241)$$

Escolha  $L_T$  que maximize  $\pi_T$

$$\frac{\partial \pi_T}{\partial L_T} = 0 \iff \mathcal{P}_T a_T = \omega \quad (9.6.242)$$

As firmas que produzem bens não transacionáveis escolhem  $Q_N$  e  $L_N$  que maximizam o lucro:

$$\max_{Q_N^*, L_N^*} \pi_N = \mathcal{P}_N Q_N - \omega L_N \quad (9.6.243)$$

$$\text{sujeito a } Q_N = a_N L_N \quad (9.6.244)$$

Reescreva a expressão do lucro:

$$\pi_N = \mathcal{P}_N a_N L_N - \omega L_N \quad (9.6.245)$$

Assim, escolha  $L_N$  que maximize  $\pi_N$

$$\frac{\partial \pi_N}{\partial L_N} = 0 \iff \mathcal{P}_N a_N = \omega \quad (9.6.246)$$

Combinando os resultados

$$\frac{\mathcal{P}_N}{\mathcal{P}_T} = \frac{a_T}{a_N} \quad (9.6.247)$$

Ou seja, o modelo de Balassa-Samuelson prediz que, em equilíbrio, o preço relativo dos não comercializáveis em termos de comercializáveis é inversamente relacionado à razão de produtividade do trabalho no setor comercializáveis para o setor não comercializáveis. Para avaliar a proposição procede-se como segue:

$$\% \Delta \left( \frac{\mathcal{P}_N}{\mathcal{P}_T} \right) = \% \Delta a_T - \% \Delta a_N \quad (9.6.248)$$

Esta expressão diz que a variação percentual no preço relativo dos não transacionáveis é igual ao diferencial da taxa de crescimento entre a produtividade dos fatores no setor comercializável e o setor não comercializável.

Agora que já estudamos os conceitos básicos que fundamentam o tópico sobre determinação da taxa de câmbio a curto e a longo prazo, podemos investigar este tema no curto prazo, a abordagem do mercado de ativos (*asset market*).

Esta teoria concentra-se em mudanças de curto prazo na demanda e oferta por ativos denominados em diferentes moedas. Incorpora uma abordagem de mercado mais ampla que considera todos os ativos financeiros (não apenas dinheiro). Enfatiza os ajustes de portfólio de curto prazo por parte de investidores internacionais. Explica o “*overshooting*” - a tendência das taxas de câmbio para reagir de maneira excessiva a notícias ou eventos. A taxa de câmbio à vista de uma moeda estrangeira ( $S$ ) é aumentada a curto prazo por:

- um aumento na taxa de juros estrangeira em relação à nossa taxa de juros.
- um aumento na taxa de câmbio futura futura esperada.
- ambos os eventos criam um incentivo para acumular (aumentar a demanda) moeda, elevando a taxa de câmbio.

Lembre-se de que os investidores determinam o retorno total do seu investimento em uma obrigação denominada em moeda estrangeira como a soma de:

- o retorno básico sobre o próprio título (juros, “taxa de cupom” ou rendimento).
- o ganho ou perda esperado nas trocas de câmbio relacionadas à valorização esperada ou depreciação da moeda.

Suponha que você decida ter títulos do seu país que rendem  $i_t$ . Então, para cada real aplicado em títulos, você ganha  $(1 + i_{t+1})$ . Se você decidir ter títulos no exterior, para comprar títulos americanos você precisa trocar seus reais por dólares. Para cada real, você recebe  $\frac{1}{S_t}$  dólares. Seja  $i_t^*$  a taxa de juros americana. No ano seguinte, você espera receber  $\frac{S_{t+1}^e}{S_t}(1 + i_{t+1}^*)$  reais para cada real investido.

TABELA 9.1 – A ESCOLHA ENTRE ATIVOS DOMÉSTICOS E ESTRANGEIROS

	Ano $t$	Ano $t + 1$
Título do Brasil	R\$ 1	$\Rightarrow$ R\$ 1( $1 + i_t$ )
Título nos EUA	R\$ 1 $\Downarrow$ US\$ 1 $\left(\frac{1}{S_t}\right)$	$R\$ 1 \left(\frac{1}{S_t}\right) (1 + i_t^*) S_{t+1}^e$ $\Uparrow$ US\$ 1 $\left(\frac{1}{S_t}\right) (1 + i_t^*)$

Supondo a livre movimentação de capitais e indiferença entre ativos (de mesmo risco), em equilíbrio, se tanto o bônus doméstico quanto o bônus estrangeiro fazem parte da carteira, ambos

devem ter o mesmo rendimento. Assim, pela lei de preço único vale a seguinte relação de (não) arbitragem:

$$1 + i_t = \left( \frac{1}{S_t} \right) (1 + i_t^*) S_{t+1}^e \quad (9.6.249)$$

em que o último termo corresponderia a taxa esperada de depreciação da moeda doméstica. Esta é a condição de paridade não coberta das taxas de juros. Observe que a paridade descoberta de juros (seja exata ou aproximada) vincula quatro variáveis: a taxa de juros doméstica, a taxa de juros estrangeira, a taxa de câmbio atual e a taxa esperada no futuro. Ao nos atermos somente à hipótese de que os investidores optam única e exclusivamente pelos bônus que têm taxas de juros mais altas, desconsideraremos os custos de transação e o risco (cambial, crédito etc., que é o que denominamos de hipótese de indiferença de ativos).

Uma vez que vimos o enfoque o mercado de ativos, vamos nos debruçar sobre o enfoque monetário para a determinação da taxa de câmbio considerando preços flexíveis. Esta abordagem é uma extensão da PPP acerca da taxa de câmbio. Isto é, é a adição de uma teoria de determinação do nível de preços a equação da PPP para explicar a taxa de câmbio. Assumimos que há dois países, cada um produz um bem perfeitamente substituível. Lembre-se que na ausência de restrições ao comércio, a PPP é válida:

$$s_t = p_t - p_t^* \quad (9.6.250)$$

As variáveis em minúsculo denotam variáveis em logaritmo.

Como os investidores podem ajustar seus portfólios imediatamente após um distúrbio, e como o capital é perfeitamente móvel, a paridade de juros descoberta também deve valer:

$$\Delta s_{t+1}^e = (i - i^*) \quad (9.6.251)$$

em que  $\Delta s_{t+1}^e$  denota o valor esperado da taxa de câmbio um período à frente.

O mercado monetário consiste de relações de oferta e de demanda nos dois países. A função de demanda é dada por:

$$m_t^D - p_t = \alpha_1 y_t - \alpha_2 i_t, \alpha_1, \alpha_2 > 0 \quad (9.6.252)$$

$$m_t^{D*} - p_t^* = \alpha_1 y_t^* - \alpha_2 i_t^* \quad (9.6.253)$$

em que  $m_D$  é a demanda de moeda (em log) e  $y$  é o log da renda real. Assumimos que a elasticidade  $\alpha_1$  e a semi-elasticidade  $\alpha_2$  são iguais entre os países. Também supomos que a oferta de moeda é determinada exogenamente pela autoridade monetária. Partimos da situação inicial de que o mercado monetário está em equilíbrio. Portanto,

$$m_t^D = m_t^S = m_t \text{ e } m_t^{D*} = m_t^{S*} = m_t^* \quad (9.6.254)$$

Combinando as equações de oferta e de demanda por moeda, temos:

$$p_t - p_t^* = m_t - m_t^* - \alpha_1(y - y^*)_t + \alpha_2(i - i^*)_t \quad (9.6.255)$$

Substituindo dentro da PPP, temos a equação-chave do modelo:

$$s = m_t - m_t^* - \alpha_1(y - y^*)_t + \alpha_2(i - i^*)_t \quad (9.6.256)$$

O que esta equação, (10.2.3), nos revela? Ela diz que um aumento de  $x\%$  na oferta doméstica de moeda leva a um aumento de  $x\%$  em  $s$  (depreciação). Também diz que um aumento na renda eleva a demanda por moeda para realizar as novas transações. Como a oferta de moeda (nominal) é constante, o mercado monetário só pode estar em equilíbrio se o nível de preços cair. Como a PPP é válida, isto implica em uma apreciação. Por fim, nos informa que um aumento na taxa de juros doméstica reduz a demanda por moeda. Para manter o equilíbrio no mercado monetário, o nível de preços deve aumentar. Como a PPP é válida, isto implica em uma depreciação.

Sabemos da equação de Fisher que:

$$i_t = r_t + \Delta p_{t+1}^e \text{ e } i_t^* = r_t^* + \Delta p_{t+1}^{e*} \quad (9.6.257)$$

em que  $r$  é a taxa de juros real e  $\Delta p_{t+1}^e$  é a taxa de inflação esperada. Assumindo que as taxas de juros real são equalizadas entre os países, observamos que:

$$s = m_t - m_t^* - \alpha_1(y - y^*)_t + \alpha_2(\Delta p_{t+1}^e - \Delta p_{t+1}^{e*})_t \quad (9.6.258)$$

Isto posto, um aumento na taxa de juros reflete um aumento na expectativa de inflação e, portanto, um desejo de reduzir os saldos monetários reais. Como  $m_t^S$  é fixa, os novos saldos só podem ser acomodados por um aumento no nível de preços. Assim, a taxa de câmbio deve se depreciar.

Ao substituirmos a equação que descreve a paridade descoberta da taxa de juros na equação-chave do modelo de preços flexíveis e definindo  $z_t = m_t - m_t^* - \alpha_1(y - y^*)$ , chegamos a :

$$s_t = z_t + \alpha_2(s_{t+1}^e - s_t) \quad (9.6.259)$$

em que  $\Delta s_{t+1}^e = s_{t+1}^e - s_t$ . Coletando termos, temos:

$$s_t = \frac{1}{1 + \alpha_2} z_t + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} s_{t+1}^e \quad (9.6.260)$$

Como determinamos o valor esperado da taxa de câmbio? Vamos assumir expectativas racionais. Para tanto, seja:

$$s_{t+1}^e = \mathbb{E}(s_{t+1} | \mathcal{I}_t) = \mathbb{E}_t s_{t+1} \quad (9.6.261)$$

em que  $\mathcal{I}$  denota o conjunto informacional. Disso decorre que

$$s_t = \frac{1}{1 + \alpha_2} z_t + \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \mathbb{E}_t s_{t+1} \quad (9.6.262)$$

A taxa de câmbio esperada dependerá do que os agentes esperam da oferta de moeda e da renda no futuro. A expectativa em qualquer ponto do tempo será

$$\mathbb{E}_t s_{t+j} = \frac{1}{1 + \alpha_2} (\mathbb{E}_t z_{t+j} + \alpha_2 \mathbb{E}_t s_{t+j+1}) \quad (9.6.263)$$

Repetindo o processo  $n$  vezes, obteríamos:

$$s_t = \frac{1}{1 + \alpha_2} \sum_{j=0}^n \left( \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \right)^j \mathbb{E}_t z_{t+j} + \left( \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \right)^n \mathbb{E}_t s_{t+n+1} \quad (9.6.264)$$

Disto, obtemos os seguintes resultados:

- Se  $\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} < 1 \Rightarrow \left( \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \right)^n \mathbb{E}_t s_{t+n+1} \rightarrow 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ .
- Se  $\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} > 1 \Rightarrow \left( \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \right)^n \mathbb{E}_t s_{t+n+1} \neq 0$  quando  $j \rightarrow \infty$ .

O segundo caso caracteriza uma solução dita explosiva (bolhas especulativas). Iremos estudar este aspecto posteriormente. Vamos impor como condição de transversalidade (terminal) que  $\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} < 1$ . Então, temos a seguinte solução baseada nos fundamentos econômicos:

$$s_t = \frac{1}{1 + \alpha_2} \sum_{j=0}^{\infty} \left( \frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} \right)^j \mathbb{E}_t z_{t+j}, \quad (9.6.265)$$

em que  $n = \infty$ .

Reescrevendo a equação acima em uma notação mais compacta, temos:

$$s_t = (1 - \beta) \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \mathbb{E}_t z_{t+j}, \quad (9.6.266)$$

em que  $\beta = \alpha_2(1 + \alpha_2)^{-1}$ . A taxa de câmbio corrente depende não apenas do excesso de oferta atual, mas do excesso esperado. Assim, se o aumento da oferta monetária for temporário, o valor futuro da taxa de câmbio será pouco afetado.

Para choques com maior persistência, podemos assumir que a lei de movimento dos fundamentos econômicos segue uma estrutura estocástica como um AR(1):

$$z_t = \theta z_{t-1} + \nu_t, \quad \theta < 1 \quad (9.6.267)$$

Pode ser usado para prever movimentos futuros:

$$\mathbb{E}_t z_{t+j} = \theta^j z_t \quad (9.6.268)$$

Combinando este resultado na solução geral, teríamos:

$$s_t = (1 - \beta)(1 - \theta\beta)^{-1} z_t \quad (9.6.269)$$

A magnitude dos efeitos de uma mudança em  $z_t$  sobre  $s_t$  dependerá dos parâmetros  $\theta$  e  $\beta$ . A solução sem bolhas especulativas e com expectativas aumentadas fornece uma explicação para a volatilidade nas taxas de câmbio. As expectativas são regressivas (mudanças da taxa de câmbio em um sentido no período corrente são seguidas por mudanças no sentido inverso no futuro) porque o comportamento subjacente da oferta monetária torna expectativas racionais o mais adequado. Os movimentos significativos da taxa de câmbio corrente (“overshooting”) podem refletir crescimento da oferta monetária no futuro, isto é, o comportamento especulativo atua como estabilizador. Assim, a política monetária deve ser estável. A instabilidade na política monetária implica taxa de câmbio instável.

Agora podemos incorporar o papel da especulação ao modelo. Considere que  $\frac{\alpha_2}{1 + \alpha_2} > 1$ . Assim, há infinitas soluções para a taxa spot, que podem ser escritas na forma:

$$s_t = s_t^n + b_t \quad (9.6.270)$$

em que  $b_t$  é o termo que captura a bolha especulativa que será importante se os investidores acreditarem que seja assim. Para que  $b_t$  seja uma solução, impomos:  $b_t = \beta \mathbb{E}_t b_{t+1}$ . Disso decorre que

$$s_t^n + b_t = (1 - \beta)z_t + \beta \mathbb{E}_t s_{t+1}^n + \beta \mathbb{E}_t b_{t+1} \quad (9.6.271)$$

Podemos distinguir três casos no que concerne à presença de bolhas especulativas racionais. Em primeiro lugar,  $b_t = b$  com  $b > 0$  (constante). Isto implica que a taxa de câmbio se depreciará em uma quantidade igual a  $\beta b$ , mesmo quando os fundamentos sejam assumidos como constantes. Em segundo, podemos ter bolha especulativa com tendência determinística, isto é,  $b_t = b_0 \beta^{-\text{tempo}}$ . Isto implica que a taxa de câmbio se depreciará exponencialmente, porém o processo é ad infinitum. Por último, podemos ter um caso com crescimento e ruptura. Esta alternativa foi sugerida por Blanchard e Watson (1982), em que  $\mathbb{E}(v_{t+1}) = 0$ . Conforme os autores, poderíamos ter dois casos:

$$b_{t+1} = (\beta\pi)^{-1} + v_{t+1} \quad \text{com probabilidade } \pi \quad (9.6.272)$$

$$b_{t+1} = v_{t+1} \quad \text{com probabilidade } 1 - \pi \quad (9.6.273)$$

em que  $\pi$  é a probabilidade da bolha continuar. Uma vez colapsada, o termo  $v$  permite que uma nova bolha se inicie.

Uma vez que estudamos como a taxa de câmbio é determinada em um modelo com preços flexíveis, podemos avançar e analisar o caso quando os preços são rígidos. Este modelo explica a volatilidade da taxa de câmbio por meio do *overshooting* da taxa de câmbio (modelo proposto por Dornbusch (1976)). Aqui, assumimos que a PPP é válida no longo prazo, mas não é válida no curto prazo:

$$\bar{s}_t = \bar{p}_t - \bar{p}_t^* \quad (9.6.274)$$

$$s_t \neq p_t - p_t^* \quad (9.6.275)$$

em que a barra denota variáveis de longo prazo. Vamos considerar que o nível de preços estrangeiro é constante. Também permanece válido as seguintes condições:

$$m_t^D - p_t = \alpha_1 y_t - \alpha_2 i_t, \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0 \quad (9.6.276)$$

$$m_t^D = m_t^S = m_t \quad (9.6.277)$$

$$\Delta s_{t+1}^e = (i - i^*)_t \quad (9.6.278)$$

Essas condições implicam que o mercado de ativos está permanentemente se ajustando. Porém, a rigidez dos preços dos bens significa que o mercado de bens não está constantemente se ajustando, embora o faça no longo prazo. Portanto, há uma assimetria entre o ajustamento do mercado de bens e de ativos. Dois aspectos diferem em relação ao modelo anterior. No curto prazo é assumido que a mudança esperada na taxa de câmbio é igual a uma proporção constante,  $\phi$ , da

diferença entre o valor de equilíbrio  $\bar{s}_t$  e o valor corrente  $s_t$ :

$$\Delta s_{t+1}^e = \phi(\bar{s} - s)_t, \quad 0 < \phi < 1 \quad (9.6.279)$$

Como a PPP é violada no curto prazo como vimos no início desta aula (em decorrência de choques financeiros e monetários, por exemplo), precisamos de uma equação descrevendo a evolução do nível de preços do curto para o longo prazo. Para tanto, assumimos que o nível de preços se ajusta em proporção ao excesso de demanda agregada:

$$\Delta p_{t+1} = \Xi(d - y)_t, \quad \Xi > 0 \quad (9.6.280)$$

em que  $\Xi$  é a velocidade de ajustamento.

A função de demanda tem a seguinte forma:

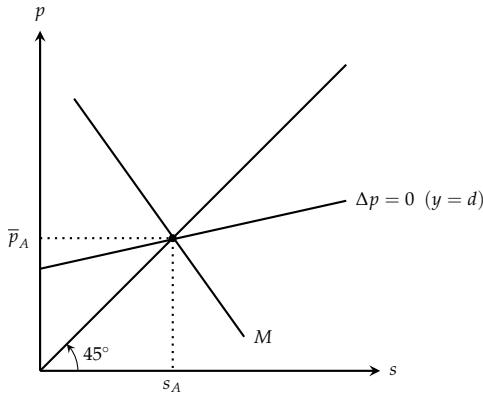
$$d_t = \beta_0 + \beta_1(s - p)_t + \beta_2 y_t - \beta_3 i_t, \quad \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 > 0 \quad (9.6.281)$$

em que  $s - p$  captura os efeitos da taxa de câmbio real sobre a balança comercial,  $y$  reflete o efeito da renda sobre os gastos, como o consumo,  $i$  reflete o efeito da taxa de juros sobre a absorção doméstica e  $\beta_0$  pode refletir o gasto do governo. Assumindo que produto é fixo no nível de pleno emprego,  $\bar{y}$ , a mudança no nível de preços é dada por

$$\Delta p_{t+1} = \Xi[\beta_0 + \beta_1(s - p)_t + (\beta_2 - 1)y_t - \beta_3 i_t] \quad (9.6.282)$$

O equilíbrio neste modelo é dado pela intersecção de três curvas, como exposto pela Figura 9.6.12. O eixo das abscissas representa a taxa de câmbio e o eixo das ordenadas apresenta o nível de preços.

FIGURA 9.6.12 – EQUILÍBRIO COM PREÇOS RÍGIDOS



A PPP é expressa pela linha de  $45^\circ$ . Esta linha mostra a proporcionalidade entre o nível de preços e a taxa de câmbio no longo prazo. Abaixo da linha de  $45^\circ$ , a taxa de câmbio é relativamente

maior que o nível de preços, então há excesso de demanda pelos bens domésticos. Acima da linha de  $45^\circ$  há excesso de oferta de bens domésticos.

A reta  $M$  captura o equilíbrio no mercado monetário em uma economia aberta cuja paridade descoberta da taxa de juros é válida. Aqui,  $m^D$  é uma função positiva do nível de preços e uma função negativa da taxa de juros. Se o nível de preços aumenta acima de  $p_A$ , a taxa de juros deve aumentar para manter o equilíbrio no mercado monetário. Mas um aumento em  $i$  só é possível com uma depreciação da taxa de câmbio. Por isso, a inclinação é negativa. Observe que  $\frac{dp}{ds} = -\alpha_2\phi$ . Sabendo que  $m_t^D = m_t^S = m_t$ ,  $\Delta s_{t+1}^e = \phi(\bar{s} - s)_t$  e que  $\Delta s_{t+1}^e = (i - i^*)_t$  e substituindo na equação de demanda por moeda,  $m_t^D - p_t = \alpha_1 y_t - \alpha_2 i_t$ , temos:

$$p_t - m_t = -\alpha_1 y_t + \alpha_2 \phi(\bar{s} - s)_t + \alpha_2 i_t^* \quad (9.6.283)$$

No longo prazo com oferta de moeda estacionária, sabemos que as taxas de câmbio corrente e esperada são iguais. Portanto:

$$\bar{p}_t = m_t - \alpha_1 y_t + \alpha_2 i_t^* \quad (9.6.284)$$

Combinando as duas equações, chegamos a :

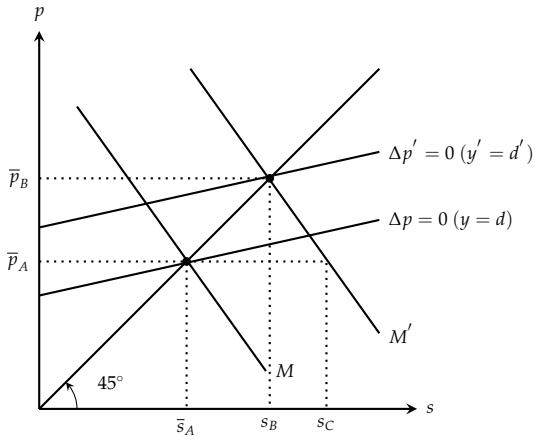
$$s_t = \bar{s}_t - \frac{1}{\alpha_2 \phi} (p - \bar{p})_t \quad (9.6.285)$$

Por fim, temos a curva  $\Delta p = 0$ . Isto é, o excesso de demanda por bens no curto prazo é zero. A inclinação é positiva devido ao fato de que um aumento no nível de preços deve ser compensado por um aumento na taxa de câmbio. Todavia, a inclinação é menor do que  $45^\circ$ , o que indica que a depreciação da taxa de câmbio é mais do que proporcional ao aumento do nível de preços. O aumento da taxa de câmbio em magnitude semelhante ao aumento do nível de preços ainda não compensa a redução da oferta real de moeda. Assim, a taxa de juros precisa aumentar para restabelecer o equilíbrio no mercado monetário. Porém, isso inibirá os gastos. Para manter o pleno emprego, o país precisa atrair mais recursos por meio de uma desvalorização superior a mudança do nível de preços. Note que  $\frac{ds}{dp} = \left(1 + \frac{\beta_3}{\beta_1 \alpha_2}\right) > 1$ .

Vamos analisar o caso de overshooting como na Figura 9.6.13.

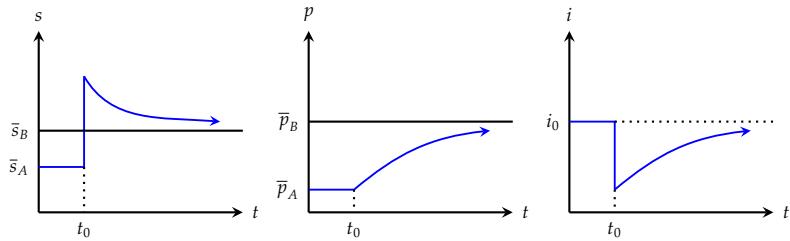
Observe que  $\Delta m_t^S = x\%$ . Assim,  $\Delta \bar{s} = x\%$  e  $\Delta \bar{p} = x\%$ . Como  $y$ ,  $i_t^*$  e  $p$  são constantes ou rígidos, suas mudanças são iguais a zero. Além disso, sabemos que  $d\bar{s}_t = dm_t$ . Disso decorre que  $\frac{ds}{dm} = 1 + \frac{1}{\alpha_2 \phi} > 1 \Rightarrow$  Overshooting. No curto prazo, os preços são rígidos, o mercado de bens não se ajusta imediatamente e o mercado monetário se ajusta por meio de uma queda em  $i$  (possível uma vez que  $\Delta s^e \neq 0 \Rightarrow i \neq i^*$ ). A taxa de câmbio ultrapassa o novo equilíbrio de longo prazo, i.e.,  $s_C > \bar{s}_B$ . No ponto C a taxa de câmbio se deprecia muito, alterando os termos de troca e reduzindo a taxa de juros doméstica. Isso impulsiona a demanda agregada. Como o produto é fixo em pleno

FIGURA 9.6.13 – OVERSHOOTING



emprego, os preços devem subir e os saldos monetários reais devem cair, elevando a taxa de juros. A taxa de câmbio se apreciará e o novo equilíbrio se encontra no ponto B. Os efeitos sobre cada variável pode ser visualizado na Figura 9.6.14.

FIGURA 9.6.14 – EFEITOS DO OVERSHOOTING



A especificação para a abordagem monetária até então baseou-se na suposição implícita de que os residentes domésticos não detêm dinheiro estrangeiro. As empresas multinacionais envolvidas no comércio e no investimento e os especuladores têm um incentivo para manter uma cesta de moedas, a fim de minimizar o risco de efeitos de reavaliação de suas riquezas em decorrência das mudanças na taxa de câmbio. Assim, a demanda por moeda é dada por

$$m_t^D - p_t = \Omega + \alpha_1 y_t - \alpha_2 i_t \quad (9.6.286)$$

em que  $\Omega$  captura o grau de substituição da moeda doméstica pela estrangeira.

Assume-se que  $\Omega$  depende da mudança esperada na taxa de câmbio, que, por sua vez, depende crescimento esperado da oferta de moeda ( $\Delta m^e$ ) e de sua variabilidade ( $\text{var}(\Delta m^e)$ ):

$$\Omega = \beta_0 \Delta m^e + \beta_1 \text{var}(\Delta m^e), \beta_0, \beta_1 < 0 \quad (9.6.287)$$

Assim, a taxa de câmbio será:

$$s_t = m_t - \beta_0 \Delta m^e - \beta_1 \text{var}(\Delta m^e) - \alpha_1 y_t + \alpha_2 i_t - p_t^* \quad (9.6.288)$$

Usando a paridade descoberta e assumindo que  $\Delta s^e = \Delta m^e$ :

$$s_t = m_t + (\alpha_2 - \beta_0) \Delta m^e - \beta_1 \text{var}(\Delta m^e) - \alpha_1 y_t + \alpha_2 i_t^* - p_t^* \quad (9.6.289)$$

Além dos efeitos de  $m$  e  $y$  sobre a taxa de câmbio, temos o efeito da substituição de moedas. O coeficiente de  $\Delta m^e$  é maior do que seria na ausência de substituição ( $\alpha_2 - \beta_0 > \alpha_2$ ) por causa da habilidade dos agentes para substituir moeda doméstica e estrangeira, exercendo pressão para uma depreciação ou apreciação corrente. O efeito será pronunciado se a variabilidade esperada da política monetária mudar com as mudanças esperadas em  $m$ .

Vamos agora assumir que as expectativas são estáticas, ou seja, assumimos que a taxa de depreciação esperada é zero. Também nos concentramos no ajuste de curto prazo. Isso implica que assumimos que os preços domésticos e os resultados são fixos. A economia que estudamos é uma pequena economia aberta. Não há exigência de PPP no modelo de portfólio. Isso implica que os bens não precisam ser substitutos perfeitos. Existem três ativos: dinheiro ( $M$ ), títulos domésticos em moeda local ( $B$ ) e títulos estrangeiros denominados em moeda estrangeira ( $F$ ). Assumimos que existe uma oferta líquida fixa de títulos domésticos, que é a soma das participações em títulos das famílias e títulos da autoridade monetária:

$$\bar{B} = B_p + B_a \quad (9.6.290)$$

em que  $B_p$  são os títulos detidos pelo público e  $B_a$  são os títulos detidos pela autoridade monetária. Da mesma forma, os títulos estrangeiros são detidos pelo público e pela autoridade monetária

$$\bar{F} = F_p + F_a \quad (9.6.291)$$

Mas as participações de ativos estrangeiros podem aumentar ou diminuir ao longo do tempo através do superávit ou déficit da conta corrente. O déficit da conta corrente, portanto, reflete a acumulação de ativos estrangeiros e é definido como a derivada parcial das participações de títulos estrangeiros do público em relação ao tempo:

$$CA = \frac{\partial F}{\partial t} = \dot{F} = T + i^*(F_p + F_a) \quad (9.6.292)$$

em que  $T$  é a balança comercial e  $i^*(F_p + F_a)$  é o juros recebidos pelas participações líquidas de ativos estrangeiros.

A balança comercial é função da taxa de câmbio real e da renda doméstica:

$$T = T \left( \frac{S}{P}, Y \right), \frac{\partial T}{\partial \left( \frac{S}{P} \right)} > 0, \frac{\partial T}{\partial Y} > 0 \quad (9.6.293)$$

A base monetária é definida como a soma das participações de títulos nacionais e estrangeiros da autoridade monetária

$$M = Ba + SFa \quad (9.6.294)$$

Note que os títulos estrangeiros são denominados em moeda estrangeira, o que implica que temos que multiplicar pela taxa de câmbio. A riqueza financeira total é dada pela seguinte identidade

$$W = M + B_p + SF_p = Ba + SF_a + B_p + SF_p = \bar{B} + S\bar{F} \quad (9.6.295)$$

Primeiro, a demanda por moeda é função da taxa de juros, da mudança esperada na taxa de câmbio, do produto e da riqueza financeira:

$$M = m(i, \mathbb{E}[\dot{S}], Y, W) \quad (9.6.296)$$

em que  $\frac{\partial m}{\partial i} < 0, \frac{\partial m}{\partial \mathbb{E}[\dot{S}]} < 0, \frac{\partial m}{\partial Y} > 0$  e  $\frac{\partial m}{\partial W} > 0$ .

A demanda por títulos domésticos é função da taxa de juros, da mudança esperada na taxa de câmbio, do produto e da riqueza financeira:

$$B_p = b(i, \mathbb{E}[\dot{S}], Y, W) \quad (9.6.297)$$

em que  $\frac{\partial b}{\partial i} < 0, \frac{\partial b}{\partial \mathbb{E}[\dot{S}]} < 0, \frac{\partial b}{\partial Y} < 0$  e  $\frac{\partial b}{\partial W} > 0$ .

A demanda por títulos estrangeiros é:

$$SF_p = f(i, \mathbb{E}[\dot{S}], Y, W) \quad (9.6.298)$$

em que  $\frac{\partial f}{\partial i} < 0, \frac{\partial f}{\partial \mathbb{E}[\dot{S}]} > 0, \frac{\partial f}{\partial Y} < 0$  e  $\frac{\partial f}{\partial W} > 0$ .

Para iniciarmos o modelo, vamos tomar a diferencial total da identidade da riqueza com respeito à riqueza financeira  $W$ :

$$dW - \frac{\partial m}{\partial W}dw - \frac{\partial b}{\partial W}dw - \frac{\partial f}{\partial W}dw = 0 \Rightarrow \frac{\partial m}{\partial W} + \frac{\partial b}{\partial W} + \frac{\partial f}{\partial W} = 1 \quad (9.6.299)$$

Esta relação é implícita, uma vez que um aumento da riqueza pode ser realizado com aumento da oferta monetária, títulos nacionais ou títulos estrangeiros. A mudança na demanda pelos três ativos deve somar para um. Esta relação é conhecida como restrição do balanço e é uma identidade. Tomando a diferencial total da identidade da riqueza em relação à taxa de juros e à mudança esperada na taxa de câmbio, encontramos

$$\underbrace{\frac{\partial m}{\partial i}}_{<0} + \underbrace{\frac{\partial b}{\partial i}}_{>0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial i}}_{<0} = 0 \quad (9.6.300)$$

$$\underbrace{\frac{\partial m}{\partial \mathbb{E}[\dot{S}]}}_{<0} + \underbrace{\frac{\partial b}{\partial \mathbb{E}[\dot{S}]}}_{<0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \mathbb{E}[\dot{S}]}}_{>0} = 0 \quad (9.6.301)$$

Por que essas condições são válidas? Se, por exemplo, a taxa de juros aumentar, então o investidor ajusta sua carteira. Dado os sinais das derivadas parciais, o investidor aumenta as participações de títulos domésticos e diminui em moeda e títulos estrangeiros.

Agora, obteremos as condições de equilíbrio do mercado de ativos no plano  $S \times i$ . Tomando a diferencial total da identidade da riqueza com relação a  $i$ ,  $W$  e  $S$  e sob o pressuposto de que  $\mathbb{E}[\dot{S}] = 0$ , temos:

$$dW = F_p dS \quad (9.6.302)$$

$$0 = \frac{\partial m}{\partial i} di + \frac{\partial m}{\partial W} dW \quad (9.6.303)$$

$$0 = \frac{\partial b}{\partial i} di + \frac{\partial b}{\partial W} dW \quad (9.6.304)$$

$$F_p dS = \frac{\partial f}{\partial i} di + \frac{\partial f}{\partial W} dW \quad (9.6.305)$$

A estrutura do mercado monetário (todas as combinações de taxa de juros e da taxa de câmbio em que o mercado monetário está em equilíbrio) pode ser encontrada se inserirmos a equação (9.6.302) em (9.6.303) tal que

$$0 = \frac{\partial m}{\partial i} di + \frac{\partial m}{\partial W} F_p dS \Rightarrow \frac{dS}{di} = -\frac{\frac{\partial m}{\partial i}}{\frac{\partial m}{\partial W} F_p} > 0 \quad (9.6.306)$$

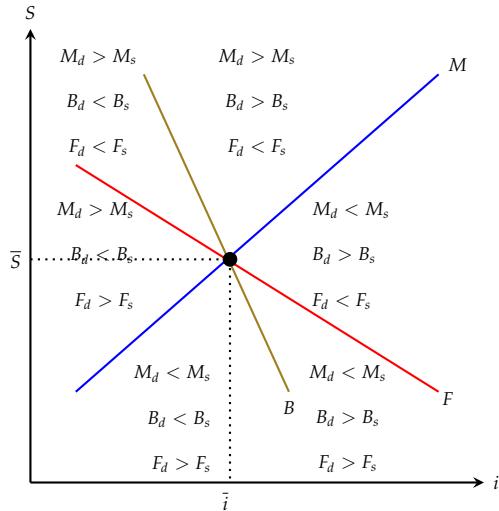
A estrutura do mercado de títulos domésticos (todas as combinações de taxa de juros e da taxa de câmbio em que o mercado de títulos domésticos está em equilíbrio) pode ser encontrada se

inserimos a equação (9.6.302) em (9.6.304) tal que

$$0 = \frac{\partial b}{\partial i} di + \frac{\partial b}{\partial W} F_p dS \Rightarrow \frac{dS}{di} = -\frac{\frac{\partial b}{\partial i}}{\frac{\partial b}{\partial W} F_p} < 0 \quad (9.6.307)$$

A estrutura do mercado de títulos estrangeiros (todas as combinações de taxa de juros e da taxa de câmbio em que o mercado de títulos estrangeiros está em equilíbrio) pode ser encontrada se inserimos a equação (9.6.302) em (9.6.305) tal que

$$F_p dS = \frac{\partial f}{\partial i} di + \frac{\partial f}{\partial W} F_p dS \Rightarrow \frac{dS}{di} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial i}}{1 - \frac{\partial f}{\partial W} F_p} < 0 \quad (9.6.308)$$



O modelo está em equilíbrio quando os três mercados estão em equilíbrio, isto é, onde os três segmentos de reta se cruzam.

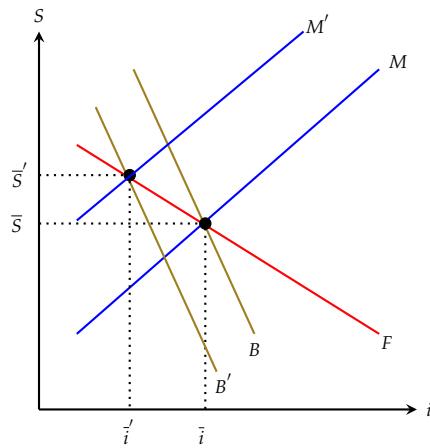
- Segmento de reta  $M$ : inclinado para cima.  $\uparrow S \Rightarrow \uparrow W (\bar{F}_{S'} > \bar{F}_S) \Rightarrow \uparrow M_d (\overline{M_d}) \Rightarrow \uparrow i$ .
- Segmento de reta  $B$ : inclinado para baixo.  $\uparrow S \Rightarrow \uparrow B_d \Rightarrow \uparrow P(B_d) \Rightarrow \downarrow i \Rightarrow \downarrow B_d$ .
- Segmento de reta  $F$ : inclinado para baixo.  $\uparrow S \Rightarrow \uparrow B_d \Rightarrow \downarrow M$  e  $\downarrow F$ .

Observamos que a inclinação de  $B$  é maior do que a inclinação de  $F$ . Assumimos que as mudanças na taxa de juros afetam a demanda por títulos domésticos mais do que afeta a demanda por títulos estrangeiros. Considere um ponto em que a taxa de câmbio é igual a  $S$ , mas onde a taxa de juros está acima do seu valor de equilíbrio. Se a taxa de câmbio estiver fixa e a taxa de juros estiver acima de  $i$ , então a demanda por dinheiro deve ser menor do que em equilíbrio, há excesso

de dinheiro. Isso implica que em todos os pontos acima do segmento  $M$  há excesso de demanda por moeda e em todos os pontos abaixo há excesso de oferta.

Suponha que haja uma expansão monetária por meio da compra de títulos. Isso implica que  $M$  aumenta e  $B$  diminui, enquanto que  $W$  fica inalterado. Em outras palavras  $dM = -dB_p = dB_a$ . A autoridade monetária vende  $M$  e compra  $B \Rightarrow \uparrow B_d \Rightarrow \uparrow P(b_d) \Rightarrow \downarrow i$ . O segmento  $B$  desloca-se para a esquerda.  $M_s > M_d \Rightarrow \uparrow F_d$  e  $\uparrow B_d \Rightarrow \downarrow i$  e  $\uparrow S$ . O segmento  $M$  desloca-se para a esquerda. O segmento  $F$  permanece inalterado porque a operação de mercado aberto envolve apenas um *swap* de  $M$  por  $B$ . Em suma, a operação de mercado aberto leva a  $\uparrow B_d$  E  $M_s > M_d$ . O efeito total desta operação de mercado aberto é que a taxa de juros cai de  $i$  para  $i'$  e a taxa de câmbio deprecia de  $S$  para  $S'$ . Este efeito é apresentado na Figura 9.6.15.

FIGURA 9.6.15 – EFEITO DE UMA EXPANSÃO MONETÁRIA

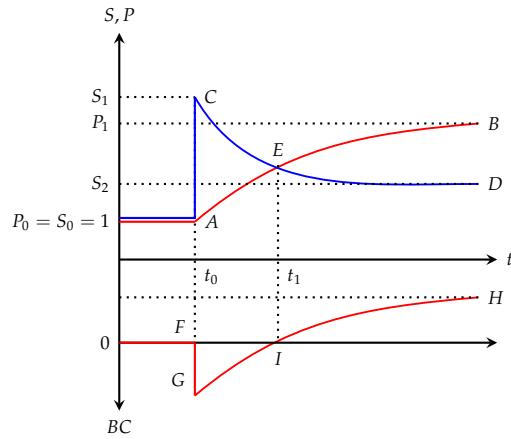


A expansão monetária por meio da compra de títulos tem efeito sobre a conta corrente, como apresentado pela Figura 9.6.16. Lembre que  $CA = \frac{\partial F}{\partial t} = \dot{F} = t + i^*(F_p + F_a) = T + i^*F$ . Isto é,  $\uparrow M \Rightarrow \uparrow S$  e  $\downarrow i$ . O superávit da conta corrente é refletido por uma acumulação de títulos estrangeiros, levando a uma valorização da moeda. Consequentemente, obteremos um efeito adicional sobre a taxa de câmbio no longo prazo. Isso, juntamente com os ajustes do nível de preços, afetará a balança comercial. A longo prazo, a conta corrente é equilibrada, de modo que uma receita de investimento estrangeiro líquido positivo  $i^*F$  requer um déficit na balança comercial.

No instante  $t_0$ ,  $S_0 = P_0 = 1$  (A) e a balança comercial é zero (F). Quando o governo expande  $M \Rightarrow \uparrow S$  para  $S_1$  (C). Ao mesmo tempo,  $\downarrow i$ . Como resultado da moeda depreciada, há uma melhora na balança comercial, há um aumento nas exportações e uma queda nas importações. A balança comercial melhora (G). Como consequência, há um superávit em conta corrente que implica que há uma acumulação de ativos estrangeiros. Existe agora um excesso de oferta de títulos estrangeiros e as famílias tentam reequilibrar suas carteiras vendendo títulos estrangeiros e comprando títulos nacionais. Como resultado, a taxa de câmbio começa a apreciar (de C para D). A moeda apreciada leva a um declínio na competitividade, de modo que a balança comercial se deteriora (de G para H).

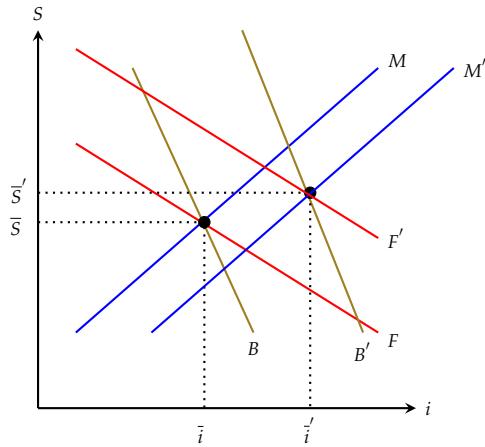
A expansão fiscal por meio da venda de títulos também tem efeitos sobre a taxa de

FIGURA 9.6.16 – EFEITO DE UMA EXPANSÃO MONETÁRIA SOBRE A BALANÇA COMERCIAL



câmbio, como pode ser visualizado na Figura 9.6.17. O governo vende títulos para o setor privado, o que implica que tanto  $B$  como  $W$  aumentam pelo mesmo valor que o déficit público.  $\uparrow W \Rightarrow \uparrow F_d$ . Portanto, um déficit público financiado por bonificações leva ao excesso de oferta de títulos domésticos, ao excesso de demanda por moeda e ao excesso de demanda por títulos estrangeiros. Como existe demanda excessiva de títulos estrangeiros, a reta  $F$  mudará para a direita,  $F'$ . O aumento no fornecimento de títulos domésticos que cria um excesso de oferta de títulos domésticos leva a menores preços de títulos e, portanto, a uma taxa de juros mais elevada. A reta  $B$  mudará para a direita,  $B'$ . Há excesso de demanda por moeda, levando a uma mudança de  $M$  para  $M'$ . O efeito total é uma moeda depreciada e uma taxa de juros mais elevada.

FIGURA 9.6.17 – EFEITO DE UMA EXPANSÃO FISCAL



### Teste do Monopolista Hipotético

O Teste do Monopolista Hipotético representa a estrutura analítica para a determinação do mercado relevante antitruste. O mercado relevante se determinará em termos dos produtos

e/ou serviços que o compõem (dimensão do produto) e da área geográfica para qual a venda destes produtos é economicamente viável (dimensão geográfica). Segundo o teste do “monopolista hipotético”, o mercado relevante é definido como o menor grupo de produtos e a menor área geográfica necessários para que um suposto monopolista esteja em condições de impor um “pequeno porém significativo e não transitório aumento de preços”.

A delimitação de mercado relevante é passo inicial e essencial para a análise em defesa da concorrência de fusões e aquisições (atos de concentração), como pode ser visto nos chamados “Guias Horizontais” do Brasil (SEAE/SDE, 2001), EUA (FTC/DOJ, 1994) e Comunidade Europeia. Esta delimitação usa o conceito de Teste do Monopolista Hipotético (TMH), em que o mercado relevante será o menor conjunto de empresas e/ou produtos, incluindo os participantes do ato de concentração (AC), em que um aumento (de 5%) permanente e não transitório de preços será lucrativo para os partícipes.

Na literatura norte-americana, onde o conceito foi proposto, o uso prático do TMH e sua avaliação de lucratividade frente a um SSNIP muitas vezes é concretizada através da estimação da perda crítica (*critical loss*) ou da elasticidade crítica (*critical elasticity*). Destaca-se que a análise segue a estrutura *ceteris paribus*, isto é, considerando que concorrentes – que não são o monopolista hipotético – não reagem a mudanças de preços. Isto pode ser uma simplificação forte, pois é possível que frente a um aumento de preços unilateral os concorrentes busquem aumentar ou diminuir preços<sup>6</sup>.

O SSNIP deve ser avaliado em relação a preços de mercado, exclusive situações de cartel ou outra infração à livre concorrência e em condições em que não há discriminação de preços por parte de um agente. Neste último caso, que pode ser bastante comum em produtos diferenciados, os mercados onde a discriminação de preços é possível são separados, gerando mais de um mercado relevante para análise. A discriminação de preços ocorre quando um produtor consegue cobrar preços diferenciados a consumidores diferenciados, sobrestando situações de arbitragem.

A sequência de análise envolve a inclusão de produtos na cesta do monopolista hipotético, (a partir dos produtos das empresas requerentes do ato de concentração) por critérios de proximidade em substituição de uso ou percepção dos consumidores. Ferramentas para este ordenamento seriam as elasticidades-preço cruzadas e/ou as taxas de desvio. Ou seja, o mercado relevante se constituirá do menor espaço econômico no qual seja factível a uma empresa, atuando de forma isolada, ou a um grupo de empresas, agindo de forma coordenada, exercer poder de mercado.

Em situação onde elasticidades-preço cruzadas de um grupo de produtos e/ou empresas partes de um potencial mercado são estimadas com sucesso, a elasticidade-preço do monopolista hipotético pode ser calculada diretamente a partir das elasticidades-preço próprias e cruzadas de cada firma e/ou produto integrante do “monopolista”.

A partir de uma medida de redução de vendas de um “monopolista hipotético” frente a um aumento de preços, resta avaliar a lucratividade deste aumento, pois de acordo com o Guia brasileiro o mercado relevante é definido quando este aumento de preços for economicamente interessante ou economicamente viável.

<sup>6</sup> A possibilidade de entrada ou substituição pelo lado da oferta (a reação dos concorrentes) é considerada em outras partes da análise pelo agente antitruste.

Na literatura internacional o teste quantitativo para avaliação da lucratividade e interesse em aumentar preços traz o nome de perda crítica. A perda crítica mensura “frente a um SSNIP, qual é a menor perda nas quantidades vendidas que deixa o aumento não lucrativo para o “monopolista hipotético”?

A apresentação básica do cálculo de perda crítica segue uma análise de ponto de equilíbrio (lucros no mínimo iguais após o aumento de preços, ou seja, *break-even*) e, a princípio, não pressupõe nenhuma teoria sobre o comportamento da oferta, exceto uma hipótese simplificadora de custos marginais constantes, que neste caso, podem ser mensurados pelo custo variável médio.

Frente a um aumento de preços SSNIP, o “monopolista” irá perceber um benefício igual a  $Q_2(P_2 - P_1)$ , ou seja as novas vendas recebem um valor adicional por unidade vendida. Por outro lado, o aumento de preços leva a uma queda de margem bruta, devido às menores vendas, isto é,  $(P_1 - c)(Q_2 - Q_1)$ , onde  $(P_1 - c)$  representa a diferença entre preços e custos iniciais. O aumento de preços ( $\Delta P = P_2 - P_1$ ) será lucrativo se os lucros não caírem. Definindo a variação de lucros como  $\pi_2 - \pi_1$ , queremos encontrar  $\Delta Q_2 = Q_2 - Q_1$  que deixa a empresa indiferente, ou seja,

$$\pi_2 - \pi_1 = P_2 Q_2 - c Q_2 - (P_1 Q_1 - c Q_1) \geq 0 \quad (9.6.309)$$

Destaca-se a hipótese simplificadora de custos marginais constantes. Custos fixos são desconsiderados pois são supostos iguais antes e depois do aumento de preços.

Através de um artifício de somar e subtrair  $P_1 Q_2$ , podemos escrever

$$\begin{aligned}
& P_2 Q_2 - c Q_2 - (P_1 Q_1 - c Q_1) + P_1 Q_2 - P_1 Q_2 \geq 0 \\
& (P_2 - P_1) Q_2 + (P_1 - c)(Q_2 - Q_1) \geq 0 \\
& \Delta P Q_2 + (P_1 - c) \Delta Q \geq 0 \\
& (\Delta P)[Q_1 + \Delta Q] + (P_1 - c) \Delta Q \geq 0 \\
& SSNIP \times P_1 [Q_1 + \Delta Q] + (P_1 - c) \Delta Q \geq 0 \quad \left[ SSNIP = \frac{\Delta P}{P_1} \right] \\
& \frac{SSNIP \times P_1 [Q_1 + \Delta Q]}{P_1} + \frac{(P_1 - c)}{P_1} (\Delta Q) \geq 0 \\
& SSNIP [Q_1 + \Delta Q] + \mu (\Delta Q) \geq 0 \\
& SSNIP [1 + (\% \Delta Q)] + \mu (\% \Delta Q) \geq 0 \quad \left[ \times \frac{1}{Q_1} \right] \\
& \% \Delta Q (SSNIP + \mu) + SSNIP \geq 0 \\
& \% \Delta Q \geq - \frac{SSNIP}{SSNIP + \mu} \\
& | \% \Delta Q | \leq \frac{SSNIP}{SSNIP + \mu} \\
& CL = \frac{SSNIP}{SSNIP + \mu} \quad (9.6.310)
\end{aligned}$$

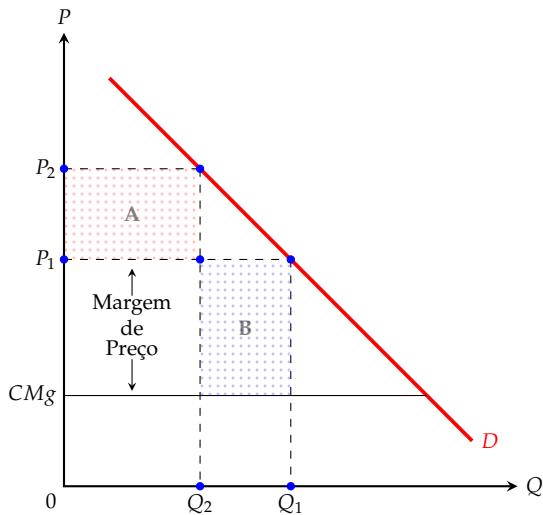
A perda crítica (CL) é a maior destas perdas (em valor absoluto) que ainda faz com que os lucros do monopolista aumentem com o aumento de preços.

Se a perda efetiva de vendas por causa do SSNIP (chamado de *actual loss* – AL) for menor do que o CL, então o SSNIP é lucrativo e determina-se o mercado. Ou seja, o mercado relevante pode ser delimitado pelo monopolista hipotético se  $AL < CL$ . Se a perda efetiva de vendas for maior do que o CL então o SSNIP não é lucrativo e o mercado não está bem definido. Nesse caso ainda há substitutos próximos do(s) produto(s)/empresa(s) componentes do “monopolista”, que exercem pressão competitiva sobre este monopolista e disciplinam preços, isto é, tornam desinteressante o exercício unilateral de poder de mercado, através da imposição de um SSNIP, do ponto de vista estático e supondo correta mensuração de lucros.

Graficamente, na Figura 9.6.18, temos que a questão para o teste de perda crítica é avaliar se, com um SSNIP, a área A é maior que a área B.

Tradicionalmente o SSNIP é tomado como 5% ou até 10%, mas o seu valor deveria depender do contexto e histórico de aumentos de preços (descontados efeitos inflacionários) dos produtos/empresas em análise, de acordo com vários autores.

FIGURA 9.6.18 – MUDANÇA DE LUCROS FRENTE A UM AUMENTO DE PREÇOS



Uma forma alternativa e bastante comum de apresentar a perda crítica vem de uma pequena manipulação da expressão acima, dividindo ambos os lados pela variação percentual de preços e definindo uma elasticidade-preço da demanda crítica para *break-even* ( $\eta_D^{CL}$ ), isto é

$$\frac{\frac{CL}{\Delta P}}{\frac{P_1}{P_1}} = \frac{\frac{SSNIP}{SSNIP + \mu}}{\frac{\Delta P}{P_1}}$$

$$\eta_D^{CL} = \frac{1}{SSNIP + \mu} \quad (9.6.311)$$

A lógica de análise segue a mesma: o mercado relevante estará bem definido pelas empresas/produtos que compõe o “monopolista”, se a perda efetiva for menor do que a perda crítica ( $AL \leq CL$ ). Em termos de elasticidades, temos  $|\eta_D| < |\eta_D^{CL}|$ . As elasticidades são avaliadas na variação percentual de preço SSNIP e/ou nos preços e quantidades iniciais, para modelos de demanda com elasticidade variável.

Um conceito associado é o de elasticidade-preço da demanda crítica para maximização de lucro, ou elasticidade crítica apenas. Aqui, impõe-se a condição de que o monopolista hipotético é maximizador de lucros e assim irá realizar um aumento no mínimo igual ao SSNIP se a elasticidade preço da demanda do mercado for compatível com este aumento ou maior (em valor absoluto). Se a elasticidade-preço da demanda do monopolista for menor que a elasticidade compatível com o SSNIP, a demanda de mercado é tal que um monopolista maximizador de lucros irá impor aumento de preços menor do que o SSNIP. Assim o exercício de poder de mercado do monopolista hipotético através do SSNIP não é lógico, o que sugere que o mercado relevante deve incluir mais produtos ou concorrentes. Isto irá reduzir a elasticidade de demanda percebida pelo monopolista até o ponto em que o SSNIP é uma estratégia maximizadora de lucros (racional e lucrativa).

A elasticidade crítica e a perda crítica (na forma de elasticidade) depende da forma funcional. O princípio básico é a fórmula da elasticidade crítica

$$\eta^M = \frac{1 + SSNIP}{\mu + SSNIP} \quad (9.6.312)$$

sendo que diferentes formas funcionais permitem chegar a outras fórmulas para avaliar a mudança de preços entre o preço atual e o preço maximizador de lucros para o monopolista hipotético.

### Racionamento

Ao proceder ao racionamento, a autoridade central impõe a redefinição da procura do bem que passa a ser representada por uma linha vertical que intersecta a curva da oferta para o nível de preço máximo.

Temos o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \max_{x,y} U &= U(x, y) \\ \text{sujeito a } B &\geq p_x x + p_y y \\ C &\geq c_x x + c_y y, \end{aligned} \quad (9.6.313)$$

em que  $B \geq p_x x + p_y y$  é a restrição tradicional e  $C \geq c_x x + c_y y$  é a restrição de quantidade. Isto é, nosso interesse é o comportamento de um consumidor que é livre para comprar bens em alguns mercados, mas é forçado a comprar certos níveis de bens em outros mercados.

A função Lagrangeana é:

$$L = U(x, y) - \lambda(-B + p_x x + p_y y) - \mu(-C + c_x x + c_y y). \quad (9.6.314)$$

As condições de Karush-Kahn-Tucker são:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \iff U_x(x, y) - \lambda p_x - \mu c_x = 0, \quad (9.6.315)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \iff U_y(x, y) - \lambda p_y - \mu c_y = 0, \quad (9.6.316)$$

$$\lambda \geq 0, \quad (9.6.317)$$

$$\mu \geq 0, \quad (9.6.318)$$

$$\lambda(B - p_x x - p_y y) = 0, \quad (9.6.319)$$

$$\mu(C - c_x x - c_y y) = 0, \quad (9.6.320)$$

$$B \geq p_x x + p_y y, \quad (9.6.321)$$

$$C \geq c_x x + c_y y. \quad (9.6.322)$$

Vamos entender esse assunto por meio do seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \max_{x,y} U = xy^2 \\ & \text{sujeito a } 100 \geq x + y \\ & \quad 120 \geq 2x + y. \end{aligned} \quad (9.6.323)$$

A função Lagrangeana é:

$$L = xy^2 - \lambda(-100 + x + y) - \mu(-120 + 2x + y). \quad (9.6.324)$$

As condições de Karush-Kahn-Tucker são:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0 \iff y^2 - \lambda - 2\mu = 0, \quad (9.6.325)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0 \iff 2xy - \lambda - \mu = 0, \quad (9.6.326)$$

$$\lambda \geq 0, \quad (9.6.327)$$

$$\mu \geq 0, \quad (9.6.328)$$

$$x + y \leq 100, \quad (9.6.329)$$

$$2x + y \leq 120, \quad (9.6.330)$$

$$\lambda(-100 + x + y) = 0, \quad (9.6.331)$$

$$\mu(-120 + 2x + y) = 0 \quad (9.6.332)$$

1. Caso 1:  $\lambda = 0$  e  $\mu = 0$

Nesse caso, teríamos  $y = 0$  e  $x = 0$ .

2. Caso 2:  $\lambda > 0$  e  $\mu = 0$

Nesse caso, teríamos

$$y^2 - \lambda = 0, \quad (9.6.333)$$

$$2xy - \lambda = 0. \quad (9.6.334)$$

Isso implica em

$$y(2x - y) = 0. \quad (9.6.335)$$

do qual podemos depreender que  $y = 0$  ou  $2x = y$ .

Com  $y = 0$ , teríamos  $x = 100$ . Mas isso contradiz  $2x + y \leq 120$ .

Com  $y = 2x$ , teríamos  $x = \frac{100}{3}$  e  $y = \frac{200}{3}$ . Mas isso contradiz  $2x + y \leq 120$ .

3. Caso 3:  $\lambda = 0$  e  $\mu \neq 0$

Nesse caso, teríamos

$$y^2 - 2\mu = 0, \quad (9.6.336)$$

$$2xy - \mu = 0. \quad (9.6.337)$$

Isso implica em

$$y(y - 4x) = 0. \quad (9.6.338)$$

Com  $y = 0$ , teríamos  $x = 60$ . Mas isso contradiz o enunciado  $\mu \neq 0$ .

Com  $y = 4x$ , teríamos  $x = 20$  e  $y = 80$ .

4. Caso 4:  $\lambda \neq 0$  e  $\mu \neq 0$

Nesse caso, teríamos

$$x + y = 100, \quad (9.6.339)$$

$$2x + y = 120. \quad (9.6.340)$$

Isso implica em  $x = 20$  e  $y = 80$ . Mas isso contradiz o enunciado  $\lambda \neq 0$ .

A QRND é satisfeita.

As condições de segunda ordem para o caso 3 são tais que

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2y \\ 1 & 2y & 2x \end{pmatrix}, \quad (9.6.341)$$

cujo determinante é 480. A condição para o par  $(x, y) = (20, 80)$  é que o sinal do determinante de  $H$  seja do mesmo sinal que  $(-1)^n$ . Aqui,  $n = 2$  e a condição é satisfeita.

### Modelo de Markowitz (Média-Variância)

Vamos começar com um portfólio. Um portfólio consiste em uma coleção de  $n$  ativos com preços  $p_i, i = 1, \dots, n$ . Podemos definir o *share* de cada ativo no portfólio como  $N_i$ . Assim, o valor do portfólio pode ser expresso como

$$V = N_1 p_1 + N_2 p_2 + \dots + N_n p_n = \sum_{i=1}^n N_i p_i \quad (9.6.342)$$

Um portfólio típico tem um valor  $V > 0$ . Definindo os pesos como

$$\omega_i = \frac{N_i p_i}{N_1 p_1 + N_2 p_2 + \dots + N_n p_n} = \frac{N_i p_i}{V} \quad (9.6.343)$$

também podemos definir um portfólio como uma média de ativos

$$\{\omega_1, \dots, \omega_n\}, \quad \omega_1 + \dots + \omega_n = 1 \quad (9.6.344)$$

Um portfólio característico é determinado pelo retorno de seus ativos e seus pesos. Assim, temos os retornos médios

Ativo	1	2	...	$n$
Retorno médio	$\bar{r}_1$	$\bar{r}_2$	...	$\bar{r}_n$

e a matriz de variância-covariância

	$r_1$	$r_2$	$\dots$	$r_n$
$r_1$	$\sigma_1^2$	$\sigma_{12}$	$\dots$	$\sigma_{1n}$
$r_2$	$\sigma_{21}$	$\sigma_2^2$	$\dots$	$\sigma_{2n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$r_n$	$\sigma_{n1}$	$\sigma_{n2}$	$\dots$	$\sigma_{nn}$

Considere, por exemplo, dois ativos  $A$  e  $B$ . Assim,

Ativo	1	2
Retorno médio	0.0149	0.0100

e

	$r_1$	$r_2$
$r_1$	0.0077	0.0021
$r_2$	0.0021	0.0036

Note que  $\sigma_1 = 8.81\%$  e  $\sigma_2 = 5.99\%$ , com  $\rho_{12} = 0.4$ .

O retorno esperado de um portfólio com dois ativos pode ser escrito como

$$\bar{r}_p = \omega_1 \bar{r}_1 + \omega_2 \bar{r}_2 \quad (9.6.345)$$

A variância de um portfólio com dois ativos pode ser escrito como

$$\sigma_p^2 = \omega_1 \sigma_1^2 + \omega_2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_{12} \quad (9.6.346)$$

que é a soma de todas as entradas da tabela abaixo

	$\omega_1 r_1$	$\omega_2 r_2$
$\omega_1 r_1$	$\omega_1^2 \sigma_1^2$	$\omega_1 \omega_2 \sigma_{12}$
$\omega_2 r_2$	$\omega_1 \omega_2 \sigma_{12}$	$\omega_2^2 \sigma_2^2$

A partir disso, considerando um portfólio com  $n$  ativos, podemos definir

1. Retorno do portfólio

$$\bar{r}_p = \omega_1 \bar{r}_1 + \omega_2 \bar{r}_2 + \dots + \omega_n \bar{r}_n \quad (9.6.347)$$

2. Retorno esperado do portfólio

$$\tilde{r}_p = \omega_1 \tilde{r}_1 + \omega_2 \tilde{r}_2 + \dots + \omega_n \tilde{r}_n \quad (9.6.348)$$

3. A variância do retorno do portfólio é

$$\sigma_2^p = \text{Var} [\tilde{r}_p] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} \quad (9.6.349)$$

4. A volatilidade do retorno do portfólio é

$$\sigma_p = \sqrt{\text{Var} [\tilde{r}_p]} = \sqrt{\sigma_p^2} \quad (9.6.350)$$

Podemos trabalhar a variância do portfólio para verificar que

$$\begin{aligned} \sigma_2^p &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \omega_i \omega_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{ii} + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{ij} \\ &= \left(\frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right) + \left(\frac{n^2 - n}{n}\right) \left(\frac{1}{n^2 - n} \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} \left(\frac{1}{n}\right)^2 \sigma_{ij}\right) \\ &= \left(\frac{1}{n}\right) (\text{variância média}) + \left(\frac{n^2 - n}{n}\right) (\text{covariância média}) \end{aligned} \quad (9.6.351)$$

À medida que  $n$  se torna muito grande, temos que

1. A contribuição dos termos de variância vai para zero
2. A contribuição dos termos de covariância vai para a “covariância média”.

O objetivo é investir  $x$  unidades monetárias em diferentes investimentos e o retorno é modelado por uma distribuição Gaussiana bivariada. Assim, temos o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} &\min_{\omega_1, \omega_2} \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_{12} \\ &\text{sujeito a } \omega_1 + \omega_2 = 1 \\ &\quad \omega_1 \geq 0 \\ &\quad \omega_2 \geq 0 \\ &\quad \omega_1 \leq 1 \end{aligned}$$

$$\omega_2 \leq 1, \quad (9.6.352)$$

em que  $\omega_i$  é o peso dos ativos na carteira e  $\sigma_i$  é o risco dos ativos.

A função Lagrangeana é:

$$L = \omega_1^2 \sigma_1^2 + \omega_2^2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \omega_2 \sigma_{12} - \lambda(\omega_1 + \omega_2 - 1) - \mu(\omega_1) - \delta(\omega_2) + \alpha(-\omega_1 + 1) - \beta(-\omega_2 + 1). \quad (9.6.353)$$

As condições de Karush-Kahn-Tucker são:

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_1} = 0 \iff 2\omega_1 \sigma_1^2 + 2\omega_2 \sigma_{12} - \lambda - \mu + \alpha = 0, \quad (9.6.354)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_2} = 0 \iff 2\omega_2 \sigma_2^2 + 2\omega_1 \sigma_{12} - \lambda - \delta + \beta = 0, \quad (9.6.355)$$

$$\omega_1 + \omega_2 = 1, \quad (9.6.356)$$

$$\mu(\omega_1) = 0, \quad (9.6.357)$$

$$\delta(\omega_2) = 0, \quad (9.6.358)$$

$$\alpha(\omega_1 - 1) = 0, \quad (9.6.359)$$

$$\beta(\omega_2 - 1) = 0, \quad (9.6.360)$$

$$\omega_1 \geq 0, \quad (9.6.361)$$

$$\omega_2 \geq 0, \quad (9.6.362)$$

$$\omega_1 \leq 1, \quad (9.6.363)$$

$$\omega_2 \leq 1, \quad (9.6.364)$$

$$\mu \geq 0, \quad (9.6.365)$$

$$\delta \geq 0, \quad (9.6.366)$$

$$\alpha \geq 0, \quad (9.6.367)$$

$$\beta \geq 0. \quad (9.6.368)$$

Vamos testar os seguintes casos:

1. Caso 1:  $\omega_1 = 0$  e  $\omega_2 = 0$

Contradiz  $\omega_1 + \omega_2 = 1$ .

2. Caso 2:  $\omega_1 = 0$  e  $\omega_2 \neq 0$ .

Necessariamente  $\omega_2 = 1$ .

Isso implica que  $\mu \neq 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta \neq 0$  e  $\delta = 0$ .

3. Caso 3:  $\omega_1 \neq 0$  e  $\omega_2 = 0$ .

Necessariamente  $\omega_1 = 1$ .

Isso implica que  $\mu = 0$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta = 0$  e  $\delta \neq 0$ .

4. Caso 4:  $\omega_1 \neq 0$  e  $\omega_2 \neq 0$ .

Isso implica que  $\mu = 0$  e  $\delta = 0$ . E como consequência,  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$ .

$$\text{Obtemos } \omega_1 = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_{12}^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}} \text{ e } \omega_2 = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{12}^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}}.$$

A QRND é satisfeita.

As condições de segunda ordem também são satisfeitas.

### Provisão Ótima de um Bem Público Puro: Caso Contínuo

Sejam as seguintes características do modelo:

- existem  $n$  consumidores, indexados por  $i = 1, 2, \dots, n$
- $x_i$  é o consumo do bem privado
- $G$  é o consumo (comum) do bem público
- a preferência do agente  $i$  é descrita pela função de utilidade

$$u_i(x_i, G) \quad (9.6.369)$$

que é diferenciável (o que nos permite computar a utilidade marginal), crescente em ambos os argumentos (quanto maiores forem os valores de  $x_i$  e de  $G$  maior será a satisfação do consumidor, em decorrência do princípio de preferências monotônicas), quase-cônica (o que garante que a sua solução ótima é de fato um máximo) e satisfaz as condições de Inada (o que garante a existência de uma solução interna)

- $w_i$  é a dotação do bem privado  $i$  e  $W = \sum_{i=1}^n w_i$  é o total de dotações de bens privados; o indivíduo não tem nenhuma dotação inicial de bens públicos
- o bem público pode ser produzido a partir do bem privado de acordo com uma função de produção  $f$ , em que  $f' > 0$  e  $f'' < 0$ : isto é, se  $z$  é o total de unidades de bens privados que são usados como insumos para produzir o bem público, o nível de bem público produzido será

$$G = f(z) \quad (9.6.370)$$

Primeiro, fazemos a pergunta normativa sobre qual é o nível ótimo de oferta de um bem público puro. Assumimos que o governo de uma economia totalmente controlada escolha o nível de  $G$  e a alocação de bens privados  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  para os agentes de acordo com o critério de Pareto. Para resolvemos o problema precisamos de duas definições. Sejam as seguintes definições.

Uma alocação  $(x, G)$  é viável se existe um  $z \geq 0$  tal que

$$\sum_{i=1}^n x_i + z \leq W \quad (9.6.371)$$

$$G \leq f(z) \quad (9.6.372)$$

Uma alocação viável  $(x, G)$  é um ótimo de Pareto se não existe outra alocação viável  $(x', G')$  tal que

$$u_i(x'_i, G') \geq u_i(x_i, G), \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (9.6.373)$$

e para algum  $i$

$$u_i(x'_i, G') > u_i(x_i, G) \quad (9.6.374)$$

Ou seja, uma alocação viável (factível)  $(x, G)$  é ótima de Pareto se não houver maneira de tornar um agente estritamente melhor sem prejudicar alguém. Com isso em mente, podemos caracterizar o conjunto de alocações ótimas de Pareto.

O problema de otimização é

$$\max_{x, G, z} u_1(x_1, G) \quad (9.6.375)$$

$$\text{sujeito a } u_i(x_i, G) - \underline{u}_i \geq 0 \quad \text{para } i = 2, 3, \dots, n \quad (9.6.376)$$

$$W - \sum_{i=1}^n x_i - z \geq 0 \quad (9.6.377)$$

$$f(z) - G \geq 0 \quad (9.6.378)$$

$$G \geq 0, z \geq 0, x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \quad (9.6.379)$$

Para resolver este problema montamos o Lagrangeano, como segue:

$$\begin{aligned} L = & u_1(x_1, G) - \gamma_i [-u_i(x_i, G) + \underline{u}_i] - \lambda \left[ -W + \sum_{i=1}^n x_i + z \right] \\ & - \mu [-f(z) + G] - \alpha(-G) - \beta(-z) - \delta(-x_i) \end{aligned} \quad (9.6.380)$$

As condições de primeira ordem (condições necessárias e que nos dão as soluções) são:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \iff \gamma_i \frac{\partial u_i(x_i, G)}{\partial x_i} - \lambda + \delta = 0 \quad (9.6.381)$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = 0 \iff \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial u_i(x_i, G)}{\partial G} - \mu + \alpha = 0 \quad (9.6.382)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \iff -\lambda + \mu f'(z) + \beta = 0 \quad (9.6.383)$$

$$\gamma_i [-u_i(x_i, G) + \underline{u}_i] = 0 \quad (9.6.384)$$

$$\lambda \left[ -W + \sum_{i=1}^n x_i + z \right] = 0 \quad (9.6.385)$$

$$\mu [-f(z) + G] = 0 \quad (9.6.386)$$

$$\alpha(-G) = 0 \quad (9.6.387)$$

$$\beta(-z) = 0 \quad (9.6.388)$$

$$\delta(-x_i) = 0 \quad (9.6.389)$$

$$\gamma_i \geq 0 \quad (9.6.390)$$

$$\lambda \geq 0 \quad (9.6.391)$$

$$\mu \geq 0 \quad (9.6.392)$$

$$\alpha \geq 0 \quad (9.6.393)$$

$$\beta \geq 0 \quad (9.6.394)$$

$$\delta \geq 0 \quad (9.6.395)$$

$$u_i(x_i, G) - \underline{u}_i \geq 0 \quad (9.6.396)$$

$$W - \sum_{i=1}^n x_i - z \geq 0 \quad (9.6.397)$$

$$f(z) - G \geq 0 \quad (9.6.398)$$

$$G \geq 0 \quad (9.6.399)$$

$$z \geq 0 \quad (9.6.400)$$

$$x_i \geq 0 \quad (9.6.401)$$

As condições de Inada que assumimos serem válidas na função de utilidade implicam que as restrições de não-negatividade podem ser ignoradas (equações (9.6.399), (9.6.400) e (9.6.401), e, consequentemente, as equações (9.6.387), (9.6.388), (9.6.389), (9.6.393), (9.6.394) e (9.6.395)). Também sabemos que as condições de Inada garantem que a solução será interior e, portanto, as equações (9.6.396), (9.6.397) e (9.6.398) valem com a igualdade em vez de desigualdade. Disso decorre que  $\gamma_i$ ,  $\lambda$  e  $\mu$ , nas equações (9.6.390), (9.6.391) e (9.6.392), são todos estritamente positivos. Com isso, as condições necessárias e suficientes (suficientes devido à quase-concavidade em  $u$  e  $f$ ) podem ser resumidas em 3 equações (e não em 21):

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \iff \gamma_i \frac{\partial u_i(x_i, G)}{\partial x_i} - \lambda = 0 \quad (9.6.402)$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = 0 \iff \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial u_i(x_i, G)}{\partial G} - \mu = 0 \quad (9.6.403)$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 0 \iff -\lambda + \mu f'(z) = 0 \quad (9.6.404)$$

em que  $\gamma_1 = 1$  por convenção.

Temos da equação (9.6.402) que:

$$\gamma_i \frac{\partial u_i(x_i, G)}{\partial x_i} = \lambda \quad (9.6.405)$$

e da equação (9.6.404) que

$$\lambda = \mu f'(z) \quad (9.6.406)$$

Igualando (9.6.405) e (9.6.406) para eliminar  $\lambda$  e rearranjando, temos:

$$\begin{aligned} \gamma_i \frac{\partial u_i(x_i, G)}{\partial x_i} &= \mu f'(z) \\ \frac{\mu}{\gamma_i \frac{\partial u_i(x_i, G)}{\partial x_i}} &= \frac{1}{f'(z)} \\ \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial u_i(x_i, G)}{\partial G} &= \frac{1}{f'(z)} \quad \left[ \text{usando } \mu = \sum_{i=1}^n \gamma_i \frac{\partial u_i(x_i, G)}{\partial G} \text{ [ver (9.6.403)]} \right] \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i(x_i^*, G^*)}{\partial x_i^*} &= \frac{1}{f'(z^*)} \end{aligned} \quad (9.6.407)$$

A equação (9.6.407) é referida como condição de Samuelson, condição de Lindahl-Samuelson, ou às vezes até mesmo condição de Bowen-Lindahl-Samuelson.

O lado esquerdo da equação acima é a soma das taxas marginais de substituição dos  $n$  agentes.

Para ver isto, note que a partir da curva de indiferença do agente  $i$ , o termo  $\frac{\partial u_i(x_i, G)}{\partial G}$  denota a

quantidade do bem privado que o agente está disposto a abrir mão para ter um pequeno aumento no nível de consumo do bem público. O lado direito da equação acima é a quantidade do bem privado necessária para produzir uma unidade adicional de bem público (também conhecida como taxa marginal de transformação). Com base na regra acima, a condição de Samuelson diz o seguinte: qualquer alocação ótima é tal que a soma da quantidade de bens privados que os  $n$  consumidores estariam dispostos a desistir para ter uma unidade adicional de bem público deve ser igual à quantidade do bem privado que é realmente necessária para produzir a unidade adicional do bem público.

Se houver mais de uma mercadoria privada, digamos,  $k$  bens privados, e o bem público é produzido de acordo com

$$f(z_1, \dots, z_k) \quad (9.6.408)$$

então a condição correspondente de Samuelson para o nível ótimo de bens públicos é dada por

$$\sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial u_i(x_{ij}^*, G^*)}{\partial G^*}}{\frac{\partial u_i(x_{ij}^*, G^*)}{\partial x_{ij}^*}} = \frac{1}{\frac{\partial f(z_1^*, \dots, z_k^*)}{\partial z_j^*}}, \quad \forall j = 1, \dots, k \quad (9.6.409)$$

Uma ilustração gráfica da condição de Samuelson para o caso onde há dois indivíduos e dois bens é dada na Figura 9.6.19. Na Figura, a parte superior mostra as curvas de indiferença para o agente 1 e a restrição de produção  $AB$ . Suponha que nós fixamos o agente 1 na curva de indiferença  $u_1$ ; então as possibilidades para o agente 2 são mostradas na parte inferior da Figura por  $CD$  (que é a diferença entre  $AB$  e  $u_1$ ). Claramente, a eficiência de Pareto requer que a taxa marginal de substituição do agente 2 seja igual à inclinação da curva  $CD$  (isto é, no ponto  $E$ ). Mas esta é justamente a diferença entre a taxa marginal de transformação (a inclinação da fronteira de possibilidades de produção) e a taxa marginal de substituição do agente 1 (a inclinação de sua curva de indiferença).

Assim nós temos

$$TMgS_2 = TMgT - TMgS_1 \quad (9.6.410)$$

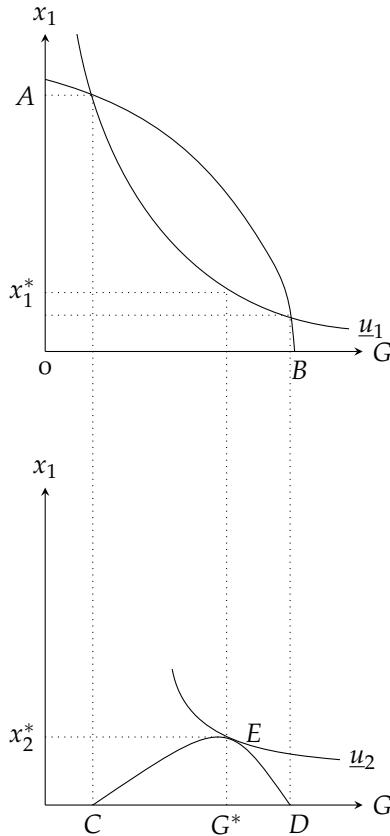
Como fazer a implementação da alocação ótima? Se o governo é capaz de cobrar impostos de montante fixo (*lump-sum*<sup>7</sup>) tanto para financiar as despesas quanto para redistribuir a renda, então a alocação ótima acima pode ser alcançada. Se os impostos de montante fixo não forem viáveis, o governo precisa usar distorções como impostos. Por exemplo, o imposto sobre a renda do trabalho pode ser utilizado para financiar os bens públicos.

Essa solução funciona em uma situação “totalmente controlada”, na qual o governo tem informações perfeitas sobre as preferências e, em seguida, pode definir  $G$  de maneira ideal. A fórmula acima não leva em conta quaisquer impostos distorcivos necessários para obter fundos para financiar os bens públicos. A exclusibilidade não desempenha nenhum papel na análise. A possibilidade de exclusão é relevante apenas para determinar os mecanismos de provisão possíveis. Nesse sentido, a análise de Samuelson pode ser considerada como uma análise de *first-best*. A pergunta prática é: como a provisão ótima de um bem público pode ser descentralizada, dadas as ferramentas políticas disponíveis e respeitando as restrições de informação? Vamos tentar responder essa pergunta na próxima seção.

---

<sup>7</sup> O imposto *lump sum*, ou de soma fixa, corresponde a um valor fixo que não depende da quantidade produzida ou vendida. Este imposto pode ser considerado como regressivo, pois é maior para aqueles que produzem e vendem menos. O contraste com um imposto por unidade, cobrado a cada unidade de produção produzida ou consumida, é que o imposto aumenta de tamanho à medida que a produção ou o consumo aumenta. Um imposto de montante fixo aumenta o custo fixo médio das empresas e, portanto, o custo total médio, mas não afeta o custo marginal ou o custo variável médio.

FIGURA 9.6.19 – PROVISÃO ÓTIMA DE BENS PÚBLICOS



As dificuldades da provisão pública de ordem conceituais são: i) *crowding out* da contribuição privada; ii) revelação das preferências; e iii) financiamento. A dificuldade prática é a análise de custos e benefícios.

**Exemplo 9.6.1.** Considere três consumidores ( $i = 1, 2, 3$ ) que derivam utilidade de seus consumos de um bem privado e de um bem público. Suas funções utilidade são da forma  $u_i = x_i G$ , em que  $x_i$  é o consumo do bem privado pelo consumidor  $i$  e  $G$  é a quantidade total do bem público consumida pelos três indivíduos. O custo unitário do bem privado é R\$ 1,00 e o custo unitário do bem público é R\$ 10,00. Os níveis de renda individuais em R\$ são  $\omega_1 = 30$ ,  $\omega_2 = 50$  e  $\omega_3 = 20$ . Qual a quantidade eficiente de bem público a ser consumida?

Calculando a taxa marginal de substituição para o consumidor  $i$ :

$$TMS_{G,x_i}^i = \frac{\partial u_i(x_i, G)/\partial G}{\partial u_i(x_i, G)/\partial x_i} = \frac{x_i}{G}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (9.6.411)$$

Assumindo produção competitiva, temos que a taxa marginal de transformação é igual a razão de preços:

$$TMT_{G,x_i} = \frac{p_G}{p_{x_i}} = 10 \quad (9.6.412)$$

Logo, da condição BLS:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 TMS_{G,x_i}^i &= TMT_{G,x_i} \\ \frac{x_1}{G} + \frac{x_2}{G} + \frac{x_3}{G} &= 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 10G \end{aligned} \quad (9.6.413)$$

Pela Lei de Walras, o valor do excesso de demanda de todos os bens é igual a zero:

$$\begin{aligned} p_x(x_1 + x_2 + x_3) + p_G G - (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 10G &= 100 \end{aligned} \quad (9.6.414)$$

Logo,  $G = 5$ .

**Exemplo 9.6.2.** A e B estão pensando em comprar um sofá. A função utilidade de A é dada por

$$u_A(s, m_A) = (1 + s)m_A \quad (9.6.415)$$

e a função de utilidade de B é

$$u_B(s, m_B) = (2 + s)m_B \quad (9.6.416)$$

em que  $s = 0$  se eles não comprarem o sofá e  $s = 1$  se comprarem. Além disso,  $m_A$  e  $m_B$  correspondem à quantidade de dinheiro que eles dispõem, respectivamente, para gastar no bem privado. Cada um deles tem R\$ 100,00 para gastar. Qual a maior quantia que eles poderiam pagar pelo sofá que deixasse ambos em situação melhor do que sem ter o sofá?

Se eles não compram o sofá ( $s = 0, m_A = m_B = 100$ ), suas utilidades serão:

$$u_A(0, 100) = 100 \quad (9.6.417)$$

$$u_B(0, 100) = 200 \quad (9.6.418)$$

Se eles compram o sofá pagando  $p_A$  e  $p_B$  respectivamente ( $s = 1, m_A = 100 - p_A, m_B = 100 - p_B$ ), suas utilidades serão

$$u_A(1, 100 - p_A) = 2(100 - p_A) \quad (9.6.419)$$

$$u_B(1, 100 - p_B) = 3(100 - p_B) \quad (9.6.420)$$

Logo, A estaria melhor com o sofá se pagasse no máximo  $p_A^*$  tal que

$$u_A(0, 100) = u_A(1, 100 - p_A^*) \implies p_A^* = 50 \quad (9.6.421)$$

E B estaria melhor com o sofá se pagasse no máximo  $p_B^*$  tal que

$$u_B(0, 100) = u_A(1, 100 - p_B^*) \implies p_B^* = \frac{100}{3} \quad (9.6.422)$$

Dessa forma, o máximo que A e B podem pagar pelo sofá conjuntamente para que estejam melhor com ele é

$$p_A^* + p_B^* = \frac{250}{3} \quad (9.6.423)$$

## 9.7 Estática Comparativa

Um conceito-chave na economia é o de equilíbrio. Grande parte da modelagem matemática que fazemos a respeito disso está preocupada com a estática comparativa, ou seja, a comparação de diferentes estados de equilíbrio associados a diferentes conjuntos de valores de parâmetros e variáveis exógenas. Para fazer essa comparação, sempre começamos assumindo um estado de equilíbrio inicial. Em seguida, permitimos alguma forma de mudança desequilibrante no modelo (através de alguma mudança em um parâmetro ou variável exógena). Quando isso ocorre, o equilíbrio inicial, é claro, será perturbado, e, portanto, as variáveis endógenas terão que se ajustar. A pergunta com a qual nos preocupamos na estática comparativa é “como a nova posição de equilíbrio se compara com a antiga?”

Nossa análise de estática comparativa pode ser quantitativa ou qualitativa. Se nossa análise for puramente qualitativa, isso significa que só poderemos falar sobre a direção da mudança que ocorre. Se for quantitativa, poderemos realmente falar sobre a magnitude da mudança que ocorreu. Obviamente, se conhecermos a magnitude, também conheceremos a direção da mudança, portanto, a análise quantitativa envolve um elemento qualitativo também.

O cerne de tudo isso é que, ao fazer a estática comparativa, estamos procurando uma taxa de mudança, ou seja, a taxa de mudança do valor de equilíbrio de uma variável endógena em relação a uma mudança no parâmetro ou variável exógena específica. Para entender isso, faremos uso do

conceito de derivada, um conceito que se preocupa com taxas de mudança.

Na economia, a estática comparativa é a comparação de dois diferentes resultados econômicos, antes e depois de uma mudança em algum parâmetro exógeno. Como um estudo da estática, ela compara dois diferentes estados de equilíbrio, após o processo de ajustamento (se houver). Ela não estuda o movimento por trás do equilíbrio nem o processo de mudança. Para modelos de taxas de mudança de equilíbrio estável, tais como o modelo de Solow, a dinâmica comparativa é a contra-parte da estática comparativa.

A estática comparativa é normalmente usada para estudar mudanças na oferta e demanda ao analisar um único mercado, e para estudar mudanças na política monetária ou fiscal ao analisar toda a economia. A estática comparativa foi formalizada por John Richard Hicks (1939) e Paul Samuelson (1947), mas foi apresentada graficamente já na década de 1870.

Seja dada uma situação de equilíbrio estático, formalmente descrito pela solução de um sistema de equações estáticas em que, além das variáveis (cujos valores de equilíbrio são dados pela solução do sistema), aparecem também vários parâmetros, considerados como dados exogenamente.

A estática comparativa estuda o deslocamento de equilíbrio, nomeadamente visa examinar como os valores de equilíbrio das variáveis respondem a uma mudança em um ou mais parâmetros, ou seja, em que direção mudam e estabelecem um novo equilíbrio para corresponder à nova configuração dos parâmetros.

O exemplo tradicional de equilíbrio entre oferta e demanda pode ser útil para esclarecer tais conceitos. Suponhamos que na função demanda haja um parâmetro que representa, por exemplo, os gastos dos consumidores: chame-o de  $c$ . Um aumento em  $c$  significa que os gastos do consumidor mudaram em favor do bem em questão, ou seja, que a curva de demanda se desloca para cima. A intersecção da curva de demanda na nova posição com a curva de oferta (que consideramos ter permanecido na mesma posição) determina o novo ponto de equilíbrio. Queremos agora saber se no novo equilíbrio a quantidade trocada e o preço são maiores ou menores do que antes. Ou seja, como a variável  $q^e$  e a variável  $p^e$  reagiram a uma mudança no parâmetro  $c$ ? A tarefa da estática comparativa é responder a essas perguntas.

Deve-se enfatizar que a estática comparativa nada diz sobre a trajetória temporal das variáveis do ponto de equilíbrio inicial ao final; nem pode dizer se o novo ponto de equilíbrio será realmente alcançado. No entanto, como veremos, existe uma conexão estrita entre a estática comparativa e a dinâmica. Essa conexão é expressa pelo princípio que Samuelson chamou de “princípio da correspondência”.

### 9.7.1 O Método da Estática Comparativa

A matemática da estática comparativa consiste de dois teoremas bem conhecidos: o teorema da função implícita e a regra da cadeia para a diferenciação de funções compostas.

As funções

$$f^i(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9.7.1)$$

junto com as suas derivadas parciais de primeira ordem, que são contínuas com respeito as suas  $n + m$  variáveis  $(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  em uma vizinhança  $N$  do ponto  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_m^0)$ , satisfazem as relações

$$f^i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_m^0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9.7.2)$$

Além disso, os valores do Jacobiano de  $f^i$  com relação a  $x_i$  é diferente de zero no ponto  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_m^0)$ . Se essas condições são satisfeitas, então existe um conjunto de funções

$$x_i = x_i(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_m^0), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9.7.3)$$

que em uma vizinhança do ponto  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_m^0)$  são de valor único, contínuas, são as únicas funções que satisfazem as relações

$$\begin{aligned} f^i(x_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), x_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \dots, \\ x_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (9.7.4)$$

e têm derivadas parciais contínuas de tantas ordens quantas são possuídas por  $f^i$  na vizinhança de  $N$ .

Dada uma certa configuração de parâmetros, digamos  $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_m^0)$ , a solução do sistema determina os correspondentes valores de equilíbrio  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  das variáveis  $x_i$ . Uma vez que o método de estática comparativa assume o ponto de equilíbrio como dado, nós assumimos que esta solução existe e é economicamente relevante.

Se as condições requeridas pelo teorema da função implícita são satisfeitas, podemos expressar  $x_i$  como funções diferenciáveis dos  $\alpha$ 's em uma vizinhança do ponto  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_m^0)$ , isto é,

$$x_i = x_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9.7.5)$$

Muitas vezes não podemos escrever a solução explicitamente, mas podemos ter uma ideia qualitativa por meio dos sinais das derivadas. Suponha que consigamos determinar o sinal das derivadas parciais

$$\left( \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \right)^0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (9.7.6)$$

em que a notação  $(\cdot)^0$  indica que as derivadas parciais são avaliadas no ponto  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_m^0)$ .

Assim, quando conhecemos os sinais das derivadas parciais, nós conseguimos determinar a

direção na qual o novo valor de equilíbrio da  $i$ -ésima variável é alterado como resultado de uma mudança suficientemente pequena no  $j$ -ésimo parâmetro, isto é, nós sabemos se no novo ponto de equilíbrio a  $i$ -ésima variável tem um valor maior que, menor que ou igual ao valor inicial do equilíbrio, embora não possamos dar a magnitude.

Se todos os parâmetros mudam simultaneamente, avaliamos a diferencial total

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} d\alpha_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2} d\alpha_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_m} d\alpha_m. \quad (9.7.7)$$

Dado que

$$\begin{aligned} f^i(x_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), x_2(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \dots, \\ x_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m); \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (9.7.8)$$

podemos obter, pelo teorema da regra da cadeia, a derivada total de cada  $f^i$  com relação a qualquer parâmetro  $\alpha_j$ , como segue

$$\sum_{s=1}^n \frac{\partial f^i}{\partial x_s} \frac{\partial x_s}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f^i}{\partial \alpha_j}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9.7.9)$$

Esta derivada é avaliada no ponto  $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0; \alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_m^0)$ .

Dado que cada  $f^i$  é identicamente zero em uma vizinhança  $n$  deste ponto e, portanto, estacionária, a derivada total deve ser igual a zero.

Podemos estender os resultados como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f^1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + \dots + \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} &= -\frac{\partial f^1}{\partial \alpha_j} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f^2}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + \dots + \frac{\partial f^2}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} &= -\frac{\partial f^2}{\partial \alpha_j} \\ &\vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial f^n}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + \dots + \frac{\partial f^n}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} &= -\frac{\partial f^n}{\partial \alpha_j} \end{aligned} \quad (9.7.10)$$

As equações acima são um sistema linear de  $n$  incógnitas  $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Resolvendo o sistema, temos:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (9.7.11)$$

em que

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x_1} & \frac{\partial f^1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f^2}{\partial x_1} & \frac{\partial f^2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x_1} & \frac{\partial f^n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x_n} \end{vmatrix}. \quad (9.7.12)$$

Fazendo uma aplicação em um caso multivariado, podemos escrever o seguinte teorema:

**Teorema 9.7.1.** *Dado um sistema de equações simultâneas como o que segue*

$$\begin{aligned} F^1(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ F^2(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ F^m(y_1, \dots, y_m; x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \quad (9.7.13)$$

*definirá com certeza um conjunto de funções implícitas*

$$\begin{aligned} y_1 &= f^1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 &= f^2(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_m &= f^m(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (9.7.14)$$

*Se*

1. as funções  $F^1, \dots, F^m$  todas têm derivadas parciais contínuas em relação a todas as variáveis  $y$  e  $x$ , e se
2. no ponto  $(y_{10}, \dots, y_{m0}; x_{10}, \dots, x_{n0})$  satisfazendo o sistema de equações simultâneas acima, o seguinte determinante jacobiano é diferente de zero

$$|J| \equiv \left| \frac{\partial (F^1, \dots, F^m)}{\partial (y_1, \dots, y_m)} \right| \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial y_1} & \frac{\partial F^m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F^m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \quad (9.7.15)$$

então existe uma vizinhança  $n$ -dimensional de  $(x_{10}, \dots, x_{n0})$  na qual as variáveis  $y_1, \dots, y_m$  são funções das variáveis  $x_1, \dots, x_n$  e

1. as funções implícitas do sistema de equações dá o status de identidades na vizinhança ao redor de  $(y_{10}, \dots, y_{m0}; x_{10}, \dots, x_{n0})$ .
2. as funções implícitas  $f^1, \dots, f^m$  são contínuas e têm derivadas parciais contínuas com respeito a todas as variáveis  $x$ .

Com isso, podemos tomar as diferenciais totais de cada

$$dF^j \equiv d0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (9.7.16)$$

Podemos escrever as expressões para  $dF^j$  e  $d0$  e levar os termos  $dx_i$  para o lado direito para obter

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F^1}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial F^1}{\partial y_m} dy_m &= - \left( \frac{\partial F^1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F^1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F^1}{\partial x_n} dx_n \right) \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F^2}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial F^2}{\partial y_m} dy_m &= - \left( \frac{\partial F^2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F^2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F^2}{\partial x_n} dx_n \right) \\ &\vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial F^m}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial F^m}{\partial y_m} dy_m &= - \left( \frac{\partial F^m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F^m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F^m}{\partial x_n} dx_n \right) \end{aligned} \quad (9.7.17)$$

Podemos também escrever o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{\partial y_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_1}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n} dx_n \\ dy_2 &= \frac{\partial y_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_2}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y_2}{\partial x_n} dx_n \\ &\vdots \\ dy_m &= \frac{\partial y_m}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y_m}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y_m}{\partial x_n} dx_n \end{aligned} \quad (9.7.18)$$

E isso pode ser usado para eliminar as expressões de  $dy_j$  em (9.7.17). Mas isso ficaria muito confuso, então vamos simplificar as coisas considerando apenas o que aconteceria quando apenas  $x_1$  muda, enquanto todas as outras variáveis  $x_2, \dots, x_n$  permanecem constantes. Permitindo  $dx_1 \neq 0$ , mas configurando  $dx_2 = \dots = dx_n = 0$  em (9.7.17) e (9.7.18), e então substituindo (9.7.18) em (9.7.17) e dividindo por  $dx_1 \neq 0$ , obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial F^1}{\partial y_2} \left( \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial F^1}{\partial y_m} \left( \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \right) &= - \frac{\partial F^1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial F^2}{\partial y_2} \left( \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial F^2}{\partial y_m} \left( \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \right) &= - \frac{\partial F^2}{\partial x_1} \\ &\vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial y_1} \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial F^m}{\partial y_2} \left( \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right) + \dots + \frac{\partial F^m}{\partial y_m} \left( \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \right) &= - \frac{\partial F^m}{\partial x_1} \end{aligned} \quad (9.7.19)$$

Isso pode parecer complicado, mas observe que as expressões entre colchetes constituem as derivadas parciais das funções implícitas em relação a  $x_1$  que queremos encontrar. Portanto, elas devem ser consideradas como as “variáveis” a serem resolvidas em (9.7.19). As outras derivadas são as derivadas parciais das funções  $F^j$  e todas teriam valores específicos quando avaliadas no ponto  $(y_{10}, \dots, y_{m0}; x_{10}, \dots, x_{n0})$  – o ponto em torno do qual as funções implícitas são definidas – e, portanto, podem ser tratadas como constantes conhecidas.

Esses fatos tornam (9.7.19) um sistema de equações lineares, e ele pode ser escrito na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F^1}{\partial y_1} & \frac{\partial F^1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F^1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial F^2}{\partial y_1} & \frac{\partial F^2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F^2}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F^m}{\partial y_1} & \frac{\partial F^m}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F^m}{\partial y_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \right) \\ \left( \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right) \\ \vdots \\ \left( \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - \left( \frac{\partial F^1}{\partial x_1} \right) \\ - \left( \frac{\partial F^2}{\partial x_1} \right) \\ \vdots \\ - \left( \frac{\partial F^m}{\partial x_1} \right) \end{pmatrix} \quad (9.7.20)$$

Considere um sistema de equações que descreve um mercado

$$Q_d = Q_s \quad (9.7.21)$$

$$Q_d = D(P, G) \quad (9.7.22)$$

$$Q_s = S(P, N) \quad (9.7.23)$$

em que  $G$  é o preço dos bens substitutos e  $N$  é o preço dos insumos ( $G$  e  $N$  são exógenos). Os seguintes pressupostos são impostos

$$\frac{\partial D}{\partial P} < 0, \frac{\partial D}{\partial G} > 0, \frac{\partial S}{\partial P} > 0, \frac{\partial S}{\partial N} < 0 \quad (9.7.24)$$

Use a regra da função implícita para encontrar

$$\frac{\partial P^*}{\partial G}, \frac{\partial Q^*}{\partial G}, \frac{\partial P^*}{\partial N}, \frac{\partial Q^*}{\partial N} \quad (9.7.25)$$

Expressando o modelo como

$$Q = D(P, G) \quad (9.7.26)$$

$$Q = S(P, N) \quad (9.7.27)$$

ou, de forma equivalente,

$$F^1(P, Q; G, N) = D(P, G) - Q = 0 \quad (9.7.28)$$

$$F^2(P, Q; G, N) = S(P, N) - Q = 0 \quad (9.7.29)$$

Agora, checando as condições para o teorema da função implícita, temos:

1. As derivadas parciais contínuas com relação às variáveis exógenas e endógenas existem:

$$F_P^1 = \frac{\partial D}{\partial P} \quad (9.7.30)$$

$$F_Q^1 = -1 \quad (9.7.31)$$

$$F_G^1 = \frac{\partial D}{\partial G} \quad (9.7.32)$$

$$F_N^1 = 0 \quad (9.7.33)$$

$$F_P^2 = \frac{\partial S}{\partial P} \quad (9.7.34)$$

$$F_Q^2 = -1 \quad (9.7.35)$$

$$F_G^2 = 0 \quad (9.7.36)$$

$$F_N^2 = \frac{\partial S}{\partial N} \quad (9.7.37)$$

2. O jacobiano é

$$|J| = \begin{vmatrix} F_P^1 & F_Q^1 \\ F_P^2 & F_Q^2 \end{vmatrix} = \frac{\partial S}{\partial P} - \frac{\partial D}{\partial P} > 0 \iff |J| \neq 0 \quad (9.7.38)$$

Agora, podemos usar o teorema da função implícita. Tomando a diferencial total de cada equação, temos

$$\begin{aligned} dF^1 &= F_P^1 dP + F_Q^1 dQ + F_G^1 dG + F_N^1 dN = 0 \\ \frac{\partial D}{\partial P} dP - 1 dQ + \frac{\partial D}{\partial G} dG + 0 &= 0 \\ \frac{\partial D}{\partial P} dP - 1 dQ &= -\frac{\partial D}{\partial G} dG \end{aligned} \quad (9.7.39)$$

$$\begin{aligned} dF^2 &= F_P^2 dP + F_Q^2 dQ + F_G^2 dG + F_N^2 dN = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial P} dP - 1 dQ + 0 + \frac{\partial S}{\partial N} dN &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial P} dP - 1 dQ &= -\frac{\partial S}{\partial N} dN \end{aligned} \quad (9.7.40)$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial D}{\partial P} & -1 \\ \frac{\partial S}{\partial P} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial G} \\ \frac{\partial Q^*}{\partial G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial D}{\partial G} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9.7.41)$$

Usando a regra de Cramer, temos:

$$\frac{\partial P^*}{\partial G} = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{\partial D}{\partial G} & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}{|J|} = \frac{\frac{\partial D}{\partial G}}{\frac{\partial S}{\partial P} - \frac{\partial D}{\partial P}} > 0 \quad (9.7.42)$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial G} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial D}{\partial P} & -\frac{\partial D}{\partial G} \\ \frac{\partial S}{\partial P} & 0 \end{pmatrix}}{|J|} = \frac{\frac{\partial D}{\partial G} \frac{\partial S}{\partial P}}{\frac{\partial S}{\partial P} - \frac{\partial D}{\partial P}} > 0 \quad (9.7.43)$$

Do mesmo modo,

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial D}{\partial P} & -1 \\ \frac{\partial S}{\partial P} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial P^*}{\partial N} \\ \frac{\partial Q^*}{\partial N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial S}{\partial N} \end{pmatrix} \quad (9.7.44)$$

Usando a regra de Cramer, temos:

$$\frac{\partial P^*}{\partial N} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{\partial S}{\partial N} & -1 \end{pmatrix}}{|J|} = -\frac{\frac{\partial S}{\partial N}}{\frac{\partial S}{\partial P} - \frac{\partial D}{\partial P}} > 0 \quad (9.7.45)$$

$$\frac{\partial Q^*}{\partial N} = \frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial D}{\partial P} & 0 \\ \frac{\partial S}{\partial P} & -\frac{\partial S}{\partial N} \end{pmatrix}}{|J|} = -\frac{\frac{\partial D}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial N}}{\frac{\partial S}{\partial P} - \frac{\partial D}{\partial P}} < 0 \quad (9.7.46)$$

## 9.7.2 Otimização sem Restrição

Suponha que tenhamos o seguinte problema de maximização:

$$\max_x f(x, c), \quad (9.7.47)$$

em que onde  $c$  é algum parâmetro que o tomador de decisão toma como dado (exógeno), como um preço que não pode ser influenciado por um indivíduo. Seja  $x^*(c)$  um ponto de ótimo de  $f(x, c)$ , isto é, que garanta que a função atinja seu valor máximo. Então as condições de primeira e segunda ordem implicam

$$\frac{\partial f(x^*(c), c)}{\partial x} = f_x(x^*(c), c) = 0, \quad (9.7.48)$$

$$\frac{\partial^2 f(x^*(c), c)}{\partial x^2} = f_{xx}(x^*(c), c) \leq 0. \quad (9.7.49)$$

Note que sabemos que  $f_x(x^*(c), c) = 0$  e  $f_{xx}(x^*(c), c) \leq 0$ , uma vez que estamos assumindo que  $x^*(c)$  é um ponto de máximo.

A primeira CPO se parece exatamente com os tipos de equações estudadas na prova do teorema da função implícita. A única diferença é que ela é gerada por um problema de maximização, não por uma equação abstratamente dada. Se diferenciarmos a condição de primeira ordem (necessária) em relação a  $c$ , obtemos

$$f_{xx}(x^*(c), c) \frac{\partial x^*(c)}{\partial c} + f_{xc}(x^*(c), c) = 0, \quad (9.7.50)$$

e resolvendo para  $\frac{\partial x^*}{\partial c}$ , resulta que:

$$\frac{\partial x^*(c)}{\partial c} = \frac{f_{xc}(x^*(c), c)}{f_{xx}(x^*(c), c)}. \quad (9.7.51)$$

Isso é chamado de estática comparativa de  $x^*$  em relação a  $c$ , ou seja, estamos medindo como  $x^*(c)$  - o comportamento do agente - responde a uma alteração em  $c$  - algum parâmetro exógeno fora de seu controle. A condição de segunda ordem (suficiente) implica que  $f_{xx}(x^*(c), c) < 0$ . Observe que se essa condição pudesse assumir o valor nulo, então não poderíamos dizer nada sobre  $\frac{\partial x^*(c)}{\partial c}$ . Disso decorre que

$$\text{sign}\left(\frac{\partial x^*(c)}{\partial c}\right) = \text{sign}(f_{xc}(x^*(c), c)). \quad (9.7.52)$$

Portanto,  $x^*(c)$  é uma função crescente em  $c$  se  $f_{xc}(x^*(c), c) \geq 0$ .

Assim, temos o seguinte teorema:

**Teorema 9.7.1.** Suponha que  $x^*(c)$  é um máximo local de  $f(x, c)$ . Então,

$$\text{sign}\left(\frac{\partial x^*(c)}{\partial c}\right) = \text{sign}(f_{xc}(x^*(c), c)). \quad (9.7.53)$$

Para ilustrar esse teorema, sejam os seguintes exemplos:

**Exemplo 9.7.1.** Lembre-se que o monopolista se defronta com o seguinte problema:

$$\max_q p(q)q - \frac{c}{2}q^2. \quad (9.7.54)$$

Como o custo marginal de produção impacta sobre o nível ótimo de produto? Para responder, vamos obter antes as condições de primeira e de segunda ordem.

A condição necessária (de primeira ordem) é

$$p'(q^*)q^* + p(q^*) - cq^* = 0, \quad (9.7.55)$$

e a condição suficiente (segunda ordem) é

$$p''(q^*)q^* + 2p'(q^*) - c < 0. \quad (9.7.56)$$

Vamos combinar o teorema da função inversa com a condição de primeira ordem. Para tanto, vamos tratar  $q^*$  como uma função implícita de  $c$  e diferenciar totalmente para obtermos:

$$p''(q^*)q^* \frac{\partial q^*}{\partial c} + 2p'(q^*) \frac{\partial q^*}{\partial c} - c \frac{\partial q^*}{\partial c} - q^* = 0. \quad (9.7.57)$$

Rearranjando, obtemos:

$$\underbrace{(p''(q^*)q^* + 2p'(q^*) - c)}_{< 0} \frac{\partial q^*}{\partial c} - q^* = 0, \quad (9.7.58)$$

ou

$$\frac{\partial q^*}{\partial c} = \frac{q^*}{p''(q^*)q^* + 2p'(q^*) - c} < 0. \quad (9.7.59)$$

Assim, usamos as informações da condição suficiente para determinar o sinal do denominador, temos um resultado de estática comparativa inequívoco.

**Exemplo 9.7.2.** Suponha que um agente consome no período 1 e no período 2, cuja função de utilidade é:

$$u(c_1, c_2) = \log(c_1) + \delta \log(c_2), \quad (9.7.60)$$

em que  $c_1 + s = y_1$  e  $Rs + y_2 = c_2$ , onde  $R > 1$  é igual à taxa de juros mais 1 ( $r + 1$ ). Substituindo as restrições na função objetivo, temos o seguinte problema:

$$\max_s \log(y_1 - s) + \delta \log(Rs + y_2). \quad (9.7.61)$$

Sabendo disso, como a taxa de juros está relacionada à taxa de poupança, isto é, dado um choque em  $R$ , como a taxa de poupança desse agente, com essa função de utilidade, responde?

Maximizando o novo problema do agente, encontramos a seguinte condição de primeira ordem:

$$-\frac{1}{y_1 - s^*} + \delta R \frac{1}{Rs^* + y_2}, \quad (9.7.62)$$

e a condição de segunda ordem é satisfeita automaticamente:

$$-\frac{1}{(y_1 - s^*)^2} - \delta R^2 \frac{1}{(Rs^* + y_2)^2} < 0. \quad (9.7.63)$$

Em vista disso, como  $s^*$  varia com  $R$ ? Não queremos escrever tudo de novo. Vamos escrever a CPO como uma função de  $s^*$  e de  $R$  como segue:  $f(s^*(R), R) = 0$ .

Do teorema da função implícita nós sabemos que:

$$\frac{\partial s^*}{\partial R} = -\frac{f_{sR}(s^*(R), R)}{f_{ss}(s^*(R), R)}. \quad (9.7.64)$$

*Das condições de segunda ordem, sabemos que  $f_{ss}(s^*(R), R)$  é negativo, então o denominador é positivo. Vamos analisar o numerador da expressão acima:*

$$f_{sR}(s^*(R), R) = \delta \left[ \frac{y_2}{(Rs^* + y_2)^2} \right]. \quad (9.7.65)$$

*Então  $s^*$  é uma função crescente em  $R$ . Observe que obtivemos este resultado sem a necessidade de encontrar uma expressão explícita para  $s^*(R)$ .*

Agora que sabemos como utilizar, ainda de forma simples, do instrumental de estática comparativa, vamos estudar um teorema muito importante em economia, o Teorema do Envelope.

### 9.7.3 Teorema do Envelope: Otimização sem Restrição

Vamos recapitular o exemplo do monopolista.

**Exemplo 9.7.3.** Lembre-se que o monopolista se defronta com o seguinte problema:

$$\max_q p(q)q - \frac{c}{2}q^2, \quad (9.7.66)$$

cujas condições de primeira e de segunda ordem são, respectivamente:

$$p'(q^*)q^* + p(q^*) - cq^* = 0, \quad (9.7.67)$$

$$p''(q^*)q^* + 2p'(q^*) - c < 0. \quad (9.7.68)$$

Isto define uma solução implícita de  $q^*(c)$  em termos do parâmetro de custo marginal,  $c$ . Mas então podemos definir a função valor ou a função de lucro indireto como:

$$\pi(c) = p(q^*(c))q^*(c) - \frac{c}{2}(q^*(c))^2, \quad (9.7.69)$$

dando o lucro máximo do monopolista para qualquer valor de  $c$ . Se nós diferenciamos em relação a  $c$ , obtemos:

$$\pi'(c) = p'(q^*(c))\frac{\partial q^*(c)}{\partial c}q^*(c) + p(q^*(c))\frac{\partial q^*(c)}{\partial c} - \frac{1}{2}q^*(c)^2 - 2q^*(c)\frac{\partial q^*(c)}{\partial c}. \quad (9.7.70)$$

Para ver o sinal dessa relação, parece, a princípio, que teríamos que usar o Teorema da Função

Implícita para derivar  $\frac{\partial q^*(c)}{\partial c}$ , e então substituí-lo na função objetivo. Mas podemos usar outro artifício. Se nós reorganizarmos esse resultado para colocarmos todos os termos  $\frac{\partial q^*(c)}{\partial c}$  juntos, obtemos:

$$\pi'(c) = \underbrace{(p'(q^*(c))q^*(c) + p(q^*(c)) - 2q^*(c))}_{CPO} \frac{\partial q^*(c)}{\partial c} - \frac{1}{2}q^*(c)^2. \quad (9.7.71)$$

Uma vez que a CPO é igual a zero, concluímos que:

$$\pi'(c) = -\frac{1}{2}q^*(c)^2 < 0, \quad (9.7.72)$$

e chegamos a esse resultado sem usar o teorema da função implícita. Esta é a ideia básica do Teorema do Envelope. A razão pela qual é chamada de “envelope” é que a função valor traça uma curva que é o máximo ao longo de todos os máximos globais da função objetivo como no gráfico abaixo:

Vamos formalizar o que vimos anteriormente. Suponha que um agente se defronta com o seguinte problema de maximização:

$$\max_x f(x, c), \quad (9.7.73)$$

em que  $c$  é um parâmetro exógeno. A condição de primeira ordem (necessária) é dada por:

$$f_x(x^*(c), c) = 0. \quad (9.7.74)$$

Agora, considere a função valor ou a função lucro indireta:

$$V(c) = f_x(x^*(c), c). \quad (9.7.75)$$

Esse é o payoff otimizado do agente, dado o parâmetro  $c$ . Podemos querer saber como  $V(c)$  varia com  $c$ , ou seja,  $V'(c)$ . Essa derivada é igual a:

$$V'(c) = f_x(x^*(c), c) \frac{\partial x^*(c)}{\partial c} + f_c(x^*(c), c). \quad (9.7.76)$$

À primeira vista, parece que precisamos determinar  $\frac{\partial x^*(c)}{\partial c}$  usando o teorema da função implícita, substituir e tentar avaliar a expressão. Mas como  $f_x(x^*(c), c)$  assume valor zero no ponto de ótimo, a expressão é reduzida para

$$V'(c) = f_c(x^*(c), c). \quad (9.7.77)$$

Isso significa que a derivada da função valor em relação a um parâmetro é a derivada parcial da função objetiva avaliada na solução ótima. A partir disso, temos o seguinte teorema:

**Teorema 9.7.2.** *Para o problema de maximização*

$$\max_x f(x, c), \quad (9.7.78)$$

a derivada da função valor é

$$V'(c) = \left[ \frac{\partial f(x, c)}{\partial c} \right]_{x=x^*(c)}. \quad (9.7.79)$$

Assim, usando o teorema do envelope, sabemos que a sensibilidade da função lucro do monopolista ao parâmetro  $c$  é encontrada diretamente como:

$$V_c(p, c) = \pi_c(q^*(p, c), p, c) = -\frac{1}{2}q^*(p, c)^2 = -\frac{p^2}{2c^2} < 0. \quad (9.7.80)$$

O Teorema do Envelope pode ser usado em muitos casos.

#### 9.7.4 Otimização com Restrição de Igualdade: Parte I

Suponha que tenhamos um consumidor com função de utilidade  $u(q_1, q_2, m) = v(q_1, q_2) + m$ , em que  $q_1$  e  $q_2$  são dois bens e  $m$  é o rendimento do agente. A restrição do agente é tal que:  $w = p_1q_1 + p_2q_2 + m$ , em que  $w$  é a riqueza de nosso agente. Substituindo a restrição na função objetivo, temos:

$$\max_{q_1, q_2} v(q_1, q_2) + w - p_1q_1 - p_2q_2. \quad (9.7.81)$$

As condições de primeira ordem são:

$$v_1(q_1^*, q_2^*) - p_1 = 0, \quad (9.7.82)$$

$$v_2(q_1^*, q_2^*) - p_2 = 0, \quad (9.7.83)$$

e as condições de segunda ordem são tais que:

$$\begin{pmatrix} v_{11}(q_1^*, q_2^*) & v_{21}(q_1^*, q_2^*) \\ v_{12}(q_1^*, q_2^*) & v_{22}(q_1^*, q_2^*) \end{pmatrix}, \quad (9.7.84)$$

deve ser negativo definido. Podemos descobrir como a demanda por  $q_1^*$  responde a uma mudança em  $p_2$ ? Bem, as duas funções  $q_1^*(p_2)$  e  $q_2^*(p_2)$  são implicitamente determinadas pelo sistema de condições de primeira ordem. Se nós diferenciamos totalmente, obtemos:

$$v_{11} \frac{\partial q_1}{\partial p_2} + v_{21} \frac{\partial q_2}{\partial p_2} = 0 \quad (9.7.85)$$

$$v_{12} \frac{\partial q_1}{\partial p_2} + v_{22} \frac{\partial q_2}{\partial p_2} - 1 = 0. \quad (9.7.86)$$

Resolvendo a primeira equação em termos de  $\frac{\partial q_2}{\partial p_2}$ , obtemos

$$\frac{\partial q_2}{\partial p_2} = -\frac{v_{11} \frac{\partial q_1}{\partial p_2}}{v_{21}}, \quad (9.7.87)$$

e substituindo na segunda equação chegamos a:

$$v_{12} \frac{\partial q_1}{\partial p_2} - v_{22} \left( \frac{v_{11} \frac{\partial q_1}{\partial p_2}}{v_{21}} \right) - 1 = 0, \quad (9.7.88)$$

e resolvendo para  $\frac{\partial q_1}{\partial p_2}$ , temos que:

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_2} = \frac{-v_{21}}{v_{11}v_{22} - v_{12}v_{21}}. \quad (9.7.89)$$

Note que o denominador é o determinante de  $H(q^*)$ , então deve ser positivo. Isso decorre do fato de o máximo ser representado por uma função quadrática positiva. Consequentemente, o sinal é determinado pelo numerador,

$$\text{sign} \left( \frac{\partial q_1}{\partial p_2} \right) = \text{sign}(-v_{21}). \quad (9.7.90)$$

Então,  $q_1$  são complementares brutos quando  $v_{21} > 0$  e substitutos brutos quando  $v_{21} < 0$ . Portanto, é bastante simples aplicar o teorema da função implícita a esse problema bidimensional. Mas quando o número de controles se torna grande, é menos óbvio que isso

funcione. Precisamos desenvolver ferramentas mais sutis para trabalhar com problemas estáticos comparativos de dimensões maiores.

Talvez, se adotarmos uma perspectiva mais ampla, possamos ver algumas das estruturas por trás do exercício de estática comparativa que fizemos para o problema do consumidor acima. O problema de maximização irrestrita

$$\max_x f(x, c), \quad (9.7.91)$$

tem como condição de primeira ordem

$$\nabla_x f(x^*(c), c) = 0. \quad (9.7.92)$$

Se diferenciarmos essa condição em relação ao parâmetro  $c$ , obtemos:

$$\nabla_{xx} f(x^*(c), c) \nabla_c x^*(c) + \nabla_x f_c(x^*(c), c) = 0. \quad (9.7.93)$$

Uma vez que  $\nabla_{xx} f(x^*(c), c) = H(x^*(c), c)$ , podemos escrever

$$H(x^*(c), c) \nabla_c x^*(c) = -\nabla_x f_c(x^*(c), c). \quad (9.7.94)$$

Como  $H(x^*(c), c)$  é negativo definido, todos os seus autovalores são negativos, então é invertível, e, portanto,

$$\nabla_c x^*(c) = -H(x^*(c), c)^{-1} (\nabla_x f_c(x^*(c), c)). \quad (9.7.95)$$

Se  $x$  e  $c$  são unidimensionais, isso é simplesmente

$$\frac{\partial x^*(c)}{\partial c} = \frac{f_{xc}(x^*(c), c)}{f_{xx}(x^*(c), c)}. \quad (9.7.96)$$

Isto é, o termo  $H(x^*(c), c)^{-1}$  é apenas a generalização de  $\frac{1}{f_{xx}(x^*(c), c)}$  e  $\nabla_x f_c(x^*(c), c)$  é apenas a generalização de  $f_{xc}(x^*(c), c)$ .

**Teorema 9.7.3.** Suponha que  $\nabla f(x(c), c) = 0$  e que  $\nabla f(x, c)$  é diferenciável em  $x$  e em  $c$ . Então, há uma solução, localmente contínua, implícita  $x^*(c)$  com derivada

$$\nabla_c x^*(c) = -H(x^*(c), c)^{-1} (\nabla_x f_c(x^*(c), c)). \quad (9.7.97)$$

Para vermos a aplicação do teorema acima, seja o seguinte exemplo.

**Exemplo 9.7.4.** Considere uma firma que objetive maximizar lucros com uma função de produção genérica  $F(K, L)$ . Suponha que queremos saber como  $r$  afeta  $K^*$  e  $L^*$ . Sabemos que as condições de primeira ordem são tais que:

$$pF_K(K^*, L^*) - r = 0 \quad (9.7.98)$$

$$pF_L(K^*, L^*) - w = 0. \quad (9.7.99)$$

Se diferenciarmos totalmente estas duas equações com relação à  $r$ , temos:

$$pF_{KK} \frac{\partial K^*}{\partial r} + pF_{KL} \frac{\partial L^*}{\partial r} - 1 = 0 \quad (9.7.100)$$

$$pF_{LK} \frac{\partial K^*}{\partial r} + pF_{LL} \frac{\partial L^*}{\partial r} = 0. \quad (9.7.101)$$

Podemos resolver o sistema por substituição, por exemplo. Mas há outra ferramenta, a regra de Cramer, para resolver equações como essa. Escrevendo o sistema de equações em notação matricial, temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} pF_{KK} & pF_{KL} \\ pF_{LK} & pF_{LL} \end{pmatrix}}_{\nabla_{xx} f(x^*(c), c) = H(x^*(c), c)} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial K^*}{\partial r} \\ \frac{\partial L^*}{\partial r} \end{pmatrix}}_{\nabla_c x^*(c)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\nabla_x f_c(x^*(c), c)}. \quad (9.7.102)$$

Então nós temos uma equação matricial,  $Ax = b$  e queremos resolver para  $x$ , o vetor de estatística comparativa.

Para usar a regra de Cramer para resolver o  $i$ -ésimo componente de  $x$ , substitua a  $i$ -ésima coluna de  $A$  por  $b$  e calcule esse determinante, então divida pelo determinante de  $A$ . Assim, concluímos que:

$$\frac{\partial K^*}{\partial r} = \frac{pF_{LL}}{\det(H)} < 0 \quad (9.7.103)$$

$$\frac{\partial L^*}{\partial r} = \frac{-pF_{LK}}{\det(H)} < 0. \quad (9.7.104)$$

Assim, temos o seguinte teorema.

**Teorema 9.7.4.** Para o problema de maximização

$$\max_x f(x, c), \quad (9.7.105)$$

a derivada da função valor avaliada no máximo com relação ao parâmetro exógeno é

$$\nabla_c V(c) = \nabla_c f(x^*(c), c). \quad (9.7.106)$$

### 9.7.5 Otimização com Restrição de Igualdade: Parte II

Anteriormente, substituímos a restrição de igualdade na função objetivo. Agora, vamos formalizar esse procedimento sem substituir a restrição na função objetivo. Para tanto, vamos utilizar o conceito de Lagrangeano.

**Definição 9.7.1.** A função Lagrangeana é a função

$$L(x, \lambda) = f(x) - \lambda g(x), \quad (9.7.107)$$

em que  $\lambda$  é um número real.

Nosso sistema de condições de primeira ordem:

$$\nabla_x f(x^*) - \lambda^* \nabla_x g(x^*) = 0 \quad (9.7.108)$$

$$-g(x^*) = 0 \quad (9.7.109)$$

é um sistema não-linear de equações com variáveis endógenas  $(x^*, \lambda^*)$ , assim como qualquer outro em que aplicamos o teorema da função inversa. A única parte “nova” é que você deve ter em mente que  $\lambda^*$  é uma variável endógena, de modo que ela muda quando alteramos quaisquer variáveis exógenas. Segundo, o sinal do determinante do hessiano é determinado pelo fato de estarmos olhando para um máximo ou mínimo e pelo número de equações.

Vamos estudar um exemplo econômico.

**Exemplo 9.7.5.** Considere o seguinte problema do consumidor:

$$L = \alpha \log(x) + \beta \log(y) - \lambda(px + y - w), \quad (9.7.110)$$

em que obtemos o seguinte sistema de condições de primeira ordem:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial L}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial L}{\partial x} \\ \frac{\partial L}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w - px - y \\ \frac{\alpha}{x} - \lambda p \\ \frac{\beta}{y} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (9.7.111)$$

Este é um sistema de equações não lineares, portanto, não há problema em diferenciá-lo em relação a  $p$ , por exemplo, e usando os mesmos passos que para o problema irrestrito. Você precisa lembrar, no entanto, que  $\lambda^*(w, p, \alpha, \beta)$  é agora uma função de parâmetros também, então não é uma constante que pode ser descartada. Diferenciando totalmente em relação a  $p$  temos:

$$-x - p \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial y}{\partial p} = 0, \quad (9.7.112)$$

$$-\frac{\alpha}{x^2} \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial p} p - \lambda = 0, \quad (9.7.113)$$

$$-\frac{\beta}{y^2} \frac{\partial y}{\partial p} - \frac{\partial \lambda}{\partial p} = 0. \quad (9.7.114)$$

Utilizando da regra de Cramer, sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^*}{\partial p} &= \frac{\begin{vmatrix} x^* & -1 & 0 \\ \lambda^* & 0 & -p \\ 0 & -\frac{\beta}{(y^*)^2} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -p & -1 & 0 \\ \frac{\alpha}{(x^*)^2} & 0 & -p \\ 0 & -\frac{\beta}{(y^*)^2} & -1 \end{vmatrix}} \\ &= -\frac{\lambda + \beta \frac{x^* p}{(y^*)^2}}{\beta \frac{p^2}{(y^*)^2} + \frac{\alpha}{(x^*)^2}} < 0. \end{aligned} \quad (9.7.115)$$

Dado que o multiplicador de Lagrange,  $\lambda^*$ , é positivo, um aumento no preço de  $x$ ,  $p$ , reduz o consumo de  $x^*$ .

De modo semelhante,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^*}{\partial p} &= \frac{\begin{vmatrix} -p & x^* & 0 \\ \frac{\alpha}{(x^*)^2} & \lambda^* & -p \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -p & -1 & 0 \\ \frac{\alpha}{(x^*)^2} & 0 & -p \\ 0 & -\frac{\beta}{(y^*)^2} & -1 \end{vmatrix}} \\ &= \frac{p \lambda^* - \frac{\alpha}{x^*}}{\beta \frac{p^2}{(y^*)^2} + \frac{\alpha}{(x^*)^2}} \gtrless 0. \end{aligned} \quad (9.7.116)$$

O efeito do preço  $p$  sobre  $y^*$  dependerá do numerador.

---

**10**

---

---

## INTEGRAIS

---

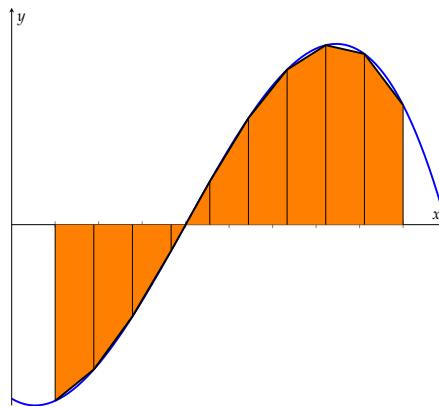
## 10.1 Integral como Área

Integrais são usadas extensivamente em muitas áreas da matemática, bem como em muitas outras áreas que dependem da matemática. Por exemplo, na teoria da probabilidade, integrais são usadas para determinar a probabilidade de alguma variável aleatória estar dentro de um determinado intervalo. Além disso, a integral sob uma função de densidade de probabilidade inteira deve ser igual a 1, o que fornece um teste para determinar se uma função que não assume valores negativos poderia ser uma função de densidade ou não. As integrais podem ser usadas para calcular a área de uma região bidimensional que possui um limite curvo, bem como calcular o volume de um objeto tridimensional que possui um limite curvo.

Neste capítulo, descrevemos a integral de uma função em algum intervalo  $[a, b]$ . A interpretação mais comum da integral é em termos da área sob o gráfico da função dada, de modo que é onde começamos.

Seja  $f$  uma função que é definida em algum intervalo  $a \leq x \leq b$  e suponha que seja positiva, isto é, suponha que seu gráfico esteja acima do eixo  $x$ . Quão grande é a área da região capturada entre o eixo  $x$ , o gráfico de  $y = f(x)$  e as linhas verticais  $a = x_0$  e  $b = x_n$  na figura abaixo?

FIGURA 10.1.1 – FUNÇÃO  $f = -0.2(x + 1)(x - 5)(x - 2)$  COM  $N = 10$



Você pode tentar calcular essa área aproximando a região com muitos retângulos finos. Para calcular a região aproximada você escolhe uma partição do intervalo  $[a, b]$ , ou seja, você escolhe números  $x_1 < \dots < x_n$  com

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b. \quad (10.1.1)$$

Esses números dividem o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n], \quad (10.1.2)$$

cujos tamanhos são:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}. \quad (10.1.3)$$

Em cada intervalo escolhemos um ponto  $c_k$ , ou seja, no primeiro intervalo escolhemos  $x_0 \leq c_1 \leq x_1$ , e no último intervalo nós escolhemos algum número  $x_{n-1} \leq c_n \leq x_n$ . Nós então definimos  $n$  retângulos: a base do  $k$ -ésimo retângulo é o intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  no eixo  $x$ , enquanto sua altura é  $f(c_k)$  (aqui  $k$  pode ser qualquer inteiro de 1 a  $n$ ). A área do  $k$ -ésimo retângulo é, evidentemente, o produto da sua altura pela largura, isto é, a sua área é  $f(c_k)\Delta x_k$ . Somando as áreas dos  $k$  retângulos vemos que a área total é

$$R = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n. \quad (10.1.4)$$

Esse tipo de soma é chamado de soma de Riemann.

Se a partição for suficientemente fina como na figura abaixo, espera-se que esta soma, isto é, a área total de todos os retângulos, seja uma boa aproximação da área sobre o gráfico. Substituir a partição por uma partição menor com mais pontos de divisão, deve melhorar a aproximação.

Assim, seja a seguinte definição de integral:

**Definição 10.1.1 (Integral).** Se  $f$  é uma função definida em um intervalo  $[a, b]$ , então dizemos que

$$\int_a^b f(x)dx = \omega, \quad (10.1.5)$$

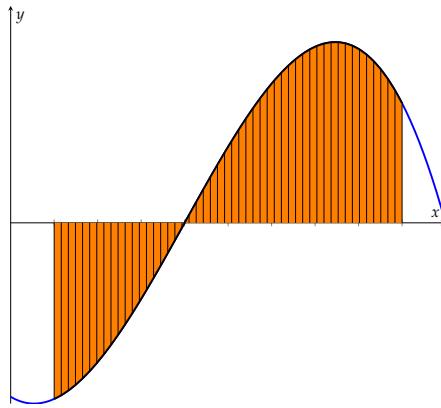
isto é, a integral de  $f(x)$  no intervalo  $[a, b]$  é igual a  $\omega$ , se para todo  $\varepsilon > 0$  pode-se encontrar um  $\delta > 0$  tal que

$$|f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n - \omega| < \varepsilon, \quad (10.1.6)$$

é válida para todas as partições cujos intervalos são  $\Delta x_k < \delta$ .

Agora, se a função  $f$  não é necessariamente positiva em todo o intervalo  $[a, b]$ , então ainda definimos a integral exatamente da mesma maneira: como um limite de somas de Riemann cujo tamanho da malha se torna menor e menor. No entanto, a interpretação da integral como a área da região entre o gráfico e o eixo  $x$  muda. Seja a função representada abaixo. Qual a área do segmento laranja?

FIGURA 10.1.2 – FUNÇÃO  $f = -0.2(x + 1)(x - 5)(x - 2)$  COM  $N = 50$



Seja a soma de Riemann:

$$R = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n. \quad (10.1.7)$$

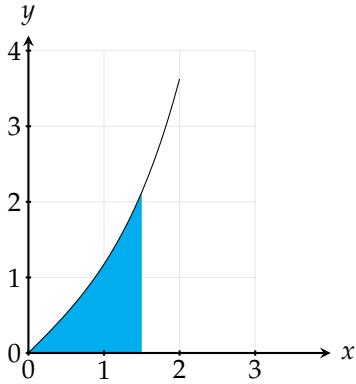
Quando  $f$  pode ser positivo ou negativo, então os termos na soma de Riemann também podem ser positivos ou negativos. Se  $f(c_k) > 0$  então a quantidade  $f(c_k)\Delta x_k$  é a área do retângulo correspondente, mas se  $f(c_k) < 0$  então  $f(c_k)\Delta x_k$  é um número negativo, a saber menos a área do retângulo correspondente. A soma de Riemann é, portanto, a área dos retângulos acima do eixo  $x$  menos a área abaixo do eixo  $x$ .

**Exemplo 10.1.1.** Seja a função  $f(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$ . Calcule a área acima do eixo  $x$  e abaixo do gráfico entre os pontos  $a = 0$  e  $b = 1.5$ .

Calculando a integral de  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^{1.5} \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2} dx \\ &= \left( \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2} \right) \Big|_0^{1.5} \\ &= 2.35 - 1.0 \\ &= 1.35. \end{aligned} \quad (10.1.8)$$

FIGURA 10.1.3 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$



**Exemplo 10.1.2.** Seja a função  $f(x) = -0.2(x+1)(x-5)(x-2)$ . Calcule a área entre os pontos  $a = 0.5$  e  $b = 4.5$ .

Calculando a integral de  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{0.5}^{4.5} -0.2(x+1)(x-5)(x-2)dx \\ &= \frac{1}{5} \left( \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{3x^2}{2} + 10x \right) \Big|_{0.5}^{4.5} \\ &= 1.9. \end{aligned} \tag{10.1.9}$$

## 10.2 Integral Definida e Integral Indefinida

Considere a seguinte definição:

**Definição 10.2.1 (Função Limitada).** Uma função  $f$  é dita limitada, em seu domínio, quando sua imagem está contida num intervalo, ou seja,  $\text{Im } f \subset [a, b]$ , onde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Podemos também utilizar a seguinte notação:  $|f(x)| \leq M$ , sendo  $M = \max\{|a|, |b|\}$ .

Agora vamos ver o teorema do confronto. O teorema do confronto estabelece a existência do limite de uma função real, contanto que no domínio de interesse essa função se encontre limitada (inferior e superiormente) por duas funções, ambas convergentes para o mesmo limite. Sejam  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  funções reais definidas num domínio  $D \subseteq \mathbb{R}$  e seja  $a$  um ponto deste domínio, tais que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$  e  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ . Então, resulta destas condições que  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ . Considere o gráfico abaixo, no qual estão representadas as funções:  $\frac{1}{x^2}$  (azul escuro),  $g(x) = \frac{\sin x}{x^2}$  (vermelho tracejado) e  $-\frac{1}{x^2}$  (azul ciano). Repare que a função  $g(x)$  está “enquadrada”

(i.e., limitada inferior e superiormente) pelas outras duas funções:

$$h(x) \leq g(x) \leq f(x) \implies -\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

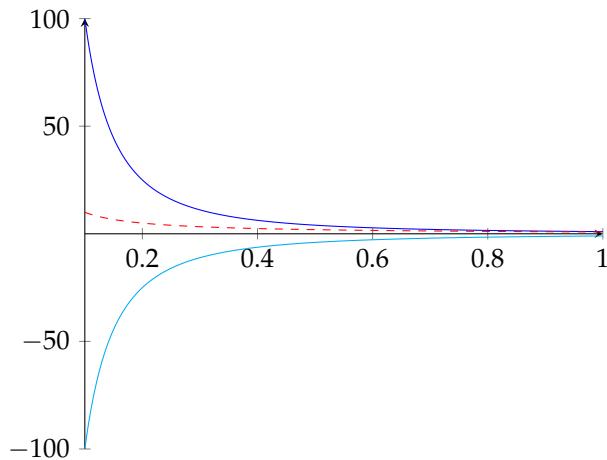
e que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$$

Conclui-se que o comportamento de  $g(x)$  à medida que  $x \rightarrow +\infty$  traduz-se analiticamente por:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0$$

FIGURA 10.2.1 – GRÁFICO ALUSIVO AO TEOREMA DO CONFRONTO



Além disso, seja a seguinte definição:

**Definição 10.2.2 (Antiderivada).** Uma função  $F$  é chamada de antiderivada de  $f$  no intervalo  $[a, b]$  se tivermos  $F'(x) = f(x)$  para todo  $x$  com  $a \leq x \leq b$ .

**Teorema 10.2.1 (Integrabilidade das Funções).** O critério de Lebesgue para a existência da integral de Riemann afirma que uma função limitada é Riemann integrável se, e somente se, o conjunto dos pontos de descontinuidade do seu domínio tem medida zero. Informalmente, se  $f$  não tem nenhuma descontinuidade de salto, a função é integrável.

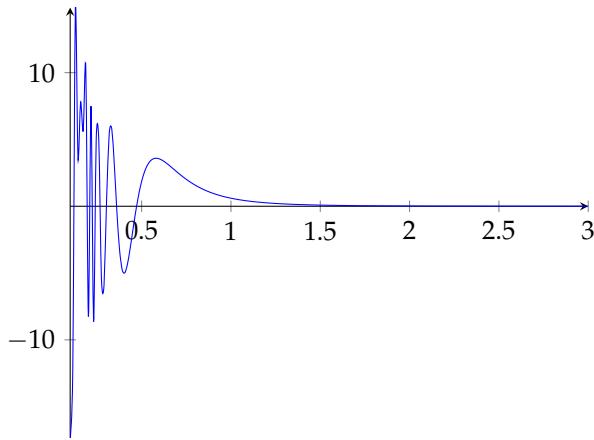
**Corolário 10.2.1.** Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ . Se  $f$  não é contínua em apenas um número finito de pontos de  $[a, b]$  (enumerável) mas é limitada em  $[a, b]$  então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ . Assim, uma função que não é contínua pode ser integrável.

**Exemplo 10.2.1.** A função dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (10.2.1)$$

é primitivável em qualquer intervalo  $[a, b]$  com  $a < 0 < b$  mas não é integrável em nenhum desses intervalos.

FIGURA 10.2.2 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}$



A função é claramente ilimitada junto a zero, logo não pode ser integrável em nenhum intervalo que contenha zero no seu interior. A caracterização da integrabilidade requer que qualquer função integrável à Riemann tem obrigatoriamente que ser limitada.

Para provarmos que  $f$  é primitivável, basta exibirmos uma sua primitiva. Deixamos como exercício a prova de que a função definida por

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2} + C & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (10.2.2)$$

é uma tal primitiva em qualquer um dos intervalos considerados.

**Teorema 10.2.2** (Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo). Se  $f$  é uma função cuja integral  $\int_a^b f(x)dx$  existe, e se  $F$  é uma antiderivada de  $f$  no intervalo  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (10.2.3)$$

*Demonstração.* É dado que

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \quad (10.2.4)$$

Considere dois números  $x_1$  e  $x_1 + \Delta x$  em  $[a, b]$ . Então temos

$$F(x_1) = \int_a^{x_1} f(t)dt, \quad (10.2.5)$$

e

$$F(x_1 + \Delta x) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)dt. \quad (10.2.6)$$

Subtraindo as duas equações

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt. \quad (10.2.7)$$

Pode ser mostrado que

$$\int_a^{x_1} f(t)dt + \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)dt = \int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)dt. \quad (10.2.8)$$

Intuitivamente, a soma das áreas de duas regiões adjacentes é igual à área das duas regiões combinadas.

Manipulando esta equação obtemos

$$\int_a^{x_1 + \Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_1} f(t)dt = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)dt. \quad (10.2.9)$$

Substituindo (10.2.9) em (10.2.7), temos:

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)dt. \quad (10.2.10)$$

De acordo com o teorema do valor médio para a integração, existe um  $c$  em  $[x_1, x_1 + \Delta x]$  tal que

$$\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x. \quad (10.2.11)$$

Substituindo a equação (10.2.11) em (10.2.10), temos que

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = f(c)\Delta x. \quad (10.2.12)$$

Dividindo ambos os lados por  $\Delta x$  temos

$$\frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = f(c). \quad (10.2.13)$$

Note que a expressão do lado esquerdo da equação é o coeficiente diferencial de Newton para  $F$  em  $x_1$ . Considere o limite com  $\Delta x \rightarrow 0$  em ambos lados da equação.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c). \quad (10.2.14)$$

A expressão do lado esquerdo da equação é a definição da derivada de  $F$  em  $x_1$ .

$$F'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c). \quad (10.2.15)$$

Para encontrar o outro limite, usaremos o teorema do confronto. O número  $c$  está no intervalo  $[x_1, x_1 + \Delta x]$ , então  $x_1 \leq c \leq x_1 + \Delta x$ . Também,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x_1 = x_1$  e  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} x_1 + \Delta x = x_1$ .

Assim, de acordo com o teorema do confronto

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} c = x_1. \quad (10.2.16)$$

Substituindo em (10.2.15), temos

$$F'(x_1) = \lim_{c \rightarrow x_1} f(c). \quad (10.2.17)$$

A função  $f$  é contínua em  $c$ , então o limite pode ser inserido na função. Assim, temos

$$F'(x_1) = f(x_1). \quad (10.2.18)$$

■

Seja a integral  $\int_a^b f(x)dx$ , os números  $a$  e  $b$  são os limites da integral (bounds), a função  $f(x)$  que está sendo integrada é chamada de integrando e variável  $x$  é a variável de integração.

**Exemplo 10.2.2.** Ache uma expressão para o cálculo da área da região compreendida entre o eixo  $x$  e a curva  $f(x) = x^2$  para  $x$  variando no intervalo  $[0, k]$ , onde  $k$  é um valor real qualquer. Para  $f: [0, k] \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2$  dividimos o intervalo  $[0, k]$  em  $n$  subintervalos. Vamos calcular essa área por falta e por excesso.

- Cálculo da área da região compreendida entre o eixo  $x$  e a curva  $f(x) = x^2$  para  $x$  variando no intervalo  $[0, k]$ , onde  $k$  é um valor real qualquer, aproximada por falta.

Dividimos o intervalo  $[0, k]$  em  $n$  partes iguais.



Dessa forma, cada sub-intervalo tem comprimento igual a  $\frac{k}{n}$ . O  $i$ -ésimo sub-intervalo, para  $1 \leq i \leq n$ , determina um retângulo cuja base mede  $\frac{k}{n}$  e cuja altura é  $\left[(i-1)\frac{k}{n}\right]^2$ . Como estamos calculando a área aproximada por falta, a altura do retângulo é dada pelo valor da função calculada na extremidade à esquerda do sub-intervalo. Assim, quando a base é o intervalo  $\left[(i-1)\frac{k}{n}, i\frac{k}{n}\right]^2$ , a altura é dada por  $\left[(i-1)\frac{k}{n}\right]^2$  para  $1 \leq i \leq n$ .

Dessa forma, a área aproximada por falta é dada por:

$$\begin{aligned}
 S &= \left[ \left[0 \cdot \frac{k}{n}\right]^2 + \left[1 \cdot \frac{k}{n}\right]^2 + \left[2 \cdot \frac{k}{n}\right]^2 + \dots + \left[(n-1) \cdot \frac{k}{n}\right]^2 \right] \frac{k}{n} \\
 &= \frac{k^3}{n^3} \left[ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 \right] \\
 &= \frac{k^3}{n^3} \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n^2 \right] \text{ uma vez que } 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{k^3}{n^2} \frac{(n-1)(2n-1)}{6}
 \end{aligned} \tag{10.2.19}$$

- Cálculo da área da região compreendida entre o eixo  $x$  e a curva  $f(x) = x^2$  para  $x$  variando no intervalo  $[0, k]$ , onde  $k$  é um valor real qualquer, aproximada por excesso.

Dividimos o intervalo  $[0, k]$  em  $n$  partes iguais.



Dessa forma, cada sub-intervalo tem comprimento igual a  $\frac{k}{n}$ . O  $i$ -ésimo sub-intervalo, para  $1 \leq i \leq n$ , determina um retângulo cuja base mede  $\frac{k}{n}$  e cuja altura é  $\left[i\frac{k}{n}\right]^2$ .

Dessa forma, a área aproximada por excesso é dada por:

$$\begin{aligned}
S &= \left[ \left[ 1 \cdot \frac{k}{n} \right]^2 + \left[ 2 \cdot \frac{k}{n} \right]^2 + \dots + \left[ (n-1) \cdot \frac{k}{n} \right]^2 + \left[ n \cdot \frac{k}{n} \right]^2 \right] \frac{k}{n} \\
&= \frac{k^3}{n^3} [1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2] \\
&= \frac{k^3}{n^3} \left[ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
&= \frac{k^3}{n^2} \frac{(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned} \tag{10.2.20}$$

Assim, a área da região, dependendo do número  $n$  de divisões do intervalo  $[0, k]$ , está compreendida entre dois valores:

$$\frac{k^3}{n^2} \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \leq A_n \leq \frac{k^3}{n^2} \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \tag{10.2.21}$$

Fazendo o número  $n$  de divisões do intervalo  $[0, k]$ , crescer indefinidamente, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{k^3}{n^2} \frac{(n-1)(2n-1)}{6} \right] = \frac{k^3}{3} \tag{10.2.22}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{k^3}{n^2} \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \right] = \frac{k^3}{3} \tag{10.2.23}$$

Logo, pelo Teorema do Confronto,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{k^3}{3} \tag{10.2.24}$$

O teorema fundamental nos diz que se o objetivo é calcular a integral de alguma função  $f$  ao longo de um intervalo  $[a, b]$  devemos primeiro calcular a antiderivada  $F$  de  $f$ . Para simplificar o cálculo da integral

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \tag{10.2.25}$$

a seguinte notação é comumente utilizada para a antiderivada:

$$F(x) = \int f(x) dx. \tag{10.2.26}$$

A integral que aparece aqui não possui os limites de integração  $a$  e  $b$ . É chamada uma integral indefinida, ao contrário da integral em (10.2.3), que é chamada integral definida.

Até agora integramos funções limitadas com número finito de descontinuidades num intervalo fechado. Agora, estendemos a definição para intervalos infinitos e funções com descontinuidades infinitas no intervalo, por exemplo,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ ,  $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$ ,  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ .

**Teorema 10.2.3.** A integral imprópria de  $f$  no intervalo  $[a, +\infty)$  é

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (10.2.27)$$

quando o limite existe, caso contrário dizemos que a integral imprópria diverge.

**Exemplo 10.2.3.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2} \right) = \frac{1}{2}, \quad (10.2.28)$$

portanto é uma integral imprópria convergente.

**Exemplo 10.2.4.**

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \log(b) = +\infty, \quad (10.2.29)$$

portanto é uma integral imprópria divergente.

**Teorema 10.2.4.** Analogamente, a integral imprópria de  $f$  no intervalo  $(-\infty, b]$  é

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (10.2.30)$$

quando o limite existe, caso contrário dizemos que a integral imprópria diverge.

**Teorema 10.2.5.** A integral imprópria de  $f$  no intervalo  $(-\infty, +\infty)$  é

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx, \quad (10.2.31)$$

quando o limite existe, caso contrário dizemos que a integral imprópria diverge.

**Teorema 10.2.6.** Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$  exceto por uma descontinuidade infinita em  $b$  então a integral imprópria de  $f$  em  $[a, b]$  nesse caso é

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx, \quad (10.2.32)$$

e caso haja uma descontinuidade infinita em  $a$  então a integral imprópria de  $f$  em  $[a, b]$  nesse caso é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx, \quad (10.2.33)$$

Caso o limite não exista então dizemos que a integral imprópria diverge. Finalmente, se a descontinuidade infinita for em  $c \in [a, b]$  então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad (10.2.34)$$

e dizemos que a integral diverge caso alguma das parcelas divirja.

TABELA 10.1 – DIFERENÇAS E SEMELHANÇAS ENTRE A INTEGRAL DEFINIDA E A INTEGRAL INDEFINIDA

Integral indefinida	Integral definida
$\int f(x)dx$ é uma função	$\int_a^b f(x)dx$ é um número
Por definição, $\int f(x)dx$ é qualquer função de $x$ cuja derivada é $f(x)$	$\int_a^b f(x)dx$ foi definida em termos da soma de Riemann e pode ser interpretada como a área sobre o gráfico de $y = f(x)$ quando $f(x) > 0$
$x$ não é uma variável dummy. Por exemplo, $\int 2x dx = x^2 + C$ e $\int 2t dt = t^2 + C$ são funções de diferentes valores e não são iguais	$x$ é uma variável dummy. Por exemplo, $\int_0^1 2x dx = 1$ e $\int_0^1 2t dt = 1$ são iguais

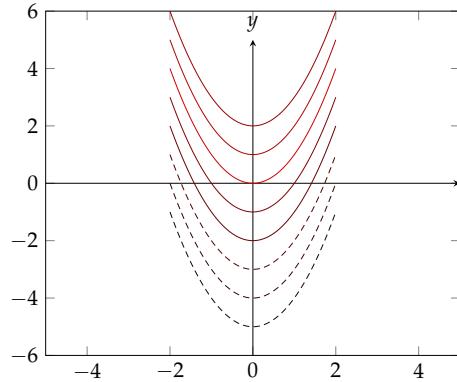
**Teorema 10.2.7.** Se  $F_1(x)$  e  $F_2(x)$  são as antiderivadas da mesma função  $f(x)$  no intervalo  $a \leq x \leq b$ , então há uma constante  $C$  tal que  $F_1(x) = F_2(x) + C$ .

*Demonstração.* Considere a diferença  $G(x) = F_1(x) - F_2(x)$ . Então,  $G'(x) = F'_1(x) - F'_2(x) = f(x) - f(x) = 0$ . Logo,  $G(x)$  deve ser uma constante. Portanto,  $F_1(x) - F_2(x) = C$  para alguma constante. ■

**Exemplo 10.2.5.** Seja  $f(x) = 2x$ . Então  $\int f(x)dx = x^2 + C$ . Para diferentes valores de  $C$ , obtemos integrais diferentes. Mas essas integrais são muito semelhantes geometricamente. Assim,  $y = x^2 + C$ , onde  $C$  é uma constante arbitrária, representa uma família de integrais. Ao atribuir valores diferentes para  $C$ ,

obtemos diferentes membros da família. Estes juntos constituem a integral indefinida. Neste caso, cada integral representa uma parábola com seu eixo ao longo do eixo  $y$ .

FIGURA 10.2.3 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $y = x^2 + C$



Assim como as derivadas têm regras práticas para facilitar os cálculos, as integrais também têm regras. São elas:

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad (10.2.35)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{para } n \neq -1, \quad (10.2.36)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \quad (10.2.37)$$

$$\int \exp(x)dx = \exp(x) + C, \quad (10.2.38)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad \text{use } a = \exp\{(x \ln a)\} \quad (10.2.39)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad (10.2.40)$$

$$\int \cos x dx = -\sin x + C, \quad (10.2.41)$$

$$\int \tan x dx = -\ln|\cos x| + C, \quad (10.2.42)$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C, \quad (10.2.43)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C. \quad (10.2.44)$$

Vamos demonstrar a integral de  $f(x) = \tan x$ .

*Demonstração.*

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx. \quad (10.2.45)$$

Seja  $u = \cos x$ . Então  $du = -\sin x dx$ . Substituindo na definição acima:

$$\begin{aligned}
 \int \tan x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\
 &= - \int \frac{du}{u} \\
 &= -\ln|u| + C \\
 &= -\ln|\cos x| + C.
 \end{aligned} \tag{10.2.46}$$

■

Assim como tínhamos uma lista de propriedades para os limites e derivadas de somas e produtos de funções, a integral tem propriedades semelhantes. Suponha que tenhamos duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  com antiderivadas  $F(x)$  e  $G(x)$ , respectivamente. Então nós sabemos que

1.  $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$
2.  $\int f(x) \pm g(x) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
3.  $\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$
4.  $\int_a^a f(x)dx = 0$
5.  $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$
6.  $\int_a^b f(x) \pm g(x) dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
7. Se  $f(x) \geq 0$  para  $a \leq x \leq b$ , então  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
8. Se  $f(x) \geq g(x)$  e  $a \leq x \leq b$ , então  $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
9.  $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$
10. Se  $m \leq f(x) \leq M$  e  $a \leq x \leq b$ , então  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

**Teorema 10.2.8 (Segundo Teorema Fundamental do Cálculo).** Com isso, como diferenciamos uma função que é definida por uma integral? Se  $f(x) = F'(x)$ , então o primeiro teorema fundamental do cálculo diz que

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), \tag{10.2.47}$$

e, portanto,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx} \{F(x) - F(a)\} = F'(x) = f(x), \quad (10.2.48)$$

isto é,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x). \quad (10.2.49)$$

Um cálculo similar dá

$$\frac{d}{dx} \int_x^b f(t)dt = -f(x). \quad (10.2.50)$$

## 10.3 Técnicas de Integração

### 10.3.1 Substituição

**Teorema 10.3.1 (Regra da Substituição).** Se  $u = g(x)$  é uma função diferenciável cujo domínio está no intervalo  $I$  e  $f$  é uma função contínua em  $I$ , então

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du|_{u=g(x)}. \quad (10.3.1)$$

*Demonstração.* Se  $F' = f$ , então:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C \quad (10.3.2)$$

ou

$$(f \circ g)' = (F \circ g)' \iff F' = f \quad (10.3.3)$$

■

**Exemplo 10.3.1.** Encontre  $\int 2e^{-2x}dx$ .

Esta integral parece difícil! As fórmulas anti-diferenciação simples que temos não nos dizem como calcular essa integral. Nós precisamos de um truque! Para resolver esta questão, transformamos a integral do

enunciado em uma similar a uma das expressões básicas. Para tanto, fazemos a seguinte substituição simples:  $u = -2x$ . Feito isso, derivamos  $u$ ,  $du = -2dx$  e obtemos o valor de  $dx = -\frac{du}{2}$ .

Introduzindo essas substituições na integral, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \int 2e^{-2x} dx &= \int 2e^u \left(-\frac{du}{2}\right) \\
 &= \int e^u (-du) \\
 &= - \int e^u du \\
 &= -e^u \\
 &= -e^{-2x} + C.
 \end{aligned} \tag{10.3.4}$$

**Exemplo 10.3.2.** Encontre  $\int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx$ .

Fazemos a seguinte substituição simples:  $u = x^2 + 1$ . Feito isso, derivamos  $u$ ,  $du = 2xdx$ .

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{du}{(u)^2} \\
 &= \int (u)^{-2} du \\
 &= \frac{(u)^{-1}}{-1} \\
 &= -\frac{1}{u} \\
 &= -\frac{1}{x^2 + 1} + C.
 \end{aligned} \tag{10.3.5}$$

**Exemplo 10.3.3.** Encontre  $\int \frac{4}{e^{3x}} dx$ .

Fazemos a seguinte substituição simples:  $u = -3x$ . Feito isso, derivamos  $u$ ,  $du = -3dx$ .

$$\begin{aligned}
 \int \frac{4}{e^{3x}} dx &= 4 \int e^{3x} dx \\
 &= -\frac{4}{3} \int e^u du \\
 &= -\frac{4}{3} e^{-3x} + C.
 \end{aligned} \tag{10.3.6}$$

**Exemplo 10.3.4.** Encontre  $\int \max\{0, xe^{-x^2}\} dx$ .

Devemos primeiro determinar para quais valores de  $x$  a função  $\max\{0, xe^{-x^2}\}$  é zero e para quais ela é igual a  $xe^{-x^2}$ , e somente depois é que se calcula a integral.

Lembrando que  $e^{-x^2} > 0$ , então:

1. Se  $x \leq 0$ :  $xe^{-x^2} \leq 0$ , o que implica que  $\max\{0, xe^{-x^2}\} = 0$ ;
2. Se  $x > 0$ :  $xe^{-x^2} > 0$ , o que implica que  $\max\{0, xe^{-x^2}\} = xe^{-x^2}$ ;

Com essa informação, reescrevemos a integral do problema como duas integrais:

$$\int 0dx + \int xe^{-x^2}dx = \int xe^{-x^2}dx. \quad (10.3.7)$$

Fazemos a seguinte substituição simples:  $u = -x^2$ . Feito isso, derivamos  $u$ ,  $du = -2xdx$  ou  $-\frac{du}{2} = xdx$ .

$$\begin{aligned} \int xe^{-x^2}dx &= -\frac{1}{2} \int e^u du \\ &= -\frac{1}{2} e^u \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C. \end{aligned} \quad (10.3.8)$$

**Exemplo 10.3.5.** Encontre  $\int x\sqrt{x+1}dx$ .

Fazemos a seguinte substituição simples:  $u = x + 1$ . Feito isso, derivamos  $u$ ,  $du = dx$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+1}dx &= \int (u-1)\sqrt{u}du \\ &= \int (u^{3/2} - u^{1/2})du \\ &= \frac{2}{5}(x+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(x+1)^{3/2} + C. \end{aligned} \quad (10.3.9)$$

**Exemplo 10.3.6.** Encontre  $\int \frac{\sec^2(3x)}{\tan(3x)}dx$ .

Fazemos a seguinte substituição simples:  $u = \tan(3x)$ . Feito isso, derivamos  $u$ ,  $du = 3\sec^2(3x)dx$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{\sec^2(3x)}{\tan(3x)}dx &= \int \frac{1}{u} \frac{du}{3} \\ &= \frac{1}{3} \int \frac{1}{u} du \\ &= \frac{1}{3} \ln|u| + C \\ &= \frac{1}{3} \ln|\tan(3x)| + C \end{aligned} \quad (10.3.10)$$

### 10.3.2 Substituição Trigonométrica

**Teorema 10.3.2 (Substituição Trigonométrica).** Em integrais com expressões do tipo  $(a^2 - x^2)^{1/2}$ , a substituição desse tipo é sempre a mesma:  $x = a \cdot \sin \theta$ .

**Exemplo 10.3.7.** Encontre  $\int \sqrt{4 - x^2} dx$ .

No caso da integral desse problema  $a = 2$  e  $x = 2 \sin \theta$ . Consequentemente,  $dx = 2 \cos \theta d\theta$ . Portanto,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4 - x^2} dx &= \int (4 - 4 \sin^2 \theta)^{1/2} (2 \cos \theta) d\theta \\ &= 2 \int (4(1 - \sin^2 \theta))^{1/2} (\cos \theta) d\theta \\ &= 4 \int (1 - \sin^2 \theta)^{1/2} (\cos \theta) d\theta.\end{aligned}\tag{10.3.11}$$

Lembre que  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , ou seja,  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ . Utilizando esse resultado, temos:

$$4 \int (1 - \sin^2 \theta)^{1/2} (\cos \theta) d\theta = 4 \int (\cos^2 \theta)^{1/2} (\cos \theta) d\theta = 4 \int \cos^2 \theta d\theta.\tag{10.3.12}$$

Uma segunda relação utilizada é:  $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ . Logo,

$$\begin{aligned}4 \int (\cos^2 \theta) d\theta &= 4 \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 2 \int d\theta + 2 \int \cos 2\theta d\theta \\ &= 2\theta + \sin 2\theta \\ &= 2 \arcsin \left( \frac{x}{2} \right) + \sin \left( 2 \arcsin \left( \frac{x}{2} \right) \right) + C.\end{aligned}\tag{10.3.13}$$

**Exemplo 10.3.8.** Encontre  $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} dx$ .

No caso da integral desse problema  $a = 2$  e  $x = 2 \sin \theta$ . Consequentemente,  $dx = 2 \cos \theta d\theta$ . Portanto,  $\sqrt{4 - x^2} = 2 \cos \theta$ . Assim,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{\sqrt{4 - x^2}} dx &= \int \frac{(2 \sin \theta)^3 2 \cos \theta d\theta}{\sqrt{4 - (2 \sin \theta)^2}} \\ &= \int \frac{16 \sin^3 \theta \cos \theta}{2 \cos \theta} \\ &= \int 8 \sin^3 \theta d\theta \\ &= \int 8 \sin^2 \theta \sin \theta d\theta\end{aligned}$$

$$= 8 \int (1 - \cos^2) \sin \theta d\theta \quad (10.3.14)$$

Agora vamos fazer  $w = \cos \theta$  e, portanto,  $dw = -\sin \theta d\theta$ .

$$\begin{aligned} 8 \int (1 - \cos^2) \sin \theta d\theta &= -8 \int (1 - w^2) dw \\ &= 8 \int (w^2 - 1) dw \\ &= \frac{8w^3}{3} - 8w + C \\ &= \frac{8 \cos^3 \theta}{3} - 8 \cos \theta + C \end{aligned} \quad (10.3.15)$$

$$= \frac{8 \cos \left( \arcsin \frac{x}{2} \right)^3}{3} - 8 \cos \left( \arcsin \frac{x}{2} \right) + C \quad (10.3.16)$$

**Teorema 10.3.3 (Substituição Trigonométrica).** Em integrais com expressões do tipo  $(a^2 + x^2)$ , a substituição desse tipo é sempre a mesma:  $x = a \cdot \tan \theta$ .

**Exemplo 10.3.9.** Encontre  $\int \frac{2}{1+x^2} dx$ .

$$Aqui a = 1 e x = \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

Derivando essa última expressão com a regra do quociente, temos:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\cos(\theta) \cos(\theta) - \sin(\theta)(-\sin(\theta))}{\cos^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} d\theta \\ &= \frac{1}{\cos^2(\theta)} d\theta. \end{aligned} \quad (10.3.17)$$

Assim, a integral se torna:

$$\int \frac{2}{1+x^2} dx = \int \left( \frac{2}{1+\tan^2(\theta)} \right) \left( \frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) d\theta. \quad (10.3.18)$$

Reescrevendo  $\tan^2(\theta) = \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}$ , obtemos:

$$\int \left( \frac{2}{1+\tan^2(\theta)} \right) \left( \frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) d\theta = \int \left( \frac{2}{1+\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} \right) \left( \frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int \left( \frac{2}{\frac{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}} \right) \left( \frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) d\theta \\
&= \int \left( \frac{2}{\frac{1}{\cos^2(\theta)}} \right) \left( \frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) d\theta \\
&= \int 2d\theta = 2\theta \\
&= 2 \arctan x + C. \tag{10.3.19}
\end{aligned}$$

**Exemplo 10.3.10.** Calcule  $\int \frac{1}{(x^2 - 6x + 11)^2} dx$ .

Vamos completar o quadrado da expressão do denominador:

$$x^2 - 6x + 11 = \underbrace{x^2 - 6x + \square}_{\text{deveria ser um quadrado perfeito!}} + 11 - \square \tag{10.3.20}$$

Para fazer isso assuma que  $\square = \left(\frac{-6}{2}\right)^3 = 9$ . Portanto, podemos escrever  $x^2 - 6x + 11 = (x - 3)^2 + 2$ . Logo,

$$\int \frac{1}{(x^2 - 6x + 11)^2} dx = \int \frac{1}{((x - 3)^2 + 2)^2} dx \tag{10.3.21}$$

Vamos fazer a substituição  $u = x - 3$ , o que implica  $du = dx$ . Podemos reescrever:

$$\int \frac{1}{((x - 3)^2 + 2)^2} dx = \int \frac{1}{(u^2 + 2)^2} du \tag{10.3.22}$$

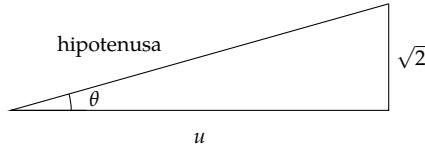
Observe que  $u^2 + 2 = u^2 + (\sqrt{2})^2$ , isto é,  $a = \sqrt{2}$ .

Vamos fazer a substituição  $u = \sqrt{2} \tan \theta$  para  $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ , tal que  $du = \sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta$ . Então,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(u^2 + 2)^2} du &= \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta}{((\sqrt{2} \tan \theta)^2 + 2)^2} \\
&= \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta}{(2 \tan^2 \theta + 2)^2} \\
&= \int \frac{\sqrt{2} \sec^2 \theta d\theta}{(2(\tan^2 + 1))^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{(\sec^2 \theta)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{d\theta}{\sec^2 \theta} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \cos^2 \theta d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \int \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \int 1 + \cos(2\theta) d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right) + C \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \theta + \frac{1}{2} (2 \sin \theta \cos \theta) \right) + C \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8} (\theta + \sin \theta \cos \theta) + C
\end{aligned} \tag{10.3.23}$$

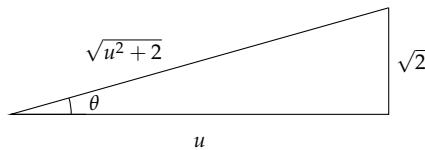
Lembre que fizemos  $u = \sqrt{2} \tan \theta$ . Então deduzimos que  $\frac{u}{\sqrt{2}} = \tan \theta$  e, portanto,  $\theta = \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$ . Representando graficamente, temos:



Pelo Teorema de Pitágoras, sabemos que

$$\text{hipotenusa} = \sqrt{u^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{u^2 + 2} \tag{10.3.24}$$

Com isso, nosso triângulo se torna:



Assim, sabemos que  $\theta = \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)$ ,  $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u^2 + 2}}$  e  $\cos \theta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2}}$ . Portanto:

$$\frac{\sqrt{2}}{8} (\theta + \sin \theta \cos \theta) + C = \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{u^2 + 2}} \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2}} \right) + C \tag{10.3.25}$$

E como fizemos  $u = x - 3$ , temos que:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(x^2 - 6x + 11)^2} dx &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \arctan \left( \frac{x-3}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(x-3)^2 + 2}} \frac{(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2 + 2}} \right) + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8} \left( \arctan \left( \frac{x-3}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\sqrt{2}(x-3)}{(x-3)^2 + 2} \right) + C\end{aligned}\quad (10.3.26)$$

**Exemplo 10.3.11.** Calcule  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} dx$ .

Fazemos a substituição  $u = x - 2$ .

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2 + 9}} dx \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 9}}\end{aligned}\quad (10.3.27)$$

Agora fazemos a substituição  $u = 3 \tan \theta$ . Logo,  $du = 3 \sec^2 \theta d\theta$ . Assim,  $\sqrt{u^2 + 9} = \sqrt{9 \tan^2 \theta + 9} = 3\sqrt{\sec^2 \theta} = 3 \sec \theta$ . Consequentemente,

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + 9}} &= \int \frac{3 \sec^2 \theta d\theta}{3 \sec \theta} \\ &= \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= \ln \left| \sec \left( \arctan \frac{u}{3} \right) + \tan \left( \arctan \frac{u}{3} \right) \right| + C \\ &= \ln \left| \sec \left( \arctan \left( \frac{x-2}{3} \right) \right) + \tan \left( \arctan \left( \frac{x-2}{3} \right) \right) \right| + C\end{aligned}\quad (10.3.28)$$

### 10.3.3 Integração por Partes

No cálculo integral, integração por partes é um método que permite expressar a integral de um produto de funções em outra integral. A integração por partes pode ser vista como uma versão integrada da regra do produto.

A fórmula típica é a seguinte:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx,\quad (10.3.29)$$

em que onde  $u$  e  $v$  são funções de classe  $C^1$  no intervalo  $x \in [a, b]$ , ou seja, são diferenciáveis e suas derivadas são contínuas entre  $a$  e  $b$ . Ou, ainda, de forma mais enxuta:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (10.3.30)$$

*Demonstração.* Uma demonstração simples pode ser obtida através da regra do produto:

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)) = u(x)\frac{d}{dx}v(x) + v(x)\frac{d}{dx}u(x), \quad (10.3.31)$$

integrando esta expressão entre  $a$  e  $b$ , temos:

$$\int_a^b \left[ \frac{d}{dx}(u(x)v(x)) \right] dx = \int_a^b u(x)\frac{d}{dx}v(x)dx + \int_a^b v(x)\frac{d}{dx}u(x)dx. \quad (10.3.32)$$

Concluímos a demonstração, através do teorema fundamental do cálculo:

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u(x)\frac{d}{dx}v(x)dx + \int_a^b v(x)\frac{d}{dx}u(x)dx. \quad (10.3.33)$$

Por fim, observamos que  $dv = v'(x)dx$  e  $du = u'(x)dx$ . ■

**Exemplo 10.3.12.** Encontre  $\int x^2 e^{-x} dx$ .

O objetivo é abaixar o grau do polinômio presente na integral de  $x^2$  para  $x^0$ . Assim,  $u = x^2$  e o restante que está sendo integrado é  $dv = e^{-x}dx$ .

Se  $u = x^2$ , então  $du = 2x dx$ .

Se  $dv = e^{-x}dx$ , então  $v = \int e^{-x}dx$ . Esta integral é de fácil resolução,  $v = -e^{-x}$ .

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - \int -2x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx. \quad (10.3.34)$$

Para resolver esta integral aplicamos novamente a integração por partes.

Se  $u = x$ , então  $du = dx$ .

Se  $dv = e^{-x}dx$ , então  $v = \int e^{-x}dx$ . Esta integral é de fácil resolução,  $v = -e^{-x}$ .

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{-x} dx &= -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \left[ -xe^{-x} - \int -e^{-x} dx \right] \\ &= -x^2 e^{-x} + 2 \left[ -xe^{-x} - e^{-x} \right] \\ &= -e^{-x} (x^2 + 2x + 1) \\ &= -(x+1)^2 e^{-x} + C. \end{aligned} \quad (10.3.35)$$

**Exemplo 10.3.13.** Encontre  $\int \ln x dx$ .

$$Aqui, u = \ln x \ e \ dv = dx. Assim, du = \left(\frac{1}{x}\right) dx \ e \ v = x.$$

$$\begin{aligned} \int \ln x dx &= x \ln x - \int x \left(\frac{1}{x}\right) dx \\ &= x \ln x - x \\ &= x(\ln x - 1) + C. \end{aligned} \tag{10.3.36}$$

**Exemplo 10.3.14.** Encontre  $\int e^x \cos(x) dx$ .

$$Aqui, u = \cos(x) \ e \ dv = e^x dx. Assim, du = -\sin(x)dx \ e \ v = e^x.$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \cos(x)e^x + \int e^x \sin(x) dx. \tag{10.3.37}$$

Usando a integração por partes novamente,  $u = \sin(x)$  e  $dv = e^x dx$ . Assim,  $du = \cos(x)dx$  e  $v = e^x$ .

$$\begin{aligned} \int e^x \cos(x) dx &= \cos(x)e^x + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx \\ 2 \int e^x \cos(x) dx &= e^x (\sin(x) + \cos(x)) \\ &= \frac{e^x (\sin(x) + \cos(x))}{2} + C. \end{aligned} \tag{10.3.38}$$

**Exemplo 10.3.15.** Compute  $\int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx$ .

Para resolver esse problema vamos combinar conhecimentos de várias áreas.

Sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad [soma \ de \ uma \ PG \ infinita] \\ \int \frac{1}{1-x} dx &= \int \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx \\ \int \frac{1}{1-x} dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int x^n dx \\ -\ln(1-x) + C &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad [sem \ módulo \ no \ log \ pois \ o \ interv \ de \ integração \ é \ positivo] \\ -\ln(1-x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad [fazendo \ x = 0] \end{aligned} \tag{10.3.39}$$

Assim, a integral se torna:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \ln(x) \ln(1-x) dx &= - \int_0^1 \ln(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} dx \\
 &= - \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1} \ln(x)}{n+1} dx \\
 &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} \ln(x) dx \right)
 \end{aligned} \tag{10.3.40}$$

Vamos resolver essa integral usando integração por partes. Assim,

$$\int_0^1 x^{n+1} \ln(x) dx = \underbrace{\ln(x) \frac{x^{n+2}}{n+2} \Big|_0^1}_A - \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x} \frac{x^{n+2}}{n+2} dx}_B \tag{10.3.41}$$

Vamos resolver a parte A e a parte B separadamente. Então,

$$\begin{aligned}
 \ln(x) \frac{x^{n+2}}{n+2} \Big|_0^1 &= \ln(1) \frac{1^{n+2}}{n+2} - \ln(0^+) \frac{(0^+)^{n+2}}{n+2} \\
 &= 0 - \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln(x) \frac{x^{n+2}}{n+2} \right) \\
 &= 0 - \frac{1}{n+2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) x^{n+2} \\
 &= 0 - \frac{1}{n+2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x^{-(n+2)}} \\
 &= 0 - \frac{1}{n+2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{d}{dx}(\ln(x))}{\frac{d}{dx}(x^{-(n+2)})} \\
 &= 0 - \frac{1}{n+2} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-(n+2)x^{-(n+2)-1}} \\
 &= 0 - \frac{1}{(n+2)^2} \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} x^{n+3} \\
 &= 0 + \frac{1}{(n+2)^2} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{n+2} \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{10.3.42}$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} \frac{x^{n+2}}{n+2} dx &= \left. \frac{x^{n+2}}{(n+2)^2} \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{(n+2)^2} \end{aligned} \tag{10.3.43}$$

Retomando a integral, temos:

$$\begin{aligned} -\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^{n+1} \ln(x) dx \right) &= -\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} \left( -\frac{1}{(n+2)^2} \right) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} \frac{1}{(n+2)^2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{-1}{n+2} + \frac{-1}{(n+2)^2} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n+2} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2} \\ &= 1 - \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) \\ &= 1 - \left( \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots - 1 \right) \\ &= 1 - \frac{\pi^2}{6} + 1 \\ &= 2 - \frac{\pi^2}{6} \end{aligned} \tag{10.3.44}$$

#### 10.3.4 Fração Parcial

Nesta seção, aprenderemos um método geral que nos permite integrar funções racionais. Lembre-se de que uma função racional é uma função que é um quociente de dois polinômios:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}. \quad (10.3.45)$$

O método discutido nesta seção é chamado de frações parciais: ele nos permite decompor o quociente  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  em uma soma de frações mais simples, cujas integrais são fáceis de encontrar. Para ilustrar a ideia, começamos com uma observação simples.

Em geral, quando  $Q(x)$  não tem fatores repetidos, usamos esse método da seguinte forma.

**Teorema 10.3.4 (Fração Parcial para  $Q(x)$  sem Fator Linear Distinto).** Se  $\deg P(x) < \deg Q(x)$  e  $Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdot \dots \cdot (a_nx + b_n)$  não tem fatores repetidos, então

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \dots + \frac{A_n}{a_nx + b_n}. \quad (10.3.46)$$

**Exemplo 10.3.16.** Encontre  $\int \frac{4x - 1}{x^2 + x - 2} dx$ .

Primeiro, fatoramos o denominador  $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$ . Portanto,

$$\frac{4x - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{4x - 1}{(x + 2)(x - 1)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1}. \quad (10.3.47)$$

Multiplicando por  $(x + 2)(x - 1)$ , obtemos:

$$4x - 1 = A(x - 1) + B(x + 2). \quad (10.3.48)$$

Vamos resolver para  $A$  e  $B$ . Lembre-se de que dois polinômios são iguais se e somente se seus coeficientes forem iguais. Reorganizando a equação acima, obtemos uma igualdade de dois polinômios:

$$4x - 1 = (A + B)x + 2B - A. \quad (10.3.49)$$

Igualando os coeficientes e resolvendo o sistema, temos:

$$A + B = 4 \quad e \quad -1 = 2B - A \quad \implies A = 3 \text{ e } B = 1. \quad (10.3.50)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{4x - 1}{x^2 + x - 2} dx &= \int \left( \frac{3}{x + 2} + \frac{1}{x - 1} \right) dx \\ &= 3 \ln|x + 2| + \ln|x - 1| + C. \end{aligned} \quad (10.3.51)$$

**Teorema 10.3.5** (Fração Parcial para  $Q(x)$  com Fator Linear Distinto). Suponha que  $\deg P(x) < \deg Q(x)$ . Cada fator de  $Q(x)$  da forma  $(ax + b)^k$  nos dá

$$\frac{A_1}{ax + b} + \frac{A_2}{(ax + b)^2} + \dots + \frac{A_k}{(ax + b)^k}. \quad (10.3.52)$$

**Exemplo 10.3.17.** Encontre  $\int \frac{2x^2 + 3}{x(x-1)^2} dx$ .

Aqui  $P(x) = 2x^2 + 3$  e  $Q(x) = x(x-1)^2$ , então  $\deg P(x) < \deg Q(x)$ , mas  $Q(x)$  tem o fator repetido  $(x-1)$ , então o método não é aplicado diretamente. Vamos dividir esta função racional em “partes”:

$$\frac{2x^2 + 3}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}. \quad (10.3.53)$$

Multiplique pelo denominador comum  $(x(x-1)^2)$  para obter:

$$2x^2 + 3 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx. \quad (10.3.54)$$

Igualando os coeficientes e resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3 &= A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - x) + Cx \\ &= x^2(A+B) + x(-2A-B+C) + A. \end{aligned} \quad (10.3.55)$$

Logo,  $A = 3$ ,  $B = -1$  e  $C = 5$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 3}{x(x-1)^2} dx &= \int \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2} dx \\ &= 3 \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{5}{x-1} + C. \end{aligned} \quad (10.3.56)$$

**Teorema 10.3.6** (Fração Parcial para  $Q(x)$  com Fatores Quadráticos Distintos Irreduzíveis). Suponha que  $\deg P(x) < \deg Q(x)$  e que  $Q(x)$  tem a forma  $ax^2 + bx + c$ , onde  $b^2 - 4ac < 0$ . Então obtemos uma fração parcial da forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}. \quad (10.3.57)$$

**Exemplo 10.3.18.** Encontre  $\int \frac{3x^2 - 5x + 4}{(x-1)(x^2+1)} dx$ .

Vamos escrever a fração como:

$$\frac{3x^2 - 5x + 4}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}. \quad (10.3.58)$$

Igualando os coeficientes e resolvendo o sistema, temos:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 3 &= A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 - x) + Cx \\ &= x^2(A+B) + x(-2A-B+C) + A. \end{aligned} \quad (10.3.59)$$

Resolvendo para  $A$ ,  $B$  e  $C$ , encontramos:  $A = 1$ ,  $B = 2$ ,  $C = -3$ .

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 5x + 4}{(x-1)(x^2+1)} dx &= \int \left( \frac{1}{x-1} + \frac{2x-3}{x^2+1} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2x}{x^2+1} dx - 3 \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \ln|x-1| + \ln|x^2+1| - 3 \tan^{-1}(x) + C. \end{aligned} \quad (10.3.60)$$

### 10.3.5 Integrais com Limites de Integral Variável

**Teorema 10.3.7.** No teorema fundamental, temos:  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ . Com limites variáveis, temos que:  $\frac{d}{dx} \left[ \int_{a(x)}^{b(x)} f(x)dx \right] = \frac{d}{dx} [F(b(x)) - F(a(x))]$ . Pela regra da cadeia, temos:

$$\frac{d}{dx} [F(b(x)) - F(a(x))] = F'(b(x))b'(x) - F'(a(x))a'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x). \quad (10.3.61)$$

**Exemplo 10.3.19.** Seja  $y(x) = \int_x^{x+1} 2^{t^2}$ . Calcule  $\frac{dy}{dx}$  para  $x = 1$ .

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_x^{x+1} 2^{t^2} \right] = 2^{t^2}|_{x+1}(x+1)' - 2^{t^2}|_x(x)' = 2^{(x+1)^2}(1) - 2^{x^2}(1) = 14. \quad (10.3.62)$$

## 10.4 Integrais Duplas

Um método similar de particionamento, multiplicação e soma é usado para construir integrais duplas. No entanto, trabalhamos com um plano  $\mathcal{D}$  com pequenos retângulos, em vez de pequenos subintervalos. Em seguida, pegamos o produto de cada pequena área de retângulos com o valor de

$f(x, y)$  em um ponto dentro desse retângulo e, finalmente, somamos todos esses produtos. Quando  $f(x, y)$  é contínua, essas somas convergem para um único número, pois cada um dos pequenos retângulos encolhe na largura e na altura. O limite é a integral dupla de  $f(x, y)$  sobre  $\mathcal{D}$ . Assim como as integrais simples, podemos avaliar as integrais múltiplas via antiderivados, o que nos libera da tarefa formidável de calcular uma integral dupla diretamente de sua definição como o limite da soma de Riemann. O principal problema prático que surge na avaliação de integrais múltiplas reside na determinação dos limites de integração. Enquanto as integrais de seus estudos anteriores de cálculo foram avaliadas em um intervalo, que é determinado por seus dois pontos finais, integrais múltiplas são avaliados sobre uma região no plano ou no espaço. Isto dá origem a limites de integração que muitas vezes envolvem variáveis, não apenas constantes. Descrever as regiões de integração é a principal questão nova que surge no cálculo de integrais múltiplas.

Começamos nossa investigação de integrais duplas considerando o tipo mais simples de região planar, um retângulo. Consideraremos uma função  $z = f(x, y)$  definida em uma região retangular,  $\mathcal{D}$ , definida como

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}. \quad (10.4.1)$$

Nós subdividimos a região do plano  $\mathcal{D}$  em pequenos retângulos usando uma rede de linhas paralelas aos eixos  $x$  e  $y$ . As linhas dividem  $\mathcal{D}$  em  $n$  partes retangulares, onde o número de tais espaços  $n$  fica grande conforme a largura e a altura de cada espaço ficam menores. Esses retângulos formam uma partição de  $\mathcal{D}$ . Um pequeno pedaço retangular de largura,  $\Delta x$  e altura  $\Delta y$  tem área  $\Delta A = \Delta x \Delta y$ . Se numerarmos os pequenos pedaços particionando  $\mathcal{D}$  em alguma ordem, então suas áreas serão dadas pelos números  $\Delta A_1, \Delta A_2, \dots, \Delta A_n$  onde  $\Delta A_k$  é a área do  $k$ -ésimo retângulo. Para formar uma soma de Riemann sobre  $\mathcal{D}$ , escolhemos um ponto  $(x_k, y_k)$  no  $k$ -ésimo retângulo, multiplicamos o número  $f(x_k, y_k)$  pela área  $\Delta A_k$  e somamos os produtos  $f(x_k, y_k)\Delta A_k$ :

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k. \quad (10.4.2)$$

Estamos interessados no que acontece com essa soma de Riemann, quando as larguras e alturas de todos os pequenos retângulos na partição de  $\mathcal{D}$  se aproximam de zero. O limite é escrito como:

$$\lim_{\|\mathcal{D}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k. \quad (10.4.3)$$

Quando  $\|\mathcal{D}\| \rightarrow 0$ , o número de retângulos  $n$  aumenta e podemos escrever esse limite como:

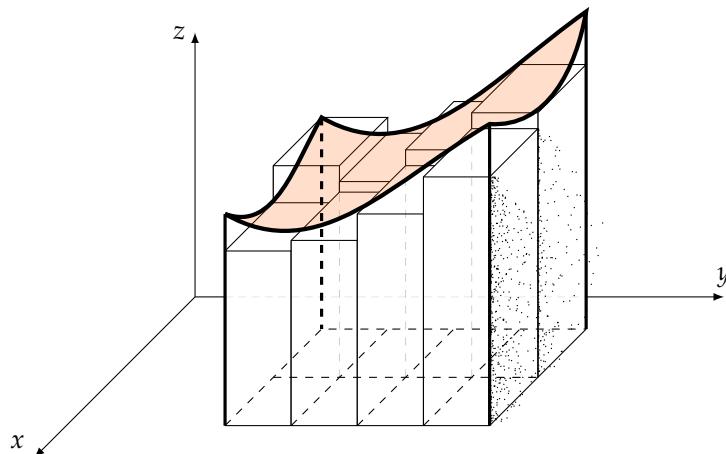
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k. \quad (10.4.4)$$

Quando o limite das somas existe, dando o mesmo valor não importando quais escolhas são feitas, então a função  $f(x, y)$  é dita integrável sobre  $\mathcal{D}$  e o limite é chamado de integral dupla de  $f(x, y)$  sobre  $\mathcal{D}$ , escrito como

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dA \quad \text{ou} \quad \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy. \quad (10.4.5)$$

Quando  $f(x, y)$  é uma função positiva sobre uma região  $\mathcal{D}$  no plano  $xy$ , podemos interpretar o número positivo  $\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dA$  como o volume da região sólida tridimensional  $\mathcal{E}$  sobre o plano  $xy$  delimitado abaixo por  $\mathcal{D}$  e delimitado acima pelo gráfico da superfície dada como  $z = f(x, y)$ . Cada termo  $f(x_k, y_k) \Delta A_k$  (um número positivo) na soma  $S_n = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta A_k$  é o volume de uma caixa retangular vertical que se aproxima do volume da porção da região sólida  $\mathcal{E}$  no espaço que fica diretamente acima da base  $\Delta A_k$ . A soma  $S_n$  aproxima assim o que queremos chamar de volume total do sólido  $\mathcal{E}$ .

FIGURA 10.4.1 – SOMA DE RIEMANN PARA UMA INTEGRAL DUPLA



**Exemplo 10.4.1.** Suponha que queiramos calcular o volume de um sólido:  $\int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y) dx dy$ .

A expressão acima, chamada de integral iterada ou repetida, diz que o volume é obtido integrando  $4 - x - y$  com respeito a  $y$  de  $y = 0$  a  $y = 1$ , mantendo  $x$  fixo, e então integrando a expressão resultante em  $x$  com respeito a  $x$  de  $x = 0$  a  $x = 2$ . Os limites de integração 0 e 1 estão associados a  $y$ , então eles são colocados na integral mais próxima de  $dy$ . Os outros limites de integração, 0 e 2, estão associados à variável  $x$ , portanto, eles são colocados no símbolo integral externo que está emparelhado com  $dx$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^1 (4 - x - y) dx dy &= \int_0^2 \left[ 4x - \frac{x^2}{2} - xy \right]_{x=0}^{x=1} dy \\
&= \int_0^2 \left[ 4 - \frac{1}{2} - y \right] dy \\
&= \int_0^2 \left[ \frac{7}{2} - y \right] dy \\
&= \left[ \frac{7}{2}y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} \\
&= 5.
\end{aligned} \tag{10.4.6}$$

Agora suponha que queiramos calcular o volume de um sólido cuja expressão é:  $\int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y) dx dy$ .

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^2 (4 - x - y) dy dx &= \int_0^1 \left[ 4y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=2} dx \\
&= \int_0^1 [8 - 2x - 2] dx \\
&= \int_0^1 [6 - 2x] dx \\
&= \left[ 6x - x^2 \right]_{x=0}^{x=1} \\
&= 5.
\end{aligned} \tag{10.4.7}$$

A integral dupla de qualquer função contínua  $f(x, y)$  sobre um retângulo  $\mathcal{D}$  pode ser calculado como uma integração iterada em qualquer ordem de integração.

**Teorema 10.4.1 (Teorema Fraco de Fubini).** Se  $f(x, y)$  é uma função contínua ao longo da região retangular  $\mathcal{D} = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , então:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \tag{10.4.8}$$

Integrais duplas de funções contínuas sobre regiões não retangulares têm as mesmas propriedades algébricas de integrais sobre regiões retangulares. Se  $\mathcal{D}$  é decomposto em regiões não sobrepostas  $\mathcal{D}_1$  e  $\mathcal{D}_2$  com limites que são novamente feitos de um número finito de segmentos de linha ou curvas suaves, então

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dA = \iint_{\mathcal{D}_1} f(x, y) dA + \iint_{\mathcal{D}_2} f(x, y) dA. \tag{10.4.9}$$

**Teorema 10.4.2 (Teorema Forte de Fubini).** Seja  $f(x, y)$  uma função contínua ao longo da região  $\mathcal{D}$ .

1. Se  $a \leq x \leq b$  e  $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$  com  $g_1(x)$  e  $g_2(x)$  contínuas em  $[a, b]$ , então

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx. \quad (10.4.10)$$

2. Se  $c \leq y \leq d$  e  $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$  com  $h_1(y)$  e  $h_2(y)$  contínuas em  $[c, d]$ , então

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy. \quad (10.4.11)$$

**Exemplo 10.4.2.** Encontre o volume de um prisma cuja base é o triângulo no plano  $xy$  é limitado pelo eixo  $x$  (isto é,  $y = 0$ ) e as linhas  $y = x$  e  $x = 1$  e cujo topo está no plano  $z$ .

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dA \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dA \\ &= \int_0^1 \int_0^x (3 - x - y) dy dx \\ &= \int_0^1 \left[ 3y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left( 3x - \frac{3}{2}x^2 \right) dx \\ &= \left[ \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= 1, \end{aligned} \quad (10.4.12)$$

ou, invertendo a ordem de integração

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\mathcal{D}} f(x, y) dA \\ &= \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dA \\ &= \int_0^1 \int_y^1 (3 - x - y) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \left[ 3x - \frac{1}{2}x^2 - xy \right]_{x=y}^{x=1} dy \\
&= \int_0^1 \left( 3 - \frac{1}{2} - y - 3y + \frac{1}{2}y^2 + y^2 \right) dy \\
&= \left[ \frac{5}{2}y - 2y^2 + \frac{1}{2}y^3 \right]_{y=0}^{y=1} \\
&= 1.
\end{aligned} \tag{10.4.13}$$

## 10.5 Aplicações

### 10.5.1 Excedente do Consumidor e do Produtor

Um dos modelos econômicos mais fundamentais é a lei da oferta e da demanda para um determinado produto (leite, pão, combustível, etc.) ou serviço (transporte, assistência médica, educação etc.) em um ambiente de livre mercado. Nesse modelo, a quantidade de um determinado item produzido e vendido é descrita por duas curvas, denominadas curvas de oferta e de demanda do item.

Nós denotaremos o preço por unidade por  $p$  e a quantidade fornecida ou demandada a esse preço por  $q$ . Como é a convenção em economia, sempre escrevemos  $p$  como uma função de  $q$ . Assim, a curva de oferta será indicada pela fórmula  $p = S(q)$  e representada por um gráfico onde os eixos  $x$  e  $y$  correspondem aos valores de  $q$  e de  $p$ , respectivamente. Da mesma forma, usaremos  $p = D(q)$  para denotar a curva de demanda. Como você poderia esperar, a função de oferta  $S$  é crescente e a de demanda é decrescente.

Em um mercado livre ideal, consumidores e produtores ganham comprando e vendendo pelo preço de equilíbrio. É fácil entender isso em princípio, mas o objetivo desta seção é calcular exatamente o quanto os consumidores ganham comprando a um preço de equilíbrio, em vez de a um preço mais alto.

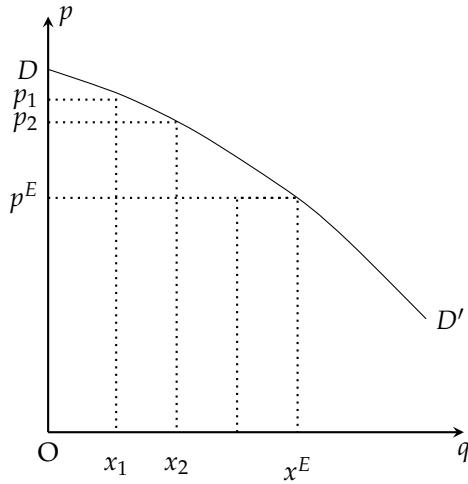
Primeiro calculamos o montante total gasto pelos consumidores se todos compram no preço de equilíbrio  $p^E$ . Nesse caso, as unidades que são fornecidas e compradas, e o montante total gasto é o número de unidades compradas vezes o preço por unidade, ou seja,  $p^E \times q^E$ .

Em seguida, vamos calcular o montante total que seria gasto se cada consumidor pagasse o preço máximo que cada um estivesse disposto a pagar. Divida o intervalo  $[0, q^E]$  em  $n$  subintervalos, cada um com comprimento  $\Delta x = \frac{q^E}{n}$ , com pontos de extremidade  $\{x_0, x_1 = \frac{q^E}{n}, x_2 = \frac{2q^E}{n}, \dots, x_n = \frac{nq^E}{n} = q^E\}$ .

Considere o primeiro intervalo  $[0, x_1]$ , isto é, suponha que apenas  $x_1$  unidades estivessem disponíveis. Em seguida, o preço de venda por unidade poderia ter sido definido em  $D(x_1)$  dólares e  $x_1$  unidades vendidas. É claro que, a esse preço, seria impossível vender mais. O gasto total da compra dessas primeiras  $x_1$  unidades de commodities é, portanto,

$$\text{preço por unidade} \times \text{número de unidades} = D(x_1)\Delta x. \quad (10.5.1)$$

FIGURA 10.5.1 – CURVA DE DEMANDA



Depois de vender as primeiras  $x_1$  unidades, suponha que mais unidades estejam disponíveis, de modo que agora um total de  $x_2$  unidades tenha sido produzido. Definindo o preço em  $D(x_2)$ , as unidades restantes  $x_2 - x_1 = \Delta x$  podem ser vendidas, gerando  $\$ D(x_2)\Delta x$ . Note-se que cada grupo de compradores pagou tanto pela mercadoria como valeu a pena para eles. Continuando este processo de discriminação de preços, o montante total de dinheiro pago pelos consumidores dispostos a pagar pelo menos pe é aproximadamente igual a

$$D(x_1)\Delta x + D(x_2)\Delta x + \dots + D(x_n)\Delta x. \quad (10.5.2)$$

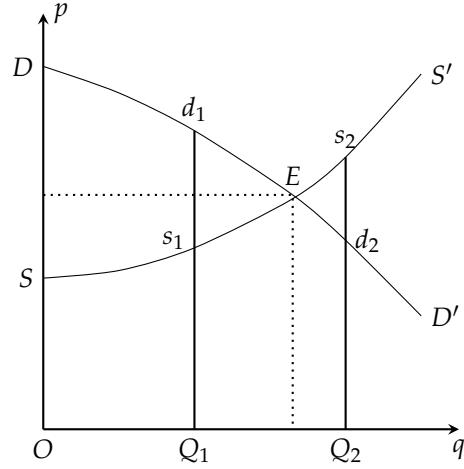
A soma acima é uma soma de Riemann para a integral  $\int_0^{q^E} D(q)dq$ , e a soma fica mais próxima e mais próxima da integral à medida que  $n$  é maior. Portanto, o excedente do consumidor para este produto é:

$$\text{Excedente do consumidor} = \int_0^{q^E} [D(q) - p^E]dq. \quad (10.5.3)$$

De forma similar, o excedente do produtor é dado por:

$$\text{Excedente do produtor} = \int_0^{q^E} [p^E - S(q)]dq. \quad (10.5.4)$$

FIGURA 10.5.2 – OFERTA E DEMANDA



**Exemplo 10.5.1.** Seja as seguintes funções de demanda e de oferta:

$$p(q) = D(q) = \frac{20}{q+1} \quad p(q) = S(q) = q + 2. \quad (10.5.5)$$

Igualando as curvas de oferta e de demanda, obtemos:

$$\frac{20}{q+1} = q + 2 \implies p^E = 5 \quad q^E = 3. \quad (10.5.6)$$

Assim, o excedente do consumidor é:

$$\begin{aligned} CS &= \int_0^{q^E} D(q) dq - p^E q^E \\ &= \int_0^3 \frac{20}{q+1} dq - (5)(3) \\ &= 20 \ln |q+1| \Big|_0^3 - 15 = 12.73. \end{aligned} \quad (10.5.7)$$

O excedente do produtor é:

$$\begin{aligned} PS &= p^E q^E - \int_0^{q^E} S(q) dq \\ &= 15 - \int_0^3 (q+2) dq \\ &= 15 - \left( \frac{q^2}{2} + 2q \right) \Big|_0^3 - 15 = 4.5. \end{aligned} \quad (10.5.8)$$

### 10.5.2 Valor Presente e Futuro de um Fluxo de Renda

Vamos revisar algumas fórmulas básicas envolvendo o retorno do dinheiro depositado em um banco pagando uma determinada taxa de juros. Se uma quantia inicial de  $\mathcal{M}$  reais é depositada em um banco pagando uma taxa de juros de  $r$  por ano composta continuamente, o valor futuro desse dinheiro é dado pela fórmula:

$$FV = \mathcal{M}e^{rt}. \quad (10.5.9)$$

Inversamente, se alguém pretende obter uma quantia de  $\mathcal{N}$  reais por ano a partir de uma conta que acumula juros à taxa anual de  $r$ , então o valor presente para essa quantia, ou seja, a quantia de dinheiro que é necessário colocar em hoje é

$$PV = \mathcal{N}e^{-rt}. \quad (10.5.10)$$

O cálculo do valor futuro acima foi feito pressupondo-se que, uma vez efetuado o depósito inicial, não há depósitos ou saques futuros. Mas uma estrutura muito mais realista é aquela em que uma sequência de depósitos futuros é feita na conta após a inicial e por um longo período de tempo. Se os depósitos forem feitos com regularidade suficiente e o tempo entre os depósitos for relativamente curto em comparação com a vida útil geral da conta, podemos pensar que o dinheiro flui continuamente para a conta, e não em um grande número de blocos discretos. Vamos nos referir a esse cenário como um fluxo contínuo de renda. O objetivo desta seção é deduzir uma fórmula integral de forma fechada para valores futuros e presentes de um fluxo de renda contínuo.

Suponha que uma pessoa planeje se aposentar em  $T$  anos e providencie para que o dinheiro seja depositado continuamente no banco à taxa de  $\$ S(t)$  no ano  $t$ . Se os juros são compostos à taxa anual de  $r$ , qual é o valor futuro da receita em  $T$  anos? Para lidar com esse problema, escolhemos um grande número inteiro  $n$  e particionamos o intervalo de tempo  $[0, T]$  em  $n$  subintervalos iguais em cada de comprimento  $\Delta t = \frac{T}{n}$ . Seja

$$t_0 = 0, t_1 = \frac{T}{n}, t_2 = \frac{2T}{n}, \dots, t_n = \frac{nT}{n} = T, \quad (10.5.11)$$

os pontos finais dos subintervalos. Como o dinheiro está sendo depositado continuamente, o valor que flui para a conta durante o intervalo de tempo  $[0, t_1]$  é igual a  $S(0)\Delta t$ . Este dinheiro permanece na conta por  $T - t_1$  anos e seu valor futuro no final desse tempo é

$$S(0) \cdot \Delta t \cdot e^{r(T-t_1)}. \quad (10.5.12)$$

Na verdade, a expressão acima é apenas uma aproximação do valor futuro porque nós o computamos apenas a partir do tempo  $t_1$  e ignoramos o interesse acumulado durante o período de

tempo  $[0, t_1]$ . No entanto, se  $n$  é grande, esse período é muito pequeno em relação ao total de anos  $T$ , e obtemos uma boa aproximação. Em seguida, consideramos o intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$ , que também tem comprimento  $\Delta t$ . O montante total depositado no banco durante esse período é igual a  $S(t_1)\Delta t$ . Permanece na conta por  $T - t_2$  anos e seu valor futuro aproximado é dado pela fórmula como

$$S(1) \cdot \Delta t \cdot e^{r(T-t_2)}. \quad (10.5.13)$$

Continuando assim, podemos encontrar o valor futuro aproximado do montante depositado em cada um dos  $n$  subintervalos, sendo o último dado por

$$S(t_{n-1}) \cdot \Delta t \cdot e^{r(T-t_n)}. \quad (10.5.14)$$

Se somarmos os valores futuros da renda em todos os  $n$  subintervalos, obtemos a quantia

$$\begin{aligned} S(0) \cdot \Delta t \cdot e^{r(T-t_1)} + S(1) \cdot \Delta t \cdot e^{r(T-t_2)} + \dots + S(t_{n-1}) \cdot \Delta t \cdot e^{r(T-t_n)} &= \\ = \Delta t \left[ S(t_0) \cdot e^{r(T-t_0)-r(t_1-t_0)} + S(t_1) \cdot e^{r(T-t_1)-r(t_1-t_2)} + \dots + S(t_{n-1}) \cdot e^{r(T-t_n)-r(t_n-t_{n-1})} \right] \\ = e^{-\Delta t} \left( \sum_{j=0}^{n-1} S(t_j) e^{r(T-t_j)} \Delta t \right). \end{aligned} \quad (10.5.15)$$

O primeiro fator  $e^{\frac{T}{n}} = e^{\frac{1}{n}}$   $\Rightarrow 1$  quando  $n \Rightarrow \infty$ . O segundo fator é a soma de Riemann da função  $S(t)e^{r(T-t)}$  entre  $t = 0$  e  $t = T$ , que converge para uma integral definida quando  $n \Rightarrow \infty$ .

Assim, o valor futuro de um fluxo de renda pode ser escrito como segue:

$$FV = \int_0^T S(t) e^{r(T-t)} dt. \quad (10.5.16)$$

De forma semelhante podemos calcular o valor presente de um fluxo contínuo de renda que irá gerar  $I(t)$  reais no ano  $t$ , com juros compostos continuamente a uma taxa anual  $r$ .

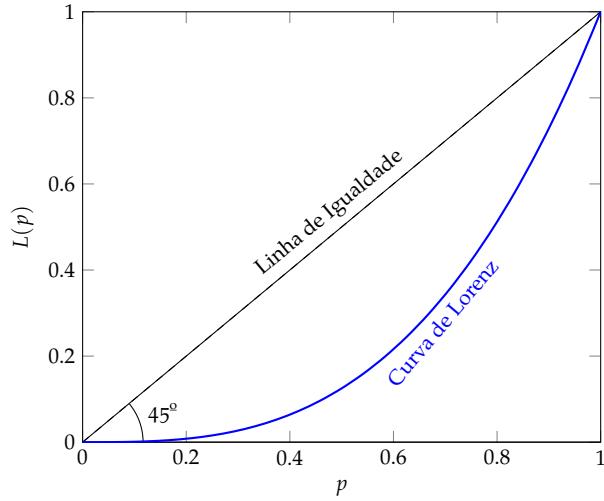
$$PV = \int_0^T I(t) e^{-rT} dt. \quad (10.5.17)$$

### 10.5.3 Curva de Lorenz

A curva de Lorenz é uma representação gráfica da distribuição de renda cumulativa. Mostra para o  $p_1\%$  inferior das famílias, que porcentagem  $p_2\%$  da renda total que eles têm. A porcentagem

de domicílios é plotada no eixo  $x$ , a porcentagem da renda no eixo  $y$ . Foi desenvolvido por Max O. Lorenz em 1905 para representar a desigualdade na distribuição da riqueza. Na verdade, se  $p_1 = p_2$ , a curva de Lorenz é uma linha reta que diz, por exemplo, que 50% dos domicílios têm 50% da renda total. Assim, a linha reta representa uma igualdade perfeita. E qualquer desvio desta linha de  $45^\circ$  representa desigualdade.

FIGURA 10.5.3 – CURVA DE LORENZ



A definição padrão da curva de Lorenz é dada em termos de duas curvas. A primeira determina um quantil particular, que significa resolver a equação abaixo para  $z$ :

$$p = F(z) = \int_0^z f(t)dt \quad (10.5.18)$$

e então podemos escrever a curva de Lorenz como

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^z t f(t) dt \quad (10.5.19)$$

Também podemos reescrever a curva de Lorenz como:

$$L(p) = \frac{1}{\mu} \int_0^p q(t) dt = \frac{1}{\mu} \int_0^p F^{-1}(t) dt \quad (10.5.20)$$

As curvas de Lorenz foram definidas por referência a uma dada função de distribuição  $F(\cdot)$ . É possível caracterizar uma curva de Lorenz diretamente, sem fazer referência a uma distribuição particular? Consideremos diretamente a expressão da função que consideramos ser uma curva de Lorenz potencial. Neste caso, essa curva deve verificar algumas propriedades para ser uma verdadeira curva de Lorenz. De Sarabia (2008), temos o seguinte teorema

**Teorema 10.5.1** (Curva de Lorenz). *Suponha que  $L(p)$  é definida e contínua em  $[0, 1]$  com segunda derivada  $L''(p)$ . A função  $L(p)$  é uma curva de Lorenz se e somente se  $L(0) = 0$ ,  $L(1) = 1$ ,  $L'(0+) \geq 0$ ,  $L''(p) \geq 0$  em  $(0, 1)$ .*

Se uma curva é uma curva de Lorenz, ela determina a distribuição de  $X$  até um fator de escala que é a média  $\mu$ . Como poderíamos encontrar? Tomemos a definição da curva de Lorenz:

$$L_X(p) = \frac{1}{\mu_X} \int_0^p F_X^{-1}(t) dt \quad (10.5.21)$$

e reescreva como

$$\mu L(F(x)) = \int_0^x y dF(y) \quad (10.5.22)$$

Vamos diferenciar usando a regra da função composta e da regra de Leibniz (seção 10.3.5):

$$\mu L'(F(X))f(x) = xf(x) \quad (10.5.23)$$

Agora dividimos por  $f(x)$  e calculamos a segunda derivada:

$$\mu L''(F(X))f(x) = 1 \quad (10.5.24)$$

Então, encontramos o seguinte teorema:

**Teorema 10.5.2** (Curva de Lorenz). *Se  $L''(p)$  existe e é positiva em todo o intervalo  $(x_1, x_2)$ , então  $F_X$  tem densidade positiva finita no intervalo  $(\mu L'(x_1^+), \mu L'(x_2^-))$  que é dada por*

$$f_X(x) = \frac{1}{L''(F_X(x))} \quad (10.5.25)$$

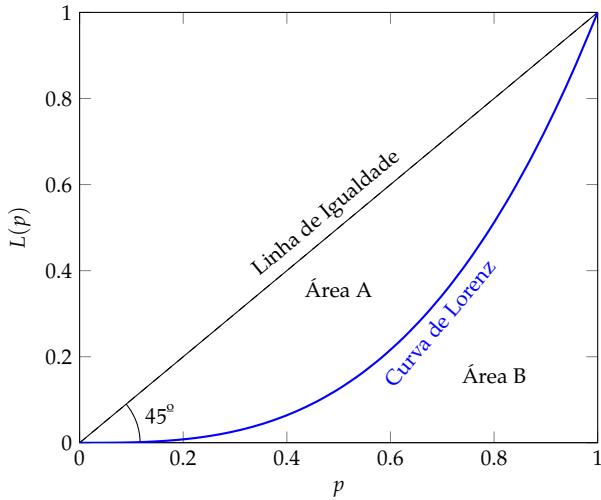
#### 10.5.4 Coeficiente de Gini

O coeficiente de Gini pode ser escrito em muitas formas diferentes. Nesta seção, veremos como passar da definição padrão do Gini como uma superfície para suas várias expressões (covariância, média da diferença absoluta). Vamos supor que a média de  $F$  existe. Como consequência:

$$\lim_{t \rightarrow 0} tF(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - F(t)) = 0 \quad (10.5.26)$$

o que significa que ambos os limites existem, o que simplifica muito o cálculo de algumas integrais ao considerar um limite infinito.

FIGURA 10.5.4 – ÍNDICE DE GINI: INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA



Se todos tivessem a mesma renda, a porcentagem cumulativa da renda total detida por qualquer proporção  $p$  da população também seria  $p$ . A curva de Lorenz seria então  $L(p) = p$ : as parcelas da população e as parcelas da renda total seriam idênticas. Um conteúdo informativo útil de uma curva de Lorenz é, portanto, sua distância,  $p - L(p)$ , da linha de igualdade perfeita de renda. Em comparação com a igualdade perfeita, a desigualdade remove uma proporção  $p - L(p)$  da renda total dos  $100 \cdot p\%$  mais pobres da população. Quanto maior for essa diferença, maior será a desigualdade de renda. Há, portanto, interesse em calcular a distância média entre essas duas curvas ou a superfície entre a diagonal  $p$  e a curva de Lorenz  $L(p)$ . Sabemos que a curva de Lorenz está contida no quadrado unitário com uma superfície normalizada de 1. A superfície do triângulo inferior é  $\frac{1}{2}$ . Se quisermos obter um coeficiente em valores entre 0 e 1, devemos tomar duas vezes a integral de  $p - L(p)$ , isto é,

$$G = 2 \int_0^1 (p - L(p)) dp = 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp \quad (10.5.27)$$

A atratividade do índice de Gini para muitos economistas é que ele tem uma interpretação geométrica intuitiva. O índice de Gini pode ser, como na Figura 10.5.4, definido geometricamente como a razão de duas áreas geométricas na caixa unitária: (a) a área entre a linha de igualdade perfeita (linha de 45 graus) e a Curva de Lorenz, que é chamada de Área A e (b) a área sob a linha de 45 graus, ou Áreas A + B. Como as áreas A + B representam a metade da caixa unitária, ou seja,  $A + B = \frac{1}{2}$ , o índice Gini,  $G$ , pode ser escrito

$$\begin{aligned} G &= \frac{A}{A + B} \\ &= 2A \end{aligned}$$

$$= 1 - 2B \quad (10.5.28)$$

Vamos começar a partir da definição acima do coeficiente de Gini e usar integração por partes com  $u' = 1$  e  $v = L(p)$ . Então, usando o fato de que  $\int pL'(p) = pL(p) - \int L(p)dp \implies \int L(p)dp = pL(p) - \int pL'(p)$ , temos que:

$$\begin{aligned} G &= 1 - 2 \int_0^1 L(p)dp \\ &= 1 - 2[pL(p)]_0^1 + 2 \int_0^1 pL'(p)dp \\ &= -1 + 2 \int_0^1 pL'(p)dp \end{aligned} \quad (10.5.29)$$

Vamos fazer uma mudança de variável:  $p = F(y)$ . Também vamos usar o fato de que  $L'(p) = \frac{y}{\mu}$ . Então,

$$\begin{aligned} G &= -1 + 2 \int_0^1 pL'(p)dp \\ &= -1 + 2 \int_0^\infty F(y) \frac{y}{\mu} f(y) dy \\ &= -1 + \frac{2}{\mu} \int_0^\infty y F(y) f(y) dy \\ &= \frac{2}{\mu} \left[ \int_0^\infty y F(y) f(y) dy - \frac{\mu}{2} \right] \end{aligned} \quad (10.5.30)$$

Esta fórmula permite a interpretação do índice de Gini em termos de covariância como:

$$\text{Cov}(y, F(y)) = \mathbb{E}(yF(y)) - \mathbb{E}(y)\mathbb{E}(F(y)) \quad (10.5.31)$$

Usando essa definição,

$$G = \frac{2}{\mu} \text{Cov}(y, F(y)) \quad (10.5.32)$$

o que significa que o coeficiente de Gini é proporcional à covariância entre a variável e seu rank. A interpretação da covariância do coeficiente de Gini abre caminho para a avaliação numérica usando regressão.

Note que  $\mathbb{E}(F(y)) = \frac{1}{2}$ . Assim, temos que:

$$\text{Cov}(y, F(y)) = \mathbb{E}(yF(y)) - \mathbb{E}(y)\mathbb{E}(F(y))$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}(yF(y)) - \frac{1}{2}\mathbb{E}(y) \\
&= \int y \left( F(y) - \frac{1}{2} \right) dF(y)
\end{aligned} \tag{10.5.33}$$

Usando integração por partes temos:

$$\text{Cov}(y, F(y)) = \frac{1}{2} \int F(x)[1 - F(x)]dx \tag{10.5.34}$$

Assim,

$$G = \frac{1}{\mu} \int F(x)[1 - F(x)]dx \tag{10.5.35}$$

---

## EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: I

---

## 11.1 Introdução

A aplicação de equações diferenciais à economia é uma área vasta e vibrante. Conceitos e teoremas relacionados a equações diferenciais aparecem em toda parte em periódicos acadêmicos e livros didáticos de economia. Dificilmente se pode abordar, para não mencionar digerir, a literatura de análise econômica sem conhecimento “suficiente” das equações diferenciais. No entanto, o assunto das aplicações de equações diferenciais à economia não é sistematicamente estudado. O assunto é frequentemente tratado como uma parte subsidiária dos livros didáticos de economia matemática. Devido ao rápido desenvolvimento de equações diferenciais e amplas aplicações da teoria à economia, existe a necessidade de um tratamento sistemático do assunto.

Aplicações de equações diferenciais agora são usadas na modelagem de movimento e mudança em todas as áreas da ciência. A teoria das equações diferenciais tornou-se uma ferramenta essencial da análise econômica, especialmente desde que o computador se tornou comumente disponível. Seria difícil compreender a literatura contemporânea da economia se não se entendesse os conceitos básicos (como bifurcações e caos) e os resultados da teoria moderna de equações diferenciais. Uma equação diferencial expressa a taxa de mudança do estado atual como uma função do estado atual. Uma ilustração simples desse tipo de dependência são as mudanças do Produto Interno Bruto (PIB) ao longo do tempo. Considere o estado  $x$  do PIB da economia. A taxa de variação do PIB é proporcional ao PIB atual

$$\dot{x}(t) = gx(t) \quad (11.1.1)$$

em que  $t$  representa o tempo e  $\dot{x}(t)$  a derivada da função  $x$  em relação a  $t$ . A taxa de crescimento do PIB é  $\frac{\dot{x}}{x}$ . Se a taxa de crescimento  $g$  é dada em qualquer momento  $t$ , o PIB em  $t$  é dado resolvendo a equação diferencial. A solução é

$$x(t) = x(0)e^{gt} \quad (11.1.2)$$

A solução diz que o PIB decai (aumenta) exponencialmente no tempo quando  $g$  é negativo (positivo).

Podemos resolver explicitamente a função diferencial acima quando  $g$  é uma constante. É razoável considerar que a taxa de crescimento é afetada por muitos fatores, como o estado atual do sistema econômico, o conhecimento acumulado da economia, o ambiente internacional e muitas outras condições. Isso significa que a taxa de crescimento pode assumir uma forma complicada  $g(x, t)$ . O crescimento econômico é descrito por

$$\dot{x}(t) = g(x(t), t)x(t) \quad (11.1.3)$$

Em geral, não é fácil resolver explicitamente a função acima. Existem vários métodos estabelecidos para resolver diferentes tipos de equações diferenciais.

## 11.2 Conceitos

Uma equação diferencial é uma equação matemática que relaciona alguma função de uma ou mais variáveis com suas derivadas. Equações diferenciais surgem sempre que uma relação determinística envolvendo algumas quantidades continuamente variáveis (modeladas por funções) e suas taxas de mudança no espaço e/ou tempo (expressas como derivadas) é conhecida ou postulada. Como essas relações são extremamente comuns, as equações diferenciais desempenham um papel proeminente em muitas disciplinas, incluindo engenharia, física, economia e biologia. Equações diferenciais são matematicamente estudadas a partir de diferentes perspectivas, principalmente relacionadas às suas soluções, o conjunto de funções que satisfazem a equação. Apenas as equações diferenciais mais simples admitem soluções dadas por fórmulas explícitas; entretanto, algumas propriedades de soluções de uma dada equação diferencial podem ser determinadas sem encontrar sua forma exata. Se uma fórmula autônoma para a solução não estiver disponível, a solução poderá ser numericamente aproximada usando algum software. A teoria de sistemas dinâmicos enfatiza a análise qualitativa de sistemas descritos por equações diferenciais, enquanto muitos métodos numéricos foram desenvolvidos para determinar soluções com um determinado grau de precisão.

**Definição 11.2.1 (Equação Diferencial).** *Uma equação diferencial é uma equação que contém derivadas como incógnitas.*

Alguns conceitos relacionados a equações diferenciais:

1. Ordem da equação: a ordem de uma equação diferencial é a mais alta ordem de qualquer diferencial contido nela.

**Exemplo 11.2.1.**

$$\frac{dy}{dx} = ax, \quad \text{Primeira ordem} \quad (11.2.1)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} + z = 0, \quad \text{Segunda ordem} \quad (11.2.2)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = b, \quad \text{Terceira ordem} \quad (11.2.3)$$

2. Ordinária versus parcial: uma equação diferencial ordinária (EDO) contém diferenciais em relação a apenas uma variável; equações diferenciais parciais (EDP) contêm diferenciais em relação a várias variáveis independentes.

**Exemplo 11.2.2.**

$$\frac{dy}{dx} = ax, \quad EDO \quad (11.2.4)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = b, \quad EDO \quad (11.2.5)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} + z = 0, \quad EDP \quad (11.2.6)$$

3. Linear versus não-linear: equações diferenciais lineares não contêm quaisquer potências superiores da variável dependente (função) ou qualquer um dos seus diferenciais; equações diferenciais não lineares possuem.

**Exemplo 11.2.3.**

$$\frac{dy}{dx} = ax, \quad Linear \quad (11.2.7)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = b, \quad Linear \quad (11.2.8)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} + z = 0, \quad Linear \quad (11.2.9)$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y, \quad Não-linear \quad (11.2.10)$$

4. Homogeneidade versus heterogeneidade: uma equação diferencial é homogênea se não contiver termos não-diferenciais e heterogênea se não.

**Exemplo 11.2.4.**

$$\frac{dx}{dy} = ax, \quad Heterogênea \quad (11.2.11)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dx}{dy} = b, \quad Heterogênea \quad (11.2.12)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad Homogênea \quad (11.2.13)$$

## 11.3 Campo de Vetores

Este tópico recebe sua própria seção por alguns motivos. Primeiro, entender os campos de direção (campos vetoriais) e o que eles nos dizem sobre uma equação diferencial e sua solução é importante e pode ser introduzido sem qualquer conhecimento de como resolver uma equação diferencial e assim pode ser feito aqui antes de chegarmos a resolvê-las. Então, ter alguma informação sobre a solução para uma equação diferencial sem realmente ter a solução é uma boa ideia que

precisa de alguma investigação.

Em seguida, uma vez que precisamos de uma equação diferencial para trabalhar, esta é uma boa seção para mostrar que as equações diferenciais ocorrem naturalmente em muitos casos e como as obtemos. Muitas situações econômicas podem ser descritas com uma equação diferencial apropriada. A equação diferencial pode ser fácil ou difícil de alcançar, dependendo da situação e das suposições feitas sobre a situação, e talvez nunca consigamos resolvê-la, mas ela existirá.

Seja a equação diferencial de primeira ordem:  $y' = f(t, y)$ . Interpretamos  $y'$  como a inclinação da tangente à solução  $y(t)$  no ponto  $(t, y)$  no plano  $y \times t$ . Assim,

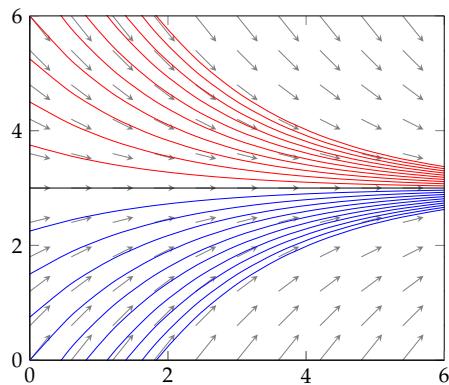
1. Se  $y' = 0$ , a linha tangente é horizontal;
2. Se  $y' > 0$ , a linha tangente é crescente;
3. Se  $y' < 0$ , a linha tangente decrescente;
4. O valor de  $|y'|$  determina a inclinação.

**Exemplo 11.3.1.** Seja a equação  $y' = \frac{1}{2}(3 - y)$ . A solução é  $y(x) = ce^{-0.5x} + 3$ . Sabemos que:

1. Se  $y = 3$ , então  $y' = 0$ .
2. Se  $y > 3$ , então  $y' < 0$ .
3. Se  $y < 3$ , então  $y' > 0$ .

O campo de vetores para  $y' = \frac{1}{2}(3 - y)$  é dado abaixo:

FIGURA 11.3.1 – CAMPO DE VETORES PARA  $y' = \frac{1}{2}(3 - y)$



Notamos que se  $y(0) = 3$ , então  $y(t) = 3$  é a solução. Quando  $t \rightarrow \infty$ , temos  $y \rightarrow 3$ .

**Exemplo 11.3.2.** Seja a equação  $y' = (y - 1)(y - 5)$ . Sabemos que:

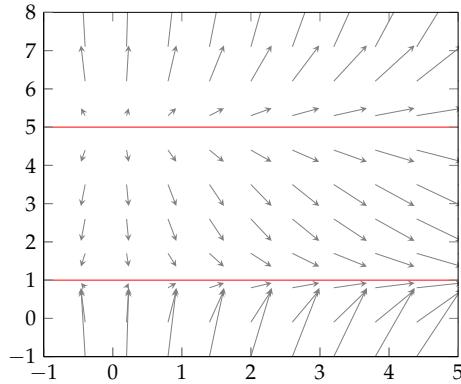
1. Se  $y = 1$  ou  $y = 5$ , então  $y' = 0$ .
2. Se  $y < 1$ , então  $y' > 0$ .

3. Se  $1 < y < 5$ , então  $y' < 0$ .

4. Se  $y > 5$ , então  $y' < 0$ .

O campo de vetores para  $y' = (y - 1)(y - 5)$  é dado abaixo:

FIGURA 11.3.2 – CAMPO DE VETORES PARA  $y' = (y - 1)(y - 5)$



**Exemplo 11.3.3.** Considere uma situação mais complicada, onde  $y'$  dependa de  $t$  e de  $y$ . Seja  $y' = t + y$ . Para gerar o campo direcional, vemos que:

1. Nós temos  $y' = 0$  quando  $y = -t$ .
2. Nós temos  $y' > 0$  quando  $y > -t$ .
3. Nós temos  $y' < 0$  quando  $y < -t$ .

Pode-se esboçar o campo direcional ao longo das linhas de  $y = -t + c$  para vários valores de  $c$ .

1. Se  $y = -t$ , então  $y' = 0$ .
2. Se  $y = -t - 1$ , então  $y' = -1$ .
3. Se  $y = -t - 2$ , então  $y' = -2$ .
4. Se  $y = -t + 1$ , então  $y' = 1$ .
5. Se  $y = -t + 2$ , então  $y' = 2$ .

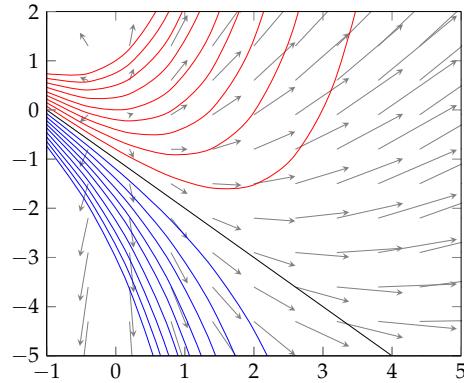
O que podemos dizer sobre as soluções? A solução depende da condição inicial  $y(0)$ .

1. Vemos primeiro que se  $y(0) = -1$ , a solução é  $y(t) = -t - 1$ .
2. Se  $y(0) > -1$ , então  $y \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .
3. Se  $y(0) < -1$ , então  $y \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Podemos também discutir o comportamento assintótico quando  $t \rightarrow -\infty$ :

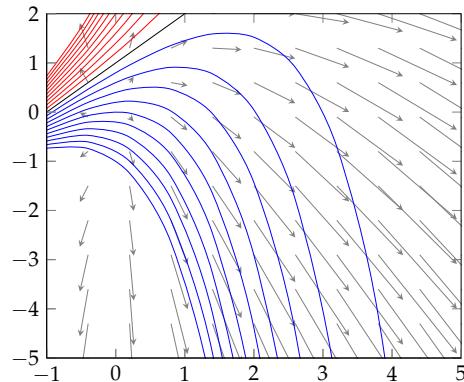
1. Se  $y(0) > -1$ , então  $y \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow -\infty$ .
2. Se  $y(0) < -1$ , então  $y \rightarrow +\infty$  quando  $t \rightarrow -\infty$ .

FIGURA 11.3.3 – CAMPO DE VETORES PARA  $y' = y + t$



**Exemplo 11.3.4.** Seja a função  $y' = y - t$ . O campo vetorial é apresentado abaixo.

FIGURA 11.3.4 – CAMPO DE VETORES PARA  $y' = y - t$



Agora que temos uma visão preliminar sobre equações diferenciais ordinárias vamos formalizar os conceitos.

## 11.4 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

### 11.4.1 Método do Fator Integrante

Vamos considerar a seguinte equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \quad (11.4.1)$$

Iremos estudar uma equação diferencial linear e obter a solução pelo método do fator integrante.

A função  $f(t, y)$  é uma função linear de  $y$ , isto é, podemos escrever

$$f(t, y) = -p(t)y + g(t). \quad (11.4.2)$$

Reescrevemos a equação na forma:

$$y' + p(t)y = g(t). \quad (11.4.3)$$

Vamos encontrar a solução pelo método do fator de integração (devido a Leibniz). Para tanto, multiplicamos a equação (11.4.3) por uma função  $\mu(t)$  em ambos os lados

$$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \mu(t)g(t). \quad (11.4.4)$$

A função  $\mu$  é escolhida de forma que a equação seja integrável, significando que o lado esquerdo da equação é a derivada de alguma coisa. Em particular, exigimos:

$$\mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = (\mu(t)y)' \implies \mu(t)y' + \mu(t)p(t)y = \mu(t)y' + \mu'(t)y, \quad (11.4.5)$$

o que requer que:

$$\mu'(t) = \frac{d\mu}{dt} = \mu(t)p(t) \implies \frac{d\mu}{\mu(t)} = p(t)dt. \quad (11.4.6)$$

Integrando este resultado de ambos os lados, temos:

$$\ln \mu(t) = \int p(t)dt, \quad (11.4.7)$$

o que implica que

$$\mu(t) = \exp \left( \int p(t)dt \right). \quad (11.4.8)$$

Portanto, este  $\mu(t)$  é chamado de fator integrante. Note que  $\mu(t)$  não é único. De fato, adicionando uma constante de integração, obteremos um  $\mu(t)$  diferente. Mas não precisamos nos preocupar, pois qualquer um desses  $\mu(t)$  funcionará. Podemos simplesmente escolher um que seja conveniente.

Substituindo este resultado em (11.4.4) e (11.4.5), obtemos:

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y) = \mu(t)g(t) \implies \mu(t)y = \int \mu(t)g(t)dt + c, \quad (11.4.9)$$

o que nos dá a fórmula para a solução:

$$y(t) = \frac{1}{\exp(\int p(t)dt)} \left[ \int \mu(t)g(t)dt + c \right]. \quad (11.4.10)$$

**Exemplo 11.4.1.** Resolva  $y' + ay = b$  ( $a \neq 0$ ).

Temos  $p(t) = a$  e  $g(t) = b$ . Então,

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \exp\left(\int adt\right) \\ &= \exp(at). \end{aligned} \quad (11.4.11)$$

A solução será:

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp(-at) \int \exp(at)bdt \\ &= \exp(-at) \left( \frac{b}{a} \exp(at) + c \right) \\ &= \frac{b}{a} + c \exp(-at). \end{aligned} \quad (11.4.12)$$

**Exemplo 11.4.2.** Resolva  $y' + y = \exp(2t)$ .

Temos  $p(t) = 1$  e  $g(t) = \exp(2t)$ . Então,

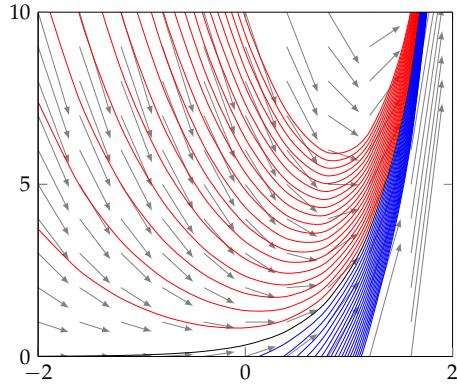
$$\begin{aligned} \mu(t) &= \exp\left(\int 1dt\right) \\ &= \exp(t). \end{aligned} \quad (11.4.13)$$

A solução será:

$$y(t) = \exp(-t) \int \exp(t) \exp(2t)dt$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(-t) \int \exp(3t) dt \\
&= \exp(-t) \left( \frac{1}{3} \exp(3t) + c \right) \\
&= \frac{1}{3} \exp(2t) + c \exp(-t).
\end{aligned} \tag{11.4.14}$$

FIGURA 11.4.1 – CAMPO DE VETORES PARA  $y' + y = \exp(2t)$



**Exemplo 11.4.3.** Resolva  $ty' - y = t^2 \exp(-t)$ ,  $t > 0$ .

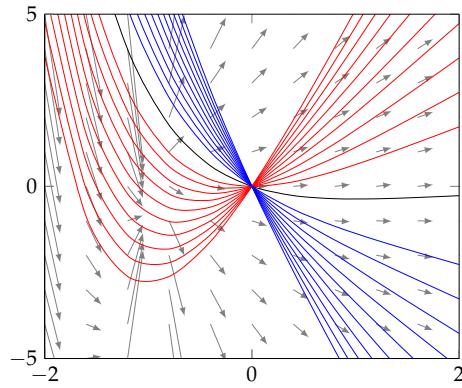
Reescrevendo no formato padrão, temos:  $y' - \frac{1}{t}y = t \exp(-t)$   
Temos  $p(t) = -\frac{1}{t}$  e  $g(t) = t \exp(-t)$ . Então,

$$\begin{aligned}
\mu(t) &= \exp \left( \int -\frac{1}{t} dt \right) \\
&= \exp(-\ln t) \\
&= \frac{1}{t}.
\end{aligned} \tag{11.4.15}$$

A solução será:

$$\begin{aligned}
y(t) &= t \int \frac{1}{t} t \exp(-t) dt \\
&= -t \exp(-t) + ct.
\end{aligned} \tag{11.4.16}$$

FIGURA 11.4.2 – CAMPO DE VETORES PARA  $ty' - y = t^2 \exp(-t)$ ,  $t > 0$



### 11.4.2 Equações Separáveis

Seja a seguinte equação:

$$y'(x) = g(x) \frac{1}{h(x)}. \quad (11.4.17)$$

O lado direito é um produto de uma função que depende só de  $x$  e de uma função que só depende de  $y$ :

$$y'(x) = g(x) \frac{1}{h(y(x))}. \quad (11.4.18)$$

Observe que:

$$\begin{aligned} h(y(x))y'(x) &= g(x) \\ \int h(y(x))y'(x)dx &= \int g(x)dx \end{aligned} \quad (11.4.19)$$

Encontrando a primitiva de  $h$ , temos, pela regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}H(y(x)) = H'(y(x))y'(x) = h(y(x))y'(x). \quad (11.4.20)$$

Logo,

$$H(y(x)) = G(x) + c \quad (11.4.21)$$

Neste método precisamos calcular somente  $H$ .

**Exemplo 11.4.4.** Resolva  $y' = -6xy$ .

Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= -6xy \\
 \frac{1}{y} dy &= -6x dx \\
 \int \frac{1}{y} dy &= \int -6x dx \\
 \ln y &= -3x^2 + C \\
 y &= C \exp(-3x^2) \tag{11.4.22}
 \end{aligned}$$

**Exemplo 11.4.5.** Resolva  $y' = 2x\sqrt{y-1}$ .

Logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{dx} &= 2x\sqrt{y-1} \\
 \frac{1}{\sqrt{y-1}} dy &= 2x dx \\
 \int \frac{1}{\sqrt{y-1}} dy &= \int 2x dx \\
 \int 2du &= \int 2x dx \quad [\text{fazendo } u = (y-1)^{1/2}] \\
 2u &= x^2 + C \\
 2\sqrt{y-1} &= x^2 + C \\
 y &= \left( \frac{x^2 + C}{2} \right)^2 + 1 \tag{11.4.23}
 \end{aligned}$$

**Exemplo 11.4.6.** Resolva  $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$ .

Logo,

$$\begin{aligned}
 x^2y' &= (1 - x^2) + y^2(1 - x^2) \\
 x^2y' &= (1 - x^2)(1 + y^2) \\
 x^2 \frac{dy}{dx} &= (1 - x^2)(1 + y^2) \\
 \frac{1}{1+y^2} dy &= \frac{1-x^2}{x^2} dx \\
 \int \frac{1}{1+y^2} dy &= \int \frac{1-x^2}{x^2} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arctan y &= -\frac{1}{x} + x + C \\ y &= \tan\left(-\frac{1}{x} + x + C\right)\end{aligned}\tag{11.4.24}$$

Podemos usar um método de substituição e encontrar uma equação separável:

$$y' = F(ax + by + c) \tag{11.4.25}$$

Se  $v(x) = ax + by + c$ , então  $v'(x) = a + by'(x)$ . Então:

$$\begin{aligned}\frac{v'(x) - a}{b} &= y'(x) \\ \frac{v'(x) - a}{b} &= F(v) \\ \frac{dv}{dx} - a &= bF(v) \\ \frac{dv}{dx} &= bF(v) + a \\ \int \frac{1}{bF(v) + a} dv &= \int dx\end{aligned}\tag{11.4.26}$$

**Exemplo 11.4.7.** Resolva  $y' = (x + y + 3)^2$ .

Logo,

$$\begin{aligned}v &= x + y + 3 \\ v' &= 1 + y' \\ v' - 1 &= y' \\ v' - 1 &= v^2 \\ v' &= v^2 + 1 \\ \int \frac{1}{v^2 + 1} dv &= \int dx \\ \arctan(x + y + 3) &= x + c\end{aligned}\tag{11.4.27}$$

**Exemplo 11.4.8.** Resolva a seguinte equação diferencial

$$xyy' + 4x^2 + y^2 = 0 \quad \text{com } x > 0 \tag{11.4.28}$$

Vamos dividir ambos os lados por  $x^2$ . Assim,

$$\frac{y}{x}y' = -4 - \frac{y^2}{x^2} = -4 - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \tag{11.4.29}$$

Fazendo a substituição  $v = \frac{y}{x}$ , temos:

$$\begin{aligned}
v(v + xv') &= -4 - v^2 \\
vxv' &= -4 - 2v^2 \\
xv' &= -\frac{4 + 2v^2}{v} \\
\frac{v}{4 + 2v^2} dv &= -\frac{1}{x} dx \\
\int \frac{v}{4 + 2v^2} dv &= \int -\frac{1}{x} dx \\
\frac{1}{4} \ln(4 + 2v^2) &= -\ln(x) + c \\
\ln(4 + 2v^2)^{1/4} &= \ln(x)^{-1} + c \\
(4 + 2v^2)^{1/4} &= \exp(\ln(x)^{-1} + c) \\
(4 + 2v^2)^{1/4} &= \exp(c) \exp(\ln(x)^{-1}) \\
(4 + 2v^2)^{1/4} &= \frac{c}{x} \\
4 + 2v^2 &= \frac{c}{x^4} \\
v^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{c}{x^4} - 4 \right) \\
\frac{y^2}{x^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{c - 4x^4}{x^4} \right) \\
y^2 &= \frac{1}{2} x^2 \left( \frac{c - 4x^4}{x^4} \right) \\
y^2 &= \frac{c - 4x^4}{2x^2} \tag{11.4.30}
\end{aligned}$$

**Exemplo 11.4.9.** Resolva  $2xyy' = 4x^2 + 3y^2$  (Bernoulli).

Logo,

$$\begin{aligned}
y' - \frac{3}{2x}y &= 2xy^{-1} \\
yy' - \frac{3}{2x}yy &= 2x \\
\frac{v'}{2} - \frac{3}{2x}v &= 2x \quad [v = y^2 \implies v' = 2yy'] \\
v' - \frac{3}{x}v &= 4x \\
v'x^{-3} - \frac{3}{x}vx^{-3} &= 4xx^{-3} \quad [\mu(t) = x^{-3}] \\
\frac{d}{dx}[x^{-3}v] &= 4x^{-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^{-3}v &= \int 4x^{-2}dx \\
x^{-3}v &= -4x^{-1} \\
v &= -4x^2 + Cx^2
\end{aligned} \tag{11.4.31}$$

### 11.4.3 Equações Exatas

A EDO de 1ª ordem  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  associa a cada ponto  $(x_0, y_0)$  do domínio  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  uma direção  $m = \frac{dy}{dx} = f(x_0, y_0)$ . A direção em cada ponto  $(x_0, y_0)$  é a inclinação da reta tangente à curva, com equação  $f(x, y) = c$ , passando pelo ponto  $(x_0, y_0)$ . O domínio  $D$  com a direção em cada ponto é chamado de um campo de vetores.

Seja um campo de vetores  $G: \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que  $G(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$ , em que  $M, N: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $G$  é um campo gradiente se existir uma função potencial  $F(x, y)$  com  $F(x, y): \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F_x = M$  e  $F_y = N$ . As equações de primeira ordem podem ser vistas como um campo de vetores.

Em  $\Omega$ ,  $F_{xy} = F_{yx}$ , isto é,  $M_y = N_x$ . Sabemos que  $F(x, y) = c$  é a solução de uma equação diferencial. Observe que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\
N \frac{dy}{dx} + M &= 0
\end{aligned} \tag{11.4.32}$$

é a equação diferencial cuja solução é  $F(x, y) = c$ , isto é,

$$\begin{aligned}
dF &= \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy \\
M(x, y)dx + N(x, y)dy &= 0
\end{aligned} \tag{11.4.33}$$

Agora, vamos supor que não conhecemos a solução, mas que ela exista. Dada uma equação  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ , suponha que exista uma solução  $F(x, y) = c$ , isto é,  $F_x = M$  e  $F_y = N$ .

Então, em  $\Omega$ :

$$F_{xy} = F_{yx} \tag{11.4.34}$$

e, portanto,  $M_y = N_x$ .

Logo, existir uma solução significa que a equação é exata e  $M_y = N_x$  é a condição suficiente para a equação ser exata. Assim, existir o potencial é existir uma solução.

O critério de exatidão é o seguinte: se  $M(x, y)$  e  $N(x, y)$  são contínuas, com derivadas parciais contínuas em  $\Omega$ ,  $\Omega: \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$ , então a equação  $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

tem solução se, e somente se,  $M_y = N_x$ . Com base nessa hipótese, vamos construir a solução da equação diferencial.

Procuramos uma solução da forma  $F(x, y) = c$  tal que  $F_x = M$  e  $F_y = N$ .

Veja que

$$F(x, y) = \int F_x(x, y) dx = \int M(x, y) dx + g(y) \quad (11.4.35)$$

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx + g'(y) = N(x, y) \quad (11.4.36)$$

Observe que

$$g'(y) = N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx \quad (11.4.37)$$

ou seja,  $g'(y)$  dependerá somente de  $y$ .

Para provar basta derivar com relação a  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \int M(x, y) dx &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \int M(x, y) dx &= 0 \\ N_x - M_y &= 0 \end{aligned} \quad (11.4.38)$$

#### Exemplo 11.4.10.

$$(\cos x + \ln y) dx + \left( \frac{x}{y} + \exp(y) \right) dy = 0 \quad (11.4.39)$$

Vemos que  $M_y = \frac{1}{y} = N_x = \frac{1}{y}$ . Isso implica que a equação é exata. A solução é:

$$\begin{aligned} F &= \int F_x dx = \int (\cos x + \ln y) dx + g(y) \\ F(x, y) &= \sin x + x \ln y + g(y) \\ F_y(x, y) &= \frac{x}{y} + g'(y) \\ \frac{x}{y} + g'(y) &= \frac{x}{y} + \exp(y) \\ g'(y) &= \exp(y) \\ g(y) &= \exp(y) + C \\ \sin x + x \ln y + \exp(y) &= C \end{aligned} \quad (11.4.40)$$

#### 11.4.4 Equações Homogêneas

**Definição 11.4.1** (Função Homogênea de Grau  $n$ ). Uma função  $F(x, y)$  é chamada de homogênea de grau  $n$  se  $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ . Para um polinômio, a homogeneidade diz que todos os termos têm o mesmo grau.

**Exemplo 11.4.11.** São funções homogêneas de vários graus:

$$3x^6 + 5x^4y^2, \quad (11.4.41)$$

$$x\sqrt{x^2 + y^2}, \quad (11.4.42)$$

$$\sin\left(\frac{x}{y}\right), \quad (11.4.43)$$

$$\frac{1}{x+y}. \quad (11.4.44)$$

Se  $F$  é homogênea de grau  $n$  e  $G$  é homogênea de grau  $k$ , então  $\frac{F}{G}$  é homogênea de grau  $n - k$ .

**Proposição 11.4.1.** Se  $F$  é homogênea de grau 0, então  $F$  é uma função de  $\frac{y}{x}$ .

*Demonstração.* Nós sabemos que  $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \forall \lambda$ . Assuma que  $\lambda = \frac{1}{x}$ . Então,  $F(x, y) = F\left(1, \frac{y}{x}\right)$ . ■

**Exemplo 11.4.12.** Aqui estão alguns exemplos de como escrever uma função homogênea de grau 0 como uma função de  $\frac{y}{x}$ .

$$\frac{\sqrt{5x^2 + y^2}}{x} = \sqrt{5 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \quad (11.4.45)$$

$$\frac{y^3 + x^2y}{x^2y + x^3} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^3 + \left(\frac{y}{x}\right)}{\left(\frac{y}{x}\right) + 1}. \quad (11.4.46)$$

Considere que:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$v(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$xv(x) = y(x)$$

$$\frac{d}{dx} xv(x) = y'(x)$$

$$v(x) + xv'(x) = y'(x)$$

$$v(x) + xv'(x) = f(v)$$

$$x \frac{dv}{dx} = f(v) - v(x)$$

$$\int \frac{dv}{f(v) - v(x)} = \int \frac{1}{x} dx \quad (11.4.47)$$

**Exemplo 11.4.13.** Seja

$$2xyy' = 4x^2 + 3y^2 \quad (11.4.48)$$

Logo,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{4x^2}{2xy} + \frac{3y^2}{2xy} \\ y' &= \frac{2x}{y} + \frac{3y}{2x} \\ v + xv' &= \frac{2}{v} + \frac{3v}{2} \\ xv' &= \frac{4+v^2}{2v} \\ \int \frac{2v}{4+v^2} dv &= \int \frac{1}{x} dx \\ \ln(4+v^2) &= \ln|x| + C \\ \ln\left(4+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) &= \ln|x| + C \end{aligned} \quad (11.4.49)$$

### 11.4.5 Teorema de Existência e Unicidade: Parte I

Seja o seguinte teorema:

**Teorema 11.4.1** (Teorema de Existência e Unicidade). *O Teorema de Existência e Unicidade diz que dado um retângulo  $\mathcal{R} = \{\alpha \leq x \leq \beta, \gamma \leq y \leq \delta\} \subset \mathbb{R}^2$  com  $(a, b)$  no interior do  $\mathbb{R}$ , temos que:*

1. se  $f(x, y)$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , então existe solução.
2. se  $f_y$  é contínua em  $\mathbb{R}$ , a solução é única e estará contida no intervalo  $J = [\alpha, \beta]$ .

**Exemplo 11.4.14.** Seja a seguinte equação diferencial

$$y' = y^2, \quad \text{com } y(1) = 1 \quad (11.4.50)$$

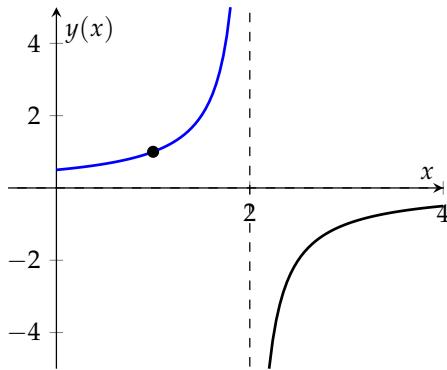
Pelo TEU, temos que  $f(x, y) = y^2$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e  $f_y = 2y$  é contínua em  $\mathbb{R}$ . Logo, existe uma única solução em torno de  $(1, 1)$ .

Resolvendo a equação diferencial separável, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y^2 \\
\frac{1}{y^2} dy &= dx \\
\int \frac{1}{y^2} dy &= \int dx \\
-y^{-1}(x) &= x + c \\
y(x) &= \frac{1}{c-x} \\
y(x) &= \frac{1}{2-x} \quad [x \neq -2]
\end{aligned} \tag{11.4.51}$$

A solução passa pelo ponto  $(1, 1)$  e a derivada é sempre positiva, o que implica que a curva é sempre crescente. Observe que o outro ramo não faz parte da solução para esse PVI em particular, mas é uma solução geral da equação diferencial acima.

FIGURA 11.4.3 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $y(x) = \frac{1}{2-x}$



<span style="color: blue;">—</span> Solução do PVI com $J = (-\infty, 2)$ <span style="color: black;">—</span> Este ramo não faz parte da solução
--

**Exemplo 11.4.15.** Seja a seguinte equação diferencial

$$y' = \sqrt{y}, \quad \text{com } y(0) = 0 \tag{11.4.52}$$

Pelo TEU, temos que  $f(x, y) = \sqrt{y}$  é contínua em  $\mathbb{R}: y \geq 0$ , isto é, existe solução para qualquer ponto  $(a, b)$  em  $\mathbb{R}$ .

Também sabemos que  $f'(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$  é contínua para  $y > 0$ .

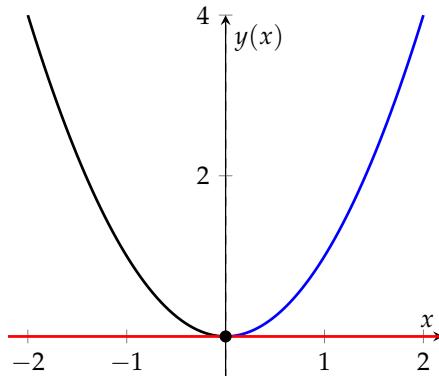
Observe que o PVI  $y(0) = 0$  é uma solução pois satisfaz a equação diferencial.

Agora, vamos descobrir a solução. Resolvemos por separação de variáveis:

$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{y} \\ \frac{dy}{dx} &= \sqrt{y} \\ y(x) &= x^2 \end{aligned} \tag{11.4.53}$$

Observe que  $y' > 0$ , ou seja, apenas o ramo crescente é solução do PVI.

FIGURA 11.4.4 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $y(x) = x^2$



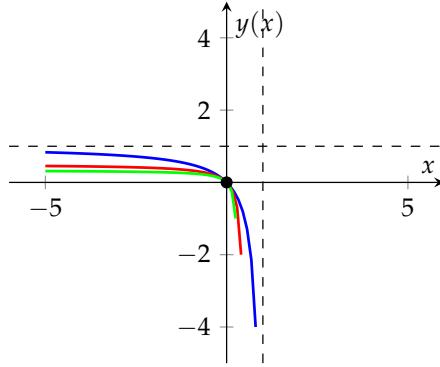
- |   |                                      |
|---|--------------------------------------|
| — | Solução do PVI com $J = [0, \infty)$ |
| — | Este ramo não faz parte da solução   |
| — | Solução do PVI com $y(0) = 0$        |

**Exemplo 11.4.16.** Seja a equação diferencial  $y^2 + x^2y' = 0$  com  $y(0) = 0$ .

Pelo TEU  $y' = f(x, y)$  é contínua em  $\mathbb{R}$  com  $x \neq 0$  e, portanto, existe solução. Também,  $f_y$  é contínua em  $\mathbb{R}$  com  $x \neq 0$  e, portanto, a solução é única.

Agora, quando  $x = 0$  temos que  $y(x) = 0$ . O problema é que temos infinitas curvas que passam pelo ponto  $x = 0$ . Aqui temos infinitas soluções para o PVI.

FIGURA 11.4.5 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $y(x) = \frac{x}{cx - 1}$



- Solução do PVI com  $J = \left(-\infty, \frac{1}{c}\right)$  e  $c = 1$
- Solução do PVI com  $J = \left(-\infty, \frac{1}{c}\right)$  e  $c = 2$
- Solução do PVI com  $J = \left(-\infty, \frac{1}{c}\right)$  e  $c = 3$

## 11.5 Equação Diferencial Ordinária de Segunda Ordem

A equação diferencial de segunda ordem linear geral com variável independente  $t$  e variável dependente  $x = x(t)$  é dada por

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = g(t), \quad (11.5.1)$$

em que usamos a notação padrão  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  e  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ .

Uma solução única de (11.5.1) requer valores iniciais  $x(t_0) = x_0$  e  $\dot{x}(t_0) = u_0$ . A equação com coeficientes constantes - nos quais dedicaremos esforços consideráveis - assume que  $p(t)$  e  $q(t)$  são constantes, independentes do tempo. A EDO linear de segunda ordem é considerada homogênea se  $g(t) = 0$ ; caso contrário, é não-homogênea.

Se  $p(t)$  e  $q(t)$  são coeficientes contínuos em um intervalo  $\mathcal{I}$  aberto,  $g(t)$  é contínua com um ponto  $a \in \mathcal{I}$ , e dada uma coleção de números  $b_0, b_1$  e  $b_2$ , o Teorema de Existência e Unicidade afirma que existe uma única solução em  $\mathcal{I}$  tal que  $x(a) = b_0, x'(a) = b_1$  e  $x''(a) = b_2$ .

### 11.5.1 Método de Euler

Em geral, a equação (11.5.1) não pode ser resolvida analiticamente, e começamos por derivar um algoritmo para a solução numérica. Considere uma EDO geral de segunda ordem dada por

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}). \quad (11.5.2)$$

Podemos escrever esta EDO de segunda ordem como um par de EDO's de primeira ordem definidas por  $u = \dot{x}$  e escrevendo o sistema de primeira ordem como

$$\dot{x} = u. \quad (11.5.3)$$

$$\dot{u} = f(t, x, u). \quad (11.5.4)$$

A primeira EDO, (11.5.3), dá a inclinação da linha tangente à curva  $x = x(t)$ ; a segunda EDO, (11.5.4), dá a inclinação da linha tangente à curva  $u = u(t)$ . Começando nos valores iniciais  $(x, u) = (x_0, u_0)$  no tempo  $t = t_0$ , nós nos movemos ao longo das linhas tangentes para determinar  $x_1 = x(t_0 + \Delta t)$  e  $u_1 = u(t_0 + \Delta t)$ :

$$x_1 = x_0 + \Delta t u_0, \quad (11.5.5)$$

$$u_1 = u_0 + \Delta t f(t_0, x_0, u_0). \quad (11.5.6)$$

Os valores  $x_1$  e  $u_1$  no tempo  $t_1 = t_0 + \Delta t$  são então usados como novos valores iniciais para levar a solução adiante para o tempo  $t_2 = t_1 + \Delta t$ . Enquanto  $f(t, x, u)$  for uma função bem comportada, a solução numérica convergirá para a solução única da EDO quando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

### 11.5.2 Princípio da Superposição

Considere a EDO linear homogênea de segunda ordem:

$$\ddot{x} + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0, \quad (11.5.7)$$

e suponha que  $x = X_1(t)$  e  $x = X_2(t)$  sejam soluções para (11.5.7). Nós consideramos um combinação linear de  $X_1$  e  $X_2$  ao assumir

$$X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t), \quad (11.5.8)$$

com constantes  $c_1$  e  $c_2$ .

O princípio da superposição afirma que  $x = X(t)$  é também uma solução de (11.5.7).

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}
 \ddot{X} + p\dot{X} + qX &= c_1\ddot{X}_1 + c_2\ddot{X}_2 + p(c_1\dot{X}_1 + c_2\dot{X}_2) + q(c_1X_1 + c_2X_2) \\
 &= c_1(\ddot{X}_1 + p\dot{X}_1 + qX_1) + c_2(\ddot{X}_2 + p\dot{X}_2 + qX_2) \\
 &= c_1 \times 0 + c_2 \times 0 \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{11.5.9}$$

já que  $X_1$  e  $X_2$  foram assumidos como soluções de (11.5.7). Nós mostramos, portanto, que qualquer combinação linear de soluções para a EDO homogênea linear de segunda ordem é também uma solução. ■

### 11.5.3 O Wronskiano

Suponha que tendo determinado que duas soluções de (11.5.7) são  $x = X_1(t)$  e  $x = X_2(t)$ , tentamos escrever a solução geral para (11.5.7) como (11.5.8). Devemos então perguntar se esta solução geral será capaz de satisfazer as duas condições iniciais dadas por

$$x(t_0) = x_0, \quad \dot{x}(t_0) = u_0. \tag{11.5.10}$$

Aplicando estas condições iniciais para (11.5.8), obtemos:

$$c_1X_1(t_0) + c_2X_2(t_0) = x_0, \tag{11.5.11}$$

$$c_1\dot{X}_1(t_0) + c_2\dot{X}_2(t_0) = u_0, \tag{11.5.12}$$

que é um sistema de duas equações lineares para duas incógnitas  $c_1$  e  $c_2$ . A solução é obtida pela regra de Cramer:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & X_2(t_0) \\ u_0 & \dot{X}_2(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1(t_0) & X_2(t_0) \\ \dot{X}_1(t_0) & \dot{X}_2(t_0) \end{vmatrix}} \implies c_1 = \frac{x_0\dot{X}_2(t_0) - u_0X_2(t_0)}{W}, \tag{11.5.13}$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} X_1(t_0) & x_0 \\ \dot{X}_1(t_0) & u_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} X_1(t_0) & X_2(t_0) \\ \dot{X}_1(t_0) & \dot{X}_2(t_0) \end{vmatrix}} \implies c_2 = \frac{x_0\dot{X}_1(t_0) - u_0X_1(t_0)}{W}, \tag{11.5.14}$$

em que  $W$  é o wronskiano e é dado por:

$$W = X_1(t_0)\dot{X}_2(t_0) - \dot{X}_1(t_0)X_2(t_0). \quad (11.5.15)$$

Evidentemente, o wronskiano deve ser diferente de zero para existir uma solução.

**Exemplo 11.5.1.** As soluções  $X_1(t) = A \sin \omega t$  e  $X_2(t) = B \sin \omega t$  têm o wronskiano igual a zero em  $t = t_0$ :

$$W = (A \sin \omega t_0)(B \omega \cos \omega t_0) - (A \omega \cos \omega t_0)(B \sin \omega t_0) = 0, \quad (11.5.16)$$

enquanto as soluções  $X_1(t) = \sin \omega t$  e  $X_2(t) = \cos \omega t$ , com  $\omega \neq 0$  têm um wronskiano diferente de zero em  $t = t_0$ :

$$W = (\sin \omega t_0)(-\omega \sin \omega t_0) - (\omega \cos \omega t_0)(\cos \omega t_0) = -\omega. \quad (11.5.17)$$

Quando o wronskiano é diferente de zero, dizemos que as duas soluções  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$  são linearmente independentes.

#### 11.5.4 EDO Homogênea Linear de Segunda Ordem com Coeficientes Constantes

Estudaremos agora soluções de EDO's homogêneas com coeficientes constantes, escritas como

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0, \quad (11.5.18)$$

com constantes  $a, b$  e  $c$ . Nossa método de solução encontra duas soluções linearmente independentes para (11.5.18), multiplicando cada uma dessas soluções por uma constante e somando os resultados. As duas constantes livres podem então ser usadas para satisfazer duas condições iniciais dadas.

Por causa das propriedades diferenciais da função exponencial, um “quebra-galho” natural para a forma da solução de (11.5.18) é  $x = \exp(rt)$ , em que  $r$  é uma constante a ser determinada. Do cálculo diferencial sabemos que:

$$ar^2 \exp(rt) + br \exp(rt) + c \exp(rt) = 0. \quad (11.5.19)$$

Nossa escolha de função exponencial é agora compensada pelo cancelamento explícito em (11.5.19) de  $\exp(rt)$ . O resultado é uma equação quadrática para a constante desconhecida  $r$ :

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (11.5.20)$$

Nosso palpite converteu assim uma equação diferencial em uma equação algébrica. A equação (11.5.20) é chamada equação característica de (11.5.18). Usando a fórmula quadrática, as duas soluções da equação característica (11.5.20) são dadas por

$$r = \frac{1}{2a} \left( -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \right). \quad (11.5.21)$$

Existem três casos a considerar:

1. Se  $b^2 - 4ac > 0$ , então as duas raízes são distintas e reais.
2. Se  $b^2 - 4ac < 0$ , então as duas raízes são conjugados distintos e complexos.
3. Se  $b^2 - 4ac = 0$ , então as duas raízes são degeneradas e só existe uma raiz real.

Vamos considerar cada caso separadamente.

#### 1. Raízes reais distintas

Quando  $r_1 \neq r_2$  são raízes reais, então a solução geral para (11.5.18) pode ser escrita como a superposição linear das duas soluções  $\exp(r_1 t)$  e  $\exp(r_2 t)$ , isto é,

$$x(t) = c_1 \exp(r_1 t) + c_2 \exp(r_2 t). \quad (11.5.22)$$

As constantes desconhecidas  $c_1$  e  $c_2$  podem então ser determinadas pelas condições iniciais dadas por  $x(t_0) = x_0$  e  $\dot{x}(t_0) = u_0$ . Nós agora apresentamos dois exemplos.

**Exemplo 11.5.2.** Resolva  $\ddot{x} + 5\dot{x} + 6x = 0$  com  $x(0) = 2$  e  $\dot{x}(0) = 3$  e encontre o valor máximo valor atingido por  $x$ .

A equação característica é

$$r^2 + 5r + 6 = 0. \quad (11.5.23)$$

Resolvendo-a, obtemos:

$$\begin{aligned} r &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1)(6)}}{2(1)} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \\ r_1 &= \frac{-5 - 1}{2} = -3, \quad r_2 = \frac{-5 + 1}{2} = -2, \end{aligned} \quad (11.5.24)$$

cuja fatoração resulta em

$$(r + 3)(r + 2) = 0. \quad (11.5.25)$$

A solução geral para a EDO é, portanto:

$$x(t) = c_1 \exp(-2t) + c_2 \exp(-3t), \quad (11.5.26)$$

A solução para  $\dot{x}$  obtida por diferenciação é:

$$\dot{x}(t) = -2c_1 \exp(-2t) - 3c_2 \exp(-3t), \quad (11.5.27)$$

O uso das condições iniciais resulta em duas equações para as constantes  $c_1$  e  $c_2$ :

$$c_1 + c_2 = 2, \quad (11.5.28)$$

$$-2c_1 - 3c_2 = 3. \quad (11.5.29)$$

Resolvendo obtemos  $c_1 = 9$  e  $c_2 = -7$ .

A solução que satisfaz a EDO e as condições iniciais é:

$$\begin{aligned} x(t) &= 9 \exp(-2t) - 7 \exp(-3t) \\ &= 9 \exp(-2t) \left(1 - \frac{7}{9} \exp(-t)\right). \end{aligned} \quad (11.5.30)$$

Note que apesar de ambos os termos exponenciais decaírem no tempo, sua soma aumenta inicialmente dado que  $\dot{x} > 0$ . O valor máximo de  $x$  ocorre no momento  $t_m$  quando  $\dot{x} = 0$ , isto é,

$$\dot{x}(t) = 0 \implies -18 \exp(-2t) + 21 \exp(-3t) = 0 \implies t = \ln\left(\frac{7}{6}\right). \quad (11.5.31)$$

O máximo  $x_m = x(t_m)$  é então  $x_m = \frac{108}{49}$ .

**Exemplo 11.5.3.** Resolva  $\ddot{x} - x = 0$  com  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = u_0$ .

A equação característica é

$$r^2 - 1 = 0, \quad (11.5.32)$$

cuja fatoração resulta em

$$r = \pm 1. \quad (11.5.33)$$

A solução geral para a EDO é, portanto:

$$x(t) = c_1 \exp(t) + c_2 \exp(-t). \quad (11.5.34)$$

A solução para  $\dot{x}$  obtida por diferenciação é:

$$\dot{x}(t) = c_1 \exp(t) - c_2 \exp(-t). \quad (11.5.35)$$

O uso das condições iniciais resulta em duas equações para as constantes  $c_1$  e  $c_2$ :

$$c_1 + c_2 = x_0, \quad (11.5.36)$$

$$c_1 - c_2 = u_0. \quad (11.5.37)$$

As constantes são:

$$c_1 = \frac{1}{2}(x_0 + u_0), \quad c_2 = \frac{1}{2}(x_0 - u_0). \quad (11.5.38)$$

Substituindo as constantes na solução geral, obtemos:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \left( \frac{\exp(t) - \exp(-t)}{2} \right) + u_0 \left( \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2} \right) \\ &= x_0 \sinh t + u_0 \cosh t. \end{aligned} \quad (11.5.39)$$

## 2. Raízes complexas distintas

Consideramos agora uma equação característica (11.5.20) com  $b^2 - 4ac < 0$ . Então, as raízes ocorrem como pares conjugados complexos. Com

$$\lambda = -\frac{b}{2a}, \quad \mu = \frac{1}{2a} \sqrt{b^2 - 4ac}, \quad (11.5.40)$$

as duas raízes da equação característica são  $\lambda + i\mu$  e  $\lambda - i\mu$ . As correspondentes soluções da equação diferencial são:

$$Z_1(t) = \exp(\lambda t) \exp(i\mu t), \quad Z_2(t) = \exp(\lambda t) \exp(-i\mu t). \quad (11.5.41)$$

Aplicando o princípio da superposição, qualquer combinação linear de  $Z_1$  e de  $Z_2$  é também uma solução para a EDO de segunda ordem.

Lembre que se  $z = x + iy$ , então  $\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}$  e  $\operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ . Temos portanto duas combinações lineares diferentes de  $Z_1(t)$  e de  $Z_2(t)$  que são reais, a saber,  $X_1(t) = \operatorname{Re} Z_1(t)$  e  $X_2(t) = \operatorname{Im} Z_1(t)$ . Portanto, temos:

$$X_1(t) = \exp(\lambda t) \cos(\mu t), \quad X_2(t) = \exp(\lambda t) \sin(\mu t). \quad (11.5.42)$$

Tendo encontrado estas duas soluções reais,  $X_1(t)$  e  $X_2(t)$ , podemos então aplicar o princípio da superposição uma segunda vez para determinar a solução geral para  $x(t)$ :

$$x(t) = \exp(\lambda t) (A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t)). \quad (11.5.43)$$

**Exemplo 11.5.4.** Resolva  $\ddot{x} + x = 0$  com  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = u_0$ .

A equação característica é

$$r^2 + 1 = 0, \quad (11.5.44)$$

com raízes  $r_{\pm} = \pm i$ .

A solução geral da EDO é

$$x(t) = A \cos(t) + B \sin(t). \quad (11.5.45)$$

A derivada é:

$$\dot{x}(t) = -A \sin(t) + B \cos(t). \quad (11.5.46)$$

Aplicando as condições iniciais  $x(0) = A = x_0$  e  $\dot{x}(0) = B = u_0$ , a solução final é:

$$x(t) = x_0 \cos t + u_0 \sin t. \quad (11.5.47)$$

**Exemplo 11.5.5.** Resolva  $\ddot{x} + \dot{x} + x = 0$  com  $x(0) = 1$  e  $\dot{x}(0) = 0$ .

A equação característica é:

$$r^2 + r + 1 = 0. \quad (11.5.48)$$

com raízes  $r_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

A solução geral da EDO é portanto:

$$x(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \left( A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right). \quad (11.5.49)$$

A derivada é:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \left( A \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \left( -A \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t + B \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right). \end{aligned} \quad (11.5.50)$$

Aplicando as condições iniciais:

$$A = 1, \quad (11.5.51)$$

$$-\frac{1}{2}A + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0. \quad (11.5.52)$$

Como  $A = 1$ , então:  $-\frac{1}{2}(1) + \frac{\sqrt{3}}{2}B = 0$ . Logo,  $B = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

A solução geral é, portanto:

$$x(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \left( \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \right). \quad (11.5.53)$$

### 3. Raízes reais repetidas

Finalmente, consideramos a equação característica,

$$ar^2 + br + c = 0, \quad (11.5.54)$$

com  $b^2 - 4ac = 0$ . A raiz degenerada é então dada por

$$r = -\frac{b}{2a}, \quad (11.5.55)$$

produzindo apenas uma única solução para a EDO:

$$x_1(t) = \exp\left(-\frac{bt}{2a}\right). \quad (11.5.56)$$

Para satisfazer as duas condições iniciais, uma segunda solução independente deve ser encontrada com Wronskiano diferente de zero, e aparentemente esta segunda solução não é da forma  $x = \exp(rt)$ .

Nós determinaremos esta segunda solução através de um processo de limites. Começamos com a solução obtida para raízes complexas da equação característica, e então chegamos à solução obtida para raízes degeneradas tomando o limite  $\mu \rightarrow 0$ .

Agora, dada a solução geral para raízes complexas apresentada em (11.5.43), para limitar adequadamente esta solução quando  $\mu \rightarrow 0$  requer primeiro satisfazer as condições iniciais específicas  $x(0) = x_0$  e  $\dot{x}(0) = u_0$ . Resolvendo para A e B,

$$x(0) = \exp(\lambda 0)(A \cos(\mu 0) + B \sin(\mu 0)) = A \quad (11.5.57)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \exp(\lambda t)[- \mu A \sin(\mu t) + \mu B \cos(\mu t)] + \lambda \exp(\lambda t)[A \cos(\mu t) + B \sin(\mu t)] \\ \dot{x}(0) &= u_0 \implies u_0 = \mu B + \lambda A \implies B = \frac{u_0 - \lambda x_0}{\mu} \end{aligned} \quad (11.5.58)$$

a solução geral dada por (11.5.43) torna-se a solução específica

$$x(t, \mu) = \exp(\lambda t) \left( x_0 \cos \mu t + \frac{u_0 - \lambda x_0}{\mu} \sin \mu t \right). \quad (11.5.59)$$

Tomando o limite quando  $\mu \rightarrow 0$  e usando o fato de que  $\lim_{\mu \rightarrow 0} \frac{\sin \mu t}{\mu} = t$ , temos:

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} x(t, \mu) = \exp(\lambda t) (x_0 + (u_0 - \lambda x_0)t). \quad (11.5.60)$$

A segunda solução é observada como sendo uma constante,  $u_0 - \lambda x_0$ ,  $t$  vezes a primeira solução,  $\exp(\lambda t)$ . Nossa solução geral para a EDO quando  $b^2 - 4ac = 0$  pode, portanto, ser escrita na forma:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) \exp(\lambda t). \quad (11.5.61)$$

**Exemplo 11.5.6.** Resolva  $\ddot{x} + 2\dot{x} + x = 0$  com  $x(0) = 1$  e  $\dot{x}(0) = 0$ .

A equação característica é

$$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0. \quad (11.5.62)$$

cujas raízes são  $-1$ . Portanto, a solução geral para a EDO é:

$$x(t) = c_1 \exp(-t) + c_2 t \exp(-t), \quad (11.5.63)$$

cujas derivadas são:

$$\dot{x}(t) = -c_1 \exp(-t) + c_2 \exp(-t) - c_2 t \exp(-t). \quad (11.5.64)$$

Aplicando as condições iniciais, temos  $c_1 = 1$  e  $c_2 = 0$ . A solução é:

$$x(t) = (1 + t) \exp(-t). \quad (11.5.65)$$

## 11.5.5 EDO Não-Homogênea Linear de Segunda Ordem

Consideraremos agora a EDO geral de segunda ordem não homogênea:

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x} + q(t)x = g(t), \quad (11.5.66)$$

com condições iniciais  $x(t_0) = x_0$  e  $\dot{x}(t_0) = u_0$ . Existe uma solução em três etapas quando o termo não-homogêneo  $g(t) \neq 0$ .

1. Encontre a solução geral da equação homogênea

$$\ddot{x}(t) + p(t)\dot{x} + q(t)x = 0. \quad (11.5.67)$$

Vamos denotar a solução homogênea por

$$x_h(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t), \quad (11.5.68)$$

onde  $X_1$  e  $X_2$  são soluções linearmente independentes de (11.5.67) e  $c_1$  e  $c_2$  são constantes ainda indeterminadas.

2. Encontre qualquer solução particular  $x_p$  da equação não-homogênea (11.5.66). Uma solução particular é prontamente encontrada quando  $p(t)$  e  $q(t)$  são constantes, e quando  $g(t)$  é uma combinação de polinômios, exponenciais, senos e cossenos.
3. Escreva a solução geral de (11.5.66) como a soma das soluções homogênea e particular:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t), \quad (11.5.69)$$

e aplique as condições iniciais para determinar as constantes  $c_1$  e  $c_2$ . Note que devido à linearidade de (11.5.66),

$$\begin{aligned} \ddot{x} + p\dot{x} + qx &= \frac{d^2}{dt^2}(x_h + x_p) + p\frac{d}{dt}(x_h + x_p) + q(x_h + x_p) \\ &= (\ddot{x}_h + p\dot{x}_h + qx_h) + (\ddot{x}_p + p\dot{x}_p + qx_p) \\ &= 0 + g \\ &= g, \end{aligned} \quad (11.5.70)$$

de modo que (11.5.69) resolva (11.5.66), e as duas constantes livres em  $x_h$  podem ser usadas para satisfazer as condições iniciais.

**Exemplo 11.5.7.** Resolva  $\ddot{x} - 3\dot{x} - 4x = 3 \exp(2t)$  com  $x(0) = 1$  e  $\dot{x}(0) = 0$ .

Resolvendo a equação característica, encontramos  $r = 4$  e  $r = -1$ . A solução homogênea é  $x_h(t) = c_1 \exp(4t) + c_2 \exp(-t)$ .

A forma da solução particular é escolhida de modo que a exponencial se cancele de ambos os lados da EDO. Escolhemos  $x(t) = A \exp(2t)$ . Substituindo esta escolha dentro da EDO, obtemos:

$$\begin{aligned} 4A \exp(2t) - 3(2)A \exp(2t) - 4A \exp(2t) &= 3 \exp(2t) \\ \exp(2t)(4A - 6A - 4A) &= 3 \exp(2t) \\ 4A - 6A - 4A &= 3 \\ -6A &= 3 \\ A &= -\frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{11.5.71}$$

Portanto, a solução é:

$$x(t) = c_1 \exp(4t) + c_2 \exp(-t) - \frac{1}{2} \exp(2t). \tag{11.5.72}$$

A derivada é:

$$\dot{x}(t) = 4c_1 \exp(4t) - c_2 \exp(-t) - \exp(2t). \tag{11.5.73}$$

Aplicando as condições iniciais:

$$c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 1, \tag{11.5.74}$$

$$4c_1 - c_2 - 1 = 0. \tag{11.5.75}$$

Logo,  $c_1 = \frac{1}{2}$  e  $c_2 = 1$ .

Assim, a solução que satisfaz a EDO e as condições iniciais é:

$$x(t) = \frac{1}{2} \exp(4t) (1 - \exp(-2t) + 2 \exp(-5t)). \tag{11.5.76}$$

Para uma EDO do tipo  $\lambda^2 + b_1\lambda + b_2 = 0$ , temos os seguintes casos. Sejam  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  as raízes da equação característica.

**Caso 1** Ambas as raízes são reais e distintas entre si, então temos duas soluções linearmente independentes. Suponhamos que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , nesse caso chamamos  $\lambda_1$  de raiz característica dominante. Temos então as seguintes situações possíveis:

1. se  $\lambda_1 > 1$ , então a sequência  $x_1(t)$  diverge para o infinito e portanto temos um sistema instável.
2. se  $\lambda_1 = 0$ , então a sequência  $x_1(t)$  é constante.
3. se  $0 < \lambda_1 < 1$ , então a sequência  $x_1(t)$  é monótona decrescente, convergindo para zero, e portanto temos um sistema estável.
4. se  $-1 < \lambda_1 < 0$ , então a sequência  $x_1(t)$  oscila em torno de zero, alterando o sinal a cada termo, convergindo para zero conforme  $t$  cresce indefinidamente e portanto temos um sistema instável.
5. se  $\lambda_1 = -1$ , então a sequência  $x_1(t)$  oscila entre  $c_1$  e  $-c_1$ .
6. se  $\lambda_1 < -1$ , então a sequência  $x_1(t)$  oscila entre termos positivos e negativos, porém em módulo aumenta indefinidamente e portanto temos um sistema instável.

**Caso 2** Ambas as raízes são reais e iguais entre si. Temos então as seguintes situações possíveis:

1. se  $\lambda \geq 1$  temos que a sequência  $x(t)$  é monótona crescente, e portanto diverge para o infinito, temos assim um sistema instável.
2. se  $0 < \lambda < 1$  temos que a conclusão do comportamento da sequência  $x(t)$  não é imediata, é necessário analisar o que acontece com o  $\lim t\lambda^t$ . Seja  $x_1(t) = t\lambda^t$ . Note que a partir do segundo termo da sequência todos os demais são positivos, e ainda  $\lim \frac{x_1(t+1)}{x_1(t)} = \lim \frac{(t+1)\lambda^{t+1}}{t\lambda^t} = \lim \left[ \lambda + \frac{\lambda}{t} \right] = \lambda < 1$ , temos que  $\lim x_1(t) = 0$ . Ou seja,  $x(t)$  é monótona decrescente, convergindo para zero, temos assim um sistema estável.
3. se  $-1 < \lambda < 0$  temos que a sequência  $x(t)$  é oscilatória, contudo fazendo um estudo sobre  $\lim t\lambda^t$ , semelhante ao do caso anterior, concluímos que  $x(t)$  converge para zero, ou seja, trata-se de um sistema estável.
4. se  $\lambda \leq -1$  temos que a sequência  $x(t)$  é oscilatória, porém cresce em módulo, ou seja é divergente, temos assim um sistema instável.

**Caso 3** As raízes são complexas, sendo  $\lambda_1 = a + ib$  e  $\lambda_2 = a - ib$ , em que  $b$  é não nulo. Neste caso teríamos que a solução geral é dada por

$$x(t) = c_1(a + ib)^t + c_2(a - ib)^t \quad (11.5.77)$$

Podemos escrever essa solução em coordenadas polares, onde  $a = r \cos(\theta)$ ,  $b = r \sin(\theta)$ ,  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\theta = \tan^{-1} \left( \frac{b}{a} \right)$ , ou seja,

$$x(t) = r^t [(c_1 + c_2) \cos(t\theta) + i(c_1 - c_2) \sin(t\theta)] \quad (11.5.78)$$

1. se  $r > 1$ , então  $x(t)$  oscila e há um aumento na sua magnitude, assim é um sistema instável.
2. se  $r = 1$ , então  $x(t)$  oscila com magnitude constante.
3. se  $r < 1$ , então  $x(t)$  oscila havendo um descréscimo de magnitude de modo que converge para zero, ou seja representa um sistema estável.

## 11.6 Equação Diferencial com Coeficientes Não-Constantes

Vamos ver como resolver equações diferenciais com coeficientes não-constantes. Podemos resolver por Euler-Cauchy, Bessel, Laguerre, entre outros. Focaremos em um método de redução de ordem. Assim, seja a seguinte equação:

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0. \quad (11.6.1)$$

O método para redução de ordem propõe conhecer uma solução  $x_1(t)$ . Conhecemos uma solução e queremos obter outra da forma  $x_2(t) = v(t)x_1(t)$ . O propósito é descobrir  $v(t)$ . Então, substituímos  $v(t)x_1(t)$  na equação diferencial. Logo,

$$x'_2(t) = v'(t)x_1(t) + v(t)x'_1(t) \quad (11.6.2)$$

$$\begin{aligned} x''_2(t) &= v''(t)x_1(t) + v'(t)x'_1(t) + v'(t)x'_1(t) + v(t)x''_1(t) \\ &= v''(t)x_1(t) + 2v'(t)x'_1(t) + v(t)x''_1(t), \end{aligned} \quad (11.6.3)$$

Substituindo estes resultados na equação, temos:

$$v''(t)x_1(t) + 2v'(t)x'_1(t) + v(t)x''_1(t) + p(t)[v'(t)x_1(t) + v(t)x'_1(t)] + q(t)v(t)x_1(t) = 0. \quad (11.6.4)$$

Coletando termos, encontramos:

$$v(t)[x''_1(t) + p(t)x'_1(t) + q(t)x_1(t)] + v''(t)x_1(t) + v'(t)[2x'_1(t) + p(t)x'_1(t)] = 0. \quad (11.6.5)$$

A nova equação depende de  $v''(t)$  e  $v'(t)$  e, portanto, é possível reduzir a ordem, pois não há mais o termo  $v(t)$ . Seja  $v'(t) = w$  e  $v''(t) = w'$ . Portanto,

$$w'x_1(t) + w[2x_1(t) + p(t)x_1(t)] = 0, \quad (11.6.6)$$

é uma equação diferencial linear de primeira ordem.

Essa nova equação é separável. Podemos usar essa estratégia ou fator integrante. Vamos com a primeira. Desse modo,

$$w' + w \left[ \frac{2x_1(t) + p(t)x_1(t)}{x_1(t)} \right] = 0. \quad (11.6.7)$$

Separando,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{w} dw &= \int -\frac{2x_1'(t) + p(t)x_1(t)}{x_1(t)} dt \\ \ln w &= -2 \ln x_1(t) - \int p(t) dt + C \\ w &= \exp \left( -2 \ln x_1(t) - \int p(t) dt + C \right) \\ w &= \exp \left( \ln x_1^{-2}(t) \right) \exp \left( - \int p(t) dt \right) \exp(C) \\ w &= \frac{C \exp(- \int p(t) dt)}{x_1^2(t)}. \end{aligned} \quad (11.6.8)$$

Assim,

$$v = \int \frac{C \exp(- \int p(t) dt)}{x_1^2(t)} + D \quad (11.6.9)$$

### Exemplo 11.6.1.

$$x^2 y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0 \quad (11.6.10)$$

com  $x \neq 0$  para  $p(x)$  e  $q(x)$  serem contínuos e existir solução. Suponha que uma solução seja  $y_1(x) = x$ .

Então, a segunda solução é da forma  $y_2(x) = v(x)x$ . Portanto,

$$y'_2(x) = v'(x)x + v(x) \quad (11.6.11)$$

$$y''_2(x) = v''(x) + 2v'(x) \quad (11.6.12)$$

Substituindo a solução  $y_2(x)$  na equação diferencial temos:

$$\begin{aligned}
&x^2(v''(x) + 2v'(x)) - x(x+2)(v'(x)x + v(x)) + (x+2)v(x)x = 0 \\
&v''(x)x^3 + 2v'(x)x^2 - x^2(x+2)v'(x) - x(x+2)v(x) + x(x+2)v(x) = 0 \\
&\quad v''(x)x^3 + (2x^2 - x^2(x+2))v'(x) = 0 \\
&\quad v''(x)x^3 - v'(x)x^3 = 0 \\
&\quad v''(x) - v'(x) = 0 \\
&\quad w'(x) - w(x) = 0 \quad [v'(x) = w] \\
&\quad v'(x) = w = c_1e^x \\
&\quad v(x) = \int c_1e^x \\
&\quad v(x) = c_1e^x + c_2 \quad (11.6.13)
\end{aligned}$$

Logo, a solução  $y_2(x)$  é dada por:

$$y_2 = x(c_1e^x + c_2) \quad (11.6.14)$$

A solução da equação diferencial é dada por:

$$\begin{aligned}
y(x) &= b_1y_1(x) + b_2y_2(x) \\
&= b_1x + b_2(x(c_1e^x + c_2)) \\
&= a_1x + a_2xe^x \quad (11.6.15)
\end{aligned}$$

### Exemplo 11.6.2.

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0 \quad (11.6.16)$$

com  $x \neq 0$  para  $p(x)$  e  $q(x)$  serem contínuos e existir solução. Suponha que uma solução seja  $y_1(x) = x^3$ .

Então, a segunda solução é da forma  $y_2(x) = v(x)x^3$ . Portanto,

$$y'_2(x) = 3x^2v(x) + x^3v'(x) \quad (11.6.17)$$

$$y''_2(x) = x^3v''(x) + 6x^2v'(x) + 6v(x)x \quad (11.6.18)$$

Substituindo a solução  $y_2(x)$  na equação diferencial temos:

$$\begin{aligned}
&x^2(x^3v''(x) + 6x^2v'(x) + 6v(x)x) - 5x(3x^2v(x) + x^3v'(x)) + 9v(x)x^3 = 0 \\
&\quad v''(x)x^5 + v'(x)x^4 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v''(x)x + v'(x) &= 0 \\
v''(x) + \frac{1}{x}v'(x) &= 0 \\
w'(x) + \frac{1}{x}w(x) &= 0 \\
\frac{dw}{dx} &= -\frac{1}{x} \\
\int \frac{1}{w(x)} dw &= \int -\frac{1}{x} dx \\
\ln w(x) &= -\ln x + c_1 \\
w(x) &= e^{\ln x^{-1} + c_1} \\
w(x) &= \frac{c_1}{x} \\
v(x) &= \int \frac{c_1}{x} dx \\
v(x) &= c_1 \ln x + c_2 \quad (11.6.19)
\end{aligned}$$

Logo, a solução  $y_2(x)$  é dada por:

$$y_2 = x^3(c_1 \ln x + c_2) \quad (11.6.20)$$

A solução da equação diferencial é dada por:

$$\begin{aligned}
y(x) &= b_1 y_1(x) + b_2 y_2(x) \\
&= b_1 x^3 + b_2 (x^3(c_1 \ln x + c_2)) \\
&= a_1 x^3 + a_2 \ln x \quad (11.6.21)
\end{aligned}$$

Agora, para usarmos Euler-Cauchy, suponha que temos uma equação da forma:

$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y^{(1)} + a_0 y = 0. \quad (11.6.22)$$

A candidata a solução é  $y(x) = x^r$ . Substituindo  $x^r$ , obtemos uma equação característica:

$$x^r \{ [r(r-1) \dots (r-(n-1))] + a_{n-1}[r(r-1) \dots (r-(n-2))] + \dots + a_1 r + a_0 \} = 0. \quad (11.6.23)$$

Como  $x^r$  não pode ser zero, temos uma equação característica. Temos três casos:

1. Raízes reais distintas:  $y(x) = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$
2. Raízes complexas:  $y(x) = c_1 x^a \cos(b \ln x) + c_2 x^a \sin(b \ln x)$ , em que  $a$  é a parte real e  $b$  a parte imaginária.

3. Raízes repetidas:  $y(x) = c_1 x^r + c_2 x^r \ln x$

**Exemplo 11.6.3.** Seja a seguinte equação:

$$9x^2y'' + 3xy' - 8y = 0 \quad (11.6.24)$$

Logo,

$$\begin{aligned} 9x^2r(r-1)x^{r-2} + 3xrx^{r-1} - 8x^r &= 0 \\ x^r[9r(r-1) + 3r - 8] &= 0 \end{aligned} \quad (11.6.25)$$

Assim,  $y(x) = c_1 x^{4/3} + c_2 x^{-2/3}$ .

## 11.7 Aplicações

### 11.7.1 O Papel dos Preços

O principal insight da Riqueza das Nações de Adam Smith é simples: se uma troca entre duas partes é voluntária, não ocorrerá a menos que ambos acreditem que se beneficiarão dela. Como isso é verdade para qualquer número de partes e para o caso de produção? O sistema de preços é o mecanismo que executa esta tarefa muito bem sem direção central.

Os preços desempenham três funções na organização de atividades econômicas em uma economia de mercado livre:

1. Eles transmitem informações sobre produção e consumo. O sistema de preços transmite apenas as informações importantes e apenas para as pessoas que precisam saber. Assim, transmite informação de forma eficiente.
2. Eles fornecem incentivos corretos. Uma das belezas de um sistema de preço livre é que os preços que trazem as informações também fornecem um incentivo para reagir à informação não apenas sobre a demanda por produto, mas também sobre a maneira mais eficiente de produzir um produto. Eles fornecem incentivos para adotar os métodos de produção que são menos onerosos e, portanto, usam os recursos disponíveis para as finalidades mais valorizadas.
3. Eles determinam a distribuição de renda. Eles determinam quem recebe quanto do produto. Em geral, não se pode usar os preços para transmitir informações e fornecer um incentivo para agir sem utilizar preços para afetar a distribuição de renda. Se o que uma pessoa recebe não depende do preço que ele recebe pelos serviços desses recursos, que incentivo ele tem para buscar informações sobre preços ou para agir com base nessas informações?

### 11.7.2 Formação dos Preços

Um princípio básico da teoria dos preços é que todo preço final de um bem  $X$  para o consumidor é uma soma de *shadow-prices* que surgem toda vez que aparece alguma restrição ao longo do processo de produção da primeira unidade de  $X$  a ser consumida pelo consumidor supramarginal, ou seja, aquele que mais valoriza a próxima unidade dentre os que não estão no mercado. As restrições podem ocorrer mesmo que a produção da unidade adicional do bem  $X$  requeira toda uma cadeia de produtos intermediários  $A, B, C, \dots$ , sobre os quais o produtor da próxima unidade do bem  $X$  não tenha qualquer controle. As restrições que geram *shadow-prices* podem ser de quaisquer tipos: tecnológicas, informacionais, mercadológicas ou mesmo institucionais.

Antes, algumas definições. Vamos imaginar que cada consumidor consome uma e apenas uma unidade discreta. Consumidor marginal é o consumidor da última unidade produzida, a quantidade que equilibra o mercado. Cada consumidor possui uma disposição a pagar (também chamada de preço de demanda) pela unidade do bem e ela representa o valor que o consumidor está disposto a sacrificar do seu consumo de outros bens para adquirir, em troca, a unidade do bem em questão. Os consumidores são ordenados de forma decrescente de acordo com suas disposições marginais a pagar. É nisso que se resume a curva de demanda agregada. O custo marginal de produção de uma unidade representa o valor que a sociedade atribui aos recursos deslocados da economia para a produção dessa unidade.

Vamos ver um exemplo. Suponha que o custo marginal de produção do bem  $X$  seja constante igual a \$100, mas que o produtor possui uma capacidade instalada máxima de 10 unidades. Existem 11 demandantes e cada um demanda uma única unidade. Os 10 primeiros consumidores têm disposições marginais a pagar de \$200; o 11º, \$150. Como a capacidade máxima é de 10 unidades, então o 11º demandante fica de fora do mercado e somente os 10 primeiros (com maiores disposições a pagar) são atendidos. O preço de equilíbrio é qualquer preço  $P$  entre \$150 e \$200. Mesmo que o 11º consumidor não seja atendido, é a sua disposição a pagar que determina o preço mínimo a partir do qual o 10º consumidor e o produtor podem barganhar. Por simplicidade, suponha que o preço de equilíbrio seja \$150.

Evidentemente o custo marginal da 10º unidade é \$100. A diferença de \$50 entre o preço final e o custo marginal nada tem de anti-competitivo. Esse valor de \$50 corresponde ao preço-sombra da capacidade instalada máxima, que se configura numa restrição à produção da unidade adicional que atenderia à demanda do 11º consumidor, que é o primeiro da fila para entrar no mercado se a próxima unidade for ofertada ao preço de \$150 ou menos.

De fato, o 11º consumidor está disposto a pagar \$150 pela 11º unidade do ofertante, mas o ofertante não tem como atendê-lo, já que está operando em sua capacidade máxima de 10 unidades. Se ele quiser atendê-lo, deverá expandir sua capacidade instalada máxima o suficiente para ser capaz de produzir exatamente uma unidade a mais. Para fazer isso, ele deverá gastar um valor  $V$ . Depois deverá produzir a unidade adicional cujo custo marginal é \$100 para vendê-la por \$150. Logo, só vale a pena expandir a capacidade instalada se o preço-sombra  $V$  da capacidade instalada incremental não for maior que \$50. Se fosse menor, o ofertante poderia acrescentar uma segunda ou mesmo terceira unidade de capacidade até o ponto em que ficasse indiferente entre expandir ou não, pois a cada passo teria lucro (incremental positivo, mas decrescente). Portanto, suponha, sem

perda de generalidade, que isso já ocorre nessa primeira unidade adicional de capacidade instalada.

Note que quem determina o preço-sombra da capacidade instalada é o consumidor supra-marginal: mais especificamente, a diferença entre sua disposição a pagar, \$150, e o custo marginal, \$100, da unidade que ele adquiriria, se pudesse. Essa diferença de \$50 se configuraria numa renda do produtor, caso ele não enfrentasse a limitação da capacidade instalada. Como essa limitação existe, é esse excedente que deve ser gasto na expansão da capacidade para a produção da unidade adicional. Dessa forma, o preço-sombra da capacidade instalada não é intrínseco à planta da firma: ele é a valoração do consumidor supra-marginal em excesso ao custo marginal. Em outras palavras, é o preço de demanda que o 11º consumidor está disposto a pagar que determina o custo incremental que será incorrido pelo ofertante. Não é o custo que determina o preço, mas o preço é que determina o custo.

Já com base nesse raciocínio, vemos que o preço final de \$150 pode ser decomposto em \$100 + \$50, que é o custo marginal operacional da última unidade ofertada mais o preço-sombra da capacidade instalada. O custo marginal operacional da última unidade ofertada é o valor que a sociedade atribui aos recursos deslocados da economia para produção dessa unidade e é, por isso mesmo, o preço-sombra social dos insumos. Chamemos esse preço-sombra de  $P_1$ . Temos, assim, o primeiro resultado: o preço final é a soma de dois preços-sombra. Neste caso, o custo marginal operacional mais o preço-sombra da capacidade instalada. Este último preço-sombra, que chamaremos de  $P_2$ , é o quanto a sociedade está disposta a pagar pelo aumento da capacidade com vistas à oferta da 11ª unidade. Assim, o preço do produto é  $\$150 = P_1 + P_2$ .

Suponha que o produto X é adquirido por um monopolista que determina seu preço pela regra de markup. Cada unidade de X lhe custa \$150, de modo que seu custo marginal é constante e igual a \$150. O bem X é o único insumo variável. O markup é de \$40. Logo, o preço de monopólio é \$190. Esse markup também provém de uma limitação imposta ao monopolista e se configura, portanto, em um *shadow-price* de natureza muito especial. Já explico o que significa essa restrição. Antes, porém, observe que é claro que esse excesso de \$40 sobre o custo marginal evidentemente decorre da interseção com a curva de receita marginal. A  $RMg$  da última unidade é de tal monta que  $RMg = CMg$ .

Recorde que o monopolista, assim como qualquer outro produtor, atua segundo a regra  $RMg = CMg$  (receita marginal = custo marginal). A diferença é que a receita marginal adquire uma forma especial. Se  $R = PQ$  denota a receita e  $C$  o custo, então a regra  $RMg = CMg$  pode ser expressa como:

$$(\Delta P)Q + P(\Delta Q) = \Delta C. \quad (11.7.1)$$

Seja  $P^*$  o preço de monopólio e seja  $P'$  a disposição a pagar do consumidor supra-marginal pela próxima unidade além da quantidade de monopólio. Seja  $Q^*$  a quantidade de monopólio ( aquela à qual a receita marginal é igual ao custo marginal ou, se maior, aquela tal que, para a próxima unidade, se torna menor que o custo incremental correspondente). Produzir essa unidade para o consumidor supra-marginal, o primeiro na fila para entrar no mercado (ou seja, o consumidor com a maior disposição marginal a pagar dentre os consumidores não-atendidos pelo monopolista),

implica uma variação  $\Delta Q = 1$  da quantidade produzida. Então a expressão acima se torna:

$$P = \Delta C + (-\Delta P)Q^*, \quad (11.7.2)$$

em que  $(\Delta P)Q^* = (P' - P^*)Q^*$ , ou seja,  $(\Delta P)Q^* = P'Q^* - P^*Q^*$ . Em palavras bem claras,  $(\Delta P)Q^* = P'Q^* - P^*Q^*$  é a perda de receita que o monopolista teria se vendesse a quantidade de monopólio  $Q^*$  ao preço dado pela disposição marginal a pagar,  $P'$ , do consumidor supra-marginal, isto é, se o preço cobrado fosse a disposição a pagar do consumidor supra-marginal,  $P'$ , e não  $P^*$ . Como  $P' < P^*$ , então essa perda de receita vem com sinal negativo. Portanto, o termo  $(-\Delta P)Q^*$  é positivo e representa um potencial custo adicional para o monopolista, caso ele aplique markup conforme o preço do consumidor supra-marginal e não o do marginal. Note ainda que a expressão  $(\Delta P)Q^* = P'Q^* - P^*Q^*$  pode ser escrita como  $(\Delta P)Q^* = P'(Q^* + 1) - P^*(Q^* + 1) + (P^* - P')$ . O primeiro termo,  $P'(Q^* + 1) - P^*(Q^* + 1)$ , é a perda de receita que o monopolista enfrenta se incluir o consumidor supra-marginal na regra de markup. Neste caso, a quantidade de monopólio é  $Q^* + 1$ , já que a última unidade produzida seria aquela destinada a satisfazer o consumidor supra-marginal. Esse termo evidentemente tem sinal negativo, pois é uma perda para o monopolista. De fato, como já mencionei,  $P' < P^*$ . Já o segundo termo,  $P^* - P'$ , é positivo e representa a economia de custo de que o consumidor supra-marginal se aproveita ao comprar a unidade supra-marginal ao preço  $P'$  e não ao preço correto  $P^*$ . Portanto,  $(\Delta P)Q^*$  é o efeito líquido, em termos sociais, da inclusão do consumidor supra-marginal na regra de markup. É, dessa forma, o preço-sombra do consumidor supra-marginal para os ganhos sociais de troca. Esse preço-sombra nasce em razão do uso da precificação linear, que, no caso do monopólio, se materializa na regra de markup. Logo, a regra de markup, quando vista na margem, ou seja,  $P^* = \Delta C + (-\Delta P)Q^*$ , nos diz que o preço de monopólio é igual ao custo marginal (incremental)  $\Delta C$  da última unidade produzida (a de equilíbrio) mais o preço-sombra do consumidor supra-marginal decorrente da restrição imposta pela precificação linear. Foi esse valor  $(-\Delta P)Q^*$  que se materializou no markup de \$40 em nosso exemplo.

A restrição que o monopolista enfrenta é que ele se vê forçado a adotar uma regra de preço linear, ou seja, ele deve cobrar o mesmo preço de \$190 por cada unidade produzida e de cada consumidor. O monopolista poderia extrair todo o excedente do mercado se fizesse discriminação perfeita de preço ou se adotasse uma tarifa bipartite.

Há duas explicações para não adotar estas ou outras regras de preço alternativas à precificação linear. A primeira e mais óbvia é uma restrição institucional. O governo simplesmente proíbe que o monopolista faça quaisquer discriminações de preço.

Outra explicação é de natureza informacional. Mesmo que não houvesse restrições institucionais à discriminação de preços, poderia ser simplesmente muito custoso extrair de cada demandante sua disposição a pagar. Essa informação não é difícil de ser obtida, mas é custosa. O monopolista poderia leiloar cada unidade produzida por um leilão ascendente de maior preço (ou mesmo de segundo maior preço, que é o leilão de Vickrey), ofertando o objeto a quem desse o maior lance. Esse mecanismo gera incentivos para os demandantes revelarem suas verdadeiras disposições a pagar quando estas são informação privada. O problema é que ofertar cada unidade por meio de um leilão pode simplesmente ser inviável.

Nesse sentido, dadas as restrições listadas acima, que, na falta de um termo que englobe tanto a potencial restrição institucional quanto a informacional, chamarei de mercadológicas, o próprio monopolista prefere adotar a regra de preço linear e, ao tentar extrair todo o potencial excedente de mercado, o máximo que ele consegue extrair é uma parte desse excedente e o faz pela regra de markup. O markup de \$40, como vimos, está intimamente relacionado com o consumidor supra-marginal. Este consumidor é a personificação da restrição mercadológica enfrentada pelo monopolista. A estrutura de mercado lhe impõe essa restrição. É como se o mercado dissesse ao monopolista: "Use uma regra de preço linear e use-a até o ponto em que a quantidade produzida bata naquele consumidor supra-marginal a partir do qual você fará lucros incrementais negativos". Observe que, de um ponto de vista essencial, esse consumidor supra-marginal funciona exatamente como aquela primeira unidade a ser produzida além da capacidade máxima instalada e cujo preço-sombra deve ser acrescido ao custo marginal. Dessa forma, o markup se constitui numa espécie de preço-sombra que deve ser acrescido ao custo marginal do monopolista em razão da restrição mercadológica de linear pricing. Quem determina esse preço-sombra é precisamente o consumidor (ou unidade) supra-marginal. Chame esse preço-sombra, \$40, de  $P_3$ . Esse valor é um preço-sombra porque reflete a valoração que o mercado atribui à restrição mercadológica de linear pricing. Essa restrição é exógena e, se o consumidor supra-marginal mudar seu preço de demanda ou sair da fila de entrada no mercado, o markup muda e o excedente total também.

O monopolista não tem que conhecer a curva de demanda agregada por seu produto. No modelo matemático esses elementos são dados e nos passam a ideia incorreta de que o monopolista, ao procurar maximizar o seu lucro, maximiza a função lucro e que, para isso, deve conhecer a curva de demanda agregada e a sua função custo, de modo a deduzir a regra de markup. Não é isso que a Microeconomia diz. O modelo matemático simplesmente chega aos mesmos resultados, só que pelo caminho formal. A partir de princípios muito mais elementares, o raciocínio conduz aos resultados que conhecemos, sem necessidade de se pressupor conhecimento perfeito de preços e funções de qualquer tipo. Por exemplo, o monopolista, instado a praticar linear pricing, vai testando markups diferentes sobre os custos incrementais incorridos, mudando, assim, os preços cobrados. Aumentos pequenos de preços alteram sua receita marginal. Ele compara a receita proveniente do preço mais alto e da quantidade comercializada mais baixa no período (digamos, no mês) com a receita proveniente do preço anterior, mais baixo, e quantidade comercializada maior. Deduzidos os respectivos custos incrementais, ele apenas compara qual deu mais lucro. Cada mudança é um passo e a cada passo ele compara os lucros incrementais alternativos, escolhendo, obviamente, aquela ação que dê o lucro incremental maior. Ao continuar nesse processo, eventualmente as oportunidades de ganho serão exauridas e, se nada mudar nesse caminho, encontrará o preço de monopólio. Esse procedimento passo-a-passos é precisamente o que devemos entender por marginalismo. O fato é que esse procedimento é otimizatório. Pra ser mais objetivo e enfático nesse ponto, toda vez que tomamos uma decisão sobre alternativas distintas e escolhemos a que tem maior valor (ou menor custo de oportunidade), estamos maximizando. Quando se diz que o indivíduo é racional e maximizador, é nesse sentido que deve ser entendido, não no sentido matemático do termo. Ainda assim, os dois sentidos são equivalentes.

Não percebemos isso porque as variações são infinitesimais e as funções envolvidas são

contínuas, de modo que o consumidor marginal e o supra-marginal se confundem no mesmo preço de demanda. Dado que  $P_3 = \$40$  e  $P_1 + P_2 = \$150$ , já temos o seguinte resultado: o preço final do monopolista,  $\$190$ , é igual à soma dos *shadow-prices*  $P_1 + P_2 + P_3$ , em que  $P_1$  é o custo marginal do produtor do bem  $X$  (ou seja, o preço-sombra dos recursos deslocados da economia para a produção da unidade do bem  $X$ , isto é, o preço-sombra da restrição da escassez dos recursos para a sociedade),  $P_2$  é o preço-sombra da capacidade instalada máxima do produtor do bem  $X$  (ou seja, o preço-sombra da restrição tecnológica da capacidade instalada) e  $P_3$  é o markup do monopolista (isto é, o preço-sombra instituído pela restrição mercadológica de linear pricing):

$$P_1 + P_2 + P_3 = \$190. \quad (11.7.3)$$

Podemos alongar ainda mais a cadeia de produção até chegar ao produto final a ser consumido, aquele que Menger chamava de bem de última ordem, um bem que finalmente será consumido e não utilizado como insumo para a produção de algum outro bem. É nesse sentido que o consumidor é quem movimenta a produção. Os preços de demanda desses bens de última ordem se decompõem na soma de *shadow-prices* ao longo de toda a cadeia de produção. Toda vez que o produtor enfrenta uma restrição que limita a satisfação de consumidores adicionais, deve-se acrescer o correspondente preço-sombra aos custos marginais. A ideia de preço-sombra aqui é muito mais pervasiva: representa o valor que a sociedade está disposta a pagar pela superação da restrição.

Uma observação final pode ajudar a esclarecer esses princípios. Em Economia, a alocação ótima dos recursos tem a sua contraparte formal na otimização. Essa otimização é o que chamamos de problema primal. Todo problema primal tem um problema gêmeo e complementar: o problema dual. A solução do problema dual nos dá os multiplicadores de Lagrange associados a cada restrição do problema primal. Esses multiplicadores de Lagrange são exatamente os preços-sombras que procuramos. Como no problema primal as restrições são dadas por inequações distintas, uma a uma, então no problema primal os respectivos preços-sombras entram aditivamente na função-objetivo do problema dual. Cada preço-sombra vem multiplicado pela respectiva variável exógena da restrição primal, a qual exerce o papel de recurso limitado cujo uso deve ser racionalizado. Lá na ponta da cadeia, a satisfação do consumidor supra-marginal requer a variação de um montante de recurso necessário que vai se estendendo cadeia abaixo. Cada montante necessário variado corresponde à unidade necessária para realizar a produção da unidade supra-marginal. É por isso que os preços-sombra são somados. O que o dono de um clube precisa para atender um certo pacote adicional de crianças a mais na piscina infantil? Se a densidade de crianças na piscina deve obedecer a um padrão, então a piscina deve ser aumentada de modo a preservar a densidade. Ao expandir a piscina pelo volume adicional necessário, o dono do clube contrata uma empresa e paga um tanto. Esse tanto deve bater com a receita incremental que o dono do clube terá com o pacote adicional de usuários. O montante expandido é, assim, a “unidade” de expansão e o custo incorrido na expansão reflete o preço-sombra da capacidade instalada da piscina. Observe uma vez mais que esse preço-sombra pode, equivalentemente, ser medido pela disposição que os potenciais usuários têm a pagar pela piscina. Embora haja essa equivalência, quem a determina são os consumidores: o dono da piscina só vai gastar se vislumbrar potenciais ganhos com isso.

**Com esta alocação final de equilíbrio, nenhuma outra revisão seria mutuamente aceitável.**  
**Esta é uma situação de compensação de mercado (market-clearing).**

A interação entre a demanda e a oferta é importante não simplesmente porque estabelece um preço, mas porque, no processo, revela valores subjetivos relativos; estabelece um preço que permite que as pessoas troquem para que cada uma delas consiga uma combinação preferencial de bens.

Ninguém precisa conhecer a estrutura de demanda dos demais potenciais demandantes. Ninguém precisa conhecer a própria estrutura de demanda. Tudo o que é requerido é que diante de uma oportunidade de comprar ou vender, o indivíduo pode tomar uma decisão.

Qual o propósito dos conceitos de demanda e de oferta?

1. explicar como os mercados reduzem os custos dos agentes para ajustarem seu consumo diante de mudanças nos gostos.
2. mostrar como a competição interpessoal pelos bens existentes é resolvida no mercado.
3. explicar como a negociação ou ajuste de preços facilita a realocação de bens.
4. ver como o mercado economiza os custos do agente para coletar informações.
5. comparar o sistema de negociação em uma situação de liberdade com uma situação em que haja restrições.

### 11.7.3 Oferta e Demanda: Dinâmica de Preços

Seja  $p$  o preço de um bem. Suponha que a demanda seja dada por

$$D(p) = a - bp(t) \quad (11.7.4)$$

e suponha que a curva de oferta possa ser expressa como

$$S(p) = \alpha + \beta p(t) \quad (11.7.5)$$

Os parâmetros  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes positivas.

Podemos expressar a dinâmica de preços como

$$p(t)' = \theta[D(p) - S(p)] \quad (11.7.6)$$

com  $\theta > 0$ .

Assim, temos:

$$p'(t) = \theta[a - bp(t) - \alpha + \beta p(t)]$$

$$p'(t) + \theta(b + \beta)p(t) = \theta(a - \alpha) \quad (11.7.7)$$

Temos assim uma equação diferencial ordinária de primeira ordem linear. O fator integrante é

$$\mu(t) = \exp\left(\int \theta(b + \beta)dt\right) \quad (11.7.8)$$

Assim, temos como solução:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{\exp\left(\int \theta(b + \beta)dt\right)} \left[ \int \exp(\theta(b + \beta)t) \theta(a - \alpha) dt \right] \\ &= \exp(-\theta(b + \beta)t) \left[ \frac{\theta(a - \alpha)}{\theta(b + \beta)} \exp(\theta(b + \beta)t) + C \right] \\ &= Ce^{-\theta(b + \beta)t} + \frac{a - \alpha}{b + \beta} \end{aligned} \quad (11.7.9)$$

Sendo  $p_0$  em  $t = 0$  encontramos que

$$C = p_0 - \frac{a - \alpha}{b + \beta} \quad (11.7.10)$$

Disso decorre que a solução, dada a condição inicial, é expressa por

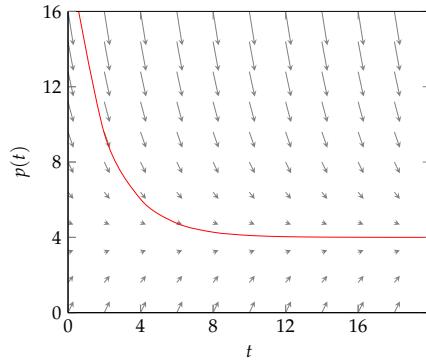
$$p(t) = \left( p_0 - \frac{a - \alpha}{b + \beta} \right) e^{-\theta(b + \beta)t} + \frac{a - \alpha}{b + \beta} \quad (11.7.11)$$

Quando  $t \rightarrow \infty$  (comportamento assintótico), temos que

$$p_\infty = \frac{a - \alpha}{b + \beta} \quad (11.7.12)$$

Dado que  $\theta(b + \beta) > 0$ , o equilíbrio é globalmente estável.

FIGURA 11.7.1 – DINÂMICA DE PREÇOS



#### 11.7.4 Formação de Expectativas

Em uma primeira aproximação assumimos que os agentes têm expectativas adaptativas. Se os preços atuais ( $p(t)$ ) excedem os preços esperados ( $p^e(t)$ ), os agentes revisam suas previsões na direção dos preços observados:

$$\dot{p}^e(t) = \alpha (p(t) - p^e(t)) \quad (11.7.13)$$

Em equilíbrio não há oportunidades de arbitragem. Assim, temos da condição de não arbitragem que:

$$Ir = \frac{I}{p(t_0)} [d + \dot{p}^e(t_0)] \quad (11.7.14)$$

em que  $I$  é o investimento,  $r$  é taxa de juros e  $d$  é o valor dos dividendos.

Isso implica que

$$\dot{p}^e(t_0) = rp(t_0) - d, \quad \text{para todo } t \quad (11.7.15)$$

Assim,  $p(t) = \frac{\dot{p}^e(t) + d}{r}$ . Substituindo esse resultado em (11.7.13), encontramos:

$$\begin{aligned} \dot{p}^e(t) &= \alpha \left[ \frac{d}{r} + \frac{\dot{p}^e(t)}{r} - p^e(t) \right] \\ \dot{p}^e(t) &= -\frac{r\alpha}{r-\alpha} p^e(t) + \frac{\alpha d}{r-\alpha} \end{aligned} \quad (11.7.16)$$

Para garantir que o sistema é estável, assumimos que  $\alpha > r$  (as expectativas não são tão voláteis).

Resolvendo-se a equação diferencial por meio de fator integrante temos que

$$\begin{aligned}\mu(t) &= \exp\left(\int \frac{r\alpha}{r-\alpha} dt\right) \\ &= \exp\left(\frac{r\alpha}{r-\alpha} t\right)\end{aligned}\tag{11.7.17}$$

A solução para a EDO é dada por

$$\begin{aligned}p^e(t) &= \frac{1}{\exp\left(\frac{r\alpha}{r-\alpha} t\right)} \left[ \int \exp\left(\frac{r\alpha}{r-\alpha} t\right) \frac{\alpha d}{r-\alpha} dt + C \right] \\ &= \frac{1}{\exp\left(\frac{r\alpha}{r-\alpha} t\right)} \left[ \frac{d}{r} \exp\left(\frac{r\alpha}{r-\alpha} t\right) + C \right] \\ &= C \exp\left(\frac{r\alpha}{r-\alpha} t\right) + \frac{d}{r}\end{aligned}\tag{11.7.18}$$

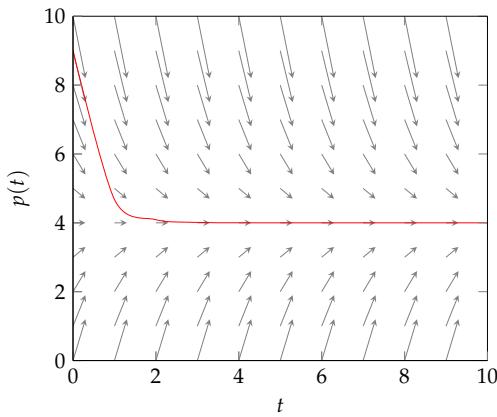
O problema de valor inicial é tal que em  $t = 0$ , temos que  $\dot{p}^e = 0$ , o que implica que  $C = -\frac{d}{r}$ . Assim, fazendo as substituições, encontramos que

$$\begin{aligned}p^e(t) &= -\frac{d}{r} \exp\left(\frac{r\alpha}{r-\alpha} t\right) + \frac{d}{r} \\ &= \frac{d}{r} \left[ 1 + \exp\left(\frac{r\alpha}{r-\alpha} t\right) \right]\end{aligned}\tag{11.7.19}$$

O valor de *steady-state* de  $p^e$ , denotado por  $p^{e*}$ , pode ser obtido fazendo  $\dot{p}^e = 0$ . Assim,

$$-\frac{r\alpha}{r-\alpha} p^{e*} + \frac{\alpha d}{r-\alpha} = 0 \iff p^{e*} = \frac{d}{r}\tag{11.7.20}$$

FIGURA 11.7.2 – DINÂMICA DE PREÇOS EM EXPECTATIVAS ADAPTATIVAS



O fato de que o sistema é estável significa que a discrepância entre o valor fundamental e o valor esperado dos preços tende a diminuir assintoticamente.

Podemos usar uma versão mais elegante, chamada de expectativas racionais. Assim,

$$p^e(t) = p(t) \quad (11.7.21)$$

A dinâmica do sistema muda dramaticamente. Assim,

$$rp(t) = d + \dot{p}^e(t) = d + \dot{p}(t) \implies \dot{p}(t) = rp(t) - d \quad (11.7.22)$$

O valor de *steady-state* é

$$rp^* - d = 0 \iff p^* = \frac{d}{r} \quad (11.7.23)$$

Mas agora o sistema é instável, porque  $r > 0$ . Logo,

$$p(t) = p^* + [p(0) - p^*] e^{rt} \quad (11.7.24)$$

O segundo termo, que pode ser designado como a bolha, cresce para mais ou menos infinito, a menos que o preço inicial seja igual ao valor fundamental da ação. Se descartarmos essas bolhas sempre crescentes, a única solução corresponde aos preços das ações saltarem instantaneamente para o valor fundamental da ação.

### 11.7.5 Matching no Mercado de Trabalho

Seja  $L$  o número de trabalhadores na força de trabalho,  $u(t)$  a taxa de desemprego e  $v(t)$  a taxa de vagas (expressa como uma fração de  $L$ ). Supõe-se que trabalhadores e vagas se encontrem por um processo de correspondência aleatória (*matching*) em que o número total de correspondências feitas em um intervalo de tempo  $\Delta t$  é dado pela função de correspondência

$$M\Delta t = M(uL, vL)\Delta t \quad (11.7.25)$$

A função correspondente é crescente e côncava em cada um de seus argumentos, e homogênea de grau um. Seja  $\theta = \frac{v}{u}$ . A taxa na qual as vagas são preenchidas, expressa como uma fração dos desempregados é

$$\begin{aligned} M\Delta t &= M(uL, vL)\Delta t \\ \frac{M}{uL}\Delta t &= \frac{M(uL, vL)}{uL}\Delta t \\ &= \frac{uL \cdot M(\theta, 1)}{uL}\Delta t \\ &= \theta M(\theta^{-1}, 1)\Delta t \\ &= \theta m(\theta)\Delta t \end{aligned} \quad (11.7.26)$$

onde  $m(\theta) = M(\theta^{-1}, 1)$ . O fluxo para o desemprego ocorre à taxa  $\lambda$ . No intervalo  $\Delta t$ , o número de trabalhadores que ficam desempregados é portanto  $\lambda(1 - u)L\Delta t$ . Assim, a variação no número de desempregados é

$$\Delta(uL) = \lambda(1 - u)L\Delta t - \theta m(\theta)uL\Delta t \quad (11.7.27)$$

Dividindo por  $L\Delta t$  e fazendo  $\Delta t \rightarrow 0$ , obtemos:

$$\dot{u}(t) = \lambda(1 - u(t)) - \theta m(\theta)u(t) \quad (11.7.28)$$

Sendo  $u(0) = u_0$  podemos resolver a equação diferencial acima por meio de seu fator integrante. Só precisamos saber que  $m(\theta)$  é uma constante.

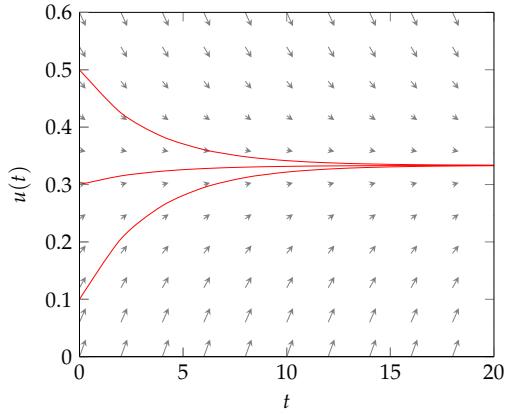
Assim,

$$u(t) = u_0 e^{-(\lambda + \theta m(\theta))t} + \int_0^t \lambda e^{-(\lambda + \theta m(\theta))(t-s)} ds$$

$$\begin{aligned}
&= u_0 e^{-(\lambda + \theta m(\theta))t} + \frac{\lambda e^{-(\lambda + \theta m(\theta))t}}{\lambda + \theta m(\theta)} \Big|_0^t \\
&= u_0 e^{-(\lambda + \theta m(\theta))t} + \frac{\lambda}{\lambda + \theta m(\theta)} \left( 1 - e^{-(\lambda + \theta m(\theta))t} \right)
\end{aligned} \tag{11.7.29}$$

que é uma média ponderada da taxa de desemprego inicial e da taxa de desemprego de estado estacionário. Observe que  $u(t) \rightarrow \frac{\lambda}{\lambda + \theta m(\theta)} = \bar{u}$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

FIGURA 11.7.3 – DINÂMICA DA TAXA DE DESEMPREGO



### 11.7.6 Modelo Harrod-Domar

O modelo Harrod-Domar foi desenvolvido de forma independente por Roy Harrod e Evsey Domar para analisar os ciclos de negócios originalmente, mas depois foi usado para explicar a taxa de crescimento de uma economia por meio da poupança e da produtividade do capital. A produção,  $Y$ , é função do estoque de capital,  $K$ ,  $Y = F(K)$ , e da produtividade marginal,  $\frac{dY}{dK} = c$  em que  $c$  é constante. O modelo postula que a taxa de crescimento do produto é dada por

$$\frac{1}{Y} \frac{dY}{dt} = sc - \delta \tag{11.7.30}$$

em que  $s$  é a taxa de poupança e  $\delta$  é a taxa de depreciação do capital.

A solução é dada por

$$Y(t) = Y_0 e^{(sc - \delta)t} \tag{11.7.31}$$

o que demonstra claramente que aumentar o investimento por meio de poupança e produtividade impulsiona o crescimento econômico, mas não leva em consideração a mão de obra e o tamanho da população.

Vamos ver também uma versão refinada desse modelo. O sistema é construído na hipótese

de que qualquer mudança na taxa de investimento por ano  $I(t)$  afetará a demanda agregada e a produtividade da economia. O efeito de demanda de uma mudança em  $I(t)$  opera por meio do processo multiplicador. Um aumento em  $I(t)$  aumentará a taxa de fluxo de renda por ano  $Y(t)$  por um múltiplo do incremento em  $I(t)$ . Os agentes regularmente reservam uma parte razoavelmente previsível de sua produção para fins de acumulação de capital. Uma vez que existe um único bem, nenhuma questão de mudanças no preço relativo pode surgir, nem qualquer questão de composição de capital. Vamos denotar uma fração constante do fluxo total de produção que é poupar e reservado para ser adicionado ao estoque de capital. Para um  $s$  predeterminado, o multiplicador é  $a = \frac{1}{s}$ .

Como  $Y(t)$  é o único fluxo de despesas que influencia a taxa de fluxo de renda, temos

$$\dot{Y}(t) = \frac{\dot{I}(t)}{s} \quad (11.7.32)$$

O efeito da capacidade de investimento é refletido pela mudança na taxa de produto potencial que a economia é capaz de produzir. A razão capacidade-capital é definida por  $\rho \equiv \frac{\kappa(t)}{K(t)}$ , em que  $\kappa(t)$  representa a capacidade ou fluxo de produto potencial e  $\rho$  representa uma razão (predeterminada) constante capacidade-capital. A equação acima implica que com um estoque de capital  $K(t)$  a economia é potencialmente capaz de produzir um produto anual  $\kappa$ . Tomando derivadas de  $\kappa(t) = \rho K(t)$  com respeito a  $t$ , temos:

$$\dot{\kappa} = \rho \dot{K} = \rho I \quad (11.7.33)$$

Aqui, o equilíbrio é definido como uma situação em que a capacidade produtiva é totalmente utilizada, ou seja,  $Y(t) = \kappa(t)$ . Se partirmos inicialmente do equilíbrio, a exigência significa o equilíbrio das respectivas mudanças na capacidade e na demanda agregada; ou seja,  $\dot{Y}(t) = \dot{\kappa}(t)$ . A questão é que tipo de trajetória temporal do investimento  $I(t)$  manterá a economia em equilíbrio o tempo todo. Para responder a esta pergunta, insira as equações  $\dot{Y}(t) = \frac{\dot{I}(t)}{s}$  e  $\dot{\kappa} = I$  dentro de  $\dot{Y}(t) = \dot{\kappa}(t)$  para obter:

$$\dot{I} = s\rho I \quad (11.7.34)$$

Portanto, a trajetória, obtida por fator integrante, é dada pela solução da equação diferencial acima:

$$I(t) = I(0)e^{\rho st} \quad (11.7.35)$$

em que  $I(0)$  é a taxa inicial de investimento. Isso implica que, para manter o equilíbrio entre capacidade e demanda ao longo do tempo, a taxa de fluxo de investimento deve crescer precisamente

à taxa exponencial de  $\rho s$ . Substituindo  $I(t) = I(0)e^{\rho st}$  dentro de  $\dot{K}(t) = I(t)$  resulta em  $\dot{K} = I(0)e^{\rho st}$ . É fácil checar que a seguinte equação

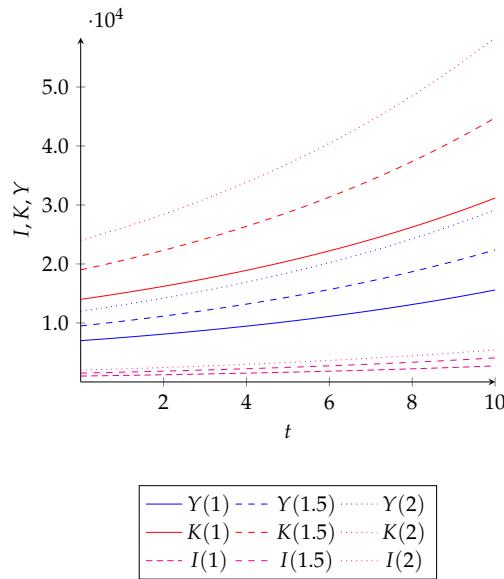
$$K(t) = \frac{I(0)}{\rho s} e^{\rho st} + K(0) - I(0) \quad (11.7.36)$$

satisfaz a equação acima com estoque de capital inicial de  $K(0)$ . Como  $Y(t) = \rho K(t)$ , temos:

$$Y(t) = \frac{I(0)}{s} e^{\rho st} + \rho(K(0) - I(0)) \quad (11.7.37)$$

Descrevemos uma solução gráfica para o sistema como na Figura 11.7.4 para os seguintes valores especificados dos parâmetros:  $\rho = 0.5$  e  $s = 0.2$ , com valores iniciais de  $K$  e  $I$ .

FIGURA 11.7.4 – DINÂMICA NO MODELO HARROD-DOMAR



### 11.7.7 Modelo Monetário de Cagan

O modelo de hiperinflação de Cagan é descrito pelo par de equações

$$m(t) - p(t) = -\alpha\pi(t), \quad \alpha > 0 \quad (11.7.38)$$

$$\dot{\pi} = \gamma(\dot{p} - \pi), \quad \gamma > 0 \quad (11.7.39)$$

em que  $m$  é o logaritmo natural do estoque nominal de moeda ( $M$ ),  $p$  é o logaritmo natural do nível de preços ( $P$ ) e  $\pi$  é a taxa de inflação esperada. Nesse modelo, o produto e a taxa de juros real são fixos e os efeitos renda são ignorados. A primeira equação descreve o equilíbrio contínuo do

mercado monetário e a segunda equação expressa a forma usual da hipótese adaptativa sobre a taxa de inflação esperada. O coeficiente

$$\alpha = \frac{1}{M} \frac{dM}{d\pi} \quad (11.7.40)$$

é interpretado como uma semi-elasticidade da demanda. Mede a variação percentual na demanda por moeda por variação em ponto percentual na taxa de inflação esperada. Supondo que o estoque nominal de moeda permaneça constante, da primeira equação obtemos,  $\dot{p} = \alpha \dot{\pi}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \alpha \dot{\pi} \\ \dot{p} &= \alpha (\gamma(\dot{p} - \pi)) \\ \dot{p} &= \alpha \gamma \dot{p} - \alpha \gamma \pi \\ \dot{p} &= \alpha \gamma \dot{p} + \gamma(m(t) - p(t)) \\ \dot{p} &= \frac{\gamma}{1 - \alpha \gamma}(m - p) \end{aligned} \quad (11.7.41)$$

Concluímos que o ajuste de preços é estável se e somente se  $\alpha \gamma < 1$ , o que implica que a inflação é um fenômeno monetário. Essa relação enfatiza o *trade-off* entre a semi-elasticidade da demanda por moeda em relação às expectativas inflacionárias e a taxa de adaptação das expectativas inflacionárias. Uma demanda altamente sensível por função de moeda é compatível com estabilidade apenas se as expectativas inflacionárias se adaptarem suficientemente lentamente às taxas de inflação anteriores. Se  $\alpha \gamma > 1$ ,  $\dot{p}$  apresenta um comportamento explosivo, o que implica que a inflação é um fenômeno puramente de expectativas, independente da política monetária.

Temos como fator integrante

$$\mu(t) = \exp \left( \int \frac{\gamma}{1 - \alpha \gamma} dt \right) \quad (11.7.42)$$

Resolvendo a equação diferencial acima por fator integrante, obtemos:

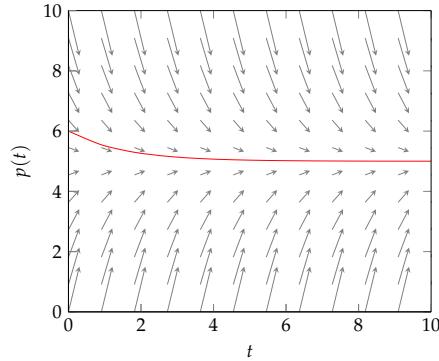
$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{\exp \left( \int \frac{\gamma}{1 - \alpha \gamma} dt \right)} \left[ \int \exp \left( t \frac{\gamma}{1 - \alpha \gamma} \right) m \frac{\gamma}{1 - \alpha \gamma} dt + C \right] \\ &= m + Ce^{\left( -\frac{\gamma}{1 - \alpha \gamma} t \right)} \end{aligned} \quad (11.7.43)$$

Dada a condição inicial  $p(0) = p_0$ , obtemos  $C = (p - m)$ , tal que

$$p(t) = m + (p - m)e^{\left( -\frac{\gamma}{1 - \alpha \gamma} t \right)} \quad (11.7.44)$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $p(t) \rightarrow p$ .

FIGURA 11.7.5 – DINÂMICA DO NÍVEL DE PREÇOS NO MODELO DE CAGAN: COMPORTAMENTO ESTÁVEL



### 11.7.8 Modelo de Solow

Considere uma função de produção do tipo Cobb-Douglas como segue

$$Q = F(k, L) = K^\alpha L^{1-\alpha} \quad (11.7.45)$$

em que  $0 < \alpha < 1$ .

A função de produção pode ser reescrita em termos da razão entre o produto e o número de trabalhadores. Assim,

$$q = \frac{Q}{L} = \frac{K^\alpha L^{1-\alpha}}{L} = \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha = k^\alpha \quad (11.7.46)$$

Desse modo, podemos fazer

$$q = f(k) = k^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (11.7.47)$$

E sabemos que a taxa de mudança do estoque de capital é dada pela diferença entre a taxa de investimento e a taxa de depreciação, de tal modo que a dinâmica do capital per capita ( $k_t$ ) é dada por:

$$\dot{k} = sk^\alpha - \delta k, \quad 0 < s, \delta, \alpha < 1 \quad (11.7.48)$$

em que  $s$  é a taxa de poupança,  $\delta$  é a taxa de depreciação e  $\alpha$  é a importância relativa dos insumos na produção. Introduzindo  $z = k^{1-\alpha}$  e usando a regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{dz}{dt} = (1 - \alpha)k^{-\alpha} \frac{dk}{dt} \quad (11.7.49)$$

Reescrevendo, temos:

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{1 - \alpha} k^\alpha \frac{dz}{dt} \quad (11.7.50)$$

Substituindo em (11.7.48), encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - \alpha} k^\alpha \frac{dz}{dt} &= sk^\alpha - \delta k \\ \frac{1}{1 - \alpha} k^\alpha \frac{dz}{dt} &= sk^\alpha - \delta k \quad \left[ \times \frac{1}{k^\alpha} \right] \\ \frac{1}{1 - \alpha} \frac{dz}{dt} &= s - \delta k^{1-\alpha} \\ \frac{dz}{dt} &= (1 - \alpha)(s - \delta k^{1-\alpha}) \\ \frac{dz}{dt} &= (1 - \alpha)(s - \delta z) \end{aligned} \quad (11.7.51)$$

Podemos resolver essa equação diferencial ao perceber que se trata de uma equação separável:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s - \delta z)} dz &= (1 - \alpha) dt \\ \int \frac{1}{(s - \delta z)} dz &= \int (1 - \alpha) dt \\ -\frac{1}{\delta} \ln(s - \delta z) &= (1 - \alpha)t + C \\ \ln(s - \delta z) &= -\delta(1 - \alpha)t + C \\ s - \delta z &= C e^{-\delta(1-\alpha)t} \\ s - C e^{-\delta(1-\alpha)t} &= \delta z \\ z &= \frac{s}{\delta} + \frac{C e^{-\delta(1-\alpha)t}}{\delta} \\ z &= \frac{s}{\delta} + C e^{-\delta(1-\alpha)t} \\ k^{1-\alpha} &= \frac{s}{\delta} + C e^{-\delta(1-\alpha)t} \end{aligned} \quad (11.7.52)$$

A condição inicial do modelo é tal que  $k(0) = k_0$ . Assim, podemos determinar a constante arbitrária  $C$ :

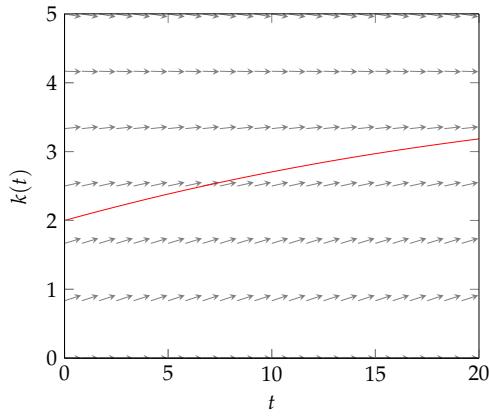
$$C = k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta} \quad (11.7.53)$$

Substituindo  $C$  em (11.7.52), obtemos:

$$\begin{aligned} k^{1-\alpha} &= \frac{s}{\delta} + \left[ k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta} \right] e^{-\delta(1-\alpha)t} \\ k &= \left[ \frac{s}{\delta} + \left( k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{\delta} \right) e^{-\delta(1-\alpha)t} \right]^{1/(1-\alpha)} \end{aligned} \quad (11.7.54)$$

Nós vemos, como na Figura 11.7.6, que quando  $t \rightarrow +\infty$ , temos que  $k(t) \rightarrow \left(\frac{s}{\delta}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$ .

FIGURA 11.7.6 – DINÂMICA DE  $k(t)$  NO MODELO DE SOLOW



Vamos incluir a taxa de crescimento populacional no modelo. O pressuposto no mercado de trabalho é que a oferta de trabalho é equivalente à população. Não há desemprego e o crescimento do trabalho em função do tempo segue um padrão de crescimento exponencial:

$$L = L_0 e^{nt} \quad (11.7.55)$$

Assim, a dinâmica do capital se torna

$$\dot{k} = sf(k) - (\delta + n)k \quad (11.7.56)$$

Usando dos mesmos recursos anteriores, a solução é dada por

$$k = \left[ \frac{s}{(\delta + n)} + \left( k_0^{1-\alpha} - \frac{s}{(\delta + n)} \right) e^{-(\delta+n)(1-\alpha)t} \right]^{1/(1-\alpha)} \quad (11.7.57)$$

Quando  $t \rightarrow +\infty$ , temos que  $k(t) \rightarrow \left(\frac{s}{(\delta + n)}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$ .

### 11.7.9 Inflação e Desemprego

Vamos considerar agora a interação entre inflação e desemprego. Denote a taxa de inflação por  $p(t)$ , que é a razão  $\frac{P'}{P}$ , em que  $\dot{p}$  é a taxa de crescimento do nível de preços, isto é, a taxa de inflação. A curva de Phillips assume a seguinte relação entre a taxa de inflação, a taxa de desemprego,  $U(t)$ , e a taxa esperada de inflação,  $\pi(t)$ :

$$\dot{p} = a - bU + h\pi, \quad 0 < h \leq 1 \quad (11.7.58)$$

em que  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $h$  são parâmetros. Assim, a expectativa de inflação mais alta molda o comportamento de empresas e indivíduos de uma forma que estimula a inflação de fato (esperando que os preços subam, eles podem decidir comprar mais no momento). Como as pessoas esperam que a inflação caia (como resultado de políticas governamentais apropriadas, por exemplo), isso, de fato, reduz a inflação real. Essa versão da relação de Phillips que explica a taxa esperada de inflação é chamada de relação de Phillips aumentada pelas expectativas. A hipótese das expectativas adaptativas mostra ainda como as expectativas inflacionárias são formadas. A hipótese de expectativas adaptativas estabelece uma regra para a taxa de inflação esperada como segue:

$$\dot{\pi} = j(\dot{p} - \pi), \quad 0 < j \leq 1 \quad (11.7.59)$$

que afirma que, se a taxa real de inflação exceder a taxa esperada de inflação, a taxa esperada de inflação tende a aumentar. Denote o saldo nominal de moeda por  $M$  e sua taxa de crescimento por  $m = \frac{\dot{M}}{M}$ . O modelo contém um *feedback* da inflação sobre o desemprego

$$\dot{U} = -k(m - \dot{p}), \quad k > 0 \quad (11.7.60)$$

em que

$$\dot{m} - \dot{p} = \left( \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{P}}{P} \right) \quad (11.7.61)$$

é a taxa de crescimento do saldo real de dinheiro. O modelo consiste em três equações, equações (11.7.58), (11.7.59) e (11.7.60), com três variáveis,  $p$ ,  $U$  e  $\pi$ . Agora mostramos que a dinâmica pode ser descrita por uma equação diferencial linear de segunda ordem.

Seja

$$\begin{aligned} \dot{\pi} &= j(a - bU + h\pi - \pi) \\ &= j(a - bU) + j(h - 1)\pi \end{aligned} \quad (11.7.62)$$

Derivando com relação ao tempo, temos:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\pi} &= -jb\dot{U} + j(h-1)\dot{\pi} \\
 &= -jb(-k(\dot{m} - \dot{p}) + j(h-1)\dot{\pi}) \\
 &= -jb \left( -k \left( \dot{m} - \left( \frac{\dot{\pi}}{j} + \pi \right) \right) \right) + j(h-1)\dot{\pi}
 \end{aligned} \tag{11.7.63}$$

Assim,

$$\ddot{\pi} + (bk + j - jh)\dot{\pi} + jbk\pi = jbk\dot{m} \tag{11.7.64}$$

Podemos reescrever a equação dinâmica como

$$\ddot{\pi} + a_1\dot{\pi} + a_2\pi = a_2\dot{m} \tag{11.7.65}$$

Portanto, o equilíbrio intertemporal da taxa de inflação esperada é exatamente a taxa de crescimento da moeda nominal. Para estabelecer a trajetória temporal de precisamos encontrar as raízes características da equação diferencial que podemos fazer usando a fórmula

$$r_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \tag{11.7.66}$$

Podemos ter os três tipos de raízes, dependendo dos valores dos parâmetros.

FIGURA 11.7.7 – DINÂMICA INFLACIONÁRIA COM RAÍZES REPETIDAS

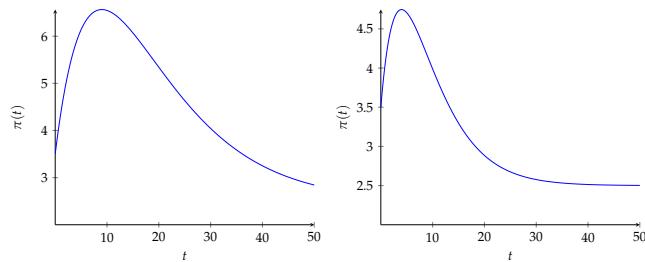


FIGURA 11.7.8 – DINÂMICA INFLACIONÁRIA COM RAÍZES COMPLEXAS

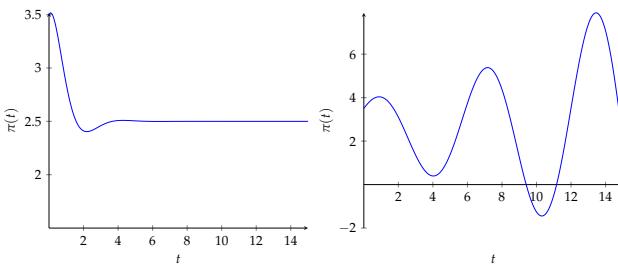
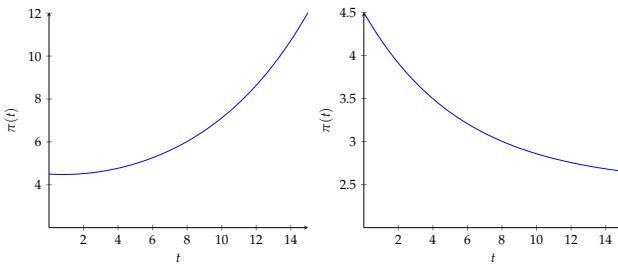


FIGURA 11.7.9 – DINÂMICA INFLACIONÁRIA COM RAÍZES REAIS E DISTINTAS



Blanchard oferece um tratamento alternativo da relação entre inflação e desemprego. Ele introduz no modelo a taxa natural de desemprego  $U_n$  na qual as taxas de inflação observada e esperada são iguais. A taxa de variação da taxa de inflação é proporcional à diferença entre a taxa de desemprego real  $U$  e a taxa natural de desemprego tal que

$$\frac{d\dot{p}}{dt} = -\alpha(U - U_n), \quad \alpha > 0 \quad (11.7.67)$$

Portanto, quando  $U_n$ , ou seja, a taxa real de desemprego supera a taxa natural, a taxa de inflação diminui e quando  $U < U_n$ , a taxa de inflação aumenta. A lógica intuitiva por trás disso é que em tempos econômicos ruins, quando muitas pessoas são demitidas, os preços tendem a cair. Nesse ponto, o desemprego real excederia os níveis normais. Em tempos de boom no ciclo de negócios, a taxa de desemprego real seria bastante baixa, mas a alta demanda agregada faria os preços subirem. A equação de Blanchard revela uma relação importante, pois fornece outra maneira de pensar sobre a curva de Phillips em termos das taxas de desemprego real e natural e da variação da taxa de inflação. Além disso, introduz a taxa natural de desemprego no que se refere à taxa de desemprego não aceleradora da inflação (ou NAIRU), a taxa de desemprego necessária para manter a taxa de inflação constante. Resolvemos este modelo alternativo da relação entre inflação e desemprego assumindo que  $U_n$  é constante e que a qualquer momento a taxa de desemprego real  $U$  é determinada pela demanda agregada que, por si só, depende do valor real da oferta de moeda dada por oferta monetária nominal  $M$  dividida pelo nível médio de preços  $\bar{p}$ . Portanto, o desemprego é negativamente relacionado a oferta de real de moeda  $\frac{M}{\bar{p}}$  de acordo com a relação

$$U = \gamma - \beta \ln \frac{M}{P}, \quad \beta, \gamma > 0 \quad (11.7.68)$$

Diferenciando (11.7.67) em relação ao tempo encontramos:

$$\frac{d^2\dot{p}}{dt^2} = -\alpha \frac{dU}{dt} \quad (11.7.69)$$

e diferenciando (11.7.68) em relação ao tempo encontramos:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\beta \frac{d}{dt} \ln \frac{M}{P} = -\beta \left( \frac{d \ln M}{dt} - \frac{d \ln P}{dt} \right) \\ &= -\beta(\dot{m} - \dot{p}) \end{aligned} \quad (11.7.70)$$

Assumimos que a taxa de crescimento da oferta monetária nominal é constante, o que pode estar de acordo com o planejamento sistemático do governo ou a política monetária. A equação obtida é idêntica à equação de política monetária introduzida no tratamento padrão da curva de Phillips. A combinação dos dois resultados produz

$$\begin{aligned} \frac{d^2\dot{p}}{dt^2} &= -\alpha(-\beta(\dot{m} - \dot{p})) \\ \frac{d^2\dot{p}}{dt^2} + \alpha\beta\dot{p} &= \alpha\beta\dot{p} \end{aligned} \quad (11.7.71)$$

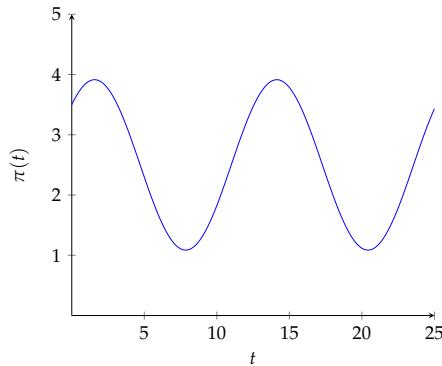
que é uma equação diferencial de segunda ordem na taxa de inflação  $\dot{p}$ .

Resolvendo a equação homogênea, temos que  $r_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha\beta}i$ , em que  $\lambda = 0$  e  $\mu = \sqrt{\alpha\beta}$ . Sendo a solução particular  $\dot{m}$ , temos que a solução geral pode ser expressa como

$$\dot{p}(t) = \dot{m} + (c_1 \cos(\sqrt{\alpha\beta}t) + c_2 \sin(\sqrt{\alpha\beta}t)) \quad (11.7.72)$$

Semelhante ao modelo padrão, podemos estudar a estabilidade dinâmica da inflação real. Dado que  $\lambda = 0$ , a função da taxa de inflação exibe flutuações uniformes em torno da taxa de crescimento da oferta de moeda que dá o nível de equilíbrio da inflação. Como a taxa de crescimento da oferta monetária nominal depende das políticas governamentais e muda com elas, é um equilíbrio móvel. Esse caminho de tempo flutuante em torno do equilíbrio intertemporal pode ser representado graficamente como na Figura (11.7.10). Embora o caminho de tempo não seja convergente, a política monetária pode, de certa forma, orientar a inflação e limitá-la dentro de uma banda à medida que flutua em torno de  $\dot{m}$ . Dadas as premissas do modelo e os valores dos parâmetros, uma trajetória temporal divergente e, portanto, um nível incontrolável de inflação são impossíveis.

FIGURA 11.7.10 – DINÂMICA INFLACIONÁRIA EM UM MODELO COM NAIRU



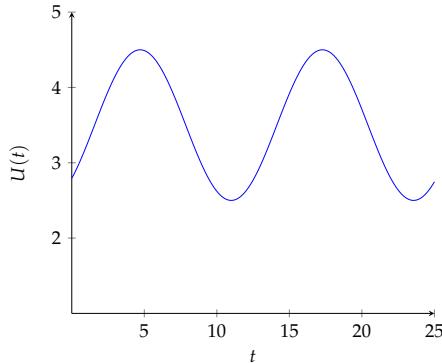
Para encontrar a trajetória temporal de  $U$  expressamos  $\frac{d\dot{p}}{dt}$  como

$$\frac{d\dot{p}}{dt} = \sqrt{\alpha\beta} \left( -c_1 \sin(\sqrt{\alpha\beta}t) + c_2 \cos(\sqrt{\alpha\beta}t) \right) \quad (11.7.73)$$

Assim,

$$\begin{aligned} U &= U_n - \frac{1}{\alpha} \frac{d\dot{p}}{dt} \\ &= U_n - \frac{1}{\alpha} \sqrt{\alpha\beta} \left( -c_1 \sin(\sqrt{\alpha\beta}t) + c_2 \cos(\sqrt{\alpha\beta}t) \right) \\ &= U_n - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \left( -c_1 \sin(\sqrt{\alpha\beta}t) + c_2 \cos(\sqrt{\alpha\beta}t) \right) \\ &= U_n + c_1 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sin(\sqrt{\alpha\beta}t) - c_2 \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \cos(\sqrt{\alpha\beta}t) \end{aligned} \quad (11.7.74)$$

FIGURA 11.7.11 – DINÂMICA DA TAXA DE DESEMPREGO EM UM MODELO COM NAIRU



Segue-se que, à semelhança da taxa de inflação, a taxa de desemprego apresenta flutuações regulares mas o seu equilíbrio intertemporal é a taxa natural de desemprego. Como essa é a taxa à

qual a inflação esperada e a real são iguais, podemos ver o equilíbrio intertemporal como o estado em que as expectativas coincidem com a realidade. Como novamente temos  $\lambda = 0$ , a trajetória temporal do desemprego não é nem convergente nem divergente. Segue-se, portanto, que com o passar do tempo o desemprego real não pode se desviar substancialmente da taxa natural de desemprego.

### 11.7.10 Hipótese de Histerese

A equação formulada por Blanchard pode ser estendida para o chamado sistema de histerese. Esta versão do modelo assume que a taxa de variação da taxa de inflação é uma função decrescente não só do nível de desemprego, mas também da sua taxa de variação. Assim, mesmo a velocidade com que aumenta o desemprego terá um efeito favorável sobre os aumentos de preços. Por exemplo, um desemprego muito baixo que aumenta rapidamente afetaria negativamente a taxa de inflação. O modelo inflação-desemprego torna-se então

$$\frac{d\dot{p}}{dt} = -\alpha(U - U_n) - \delta \frac{dU}{dt}, \quad \alpha, \delta > 0 \quad (11.7.75)$$

$$U = \gamma - \beta \ln \frac{M}{P}, \quad \gamma, \beta > 0 \quad (11.7.76)$$

Resolvendo o sistema, temos:

$$\frac{d\dot{p}}{dt} = -\alpha \left( \gamma - \beta \ln \frac{M}{P} - U_n \right) - \delta \frac{d}{dt} \left( \gamma - \beta \ln \frac{M}{P} \right) \quad (11.7.77)$$

e diferenciando com relação ao tempo temos uma equação diferencial de segunda ordem em  $\dot{p}$ :

$$\frac{d^2\dot{p}}{dt^2} + \beta\delta \frac{d\dot{p}}{dt} + \alpha\beta\dot{p} = \alpha\beta\dot{m} \quad (11.7.78)$$

Com isso, temos como solução particular  $\dot{p}_e = \dot{m}$ . As soluções são da forma

$$r_{1,2} = \frac{-\beta\delta \pm \sqrt{\beta^2\delta^2 - 4\alpha\beta}}{2} \quad (11.7.79)$$

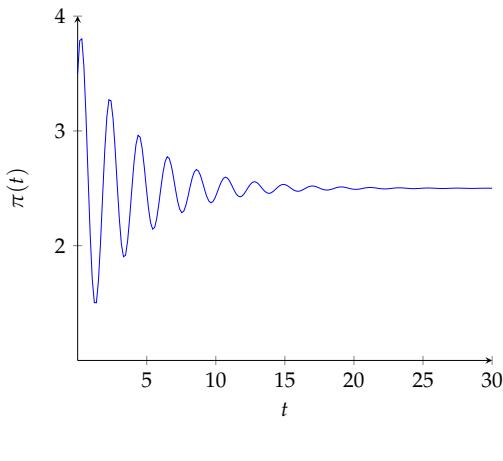
Se as raízes forem complexas podemos expressar o problema como

$$\dot{p}(t) = e^{\lambda t} (c_1 \cos(\mu t) + c_2 \sin(\mu t)) + \dot{m} \quad (11.7.80)$$

em que  $\lambda = -\frac{\beta\delta}{2}$  e  $\mu = \sqrt{\beta^2\delta^2 - 4\alpha\beta}$ . Como  $\lambda < 0$ , a solução irá convergir para  $\dot{m}$  de forma oscilatória.

Se as raízes forem reais podemos expressar o problema como

FIGURA 11.7.12 – DINÂMICA INFLACIONÁRIA COM HISTERESE: CASO DAS RAÍZES COMPLEXAS

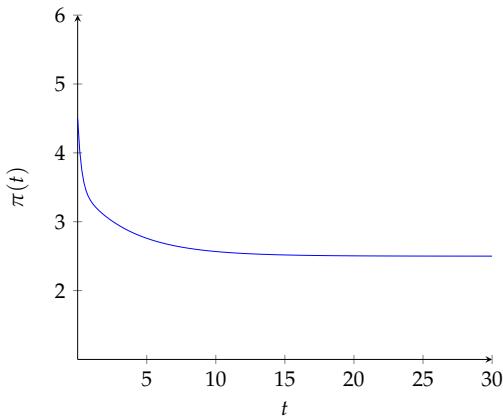


—  $\alpha = 1, \beta = 1, \delta = 0.5, \dot{m} = 2.5$

$$\dot{p}(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \dot{m} \quad (11.7.81)$$

em que  $r_1 = \frac{-\beta\delta + \sqrt{\beta^2\delta^2 - 4\alpha\beta}}{2}$  e  $r_2 = \frac{-\beta\delta - \sqrt{\beta^2\delta^2 - 4\alpha\beta}}{2}$ . Assim, a trajetória dependerá dos parâmetros.

FIGURA 11.7.13 – DINÂMICA INFLACIONÁRIA COM HISTERESE: CASO DAS RAÍZES REAIS E DISTINTAS



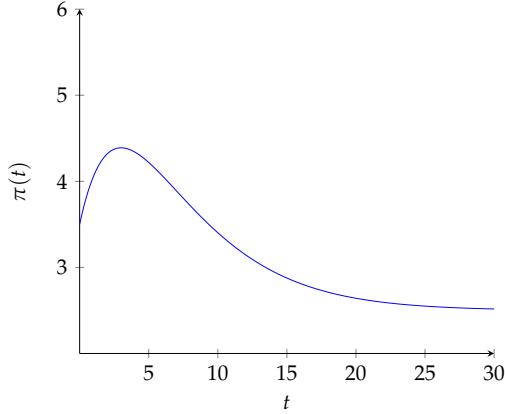
—  $\alpha = 0.5, \beta = 2, \delta = 2, \dot{m} = 2.5$

Se as raízes forem idênticas podemos expressar o problema como

$$\dot{p}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-(\beta\delta/2)t} + \dot{m} \quad (11.7.82)$$

em que  $r = -\frac{\beta\delta}{2}$ . Como  $-\frac{\beta\delta}{2} < 0$ , a solução irá convergir para  $\dot{m}$  exponencialmente após um período inicial de aumento da inflação.

FIGURA 11.7.14 – DINÂMICA INFLACIONÁRIA COM HISTERESE: CASO DAS RAÍZES REPETIDAS



$$\beta = 2, \delta = 2, \dot{m} = 2.5$$

Para a taxa de desemprego, a partir da primeira equação do modelo, temos

$$\frac{dU}{dt} + \frac{\alpha}{\delta} U = \frac{\alpha}{\delta} U_n - \frac{1}{\delta} \frac{d\dot{p}}{dt} \quad (11.7.83)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem com coeficiente constante e termo variável. Podemos resolvê-la usando um fator integrante. Assim,

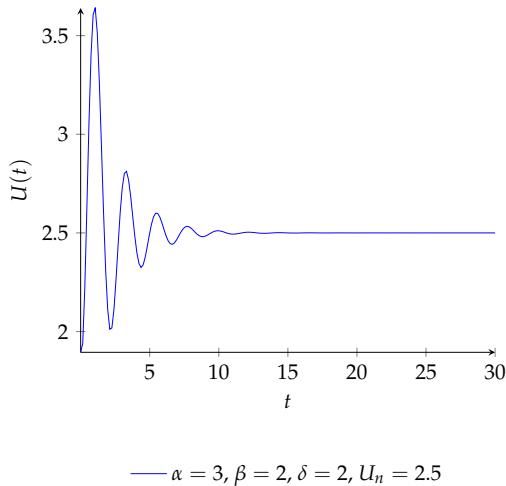
$$\begin{aligned} U(t) &= \frac{1}{e^{\int \alpha/\delta dt}} \left[ \int e^{(\alpha/\delta)t} \left( \frac{\alpha}{\delta} U_n - \frac{1}{\delta} \frac{d\dot{p}}{dt} \right) dt + C \right] \\ &= \frac{1}{e^{\int \alpha/\delta dt}} \left[ \frac{\alpha}{\delta} U_n \int e^{(\alpha/\delta)t} dt - \frac{1}{\delta} \int e^{(\alpha/\delta)t} \frac{d\dot{p}}{dt} dt \right] + C e^{(-\alpha/\delta)t} \\ &= U_n + C e^{(-\alpha/\delta)t} - \frac{1}{\delta} \int e^{(\alpha/\delta)t} \frac{d\dot{p}}{dt} dt \end{aligned} \quad (11.7.84)$$

Se as raízes de  $\dot{p}(t)$  são complexas, temos:

$$\begin{aligned} U(t) &= U_n + C e^{(-\alpha/\delta)t} - (c_2\mu + c_1\lambda) \left[ \frac{\delta e^{t(\alpha/\delta+\lambda)} [(\alpha + \lambda\delta) \cos(\mu t) + \mu\delta \sin(\mu t)]}{\delta^2(\mu^2 + \lambda^2) + \alpha^2 + 2\alpha\lambda\delta} \right] \\ &\quad - (c_2\lambda - c_1\mu) \left[ \frac{\delta e^{t(\alpha/\delta+\lambda)} [(\alpha + \lambda\delta) \sin(\mu t) - \mu\delta \cos(\mu t)]}{\delta^2(\mu^2 + \lambda^2) + \alpha^2 + 2\alpha\lambda\delta} \right] \end{aligned} \quad (11.7.85)$$

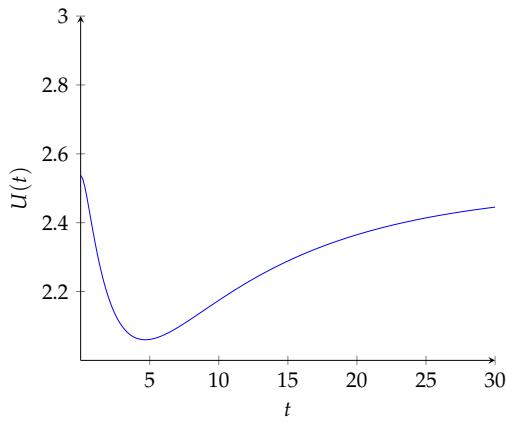
Se as raízes de  $\dot{p}(t)$  são distintas, temos:

FIGURA 11.7.15 – DINÂMICA DA TAXA DE DESEMPREGO COM HISTERESE: CASO DAS RAÍZES COMPLEXAS



$$U(t) = U_n + Ce^{(-\alpha/\delta)t} - \frac{c_1 r_1}{r_1 \delta + \alpha} e^{(r_1 \delta + \alpha)t/\delta} - \frac{c_2 r_2}{r_2 \delta + \alpha} e^{(r_2 \delta + \alpha)t/\delta} \quad (11.7.86)$$

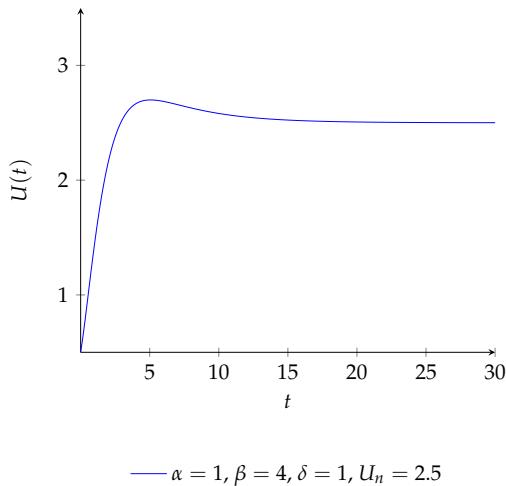
FIGURA 11.7.16 – DINÂMICA DA TAXA DE DESEMPREGO COM HISTERESE: CASO DAS RAÍZES REAIS E DISTINTAS



Se as raízes de  $\dot{p}(t)$  são idênticas, temos:

$$U(t) = U_n + Ce^{(-\alpha/\delta)t} - \left[ \frac{(\alpha + r\delta)[c_1 r + c_2(1 + rt)] - r\delta}{(\alpha + r)^2} \right] e^{(\alpha + r\delta)/\delta t} \quad (11.7.87)$$

FIGURA 11.7.17 – DINÂMICA DA TAXA DE DESEMPREGO COM HISTERESE: CASO DAS RAÍZES REPETIDAS



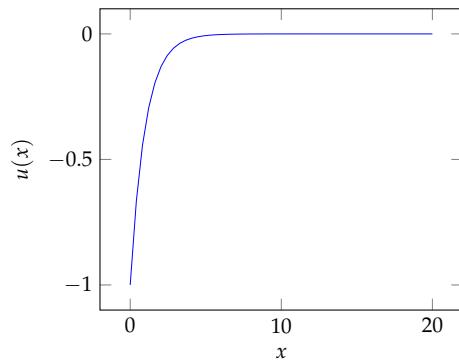
### 11.7.11 Medida de Aversão ao Risco de Arrow-Pratt

A nossa questão agora é desenvolver uma maneira de medir o grau de aversão ao risco de um tomador de decisão. Em um primeiro momento, poderia parecer adequado medir a curvatura de  $u$  através de sua segunda derivada  $u''$ , já que, quanto mais côncava for a função utilidade de Bernoulli, mais avesso ao risco é o tomador de decisão.

Porém, a segunda derivada da função utilidade de Bernoulli não é uma medida apropriada, pois não é invariante a transformações lineares positivas da função utilidade. Quando fazemos uma transformação linear positiva em uma função utilidade, ela continua representando as mesmas preferências. Assim, uma medida apropriada de aversão ao risco não deve ser sensível a transformações lineares positivas.

Imagine um indivíduo maximizador de utilidade esperada com função utilidade de Bernoulli  $u(x) = -e^{-x}$ . Na Figura 11.7.18 temos o gráfico desta função. Na medida em que  $x \rightarrow \infty$ , tanto  $u'(x) \rightarrow 0$  como  $u''(x) \rightarrow 0$ . Assim, enquanto  $x$  vai crescendo, esta função vai se aproximando cada vez mais da assíntota  $u = 0$ , parecendo graficamente cada vez menos côncava.

FIGURA 11.7.18 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $u(x) = -e^{-x}$



Porém, o comportamento frente ao risco representado por  $u$  é o mesmo para todo o  $x$ , já que

$$u(k+x) = -e^{-k-x} \implies u(k+x) = e^{-k}(-e^{-x}). \quad (11.7.88)$$

Fazendo  $b = e^{-k}$ , temos:

$$u(k+x) = b(-e^{-x}). \quad (11.7.89)$$

Como  $u(x) = -e^{-x}$ , temos:

$$u(k+x) = bu(x). \quad (11.7.90)$$

Portanto,  $u(k+x)$  é uma transformação linear positiva de  $u(x)$ . Assim, qualquer que seja  $k$ , não haverá mudança do comportamento frente ao risco. Deste modo, apesar da aparência do gráfico, a função  $u(x) = -e^{-x}$  está tão longe de implicar comportamento neutro ao risco em  $x = \infty$  ou em  $x = 0$ .

Uma característica de  $u''(x)$  que tem significado em relação à atitude frente ao risco é o seu sinal. Um sinal negativo significa aversão ao risco e um sinal positivo significa propensão ao risco. Porém, a magnitude absoluta de  $u''(x)$  não tem qualquer significado para a teoria da utilidade esperada. Apesar disso, podemos obter uma medida de aversão ao risco, normalizando  $u''(x)$ , dividindo pela derivada primeira  $u'(x)$ . Assim, obtemos a medida conhecida por coeficiente de aversão ao risco (absoluto) de Arrow-Pratt.

**Definição 11.7.1 (Coeficiente de Aversão ao Risco Absoluto de Arrow-Pratt).** *Dado uma função utilidade  $u$  (duas vezes continuamente diferenciável, côncava e estritamente crescente)*

$$r(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad (11.7.91)$$

é o coeficiente de aversão ao risco (absoluto) de Arrow-Pratt.

Note que a medida de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt caracteriza completamente o comportamento do tomador de decisão. A função  $r(x)$  apresenta toda informação necessária para prever o comportamento de escolha do tomador de decisão. Observe que a função utilidade de Bernoulli  $u$  pode ser recuperada de  $r(x)$ , integrando duas vezes. As constantes de integração são irrelevantes, já que transformações lineares positivas não alteram a representação de preferências.

Mas qual é a justificativa para o uso da função  $r(x)$  como uma medida de aversão ao risco? Para justificar a medida de Arrow-Pratt, tomemos uma aposta com dois resultados possíveis  $x_1$  e  $x_2$  com probabilidades  $p_1$  e  $p_2$ .

Para efetuar a análise utilizaremos o conceito de conjunto de aceitação. O conjunto de

aceitação de um tomador de decisão é o conjunto de todas as apostas ou loterias<sup>1</sup> que o tomador de decisão aceitaria em um nível de riqueza  $x$ . Na Figura 11.7.20 representamos o conjunto de aceitação. Note que no ponto de origem do gráfico, a riqueza do indivíduo permanece inalterada, já que, neste caso,  $x_1 = 0$  e  $x_2 = 0$  e, portanto,  $x + x_1$  ou  $x + x_2$  são iguais a  $x$ .

<sup>1</sup> O primeiro passo da representação é definir um conjunto de resultados possíveis ou conjunto de prêmios de uma situação de escolha. Assim, chamaremos este conjunto de  $X$  e definiremos  $X = [0, M] \subseteq \mathbb{R}$  como um intervalo compacto onde  $M > 0$ . Cada elemento de  $X$  pode ser considerado uma quantidade não-negativa de dinheiro até um valor limite  $M$ , que é o resultado mais alto possível.

As medidas de probabilidade podem ser representadas por suas funções distribuições acumuladas. Denotaremos por  $D(X)$  o conjunto de todas funções distribuições acumuladas sobre  $X$ . Formalmente, este conjunto é formado por todas funções contínuas à direita e não-decrescentes  $F: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F(0) \geq 0$  e  $F(M) = 1$ . Cada função  $F \in D(X)$  determina uma única medida de probabilidade  $P$  em  $X$ , através da equação

$$P([0, X]) = F(x) \text{ para todo } x \in X. \quad (11.7.92)$$

Assim, se um indivíduo se defronta com uma situação de risco representada pela função distribuição acumulada  $F$ ,  $F(x)$  é a probabilidade de receber uma quantia menor ou igual a  $x$ .

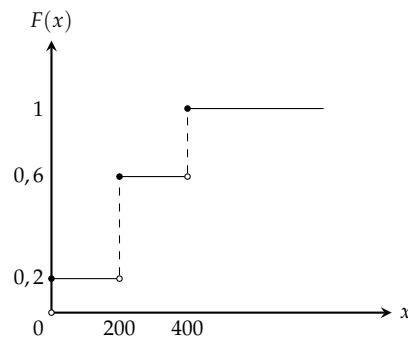
O conjunto de todos elementos de  $D(X)$  com imagem finita, que correspondem às medidas de probabilidade com suporte finito, é denotado por  $D^0(X)$ . Se  $F$  tem imagem finita, então  $F$  tem um conjunto finito de pontos descontínuos  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  tal que  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Assumindo que  $F(x_0) = 0$ , denotaremos o “salto” de  $F$  em  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , por  $p_i$ . Portanto,  $\sum_i p_i = 1$ . Destes “saltos”, obtemos uma lista  $L = (p_1, \dots, p_n)$  com  $p_i \geq 0$  para todo  $i$  em que  $p_i$  é a probabilidade do resultado (ou do prêmio)  $i$  ocorrer. Chamaremos esta lista de uma distribuição de probabilidade simples ou, como mais usualmente denominada no contexto da teoria da decisão, de uma loteria simples.

**Exemplo 11.7.1.** Seja a função distribuição acumulada  $F$  tal que

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 0,2, & \text{se } 0 \leq x < 200 \\ 0,6, & \text{se } 200 \leq x < 400 \\ 1, & \text{se } x \geq 400 \end{cases} \quad (11.7.93)$$

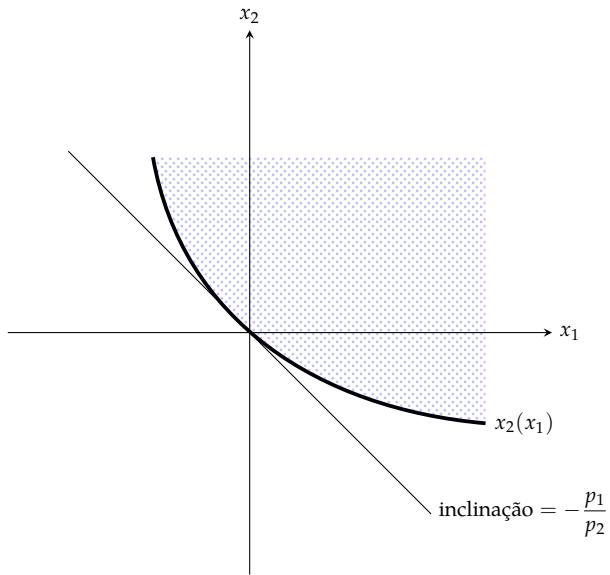
Esta função está representada no gráfico abaixo. Note que embora esta função não seja contínua, ela é contínua à direita. Note também que ela possui imagem finita.

FIGURA 11.7.19 – FUNÇÃO DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA



A partir de cada ponto descontínuo  $x_i$  em  $F$ , obtemos uma probabilidade  $p_i$  associada ao prêmio  $x_i$  tal que  $p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$ . No nosso exemplo,  $\{x_1, x_2, x_3\} = \{0, 200, 400\}$  e  $\{p_1, p_2, p_3\} = \{0,2; 0,4; 0,4\}$ . Portanto, a partir da função  $F$  dada, é possível obter uma loteria simples  $L = \{0,2; 0,4; 0,4\}$ , referente aos prêmios 0, 200 e 400.

FIGURA 11.7.20 – CONJUNTO DE ACEITAÇÃO



A fronteira deste conjunto - a curva mais escura - é o conjunto (ou curva) de loterias indiferentes e pode ser dado pela função implícita  $x_2(x_1)$ , como mostra a Figura 11.7.20. Se o tomador de decisão for avesso ao risco, então o conjunto de aceitação será um conjunto convexo.

Se  $u$  é contínua e estritamente crescente, então  $x_2(x_1)$  deve satisfazer a seguinte identidade:

$$u(x) \equiv p_1 u(x + x_1) + p_2 u(x + x_2). \quad (11.7.94)$$

A identidade acima é a curva de loterias indiferentes para uma dada riqueza inicial  $x$ . Note que a identidade requer que  $x_2(x_1)$  seja o valor que mantenha o nível de utilidade esperada constante na medida em que  $x_1$  varia. Isto é,  $x_2(x_1)$  deve ser tal que mantenha o nível de utilidade  $u(x)$  referente à riqueza inicial  $x$ .

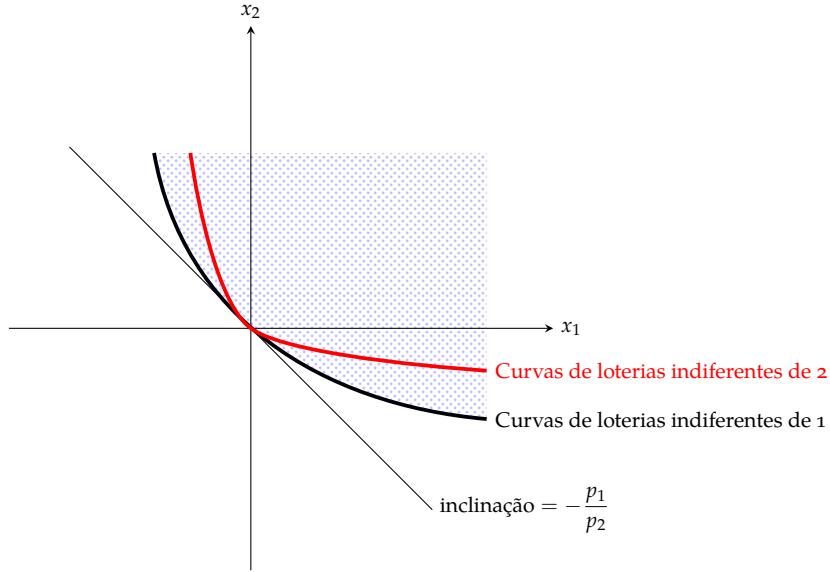
Podemos então, diferenciar a identidade acima com respeito a  $x_1$  e avaliá-la em  $x_1 = 0$ . Assim, obteremos a inclinação da fronteira do conjunto de aceitação em  $x_1 = 0$ :

$$\begin{aligned} p_1 u'(x + x_1) + p_2 u'(x + x_2(x_1)) x'_2(x_1) &= 0 \\ p_1 u'(x) + p_2 u'(x) x'_2(0) &= 0 \\ x'_2(0) &= -\frac{p_1}{p_2}. \end{aligned} \quad (11.7.95)$$

Agora, vamos supor dois tomadores de decisão com probabilidades idênticas para os dois resultados possíveis. É natural afirmar que o tomador de decisão 1 é mais avesso ao risco do que o tomador de decisão 2, ao nível de riqueza  $x$ , se o conjunto de aceitação do tomador de decisão 1 está contido no conjunto de aceitação do tomador de decisão 2. Observe a Figura 11.7.21 - qualquer

loteria que faz parte do conjunto de aceitação do tomador de decisão 1 também faz parte do conjunto de aceitação do tomador de decisão 2. Assim, o tomador de decisão 2 aceitará qualquer aposta que o tomador de decisão 1 aceita. Se nos limitarmos às apostas pequenas (apostas com resultados tendendo a zero), podemos efetuar uma análise mais útil ainda.

FIGURA 11.7.21 – COMPARAÇÃO DE AVERSÃO AO RISCO ATRAVÉS DO CONJUNTO DE ACEITAÇÃO



Podemos perceber que o indivíduo 1 é localmente mais avesso ao risco do que o indivíduo 2 se o conjunto de aceitação do indivíduo 1 é “mais curvado” do que o conjunto de aceitação do indivíduo 2, na vizinhança do ponto  $(0, 0)$ . De fato, podemos observar que quanto “mais curvado” for o conjunto de aceitação de um indivíduo, maior será o valor que o indivíduo requererá para o resultado positivo (note que da forma como o problema foi montado, sempre haverá um possível resultado negativo e outro positivo) para contrabalançar o risco de ocorrer o resultado negativo.

Assim, podemos obter a curvatura do conjunto de aceitação na vizinhança de  $(0, 0)$  diferenciando  $p_1 u'(x + x_1) + p_2 u'(x + x_2(x_1)) x'_2(x_1) = 0$  com respeito a  $x_1$  e avaliando a derivação resultante em  $x_1 = 0$ . Note que  $x_2(x_1) = 0$  quando  $x_1 = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 p_1 u''(x + x_1) + p_2 u''(x + x_2(x_1)) x'_2(x_1)^2 + p_2 u'(x + x_2(x_1)) x''_2(x_1) &= 0 \\
 p_1 u''(x) + p_2 u''(x) x'_2(0)^2 + p_2 u'(x) x''_2(0) &= 0 \\
 p_1 u''(x) + p_2 u''(x) \left(\frac{p_1^2}{p_2^2}\right) + p_2 u'(x) x''_2(0) &= 0 \quad \left[x'_2(0) = -\frac{p_1}{p_2}\right] \\
 p_2 u'(x) x''_2(0) &= -p_1 u''(x) - p_2 u''(x) \left(\frac{p_1^2}{p_2^2}\right) \\
 p_2 u'(x) x''_2(0) &= -u''(x) \left(p + \frac{p_1^2}{p_2^2}\right)
 \end{aligned}$$

$$p_2 u'(x) x_2''(0) = -u''(x) \left( \frac{p_1 - p_1^2 + p_1^2}{p_2} \right)$$

$$x_2''(0) = \frac{p_1}{p_2^2} \left[ -\frac{u''(x)}{u'(x)} \right]. \quad (11.7.96)$$

Da equação acima, podemos perceber que a curvatura do conjunto de aceitação é proporcional à medida de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt. Assim, temos:

$$x_2''(0) = \frac{p_1}{p_2^2} r(x). \quad (11.7.97)$$

Fazendo  $A = \frac{p_1}{p_2^2}$ , temos que  $A$  é constante, pois  $p_1$  e  $p_2$  são constantes. Logo,

$$x_2''(0) = Ar(x). \quad (11.7.98)$$

Portanto, a curvatura da fronteira do conjunto de aceitação em  $(0,0)$  é diretamente proporcional ao coeficiente de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt. Assim, podemos fazer a seguinte esquematização: *o indivíduo 1 é localmente mais avesso ao risco do que o indivíduo 2  $\iff$  o conjunto de aceitação do indivíduo 1 é mais curvado do que o conjunto de aceitação do indivíduo 2 na vizinhança de  $(0,0)$   $\iff r_1(x) \geq r_2(x)$ .*

Assim, o indivíduo 2 aceitará mais pequenas apostas do que o indivíduo 1 se e somente se o indivíduo 1 tem um maior coeficiente de aversão ao risco absoluto de Arrow-Pratt. Portanto, a medida de Arrow-Pratt está justificada.

Acima, tratamos de conceitos relacionados à aversão ao risco absoluto; ou seja, trabalhamos com conceitos desenvolvidos para lidar com loterias que apresentam resultados que são ganhos ou perdas absolutas em relação ao nível corrente de riqueza.

Agora, iremos tratar de loterias cujos ganhos ou perdas são valores percentuais (relativos) em relação ao nível corrente de riqueza. Por exemplo, digamos que um indivíduo com riqueza inicial  $x$  enfrente um risco de ganhar ou perder 20% de sua riqueza. Portanto, neste caso, o valor em termos absolutos que o indivíduo irá ganhar ou perder, dependerá de seu nível de riqueza inicial, já que a aposta é feita em termos relativos à sua riqueza inicial. Se o indivíduo possuir \$1000, ele poderá ganhar ou perder \$200, terminando com \$1200 ou \$800. Se o indivíduo possuir \$3000, ele poderá ganhar ou perder \$600, ficando com \$3600 ou \$2400.

**Definição 11.7.2 (Coeficiente de Aversão ao Risco Relativo de Arrow-Pratt).** *Dado uma função utilidade  $u$  (duas vezes continuamente diferenciável, côncava e estritamente crescente)*

$$r(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)}, \quad (11.7.99)$$

*é o coeficiente de aversão ao risco (relativo) de Arrow-Pratt.*

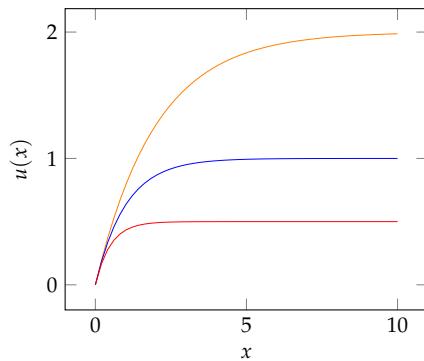
**Exemplo 11.7.2.** Considere um indivíduo cuja função de utilidade do tipo Bernoulli é dada por  $u(x) = \sqrt{x}$ . O coeficiente de aversão relativo ao risco será dado por

$$r(x) = -x \frac{u''(x)}{u'(x)} = -x \frac{-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \quad (11.7.100)$$

**Exemplo 11.7.3.** Considere um indivíduo cuja função de utilidade do tipo Bernoulli é dada por  $u(w) = \frac{1 - \exp(-aw)}{a}$ . O coeficiente de aversão relativo ao risco será dado por

$$r(x) = -w \frac{u''(w)}{u'(w)} = -w \frac{-a \exp(-aw)}{\exp(-aw)} = aw \quad (11.7.101)$$

FIGURA 11.7.22 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $u(x) = -e^{-x}$



Resolva as equações diferenciais que caracterizam o Coeficiente de Aversão ao Risco Absoluto de Arrow-Pratt e o Coeficiente de Aversão ao Risco Relativo de Arrow-Pratt.

### 11.7.12 A Estabilidade do Equilíbrio Competitivo: O Processo Walrasiano

Seja  $x_i$  o excesso de demanda pelo bem  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ). Se  $D_i$  e  $S_i$  denotam, respectivamente, a demanda de mercado e a oferta de mercado pelo bem  $i$ , então,  $x_i \equiv D_i - S_i$ . Seja  $P_i$  o preço do bem  $i$  e assuma que  $x_i$  depende somente dos preços  $P'_i$ s, em que:

$$x_i = F_i(P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}), \quad (11.7.102)$$

ou mais compactamente,  $x = F(P)$ , em que  $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ . Para lançar luz à diferença entre estabilidade walrasiana e estabilidade marshalliana, assumimos que as  $D'_i$ s dependem de  $P$ , mas

que  $S_i$  é constante para cada  $i^2$ . Um equilíbrio competitivo pode então ser definido por

$$F_i(P_1^*, \dots, P_n^*, P_{n+1}^*) = 0, \quad (11.7.103)$$

ou mais compactamente,  $F(P^*) = 0$ . As  $n + 1$  equações em (11.7.103) determinam os valores de equilíbrio dos  $n + 1$  preços,  $P_1^*, \dots, P_{n+1}^*$ . Assuma que existe um preço  $P^*$  tal que  $F(P^*) = 0$ .

Por outro lado, a soma ponderada dos preços dos excessos de demanda para todos os bens deve ser idêntico a zero, ou seja,

$$P_1 F_1(P) + \dots + P_n F_n(P) + P_{n+1} F_{n+1}(P) \equiv 0. \quad (11.7.104)$$

A equação acima é obtida pela soma de todas as condições orçamentárias de todos os agentes na economia e é chamada Lei de Walras. Então uma das equações em (11.7.103) torna-se supérflua e, portanto, o número de equações torna-se menor do que o número de variáveis. Entretanto, este problema é evitado ao simplesmente notar que a função excesso de demanda por cada bem é homogênea de grau zero nos preços. Para cada  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ , temos  $F_i(\alpha P_1, \dots, \alpha P_{n+1}) = F_i(P_1, \dots, P_{n+1})$ ,  $\alpha > 0$ . Isto pode ser justificado em termos de racionalidade do comportamento. Em outras palavras, se os  $P'_i$ s são mensurados em termos de alguma unidade de medida, então mudanças na unidade de medida não deve afetar o comportamento de cada indivíduo.

Assim, assumindo  $p_i \equiv \frac{P_i}{P_{n+1}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , podemos definir a função  $f_i$  por

$$f_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = F_i(p_1, p_2, \dots, p_n, 1) = 0. \quad (11.7.105)$$

O  $n + 1$ -ésimo bem é chamado numerário. O equilíbrio competitivo é então definido em termos de  $f'_i$ s como:

$$f_i(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) = 0, \quad (11.7.106)$$

ou mais compactamente,  $f(p^*) = 0$ . As  $n$  equações em (11.7.106) determinam os  $n$  valores de equilíbrio dos preços  $p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*$ . Assumimos que existe um  $p^* > 0$  tal que  $f(p^*) = 0$ , que chamamos de um vetor de preços de equilíbrio (normalizado). Se  $p$  não é um vetor de preços de equilíbrio, então  $f_i(p) \neq 0$  para algum ou todos os  $i$ 's. O valor do excesso de demanda para o bem  $n + 1$ -ésimo bem,  $x_{n+1}$  é obtido usando (11.7.104):

---

<sup>2</sup> Como Peter Newman (1965, pp. 106–108) apontou, a confusão comum deste ponto reside na falha em discutir claramente a teoria da troca da teoria da produção. Marshall e Walras teorizam sobre a produção bem como sobre a troca pura e ambos concordam que o ajuste marshalliano é explicitamente elaborado para a teoria da produção, enquanto o ajuste de preços walrasiano é mais adequado à teoria da troca.

$$x_{n+1} = -[p_1 f_1(p) + p_2 f_2(p) + \dots + p_n f_n(p)]. \quad (11.7.107)$$

Note que se  $p^*$  é um vetor de preços de equilíbrio, então (11.7.107) mostra que  $x_{n+1} = 0$ . Em outras palavras, se os primeiros  $n$  mercados estão em equilíbrio, então o  $n + 1$ -ésimo mercado está automaticamente em equilíbrio.

O problema de estabilidade de um equilíbrio competitivo está preocupado com a questão de se o vetor de preços  $p$ , quando desviado do ponto de equilíbrio  $p^*$ , retornará a  $p^*$ . A premisa fundamental para estudar este problema é que um excesso de demanda pelo bem  $i$  aumenta o preço do bem  $i$  e um excesso de oferta do bem  $i$  reduz o preço do bem  $i$ . Seguindo a reformulação de Samuelson do problema de estabilidade walrasiano, podemos especificar tal premisa por meio do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{p}_i(t) = k_i f_i[p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)], i = 1, 2, \dots, n, \quad k_i > 0, \quad (11.7.108)$$

em que  $\dot{p}_i$  denota a derivada de  $p_i$  em relação ao tempo e  $k_i$  é a velocidade de ajustamento do  $i$ -ésimo mercado. Assuma que a condição inicial do sistema acima seja especificada por  $p = p^0$  quando  $t = 0$  e seja a solução indicada como  $p(t; p^0)$ . Assumimos que  $p(t; p^0)$  existe e é única e que  $p^*$  para o qual  $f(p^*) = 0$  é um ponto de equilíbrio isolado do sistema (11.7.108). Então, o problema de estabilidade do equilíbrio competitivo pode ser apresentado como:

$$\text{Dado um } p^* \text{ tal que } f(p^*) = 0, p(t; p^0) \rightarrow p^* \text{ quando } t \rightarrow \infty? \quad (11.7.109)$$

Esta questão torna-se um problema de estabilidade local assintótica (do sistema de equações diferenciais) quando permitimos que  $p^0$  esteja na vizinhança de  $p^*$ . Se  $p^0$  não é restrito a vizinhança de  $p^*$ , então temos um problema de estabilidade global assintótica.

Para facilitar a exposição, vamos assumir que há dois bens (agrícolas e manufaturados ou exportáveis e não-exportáveis) e o segundo bem é o numerário. Então, assumindo  $f_1 = p_1$ , temos:

$$\dot{p}(t) = kf[p(t)], \quad p \equiv \frac{P_1}{P_2}, \quad (11.7.110)$$

em que  $p$  é um escalar. Assuma que  $p^*$  é um preço relativo de equilíbrio em que  $f(p^*) = 0$ . Com isso, obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 11.7.1.** *Em um mundo com dois bens,  $p^*$  é local e assintoticamente estável se e somente se  $f'(p^*) < 0$ . Se  $f'(p^*) < 0$  para qualquer  $p^*$  para o qual  $f(p^*) = 0$ , então  $p^*$  é único e estável global e assintoticamente.*

Observe que  $f'(p) < 0$  significa que um aumento no preço do bem 1 vis-à-vis o bem 2, reduz o excesso de demanda pelo bem 1. Se isto é válido para um intervalo relevante de  $p$ , então o preço

de equilíbrio é único e estável global e assintoticamente.

Para um caso de  $n$  bens, temos:

$$\dot{p}(t) = Kf[p(t)], \quad (11.7.111)$$

em que  $K$  é uma matriz diagonal  $n \times n$  cujos  $i$ -ésimo elementos da diagonal principal são  $k_i > 0$ . Sendo  $p^*$  o ponto de equilíbrio, a aproximação linear do sistema pode ser escrita como

$$\dot{p} = KA(p - p^*), \quad (11.7.112)$$

em que  $A = [a_{ij}]$ ,  $a_{ij} \equiv \frac{\partial f_i(p^*)}{\partial p_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . A questão da estabilidade local repousa sobre as propriedades da matriz  $A$ , que está intimamente relacionada ao estudo de Hicks sobre a estabilidade (1939, 1946). Ele demonstra que a “estabilidade perfeita” é estabelecida em termos de sinais alternados dos menores principais de  $A$ . Samuelson em 1947 mostrou que tal condição não é nem necessária e nem suficiente para a estabilidade do sistema dinâmico (11.7.112) para o caso de  $n$ -bens. Em 1958, Hahn e Negishi e Arrow e Hurwicz mostraram que  $p^*$  é um equilíbrio estável global e assintoticamente se  $a_{ij} > 0$  para  $i \neq j$ . Isto implica que  $p^*$  é um equilíbrio estável local e assintoticamente para o sistema de equações diferenciais exposto em (11.7.108).

Em 1959, Arrow, Block e Hurwicz obtiveram um novo resultado:  $p^*$  é um equilíbrio estável global e assintoticamente para (11.7.108) se  $f_{ij} \left( \equiv \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \right) > 0$  para todo  $p$  e todo  $i \neq j$ . Este pressuposto é chamado de substitutibilidade bruta global, enquanto em contraste o pressuposto  $a_{ij} \equiv \frac{\partial f_i(p^*)}{\partial p_j} > 0$  para  $i \neq j$  é chamado de substitutibilidade bruta local.

### 11.7.13 O Equilíbrio Competitivo para Três Bens

Agora vamos trabalhar com três bens (exportáveis, importáveis e nontradables). Nós não devemos considerar a aproximação linear do sistema. Ao invés disso, assumindo substitutibilidade bruta, nós devemos provar a estabilidade global do equilíbrio competitivo.

Seja  $x_i = F_i(P_1, P_2, P_3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , o excesso de demanda pelo bem  $i$ . A lei de Walras pode ser escrita como

$$P_1 F_1(P) + P_2 F_2(P) + P_3 F_3(P) \equiv 0, \quad (11.7.113)$$

em que  $P = (P_1, P_2, P_3)$ . Usando a homogeneidade de grau zero das funções excesso de demanda, obtemos:

$$F_i(P_1, P_2, P_3) = F_i(p_1, p_2, 1) \quad [\equiv f_i(p_1, p_2)], \quad i = 1, 2, 3, \quad (11.7.114)$$

em que  $p_i \equiv \frac{P_1}{P_3}$ . A dinâmica de ajustamento pode ser descrito por meio do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{p}_i = k_i F_i(p_1, p_2, 1) \quad [\equiv k_i f_i(p_1, p_2)], \quad i = 1, 2, \quad (11.7.115)$$

em que  $k_i, i = 1, 2$  são constantes maiores que zero, representando a velocidade de ajustamento do  $i$ -ésimo mercado. O vetor de preços de equilíbrio competitivo  $(p_1^*, p_2^*)$  é definido por:

$$F_i(p_1^*, p_2^*, 1) = 0 \quad \text{ou} \quad f_i(p_1^*, p_2^*) = 0. \quad (11.7.116)$$

O vetor de preços de equilíbrio competitivo significa um ponto de equilíbrio do sistema de equações diferenciais. Assumimos que existe e é único. Observe que a lei de Walras é válida.

Uma vez que  $F_i(P), i = 1, 2, 3$ , são homogêneas de grau zero, usando a equação de Euler, temos que:

$$F_{i1}(P)(P_1) + F_{i2}(P)P_2 + F_{i3}(P)P_3 \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11.7.117)$$

em que  $F_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial P_j}, i, j = 1, 2, 3$ . A partir disso, podemos obter:

$$F_{i1}(p_1) + F_{i2}p_2 + F_{i3}p_3 \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (11.7.118)$$

em que  $F_{ij} = F_{ij}(p_1, p_2, 1), i, j = 1, 2$ . De (11.7.118), obtemos:

$$\frac{p_1}{p_2} = -\frac{F_{12}}{F_{11}} - \frac{F_{13}}{F_{11}p_2} \quad (11.7.119)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = -\frac{F_{22}}{F_{21}} - \frac{F_{23}}{F_{21}p_2}. \quad (11.7.120)$$

Assumimos substitutibilidade bruta global no sentido de que:

$$F_{ij}(p, 1) > 0, \quad \forall p = (p_1, p_2), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2. \quad (11.7.121)$$

Isto e (11.7.118) implicam:

$$F_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \forall p. \quad (11.7.122)$$

$F_{ij} > 0, i \neq j$  e  $F_{ii} < 0$  podem ser interpretados como segue. Um aumento no preço de  $j$

desloca a demanda do bem  $j$  para outros bens  $\left(\frac{\partial D_j}{\partial P_j} < 0, \frac{\partial D_i}{\partial P_j} > 0, i \neq j\right)$ . Em termos da equação de Hicks-Slutsky,  $\frac{\partial D_i}{\partial P_j} > 0$  exclui a possibilidade do efeito renda ser suficientemente grande, bem como a possibilidade do efeito adverso devido a complementariedade.

A saber, o efeito preço deve ser sempre negativo. Combinando (11.7.121) e (11.7.122), chegamos a:

$$\frac{p_1}{p_2} > -\frac{F_{12}}{F_{11}}, \quad \frac{p_1}{p_2} < -\frac{F_{22}}{F_{21}}, \quad \forall p. \quad (11.7.123)$$

Isso implica que:

$$-\frac{F_{22}}{F_{21}} > -\frac{F_{12}}{F_{11}}, \quad \forall p. \quad (11.7.124)$$

Assim, temos a seguinte proposição.

**Proposição 11.7.2.** Sob o pressuposto de substitutibilidade bruta, o equilíbrio competitivo  $(p_1^*, p_2^*)$  é estável global e assintoticamente sob o processo dinâmico de ajustamento dado pelo sistema de equações diferenciais.

Do teorema de Olech,  $p^*$  é estável global e assintoticamente se:

1.  $k_1 F_{11} + k_2 F_{22} < 0, \forall p$ : traço < 0
2.  $k_1 k_2 (F_{11} F_{22} - F_{12} F_{21}) > 0, \forall p$ : determinante > 0
3. ou  $F_{11} F_{22} \neq 0, \forall p$  ou  $F_{12} F_{21} \neq 0, \forall p$

Toda essa discussão pode ser obtida graficamente por meio do diagrama de fase. Vamos considerar o plano  $p_1 \times p_2$ . Defina a curva  $F_i = 0$  como o locus do par  $(p_1, p_2)$  no qual  $F_i(p_1, p_2, 1) = 0$  com  $i = 1, 2$ . Para obter a inclinação da curva  $F_i = 0$ , diferenciamos  $F_i = 0$  para obtermos:

$$F_{i1} dp_1 + F_{i2} dp_2 = 0, \quad i = 1, 2. \quad (11.7.125)$$

Disso, a inclinação das duas curvas são obtidas como:

$$\left. \frac{dp_1}{dp_2} \right|_{F_1=0} = -\frac{F_{12}}{F_{11}} > 0, \quad \left. \frac{dp_1}{dp_2} \right|_{F_2=0} = -\frac{F_{22}}{F_{21}} > 0. \quad (11.7.126)$$

Portanto, ambas as curvas têm inclinação positiva no plano  $(p_1, p_2)$ . Manipulando os resultados encontramos que:

$$\left. \frac{dp_1}{dp_2} \right|_{F_1=0} < \frac{p_1}{p_2}, \quad \left. \frac{dp_1}{dp_2} \right|_{F_2=0} > \frac{p_1}{p_2}. \quad (11.7.127)$$

Isso significa que a inclinação do segmento a partir da origem para qualquer ponto sobre  $F_1 = 0$  é maior do que a inclinação de  $F_1 = 0$  neste ponto. Para o caso de  $F_2 = 0$  temos o oposto. Isto é ilustrado nas figuras abaixo. A figura da esquerda representa a curva  $F_1 = 0$  e a figura da direita a curva  $F_2 = 0$ .

O equilíbrio competitivo definido por

$$F_i(p_1^*, p_2^*, 1) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (11.7.128)$$

pode ser descrito pela intersecção das curvas  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 0$ . Isto é ilustrado na figura abaixo, em que o ponto  $A$  representa o equilíbrio competitivo. Note que o segmento  $0A$  deve estar entre as curvas  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 0$ , ou seja, a curva  $F_1 = 0$  deve cortar a curva  $F_2 = 0$  exatamente acima do ponto  $A$ . Isto estabelece uma prova gráfica da existência de um único equilíbrio competitivo sob o pressuposto de substitutibilidade bruta.

FIGURA 11.7.23 – CURVAS  $F_1 = 0$  E  $F_2 = 0$

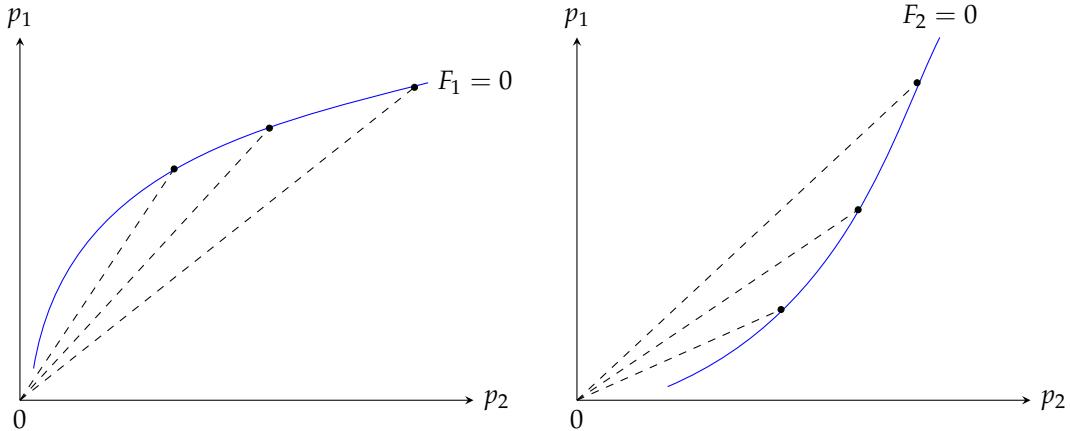
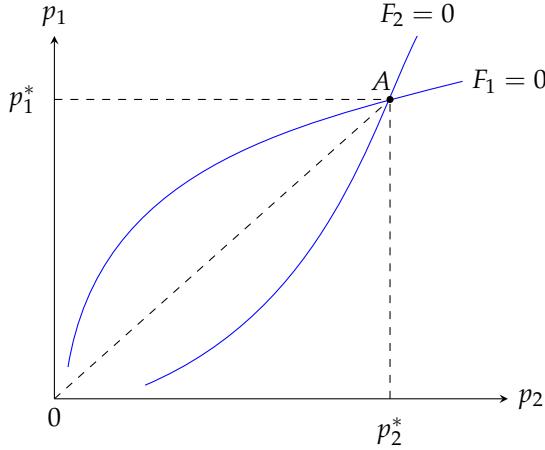
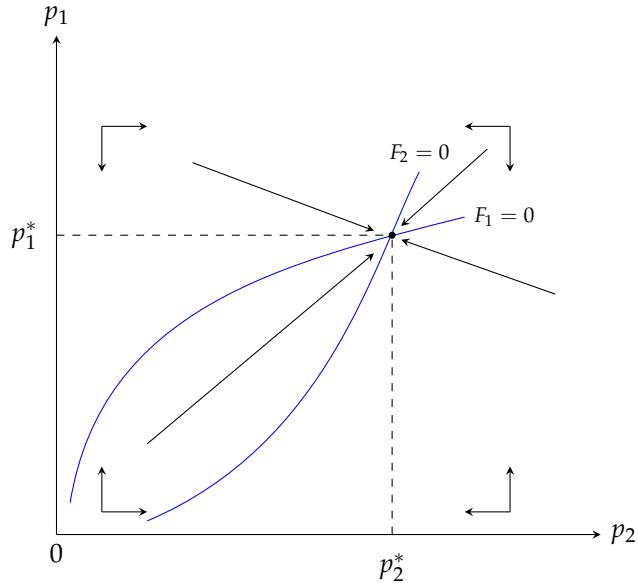


FIGURA 11.7.24 – EXISTÊNCIA E UNICIDADE DO EQUILÍBRIO COMPETITIVO



Nós podemos agora estabelecer um representação gráfica do comportamento dinâmico de  $(p_1, p_2)$ , conforme o sistema de equações diferenciais estabelecido acima. Note que as curvas  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 0$  dividem o ortante não-negativo do espaço de  $(p_1, p_2)$  dentro de quatro regiões. Uma vez que  $F_{12} > 0$ , temos que  $F_1 > 0$  à direita da curva  $F_1 = 0$  e  $F_1 < 0$  à esquerda de  $F_1 = 0$ . Portanto,  $\dot{p}_1 > 0$  ou  $p_1$  cresce ao longo do tempo à direita da curva  $F_1 = 0$  e  $\dot{p}_1 < 0$  ou  $p_1$  decresce ao longo do tempo à esquerda de  $F_1 = 0$ . De forma similar, uma vez que  $F_{22} < 0$ , temos que  $F_2 < 0$  à direita da curva  $F_2 = 0$  e  $F_2 > 0$  à esquerda de  $F_2 = 0$ . Portanto,  $\dot{p}_2 < 0$  ou  $p_2$  decresce ao longo do tempo à direita da curva  $F_2 = 0$  e  $\dot{p}_2 > 0$  ou  $p_2$  cresce ao longo do tempo à esquerda de  $F_2 = 0$ .

FIGURA 11.7.25 – COMPORTAMENTO DINÂMICO DE  $(p_1, p_2)$



O ponto de equilíbrio  $A$  é conhecido como um nó impróprio. Para um sistema não-linear,

sabe-se que o comportamento dinâmico da solução das equações diferenciais na vizinhança de um ponto de equilíbrio pode, com algumas exceções, ser aproximado pelo comportamento dinâmico da solução de sua aproximação linear. Este resultado é conhecido como Teorema de Poincaré. A técnica diagramática utilizada aqui é muito útil para obter a representação gráfica do comportamento da solução de sistemas não lineares para o caso de duas dimensões. Esta técnica, conhecida com técnica do diagrama de fase, é amplamente utilizada em economia.

---

**12**

---

---

**EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: II**

---

## 12.1 Prolegômenos

**Definição 12.1.1** (Corpo Ordenado). Um corpo ordenado é um corpo  $\mathbb{K}$ , no qual se destacou um subconjunto  $P \subset \mathbb{K}$ , chamado o conjunto dos elementos positivos de  $\mathbb{K}$ , tal que:

1. A soma e o produto de elementos positivos são positivos, isto é,  $x, y \in P \implies x + y \in P$  e  $x \cdot y \in P$ .
2. Dado  $x \in \mathbb{K}$ , exatamente uma das três alternativas ocorre:  $x = 0$ , ou  $x \in P$  ou  $-x \in P$ .

**Definição 12.1.2** (Sequência). Uma sequência de números reais é uma função  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida no conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  dos números naturais e tomando valores no conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais. O valor  $x(n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , será representado por  $x_n$  e chamado o termo de ordem  $n$  ou  $N$ -ésimo termo da sequência. Escrevemos  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  ou  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(x_n)$  para indicar a sequência  $x$ . É importante ter em mente que a função  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  não é necessariamente injetiva: pode-se ter  $x_m = x_n$  com  $m \neq n$ . O conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  pode ser finito, ou até mesmo, conter um único elemento, como no caso de uma sequência constante, em que  $x_n = a \in \mathbb{R}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Definição 12.1.3** (Bola). Num espaço métrico  $(X, d)$ , a bola aberta de raio  $\delta$  centrada num ponto  $x$  é o conjunto de pontos cuja distância a  $x$  é inferior a  $\delta$ , isto é,  $B(x, \delta) = \{y \in X : d(x, y) < \delta\}$ . A bola fechada de raio  $\delta$  centrada num ponto  $x$  é o conjunto de pontos à distância de  $x$  não superior a  $\delta$ , isto é,  $\bar{B}(x, \delta) = \{y \in X : d(x, y) \leq \delta\}$ . Ou seja, a diferença entre a bola aberta e a fechada é que na fechada os pontos de fronteira estão incluídos.

**Definição 12.1.4** (Espaço Métrico). Seja  $X$  um conjunto qualquer. Uma métrica definida sobre  $X$  é uma função  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$  e  $d(x, y) = 0 \iff x = y$
2.  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$
3.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$  (desigualdade triangular)

Então o par  $(X, d)$  é chamado espaço métrico.

**Definição 12.1.5** (Norma). Dado um espaço vetorial  $X$  sobre o corpo  $\mathbb{K}$  dos números reais ou complexos, uma função  $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$  é chamada de norma se, para quaisquer  $x, y \in X$  e todo  $\alpha \in \mathbb{K}$

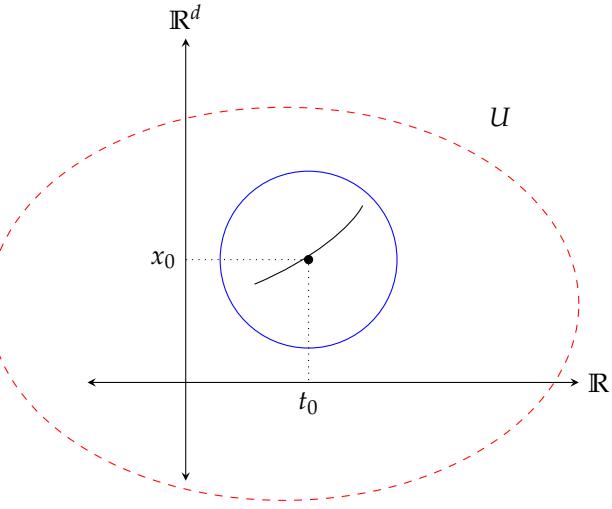
1.  $\|x\| = 0 \iff x = 0_X$ : se esta condição não for atendida, a função será no máximo uma seminorma.
2.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (desigualdade triangular)

Se o espaço vetorial  $X$  tem uma norma, ele passa a ser chamado de espaço normado, e denotado por  $(X, \|\cdot\|)$ .

**Definição 12.1.6** (Conjunto Compacto). *Seja  $M$  um espaço métrico. Um conjunto  $K \subset M$  é dito compacto se para toda união de conjuntos abertos  $U_\lambda B_\lambda$  contendo  $K$  (também chamada cobertura aberta de  $K$ ) podemos extraír uma subcoleção finita  $B_{\lambda_1}, \dots, B_{\lambda_r}$  tal que  $\bigcup_{j=1}^r B_{\lambda_j} \supset K$ . Sucintamente, dizemos que um conjunto  $K$  é compacto se e somente se toda cobertura por abertos de  $K$  admite uma subcobertura finita.*

**Definição 12.1.7** (Função Localmente Lipschitziana). *Uma função é localmente Lipschitziana se para qualquer  $(t_0, x_0) \in U$ ,  $U$  aberto de  $\mathbb{R}$ , existe uma constante  $C > 0$  e uma constante  $\varepsilon > 0$  tais que  $|F(t, x_1) - F(t, x_2)| \leq C|x_1 - x_2|$ ,  $\forall x_1, x_2 \in B(x_0, \varepsilon)$  e  $\forall t \in B(t_0, \varepsilon)$ .*

FIGURA 12.1.1 – FUNÇÃO LOCALMENTE LIPSCHITZIANA



**Definição 12.1.8** (Convergência Uniforme). *Uma sucessão de funções  $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$  converge uniformemente para uma função  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  se:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}: n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in X. \quad (12.1.1)$$

A interpretação geométrica é a seguinte: para cada  $\varepsilon > 0$ , a faixa de raio  $\varepsilon$  em torno do gráfico de  $f$

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in X; |y - f(x)| < \varepsilon \right\}, \quad (12.1.2)$$

contém, a partir da ordem  $n_0$ , os gráficos de todas as funções  $f_n$ .

A definição dada é trivialmente equivalente a afirmar que a sucessão numérica definida como

$$M_n = \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|, \quad (12.1.3)$$

é um infinitésimo<sup>1</sup>.

**Definição 12.1.9** (Semi-continuidade). *Seja  $X$  um espaço topológico. Dizemos que  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função semi-contínua superiormente (respectivamente, semi-contínua inferiormente) em  $a \in X$  se para cada número real  $h > f(a)$  (respectivamente, para cada número real  $k < f(a)$ ) existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  tal que para qualquer  $x \in V$  temos  $h > f(x)$  (respectivamente,  $k < f(x)$ ). Uma função é dita semi-contínua superiormente (respectivamente, semi-contínua inferiormente) em  $X$  se é semi-contínua superiormente (respectivamente, semi-contínua inferiormente) em cada  $a \in X$ .*

**Definição 12.1.10** (Estrutura Diferenciável). *Uma estrutura diferenciável de classe  $\mathcal{C}^k$  ( $1 \leq k \leq \infty$ ) num espaço localmente euclidiano  $M$  de dimensão  $d$ , é uma coleção de sistemas de coordenadas  $C = \{U_\alpha, \phi_\alpha: \alpha \in A\}$  que satisfaz as seguintes propriedades*

1.  $\{U_\alpha: \alpha \in A\}$  é uma cobertura aberta de  $M$ , isto é,  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$
2. As funções de transição  $\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$  são de classe  $\mathcal{C}^k$  para qualquer  $\alpha, \beta \in A$ .
3. A coleção  $C$  é maximal: se  $(U, \phi)$  é um sistema de coordenadas com a propriedade de que  $\phi \circ \phi_\alpha^{-1}$  e  $\phi_\alpha^{-1} \circ \phi$  são de classe  $\mathcal{C}^k$  para todo  $\alpha \in A$ , então  $(U, \phi) \in C$ .

A um par  $(M, C)$  chamamos uma variedade diferenciável de dimensão  $d$ .

**Definição 12.1.11** (Isomorfismo). *Denominaremos isomorfismo do espaço vetorial  $U$  no espaço vetorial  $V$  (ambos sobre  $\mathbb{R}$ ) uma transformação linear  $T: U \rightarrow V$  que seja bijetora.*

**Definição 12.1.12** (Homeomorfismo). *Sejam  $M$  e  $N$  espaços métricos. Um homeomorfismo de  $M$  sobre  $N$  é uma bijeção contínua  $f: M \rightarrow N$  cuja inversa  $f^{-1}: N \rightarrow M$  também é contínua. Neste caso, diz-se que  $M$  e  $N$  são homeomorfos.*

**Definição 12.1.13** (Difeomorfismo). *Se  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $V \subset \mathbb{R}^n$  são abertos e  $f: U \rightarrow V$  é uma bijeção diferenciável, cuja inversa  $g = f^{-1}: V \rightarrow U$  também é diferenciável, então  $f$  é chamado de difeomorfismo.*

**Definição 12.1.14** (Imersão). *Seja  $U \subset \mathbb{R}^m$  um aberto. Uma aplicação diferenciável  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  chama-se uma imersão quando, para cada  $x \in U$ , a derivada  $f'(x): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  é uma transformação linear injetora.*

**Definição 12.1.15** (Mergulho). *Seja  $U_0$  um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^m$ . Uma imersão de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $\varphi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , diz-se um mergulho de classe  $\mathcal{C}^k$  de  $U_0$  em  $\mathbb{R}^n$ , quando  $\varphi$  é um homeomorfismo de  $U_0$  sobre  $\varphi(U_0)$ . Ou seja, é uma aplicação que é um homeomorfismo sobre a sua imagem.*

**Definição 12.1.16** (Seção Transversal a um Campo). *Sejam  $X: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  um campo de classe  $\mathcal{C}^k$ ,  $k \geq 1$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $A \subset \mathbb{R}^{n-1}$  também aberto. Uma aplicação diferenciável  $f: A \rightarrow U$  de classe  $\mathcal{C}^k$  chama-se seção transversal local a  $X$  quando  $\forall a \in A, Df(a) \cdot \mathbb{R}^{n-1}$  e  $X(f(a))$  geram o espaço  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $\Sigma = f(A)$  munido da topologia induzida por  $U$ . Se  $f: A \rightarrow \Sigma$  for um homeomorfismo, diz-se que  $\Sigma$  é uma seção transversal a  $X$ .*

---

<sup>1</sup> A convergência uniforme é equivalente à convergência na norma do supremo.

**Definição 12.1.17** (Soma Direta). *Sejam  $\vec{v}$  um espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{F}$ ,  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$  subespaços vetoriais de  $\vec{v}$  tais que  $U \cap W = \{0_V\}$ . Dizemos que o subespaço  $U + W$  é a soma direta dos subespaços  $\vec{u}$  e  $\vec{w}$ , e denotamos por  $U \oplus W$ .*

**Definição 12.1.18** (Teorema da Curva de Jordan). *O teorema afirma que uma curva fechada do  $\mathbb{R}^2$ , sem auto-intersecções, divide o plano em exatamente duas componentes conexas  $G_0$  e  $G_1$  e seu traço é a fronteira de  $G_0$  e  $G_1$ .*

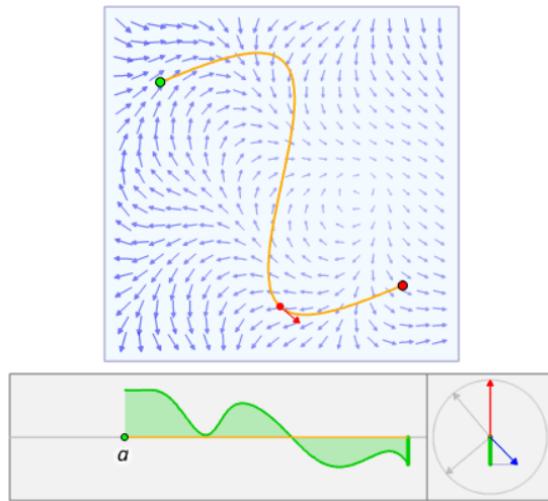
**Definição 12.1.19** (Integral de Caminho). *Em termos qualitativos, uma integral de linha no cálculo de vetor pode ser pensada como uma medida do efeito total de um dado campo ao longo de uma determinada curva. Mais especificamente, a integral de linha ao longo de um campo escalar pode ser interpretada como a área sob o campo apontada para fora por uma curva particular. Isto pode ser visualizado pela superfície criada por  $z = f(x, y)$  e uma curva  $C$  no plano  $x, y$ .*

*Para um campo vetorial  $\mathbf{F}: L \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , a integral de linha ao longo de uma curva lisa orientada, na direção de  $\mathbb{R}$ , é definida como*

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt \quad (12.1.4)$$

*em que  $\mathbb{R}: [a, b] \rightarrow C$  é uma parametrização da curva  $C$  de tal modo que  $r(a)$  e  $r(b)$  são os pontos de extremidade de  $C$ .*

*A trajetória de uma partícula (em vermelho) ao longo de uma curva dentro de um campo vetorial. A partir de um, a partícula traça o caminho  $C$  ao longo do campo de vetores  $\mathbf{F}$ . O produto escalar (linha verde) do seu vetor velocidade  $\mathbf{r}'$  (seta vermelha) e o vetor de campo (seta azul) define uma área sob a curva, o que é equivalente a integral de linha do caminho.*



*Em outras palavras, a integral do campo vetorial ao longo de uma curva tem o mesmo valor que a integral do componente tangencial do campo vetorial ao longo da curva. Além disso, as integrais de linha de*

*campos vetoriais independentem da parametrização r em valor absoluto, mas eles dependem de sua orientação. Especificamente, uma inversão na orientação da parametrização muda o sinal da linha integral.*

## 12.2 Teorema de Existência e Unicidade

Mesmo quando a aplicação  $f$  que fornece a expressão da EDO estudada depende apenas de  $t$ , necessitamos acrescentar mais dados ao problema para termos unicidade das soluções. Isso enseja a seguinte definição:

**Definição 12.2.1** (Problema de Valor Inicial, ou problema de Cauchy). *Seja  $U$  um aberto contido em  $I \times E$ , onde  $I$  é um intervalo não degenerado da reta e  $E$  é um espaço vetorial normado completo (espaço de Banach). Seja  $f: U \rightarrow E$  uma aplicação pelo menos contínua. Fixado um par  $(t_0, x_0) \in U$ , chamado de valor inicial para a equação diferencial ordinária dada por  $f$ , chamamos de problema de Cauchy associado a  $f$  com valor inicial  $(t_0, x_0)$  ao problema definido formalmente por:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (12.2.1)$$

*Em outras palavras, dizemos que uma aplicação  $\varphi: I \rightarrow E$  (onde  $I$  é um intervalo não degenerado da reta contendo  $t_0$ ) é uma solução do problema de Cauchy dado por  $f$ , com valor inicial  $(t_0, x_0)$  se é solução da EDO dada por  $f$  e ademais, temos  $\varphi(t_0) = x_0$ .*

Mesmo o problema de Cauchy pode não ter solução única. Entretanto, veremos que hipóteses relativamente gerais sobre a aplicação  $f$  darão condições suficientes para termos existência e unicidade de soluções dos problemas de Cauchy, pelo menos localmente. Por exemplo, se  $f$  é Lipschitz, veremos que tais soluções existem e são únicas localmente. Assim, seja a seguinte definição.

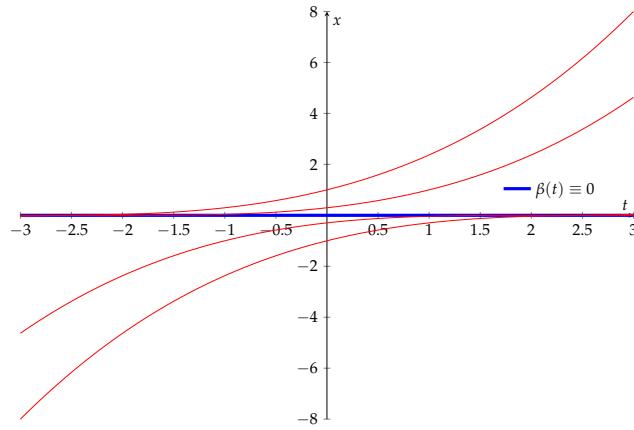
**Teorema 12.2.1** (Teorema de Existência e Unicidade). *Seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , em que  $U$  é um domínio aberto de  $\mathbb{R}^{1+d} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ , contínua e localmente Lipschitziana em  $x$ . Então,*

1. *para todo  $(t_0, x_0) \in U$  existe  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  que é solução da equação  $x' = F(t, x)$  com  $\gamma(t_0) = x_0$ .*
2. *se  $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  são soluções da equação  $x' = F(t, x)$  e existe  $t_0 \in I_1 \cap I_2$  tal que  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ , então  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ ,  $\forall t \in I_1 \cap I_2$ .*

**Exemplo 12.2.1.** *Seja a EDO  $x' = x^{2/3}$ . Qual a solução? É única?*

*É só resolver usando o método de separação de variáveis e encontramos  $\gamma(t) = \left(\frac{t+c}{3}\right)^3$  com  $c \in \mathbb{R}$ . Em particular,  $\gamma(t) = \left(\frac{\gamma}{3}\right)^3$  é solução de  $\gamma(0) = 0$ . Mas a função nula  $\beta(t) \equiv 0$  também é solução com  $\beta(0) = 0$ . Por não ser localmente Lipschitziana a unicidade não é verificada.*

FIGURA 12.2.1 – GRÁFICO DA EDO  $x' = x^{2/3}$



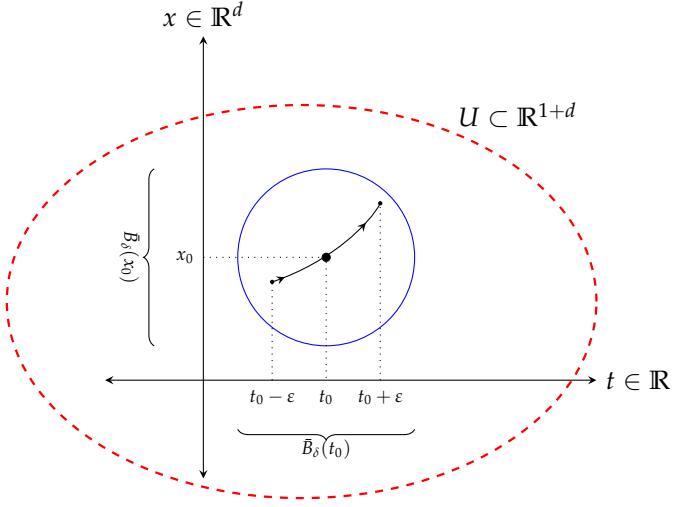
Vamos à prova do Teorema de Existência e Unicidade para equações diferenciais ordinárias. Seja a demonstração abaixo.

*Demonstração.* Em primeiro lugar vamos provar o item (1) do Teorema 12.2.1.

Seja  $\delta > 0$  tal que  $\bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0) \subset U$  e seja  $M = M_\delta = \sup_{\bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0)} \|F\|$ , em que  $\bar{B}$  é uma bola fechada. Por hipótese a função  $F$  é localmente Lipschitziana em  $x$ , ou seja, na vizinhança de qualquer ponto ela satisfaz uma condição de Lipschitz desde que a vizinhança seja suficientemente pequena. Então, supondo  $\delta > 0$  pequeno, existe uma constante  $C = C_\delta > 0$  tal que  $\forall (t, x_1) \text{ e } (t, x_2) \in \bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0)$  verifica-se que  $\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\| \leq C\|x_1 - x_2\|$ .

Seja  $\varepsilon > 0$  tal que  $\varepsilon \leq \delta$ ,  $\varepsilon \leq \frac{\delta}{M}$  e  $\varepsilon < \frac{1}{C}$ , e considere o espaço  $\mathcal{X}$  como o conjunto de todas as curvas contínuas  $\gamma$ , isto é,  $\mathcal{X} = \left\{ \gamma: [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d \right\}$  tal que  $\gamma(t_0) = x_0$  e  $\gamma(t) \in \bar{B}_\delta(x_0)$ ,  $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ . Os elementos desse espaço são curvas contínuas definidas num intervalo  $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  que é menor do que  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  cujo gráfico passa pelo ponto  $(t_0, x_0)$  e cuja imagem está contida na bola de centro  $x_0$  e raio  $\delta$ .

FIGURA 12.2.2 – A ESCOLHA DE  $\delta$  INFLUENCIA O DOMÍNIO DE DEFINIÇÃO DA SOLUÇÃO



Defina a distância entre duas curvas como  $d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]} \{\|\gamma_1(t) - \gamma_2(t)\|\}$ , também conhecida como distância da convergência uniforme. Com essa métrica,  $(\mathcal{X}, d)$  é um espaço métrico completo.

Para encontrarmos as soluções vamos introduzir um operador  $\mathcal{F}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , o que significa que a cada curva  $\gamma$  ele associa uma curva  $\gamma$  e, portanto,  $\mathcal{F}: \gamma \mapsto \mathcal{F}(\gamma)$ . Como se sabe, ao contrário do operador de derivação, o operador integral é contínuo no espaço  $C^0 = C^0[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  das funções contínuas. Para definirmos esse operador a curva acima é  $\mathcal{F}(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s))ds$ . Observe que essa aplicação  $\mathcal{F}$  é bem-definida, pois  $F(\cdot)$  é contínua e limitada pelo conjunto compacto  $\bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0)$  pois  $M$  existe. Tal operador terá como domínio um subconjunto fechado do espaço das funções contínuas. Note que os pontos fixos de  $\mathcal{F}$  são justamente as soluções de nossa equação diferencial ordinária. Dito de outra forma, como a função é contínua e limitada sob um domínio limitado a integral existe (está bem definida). Além disso, a aplicação  $\mathcal{F}(\cdot)$  está bem definida, o que significa que a imagem de uma curva  $\gamma(\cdot)$  está no espaço  $\mathcal{X}$  também, isto é,  $\gamma \in \mathcal{X} \implies \mathcal{F}(\gamma) \in \mathcal{X}$ . Assim, tomaremos vantagem da redução de nosso problema diferencial a um problema integral.

De fato, temos que verificar se as propriedades do espaço  $\mathcal{X}$  estão satisfeitas. Em primeiro lugar, temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\gamma)(t_0) &= x_0 + \int_{t_0}^{t_0} F(s, \gamma(s)) ds \\ &= x_0 \end{aligned} \tag{12.2.2}$$

Para a segunda propriedade fazemos  $\|\mathcal{F}(\gamma)(t) - x_0\| \leq \delta$ , isto é, queremos verificar se a imagem de  $\gamma(t)$  está contida na bola de centro  $x_0$  e raio  $\delta$ , ou seja,  $\gamma(t) \in \bar{B}_\delta(x_0)$ ,  $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ . Para tanto, veja que:

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}(\gamma)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s)) ds \right\| \\
&\leq M|t - t_0| \\
&< M\varepsilon \\
&\leq \delta
\end{aligned} \tag{12.2.3}$$

Portanto,  $\mathcal{F}(\gamma)(t) \in \bar{B}_\delta(x_0)$ ,  $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ .

A partir desses resultados podemos afirmar que  $\mathcal{F}$  é uma contração, isto é, existe  $\lambda < 1$  tal que  $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{X}$  temos que  $d(\mathcal{F}(\gamma_1), \mathcal{F}(\gamma_2)) \leq \lambda d(\gamma_1, \gamma_2)$ . Vamos verificar esse fato.

Por definição,

$$\begin{aligned}
d(\mathcal{F}(\gamma_1), \mathcal{F}(\gamma_2)) &= \|\mathcal{F}(\gamma_1)(t) - \mathcal{F}(\gamma_2)(t)\| \\
&= \left\| \int_{t_0}^t [\mathcal{F}(s, \gamma_1(s)) - \mathcal{F}(s, \gamma_2(s))] ds \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^t C \|\gamma_1(s) - \gamma_2(s)\| ds \quad [\text{usando a propriedade de Lipschitz}] \\
&\leq C|t - t_0|d(\gamma_1, \gamma_2) \\
&\leq C\varepsilon d(\gamma_1, \gamma_2) \\
&\leq \lambda d(\gamma_1, \gamma_2), \quad \forall (\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{X}
\end{aligned} \tag{12.2.4}$$

Seja o seguinte lema:

**Lema 12.2.1** (Ponto Fixo). *Se  $\mathcal{F}: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  é uma contração num espaço métrico completo, então existe um único  $\bar{z} \in \mathcal{X}$  tal que  $\mathcal{F}(\bar{z}) = \bar{z}$ . De fato,  $\bar{z} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}^n(x)$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$ .  $\bar{z}$  é o atrator global da aplicação  $\mathcal{F}$ .*

Aplicando o lema à nossa situação, temos que:

$$\exists^1 \bar{\gamma}: [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ com } \bar{\gamma}(t_0) = x_0 \text{ e } \bar{\gamma}(t) \in \bar{B}_\delta(x_0), \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \tag{12.2.5}$$

tal que  $\mathcal{F}(\bar{\gamma}) = \bar{\gamma}$ , isto é,

$$\bar{\gamma}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t \mathcal{F}(s, \bar{\gamma}(s)) ds, \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \tag{12.2.6}$$

A partir do resultado acima temos que  $\bar{\gamma}(t)$  é diferenciável pelo teorema fundamental do cálculo, o que implica que

$$\bar{\gamma}'(t) = F(t, \bar{\gamma}(t)), \quad \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \tag{12.2.7}$$

ou seja,  $\bar{\gamma}'(t)$  é solução da equação diferencial.

Agora, vamos provar a unicidade da solução da EDO.

Para tanto, suponha que haja duas soluções para a equação diferencial  $x' = F(t, x)$ , tais que:

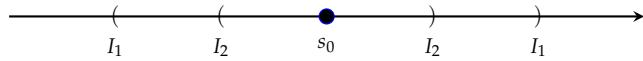
$$\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (12.2.8)$$

$$\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (12.2.9)$$

em que  $t_0 \in I_1 \cap I_2$  com  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0) = x_0$ .

Para mostrar que as duas soluções coincidem em quaisquer interseções do domínio vamos usar um argumento de conexidade. Seja  $J = \{t \in I_1 \cap I_2 : \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$ . Como  $t_0 \in J$  isso implica que  $J$  é não-vazio. Além disso sabemos que  $J$  é fechado, pois as funções  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$  são contínuas e o conjunto dos pontos onde duas funções contínuas coincidem é fechado.

Seja  $s_0 \in J$  e  $y_0 = \gamma_1(s_0) = \gamma_2(s_0)$ . Para  $(s_0, y_0)$ , usando o argumento anterior encontramos um  $\varepsilon > 0$  tal que  $\mathcal{F}_{s_0, y_0, \varepsilon}: \mathcal{X}_{s_0, y_0, \varepsilon} \rightarrow \mathcal{X}_{s_0, y_0, \varepsilon}$  tem um único ponto fixo. Observe que não estamos nos referindo a condição inicial.



Ora,  $\gamma_1: (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$  e  $\gamma_2: (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$  (funções  $\gamma(\cdot)$  restritas a esses domínios) estão em  $\mathcal{X}_{s_0, y_0, \varepsilon}$  e são pontos fixos de  $\mathcal{F}_{s_0, y_0, \varepsilon}$ . Sabemos que  $\gamma_j'(t) = F(t, \gamma_j(t))$ ,  $\forall t \in I_1$  e decorre do teorema fundamental do cálculo que

$$\gamma_j(t) = y_0 + \int_{s_0}^t F(s, \gamma_j(s))ds, \quad \forall t \in (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \quad (12.2.10)$$

Esse resultado implica que  $\gamma_j: (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$  é ponto fixo de  $\mathcal{F}_{s_0, y_0, \varepsilon}$ .

Portanto,  $\gamma_1: (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) = \gamma_2: (s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)$  e isso implica que as duas curvas coincidem em toda a vizinhança  $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset J$ . Logo,  $J$  é aberto e  $J = I_1 \cap I_2$ . ■

**Exemplo 12.2.2.** Seja  $x' = 2tx$  com  $t_0 = 0$  e  $x_0 = 1$ .

Lembre que a aplicação  $\mathcal{F}(\gamma)$  é dada por

$$\mathcal{F}(\gamma)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s))ds \quad (12.2.11)$$

No nosso exemplo específico,

$$\mathcal{F}(\gamma)(t) = 1 + \int_0^t 2s\gamma(s)ds \quad (12.2.12)$$

Tomamos  $\gamma_0(t) \equiv 1$ . Então,

$$\gamma_1(t) = \mathcal{F}(\gamma_0)(t) = 1 + \int_0^t 2sds = 1 + t^2 \quad (12.2.13)$$

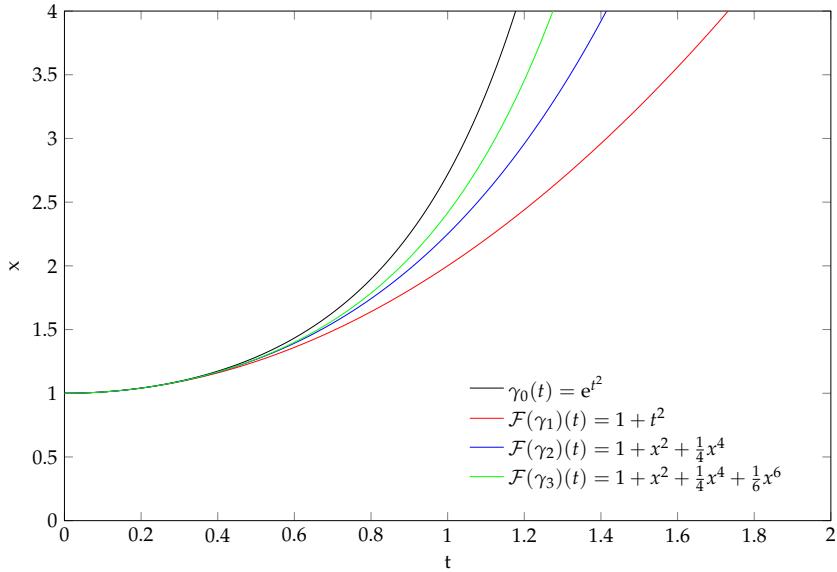
Vamos fazer uma segunda iteração,

$$\gamma_2(t) = \mathcal{F}(\gamma_1)(t) = 1 + \int_0^t 2s(1+s^2)ds = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} \quad (12.2.14)$$

Por indução,  $\gamma_n(t) = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6} + \dots + \frac{t^{2n}}{n!}$ .

Assim,  $\gamma(t) = e^{t^2}$ . E, de fato,  $\gamma'(t) = 2te^{t^2} = 2t\gamma(t)$ .

FIGURA 12.2.3 – ITERADOS DE PICARD



Por último, vamos discutir o aspecto de que  $\varepsilon < \frac{1}{C}$ . E qual a razão para isso? Se tivermos várias funções com várias condições iniciais, não somos capazes de uniformizar todas as constantes de Lipschitz. Muitas irão para infinito e gostaríamos que todas as funções tivessem a mesma constante de Lipschitz. Então precisamos achar um maneira de livrar-nos da restrição  $\varepsilon < \frac{1}{C}$ . Utilizamos essa restrição ao demonstrarmos que  $\mathcal{F}(\cdot)$  era uma contração. Vamos provar o mesmo aspecto sem impor a condição  $\varepsilon < \frac{1}{C}$ . No lugar disso, vamos utilizar um argumento mais fraco. Para tanto, sejam os seguintes lemas

**Lema 12.2.2.** Existe um inteiro  $k \geq 1$  tal que  $\mathcal{F}^k$  é uma contração.

**Lema 12.2.3.** Se existe  $k \geq 1$  nas condições do lema acima,  $\mathcal{F}$  tem um único ponto fixo.

Vamos a demonstração do Lema 12.2.2.

*Demonstração.* Seja

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}^k(\gamma_1)(t) - \mathcal{F}^k(\gamma_2)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^t [\mathcal{F}(s_1, \mathcal{F}^{k-1}(\gamma_1)(s_1)) - \mathcal{F}(s_1, \mathcal{F}^{k-1}(\gamma_2)(s_1))] ds_1 \right\| \\
&\leq \int_{t_0}^t C \|\mathcal{F}^{k-1}(\gamma_1)(s_1) - \mathcal{F}^{k-1}(\gamma_2)(s_1)\| ds_1 \\
&\leq \int_{t_0}^t C \left( \int_{t_0}^{s_1} C \|\mathcal{F}^{k-2}(\gamma_1)(s_2) - \mathcal{F}^{k-2}(\gamma_2)(s_2)\| ds_2 \right) ds_1 \\
&\leq \int_{t_0}^t C \left( \int_{t_0}^{s_1} C \left( \int_{t_0}^{s_2} C \|\mathcal{F}^{k-3}(\gamma_1)(s_3) - \mathcal{F}^{k-3}(\gamma_2)(s_3)\| ds_3 \right) ds_2 \right) ds_1 \\
&\vdots \\
&\leq \int_{t_0}^t C \int_{t_0}^{s_1} C \dots \int_{t_0}^{s_{k-1}} C \|\gamma_1(s_k) - \gamma_2(s_k)\| ds_k ds_{k-1} \dots ds_1 \\
&\leq C^k d(\gamma_1, \gamma_2) \left[ \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{s_1} \dots \int_{t_0}^{s_{k-1}} ds_k ds_{k-1} \dots ds_1 \right] \\
&\leq C^k d(\gamma_1, \gamma_2) \frac{(t - t_0)^k}{k!} \\
&\leq \frac{C^k \varepsilon^k}{k!} d(\gamma_1, \gamma_2)
\end{aligned} \tag{12.2.15}$$

Como o fatorial domina qualquer exponencial, temos que  $\frac{C^k \varepsilon^k}{k!} < 1$ . Logo,  $\mathcal{F}^k$  é uma contração. Isso prova o primeiro lema e significa que algum iterado de  $\mathcal{F}$  é uma contração e não necessariamente a primeira. ■

Vamos a demonstração do Lema 12.2.3.

*Demonstração.* Sempre que há uma transformação num espaço métrico completo e algum iterado dela é uma contração, então a  $\mathcal{F}$  tem um único ponto fixo. Dito de outra forma, se algum iterado da  $\mathcal{F}^k$  é uma contração, então  $\mathcal{F}^k$  também é, mas não necessariamente para a mesma métrica do espaço, mas sim para alguma métrica relacionada à métrica do espaço. Assim, vamos mostrar que se  $\mathcal{F}^k$  é contração em  $(\mathcal{X}, d)$ , então  $\mathcal{F}$  é contração em  $(\mathcal{X}, D)$  para alguma métrica (completa)  $D$  (também chamada métrica adaptada à transformação).

Para tanto, seja  $\lambda < 1$  tal que  $d(\mathcal{F}^k(\gamma_1), \mathcal{F}^k(\gamma_2)) \leq \lambda d(\gamma_1, \gamma_2)$ ,  $\forall \gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{X}$ .

Assuma que  $\lambda_0 = \lambda^{1/k}$  e

$$D(\gamma_1, \gamma_2) = d(\gamma_1, \gamma_2) + \lambda_0^{-1} d(\mathcal{F}(\gamma_1), \mathcal{F}(\gamma_2)) + \dots + \lambda_0^{-k+1} d(\mathcal{F}^{k-1}(\gamma_1), \mathcal{F}^{k-1}(\gamma_2)) \tag{12.2.16}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
D(\mathcal{F}(\gamma_1), \mathcal{F}(\gamma_2)) &= d(\mathcal{F}(\gamma_1), \mathcal{F}(\gamma_2)) + \lambda_0^{-1}d(\mathcal{F}^2(\gamma_1), \mathcal{F}^2(\gamma_2)) + \\
&\quad + \lambda_0^{-k+2}d(\mathcal{F}^{k-1}(\gamma_1), \mathcal{F}^{k-1}(\gamma_2)) + \dots + \lambda_0^{-k+1}d(\mathcal{F}^k(\gamma_1), \mathcal{F}^k(\gamma_2)) \\
&\leq \lambda_0^{-k+1}\lambda_0^k d(\gamma_1, \gamma_2) + d(\mathcal{F}(\gamma_1), \mathcal{F}(\gamma_2)) + \lambda_0^{-1}d(\mathcal{F}^2(\gamma_1), \mathcal{F}^2(\gamma_2)) + \dots + \\
&\quad + \lambda_0^{-k+2}d(\mathcal{F}^{k-1}(\gamma_1), \mathcal{F}^{k-1}(\gamma_2)) \\
&\leq \lambda_0 \left[ d(\gamma_1, \gamma_2) + \lambda_0^{-1}d(\mathcal{F}(\gamma_1), \mathcal{F}(\gamma_2)) + \dots + \lambda_0^{-k+1}d(\mathcal{F}^{k-1}(\gamma_1), \mathcal{F}^{k-1}(\gamma_2)) \right] \\
&= \lambda_0 D(\gamma_1, \gamma_2)
\end{aligned} \tag{12.2.17}$$

■

Resumindo, temos que, tomando  $\delta > 0$  tal que  $\bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0) \subset U$  e  $M = M_\delta = \sup_{\bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0)} \|F\|$  existe uma única solução  $\gamma: (t_0 - \varepsilon_0, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^d$  para qualquer  $0 < \varepsilon \leq \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M_\delta} \right\}$ .

Ainda, podemos extrair o seguinte corolário.

**Corolário 12.2.1.1.** *Se  $U = \mathbb{R}^{1+d}$  e  $F$  é limitada, então existe uma única solução  $\gamma: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$ .*

Desse corolário decorre que quando o campo de vetores  $F$  é limitado e o domínio é todo o espaço euclidiano a solução pode ser definida em toda a reta. Nesse caso, (i)  $\delta$  pode ser tomado arbitrariamente grande e (ii)  $M$  pode ser tomado independente de  $\delta$ . Isso implica que a função  $f(x, t)$  seja Lipschitziana na bola  $\bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0)$  para um  $\delta$  arbitrariamente grande.

Vamos estender uma parte do teorema de existência e unicidade. Para tanto, seja o seguinte teorema de existência de solução de EDOs.

**Teorema 12.2.2** (Teorema de Existência). *Seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  contínua em  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^{1+d}$ . Então, para todo  $(t_0, x_0) \in U$  existe alguma solução  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  de  $x' = F(t, x)$  com  $\gamma(t_0) = x_0$ .*

Seja o seguinte lema:

**Lema 12.2.4.** *Existem funções  $F_n: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^\infty$  tais que  $(F_n)_n \rightarrow F$  uniformemente em qualquer compacto de  $U$ .*

Dito de outra forma, esse lema (12.2.4) significa que qualquer função contínua pode ser aproximada uniformemente em compactos por aplicações diferenciáveis. Não necessariamente  $F$  tem derivada.

Consideremos as equações  $x' = F_n(t, x)$ . Como estamos no contexto de funções diferenciáveis podemos recorrer ao teorema de existência e unicidade. Dado qualquer  $(t_0, x_0) \in U$  existe uma solução  $\gamma: [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d$  solução da equação  $x' = F_n(t, x)$  com  $\gamma_n(t_0) = x_0$ .

Vamos utilizar, também, o seguinte lema:

**Lema 12.2.5.** *A sequência  $(\gamma_n)_n$  é equicontínua. Ou seja, para todo  $\alpha > 0$  existe um  $\beta > 0$ ,  $\forall n$ , (isto é, equicontinuidade) tal que para todo  $(t_1, t_2) \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  temos que  $|t_1 - t_2| \leq \beta$ , o que implica que  $|\gamma_n(t_1) - \gamma_n(t_2)| \leq \alpha$ .*

O lema acima (12.2.5) exige que o domínio de todas as curvas  $\gamma_n$  seja o mesmo. Note que as funções  $F_n$  são uniformemente limitadas e, portanto, Lipschitz. Desse lema decorre que  $\varepsilon$  pode ser tomado independente de  $n$ . Lembre que fixado  $\delta$  tal que  $\bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0) \subset U$  devemos tomar  $\varepsilon \leq \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M} \right\}$ . Observe que  $\delta$  não depende de  $n$ , mas  $M$  é um majorante para  $\|F_n\|$  restrito a  $\bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0) \subset U$ . Como  $(F_n)_n$  está convergindo para  $F$  uniformemente em  $\bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0) \subset U$ , temos que  $\sup |F_n - F| \rightarrow 0$  e podemos tomar  $M$  independente de  $n$ .

Todas as funções  $F_n$ , como são de classe  $C^\infty$ , são localmente Lipschitzianas e estão convergindo para uma função  $F$  que é contínua. Assim, a aproximação de  $F$  por essa sequência de funções  $(F_n)_n$  dependeria das constantes de Lipschitz que estariam indexadas em  $n$ . Então a estratégia adotada aqui visa “escapar” dessa restrição.

Logo, pelo teorema de Ascoli-Arzela, segue que existe uma subsequência  $(n_k)_k \rightarrow \infty$  tal que  $((\gamma_n)_k)_k$  converge para alguma função  $\gamma: [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d$  uniformemente em compactos<sup>2</sup>.

Até aqui temos que pode haver várias subsequências  $(n_k)_k \rightarrow \infty$  gerando limites distintos e, portanto, várias soluções para a EDO. O teorema não trata de unicidade de soluções de EDOs.

O que temos que argumentar é que qualquer  $\gamma$  obtido desta maneira é uma solução da equação original.

Para tanto, seja o seguinte lema.

**Lema 12.2.6.**  $\gamma$  é solução de  $x' = F(t, x)$ .

Observe que ao provarmos o teorema 12.2.1 utilizamos o argumento de ponto fixo. Aqui faremos usando o argumento de aproximação. Primeiro suavizamos o campo de vetores. Em segundo lugar, usaremos a propriedade de equicontinuidade para mostrar que o limite é uma solução de  $x' = F(t, x)$ .

Vamos provar os lemas.

*Prova do Lema 12.2.4.* Vamos usar a ideia de convolução.

Considere uma sequência  $h_n: \mathbb{R}^{1+d} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $h_n(s, y) \geq 0, \forall (s, y) \in \mathbb{R}^{1+d}$
2.  $h_n(s, y) = 0$  se  $\|(s, y)\| \geq \frac{1}{n}$
3.  $h_n \in C^\infty$
4.  $\int_{\mathbb{R}^{1+d}} h_n(s, y) ds = 1$

Definimos

$$F_n(t, x) = \int_{\mathbb{R}^{1+d}} h_n(s, y) F(t + s, x + y) ds dy \quad (12.2.18)$$

---

<sup>2</sup> Quando o domínio é compacto a convergência é uniforme; quando não o é, a convergência é uniforme em compactos.

Como a função  $h_n(s, y)$  se anula fora da bola  $B$  de raio  $\frac{1}{n}$  e centro na origem podemos reescrever o limite de integração da integral acima. Assim, teremos uma integral num domínio compacto com funções  $h_n(\cdot)$  e  $F(\cdot)$  contínuas e, portanto, bem definida, como segue abaixo:

$$\begin{aligned} F_n(t, x) &= \int_{\mathbb{R}^{1+d}} h_n(s, y) F(t + s, x + y) ds dy \\ &= \int_{\bar{B}_{1/n}(0)} h_n(s, y) F(t + s, x + y) ds dy \end{aligned} \quad (12.2.19)$$

Vamos fazer uma mudança de variáveis. Seja  $t + s = \tau$  e  $x + y = \xi$ .

$$\begin{aligned} F_n(t, x) &= \int_{\bar{B}_{1/n}(0)} h_n(s, y) F(t + s, x + y) ds dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{1+d}} h_n(\tau - t, \xi - x) F(\tau, \xi) d\tau d\xi \end{aligned} \quad (12.2.20)$$

Pela regra de Leibniz,  $F_n$  é tão derivável quanto  $h_n$ . Logo,  $F_n$  é  $C^\infty$ .

Agora, vamos mostrar que  $F_n$  converge para  $F$  em compactos. Para isso, sabendo que  $(t, x) \in K$  compacto contido em  $U$  e que  $\int_{\mathbb{R}^{1+d}} h_n(s, y) F(t, x) ds dy = 1$ , fazemos:

$$\begin{aligned} \|F_n(t, x) - F(t, x)\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}^{1+d}} h_n(s, y) [F(t + s, x + y) - F(t, x)] ds dy \right\| \\ &= \left\| \int_{\bar{B}_{1/n}(0)} h_n(s, y) [F(t + s, x + y) - F(t, x)] ds dy \right\| \end{aligned} \quad (12.2.21)$$

Como  $F$  é contínua, para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que para todo  $(t, x) \in K$ , então  $\|(s, y)\| \leq \delta$  implica que  $\|F(t + s, x + y) - F(t, x)\| \leq \varepsilon$  (continuidade uniforme).

Portanto, se  $n$  é suficientemente grande para que  $\frac{1}{n} \leq \delta$ , então:

$$\begin{aligned} \|F_n(t, x) - F(t, x)\| &\leq \left\| \int_{\bar{B}_{1/n}^{1+d}(0)} h_n(s, y) \varepsilon ds dy \right\| \\ &\leq \varepsilon, \forall (t, x) \in K \end{aligned} \quad (12.2.22)$$

Concluímos, assim, que  $(F_n)_n$  converge para  $F$  uniformemente em qualquer compacto. ■

*Prova do Lema 12.2.5.* Sabemos que

$$\gamma_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F_n(s, \gamma_n(s)) ds, \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \quad (12.2.23)$$

Vamos mostrar que todas as curvas  $\gamma_n(t)$  são todas Lipschitzianas com a mesma constante de Lipschitz. Assim, fazemos

$$\begin{aligned}
\gamma_n(t_1) - \gamma_n(t_2) &= \int_{t_2}^{t_1} F_n(s, \gamma_n(s)) ds \\
\|\gamma_n(t_1) - \gamma_n(t_2)\| &= \left\| \int_{t_2}^{t_1} F_n(s, \gamma_n(s)) ds \right\| \\
&\leq |t_1 - t_2| \sup_{\bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0)} \|F_n\| \\
&\leq M|t_1 - t_2|
\end{aligned} \tag{12.2.24}$$

Basta tomarmos  $\beta = \frac{\alpha}{M}$ . A sequência  $(\gamma_n)_n$  não somente é equicontínua, mas também é equi-Lipschitz, pois todas admitem a mesma constante  $M$  de Lipschitz. ■

*Prova do Lema 12.2.6.* Cada  $\gamma_n$  satisfaz  $\gamma_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F_n(s, \gamma_n(s)) ds$ ,  $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ . Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ x_0 + \int_{t_0}^t F_n(s, \gamma_n(s)) ds \right] \\
\gamma(t) &= x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s)) ds
\end{aligned} \tag{12.2.25}$$

pois  $\gamma_n$  converge pontual e uniformemente para  $\gamma$  em compactos,  $F_n$  converge para  $F$  uniformemente em compactos e as funções  $F_n$  e  $F$  são contínuas.

Logo,  $\gamma(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(s, \gamma(s)) ds$ ,  $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$  e, portanto, é uma solução de  $x' = F(x, t)$ . ■

Seja a condição abaixo:

$$F_n(t, x) = \int_{\mathbb{R}^{1+d}} h_n(s, y) F(t + s, x + y) ds dy \tag{12.2.26}$$

Se o ponto  $(t, x)$  estiver a uma distância do bordo de  $U$  menor que  $\frac{1}{n}$ , a expressão acima pode deixar de valer. Então, reescrevendo o espaço de integração, temos:

$$F_n(t, x) = \int_{\bar{B}_{1/n}(0)} h_n(s, y) F(t + s, x + y) ds dy \tag{12.2.27}$$

Para verificarmos esse aspecto, vamos modificar o Lema 12.2.4 como segue:

**Lema 12.2.7.** Existem funções  $F_n: U_n \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$  tais que  $(F_n)_n \rightarrow F$  uniformemente em qualquer compacto de  $U$  no seguinte sentido: dado qualquer compacto  $K \subset U$

1.  $U_n \supset K$  para todo  $n$  suficientemente grande

2.  $(F_n|K)_n \rightarrow (F|K)$  uniformemente

em que  $U_n = \left\{ (t, x) \in U : d((t, x), \partial U) > \frac{1}{n} \right\}$ , em que  $\partial U$  é o bordo de  $U$ .

O teorema de existência e unicidade para equações ordem qualquer diz:

**Teorema 12.2.3** (Teorema de Existência e Unicidade). Vamos enunciá-lo em dois itens.

1. Existência: seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  contínua,  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^{1+kd}$ , em que  $k$  é a ordem da equação diferencial, então para todo  $(t_0, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \in U$ , em que  $t_0 \in \mathbb{R}$  e  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) \in \mathbb{R}^d$ , existe uma curva  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^k$  tal que  $t_0 \in I$ ,  $\gamma(t_0) = x_0$ ,  $\gamma'(t_0) = x_1, \dots, \gamma^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1}$  e  $\gamma^{(k)}(t) = F(t, \gamma(t), \gamma'(t), \dots, \gamma^{(k-1)}(t))$ ,  $\forall t \in I$ .
2. Unicidade: se  $F$  é localmente Lipschitziana nas variáveis  $(x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$ , então, dada qualquer outra curva  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^d$  que satisfaça  $t_0 \in J$ ,  $\beta(t_0) = x_0$ ,  $\beta'(t_0) = x_1, \dots, \beta^{(k-1)}(t_0) = x_{k-1}$  e  $\beta^{(k)}(t) = F(t, \beta(t), \beta'(t), \dots, \beta^{(k-1)}(t))$   $\forall t \in J$ , tem-se que  $\gamma(t) = \beta(t)$ ,  $\forall t \in I \cap J$ .

Lembre-se que qualquer equação diferencial de ordem superior pode ser transformada em uma equação diferencial de primeira ordem, mas a dimensão irá aumentar. Vamos usar essa estratégia para provar o teorema acima. Antes, vamos fazer um exemplo.

**Exemplo 12.2.3.** Seja a seguinte equação  $x'' = -Cx$ , em que  $k = 2$  e  $d = 1$ . Fazendo  $x' = y$  podemos reescrever a equação como  $y' = -Cx$  tal que chegamos a:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} y \\ -Cx \end{pmatrix} \quad (12.2.28)$$

que é uma equação diferencial de primeira ordem ( $k = 1$  com  $d = 2$ ).

*Demonstração.* Seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  contínua,  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^{1+d}$ , e definimos a seguinte função:

$$G: U \rightarrow \mathbb{R}^{kd} \quad (12.2.29)$$

como  $G(t, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}) = (x_1, x_2, \dots, F(t, x_0, \dots, x_{k-1}))$ .

Se  $F$  é localmente Lipschitziana, então  $G$  também será. Assim, estaremos em condições de aplicar o teorema de existência e unicidade para  $G$ .

Uma curva  $C^k$  tal que  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  é solução de  $x^{(k)} = F(t, x, x', \dots, x^{(k-1)})$ , com  $(x, x', \dots, x^{(k-1)}) \in \mathbb{R}^d$ , se e somente se  $\Gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{kd}$  tal que  $t \mapsto (\gamma(t), \gamma'(t), \dots, \gamma^{(k-1)}(t))$  é solução da equação  $X' = G(t, X)$  em que  $X \in \mathbb{R}^{kd}$ . ■

## 12.3 Soluções Maxima

Os teoremas de existência e unicidade nos permitem (por continuação local) estender soluções locais até um intervalo maximal de tempo. Será que pode ser estendida a toda a reta  $\mathbb{R}$ ? Se não, por quê? Vamos considerar uma equação  $x' = F(t, x)$  em que  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  contínua com  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^{1+d}$  com  $(t_0, x_0) \in U$ .

Também seja o espaço  $\mathcal{S}_{t_0, x_0} = \left\{ \gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ soluções de } x' = F(t, x) \text{ tais que } \gamma(t_0) = x_0 \right\}$ .

**Definição 12.3.1.** Dadas as soluções  $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  nós dizemos que  $\gamma_1 \leq \gamma_2 \stackrel{d}{\iff} I_1 \subset I_2$  e  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t), \forall t \in I_1$ .

Esta notação tem as seguintes propriedades:

1. se  $\gamma_1 \leq \gamma_2$  e  $\gamma_2 \leq \gamma_3$ , então  $\gamma_1 \leq \gamma_3$  (transitividade)
2.  $\gamma \leq \gamma$  para todo  $\gamma \in \mathcal{S}_{t_0, x_0}$  (reflexividade)
3. se  $\gamma_1 \leq \gamma_2$  e  $\gamma_2 \leq \gamma_1$ , então  $\gamma_1 = \gamma_2$  (anti-simetria)

Em particular,  $\leq$  é uma relação de ordem parcial em  $\mathcal{S}_{t_0, x_0}$ . Dizemos parcial porque dados  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  em  $\mathcal{S}_{t_0, x_0}$  pode acontecer que nem  $\gamma_1 \leq \gamma_2$  nem  $\gamma_2 \leq \gamma_1$ . Um conjunto  $X \subset \mathcal{S}_{t_0, x_0}$  é dito totalmente ordenado se, dados quaisquer  $\gamma_1, \gamma_2 \in X$  temos  $\gamma_1 \leq \gamma_2$  ou  $\gamma_2 \leq \gamma_1$ , ou ambas.

**Definição 12.3.2.** Dizemos que  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  é elemento maximal de  $\mathcal{S}_{t_0, x_0}$  se não existe  $\gamma': I' \rightarrow \mathbb{R}^d$  em  $\mathcal{S}_{t_0, x_0}$  tal que  $\gamma \leq \gamma'$  e  $\gamma' \neq \gamma$ .

**Exemplo 12.3.1.** Vamos considerar uma situação em que  $U = \mathbb{R}^2$  com  $d = 1$  e  $F(t, x) = x^2$ . Observe que a equação é autônoma e  $F$  é localmente Lipschitziana e, portanto, diferenciável. Resolvendo a equação, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 \\ \frac{dx}{x^2} &= dt \\ -\frac{1}{x} &= t + C \\ x &= -\frac{1}{t+C} \end{aligned} \tag{12.3.1}$$

Com a condição inicial de que  $x(t_0) = x_0$ , temos que  $C = -\frac{1}{x_0} - t_0$ . Portanto,

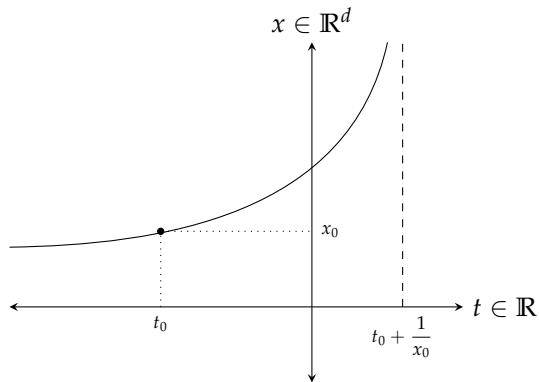
$$x(t) = -\frac{x_0}{(t-t_0)x_0 - 1} \tag{12.3.2}$$

Assim,  $x(t) = \frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0}$  é, pelo teorema de existência e unicidade, a única solução de  $F(t, x) = x^2$  tal que  $x(t_0) = x_0$ .

Em  $t = t_0 + \frac{1}{x_0}$  a função deixa de ser definida.

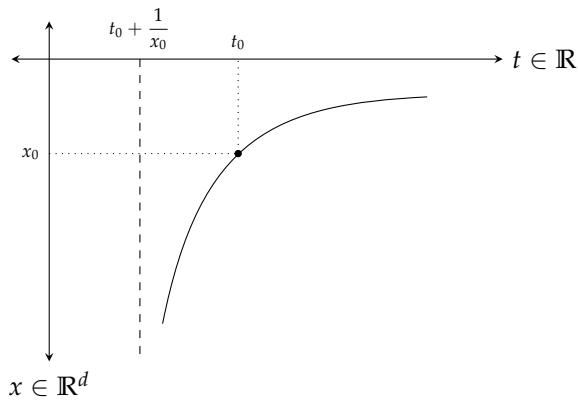
Vamos, agora, obter as soluções maximais de  $x' = x^2$  com  $x(t_0) = x_0$ .

1. Graficamente, supondo  $x_0 > 0$ , temos:



Assim, o domínio máximo de definição de  $x(t) = \frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0}$  é  $\gamma: \left(-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}\right) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\gamma(t) = \frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0}$ .

2. Graficamente, supondo  $x_0 < 0$ , temos:



Para  $x_0 < 0$  temos que o domínio máximo de definição de  $x(t) = \frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0}$  é  $\gamma: \left(t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty\right) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\gamma(t) = \frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0}$ .

3. Por fim, falta o caso em que  $x_0 = 0$ . Quando temos uma equação autônoma e um ponto onde o campo de vetores se anula, a curva constante igual a esse ponto é solução. Assim, o domínio máximo de definição de  $x(t) = \frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0}$  é  $\gamma: (-\infty, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\gamma(t) \equiv x_0$ .

Desta forma, obtemos as seguintes soluções com condição inicial  $x(t_0) = x_0$ :

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - (t - t_0)x_0} \text{ para todo } t \in \begin{cases} I = \left(-\infty, t_0 + \frac{1}{x_0}\right) & \text{se } x_0 > 0 \\ I = \mathbb{R} & \text{se } x_0 = 0 \\ I = \left(t_0 + \frac{1}{x_0}, +\infty\right) & \text{se } x_0 < 0 \end{cases} \quad (12.3.3)$$

**Teorema 12.3.1.** Para toda solução  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  existe alguma solução  $\gamma_0: I_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$  maximal tal que  $\gamma \leq \gamma_0$ .

Vamos usar esse teorema para encontrarmos maximais quando a função  $F(t, x)$  é localmente Lipschitziana.

Dizemos que  $x' = F(t, x)$  tem a propriedade de unicidade de soluções, se dadas soluções  $\gamma_1: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $\gamma_2: I_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$  com  $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ , tem-se  $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$ ,  $\forall t \in I_1 \cap I_2$ . Isso implica que se  $F$  é localmente Lipschitziana em  $x$ , então  $x = F(t, x)$  tem a propriedade de unicidade. Quando  $x' = F(t, x)$  tem a propriedade de unicidade o elemento maximal (máximo<sup>3</sup>) de  $S_{t_0, x_0}$  é

$$\Gamma: \bigcup_{\substack{\gamma: I_\gamma \rightarrow \mathbb{R}^d \\ S_{t_0, x_0}}} I \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (12.3.4)$$

Nesse contexto, a solução maximal é única.

Dito de outra forma, pegam-se todas as funções e se considera a união dos respectivos domínios e dado  $t \in I_\gamma \rightarrow \gamma(t)$  associa-se a imagem de  $t$  pela respectiva solução  $\gamma$ .

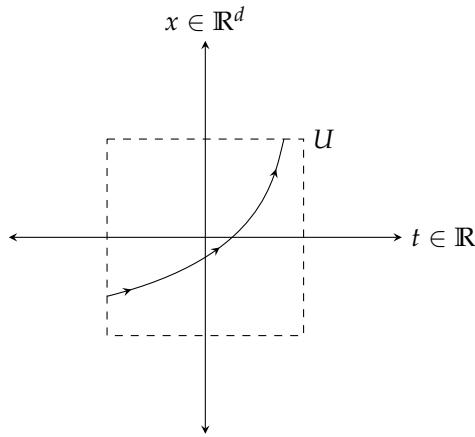
Agora, o que determina o domínio das soluções maximais? Temos que provar que as soluções maximais estão definidas em todo o tempo ou quando elas não estão definidas em todo o tempo. Vamos começar com um exemplo.

**Exemplo 12.3.2.** Seja o domínio  $U = (-1, 1) \times (-1, 1)$  e  $F(t, x) = x$ . Aqui queremos entender quais são as soluções maximais de  $x' = x$ .

Uma solução é  $x(t) = Ce^t$  com  $x_0 = Ce^{t_0}$  e, portanto,  $x(t) = x_0e^{(t-t_0)}$ .

---

<sup>3</sup> Note que quando se diz o elemento maximal há uma certa contradição porque os maximais não são necessariamente únicos. Quando se tem uma relação de ordem não há necessariamente unicidade.



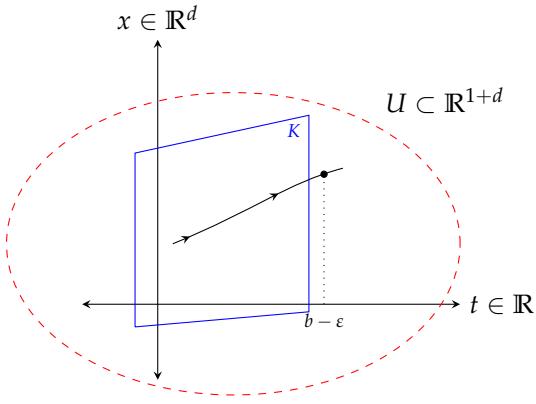
Assim,  $(t, \gamma(t)) \in U, \forall t \in I$ .

**Exemplo 12.3.3.** Seja  $F(t, x) = x^2$ . Aqui,  $U = \mathbb{R}^2$ . No entanto, as soluções maximais dessa equação não estão definidas para todo  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 12.3.2.** seja  $F(t, x)$  localmente Lipschitziana em  $x$ . Seja  $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$  solução maximal de  $x' = F(t, x)$ . Se  $b < +\infty$ , então  $\gamma(t) \rightarrow \partial(U)$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

Convergir para o bordo de  $U$  significa que para todo compacto  $K \subset U$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\forall t \in (b - \varepsilon, b)$ , temos que  $(t, \gamma(t)) \notin K$ . Graficamente, a partir do ponto  $b - \varepsilon$  a solução sai do conjunto compacto e não regressa mais, mesmo que o domínio  $U$  seja o espaço euclidiano completo.

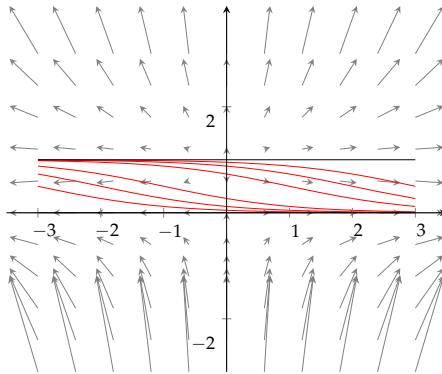
FIGURA 12.3.1 – CONVERGÊNCIA PARA O BORDO DE  $U$



Esse teorema também implica que se a solução de uma equação diferencial está toda contida em um conjunto compacto isto significa que ela está definida para todo tempo.

**Exemplo 12.3.4.** Seja  $F(t, x) = x(x - 1)$ . O campo de vetores segue abaixo.

FIGURA 12.3.2 – CAMPO DE VETORES PARA  $x' = x(x - 1)$



Para  $x_0 \in (0, 1)$ , temos os seguintes resultados:

1. A respectiva solução maximal é monótona decrescente.
2. De modo semelhante, a solução está definida para todo  $t \in (-\infty, +\infty)$ . Se o conjunto compacto fosse definido como  $K = [-\infty, b] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ , ou seja, escolhêssemos  $b < +\infty$ , então a solução não sairia desse compacto, o que é uma contradição.
3.  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = y_0$  existe com  $y \in [0, 1]$ . Vamos mostrar que esse limite é igual a 0. Para tanto, fazemos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma'(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t, \gamma(t)) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t)(\gamma(t) - 1) \\ &= y_0(y_0 - 1) \end{aligned} \tag{12.3.5}$$

Então, se  $y_0 > 0$ , então  $y_0(y_0 - 1) < 0$ , ou seja,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma'(t) < 0$ . Isso implicaria que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma(t) = -\infty$ . Logo,  $y_0 = 0$ .

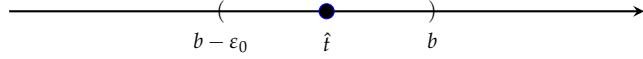
As soluções maximais para  $x_0 > 1$  não estão definidas para todo tempo. Elas convergem para infinito em tempo finito.

Vamos provar o teorema 12.3.2.

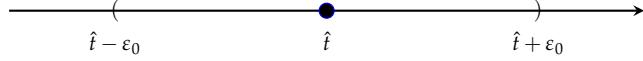
*Demonstração.* Vamos supor que  $\gamma: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma solução maximal com  $b < +\infty$ . O que queremos provar é que a solução, em algum momento, “escapa” definitivamente do conjunto compacto. Dado esse conjunto compacto  $K \subset U$ , fixamos  $\delta > 0$  tal que  $\bar{B}_{2\delta}(t_0) \times \bar{B}_{2\delta}(x_0) \subset U$  para todo  $(t_0, x_0) \in K$ . Ou seja, a distância entre qualquer ponto do compacto e o complementar de  $U$  é estritamente maior que  $\delta$ .

Sabemos que, tomando  $\varepsilon_0 = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M} \right\}$ , com  $M = \sup_{(t,x) \in \bar{B}_\delta(K)} \|F(t, x)\|$ , para todo  $(t_0, x_0) \in K$  existe uma solução  $\gamma_{t_0, x_0}: [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d$  de  $x' = F(t, x)$  com  $\gamma_{t_0, x_0}(t_0) = x_0$ .

Suponha que existe  $\hat{t} \in (b - \varepsilon_0, b)$  tal que  $(\hat{t}, \gamma(\hat{t})) \in K$ .



Usando o resultado anterior, com  $t_0 = \hat{t}$  e  $x_0 = \gamma(\hat{t})$ , podemos encontrar uma nova solução  $\hat{\gamma}: (\hat{t} - \varepsilon_0, \hat{t} + \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$  de  $x = F(t, x)$  com condição inicial  $t_0 = \hat{t}$  e  $x_0 = \gamma(\hat{t})$ .

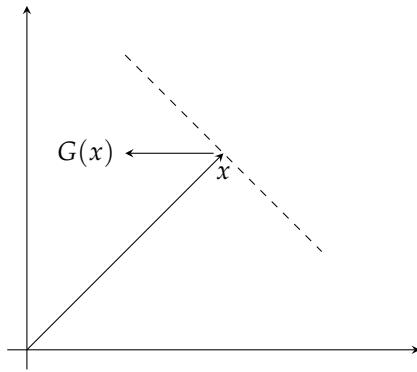


Observe que as duas soluções passam por  $\hat{t}$ . Por unicidade, as duas soluções ( $\gamma$  e  $\hat{\gamma}$ ) devem coincidir na interseção dos seus domínios e, portanto, podemos definir  $\Gamma: (a, b) \cup (\hat{t} - \varepsilon_0, \hat{t} + \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^d$  por  $\Gamma = \begin{cases} \gamma(t), & \text{se } t \in (a, b) \\ \hat{\gamma}(t), & \text{se } t \in (\hat{t} - \varepsilon_0, \hat{t} + \varepsilon_0) \end{cases}$ . Esta solução está bem definida, pois onde seus domínios se intersectam as duas expressões coincidem. Isto tudo significa que encontramos uma nova solução para a equação diferencial cujo domínio é estritamente maior do que o domínio da solução maximal. Então  $\gamma \leq \Gamma$  e  $\gamma \neq \Gamma$  porque  $\hat{t} + \varepsilon_0 > b$ . Porém, isso contradiz a hipótese de que  $\gamma$  é maximal. ■

**Exemplo 12.3.5.** Seja  $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^1$  tal que  $G(x) \cdot x < 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  com  $\|x\| > 1000$ .

Toda solução maximal de  $x' = G(x)$  está definida em  $(a, b)$  com  $b = +\infty$ .

Tomamos um ponto qualquer  $x \in \mathbb{R}^d$ . Seja a linha pontilhada o hiperplano ortogonal a  $x$  (o hiperplano dos vetores cujo produto interno com  $x$  seria 0). E o que significa  $G(x) \cdot x < 0$ ? Significa que  $G(x)$  aponta em sentido contrário a  $x$ . Graficamente, temos:



Lembre que  $G(x)$  indica a tangente às soluções. Assim, a norma de  $\gamma(t)$  deveria diminuir à medida que o tempo passa.

Tem-se que  $\frac{d\|\gamma(t)\|^2}{dt} < 0$ , em que  $\|\gamma(t)\|^2 = \gamma(t) \cdot \gamma(t)$ , sempre que  $\|\gamma(t)\| > 1000$ . Sabemos que

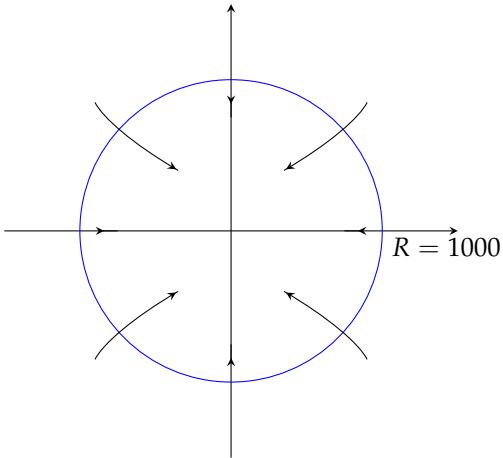
$$\frac{d\|\gamma(t)\|^2}{dt} = 2\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 2\gamma(t)G(\gamma(t)) < 0 \quad (12.3.6)$$

sempre que  $\|\gamma(t)\| > 1000$ .

Dito de outras forma, se considerarmos qualquer bola de raio  $R > 1000$  as soluções que passam por essa bola estão “entrando” na bola no sentido em que o quadrado da norma diminui.

Portanto, se  $\gamma: (a, b) \in \mathbb{R}^d$  é solução cruzando uma esfera  $B$  de centro 0 e raio  $R$  (notação:  $\partial B(0, R)$ ) com  $R > 1000$ , esse cruzamento é no sentido para dentro. Isto é,  $\gamma(t) \in \bar{B}(0, R)$  para todo  $t \geq t_0$ . Portanto,  $b = +\infty$ .

Assim, todas as soluções estão presas em algum conjunto compacto, ou seja, todas estão definidas até o tempo  $+\infty$ . E com as hipóteses apresentadas inicialmente não podemos dizer nada sobre o ponto  $a$ .



## 12.4 Dependência das Soluções em Relação às Condições Iniciais e Parâmetros

O nosso próximo objetivo será entender, de forma tão completa quanto possível, o modo como as soluções de uma equação diferencial dependem da própria equação. Para tanto, para formular o processo com precisão vamos utilizar famílias parametrizadas de equações diferenciais.

### 12.4.1 Teorema de Dependência Contínua

Seja  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^{1+d}$  e  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma aplicação  $(t, x) \mapsto F(t, x)$  contínua e localmente Lipschitziana na variável  $x$ . E seja  $V$  um aberto de  $\mathbb{R}^{1+d+p}$ , em que  $p$  é o número de parâmetros dos quais o campo de vetores depende, com  $G: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  contínua e localmente Lipschitziana na variável  $x$ , uma aplicação  $(t, x, \mu) \mapsto G(t, x, \mu)$ , sendo  $\mu$  os parâmetros.

**Teorema 12.4.1** (Dependência Contínua nas Condições Iniciais). *Para todo  $(t_0, x_0) \in U$  existe  $\theta > 0$  e  $\rho > 0$  tais que*

1. *para toda condição inicial  $(\bar{t}, \bar{x}) \in \bar{B}_\rho(t_0) \times \bar{B}_\rho(x_0)$  o domínio da solução maximal  $\gamma_{\bar{t}, \bar{x}}$  de  $x' = F(t, x)$  com  $x(\bar{t}) = \bar{x}$  contém o intervalo  $[\bar{t} - \theta, \bar{t} + \theta]$ .*

2. a aplicação  $(t, \bar{t}, \bar{x}) \mapsto \gamma_{\bar{t}, \bar{x}}(t)$  é contínua em  $\bar{B}_\theta(\bar{t}) \times \bar{B}_\rho(t_0) \times \bar{B}_\rho(x_0)$ .

O item (1) do teorema 12.4.1 significa que existe um tamanho mínimo para o domínio que é uniforme em toda a vizinhança da condição inicial. E o item (2) diz que a solução depende de maneira contínua de todos os dados do problema.

**Teorema 12.4.2** (Dependência Contínua em Parâmetros). *Para todo  $(t_0, x_0, \mu_0) \in V$  existe  $\theta > 0$  e  $\rho > 0$  tais que*

1. para todo  $\mu \in \bar{B}_\rho(\mu_0)$  o domínio da solução maximal  $\gamma_\mu$  de  $x' = G(t, x, \mu)$  com  $x(t_0) = x_0$  contém o intervalo  $[t_0 - \theta, t_0 + \theta]$ .
2. a aplicação  $(t, \mu) \mapsto \gamma_\mu(t)$  é contínua em  $\bar{B}_\theta(t_0) \times \bar{B}_\rho(\mu_0)$ .

Vamos provar o teorema 12.4.2 e deduzir o teorema 12.4.1.

*Demonstração.* Vamos provar o item (1) do teorema 12.4.2.

Fixemos  $\delta > 0$  tal que  $\bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0) \times \bar{B}_\delta(\mu_0) \subset V$  e seja  $M = \sup \{\|G(t, x, \mu)\| : (t, x, \mu) \in \bar{B}_\delta(t_0) \times \bar{B}_\delta(x_0) \times \bar{B}_\delta(\mu_0)\}$ .

Pela prova do teorema de existência e unicidade se tomarmos  $\varepsilon = \min \left\{ \delta, \frac{\delta}{M} \right\}$ , a solução  $\gamma_\mu$  de  $x' = G(t, x, \mu)$  com  $x(t_0) = x_0$  está definida em todo o intervalo  $\gamma_\mu : [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}^d$  para todo  $\mu \in \bar{B}_\delta(\mu_0)$ .

Tomando qualquer  $\theta < \varepsilon$  e, como queremos  $\mu \in \bar{B}_\rho(\mu_0)$ , fazemos  $\rho = \delta$  e, assim, obtemos o item (1) do teorema.

Vamos provar o item (2) do teorema 12.4.2.

Suponhamos que existem  $(\bar{t}, \bar{\mu}) \in \bar{B}_\theta(t_0) \times \bar{B}_\rho(\mu_0)$  e uma sequência  $(t_k, \mu_k)_k \rightarrow (\bar{t}, \bar{\mu})$  tal que  $(\gamma_{\mu_k}(t_k))_k \not\rightarrow \gamma_{\bar{\mu}}(\bar{t})$ .

Tomando subsequências se necessário, podemos supor que  $(\gamma_{\mu_k}(t_k))_k$ , contido em um compacto, converge para algum ponto  $y \neq \gamma_{\bar{\mu}}(\bar{t})$  com  $y \in \mathbb{R}^d$ .

**Lema 12.4.1.** A família de soluções  $\{\gamma_\mu : [t_0 - \theta, t_0 + \theta] \rightarrow \mathbb{R}^d\}$  é equicontínua.

*Demonstração.* Dados  $t_1, t_2 \in [t_0 - \theta, t_0 + \theta]$  e  $\mu \in \bar{B}_\rho(\mu_0)$ , sabemos a partir da prova do teorema de existência e unicidade que

$$\gamma_\mu(t_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} G(s, \gamma_\mu(s), \mu) ds \quad (12.4.1)$$

$$\gamma_\mu(t_2) = x_0 + \int_{t_1}^{t_2} G(s, \gamma_\mu(s), \mu) ds \quad (12.4.2)$$

Portanto,

$$\|\gamma_\mu(t_1) - \gamma_\mu(t_2)\| = \left\| \int_{t_1}^{t_2} G(s, \gamma_\mu(s), \mu) ds \right\| \leq |t_1 - t_2| M \quad (12.4.3)$$

Esse resultado mostra que essa família não somente é equicontínua, mas também é equi-Lipschitz. Observe que  $M$  está fixado e não depende nem de  $t_1$  ou  $t_2$  ou  $\mu$  desde que  $\mu \in \bar{B}_\rho(\mu_0)$ . Assim, provamos a afirmação acima.

Logo, pelo teorema de Ascoli-Arzela, existe alguma subsequência  $(k_j)_j \rightarrow \infty$  tal que  $(\gamma_{\mu_{k(j)}})_j$  converge uniformemente para alguma  $\bar{\gamma}: [t_0 - \theta, t_0 + \theta] \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

■

**Lema 12.4.2.**  $\bar{\gamma}$  é solução de  $x' = G(t, x, \bar{\mu})$  com  $x(t_0) = x_0$ .

*Demonstração.* Seja  $\gamma_{\mu_{k(j)}}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t G(s, \gamma_{\mu_{k(j)}}(s), \mu_{k(j)}) ds, \forall j, t$ .

Então, sendo  $G(\cdot)$  uma função e contínua e tendo que  $\gamma_{\mu_{k(j)}}(t) \rightarrow \bar{\gamma}(t)$  uniformemente,  $\mu_{k(j)} \rightarrow \bar{\mu}$ , obtemos:

$$\bar{\gamma}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t G(s, \bar{\gamma}(s), \bar{\mu}) ds \quad (12.4.4)$$

Então, a curva  $\bar{\gamma}: [t_0 - \theta, t_0 + \theta] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , que foi obtida como o limite uniforme, satisfaz (12.4.4).

Logo,  $\bar{\gamma}$  é solução de  $x' = G(t, x, \bar{\mu})$  com  $x(t_0) = x_0$ , isto é,  $\bar{\gamma} = \gamma_{\bar{\mu}}$ .

Em outras palavras, a sequência  $(\gamma_{\mu_{k(j)}})_j$  converge uniformemente para  $\gamma_{\bar{\mu}}$ .

Mas se  $(\gamma_{\mu_{k(j)}})_j \rightarrow \gamma_{\bar{\mu}}$  e  $(t_{k(j)})_j \rightarrow \bar{t}$ , então  $(\gamma_{\mu_{k(j)}}(t_{k(j)}))_j \rightarrow \gamma_{\bar{\mu}}(\bar{t})$ .

Por outro lado,  $(\gamma_{\mu_{k(j)}}(t_{k(j)}))_j$  por ser uma subsequência de  $(\gamma_{\mu_k}(t_k))_k$  converge para  $y \neq \gamma_{\bar{\mu}}(\bar{t})$ . Porém, isso é uma contradição.

■

■

Agora vamos deduzir o teorema 12.4.1 a partir do teorema 12.4.2. A pergunta interessante é: por que o teorema 12.4.2 leva ao teorema 12.4.1? Dito de outra forma, como podemos traduzir o problema de dependência contínua em condições iniciais como uma questão de dependência contínua em parâmetros? Grosseiramente, podemos “pegar” a equação diferencial em  $\bar{t}$  e  $\bar{x}$  e transladá-la, de modo a pôr  $\bar{t}$  na posição do  $t_0$  e  $\bar{x}$  na posição de  $x_0$ . Claro que com a translação a função  $F$  muda e um novo parâmetro aparece na equação diferencial. Vamos formalizar essa ideia.

*Demonstração.* Dada  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , com  $t \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ , seja também  $s \in \mathbb{R}$ , e  $y \in \mathbb{R}^d$ , considere  $V = \{(t, x, s, y): (t + s, x + y) \in U\}$ . Vamos definir  $G: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  como  $G(t, x, s, y) = F(t + s, x + y)$

Sejam as seguintes equações:

$$\begin{cases} x' = F(t, x) \\ x(\bar{t}) = \bar{x} \end{cases} \quad (12.4.5)$$

e

$$\begin{cases} x' = G(t, x, s, y) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (12.4.6)$$

Vamos relacionar as equações (12.4.5) e (12.4.6) da seguinte forma:  $s = \bar{t} - t_0$  e  $y = \bar{x} - x_0$ . Aqui,  $s$  e  $y$  são as translações usadas. Em (12.4.5) fixamos a equação diferencial e mudamos a condição inicial, enquanto em (12.4.6) fixamos as condições iniciais e mudamos a equação diferencial.

Seja  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  solução do problema (12.4.5). E consideremos  $\beta(t) = \gamma(t + s) - y$  com  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^d$ , em que  $J = I - s = \{t - s: t \in I\}$ , isto é,  $t$  tem que ser escolhido de tal maneira que a soma com  $s$  ainda pertença a  $I$ . Assim, dada uma solução do problema em (12.4.5), transladamos o tempo de  $s$  e a curva de  $y$  e chamamos essa translação de  $\beta$ .

**Lema 12.4.3.**  $\beta(t)$  é solução de (12.4.6).

*Demonstração.* Temos que

$$\begin{aligned} \beta(t_0) &= \gamma(t_0 + s) - y \\ &= \gamma(\bar{t}) - y \\ &= \bar{x} - y \\ &= x_0 \end{aligned} \quad (12.4.7)$$

e

$$\begin{aligned} \beta'(t) &= \gamma'(t + s) \\ &= F(t + s, \gamma(t + s)) \\ &= F(t + s, \beta(t) + y) \\ &= G(t, \beta(t), s, y) \end{aligned} \quad (12.4.8)$$

■

Reciprocamente, se  $\beta: J \rightarrow \mathbb{R}^d$  é solução de (12.4.6), então  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por  $\gamma(t) = (t - s) + y$  com  $I = J + s$  é solução de (12.4.5).

Pelo Teorema 12.4.2, existem  $\theta > 0$  e  $\rho > 0$  tais que podemos tomar  $J = [t_0 - \theta, t_0 + \theta]$  qualquer que seja  $(s, y) \in \bar{B}_\rho(0, 0)$ . Portanto, podemos tomar  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  solução de (12.4.5) com  $I = [t_0 - \theta, t_0 + \theta] + s = [\bar{t} - \theta, \bar{t} + \theta]$ , conforme item (1) do teorema 12.4.1.

Além disso, pelo teorema 12.4.2,  $(t, s, y) \mapsto \beta(t)$  é contínua.

Portanto,  $(t, \bar{t}, \bar{x}) \mapsto \gamma(t) = \beta(t - s) + y = \beta(t - \bar{t} + t_0) + (x - x_0)$  é contínua, conforme item (2) do teorema 12.4.1.

■

**Teorema 12.4.3** (Dependência Contínua nas Condições Iniciais para Soluções Maximais (Global)).  
Dado  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  contínua e localmente Lipschitziana em  $x$ , seja

$$\mathcal{D} = \left\{ (t, t_0, x_0) \in \mathbb{R}^{2+d} : t \text{ pertence ao domínio da solução maximal } \gamma_{t_0, x_0} \text{ de } x' = F(t, x) \text{ com } x(t_0) = x_0 \right\}$$

Então,

1.  $\mathcal{D}$  é um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^{2+d}$
2.  $\frac{\mathcal{D}}{(t, t_0, x_0) \mapsto \gamma_{t_0, x_0}(t)} \rightarrow \mathbb{R}^d$  é contínua.

**Teorema 12.4.4** (Dependência Contínua em Parâmetros para Soluções Maximais (Global)).  
Suponhamos  $G: V \rightarrow \mathbb{R}^d$  contínua e localmente Lipschitziana em  $x$ . Dado  $(t_0, x_0, \mu_0) \in V$ , seja

$$\mathcal{D}_{t_0, x_0} = \left\{ (t, \mu) \in \mathbb{R}^{1+p} : t \text{ pertence ao domínio da solução maximal } \gamma_\mu \text{ de } x' = G(t, x, \mu) \text{ com } x(t_0) = x_0 \right\}$$

Então,

1.  $\mathcal{D}_{t_0, x_0}$  é um conjunto aberto
2.  $\frac{\mathcal{D}}{(t, \mu) \mapsto \gamma_\mu(t)} \rightarrow \mathbb{R}^{1+p}$  é contínua.

De modo semelhante ao observado anteriormente, o teorema 12.4.3 é uma consequência do teorema 12.4.4. Apesar da relevância de se saber da continuidade das soluções em relação às condições iniciais e parâmetros, convém também obter cotas para a velocidade com que duas soluções possam se separar ao longo do tempo. Isso é obtido através de hipóteses adicionais sobre a aplicação  $f$  que expressa a equação diferencial. Basicamente, é possível mostrar que se  $f = f(t, x)$  é Lipschitz em relação a  $x$ , então para intervalos compactos de tempo, as soluções são Lipschitz em relação a  $x_0$ . Para obtermos tal resultado, necessitamos do seguinte lema:

Vamos enunciar o lema de Gronwall de duas maneiras diferentes.

**Lema 12.4.4** (Lema de Gronwall). Seja  $\alpha > 0$  e  $\beta > 0$ , e seja  $V: [t_0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável tal que  $V'(t) \leq \alpha V(t) + \beta(t)$ ,  $\forall t \in [t_0, t_2]$  com  $V(t_0) = 0$ . Então,  $V(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} \left[ e^{\alpha(t-t_0)} - 1 \right]$ ,  $\forall t \in [t_0, t_2]$ .

**Lema 12.4.5** (Lema de Gronwall). Seja  $u: [t_0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua tal que  $u(t) \leq \int_{t_0}^t (\alpha u(s) + \beta) ds$ ,  $\forall t \in [t_0, t_2]$ . Então,  $u(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} \left[ e^{\alpha(t-t_0)} - 1 \right]$ ,  $\forall t \in [t_0, t_2]$ .

*Demonstração.* Vamos focar na segunda versão do Lema de Gronwall.

Seja  $u: [t_0, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$u(t) \leq \underbrace{\int_{t_0}^t (\alpha u(s) + \beta) ds}_{V(t)} \quad (12.4.9)$$

Então,  $u(t) \leq V(t)$  e  $V'(t) = \alpha u(t) + \beta \leq \alpha V(t) + \beta$ . Também,

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} V'(t) - e^{-\alpha t} \alpha V(t) &\leq \beta e^{-\alpha t} \\ [e^{-\alpha t} V(t)]' &\leq \left[ -\frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]', \forall t \in [t_0, t_2] \end{aligned} \quad (12.4.10)$$

Assim, em  $t = t_0$ , temos que  $e^{-\alpha t} V(t) \leq 0$  e  $-\frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha t} = -\frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha t_0}$ . Como consequência,

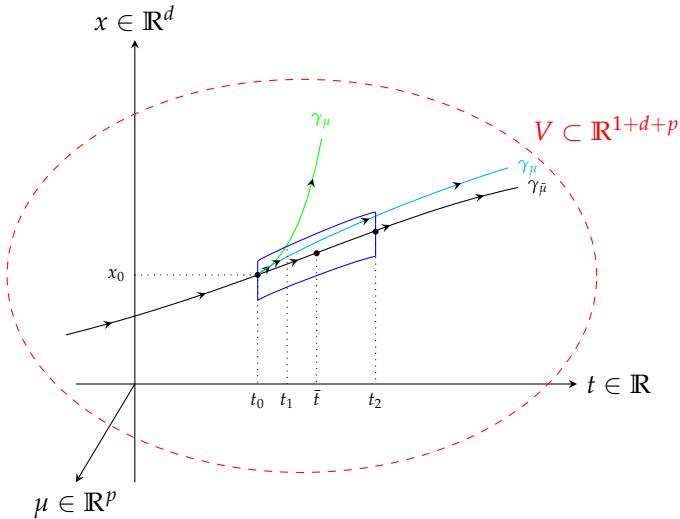
$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} V(t) - e^{-\alpha t_0} V(t_0) &\leq -\frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha} e^{-\alpha t_0} \\ V(t) &\leq \frac{\beta}{\alpha} [e^{\alpha(t-t_0)} - 1] + e^{\alpha(t-t_0)} V(t_0) \\ u(t) &\leq V(t) \leq \frac{\beta}{\alpha} [e^{\alpha(t-t_0)} - 1] \end{aligned} \quad (12.4.11)$$

■

Vamos provar o teorema 12.4.4. Consideremos o caso em que  $\bar{t} \geq t_0$ .

*Demonstração.* Vamos provar o item (1) do teorema 12.4.4.

FIGURA 12.4.1 – TEOREMA DA DEPENDÊNCIA CONTÍNUA



Vamos provar que  $\mathcal{D}_{t_0, x_0}$  é um conjunto aberto. Consideremos  $(\bar{t}, \bar{\mu}) \in \mathcal{D}_{t_0, x_0}$ . Fixemos  $t_2 > \bar{t}$  tal que  $[t_0, t_2]$  pertence ao domínio de  $\gamma_{\bar{\mu}}$ . Seja  $\rho > 0$  e considere o conjunto compacto  $K = \{(t, x, \mu) : t \in [t_0, t_2], \|x - \gamma_{\bar{\mu}}(t)\| \leq \rho \text{ e } \mu \in \bar{B}_\rho(\bar{\mu})\}$  (tubo azul na figura acima).

Qual a proposta com isso? Queremos mostrar que se modificarmos o parâmetro  $\mu$  a respectiva solução ainda estará contida dentro desse conjunto compacto. E como podemos fazer isso? Pelo lema de Gronwall as duas soluções não podem se afastar muito uma da outra. Mas o domínio da nova curva poderia se reduzir e estar definido em um intervalo que não contivesse  $t_2$ ? Isso não pode acontecer porque quando uma solução não está definida para todo o tempo ela precisa “sair” de todo o compacto. E pelo lema de Gronwall ela precisará estar definida em todo o tempo para passar por  $t_2$  e sair do conjunto compacto.

Considere  $\alpha > 0$  tal que  $\|G(t, x_1, \mu) - G(t, x_2, \mu)\| \leq \alpha \|x_1 - x_2\|$  para todo  $(t, x_1, \mu) \in K$  e  $(t, x_2, \mu) \in K$ . Observe que  $\alpha$  é uma constante de Lipschitz para  $G(\cdot)$  no compacto  $K$ . Lembre que  $G$  é localmente Lipschitziana em  $x$ .

Pela noção de continuidade uniforme, escolhemos  $\beta > 0$  pequeno tal que  $\frac{\beta}{\alpha} [\mathrm{e}^{\alpha(t_2-t_0)} - 1] < \rho$ . Então, existe  $\delta > 0$  ( $\delta \leq \rho$ ) tal que  $\|G(t, x, \mu) - G(t, x, \bar{\mu})\| < \beta$  se  $\mu \in \bar{B}_\delta(\bar{\mu})$  para todo  $(t, x, \mu) \in K$  e  $(t, x, \bar{\mu}) \in K$ .

Sabe-se que

$$\gamma_{\bar{\mu}}(t) = x_0 + \int_{t_0}^t G(s, \gamma_{\bar{\mu}}(s), \bar{\mu}) ds \quad (12.4.12)$$

$$\gamma_\mu(t) = x_0 + \int_{t_0}^t G(s, \gamma_\mu(s), \mu) ds \quad (12.4.13)$$

e seja  $t_1 \in [t_0, t_2]$  máximo tal que  $\|\gamma_\mu(t) - \gamma_{\bar{\mu}}(t)\| \leq \rho$ ,  $\forall t \in [t_0, t_1]$ .

Portanto,

$$\begin{aligned} \|\gamma_{\bar{\mu}}(t) - \gamma_\mu(t)\| &\leq \left\| \int_{t_0}^t [G(s, \gamma_{\bar{\mu}}(s), \bar{\mu}) - G(s, \gamma_{\bar{\mu}}(s), \mu)] ds \right\| + \\ &\quad + \left\| \int_{t_0}^t [G(s, \gamma_{\bar{\mu}}(s), \mu) - G(s, \gamma_\mu(s), \mu)] ds \right\| \\ &\leq \int_{t_0}^t \beta ds + \int_{t_0}^t \alpha \|\gamma_{\bar{\mu}}(s) - \gamma_\mu(s)\| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t [\alpha \|\gamma_{\bar{\mu}}(s) - \gamma_\mu(s)\| + \beta] ds, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \end{aligned} \quad (12.4.14)$$

Logo, pelo Lema de Gronwall

$$\|\gamma_{\bar{\mu}}(t) - \gamma_\mu(t)\| \leq \frac{\beta}{\alpha} [\mathrm{e}^{\alpha(t_2-t_0)} - 1] < \rho, \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (12.4.15)$$

Esse resultado nos dá uma cota superior, um majorante, para o quanto afastadas as duas

soluções podem estar.

Porém, em  $t_1$  a solução (verde) está estritamente dentro do tubo. Poderíamos prolongar a solução em torno de uma vizinhança e ela ainda estaria dentro do tubo, o que seria uma contradição com a definição de que  $t_1$  é o máximo. Isso implica que  $t_1 = t_2$  desde que  $\mu \in \bar{B}_\delta(\bar{\mu})$ .

Isso prova que  $[t_0, t_2]$  está contido no domínio de  $\gamma_\mu$  para  $\mu \in \bar{B}_\delta(\bar{\mu})$ .

Portanto,  $[t_0, t_2] \times \bar{B}_\delta(\bar{\mu}) \subset \mathcal{D}_{t_0, x_0}$ . E o domínio  $[t_0, t_2] \times \bar{B}_\delta(\bar{\mu})$  contém uma vizinhança de  $(\bar{t}, \bar{\mu})$ , pois  $\bar{t} \in [t_0, t_2]$ . Logo, provamos que  $\mathcal{D}_{t_0, x_0}$  é um conjunto aberto. E dizer que  $\mathcal{D}_{t_0, x_0}$  é um conjunto aberto significa que o domínio da solução maximal (o intervalo de tempo) varia de modo semicontínuo (inferior) com os parâmetros/condições iniciais, ou seja, uma perturbação nos parâmetros/condições iniciais não pode ser um domínio muito menor do que o original, mas pode ter um domínio muito maior.

Vamos provar o item (2) do teorema 12.4.4. Para tanto, fazemos:

$$\begin{aligned}\|\gamma_\mu(t) - \gamma_{\bar{\mu}}(\bar{t})\| &\leq \|\gamma_\mu(t) - \gamma_{\bar{\mu}}(t)\| + \|\gamma_{\bar{\mu}}(t) - \gamma_{\bar{\mu}}(\bar{t})\| \\ &\leq \rho + \rho \\ &\leq 2\rho\end{aligned}\tag{12.4.16}$$

em que para o primeiro termo exige-se que  $\mu \in \bar{B}_\delta(\bar{\mu})$ , enquanto que para o segundo termo as funções são contínuas e exige-se que  $t$  esteja próximo de  $\bar{t}$ .

Como  $\rho$  é uma constante arbitrariamente pequena, a continuidade está provada. ■

## 12.4.2 Teorema de Dependência Diferenciável

Agora vamos enunciar e provar o Teorema de Dependência Diferenciável, que estende a conclusão dos teoremas 12.4.1-12.4.4 para o contexto diferenciável.

**Teorema 12.4.5** (Dependência Diferenciável em Parâmetros). *Seja  $G: V \xrightarrow{(t,x,\mu) \mapsto G(t,x,\mu)} \mathbb{R}^d$ ,  $V \subset \mathbb{R}^{1+d+p}$  aberto, contínua e de classe  $C^1$  em  $x$  e  $\mu$ . Dado qualquer  $(t_0, x_0, \mu_0) \in V$  defina  $\mathcal{D} = \{(t, \mu): t \text{ pertence ao domínio da solução maximal } \gamma_\mu \text{ de } x' = G(t, x, \mu) \text{ com } x(t_0) = x_0\}$ . Então, a aplicação  $(t, \mu) \mapsto \gamma_\mu(t)$  é de classe  $C^1$  em  $\mu$ . Além disso,  $\partial_\mu \gamma_\mu(t)$  é solução de  $\partial_t (\partial_\mu \gamma_\mu(t)) = X' = \partial_x G(t, \gamma_\mu(t), \mu)X + \partial_\mu G(t, \gamma_\mu(t), \mu)$  com  $X(t_0) = 0$ .*

Observe que  $\gamma_\mu(t)$  assume valores em  $\mathbb{R}^d$ . E  $\partial_\mu \gamma_\mu(t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^d)$  é uma aplicação linear de  $\mathbb{R}^p$  em  $\mathbb{R}^d$ , em que  $\partial_\mu \gamma_\mu(t) = \begin{pmatrix} \partial_{\mu^1} \gamma_\mu^1(t) & \partial_{\mu^2} \gamma_\mu^1(t) & \dots & \partial_{\mu^p} \gamma_\mu^1(t) \\ \partial_{\mu^1} \gamma_\mu^2(t) & \partial_{\mu^2} \gamma_\mu^2(t) & \dots & \partial_{\mu^p} \gamma_\mu^2(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{\mu^1} \gamma_\mu^d(t) & \partial_{\mu^2} \gamma_\mu^d(t) & \dots & \partial_{\mu^p} \gamma_\mu^d(t) \end{pmatrix}$ . Além disso,

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^d) \simeq \mathbb{R}^{pd}$ , ou seja,  $\mathcal{L}$  é um isomorfismo (é uma aplicação injetora e bijetora).

Com relação ao teorema propriamente dito, em outras palavras, se o campo de vetores  $G$  é diferenciável no espaço ( $x$ ) e nos parâmetros ( $\mu$ ), então as soluções são diferenciáveis nos parâmetros.

Em relação ao segundo ponto do teorema, temos que:

$$\frac{d}{dt} (\partial_\mu \gamma_\mu(t)) = \partial_x G(t, \gamma_\mu(t), \mu) (\partial_\mu \gamma_\mu(t)) + \partial_\mu G(t, \gamma_\mu(t), \mu) \quad (12.4.17)$$

$$\text{com } \left. \partial_\mu \gamma_\mu(t) \right|_{t=t_0} = 0.$$

Disso decorre o seguinte corolário.

**Corolário 12.4.5.1.** Se  $G$  é de classe  $C^k$  em  $x$  e em  $\mu$ , então a aplicação  $(t, \mu) \mapsto \gamma_\mu(t)$  é  $C^k$  em  $\mu$ .

**Teorema 12.4.6** (Dependência Diferenciável nas Condições Iniciais). Seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $U \subset \mathbb{R}^{1+d}$  aberto, contínua e de classe  $C^1$  em  $x$ . Dado qualquer  $(t_0, x_0) \in U$  defina-se  $\mathcal{D} = \{(t, t_0, x_0) : t \text{ pertence ao domínio da solução maximal } \gamma_{t_0, x_0} \text{ de } x' = F(t, x) \text{ com } x(t_0) = x_0\}$ . Então, a aplicação  $(t, t_0, x_0) \mapsto \gamma_{t_0, x_0}(t)$  é de classe  $C^1$  em  $x_0$ . Além disso,  $\partial_{x_0} \gamma_{t_0, x_0}(t)$  é solução de  $X' = \partial_x F(t, \gamma_{t_0, x_0}(t))X$  com  $X(t_0) = \mathcal{I}$ , em que  $\mathcal{I}$  é a matriz identidade.

Observe que  $\gamma_{t_0, x_0}(t)$  assume valores em  $\mathbb{R}^d$  com  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ . E  $\partial_{x_0} \gamma_{t_0, x_0}(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \simeq \mathbb{R}^{d^2}$  é uma aplicação linear de  $\mathbb{R}^d$  em  $\mathbb{R}^d$ .

Disso decorre o seguinte corolário.

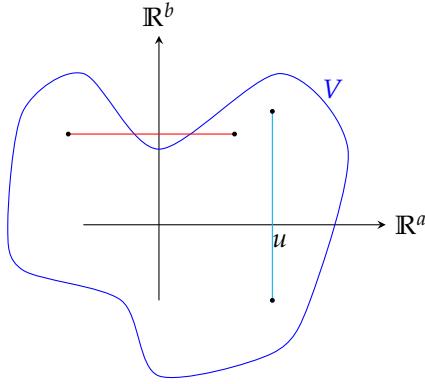
**Corolário 12.4.6.1.** Se  $F$  é de classe  $C^k$  em  $x$ , então a aplicação  $\gamma_{t_0, x_0}(t)$  é  $C^k$  em  $x_0$ .

Seja o seguinte lema.

**Lema 12.4.6** (Lema de Hadamard). Seja  $g: V \rightarrow \mathbb{R}^c$ ,  $V \subset \mathbb{R}^{a+b}$ , conexo e convexo na segunda variável. Suponhamos que  $g$  é de classe  $C^1$  na segunda variável. Então, existem funções  $h_1(u, v_0, v_1), \dots, h_b(u, v_0, v_1)$  contínuas e definidas para todo  $(u, v_0, v_1)$  tal que  $(u, v_0) \in V$  e  $(u, v_1) \in V$ , com  $u \in \mathbb{R}^a$  e  $(v_0, v_1) \in \mathbb{R}^b$ , satisfazendo

$$g(u, v_1) - g(u, v_0) = \sum_{j=1}^b h_j(u, v_0, v_1) (v_1^j - v_0^j) \quad (12.4.18)$$

em que  $h(u, v_0, v_1) = \begin{cases} \frac{g(u, v_1) - g(u, v_0)}{v_1 - v_0} & \text{se } v_1 \neq v_0 \\ \partial_v g(u, v_0) & \text{se } v_1 = v_0 \end{cases}$  com  $v_0 = (v_0^1, \dots, v_0^b) \in \mathbb{R}^b$  e  $v_1 = (v_1^1, \dots, v_1^b) \in \mathbb{R}^b$ .



Em outras palavras, o Lema de Hadamard diz que, em qualquer dimensão, as inclinações das secantes convergem para a inclinação da tangente quando os pontos  $v_0$  e  $v_1$  colapsam num ponto só.

Seja a prova do Lema de Hadamard.

*Demonstração.* Consideremos uma aplicação  $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^b$  definida como  $w(s) = v_0 + s(v_1 - v_0)$ , ou seja,  $w$  parametriza o segmento que conecta  $v_0$  a  $v_1$ . E seja a aplicação  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^c$  definida por  $t \mapsto g(u, w(s))$ .

Sabemos que

$$\begin{aligned}
g(u, v_1) - g(u, v_0) &= f(1) - f(0) \\
&= \int_0^1 \partial_s f(s) ds \\
&= \int_0^1 \sum_{j=1}^b \partial_{v^j} g(u, w(s)) \cdot \partial_s w^j(s) ds \quad [\text{pela regra da cadeia}] \\
&= \sum_{j=1}^b \int_0^1 \partial_{v^j} g(u, w(s)) \cdot (v_1^j - v_0^j) ds \\
&= \sum_{j=1}^b (v_1^j - v_0^j) \int_0^1 \partial_{v^j} g(u, w(s)) ds \\
&= \sum_{j=1}^b (v_1^j - v_0^j) h_j(u, v_0, v_1)
\end{aligned} \tag{12.4.19}$$

■

É imediato da definição que  $h_j(u, v_0, v_1)$  é contínua em todos os pontos, pois é obtido pela integração de derivadas parciais que são de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Usando o Lema de Hadamard vamos provar o Teorema 12.4.5.

*Demonstração.* Seja  $\mu = (\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^p)$ . Vamos mostrar que, dado qualquer  $i$ ,  $\partial_{\mu^i} \gamma_\mu(t)$  existe, é contínua e é solução de uma certa equação diferencial.

Consideremos  $\mu_0 = (\mu^1, \dots, \mu^{i-1}, \mu_0^i, \mu^{i+1}, \dots, \mu^p)$  e  $\mu_1 = (\mu^1, \dots, \mu^{i-1}, \mu_1^i, \mu^{i+1}, \dots, \mu^p)$ . Denotamos a função

$$\Delta(t, \mu_0, \mu_1) = \frac{1}{\mu_1^i - \mu_0^i} [\gamma_{\mu_1}(t) - \gamma_{\mu_0}(t)] \quad (12.4.20)$$

para quando  $\mu_1^i \neq \mu_0^i$ .

Tomando a derivada em ordem ao tempo  $t$ , temos:

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta(t, \mu_0, \mu_1) &= \frac{1}{\mu_1^i - \mu_0^i} [G(t, \gamma_{\mu_1}(t), \mu_1) - G(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0)] \\ &= \frac{1}{\mu_1^i - \mu_0^i} \left[ \sum_{j=1}^d h_j(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_1}(t), \mu_1) (\gamma_{\mu_1}^j(t) - \gamma_{\mu_0}^j(t)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^p f_j(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_1}(t), \mu_1) (\mu_1^j - \mu_0^j) \right] [\text{pelo lema de Hadamard}] \\ &= \frac{1}{\mu_1^i - \mu_0^i} \left[ \sum_{j=1}^d h_j(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_1}(t), \mu_1) (\gamma_{\mu_1}^j(t) - \gamma_{\mu_0}^j(t)) + \right. \\ &\quad \left. + f(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_1}(t), \mu_1) (\mu_1^i - \mu_0^i) \right] \\ &= \sum_{j=1}^d h_j(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_1}(t), \mu_1) \Delta^j(t, \mu_0, \mu_1) + f(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_1}(t), \mu_1) \end{aligned}$$

em que  $\Delta^j(t, \mu_0, \mu_1) = \frac{\gamma_{\mu_1}^j(t) - \gamma_{\mu_0}^j(t)}{\mu_1^i - \mu_0^i}$ .

Em  $t = t_0$ ,

$$\Delta(t_0, \mu_0, \mu_1) = \frac{1}{\mu_1^i - \mu_0^i} [x_0 - x_0] = 0 \quad (12.4.21)$$

Portanto,  $\Delta$  é solução da equação diferencial linear

$$Z' = \sum_{j=1}^d h_j(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_1}(t), \mu_1) Z^j + f(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_1}(t), \mu_1) \quad (12.4.22)$$

com condição inicial  $Z(t_0) = 0$ .

Denotamos por  $\Gamma_{\mu_0, \mu_1}(t)$  a solução maximal de  $Z' = H(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_1}(t), \mu_1) Z^j + f(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_1}(t), \mu_1)$  com condição inicial  $Z(t_0) = 0$ . Sabemos que a aplicação  $(t, \mu_0, \mu_1) \mapsto \Gamma_{\mu_0, \mu_1}(t)$  é contínua em todo o seu domínio (inclusive se  $\mu_0 = \mu_1$ ). Também sabemos que,

por unicidade,  $\Delta(t, \mu_0, \mu_1) = \Gamma_{\mu_0, \mu_1}(t)$  onde ambas estão definidas. Portanto,  $\Delta(t, \mu_0, \mu_1) = \frac{1}{\mu_1^i - \mu_0^i} [\gamma_{\mu_1}(t) - \gamma_{\mu_0}(t)]$  se estende continuamente ao caso  $\mu_0 = \mu_1$ . Em outras palavras,  $\partial_{\mu^i} \gamma_{\mu}(t)$  existe.

Além disso, essa extensão satisfaz (12.4.22), ou seja,  $\partial_{\mu^i} \gamma_{\mu}(t)$  satisfaz

$$\begin{aligned}\partial_t (\partial_{\mu^i} \gamma_{\mu}(t)) &= \sum_{j=1}^b h_j(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0) (\partial_{\mu^i} \gamma_{\mu}^j(t)) + f(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0) \\ &= \sum_{j=1}^d \partial_{x^j} G(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0) (\partial_{\mu^i} \gamma_{\mu}^j(t)) + \partial_{\mu^i} G(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0)\end{aligned}\quad (12.4.23)$$

com  $\partial_{\mu^i} \gamma_{\mu}(t_0) = 0$ .

Assim, provamos que  $\partial_{\mu} \gamma_{\mu}(t)$  existe e é solução de

$$Y' = \sum_{j=1}^d \partial_{x^j} G(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0) Y^j + \partial_{\mu^i} G(t, \gamma_{\mu_0}(t), \mu_0) \quad (12.4.24)$$

com  $Y(t_0) = 0$ .

Em particular,  $\partial_{\mu} \gamma_{\mu}(t)$  é contínua por ser solução da equação diferencial.

Logo,  $\partial_{\mu} \gamma_{\mu}(t)$  satisfaz  $X' = \partial_x G(t, \gamma_{\mu}(t), \mu) X + \partial_{\mu} G(t, \gamma_{\mu}(t), \mu)$  como no enunciado do teorema.

Agora que já sabemos que  $\gamma_{\mu}(t)$  é de classe  $\mathcal{C}^1$  em  $\mu$ , podemos derivar

$$\partial_t \gamma_{\mu}(t) = G(t, \gamma_{\mu}(t), t) \quad (12.4.25)$$

como

$$\partial_{\mu} (\partial_t \gamma_{\mu}(t)) = \partial_x G(t, \gamma_{\mu}(t), t) (\partial_{\mu} \gamma_{\mu}(t)) + \partial_{\mu} G(t, \gamma_{\mu}(t), t) \quad (12.4.26)$$

E, anteriormente, vimos que

$$\partial_t (\partial_{\mu} \gamma_{\mu}(t)) = \partial_x G(t, \gamma_{\mu}(t), t) (\partial_{\mu} \gamma_{\mu}(t)) + \partial_{\mu} G(t, \gamma_{\mu}(t), t) \quad (12.4.27)$$

Consequentemente, esses dois fatos implicam que

$$\partial_{\mu} (\partial_t \gamma_{\mu}(t)) = \partial_t (\partial_{\mu} \gamma_{\mu}(t)) \quad (12.4.28)$$

■

## 12.5 Equações Diferenciais Autônomas

### 12.5.1 Propriedades

São as equações da forma

$$x' = F(x) \quad (12.5.1)$$

em que  $F$  não depende de  $t$ .

Se  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  é solução de  $x' = F(x)$ , então dado qualquer  $a \in \mathbb{R}$ , a função

$$\gamma_a: I - a \rightarrow \mathbb{R}^d \quad (12.5.2)$$

com aplicação  $t \mapsto \gamma(t + a)$  também é solução. Ou seja, translações do tempo não alteram a classe das soluções. Em particular, sempre existe uma solução  $\beta$  com condição inicial  $\beta(0) = x_0$ . Como podemos transladar o tempo sem afetar a classe das soluções, podemos fixar o tempo inicial como sendo o tempo  $t_0 = 0$  ou qualquer outro tempo. Isso implica que o  $t_0$  da condição inicial é pouco relevante.

Vamos supor que a solução de  $x' = F(x)$  tem a propriedade de unicidade de soluções.

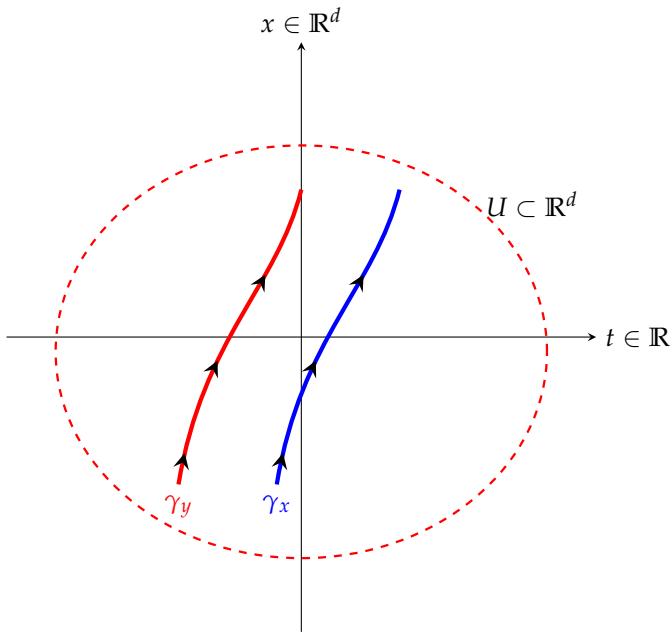
Denotamos por  $I_{x_0}$  o domínio da solução maximal  $\gamma_{x_0}$  de  $x' = F(x)$  com  $x(0) = x_0$  e por  $\mathcal{D} = \{(t, x) : t \in I_x\}$ . Finalmente,

$$\begin{aligned} \gamma: \mathcal{D} &\rightarrow \mathbb{R}^d \\ (t, x) &\mapsto \gamma_x(t) \end{aligned} \quad (12.5.3)$$

Sejam as seguintes propriedades:

1.  $\gamma(0, x) = \gamma_x(0) = x, \forall x$
2. Dado  $y = \gamma_x(s)$  qualquer, temos que  $\gamma_y(t) = \gamma_x(t + s)$ , em que  $I_y = I_x - s$ . Graficamente,

FIGURA 12.5.1 – EQUAÇÕES DIFERENCIAIS AUTÔNOMAS



Dito de outro modo,

$$\gamma(t, \gamma(s, x)) = \gamma(t + s, x), \forall x, \forall (t, s) \quad (12.5.4)$$

- 3.  $\gamma(t, x)$  é contínua
- 4.  $\gamma(t, x)$  é  $C^k$  se  $F(x)$  é  $C^k$

A partir do Teorema 12.4.5 encontramos os seguintes resultados

- (a)  $\partial_t \gamma(t, x) = F(\gamma(t, x))$
- (b) Se  $F$  é  $C^1$ , então  $\partial_x \gamma(t, x) \in C^0$  (existe e é contínua)
- (c)  $\partial_t (\partial_x \gamma(t, x)) = DF(\gamma(t, x)) \partial_x \gamma(t, x)$

Os itens (a) + (b) implicam que as derivadas parciais em relação a  $t$  e a  $x$  existem e são contínuas, ou seja,  $\gamma$  é de classe  $C^1$ .

- (d)  $\partial_t (\partial_x \gamma(t, x)) = \partial_x (\partial_t \gamma(t, x))$
- (e) Dos fatos (a) + (d) implicam que  $\partial_t \partial_x \gamma(t, x) \in C^0$  (existe e é contínua)
- (f) O Teorema 12.4.5 aplicado ao item (c) diz que se  $F$  é de classe  $C^2$ , então  $\partial_x \partial_x \gamma(t, x) \in C^0$  (existe e é contínua)
- (g) Além disso,

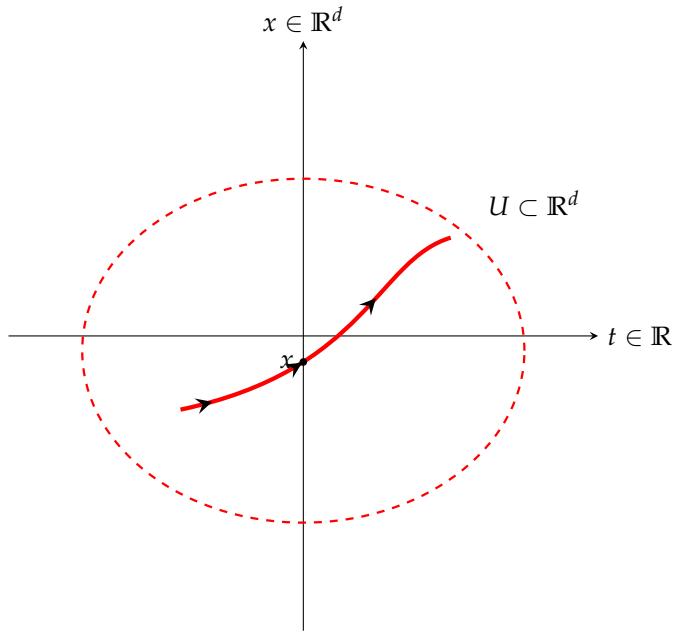
$$\partial_t (\partial_x \partial_x \gamma(t, x)) = \partial_x (\partial_t \partial_x \gamma(t, x))$$

$$= D^2F(\gamma(t, x)) (\partial_x \gamma(t, x), \partial_x \gamma(t, x)) + DF(\gamma(t, x)) \partial_x \partial_x \gamma(t, x) \quad (12.5.5)$$

(h) Os itens (c) + (e) + (f) implicam que  $\gamma(t, x)$  é de classe  $C^2$  desde que  $F$  seja de classe  $C^2$ .

Seja a trajetória/órbita do ponto  $x \in U$  a curva  $\gamma_x: t \rightarrow \gamma_x(t)$  representada pela curva parametrizada na Figura 12.5.2. A literatura chama  $U$  de espaço de fases de  $x' = F(x)$ .

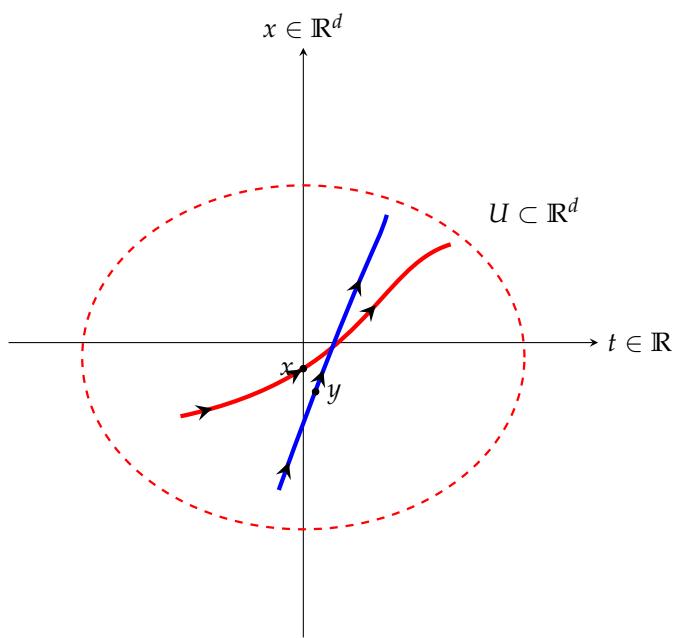
FIGURA 12.5.2 – TRAJETÓRIA DO PONTO  $x$



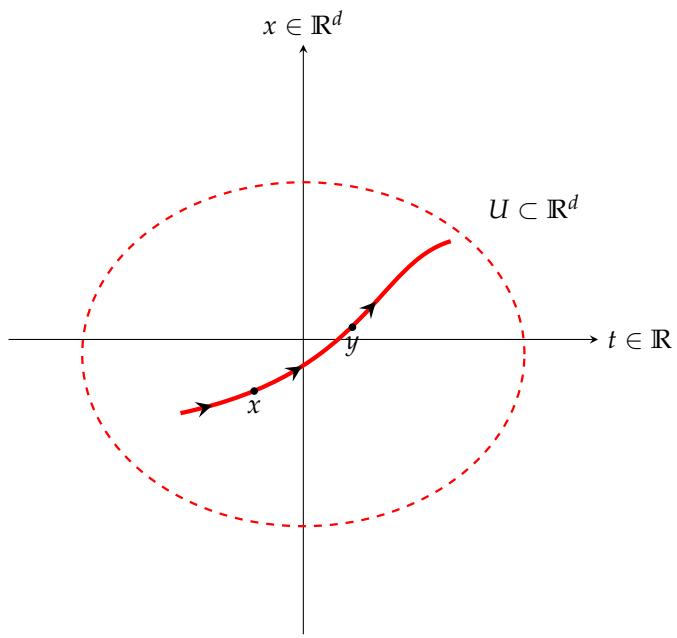
5. Se  $\gamma(a, x) = \gamma(b, y)$  para algum  $a$  e  $b$ , então

$$\gamma(t, x) = \gamma(t + (b - a), y), \forall t \in I_x \quad (12.5.6)$$

Ou seja, a situação descrita a seguir não poderia ocorrer.



O correto seria a situação gráfica abaixo, ou seja, se a trajetória de  $x$  encontra a trajetória de  $y$  elas são a mesma trajetória. De outro modo, são a mesma solução que diferem por uma translação no tempo.



Vamos provar a propriedade (5).

*Demonstração.* Seja  $z = \gamma(a, x) = \gamma(b, y)$ . Pela propriedade (2),

$$\gamma(t, z) = \gamma(t + a, x), \forall t \in I_z \quad (12.5.7)$$

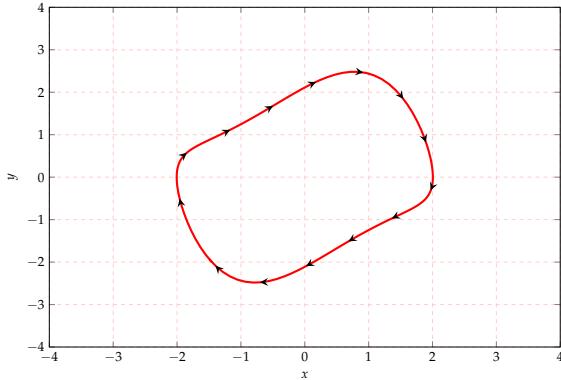
$$\gamma(t, z) = \gamma(t + b, y), \forall t \in I_z \quad (12.5.8)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \gamma(t + a, x) &= \gamma(t + b, y), \forall t \in I_z \\ \gamma(s, x) &= \gamma(s + (b - a), y), \forall s \in I_s \end{aligned} \quad (12.5.9)$$

Consequentemente, para equações autônomas, com a propriedade de unicidade de soluções, segue que duas trajetórias não podem se cruzar, a menos que sejam a mesma trajetória. De outro modo, se duas trajetórias se intersectam elas coincidem. ■

6. Em particular, se  $\gamma(a, x) = \gamma(b, x)$  para algum  $a \neq b$ , então  $\gamma(t, x) = \gamma(t + (b - a), x), \forall t \in I_z$ .



Nesse caso, dizemos que  $\gamma(\cdot, x)$  é periódica e  $I_x = (-\infty, +\infty)$ .

7. Existem três tipos de trajetórias

- (a) Injetivas (regulares)

$$\gamma(a, x) \neq \gamma(b, x), \forall a \neq b \quad (12.5.10)$$

- (b) Periódicas (fechadas): existe  $T \neq 0$  tal que

$$\gamma(t, x) = \gamma(t + T, x), \forall t \quad (12.5.11)$$

(c) Estacionárias (constantes)

$$\gamma(t, x) = x, \forall t \quad (12.5.12)$$

A trajetória é estacionária se e somente se  $F(x) = 0$ .

**Definição 12.5.1** (Fluxo). *Para cada  $t \in \mathbb{R}$  seja*

$$\begin{aligned} U_t &= \{x \in U : t \in I_x\} \\ &= \{x \in U : (t, x) \in \mathcal{D}\} \end{aligned} \quad (12.5.13)$$

*A aplicação tempo- $t$  de  $x' = F(x)$  definida em  $f^t : U_t \rightarrow U$  é tal que  $x \mapsto \gamma(t, x)$ .*

*Sejam as seguintes propriedades:*

1.  $f^0 = 1$
2.  $f^{t+s} = f^t \circ f^s, \forall t, s \in \mathbb{R}$

*Um pseudo-fluxo<sup>4</sup> em  $U$  é uma família de transformações*

$$f^t : U_t \rightarrow U, t \in \mathbb{R} \quad (12.5.14)$$

*tais que  $f^0 = 1$  e  $f^{t+s} = f^t \circ f^s, \forall t, s \in \mathbb{R}$ .*

Fluxos também são chamados grupos a um parâmetro de transformações.

Dito de outro modo, vamos fixar o tempo e fazer a condição inicial variar. Assim, associado a toda equação diferencial existe um fluxo e ele contém toda a informação sobre as soluções.

Dizemos que a equação  $x' = F(x)$  com  $x(0) = x_0$  é completa se  $I_x = (-\infty, +\infty), \forall x \in U$ , ou seja, se as soluções estão definidas para todo o tempo. Equivalentemente, se  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times U$  ou, ainda, se  $U_t = U, \forall t \in \mathbb{R}$ . Ainda, se as soluções estão definidas em um conjunto compacto a equação é completa e temos um fluxo.

**Exemplo 12.5.1.** Se for verdade que

$$\forall x \in U \exists K_x \text{ compacto} \subset U \quad (12.5.15)$$

*tal que  $\gamma(t, x) \in K_x, \forall t \in I_x$ , então  $I_x = (-\infty, +\infty), \forall x \in U$ . Logo, a equação é completa.*

**Exemplo 12.5.2.** Seja

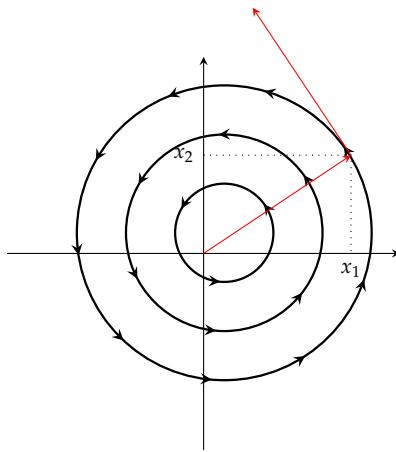
---

<sup>4</sup> Quando o domínio é  $U$  dizemos que é um fluxo.

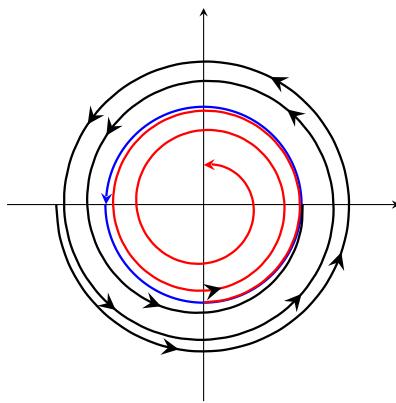
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x_2 + \varepsilon x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 - \varepsilon x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix} \quad (12.5.16)$$

com  $F(x_1, x_2)$  tal que  $F: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Seja  $x_1 = \rho \cos \theta$  e  $x_2 = \rho \sin \theta$  com  $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$ .

Para  $\varepsilon = 0$ , temos que  $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ . Em coordenadas polares, temos  $\rho' = 0$  e  $\theta' = 1$ , cujo retrato de fase é



Para  $\varepsilon \neq 0$ , em coordenadas polares, temos  $\rho' = \varepsilon\rho(1 - \rho^2)$  e  $\theta' = 1$ . Os zeros do campo de vetores são  $\rho = 0$  e  $\rho = 1$ . Para  $\rho = 1$ , a solução que passa por esse zero é a solução constante. Então o círculo azul na figura abaixo é uma trajetória (periódica) da equação diferencial. Se  $\rho < 1$ , então  $\rho' > 0$  e a distância à origem é uma função crescente no tempo (trajetória vermelha). Se  $\rho > 1$ , então  $\rho' < 0$  e a distância à origem é uma função decrescente no tempo (trajetória preta). A direção anti-horária é dada por  $\theta' = 1$ .



O que significa que temos uma espiral em direção à curva de raio 1.

Assim,  $I_{(x_1, x_2)} = (-\infty, +\infty)$  para todo  $(x_1, x_2) \in \bar{B}_1(0, 0)$  e  $I_{(x_1, x_2)} = (a, +\infty)$  para todos os demais pontos.

### 12.5.2 Teorema do Fluxo Tubular

Grosso modo, o Teorema do Fluxo Tubular afirma que na vizinhança de qualquer ponto de  $U$  onde o campo de vetores é não-nulo (ponto regular) sempre existe uma mudança de coordenadas (difeomorfismo) que “retifica” o fluxo, no sentido de que nas novas coordenadas as soluções são retas percorridas com velocidade constante unitária. Em particular, a menos de tal mudança de coordenadas, o comportamento das soluções na vizinhança de um ponto regular é sempre o mesmo, para qualquer campo de vetores em dimensão  $d$ .

Com isso, vamos ao seguinte teorema.

**Teorema 12.5.1** (Teorema do Fluxo Tubular). *Seja  $U$  aberto de  $\mathbb{R}^d$  e uma aplicação  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^k$ , com  $1 \leq k \leq \infty$ , e seja  $x_0 \in U$  tal que  $F(x_0) \neq 0$ . Então, existe um  $\varepsilon > 0$  e  $\psi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times (-\varepsilon, \varepsilon)^{d-1} \rightarrow U$  um difeomorfismo tal que*

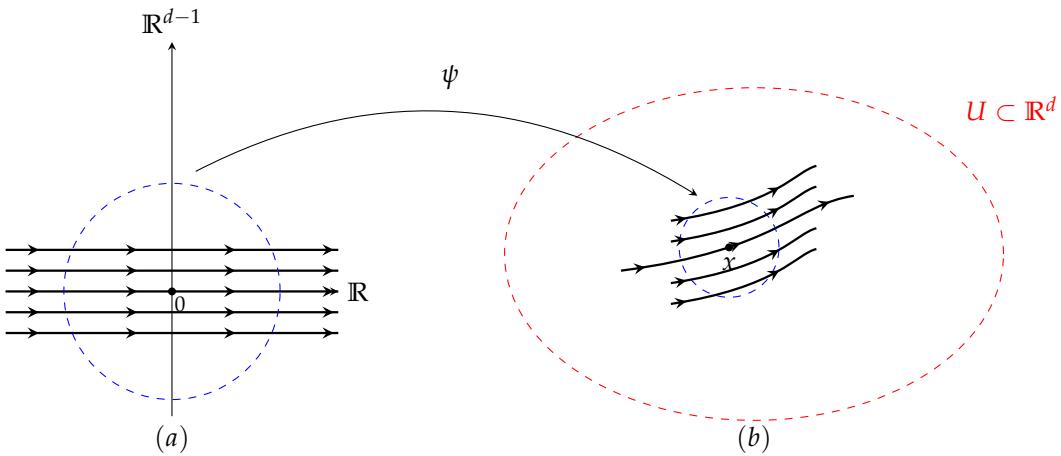
1.  $\psi(0, 0) = x_0$
2.  $t \mapsto \psi(t, \xi_2, \dots, \xi_d)$  é solução da equação  $x' = F(x)$ .

Observe que  $x_0$  é um ponto não-estacionário da equação diferencial. O item (1) afirma que existe um difeomorfismo que envia a origem na origem. O item (2) diz que a imagem de cada reta horizontal ao fixarmos até a  $d$ -ésima coordenada ( $\xi_d$ ) e variarmos  $t$  é a solução da equação diferencial  $x' = F(x)$ .

O objetivo do teorema é descrever o comportamento das demais trajetórias passando por pontos próximos a  $x_0$ . É possível encontrar uma aplicação diferenciável  $\psi$  que envia (a) em (b) como na Figura abaixo.

De acordo com o teorema, o comportamento local de trajetórias próximas de um ponto não-estacionário qualquer é muito pobre. Existe um único modelo local de comportamento das trajetórias, que são as retas percorridas com velocidade unitária. Todos os comportamentos locais em diferentes pontos são equivalentes, isto é, são versões deformadas do fluxo tubular.

FIGURA 12.5.3 – TEOREMA DO FLUXO TUBULAR



Podemos depreender o seguinte corolário.

**Corolário 12.5.1.1.** Seja  $\gamma: (a, b) \in \mathbb{R}^d$  uma solução maximal de  $x' = F(x)$  e suponhamos que existe  $p = \lim_{t \rightarrow b^-} \gamma(t) \in U$ . Então,  $b = +\infty$  e  $F(p) = 0$  ( $p$  é um ponto estacionário).

*Demonstração.* Tomando  $\rho > 0$  pequeno temos que a bola  $\bar{B}_\rho(p)$  é um compacto contido em  $U$ .

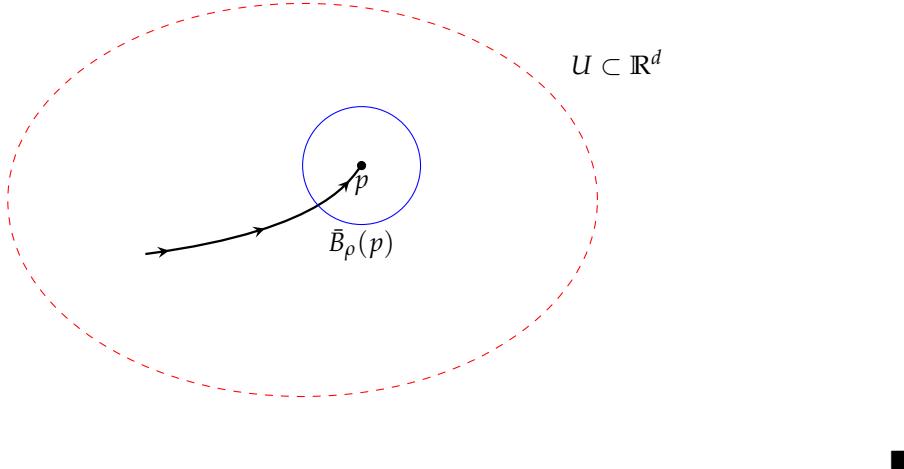
A hipótese de que  $\gamma(t) \rightarrow p$  quando  $t \rightarrow b$  implica que a trajetória nunca sai de  $\bar{B}_\rho(p)$ . E isso implica que  $b = +\infty$ .

Mas por que  $p$  é um ponto necessariamente estacionário?

Suponhamos que  $F(p) \neq 0$ . Vamos aplicar o Teorema do Fluxo Tubular. Então,  $\gamma_{x_0}(t) \rightarrow p$  implica que existe uma sequência  $t_k \rightarrow \infty$  tal que  $\gamma_{x_0}(t_k)$  converge para  $p$ . Assim,  $\gamma_{x_0}\left(t_k + \frac{\varepsilon}{2}\right)$  converge para  $\gamma_p\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ , em que  $\gamma_p$  é a solução de  $x' = F(x)$  com  $\gamma(0) = p$ . Mas  $\gamma_p\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \neq p$ . Desse modo,  $\gamma(t_k) \rightarrow p$  e  $\gamma_p\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \neq p$  implicam que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma(t)$  não existe.

Temos que  $\gamma(t_k, x_0) \rightarrow p = \gamma(0, p)$ . Mas  $\gamma\left(t_k + \frac{\varepsilon}{2}, x_0\right) = \gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}, \gamma(t_k, x_0)\right) \rightarrow \gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}, p\right)$ . Como temos um difeomorfismo,  $p$  é a imagem do ponto 0 e  $\gamma_p\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  é a imagem de  $\frac{\varepsilon}{2}$  e, portanto,  $p$  e  $\gamma_p\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$  são distintos.

FIGURA 12.5.4 – PONTO ESTACIONÁRIO

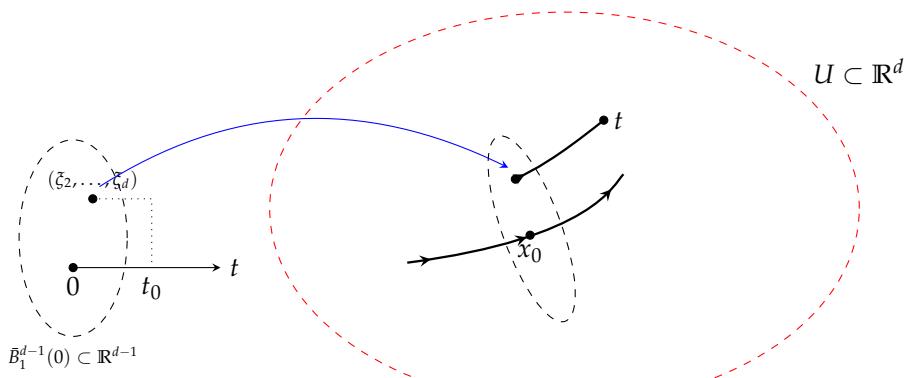


Vamos provar o Teorema 12.5.1.

*Demonstração.* Considere  $g: \bar{B}_1^{d-1}(0) \rightarrow U$  um mergulho  $C^\infty$  com  $g(0) = x_0$  e cuja imagem, contida em  $U$ , é transversal à trajetória  $\gamma_{x_0}$  no ponto  $x_0$ .

Procuramos a imagem de  $(\xi_2, \dots, \xi_d)$  no mergulho e deixamos a imagem deslizar ao longo do tempo durante  $t$  períodos de tempo.

FIGURA 12.5.5 – GRÁFICO DE UM MERGULHO



Assim, tomamos a aplicação

$$\psi: (t, \xi_2, \dots, \xi_d) \mapsto \gamma(t, g(\xi_2, \dots, \xi_d)) \quad (12.5.17)$$

definida como  $\{(t, \xi_2, \dots, \xi_d): t \in \text{domínio da solução maximal que passa por } (0, \xi_2, \dots, \xi_d)\}$  assumindo valores em  $U$ .

Sabemos que

1.  $\psi$  é de classe  $\mathcal{C}^k$  porque  $\gamma$  é de classe  $\mathcal{C}^k$  e  $g$  é de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .
2.  $D\psi(0, 0): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é uma aplicação linear, um isomorfismo.

Portanto, pelo teorema da função inversa existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $\psi|(-\varepsilon, \varepsilon)^{d-1}$  é um difeomorfismo sobre a sua imagem.

Os itens (1) e (2) acima decorrem da aplicação  $\psi$  e de seu intervalo de definição.

Vamos provar que  $D\psi(0, 0)$  é um isomorfismo.

*Demonstração.* Seja  $D\psi(0, 0) \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1} = Dg(0)$ . Isto é, a restrição da derivada ao hiperplano vertical, ou seja, estamos fixando  $t = 0$  e analisando as derivadas parciais com relação às variáveis  $(\xi_2, \dots, \xi_d)$ .

Como,

$$\begin{aligned} \psi(0, g(\xi_2, \dots, \xi_d)) &= \gamma(0, g(\xi_2, \dots, \xi_d)) \\ &= g(\xi_2, \dots, \xi_d) \end{aligned} \quad (12.5.18)$$

então,  $D\psi(0, 0) \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1} = Dg(0)$ .

1. Portanto,  $D\psi(0, 0) \setminus \{0\} \times \mathbb{R}^{d-1} = Dg(0)$  é um isomorfismo sobre a sua imagem, que é um espaço vetorial de dimensão  $d - 1$ , uma vez que  $g(\xi_2, \dots, \xi_d)$  é um mergulho.

2. Agora,

$$D\psi(0,0)|\mathbb{R} \times \{0\} = (\partial_t \psi)(0,0) \quad (12.5.19)$$

Lembre que  $\gamma(t, g(\xi_2, \dots, \xi_d))$  é uma solução da equação diferencial. Portanto,

$$\partial_t \gamma(t, g(\xi_2, \dots, \xi_d)) = F(\gamma(t, \xi_2, \dots, \xi_d)) \quad (12.5.20)$$

Logo,

$$\begin{aligned} D\psi(0,0)|\mathbb{R} \times \{0\} &= (\partial_t \psi)(0,0) \\ &= F(\gamma(0, g(0))) \\ &= F(x_0) \end{aligned} \quad (12.5.21)$$

que é transversal à imagem do mergulho  $g$ .

Os itens (1) e (2) implicam que

$$\begin{aligned} \dim(Im D\psi(0,0)) &\geq \underbrace{(d-1)}_{(1)} + \underbrace{1}_{(2)} \\ &\geq d \end{aligned} \quad (12.5.22)$$

Portanto,  $D\psi(0,0)$  é sobrejetiva e, portanto, um isomorfismo. ■



O Teorema do Fluxo Tubular tem algumas aplicações importantes. Uma delas são as chamadas transformações de Poincaré, que estão entre as ferramentas básicas mais úteis da teoria qualitativa de equações diferenciais. Trata-se de aplicações entre hipersuperfícies transversais ao campo de vetores, obtidas por projeção ao longo das soluções da equação diferencial. Frequentemente, o estudo dessas transformações é mais fácil do que a análise direta do fluxo, porque se trata de sistemas em tempo discreto e, também, porque estão definidas em espaços de dimensão menor ( $d-1$ , em lugar de  $d$ )

Vamos ver agora a existência da transformação de Poincaré.

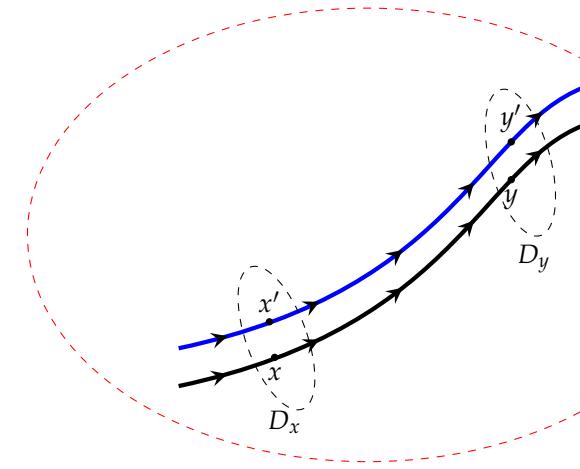
**Corolário 12.5.1.2.** *Seja  $\gamma$  uma trajetória não-estacionária de  $x' = F(x)$ , onde supomos que  $F$  é de classe  $C^k$ . Dados  $x$  e  $y$  em  $\gamma$ , sejam  $D_x$  e  $D_y$  subvariedades de codimensão 1 transversais a  $\gamma$  em  $x$  e  $y$ , respectivamente. Também,  $x$  e  $x'$  são próximos e a continuidade é válida. Então, existe  $D'_x$  vizinhança de  $x$  dentro da seção transversal  $D_x$  e existe uma aplicação*

$$P: D'_x \rightarrow D_y \quad (12.5.23)$$

tal que

1.  $P(x) = y$
2.  $x' e y' = P(x)$  estão na mesma trajetória
3.  $P$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ .

FIGURA 12.5.6 – TRANSFORMAÇÃO DE POINCARÉ



$D_x$  e  $D_y$  também são chamados de seções transversais ao fluxo.

*Demonstração.* Suponhamos que  $x$  e  $y$  estão próximos, isto é,  $y$  está contido no domínio de fluxo tubular de  $x$ . Sejam  $\Sigma_x = \psi^{-1}(D_x)$  e  $\Sigma_y = \psi^{-1}(D_y)$  as pré-imagens pelo difeomorfismo do fluxo tubular.

Então,  $\Sigma_x$  e  $\Sigma_y$  são transversais ao eixo horizontal  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times \{0\}$ . Consideremos

$$Q: \Sigma_x \rightarrow \Sigma_y \quad (12.5.24)$$

a aplicação  $(t, \xi) \mapsto (s, \xi)$ . Ademais,  $Q$  satisfaz as seguintes propriedades:

1.  $Q \in \mathcal{C}^k$
2.  $Q(0, 0) = z = \psi^{-1}(y)$ , em que  $z$  é a pré-imagem de  $y$

Definimos  $P = \psi \circ Q \circ \psi^{-1}|D'_x$ , em que  $D'_x$  é a vizinhança de  $x$  dentro de  $D_x$  suficientemente pequena. E, por fim,  $\psi \in \mathcal{C}^k$ ,  $Q \in \mathcal{C}^k$  e  $\psi^{-1} \in \mathcal{C}^k$ .

Se  $x$  e  $y$  estiverem longe, sendo o segmento entre eles compacto podemos encontrar uma cobertura finita por abertos que são vizinhanças de domínio de fluxo tubular, então sejam:

$$\begin{aligned} P_0 &: D'_x \rightarrow D_1 \\ P_1 &: D_1 \rightarrow D_2 \\ &\vdots \\ P_{n-1} &: D'_{n-1} \rightarrow D_n \\ P_n &: D'_n \rightarrow D_y \end{aligned}$$

Assim,

$$P: P_n \circ P_{n-1} \circ \dots \circ P_1 \circ P_0 \quad (12.5.25)$$

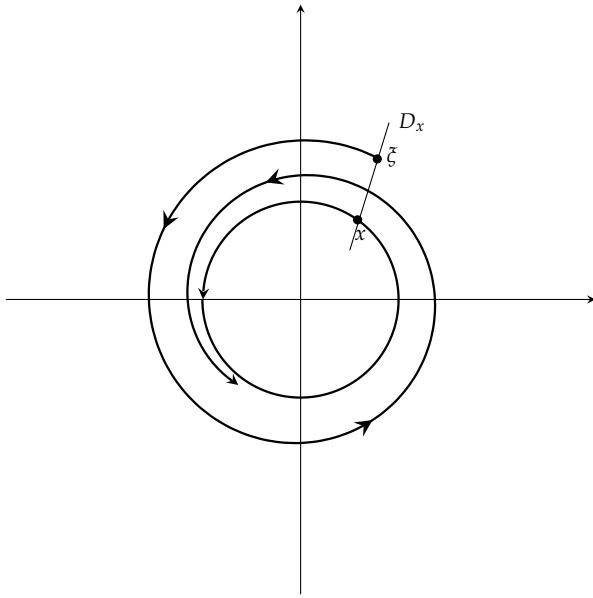
é  $\mathcal{C}^k$  e  $P(x) = y$ . ■

**Exemplo 12.5.3.** Seja

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -x_2 + \varepsilon x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x_1 - \varepsilon x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{pmatrix} \quad (12.5.26)$$

com  $F(x_1, x_2)$  tal que  $F: \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Seja  $x_1 = \rho \cos \theta$  e  $x_2 = \rho \sin \theta$  com  $\rho^2 = x_1^2 + x_2^2$ .

Em coordenadas polares, temos  $\rho' = \varepsilon \rho(1 - \rho^2)$  e  $\theta' = 1$ . Os zeros do campo de vetores são  $\rho = 0$  e  $\rho = 1$ . Para  $\rho = 1$ , a solução que passa por esse zero é a solução constante. Então o círculo azul na figura abaixo é uma trajetória (periódica) da equação diferencial. Se  $\rho < 1$ , então  $\rho' > 0$  e a distância à origem é uma função crescente no tempo (trajetória vermelha). Se  $\rho > 1$ , então  $\rho' < 0$  e a distância à origem é uma função decrescente no tempo (trajetória preta). A direção anti-horária é dada por  $\theta' = 1$ .



Vamos escolher um ponto  $x = y$  tal que  $D_X = D_y$ .

Para qualquer trajetória fora do disco, temos que  $\theta' = 1$  e  $\rho' < 1$ . A transformação de Poincaré é  $P: D_x \rightarrow D_x$ . Portanto,  $P: D_x \rightarrow D_x$  satisfaz

1.  $P(x) = x$
2.  $d(P(\xi), x) < d(\xi, x)$ ,  $\forall \xi \in D_x \setminus \{x\}$

Lembre-se que fluxo é uma família de aplicações. Assim, sejam os seguintes fluxos:

$$f^t: U \rightarrow U, \forall t \in \mathbb{R} \quad (12.5.27)$$

$$g^t: V \rightarrow V, \forall t \in \mathbb{R} \quad (12.5.28)$$

Os fluxos  $f^t$  e  $g^t$  são  $\mathcal{C}^k$ -conjugados se existe uma aplicação  $h: U \rightarrow V$ , invertível e de classe  $\mathcal{C}^k$ , tal que  $h(f^t(x)) = g^t(h(x))$ ,  $\forall x \in U$  e  $\forall t \in \mathbb{R}$ . Isto é, queremos que as trajetórias, vistas como curvas parametrizadas, do fluxo  $f^t$  sejam enviadas às trajetórias do fluxo  $g^t$ .

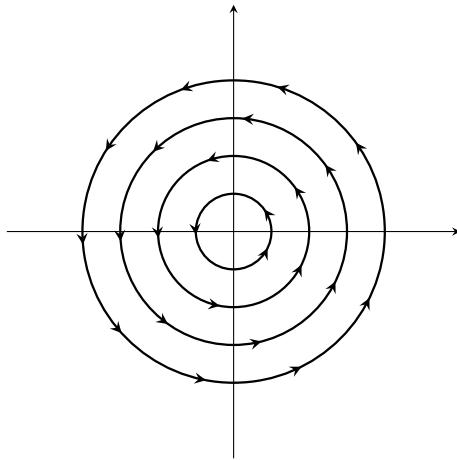
O teorema do fluxo tubular afirma que na vizinhança de qualquer ponto não-estacionário, o fluxo de uma equação  $x' = F(x)$ ,  $F \in \mathcal{C}^k$ , é  $\mathcal{C}^k$ -conjugado a um fluxo  $g^t(x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1 + t, x_2, \dots, x_d)$ .

**Exemplo 12.5.4.** Seja a seguinte equação diferencial em coordenadas polares:

$$\begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = 1 \end{cases} \quad (12.5.29)$$

Lembre-se que  $\rho' = 0$  significa que a distância das trajetórias à origem é constante e que são percorridas com velocidade angular igual a 1. O fluxo associado a essa equação diferencial é dado por  $f^t(\rho, \theta) = (\rho, \theta + t)$

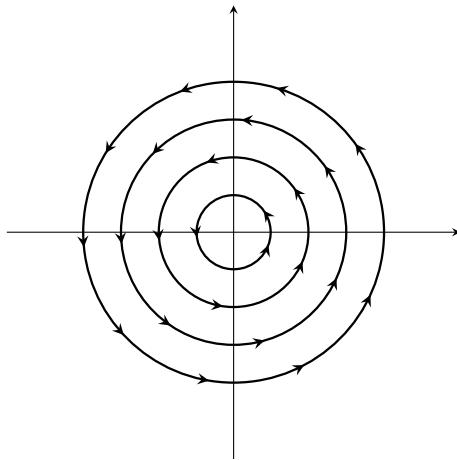
e está representado graficamente abaixo.



Considere, agora, outra equação diferencial em coordenadas polares:

$$\begin{cases} \rho' = 0 \\ \theta' = 0.99 \end{cases} \quad (12.5.30)$$

Lembre-se que  $\rho' = 0$  significa que a distância das trajetórias à origem é constante e que são percorridas com velocidade angular igual a 0.99. O fluxo associado a essa equação diferencial é dado por  $g^t(\rho, \theta) = (\rho, \theta + 0.99t)$  e está representado graficamente abaixo.



Usando a definição acima de fluxos conjugados, é possível dizer que esses fluxos são essencialmente o mesmo? Considere, em particular,  $t = 2\pi$ . Para esses fluxos serem conjugados teríamos que ter  $h(f^{2\pi}(x)) = g^{2\pi}(h(x))$ . No caso da primeira equação, as trajetórias orbitam em velocidade angular 1 e fecham o período em  $2\pi$ , mas a segunda o faz em velocidade angular 0.99. Assim, o período para fechar a trajetória não é o mesmo. Portanto,  $h(f^{2\pi}(x)) = h(x)$  e  $g^{2\pi}(h(x)) \neq h(x)$ . Logo, os fluxos não são conjugados.

Com esse exemplo, precisamos de uma definição mais precisa de fluxos conjugados, a saber:

**Definição 12.5.2** (Fluxos Equivalentes). *Sejam os seguintes fluxos:*

$$f^t: U \rightarrow U, \forall t \in \mathbb{R} \quad (12.5.31)$$

$$g^t: V \rightarrow V, \forall t \in \mathbb{R} \quad (12.5.32)$$

Os fluxos  $f^t$  e  $g^t$  são  $\mathcal{C}^k$ -equivalentes se existe uma aplicação  $h: U \rightarrow V$ , invertível e de classe  $\mathcal{C}^k$ , que envia trajetórias de  $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$  em trajetórias de  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  preservando o sentido do tempo (a orientação). Isto é,  $h(f^t(x)) = g^{\phi(t)}(h(x))$ , em que  $\phi(t)$  é uma função monótona crescente.

Assim, abrimos mão da parametrização e exigimos que preserve o sentido do tempo.

Agora, vamos supor que temos um ponto estacionário. Isto é,  $F(p) = 0$ . A solução constante igual a  $p$  é uma trajetória do fluxo e queremos saber o comportamento das trajetórias na vizinhança de  $p$ .

Sendo  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , para  $x$  próximo de  $p$  podemos empregar a fórmula de Taylor:

$$F(x) \approx F(p) + DF(p) \cdot (x - p) + o(|x - p|) \approx DF(p) \cdot (x - p) \quad (12.5.33)$$

o que sugere que talvez, na vizinhança de  $p$ , o fluxo de  $x' = F(x)$  seja parecido com o fluxo de  $x' = A \cdot v$ , em que  $A = DF(p)$  é uma aplicação linear  $A: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $v = (x - p)$ , na vizinhança da origem (quando  $x$  está próximo de  $p$ ).

Com base nisso, a ideia é que o fluxo da equação diferencial não-linear é parecido com o fluxo da equação linear localmente. Assim, vamos estudar o fluxo de equações lineares.

## 12.6 Equações Lineares Autônomas

Essas equações podem ser escritas como

$$x' = A \cdot x \quad (12.6.1)$$

em que  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .

### 12.6.1 Exponencial de Matrizes

Em geral, para  $d \geq 1$ , o fluxo de  $x' = A \cdot x$  é dado por  $f^t = e^{At} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ . Isto é, a solução  $\gamma(t)$  de  $x' = A \cdot x$  com condição inicial  $\gamma(0) = x$  é  $\gamma(t) = xe^{tA}$ .

Para entendermos esse resultado precisamos saber o que é a exponencial de uma aplicação linear (matriz).

**Definição 12.6.1** (Exponencial de uma Aplicação Linear). *Dada  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ , temos que*

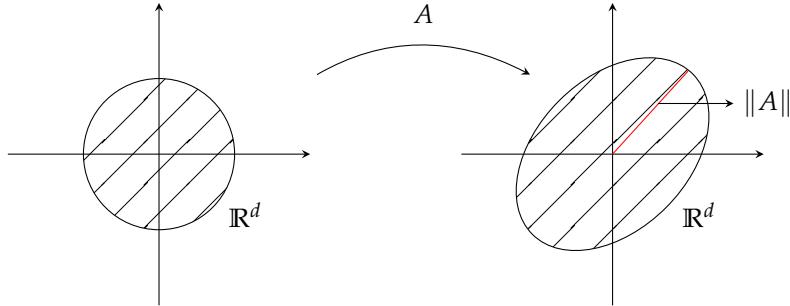
$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots \quad (12.6.2)$$

Observe que  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  é um espaço vetorial de dimensão  $d \times d$  e por ser de dimensão finita, podemos muni-lo de uma norma. E como é um espaço de dimensão finita todas as normas são equivalentes. Então, seja a norma de um operador:

$$\|A\| = \sup_{\|v\| \leq 1} \|A \cdot v\| \quad (12.6.3)$$

A interpretação geométrica é muito simples. No  $\mathbb{R}^d$  consideramos o disco unitário e a aplicação  $A$  leva o disco em um domínio compacto (elipse). A norma é o tamanho do semi-eixo maior.

FIGURA 12.6.1 – EXPONENCIAL DE UMA APLICAÇÃO LINEAR



Uma propriedade algébrica interessante da norma é que:

$$\begin{aligned} \|A \cdot B\| &= \sup_{\|v\| \leq 1} \|A(B(v))\| \\ &= \sup_{\|v\| \leq 1} \left( \left\| A \left( \frac{B(v)}{\|B(v)\|} \right) \right\| \cdot \|B(v)\| \right) \\ &\leq \underbrace{\sup_{\|v\| \leq 1} \left\| A \left( \frac{B(v)}{\|B(v)\|} \right) \right\|}_{\leq \|A\|} \cdot \underbrace{\sup_{\|v\| \leq 1} \|B(v)\|}_{\|B\|} \\ &\leq \|A\| \cdot \|B\| \quad \forall A, B \end{aligned} \quad (12.6.4)$$

E como consequência,

- $\left\| \frac{A^n}{n!} \right\| \leq \frac{\alpha^n}{n!}, \quad \alpha = \|A\|$

- $\sum \frac{\alpha^n}{n!}$  é convergente

Então, esses dois itens, pelo critério de Weierstrass, implicam que a série  $I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots$  converge em  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ . Além disso,

- $\|\mathbf{e}^A\| \leq e^{\|A\|}$

- Mudança de base:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}^{(PAP^{-1})} &= I + PAP^{-1} + \frac{(PAP^{-1})^2}{2!} + \frac{(PAP^{-1})^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots \\
 &= I + PAP^{-1} + \frac{(PAP^{-1}PAP^{-1})}{2!} + \frac{(PAP^{-1}PAP^{-1}PAP^{-1})}{3!} + \dots + \\
 &\quad + \frac{PAP^{-1}PAP^{-1}\dots PAP^{-1}}{n!} + \dots \\
 &= I + PAP^{-1} + \frac{(PA^2P^{-1})}{2!} + \frac{(PA^3P^{-1})}{3!} + \dots + \frac{PA^nP^{-1}\dots PAP^{-1}}{n!} + \dots \\
 &= P \left( I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots + \frac{A^n}{n!} + \dots \right) P^{-1} \\
 &= P\mathbf{e}^A P^{-1}
 \end{aligned} \tag{12.6.5}$$

- Comutação:  $\mathbf{e}^A \cdot A = A \cdot \mathbf{e}^A$

- $\mathbf{e}^{A+B} = \mathbf{e}^A \mathbf{e}^B = \mathbf{e}^B \mathbf{e}^A$  se  $A \cdot B = B \cdot A$

- Consideremos

$$t \mapsto \mathbf{e}^{tA} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \tag{12.6.6}$$

da qual decorre

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{e}^{tA}) = A\mathbf{e}^{tA} \tag{12.6.7}$$

o que significa que a curva  $t \mapsto \mathbf{e}^{tA}$  é solução da equação diferencial  $x' = Ax$  com  $x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .

Vamos obter a equação (12.6.7).

*Demonstração.* Por definição,

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots \quad (12.6.8)$$

Derivando termo a termo, obtemos a série

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{tA}) &= A + tA^2 + \frac{t^2 A^3}{2} + \dots + \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} + \dots \\ &= A \left( I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^{n-1} A^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right) \\ &= Ae^{tA} \end{aligned} \quad (12.6.9)$$

As séries  $I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \frac{t^3 A^3}{3!} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots$  e  $A + tA^2 + \frac{t^2 A^3}{2} + \dots + \frac{t^{n-1} A^n}{(n-1)!} + \dots$  são convergentes pelo critério de Weierstrass e, portanto, podemos derivar termo a termo. ■

Vamos proceder ao cálculo da exponencial de  $e^A$ .

1. Caso 1:  $A$  é diagonalizável, isto é, existe  $P$  (matriz de autovetores) invertível tal que

$$PAP^{-1} = D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_d \end{pmatrix} \quad (12.6.10)$$

Assim,

$$e^A = e^{PDP^{-1}} = P^{-1}e^D P \quad (12.6.11)$$

em que

$$\begin{aligned} e^D &= I + D + \frac{D^2}{2} + \frac{D^3}{3!} + \dots + \frac{D^n}{n!} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\alpha_d} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.6.12)$$

$$\text{com } D^n = \begin{pmatrix} \alpha_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_d^n \end{pmatrix}.$$

2. Caso 2:  $A$  é nilpotente. Isto é, existe  $k \geq 2$  tal que  $A^k = 0$ . Isso implica que  $e^A = I + A + \dots + \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$ . Portanto, a série é finita.

**Teorema 12.6.1.** *Dada qualquer  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$  existem  $D \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$  e  $N \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$  tais que*

- (a)  $A = D + N$
- (b)  $D$  é diagonalizável
- (c)  $N$  é nilpotente
- (d)  $D \cdot N = N \cdot D$

Os itens (a) e (d) implicam que  $e^A = e^D e^N$ .

Além disso,

$$D \simeq \left( \begin{array}{cc|cc|c} \lambda_1 & & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ \hline 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_2 & \\ \hline 0 & 0 & \ddots & & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ & & & & \lambda_s \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_s \end{array} \right)$$

em que  $\simeq$  significa a menos de mudança de base. Nas diagonais temos os autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  de  $A$  cada um repetido de acordo com a sua multiplicidade.

**Teorema 12.6.2** (Forma Canônica de Jordan). *Dados  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  e qualquer  $\varepsilon \neq 0$  existe  $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  invertível tal que*

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & O \\ & & \ddots & \\ O & & & B_k \end{pmatrix}$$

em que  $B_j = D_j + N_j$ , sendo

1. Caso real

$$D_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ & \lambda_j & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \lambda_j \end{pmatrix} = \lambda_j I$$

e

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & & & \\ 0 & 0 & \varepsilon & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \ddots & \varepsilon \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Assim,  $PAP^{-1} = D + N$ , em que  $D$  é diagonal e  $N$  é nilpotente.

2. Caso complexo

$$D_j = \begin{pmatrix} R_j & & & \\ & R_j & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & R_j \end{pmatrix}$$

em que  $R_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$  com  $\beta_j \neq 0$  e

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon I_2 & & & \\ 0 & 0 & \varepsilon I_2 & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \ddots & \varepsilon I_2 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

em que  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Além disso,  $\lambda_j$  e  $\alpha_j + i\beta_j$  são os zeros do polinômio característico  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  de acordo com a sua multiplicidade. No caso complexo, a dimensão de  $D_j$  e  $N_j$  é par.

Em qualquer dos casos,  $\dim D_j = \dim N_j$ . Em particular,  $\dim D_j = 1 \implies N_j = [0]$ . No caso complexo,  $\dim D_j = 2 \implies N_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Seja a seguinte observação.

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & & & \\ 0 & \varepsilon & \mathbf{O} & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{O} & & \ddots & \varepsilon & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

é nilpotente. Seja  $\{e_1, \dots, e_d\}$  a base canônica na qual essa matriz está definida. Além disso,  $Ne_1 = 0, Ne_2 = e_1, Ne_3 = e_2, \dots, Ne_d = e_{d-1}$ , o que implica que  $N^2e_1 = 0, N^2e_2 = 0, N^2e_3 = \varepsilon^2e_1, \dots, Ne_d = \varepsilon^2e_{d-2}$ . Assim,  $N^d = 0$  e a exponencial de  $N$  é obtida como

$$e^N = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{2!} & \frac{\varepsilon^3}{3!} & \cdots & \frac{\varepsilon^{(d-1)}}{(d-1)!} \\ 1 & \varepsilon & \frac{\varepsilon^2}{2!} & \cdots & & \frac{\varepsilon^{(d-2)}}{(d-2)!} \\ 1 & \varepsilon & \cdots & & & \frac{\varepsilon^{(d-3)}}{(d-3)!} \\ \mathbf{O} & 1 & \cdots & & & \frac{\varepsilon^{(d-4)}}{(d-4)!} \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Seja a seguinte observação.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & \mathbf{O} & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{O} & & \ddots & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Então, existe  $P$  invertível tal que

$$PNP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & & & \\ 0 & \varepsilon & \mathbf{O} & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ \mathbf{O} & & \ddots & \varepsilon & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Temos uma base  $\{e_1, \dots, e_d\}$  tal que  $Ne_1 = 0, Ne_2 = e_1, Ne_3 = e_2, \dots, Ne_d = e_{d-1}$ .

Queremos uma outra base  $\{v_1, \dots, v_d\}$  tal que  $Nv_1 = 0, Nv_2 = \varepsilon e_1, Nv_3 = \varepsilon e_2, \dots, Nv_d = \varepsilon e_{d-1}$ .

Tomamos  $v_1 = e_1, v_2 = \varepsilon e_2, v_3 = \varepsilon^2 e_3, \dots, v_d = \varepsilon^{d-1} e_d$ .

### 12.6.2 Caso Bidimensional

Aqui,

$$x' = Ax \quad (12.6.13)$$

com  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ .

Vamos estudar os diferentes casos.

1.  $A$  tem dois autovalores reais distintos tal que  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

Portanto,  $A$  admite uma base de autovetores, isto é, ela é diagonalizável, ou seja, existe  $P$  invertível tal que  $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ .

Assim,

$$Pe^{tA}P^{-1} = e^{PtAP^{-1}} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} \end{pmatrix} \quad (12.6.14)$$

- (a) Caso  $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ : repulsor (nó)
- (b) Caso  $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ : atrator (nó)
- (c) Caso  $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ : sela
- (d) Caso  $\lambda_1 = 0 < \lambda_2$
- (e) Caso  $\lambda_2 = 0 < \lambda_1$

2.  $A$  tem apenas um autovalor  $\lambda$

Assim,

- (a) Caso 1: a multiplicidade geométrica do autovalor (dimensão do respectivo auto-espacô) é 2

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (12.6.15)$$

- i.  $\lambda > 0$ : repulsor (nó)

ii.  $\lambda < 0$ : atrator (nó)

iii.  $\lambda = 0$ : todos os pontos são estacionários

- (b) Caso 2: a multiplicidade geométrica do autovalor (dimensão do respectivo auto-espacô) é 1

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12.6.16)$$

A exponencial aqui é

$$\begin{aligned} Pe^{tA}P^{-1} &= e^{tD}e^{tN} \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & t\varepsilon e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.6.17)$$

i.  $\lambda > 0$ : repulsor (nó)

ii.  $\lambda < 0$ : atrator (nó)

iii.  $\lambda = 0$ : pontos estacionários

$$Pe^{tA}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & t\varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (12.6.18)$$

### 3. Caso 3: nenhum autovalor

Os zeros do polinômio característico são complexos não reais da forma  $\alpha + i\beta$ , com  $\beta \neq 0$ . Então,

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \quad (12.6.19)$$

Observe que

$$R = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \quad (12.6.20)$$

e que  $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$  e  $\mathcal{I} = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$  comutam.

Assim,

$$e^{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^\alpha \end{pmatrix} \quad (12.6.21)$$

Para calcular a exponencial da matriz associada à parte imaginária note que:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} = -\beta^2 I \\ \mathcal{I}^3 &= -\beta^2 I \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta^3 \\ -\beta^3 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{I}^4 &= (-\beta^2 I)^2 = \beta^4 I \end{aligned} \quad (12.6.22)$$

Assim,

$$\begin{aligned} e^{\mathcal{I}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2!} \begin{pmatrix} -\beta^2 & 0 \\ 0 & -\beta^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3!} \begin{pmatrix} 0 & \beta^3 \\ -\beta^3 & 0 \end{pmatrix} + \dots \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{4!} - \dots & -\beta + \frac{\beta^3}{3!} - \frac{\beta^5}{5!} + \dots \\ \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!} + \dots & 1 - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^4}{4!} - \dots \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.6.23)$$

Portanto,

$$P e^{tA} P^{-1} = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{t\alpha} & 0 \\ 0 & e^{t\alpha} \end{pmatrix}}_W \underbrace{\begin{pmatrix} \cos t\beta & -\sin t\beta \\ \sin t\beta & \cos t\beta \end{pmatrix}}_V \quad (12.6.24)$$

A matriz  $W$  é a matriz de rotação de ângulo  $t\beta$ .

### 12.6.3 Classificação de Fluxos Lineares

Como em toda estrutura matemática, nas equações diferenciais e nos fluxos ou sistemas dinâmicos, levanta-se o problema de comparar dois objetos com a mesma estrutura, identificando-os se tiverem as mesmas propriedades essenciais da estrutura. Assim, na álgebra, dois grupos são

considerados equivalentes se eles são isomorfos; na topologia, se são homeomorfos. No primeiro caso, o isomorfismo preserva a operação do grupo, no segundo caso o homeomorfismo preserva os conjuntos abertos dos espaços.

Dois fluxos  $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$  e  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  são  $\mathcal{C}^k$ -conjugados se existe  $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$   $\mathcal{C}^k$ -invertível, ou seja, um difeomorfismo  $\mathcal{C}^k$ , tal que

$$h(f^t(x)) = g^t(h(x)), \forall t, x \quad (12.6.25)$$

Dois fluxos  $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$  e  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  são  $\mathcal{C}^k$ -equivalentes se existe  $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$   $\mathcal{C}^k$ -invertível que envia trajetórias de  $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$  em trajetórias de  $(g^t)_{t \in \mathbb{R}}$  preservando o sentido do tempo, isto é,

$$h(f^t(x)) = g^{\phi(t)}(h(x)), \forall t, x \quad (12.6.26)$$

em que  $\phi$  é uma função monótona crescente.

Vamos considerar

$$f^t = e^{tA}x \quad (12.6.27)$$

$$g^t = e^{tB}x \quad (12.6.28)$$

**Definição 12.6.2** (Norma de um Operador). Temos que  $\|L\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|L(x)\|}{\|x\|}$  e  $\|Lx\| \leq \|L\|\|x\|, \forall x$ .

Seja o seguinte teorema.

**Teorema 12.6.3.** São equivalentes as seguintes afirmações:

1. A e B são similares, isto é, existe P tal que  $B = PAP^{-1}$ . Ou seja, A e B são matrizes do mesmo operador linear em bases distintas.
2.  $e^{tA}$  e  $e^{tB}$  são linearmente conjugados, isto é, h pode ser tomado linear.
3.  $e^{tA}$  e  $e^{tB}$  são  $\mathcal{C}^k$ -conjugados para qualquer  $1 \leq k \leq \infty$

*Demonstração.* O item (1) implica o item (2).

Se  $B = PAP^{-1}$ , então

$$e^{tB} = Pe^{tA}P^{-1} \quad (12.6.29)$$

isto é,  $P(e^{tA}x) = e^{tB}(Px), \forall t, \forall x$ . Basta tomar  $h = P$ .

O item (2) implica o item (3) é trivial.

O item (3) implica o item (1).

Suponhamos que existe  $h \in \mathcal{C}^1$  tal que  $h(e^{tA}x) = e^{tB}(h(x))$ ,  $\forall t, x$ . Derivando com relação a  $t$ ,

$$Dh(e^{tA}x)e^{tA}Ax = e^{tB}Bh(x), \quad \forall t, x \quad (12.6.30)$$

Tomando  $t = 0$ , temos:

$$Dh(x)Ax = Bh(x), \quad \forall x \quad (12.6.31)$$

Pela fórmula de Taylor,

$$h(x) = h(0) + Dh(0)x + R_2(x) \quad (12.6.32)$$

em que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_2(x)}{\|x\|} \rightarrow 0$  e

$$Dh(x) = Dh(0) + R_1(x) \quad (12.6.33)$$

em que  $\lim_{x \rightarrow 0} R_1(x) \rightarrow 0$ .

Observe que  $x = 0$  é ponto estacionário de  $e^{tA}$ . Portanto,  $h(0)$  é ponto estacionário de  $e^{tB}$ . Disso decorre que  $Bh(0) = 0$ . Logo,

$$[Dh(0) + R_1(x)]Ax = B[h(0) + Dh(0)x + R_2(x)] \quad (12.6.34)$$

Fazendo  $Dh(0) = P$ , obtemos:

$$[PA - BP]x = BR_2(x) - R_1(x)Ax \quad (12.6.35)$$

Queremos mostrar que a aplicação  $PA - BP$  é nula. Para tanto, façamos

$$\begin{aligned} \frac{\|(PA - BP)x\|}{\|x\|} &= \frac{\|BR_2(x) - R_1(x)Ax\|}{\|x\|} \\ &\leq \|B\| \frac{\|R_2(x)\|}{\|x\|} + \|R_1(x)\| \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \end{aligned} \quad (12.6.36)$$

em que  $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \|A\|$ . A expressão  $\|B\| \frac{\|R_2(x)\|}{\|x\|} + \|R_1(x)\| \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$  converge para zero quando  $x \rightarrow 0$ .

Mostramos que para todo  $\varepsilon > 0$  existe um  $\delta > 0$  tal que

$$\|x\| \leq \delta \implies \left\| (PA - BP) \frac{x}{\|x\|} \right\| \leq \varepsilon \quad (12.6.37)$$

Portanto,  $\max_{\|v\|=1} \|(PA - BP)v\| \leq \varepsilon$ . Como  $\varepsilon$  é arbitrário, segue que  $PA - BP = 0$ . ■

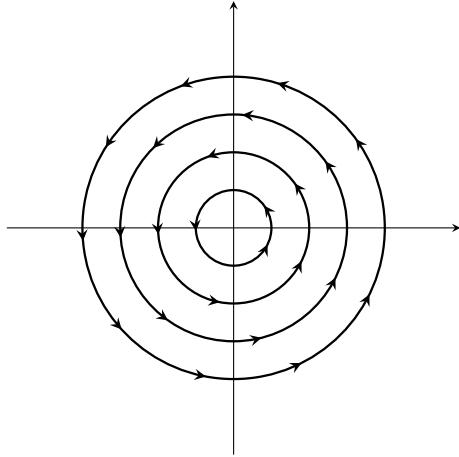
**Corolário 12.6.3.1.** Se  $f^t = e^{tA}$  e  $g^t = e^{tB}$  são  $C^1$ -conjugados, então  $A$  e  $B$  têm os mesmos autovalores (com multiplicidades idênticas) se e somente se são linearmente conjugados.

#### 12.6.4 Campos Lineares Hiperbólicos

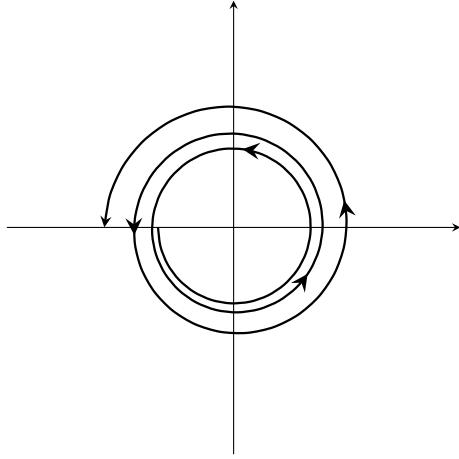
Comecemos com a seguinte definição:

**Definição 12.6.3.** Dizemos que  $A$  é hiperbólica se nenhum valor característico (isto é, nenhum zero do polinômio característico) tem parte real nula.

**Exemplo 12.6.1.** Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$ . Sua exponenciação resulta em  $e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{pmatrix}$ , cujo campo de vetores é dado por



Agora, seja a matriz  $\hat{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -\beta \\ \beta & \varepsilon \end{pmatrix}$ , cujo campo de vetores é dado por



A matriz  $A$  não é hiperbólica e uma pequena perturbação, como a apresentada na matriz  $\hat{A}$ , gera comportamentos instáveis.

Por enquanto, vamos supor sempre que  $A$  é hiperbólico. Nesse caso, o espaço  $\mathbb{R}^d$  pode ser decomposto como

$$\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u \quad (12.6.38)$$

a soma direta de dois subespaços com as seguintes propriedades:

1.  $A(E^s) = E^s$  e  $A(E^u) = E^u$
2. Os valores característicos de  $A|E^s$  são os valores característicos de  $A$  cuja parte real é negativa e os valores característicos de  $A|E^u$  são os valores característicos de  $A$  cuja parte real é positiva.

No caso de valores característicos que são autovalores isso significa que  $E^s$  é a soma dos auto-espaços associados aos autovalores negativos  $E^u$  é a soma dos auto-espaços associados aos autovalores positivos. Qualquer partição do espectro se traduz como uma decomposição em soma direta invariante (inclusive em dimensão infinita).

Além disso,  $E^s$  é chamado de subespaço estável e  $E^u$  é chamado de subespaço instável.

**Teorema 12.6.4.** Sejam  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  e  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  campos de vetores lineares hiperbólicos. São equivalentes:

1.  $\dim E_A^s = \dim E_B^s$  ou  $\dim E_A^u = \dim E_B^u$
2.  $e^{tA}$  e  $e^{tB}$  são  $\mathcal{C}^0$ -conjugados
3.  $e^{tA}$  e  $e^{tB}$  são  $\mathcal{C}^0$ -equivalentes

Dois fluxos lineares hiperbólicos são topologicamente conjugados se e somente se as duas matrizes associadas têm o mesmo número de valores característicos com parte real negativa e, portanto, o mesmo número de valores característicos com parte real positiva, em que o número é sempre contado com multiplicidade.

**Exemplo 12.6.2.** Sejam as matrizes  $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$

Assim,  $\dim E_A^s = \dim E_B^s = 2$  e  $\dim E_A^u = \dim E_B^u = 0$ . Portanto,  $e^{tA}$  e  $e^{tB}$  são topologicamente conjugados, mas não são  $C^1$ -conjugados.

Vamos mostrar de fato que  $e^{tA}$  e  $e^{tB}$  são topologicamente conjugados.

Assim,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad (12.6.39)$$

Logo,

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{-2t} \\ y(t) = y_0 e^{-t} \end{cases} \quad (12.6.40)$$

e, consequentemente,  $x(t) = [y(t)]^2 \frac{x_0}{y_0}$ .

Para a matriz  $B$

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} e^{-5t} & 0 \\ 0 & e^{-7t} \end{pmatrix} \quad (12.6.41)$$

e, consequentemente,  $x(t)^7 = [y(t)]^5 \frac{x_0^7}{y_0^5}$ .

FIGURA 12.6.2 – RETRATO DE FASE DE  $\exp(tA)$

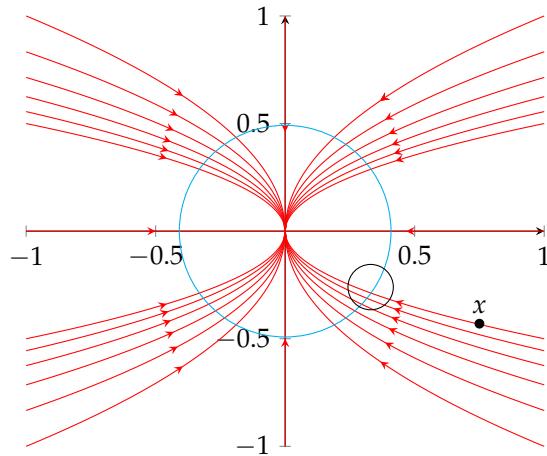
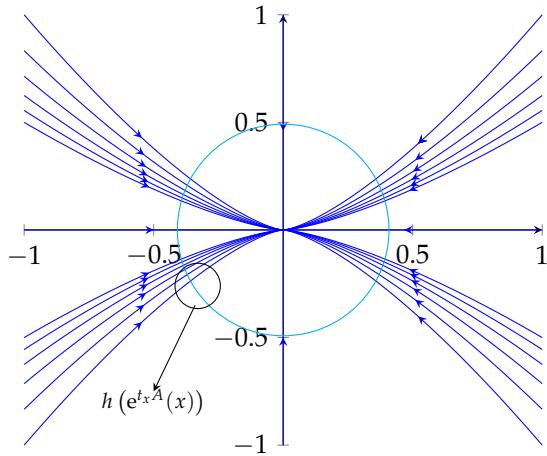


FIGURA 12.6.3 – RETRATO DE FASE DE  $\exp(tB)$



Os círculos representam um domínio particular que tem a seguinte propriedade: o conjunto escolhido intercepta cada uma das curvas em somente um ponto.

Assim,

$$\exists^1 t_x \in \mathbb{R} \text{ tal que } e^{t_x}A(x) \in S_A^1 \quad (12.6.42)$$

Vamos considerar o homeomorfismo

$$h: S_A^1 \rightarrow S_B^1 \quad (12.6.43)$$

Estendemos  $h$  a  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  da seguinte forma:

$$h(x) = e^{-t_x}B \left( h \left( e^{t_x}A(x) \right) \right) \quad (12.6.44)$$

isto é, pegamos o ponto do retrato de fase de  $e^{t_x}A$  e andamos para trás.

Do mesmo modo, para um ponto  $y$  qualquer no retrato de fase de  $e^{t_y}B$ , temos:

$$\exists^1 s_y \in \mathbb{R} \text{ tal que } e^{s_y}B(y) \in S_B^1 \quad (12.6.45)$$

e definimos

$$h^{-1}(y) = e^{-s_y}A \left( h^{-1} \left( e^{s_y}B(y) \right) \right) \quad (12.6.46)$$

Observe que  $h$  é invertível (uma bijeção) e é contínuo e, portanto, um homeomorfismo.

Finalmente, estendemos  $h$  a todo  $\mathbb{R}^d$  definindo

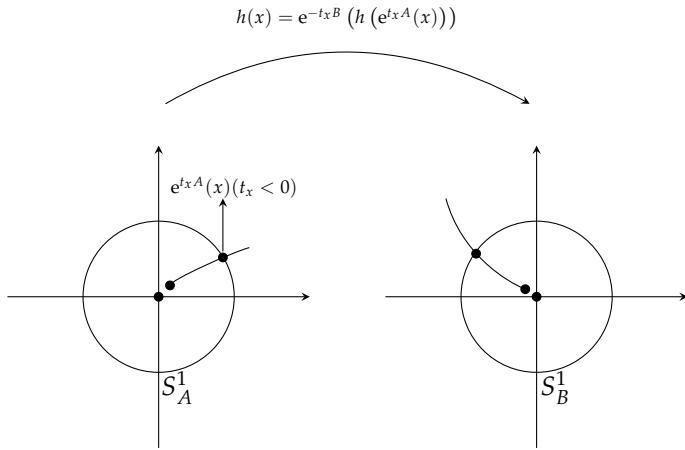
$$h(0) = 0 \quad (12.6.47)$$

Também,  $h$  é uma bijeção.

**Lema 12.6.1.**  $h$  e  $h^{-1}$  são contínuas na origem.

E lembre que  $h$  e  $h^{-1}$  são  $C^\infty$  em  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ .

*Demonstração.* Se  $x$  está próximo da origem, como na figura à esquerda, leva muito tempo para ele chegar ao círculo. Seja  $x \approx 0$ , então  $t_x \approx -\infty$  e, portanto,  $e^{-t_x B} (h(e^{t_x A}(x))) \approx 0$ . Note que  $t_x$  é o tempo necessário para o ponto chegar ao bordo do círculo.



Logo,

1. para todo  $C > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in B_\delta(0)$  implica que  $t_x \leq -C$  (dependência contínua nas condições iniciais)
2. para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $C > 0$  tal que se  $t > C$  e  $y \in S_B^1$  implicam que  $e^{tB}(y) \in B_\varepsilon(0)$

■

Antes de provar o teorema 12.6.4 vamos deduzir o seguinte corolário.

**Corolário 12.6.4.1** (Estabilidade Estrutural). *Seja  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  qualquer campo de vetores linear hiperbólico. Então, para todo  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  suficientemente próximo de  $A$ , tem-se que*

1.  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  também é hiperbólico.
2. os fluxos  $e^{tA}$  e  $e^{tB}$  são  $C^0$ -conjugados.

Dizer que duas aplicações lineares são próximas quer dizer, por exemplo, que se escrevermos as matrizes das aplicações em uma mesma base seus coeficientes estão próximos. Ou que a norma da diferença entre as aplicações é pequena.

Assim, o corolário implica que se o campo de vetores da equação diferencial é hiperbólico, ela é estruturalmente estável. ■

*Demonstração.* Os valores característicos variam continuamente com o campo de vetores. Logo,  $\dim E_A^s = \dim E_B^s$  e  $\dim E_A^u = \dim E_B^u$ . ■

Com base no que já sabemos, não podemos empregar conjugação topológica no corolário acima, pois a mesma exige que os valores próprios sejam iguais.

*Demonstração.* Vamos à demonstração do teorema 12.6.4.

Temos a seguinte relação entre os itens do teorema: (1)  $\Rightarrow$  (2)  $\Rightarrow$  (3)  $\Rightarrow$  (1).

O item (2) implica o item (3) é trivial (a noção de conjugação é mais forte do que a noção de equivalência).

Seja a seguinte definição.

**Definição 12.6.4.** Dizemos que  $A$  é um atrator (repulsor) hiperbólico se todos os seus valores característicos têm parte real negativa (positiva).

Seja a seguinte proposição.

**Proposição 12.6.1.** Se  $A$  é um atrator hiperbólico, então existe  $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  invertível tal que  $B = PAP^{-1}$  satisfaz

$$B(x) \cdot x \leq 0, \quad \forall x \neq 0 \tag{12.6.48}$$

Dessa proposição extraímos o seguinte corolário.

**Corolário 12.6.4.2.** Todas as trajetórias do fluxo de  $e^{tB}$ , exceto a trajetória estacionária em  $x = 0$ , são transversais às esferas de  $\mathbb{R}^d$ , apontando para dentro. Em particular, cada trajetória intersecta cada esfera em no máximo um ponto.

Vamos provar a proposição acima.

*Demonstração.* Tomamos  $B = PAP^{-1}$  como a forma canônica de Jordan de  $A$ , tomando  $\varepsilon < |\lambda_j|, \forall j$  e  $\varepsilon < |\alpha_j|, \forall j$ . Como  $A$  é hiperbólica, a parte real dos valores próprios é não-nula e podemos escolher  $\varepsilon$  pequeno o suficiente.

Lembre que

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \mathbf{0} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & B_k \end{pmatrix}$$

em que cada  $B_j = D_j + N_j$  e  $d_j = \dim B_j = \dim D_j = \dim N_j$ .

Em que

$$D_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & & & \\ & \lambda_j & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & \lambda_j \end{pmatrix}$$

e

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon & & & \\ & 0 & \varepsilon & \mathbf{O} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{O} & & \ddots & \varepsilon \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Ou

$$D_j = \begin{pmatrix} R_j & & & \\ & R_j & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & R_j \end{pmatrix}$$

e

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon I_2 & & & \\ & 0 & \varepsilon I_2 & \mathbf{O} & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{O} & & \ddots & \varepsilon I_2 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{com } R_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix} \text{ e } \beta_j \neq 0.$$

Escrevemos  $x \in \mathbb{R}^d$  na forma  $(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k)$ , em que  $x_j \in \mathbb{R}^{d_j}$ . Então,

$$\begin{aligned} B(x) \cdot x &= (B(x_1), \dots, B(x_k)) \cdot (x_1, \dots, x_k) \\ &= \sum_{j=1}^k B(x_j) \cdot x_j \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^k \{ [D_j(x_j) \cdot x_j] + [N_j(x_j) \cdot x_j] \}$$

No caso real, temos que  $|N_j(x_j) \cdot x_j| \leq \varepsilon(x_j \cdot x_j)$  e que  $D_j(x_j) \cdot x_j = \lambda_j(x_j \cdot x_j)$ . Portanto,

$$\underbrace{[D_j(x_j) \cdot x_j]}_{< 0} + \underbrace{[N_j(x_j) \cdot x_j]}_{\rightarrow 0} \leq (\lambda_j + \varepsilon) \cdot \|x_j\|^2 \\ < 0, \forall x \neq 0 \quad (12.6.49)$$

No caso complexo, temos que  $x_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,n_j})$  em que  $x_{j,i} \in \mathbb{R}^2$ . Então,  $D_j(x_j) = (R_j x_{j,1}, \dots, R_j x_{j,n_j})$ . E podemos escrever  $R_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & 0 \\ 0 & \alpha_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\beta_j \\ \beta_j & 0 \end{pmatrix}$ , isto é,  $R_j = A_j + B_j$ . Logo,  $D_j(x_j) = (A_j x_{j,1}, \dots, A_j x_{j,n_j}) + (B_j x_{j,1}, \dots, B_j x_{j,n_j})$ . Assim,

$$D_j(x_j) = \sum_{i=1}^{n_j} A_j(x_{j,i}) \cdot x_{j,i} + B_j(x_{j,i}) \cdot x_{j,i} \\ = \alpha_j(x_j \cdot x_j) + 0 \\ = \alpha_j \cdot \|x_j\|^2 \quad (12.6.50)$$

Portanto,  $B(x_j) \cdot x_j \leq (\alpha_j + \varepsilon) \cdot \|x_j\|^2 < 0$ . ■

**Corolário 12.6.4.3.** *Toda trajetória (não estacionária) de  $e^{tB}$  intersecta cada esfera em exatamente um ponto.*

*Demonstração.* Basta observar que, dado  $x_0 \neq 0$ , temos:

1.  $e^{tB}(x_0) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$
2.  $\|e^{tB}(x_0)\| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow -\infty$

Escrevemos  $x_0 = (x_1, \dots, x_k)$ , em que  $x_j \in \mathbb{R}^{d_j}$ . Então,

$$e^{tB}(x_0) = (e^{tB_1}(x_1), \dots, e^{tB_k}(x_k)) \quad (12.6.51)$$

na qual  $e^{tB_j}(x_j) = e^{tN_j} (e^{tD_j}(x_j))$  e  $D_j N_j = N_j D_j$  (comutatividade).

E sabemos que  $e^{tD_j}(x_j)$  converge para 0 quando  $t \rightarrow +\infty$  e converge para  $+\infty$  (em norma) quando  $t \rightarrow -\infty$ . Também sabemos, que

$$e^{tD_j} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_j} & & & \\ & e^{t\lambda_j} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t\lambda_j} \end{pmatrix}$$

ou

$$e^{tD_j} = \begin{pmatrix} e^{t\alpha_j} & & & \\ & e^{t\alpha_j} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{t\alpha_j} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos t\beta_j & -\sin t\beta_j \\ \sin t\beta_j & \cos t\beta_j \\ & \ddots \\ & & \cos t\beta_j & -\sin t\beta_j \\ & & \sin t\beta_j & \cos t\beta_j \end{pmatrix}$$

Além disso,  $e^{tN_j}$  é uma matriz nilpotente e a série que define a exponencial é uma série finita e, portanto, polinomial (os coeficientes são polinômios em  $t$ ). ■

**Proposição 12.6.2.** Se  $A_1$  e  $A_2$  são atratores em  $\mathbb{R}^d$ , então os fluxos  $e^{tA_1}$  e  $e^{tA_2}$  são  $\mathcal{C}^0$ -conjugados.

Essa proposição é um caso particular da relação de implicação (1)  $\implies$  (2) do teorema.

*Demonstração.* Cada trajetória do fluxo  $e^{tA_1}$  intersecta a esfera em um único ponto e o mesmo para o fluxo  $e^{tA_2}$ . Também consideramos a forma canônica de Jordan  $B_1$  e  $B_2$  dadas pela proposição 12.6.1. Tomamos  $B_1 = P_1 A_1 P_1^{-1}$  e  $B_2 = P_2 A_2 P_2^{-1}$  tais que toda trajetória não-estacionária de  $e^{tB_1}$  e  $e^{tB_2}$  intersecta cada esfera num único ponto.

1.  $e^{tA_1}$  e  $e^{tB_1}$  são linearmente conjugados e, da mesma forma,  $e^{tA_2}$  e  $e^{tB_2}$  são linearmente conjugados.
2.  $e^{tB_1}$  e  $e^{tB_2}$  são  $\mathcal{C}^0$ -conjugados.

Começamos por considerar um homeomorfismo

$$h: S_1 \rightarrow S_2 \tag{12.6.52}$$

em que  $S_1$  e  $S_2$  são as esferas unitárias no espaço de  $A_1$  e de  $A_2$ , respectivamente. Estendemos  $h$  a um homeomorfismo

$$h: \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \tag{12.6.53}$$

da forma

$$h(x) = e^{-t_x B_2} h \left( e^{t_x B_1}(x) \right) \quad (12.6.54)$$

em que  $t_x \in \mathbb{R}$  é tal que  $e^{t_x B_1}(x) \in S_1$ .

Finalmente, completamos a definição de  $h$  com  $h(0) = 0$ . ■

Vamos ver a relação de implicação  $(1) \implies (2)$  do teorema em qualquer caso.

Suponhamos que  $\dim E_A^s = \dim E_B^s$  (logo,  $\dim E_A^u = \dim E_B^u$ ).

Então,  $A|E_A^s$  e  $B|E_B^s$  são atratores, pois os valores característicos dessas restrições são os valores característicos de  $A$  e  $B$  cuja parte real é negativa. Então, só há valores característicos com parte real negativa. E os espaços  $E_A^s$  e  $E_B^s$  têm a mesma dimensão e, portanto, são o mesmo espaço vetorial. Logo, pela proposição 12.6.2, existe um homeomorfismo

$$h^s : E_A^s \rightarrow E_B^s \quad (12.6.55)$$

que conjuga  $e^{tA}|E_A^s$  com  $e^{tB}|E_B^s$ .

De modo semelhante,  $A|E_A^u$  e  $B|E_B^u$  são repulsores, pois os valores característicos dessas restrições são os valores característicos de  $A$  e  $B$  cuja parte real é positiva. Dito de outra forma,  $-A|E_A^u$  e  $-B|E_B^u$  são atratores e, portanto,  $\mathcal{C}^0$ -conjugados. Logo, existe homeomorfismo

$$h^u : E_A^u \rightarrow E_B^u \quad (12.6.56)$$

que conjuga  $e^{tA}|E_A^u$  com  $e^{tB}|E_B^u$ .

Tomamos  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  ( $h : E_A^s \oplus E_A^u \rightarrow E_B^s \oplus E_B^u$ ) da seguinte forma:

$$h(x_s + x_u) = h^s(x_s) + h^u(x_u) \quad (12.6.57)$$

em que  $x_s \in E_A^s$ ,  $x_u \in E_A^u$ ,  $h^s(x_s) \in E_B^s$  e  $h^u(x_u) \in E_B^u$ .

Vamos ver a relação de implicação  $(3) \implies (1)$ .

Suponhamos que existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  que envia trajetórias de  $e^{tA}$  em  $e^{tB}$  preservando o sentido do tempo.

Seja o seguinte lema.

**Lema 12.6.2.** Temos que

1.  $h(0) = 0$

2.  $h(E_A^s) = E_B^s$

$$3. h(E_A^u) = E_B^u.$$

*Demonstração.* Demonstração do lema.

1. 0 é o único ponto estacionário de qualquer dos dois campos de vetores (tanto de  $A$  quanto de  $B$ ). Observe que ao dizermos que a parte real de qualquer valor característico é não-nula, estamos dizemos que 0 não é um valor característico. Portanto,  $A$  e  $B$  são invertíveis (campos lineares de vetores não têm núcleo).
2. Se  $x$  está em  $E_A^s$ , então  $e^{tA}x \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Logo,  $e^{tB}h(x) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Podemos escrever  $h(x) = y^s + y^u \in E_B^s \oplus E_B^u$  e, então  $e^{tB}h(x) = e^{tB}y^s + e^{tB}y^u$ . O fluxo  $e^{tB}y^s$  converge para zero quando  $t \rightarrow +\infty$ , o fluxo  $e^{tB}y^s$  converge para zero quando  $t \rightarrow +\infty$  e o fluxo  $e^{tB}y^u$  converge para  $+\infty$  (em norma) quando  $t \rightarrow +\infty$  a menos que  $y^u = 0$ . Isso implica que  $y^u = 0$ , isto é,  $h(x) \in E_B^s$ .
3. Análogo ao item anterior.

Uma equivalência e, mesmo uma conjugação, preservam o tipo de comportamento. Se  $x$  tem como comportamento assintótico convergir para a origem, a imagem dele deve ter o mesmo tipo de comportamento assintótico e, portanto, convergir para a origem. ■

Seja o seguinte teorema:

**Teorema 12.6.5** (Teorema da Invariância do Domínio). *Se  $m \neq n$ , então  $\mathbb{R}^m$  não é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ .*

Com isso concluímos que  $\dim E_A^s = \dim E_B^s$ . ■

## 12.7 Equações Lineares Não Autônomas

Equações diferenciais lineares não-autônomas homogêneas são da forma

$$x' = A(t)x(t) \tag{12.7.1}$$

em que  $A: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  é uma curva contínua com valores em aplicações lineares de  $\mathbb{R}^d$ .

Equações diferenciais lineares não-autônomas não-homogêneas são da forma

$$x' = A(t)x(t) + B(t) \tag{12.7.2}$$

em que  $B: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  é uma curva contínua com valores em aplicações lineares de  $\mathbb{R}^d$ .

### 12.7.1 Solução Fundamental e Teorema de Liouville

Dada a equação diferencial (não-linear) autônoma  $x' = F(x)$ , se  $F$  é  $\mathcal{C}^1$ , então  $\phi: (t, x) \mapsto f^t(x)$  é  $\mathcal{C}^1$  e  $\partial_x \phi$  satisfaz  $\partial_t \partial_x \phi = DF(\phi(t, x)) \partial_x \phi$ . Podemos escrever  $X' = DF(\phi(t, x))X$ , em que  $A = DF(\phi(t, x))$ . Observe que esta é uma equação diferencial linear não-autônoma.

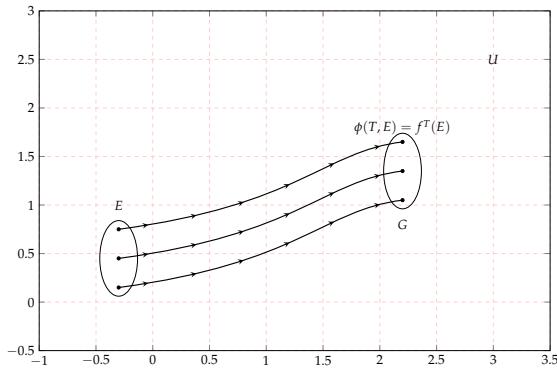
Considere a Fórmula de Liouville:

$$\det \partial_x \phi = \exp \left( \int_{t_0}^t \operatorname{tr} DF(\phi(s, x)) ds \right) \quad (12.7.3)$$

em que  $t \mapsto \phi(t, x_0)$  denota a solução de  $x' = F(x)$  com  $x(t_0) = x_0$ , isto é,  $\phi(t_0, x_0) = x_0$ ,  $\forall x_0$  com  $\phi(t_0, \cdot) = I$  e  $\partial_x \phi(t_0, x_0) = I$ . Por definição,  $\operatorname{tr} DF(\phi(s, x))$  é o divergente de  $F(\phi(s, x))$ . Assim, a Fórmula de Liouville nos diz como calcular a derivada espacial do fluxo a partir do divergente do campo de vetores.

**Corolário 12.7.0.1.** Se  $\operatorname{div} F \equiv 0$  então  $\det \partial_x \phi \equiv 1$ .

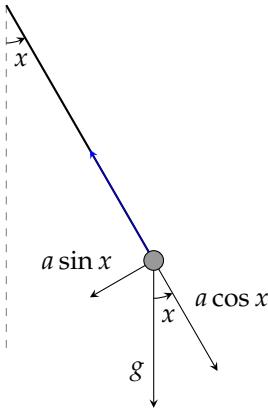
Sabemos que  $\phi(t, x) = f^t: E \rightarrow G$  é bijetiva, diferenciável e a inversa é diferenciável. Fixando  $T$ , temos a figura abaixo.



Supondo que  $\operatorname{div} F \equiv 0$ , temos que

$$\operatorname{vol} G = \int_E |\det Df^T| = \int_E \det \partial_x \phi(T, \cdot) = \int_E 1 = \operatorname{vol}(E) \quad (12.7.4)$$

**Exemplo 12.7.1.** Seja o pêndulo simples dado por  $x'' = -g \sin x$  com  $g \in (0, +\infty)$ .



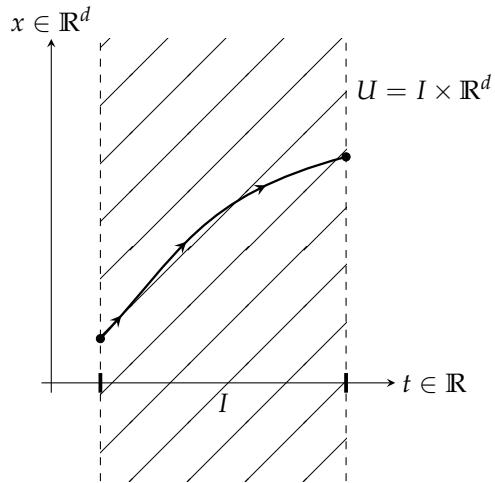
Vamos fazer uma mudança de variáveis para escrever o problema como uma equação diferencial de primeira ordem. Para tanto, temos o seguinte sistema:  $\begin{cases} x' = y \\ y' = -g \sin x \end{cases}$ . O campo de vetores é  $F(x, y) = (y, -g \sin x)$ . E a derivada do campo de vetores no ponto  $(x, y)$  é uma aplicação linear  $DF(x, y): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , cuja matriz, na base canônica, é a seguinte matriz jacobiana:

$$\mathcal{J}F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g \cos x & 0 \end{pmatrix} \quad (12.7.5)$$

em que  $\text{tr } \mathcal{J}F(x, y) = 0$ . Ou seja, o  $\text{div } F(x, y) \equiv 0$ . Portanto, o fluxo  $f^t$  de  $x'' = -g \sin x$  é conservativo (preserva volume).

Sejam as seguintes propriedades das soluções de (12.7.1).

1. As soluções maximais estão definidas em todo  $I$ .



2. O conjunto das soluções maximais é um subconjunto do espaço das aplicações  $u: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  diferenciáveis. O subconjunto das soluções maximais é um subespaço vetorial. Isso significa

que se  $\mu_1: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  e  $\mu_2: I \rightarrow \mathbb{R}^d$  são soluções da equação (12.7.1), então  $\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2, \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ , também é solução.

*Demonstração.* Observe que

$$\begin{aligned} (\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2)' &= \alpha_1\mu_1' + \alpha_2\mu_2' \\ &= \alpha_1A(t)u_1 + \alpha_2A(t)u_2 \\ &= A(t)(\alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2) \end{aligned} \tag{12.7.6}$$

■

3. A dimensão do conjunto das soluções maximais é  $d$ .

*Demonstração.* Sejam  $u_1(t), \dots, u_n(t)$  soluções maximais e seja  $t_0 \in I$  tal que  $\bar{x}_1 = u_1(t_0), \dots, \bar{x}_n = u_n(t_0)$ .

**Lema 12.7.1.** *Se  $\{u_1, \dots, u_n\}$  é linearmente independente se e somente se  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  é linearmente independente.*

Observe que  $\{u_1, \dots, u_n\}$  está no espaço de curvas e  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  está no espaço de vetores.

Sejam  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$\alpha_1u_1 + \dots + \alpha_nu_n = 0 \tag{12.7.7}$$

que é a curva constante igual a zero.

Então,

$$\alpha_1u_1(t_0) + \dots + \alpha_nu_n(t_0) = 0 \tag{12.7.8}$$

que é o vetor nulo.

Isto é,

$$\alpha_1\bar{x}_1 + \dots + \alpha_n\bar{x}_n = 0 \tag{12.7.9}$$

E como  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  é linearmente independente, então:

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \tag{12.7.10}$$

Dito de outro modo, se as condições iniciais são linearmente independentes, então as soluções são linearmente independentes.

Agora, vamos mostrar a recíproca, isto é, se as soluções são linearmente independentes então as condições iniciais são linearmente independentes.

Seja  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  tais que

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_n \bar{x}_n = 0 \quad (12.7.11)$$

Consideremos a seguinte solução de (12.7.1)

$$x(t) = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \quad (12.7.12)$$

satisfazendo  $x(t_0) = 0$ .

E seja a seguinte solução alternativa de (12.7.1)

$$y(t) \equiv 0 \quad (12.7.13)$$

satisfazendo  $y(t_0) = 0$ .

Por unicidade,

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n \equiv 0 \quad (12.7.14)$$

Como  $\{u_1, \dots, u_n\}$  é linearmente independente, segue que

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (12.7.15)$$

Segue que a dimensão do conjunto das soluções maximais é  $d$ . ■

4.  $\{u_1, \dots, u_n\}$  é linearmente independente se e somente se  $\{u_1(t), \dots, u_n(t)\}$  é linearmente independente para todo  $t \in I$ .

Vamos ver o aspecto de solução fundamental de (12.7.1), que pode ser escrita como

$$X: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \quad (12.7.16)$$

com  $X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{d1}(t) & \dots & x_{dd}(t) \end{pmatrix}$ , tal que os vetores coluna formam uma base do conjunto de soluções maximais de (12.7.1). Além disso,  $X(t)$  é invertível para todo  $t \in I$ . Assim, se temos soluções que são linearmente independentes como curvas elas também são linearmente independentes em cada ponto.

**Exemplo 12.7.2.** Seja

$$\begin{aligned} u_1(t) &= (t, t^2) \\ u_2(t) &= (t, 0) \end{aligned}$$

com  $t \in \mathbb{R}$ .

O conjunto de soluções  $\{u_1, u_2\}$  é LI? Verificando

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 &= 0 \\ \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \\ (\alpha_1 t + \alpha_2 t, \alpha_1 t^2) &= 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{12.7.17}$$

o que implica que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

Porém, as curvas calculadas em  $t = 0$  não são linearmente independentes.

Considere os seguintes aspectos da solução fundamental:

1. Sejam os vetores coluna  $x_j(t) = (x_{1j}(t), \dots, x_{dj}(t))$ . Então,  $x'_j(t) = A(t)x_j(t)$  com  $A(t) = (a_{ik}(t))_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq k \leq d}}$ . Logo,  $x'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^d a_{ik}(t)x_{kj}(t)$ . E, por consequência,  $X'(t) = A(t)X(t)$ .
2. Se  $X'(t)$  é solução fundamental, então  $Y(t) = X(t)P$  para qualquer  $t$  também é solução fundamental desde que  $P$  seja invertível. Reciprocamente, se  $Y(t)$  é solução fundamental qualquer, podemos escrever

$$y_j(t) = \beta_{j1}x_1(t) + \dots + \beta_{jd}x_d(t) \tag{12.7.18}$$

isto é,

$$y_{ij}(t) = \beta_{j1}x_{i1}(t) + \dots + \beta_{jd}x_{id}(t), \quad \forall i \tag{12.7.19}$$

em que

$$P = \left( \beta_{ij} \right)_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq d}} \quad (12.7.20)$$

**Teorema 12.7.1** (Fórmula de Liouville). *Seja  $X: I \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  solução fundamental e  $t_0 \in I$  qualquer. Então,*

$$\frac{\det X(t)}{\det X(t_0)} = \exp \left( \int_{t_0}^t \operatorname{tr} A(s) ds \right) \quad (12.7.21)$$

*Demonstração.* Seja

$$X(t) = \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{d1}(t) & \dots & x_{dd}(t) \end{pmatrix} \quad (12.7.22)$$

com  $x_1(t) = (x_{11}(t) \ \dots \ x_{d1}(t))$  e  $x_d(t) = (x_{1d}(t) \ \dots \ x_{dd}(t))$ .  
Também,

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(t) & \dots & a_{dd}(t) \end{pmatrix} \quad (12.7.23)$$

E como derivamos o determinante de  $X(t)$ ? Um determinante, por definição, é uma aplicação (função) multilinear das linhas e das colunas da matriz associada. É o único funcional  $d$ -linear normalizado que pode ser definido em  $\mathbb{R}^d$ . Assim,

$$(\det X(t))' = \sum_{i=1}^d \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x'_{i1}(t) & \dots & x'_{id}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{d1}(t) & \dots & x_{dd}(t) \end{pmatrix} \quad (12.7.24)$$

E temos que  $x'_{ij}(t) = \sum_{k=1}^d a_{ik}(t)x_{kj}(t)$ ,  $\forall i, j$ , ou seja,

$$(x'_{i1}(t) \ \dots \ x'_{id}(t)) = \sum_{k=1}^d a_{ik}(t) (x_{k1}(t) \ \dots \ x_{kd}(t)).$$

Com isso, temos que

$$\begin{aligned}
 (\det X(t))' &= \sum_{i=1}^d \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ii}(t)x_{i1}(t) & \dots & a_{ii}(t)x_{id}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{d1}(t) & \dots & x_{dd}(t) \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \det \begin{pmatrix} x_{11}(t) & \dots & x_{1d}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{ik}(t)x_{k1}(t) & \dots & a_{ik}(t)x_{kd}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{d1}(t) & \dots & x_{dd}(t) \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^d a_{ii}(t) \det X(t) \\
 &= \text{tr } A(t) \det X(t)
 \end{aligned} \tag{12.7.25}$$

Mostramos que

$$(\log \det X(t))' = \text{tr } A(t) \tag{12.7.26}$$

Integrando entre  $t_0$  e  $t$ , concluímos que

$$\log \det X(t) - \log \det X(t_0) = \int_{t_0}^t \text{tr } A(s) ds \tag{12.7.27}$$

■

## 12.7.2 Equações com Coeficientes Periódicos: Teorema de Floquet

Suponhamos que  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  é  $T$ -periódica para algum  $T > 0$ .

**Exemplo 12.7.3.** Seja a equação de Mathieu dada por

$$x'' = (a + b \sin t)x, \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{12.7.28}$$

Vamos fazer uma mudança de variáveis para escrever o problema como uma equação diferencial de primeira ordem. Para tanto, temos o seguinte sistema:  $\begin{cases} x' = y \\ y' = (a + b \sin t)x \end{cases}$ , o que significa que podemos escrever

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a + b \sin t & 0 \end{pmatrix} \quad (12.7.29)$$

A função é  $2\pi$ -periódica e seu traço é nulo.

Ser periódica significa que  $A(t+T) = A(t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Seja  $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  solução fundamental de (12.7.1) e vamos considerar  $Y(t) = X(t+T)$ . Queremos entender qual a relação entre as soluções fundamentais  $X(t)$  e  $Y(t)$  com o tempo deslocado  $T$  períodos. Assim,

$$\begin{aligned} Y(t)' &= X'(t+T) \\ &= A(t+T)X(t+T) \\ &= A(t)X(t+T) \\ &= A(t)Y(t) \end{aligned} \quad (12.7.30)$$

Isto significa que  $Y(t)$  também é solução fundamental de (12.7.1). Portanto, existe  $P$  invertível tal que

$$X(t+T) = Y(t) = X(t)P, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (12.7.31)$$

em que  $P = (X(0))^{-1}X(t)$ .

Suponhamos que existe alguma matriz  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$  tal que  $P = e^{TB}$ . Então,

$$X(t+T) = X(t)e^{TB}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (12.7.32)$$

Denotemos  $C(t) = X(t)e^{-tB}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Então,

$$\begin{aligned} C(t+T) &= X(t+T)e^{-(t+T)B} \\ &= X(t)e^{TB}e^{-(t+T)B} \\ &= X(t)e^{-tB}, \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (12.7.33)$$

**Teorema 12.7.2.** Se  $A$  é  $T$ -periódica, então existe  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$  e existe uma função  $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$   $T$ -periódica tal que  $X(t) = C(t)e^{tB}$ .

1. Observe que  $X(t) = C(t)e^{tB}$  é a forma normal de Floquet da solução fundamental.

2. Usando o fato de que  $\det e^B = e^{\text{tr } B}$ , quando  $\text{tr } A \equiv 0$ , então  $\det P = 1$  (por Liouville) e, portanto,  $\text{tr } B \equiv 0$ .

3. Fazendo  $X(t) \Rightarrow (C(t))^{-1}X(t) = e^{tB}$  obtemos a solução da equação  $y' = By$ . Assim, teorema de Floquet diz que é possível transformar uma equação com coeficientes periódicos em uma equação com coeficientes constantes.

Vamos fazer uma breve digressão sobre logaritmo de matrizes.

Dado  $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  invertível, existe  $B$  tal que  $e^B = P$ ? Lembre que a exponencial sempre tem determinante não-nulo, isto é, é invertível.

Sejam os seguintes exemplos.

**Exemplo 12.7.4.** Seja a seguinte matriz diagonal

$$P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & O \\ & & O & \ddots \\ & & & \lambda_d \end{pmatrix}$$

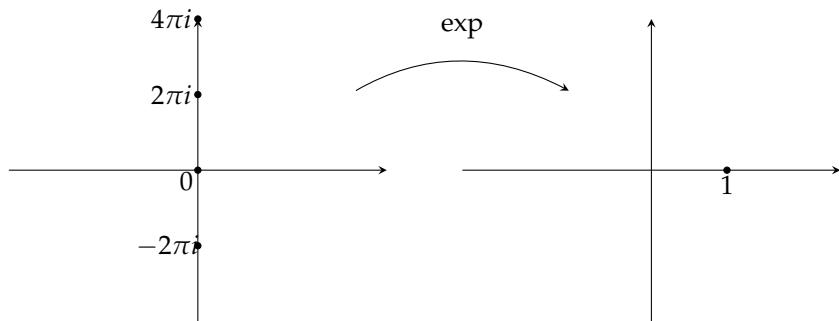
Então,

$$B = \begin{pmatrix} \log \lambda_1 & & & \\ & \log \lambda_2 & & O \\ & & O & \ddots \\ & & & \log \lambda_d \end{pmatrix}$$

Observe que

1.  $B$  pode ser tomada como real se e somente se  $\lambda_j > 0$ ,  $\forall j$ .
2.  $B$  não é única.

FIGURA 12.7.1 – LOGARITMO NO CASO COMPLEXO



A exponencial é  $2\pi i$ -periódica e multivalorada.

**Exemplo 12.7.5.** Seja uma matriz nilpotente. Sabemos que ela não é invertível. Então, vamos resolver a seguinte identidade

$$I + N = e^B \quad (12.7.34)$$

em que “ $B = \log(I + N)$ ”. Os autovalores de  $I$  e  $N$  são, respectivamente, 0 e 1. Portanto,  $I + N$  tem apenas 1’s como autovalores e é uma matriz invertível. Lembre que  $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \dots$  para  $|x| < 1$ .

Um candidato natural seria

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \frac{N^j}{j} = N - \frac{N^2}{2} + \frac{N^3}{3} - \frac{N^4}{4} + \frac{N^5}{5} + \dots \quad (12.7.35)$$

A matriz  $N$  é nilpotente e, portanto, a série é finita. Logo, convergente.

Também note que  $B$  é real se  $N$  é real.

Com esses dois exemplos podemos ir para o caso geral.

Podemos supor que  $P$  está na forma canônica de Jordan, isto é,

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & & & \\ & P_2 & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & P_n \end{pmatrix}$$

em que  $P_j = D_j + N_j$  e  $D_j$  e  $N_j$  são matrizes complexas.

Para encontrarmos  $B$  vamos tomar

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \mathbf{O} \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & B_n \end{pmatrix}$$

em que  $e^{B_j} = P_j$ .

Precisamos encontrar os  $B_j$ ’s. Assim,

$$\begin{aligned} e^{B_j} &= \lambda_j I + N_j \\ &= \lambda_j I \left( I + \frac{N_j}{\lambda_j} \right) \end{aligned} \quad (12.7.36)$$

Pelo exemplo 12.7.4 existe

$$\log(\lambda_j I) = \begin{pmatrix} \log \lambda_j & & & \\ & \log \lambda_j & \mathbf{O} & \\ & \mathbf{O} & \ddots & \\ & & & \log \lambda_j \end{pmatrix}$$

Pelo exemplo 12.7.5 existe

$$\log \left( I + \frac{N_j}{\lambda_j} \right)$$

Como estas matrizes comutam, basta tomar  $B_j = \log(\lambda_j I) + \log \left( I + \frac{N_j}{\lambda_j} \right)$ .

Portanto, seja a seguinte proposição.

**Proposição 12.7.1.** Para todo  $P$  invertível existe  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$  tal que  $e^B = P$ .

Seja o seguinte problema: quando podemos tomar  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ ?

1. os autovalores reais devem ser positivos
2. precisamos analisar também os blocos de Jordan da forma  $P_j = D_j + N_j$ , em que

$$D_j = \begin{pmatrix} R_j & & & \\ & R_j & \mathbf{O} & \\ & \mathbf{O} & \ddots & \\ & & & R_j \end{pmatrix}$$

e

$$N_j = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon I_2 & & \\ 0 & 0 & \mathbf{O} & \\ & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{O} & & \ddots & \varepsilon I_2 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

com  $R_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$  e  $\beta_j \neq 0$ .

Precisamos analisar se as matrizes  $R_j$  têm logaritmo, isto é, se existe  $\tilde{R}_j \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  tal que  $e^{\tilde{R}_j} = R_j$ . Também é preciso verificar se existe  $\tilde{P}_j$  real tal que  $e^{\tilde{P}_j} = P_j$ .

A única restrição, ao final, necessária, é que os autovalores reais devem ser positivos.

Até agora estivemos estudando equações do tipo (12.7.1). Agora, vamos nos debruçar sobre equações do tipo (12.7.2), isto é,  $x' = A(t)x(t) + B(t)$ .

**Lema 12.7.2.** Se  $u_1$  e  $u_2$  são soluções de  $x' = A(t)x(t) + B(t)$ , então  $u_1 - u_2$  é solução de  $x' = A(t)x(t)$ . De modo semelhante, se  $u_1$  é solução de  $x' = A(t)x(t) + B(t)$  e  $v$  é solução de  $x' = A(t)x(t)$ , então  $u_1 + v$  é solução de  $x' = A(t)x(t) + B(t)$ .

Portanto, o conjunto das soluções maximais de  $x' = A(t)x(t) + B(t)$  é um subespaço afim modelado no espaço vetorial do conjunto das soluções maximais de  $x' = A(t)x(t)$ .

Para conhecer todas as soluções de  $x' = A(t)x(t) + B(t)$  basta conhecer alguma solução de  $x' = A(t)x(t) + B(t)$  e todas as soluções de  $x' = A(t)x(t)$ .

De fato, se conhecermos as soluções da equação homogênea, podemos encontrar alguma solução da equação não-homogênea. Para tanto, vamos ver o método da variação da constante.

Seja  $X(t)$  solução fundamental de  $x' = A(t)x(t)$ . Vamos procurar soluções de  $x' = A(t)x(t) + B(t)$  da forma  $y(t) = X(t)c(t)$  (o produto é uma aplicação bilinear). Logo,

$$\begin{aligned} y'(t) &= X'(t)c(t) + X(t)c'(t) \\ &= A(t)X(t)c(t) + X(t)c'(t) \\ &= A(t)y(t) + X(t)c'(t) \end{aligned} \tag{12.7.37}$$

Portanto,  $y(t)$  é solução de (12.7.2) se e somente se  $X(t)c'(t) = B(t)$ . Logo,

$$c'(t) = (X(t))^{-1}B(t) \tag{12.7.38}$$

e consequentemente

$$c(t) = c_0 + \int_{t_0}^t (X(s))^{-1}B(s)ds \tag{12.7.39}$$

Assim,

$$y(t) = X(t) \left[ c_0 + \int_{t_0}^t (X(s))^{-1}B(s)ds \right] \tag{12.7.40}$$

O termo  $X(t)c_0$  corresponde à parte homogênea da equação e  $X(t) \int_{t_0}^t (X(s))^{-1}B(s)ds$  corresponde à parte não-homogênea da equação.

Seja o seguinte exemplo.

**Exemplo 12.7.6.** Seja  $x'' + x = f(t)$ . Transformando, temos a seguinte equação homogênea:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} \quad (12.7.41)$$

e a seguinte equação não-homogênea:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + f(t) \end{cases} \quad (12.7.42)$$

O sistema pode ser reescrito como

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (12.7.43)$$

E, portanto,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix} = X(t) \quad (12.7.44)$$

que é solução fundamental.

A solução geral da equação homogênea é

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ -c_1 \sin t + c_2 \cos t \end{pmatrix} \quad (12.7.45)$$

Considere agora

$$\begin{pmatrix} z(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t \\ -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t \end{pmatrix} \quad (12.7.46)$$

Assim, estamos procurando

$$\begin{cases} z'(t) = -c_1(t) \sin t + c_2(t) \cos t + c'_1(t) \cos t + c'_2(t) \sin t \\ w'(t) = -c_1(t) \cos t - c_2(t) \sin t - c'_1(t) \sin t + c'_2(t) \cos t \end{cases} \quad (12.7.47)$$

de tal forma que

$$\begin{cases} z'(t) = w(t) + c'_1(t) \cos t + c'_2(t) \sin t \\ w'(t) = -z(t) - c'_1(t) \sin t + c'_2(t) \cos t \end{cases} \quad (12.7.48)$$

Para que  $(z(t), w(t))$  seja solução da equação não-homogênea, devemos ter

$$\begin{cases} c'_1(t) \cos t + c'_2(t) \sin t = 0 \\ -c'_1(t) \sin t + c'_2(t) \cos t = f(t) \end{cases} \quad (12.7.49)$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} c'_1(t) \\ c'_2(t) \end{pmatrix} &= (X(t))^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -f(t) \sin t \\ f(t) \cos t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (12.7.50)$$

Portanto,

$$\begin{cases} c_1(t) = c_{10} - \int_0^t f(s) \sin(s) ds \\ c_2(t) = c_{20} + \int_0^t f(s) \cos(s) ds \end{cases} \quad (12.7.51)$$

## 12.8 Estabilidade de Lyapunov

Sabemos, pelo teorema de dependência contínua nas condições iniciais, que se considerarmos duas condições iniciais  $x$  e  $y$  muito próximas, as respectivas soluções continuam próximas por muito tempo.

Dado qualquer  $x \in U$  e qualquer  $T > 0$  e sendo  $\varepsilon > 0$  é possível encontrar uma vizinhança  $\delta > 0$  tal que

$$d(x, y) < \delta \implies d(f^t(x), f^t(y)) < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T] \quad (12.8.1)$$

Seja o seguinte exemplo.

**Exemplo 12.8.1.** Seja  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Então,

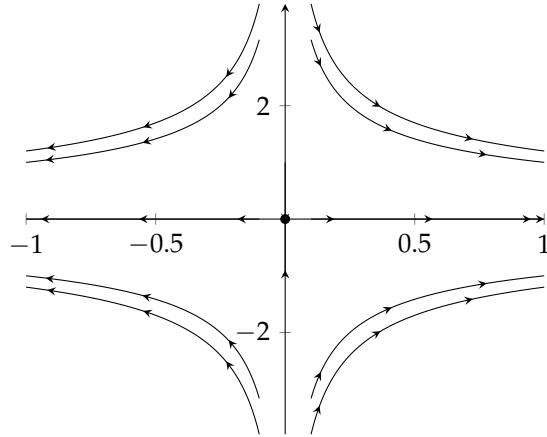
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2x \\ -y \end{pmatrix} \quad (12.8.2)$$

cujas soluções são

$$\begin{cases} x(t) = x_0 e^{2t} \\ y(t) = y_0 e^{-t} \end{cases} \quad (12.8.3)$$

As soluções satisfazem as seguintes relações:  $x(t)y(t)^2 = c$ .

FIGURA 12.8.1 – RETRATO DE FASE DE  $\exp(tA)$



**Definição 12.8.1.** A trajetória do ponto  $x_0 \in U$  é estável no sentido de Lyapunov se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $y_0 \in B_\delta(x_0)$

1. a trajetória de  $y_0$  está definida para todo  $t \geq 0$
2. satisfaaz  $d(f^t(x_0), f^t(y_0)) < \varepsilon, \forall t \geq 0$

Se, além disso, para todo  $y_0 \in B_\delta(x_0)$ , temo que  $d(f^t(x_0), f^t(y_0)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , dizemos que a trajetória de  $x_0$  é assintoticamente estável.

**Exemplo 12.8.2.** Seja  $x' = Ax$ , em que  $A$  é atrator hiperbólico, isto é, todo valor característico tem parte real negativa. E  $f^t(x) = e^{tA}x$ . Vamos trabalhar com o caso real. Assim,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_n \end{pmatrix} \quad (12.8.4)$$

em que  $A_i = D_i + N_i$  com  $D_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix}$  e  $N_i$  é nilpotente.  
Assim,

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{tD_1} e^{tN_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{tD_n} e^{tN_n} \end{pmatrix} \quad (12.8.5)$$

*E, portanto,*

$$\|e^{tD_i}\| \leq e^{t\lambda_i} \leq e^{-t\theta}, \quad \forall t \geq 0 \quad (12.8.6)$$

*com*  $\theta = \min\{|\lambda_i| : i = 1, \dots, n\}$

$$\|e^{tN_i}\| = \left\| I + tN_i + \dots + \frac{(tN_i)^k}{k!} \right\| \leq p(t) \quad (12.8.7)$$

*em que*  $p(t)$  *é um polinômio de grau k.*

*Logo,*

$$\|e^{tD_i} e^{tN_i}\| \leq e^{-t\theta} p(t) \leq C e^{-t\theta_0}, \quad \forall t \geq 0 \quad (12.8.8)$$

*com*  $0 \leq \theta_0 \leq \theta$ .

*Provamos que existem*  $\theta_0 > 0$  *e*  $C > 0$  *tais que*  $\|e^{tA}\| \leq C e^{-t\theta_0}$ ,  $\forall t \geq 0$ . *Podemos tomar*  $\theta_0 < \min\{|\mathcal{R}(\lambda_i)| : i = 1, \dots, n\}$ .

*Segue que a trajetória*  $\gamma(t) \equiv 0$  *é assintoticamente estável. De fato, dado*  $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$ , *o resultado final da prova implica que se*  $y \in B_\delta(0)$ , *então*

$$\|f^t(y)\| = \|e^{tA}y\| \leq C e^{-t\theta_0} \delta \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (12.8.9)$$

*Ou seja, a trajetória*  $\gamma(t) \equiv 0$  *é estável. Além disso,*

$$\|e^{tA}y - 0\| = \|e^{tA}y\| \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty \quad (12.8.10)$$

*Logo,  $\gamma(t) \equiv 0$  é assintoticamente estável.*

*Agora, dado  $x \in \mathbb{R}^d$  qualquer, a trajetória é estável (assintoticamente)? Sim, pois*

$$\begin{aligned} \|f^t(x) - f^t(y)\| &= \|e^{tA}x - e^{tA}y\| \\ &= \|e^{tA}(x - y)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq Ce^{-t\theta_0}\|x-y\| \\
&\leq Ce^{-t\theta_0}\delta \\
&\leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0
\end{aligned} \tag{12.8.11}$$

Desse exemplo, temos o seguinte corolário.

**Corolário 12.8.0.1.** *Para todo atrator linear qualquer trajetória é assintoticamente estável.*

**Exemplo 12.8.3.** Seja  $x' = A(t)x$ , em que  $A: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  é contínua e periódica (período  $T$ ). Pelo teorema de Floquet existe  $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$   $T$ -periódica e existe  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d, \mathbb{C}^d)$  tal que a solução fundamental é  $X(t) = C(t)e^{tB}$ .

Se  $B$  é um atrator hiperbólico então todas as trajetórias de  $x = A(t)x$  são assintoticamente estáveis.

Dados  $x(t) = X(t)x_0$  e  $y(t) = X(t)y_0$ , temos que

$$\begin{aligned}
\|x(t) - y(t)\| &= \|C(t)e^{tB}(x_0 - y_0)\| \\
&\leq \left( \max_{t \in \mathbb{R}} \|C(t)\| \right) Ke^{-t\theta_0}\|x_0 - y_0\| \\
&\leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0
\end{aligned} \tag{12.8.12}$$

sempre que  $\|x_0 - y_0\| \leq \delta := \frac{\varepsilon}{K \times (\max_{t \in \mathbb{R}} \|C(t)\|)}$ . Além disso, como  $C(t)$  é uma função contínua e periódica, então existe o máximo da norma de  $C(t)$ .

**Exemplo 12.8.4.** Dado qualquer  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  existe  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  tal que  $e^B = A^2$ . Se  $e^B = A$ , então  $(e^{B/2})^2 = A$ , o que é o mesmo que dizer que se  $A$  tem logaritmo, então  $A$  tem raiz quadrada.

**Teorema 12.8.1** (Lyapunov). Seja  $A$  um atrator hiperbólico e  $R: (-a, a) \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  função de classe  $C^1$  tal que  $R(t, 0) \equiv 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\|R(t, x)\|}{\|x\|} = 0$ . Então, a solução  $\gamma(t) \equiv 0$  da equação  $x' = Ax + R(t, x)$  [equação quase-linear] é assintoticamente estável.

Seja a seguinte observação. Dada uma solução  $\gamma(t)$  de  $x' = F(t, x)$ , com  $F \in C^1$  e façamos a seguinte mudança de base:  $x = y + \gamma(t)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
y' + \gamma'(t) &= F(t, y + \gamma(t)) \\
y' &= F(t, y + \gamma(t)) - F(t, \gamma(t)) \\
&= \partial_x F(t, \gamma(t))y + R(t, y) \quad [\text{pela fórmula de Taylor}]
\end{aligned} \tag{12.8.13}$$

A solução  $\gamma(t)$  de  $x' = F(t, x)$  corresponde à solução  $\gamma_0(t) \equiv 0$  da equação  $y' = A(t)y + R(t, y)$  em que  $A(t) = \partial_x F(t, \gamma(t))$ . Assim,  $\gamma(t)$  é solução assintoticamente estável de  $x' = F(t, x)$  se e somente se  $\gamma_0(t) \equiv 0$  é solução assintoticamente estável de  $y' = A(t)y + R(t, y)$ .

Dito de outro modo, se soubermos provar a estabilidade da solução nula de uma equação quase-linear, então saberemos provar a estabilidade de qualquer solução de qualquer equação diferencial em que o campo de vetores é de classe  $\mathcal{C}^1$ .

A estratégia no caso geral não-autônomo seria:

1. Considerar o fluxo  $f^t \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  da equação linear associada  $x' = A(t)x$ .
2. Considerar o expoente de Lyapunov:  $\lambda = \overline{\lim} \frac{1}{t} \log \|f^t\|$ , em que  $\|f^t\| \approx e^{t\lambda}$ .
3. Mostrar que  $\lambda < 0$  implica estabilidade assintótica.

Vamos ver as funções de Lyapunov.

**Definição 12.8.2** (Função de Lyapunov). *Consideremos um campo de vetores  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^1$  com a respectiva equação diferencial  $x' = F(x)$ . Seja  $x_0 \in U$  um ponto estacionário de  $x' = F(x)$ . Dada qualquer trajetória  $x(t)$  de  $x' = F(x)$  denotamos  $\dot{\varphi}(t) = \frac{d}{dt}\varphi(x(t))$ . Uma função de Lyapunov para  $x_0$  é uma função  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  (contínua e de classe  $\mathcal{C}^1$ ) tal que*

1.  $\varphi(x_0) = 0$  e  $\varphi(x) > 0$  para todo  $x \neq x_0$ .
2.  $\dot{\varphi}(t) \leq 0$  para todo  $t$  e toda trajetória  $x(t)$
3. se  $\dot{\varphi}(t) < 0$  para todo  $t$  e toda trajetória  $x_t \neq x_0$ , a função de Lyapunov é estrita.

A condição (2) implica que  $t \mapsto \varphi(x(t))$  é não-crescente ao longo do tempo.

A condição (3) implica que  $t \mapsto \varphi(x(t))$  é decrescente ao longo do tempo.

**Exemplo 12.8.5.** Se  $A$  tem todos os valores característicos com parte real negativa, então

$$\varphi(t) = \|x(t)\|^2 \quad (12.8.14)$$

é função de Lyapunov estrita (após mudança de coordenadas para colocar  $A$  na forma canônica de Jordan).

**Exemplo 12.8.6.** Seja

$$\begin{cases} x' = y - xy^2 \\ y' = -x^3 \end{cases} \quad (12.8.15)$$

com  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , em que  $U = \mathbb{R}^2$  e  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $\varphi(t) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2$ .

Fazemos

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{d}{dt}\varphi(x(t), y(t)) \\ &= (x(t))^3 x'(t) + y(t)y'(t) \\ &= (x(t))^3 \left( y(t) - x(t)(y(t))^2 \right) + y(t) \left( -(x(t))^3 \right) \end{aligned}$$

$$= -(x(t))^4 (y(t))^2 \leq 0 \quad (12.8.16)$$

**Exemplo 12.8.7.** Seja

$$\begin{cases} x' = -x + 2x(x+y)^2 \\ y' = -y^3 + 2y^3(x+y)^2 \end{cases} \quad (12.8.17)$$

com  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , em que  $U = \mathbb{R}^2$  e  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $\varphi(t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ .  
Fazemos

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{d}{dt} \varphi(x(t), y(t)) \\ &= x(t)x'(t) + y(t)y'(t) \\ &= x(t)(-x(t) + 2x(t)(x(t) + y(t))^2) + y(t)((-y(t))^3 + 2(y(t))^3(x(t) + y(t))^2) \\ &= -(x(t))^2 - (y(t))^4 + 2((x(t))^2 + (y(t))^4)(x(t) + y(t)) \\ &= -((x(t))^2 + (y(t))^4)(1 - 2(x(t) + y(t))^2) \\ &< 0 \end{aligned} \quad (12.8.18)$$

sempre que  $(x(t), y(t)) \in B_{1/2}(0, 0) \setminus \{(0, 0)\}$ .

Assim,  $\varphi(t)$  é função de Lyapunov para  $(0, 0)$  em  $B_{1/2}(0, 0)$ .

**Exemplo 12.8.8.** Seja

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -g \sin x - cy, \quad g, c > 0 \end{cases} \quad (12.8.19)$$

com  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , em que  $U = \mathbb{R}^2$  e  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $\varphi(t) = \frac{1}{2}y^2 + g(1 - \cos x)$ .  
Fazemos

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}(t) &= \frac{d}{dt} \varphi(x(t), y(t)) \\ &= g \sin x(t)x'(t) + y(t)y'(t) \\ &= g \sin x(t)y(t) + y(t)(-g \sin x(t) - cy(t)) \\ &= -c(y(t))^2 \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (12.8.20)$$

Assim,  $\varphi(t)$  é função de Lyapunov para  $(0, 0)$ .

**Proposição 12.8.1.** Seja  $x_0 \in U$  ponto estacionário.

1. Se existe função de Lyapunov para  $x_0$ , então a trajetória de  $x_0$  é estável.
2. Se existe função de Lyapunov estrita para  $x_0$ , então a trajetória de  $x_0$  é assintoticamente estável.

*Demonstração.* Vamos à prova do item (1) da proposição 12.8.1.

Dado  $\varepsilon > 0$  denotamos  $M_\varepsilon = \inf \{\varphi(x) : x \in \partial B_\delta(x_0)\} > 0$ . Por continuidade, existe  $\delta > 0$  tal que  $\varphi(x) < M_\varepsilon, \forall x \in B_\delta(0)$ .

Para todo  $x \in B_\delta(0)$  e todo  $t \geq 0$ , temos que  $\varphi(f^t(x)) \leq \varphi(x) < M_\varepsilon$ , uma vez que  $\varphi(\cdot)$  é não-crescente ao longo de trajetórias. Logo,  $f^t(x) \notin \partial B_\varepsilon(0)$ . Portanto,  $f^t(x) \in B_\varepsilon(0), \forall t$ , e  $f^t(x)$  está definida para todo  $t \geq 0$ . Dito de outro modo,  $f^t(x)$  está contido num compacto.

Vamos à prova do item (2) da proposição 12.8.1.

Queremos mostrar que para todo  $x \in B_\delta(x_0)$  temos que  $f^t(x) \rightarrow x_0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Para isso, consideremos qualquer sequência  $(t_n)_n \rightarrow \infty$  e  $y \in B_\varepsilon(x_0)$  tal que  $f^{t_n}(x) \rightarrow y$ .

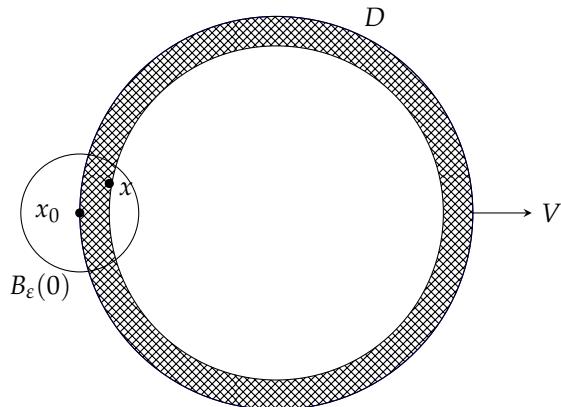
Sabemos que  $\varphi(f^{t_n}(x)) \rightarrow \varphi(y)$  (por continuidade da função  $\varphi(\cdot)$ ). E também sabemos que  $\varphi(f^t(z)) < \varphi(z), \forall t$ , porque  $t \mapsto \varphi(f^t(z))$  é decrescente para todo  $z \neq x_0$ . Suponhamos que  $y \neq x_0$ . Então,  $\varphi(y) > \varphi(f^1(y))$ . Sabemos que  $\varphi(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f^{t_n}(x))$  e  $\varphi(f^1(y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(f^{t_n+1}(x))$ . Assim, para quaisquer  $m$  e  $n$  suficientemente grandes, temos

1.  $\varphi(f^{t_n+1}(x)) < \varphi(y)$
2.  $\varphi(f^{t_m}(x)) > \varphi(y)$
3.  $\varphi(f^{t_m}(x)) < \varphi(f^{t_n+1}(x))$  desde que tomemos  $t_m > t_n + 1$ .

Porém, os itens (1) + (2) + (3) são uma contradição. Logo,  $y = x_0$ . ■

**Proposição 12.8.2.** Seja  $x_0 \in U$  ponto estacionário e  $D \subset U$  um domínio aberto (não compacto) tal que  $x_0 \in \partial D$  e seja  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^1$ . Também,  $\varphi|_{\partial D} \equiv 0$ ,  $\varphi|_D > 0$  e  $\dot{\varphi}|_D > 0$ . Então,  $x_0$  não é estável.

*Demonstração.* Seja



e vamos argumentar que existem pontos arbitrariamente perto de  $x_0$  cuja trajetória sai da bola.

Existem pontos  $x$  arbitrariamente próximos de  $x_0$  cuja trajetória escapa de  $B_\varepsilon(x_0)$ . Seja  $x \in B_\varepsilon(x_0) \cap D$ . Suponhamos que  $f^t(x)$  está definido para todo  $t \geq 0$  e  $f^t(x) \in B_\varepsilon(x_0)$  para todo  $t \geq 0$ . Sabemos que

1.  $\varphi(x) > 0$  (por causa de  $\varphi|D > 0$ )
2.  $\varphi(f^t(x)) > \varphi(x)$ ,  $\forall t \geq 0$  (por causa de  $\varphi|D > 0$ ) tal que  $f^s(x) \subset D$  para  $0 \leq s < t$ .

Logo,  $f^t(x) \notin \partial D$ ,  $\forall t \geq 0$  (por causa de  $\varphi|\partial D \equiv 0$ ).

De fato, por continuidade de  $\varphi(\cdot)$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $\partial D$  tal que  $F^t(x) \notin V$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Ou seja, existe um compacto  $K \subset D$  tal que  $f^t(x) \in K$ ,  $\forall t \geq 0$ .

Seja  $\beta = \inf \dot{\varphi}|K$ , em que  $\dot{\varphi}(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(x(t))$ . Como  $\dot{\varphi} > 0$  e  $K$  é um compacto, então  $\beta > 0$ . Precisamos disso pois o domínio  $D$  não é compacto. Então,  $\dot{\varphi}$  fica longe do bordo e longe do bordo temos uma cota inferior positiva para  $\dot{\varphi}$ . Dito de outro modo, em cima da trajetória a derivada de  $\varphi(\cdot)$  está crescendo (é positiva e limitada) e  $\varphi(\cdot)$  é crescente e não-limitada. Porém,  $\varphi(\cdot)$  está em  $B_\varepsilon(0)$ . Então, a função é limitada e temos uma contradição.

1. Então,  $\varphi(f^t(x)) \geq \varphi(x) + \beta t$ ,  $\forall t \geq 0$ . Assim,  $\varphi(f^t(x)) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow \infty$ .
2. Por outro lado,  $f^t(x) \in B_\varepsilon(0) \cap D$ ,  $\forall t \geq 0$ , e  $\varphi|B_\varepsilon(0)$  é limitada.

Porém, (1) + (2) é uma contradição.

Portanto, a trajetória de  $x$  não está contida em  $B_\varepsilon(0)$ . Logo,  $x_0$  é instável.

■

## 12.9 Campos de Vetores em Superfícies

O objetivo da teoria global das equações diferenciais é descrever o comportamento do fluxo como um todo, na totalidade do domínio da equação, combinando as informações obtidas da teoria local por meio de diversas ferramentas. Estamos particularmente interessados no comportamento assintótico das trajetórias, o que nos leva ao conceito de conjuntos limite, que são os conjuntos de pontos de acumulação quando o tempo  $t$  vai para  $+\infty$  (conjunto  $\omega$ -limite) ou para  $-\infty$  (conjunto  $\alpha$ -limite).

Vamos estudar o Teorema de Poincaré–Bendixson (um resultado global). Mas antes, seja a noção de conjuntos  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite de uma órbita (trajetória).

Seja a equação diferencial  $x' = F(x)$ , com  $F: u \rightarrow \mathbb{R}^d$ , de classe  $C^1$ , e seja o ponto  $p \in U$  tal que  $f^t(p)$  está definido para todo  $t \geq 0$ .

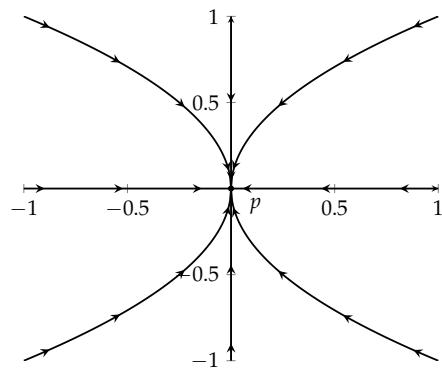
Chamamos o conjunto  $\omega$ -limite o seguinte: é o conjunto dos pontos de acumulação de  $f(p)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . De maneira mais explícita, é

$$\omega(p) = \{x \in U: (f^{t_n}(p))_n \rightarrow x \text{ para alguma sequência } (t_n)_n \rightarrow +\infty\} \quad (12.9.1)$$

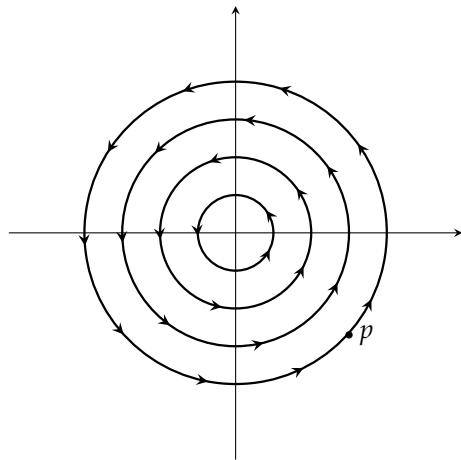
Chamamos o conjunto  $\alpha$ -limite o seguinte: é o conjunto dos pontos de acumulação de  $f(p)$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . De maneira mais explícita, é

$$\alpha(p) = \{x \in U: (f^{t_n}(p))_n \rightarrow x \text{ para alguma sequência } (t_n)_n \rightarrow -\infty\} \quad (12.9.2)$$

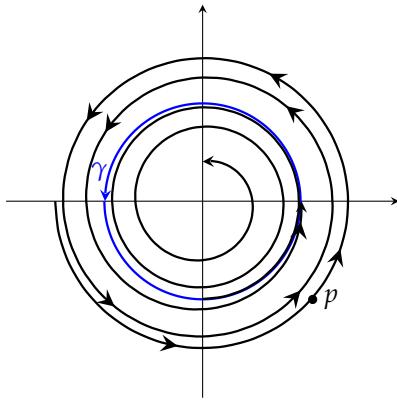
**Exemplo 12.9.1.** Seja o seguinte retrato de fases. Dado o ponto  $p$ , temos que  $\omega(p) = \{0\}$ . Mais do que acumulação, temos convergência.



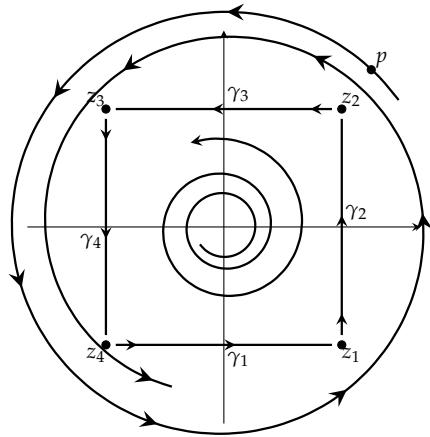
**Exemplo 12.9.2.** Seja o seguinte retrato de fases. Dado o ponto  $p$ , temos que  $\omega(p)$  é o conjunto de todos os pontos em qualquer trajetória de  $p$ .



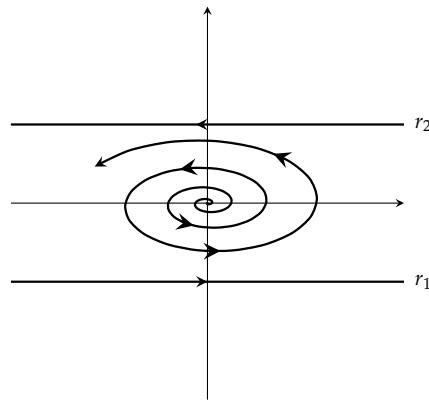
**Exemplo 12.9.3.** Seja o seguinte retrato de fases. Dado o ponto  $p$ , temos que  $\omega(p) = \gamma$ .



**Exemplo 12.9.4.** Seja o seguinte retrato de fases. Dado o ponto  $p$ , temos que  $\omega(p) = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \{z_1, z_2, z_3, z_4\}$ .



**Exemplo 12.9.5.** Seja o seguinte retrato de fases. Dado o ponto  $p$ , temos que  $\omega(p) = r_1 \cup r_2$ .



Observe que se a trajetória de  $p$  é periódica, então  $\alpha(p) = \omega(p) =$  trajetória de  $p$ .

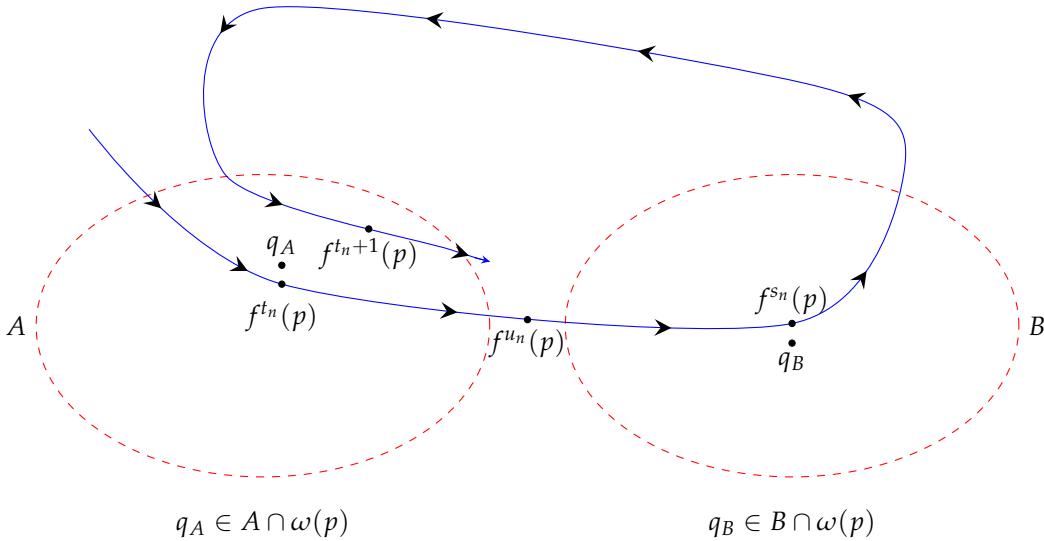
**Proposição 12.9.1.** Supomos que  $f^t(p)$  está definido para todo  $t \geq 0$  e  $\{f^t(p) : t \geq 0\}$  está contido num compacto  $K$ . Então,

1. o conjunto  $\omega(p) \neq \emptyset$
2. o conjunto  $\omega(p)$  é invariante pelo fluxo
3. o conjunto  $\omega(p)$  é compacto
4. o conjunto  $\omega(p)$  é conexo

*Demonstração.* Vamos demonstrar a proposição 12.9.1.

1. É imediato. A trajetória está contida num compacto e, portanto, deve existir uma sequência  $t_n$  que terá uma subsequência  $(t_k)_k$  para a qual os pontos convergem.
2. Seja  $q \in \omega(p)$  e  $s \in \mathbb{R}$  qualquer. Isso significa que existe uma sequência  $(t_n)_n \rightarrow \infty$  tal que  $f^{t_n}(p) \rightarrow q$ . Então, por continuidade de  $f^s$  temos que  $f^{t_n+s}(p) \rightarrow f^s(q)$  (da propriedade do fluxo  $f^{t+r} = f^t \circ f^r$ ,  $\forall t, r \in \mathbb{R}$ ). Como  $(t_n + s)_n \rightarrow \infty$ , isto prova que  $f^s(q) \in \omega(p)$ .
3. Como  $\{f^t(p) : t \geq 0\} \subset K$  temos que  $\omega(p) \subset K$ . Para mostrar que o ponto de acumulação, o conjunto  $\omega(p)$ , é compacto, precisamos mostrar que ele é fechado. Seja  $(q_n)_n$  uma sequência contida em  $\omega(p)$  convergindo para um ponto  $q$ . Para cada  $n$ , existe  $(t_k^n)_k$  que converge para  $\infty$  quando  $k \rightarrow \infty$  tal que  $f^{t_k^n}(p) \rightarrow q_n$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Dado  $\varepsilon > 0$ , tomamos  $n$  tal que  $d(q_n, q) < \frac{\varepsilon}{2}$  e tomamos  $k = k(n)$  tal que  $d(f^{t_k^n}(p), q_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Disso decorre que  $d(f^{t_k^n}(p), q) < \varepsilon$ . Isto prova que  $q \in \omega(p)$ .
4. Suponhamos que existem abertos disjuntos  $A$  e  $B$  tais que  $\omega(p) \subset A \cup B$ ,  $\omega(p) \cap A \neq \emptyset$  e  $\omega(p) \cap B \neq \emptyset$ . Graficamente, seja:

FIGURA 12.9.1 – CAMPOS DE VETORES EM SUPERFÍCIES



Obtemos  $0 < t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \dots < t_n < s_n < t_{n+1} < \dots$  com  $(t_n)_n \rightarrow +\infty$  e  $(s_n)_n \rightarrow +\infty$  tal que  $f^{t_n}(p) \rightarrow q_A$  e  $f^{s_n}(p) \rightarrow q_B$ . O segmento de trajetória entre o momento  $t_n$  e o momento

$s_n$  é um conexo. Para cada  $n$  existe algum momento  $u_n$  entre  $t_n$  e  $s_n$  tal que  $f^{u_n}(p) \notin A \cup B$ . Temos que  $(u_n)_n \rightarrow +\infty$ .

Seja  $r$  um ponto de acumulação qualquer de  $(f^{u_n}(p))_n$ . Então,

- (a)  $r$  existe porque  $f^{u_n}(p) \in K$
- (b)  $r \in \omega(p)$
- (c)  $r \notin A \cup B$

Estas afirmações são contradições.

■

**Teorema 12.9.1** (Teorema de Poincaré–Bendixson). *Suponhamos  $U \subset \mathbb{R}^2$ , de classe  $C^1$ , e  $p \in U$  tal que  $\{f^t(p) : t \geq 0\}$  está contida num compacto. Além disso,  $F$  tem um número finito de pontos estacionários. Então,*

1. se  $\omega(p)$  contém apenas pontos estacionários, então  $\omega(p)$  é igual a um único ponto estacionário
2. se  $\omega(p)$  contém apenas pontos regulares (não-estacionários), então  $\omega(p)$  é igual a uma única trajetória fechada (periódica)
3. se  $\omega(p)$  contém pontos estacionários e pontos não-estacionários, então  $\omega(p)$  é a união finita de pontos estacionários  $z_1, \dots, z_n$  e trajetórias regulares  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  tais que para qualquer  $\gamma_\alpha$  existem  $j$  e  $k$  tais que  $\alpha(\gamma_\alpha) = \{z_j\}$  e  $\omega(\gamma_\alpha) = \{z_k\}$ .

**Lema 12.9.1.** *Seja  $x$  um ponto regular em  $\omega(p)$  e  $\Sigma$  a seção transversal ao fluxo em  $x$ . Então, existe uma sequência  $(s_n)_n \rightarrow \infty$  tal que  $f^{s_n}(p) \in \Sigma$  para todo  $n$  e  $f^{s_n}(p) \rightarrow x$ .*

*Demonstração.* A hipótese de que  $x \in \omega(p)$  implica que existe uma sequência  $(t_n)_n \rightarrow \infty$  tal que  $f^{t_n}(p) \rightarrow x$ . Pelo teorema do fluxo tubular existe  $(s_n)_n \rightarrow \infty$  tal que  $f^{s_n}(p) \rightarrow x$  e  $f^{s_n}(p) \in \Sigma$ . ■

A seção transversal  $\Sigma$  é um mergulho (uma imagem difeomorfa) do intervalo  $(0, 1)$  em  $U$ . Como estamos no plano,  $U \subset \mathbb{R}^2$ , a seção transversal é uma curva. E, portanto, é possível escolher uma relação de ordem em  $\Sigma$ .

Seja um conjunto  $\{s > 0 : f^s(p) \in \Sigma\}$ . Pelo teorema do fluxo tubular, esse conjunto é discreto. Dito de outro modo, todo ponto do conjunto é isolado.

**Lema 12.9.2.** *Sejam  $s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots$  os valores de  $s$  tais que  $f^s(p) \in \Sigma$ . Então,  $(x_n = f^{s_n}(p))_n$  é monótona (crescente ou decrescente) em  $\Sigma$ .*

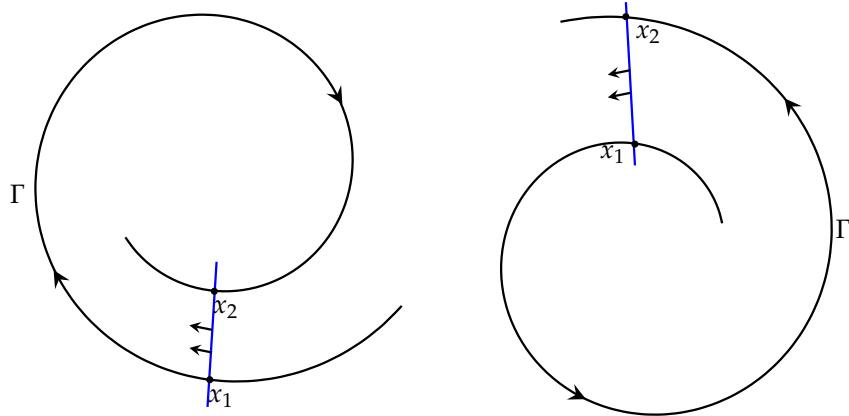
Considere a curva fechada  $\Gamma$  definida por

$$\Gamma = \{f^t(p) : s_1 \leq t \leq s_2\} \cup \{\phi(u) : u_1 \leq u \leq u_2\} \quad (12.9.3)$$

Note que  $\Gamma$  é uma curva simples, ou seja, sem auto-interseções, uma vez que os pontos  $x_1 = f^{s_1}(p)$  e  $x_2 = f^{s_2}(p)$  são interseções consecutivas da trajetória de  $p$  com a seção transversal  $S$ .

Pelo Teorema da Curva Fechada,  $\Gamma$  separa o plano em duas componentes conexas. As trajetórias dos pontos no segmento  $[x_1, x_2]$  podem se deslocar para o lado de dentro (a componente conexa limitada) ou para o lado de fora (a componente conexa ilimitada): os dois casos estão descritos na Figura 12.9.2. No primeiro caso, trajetórias do fluxo podem passar do lado de fora para o lado de dentro de  $\Gamma$ , mas não em sentido contrário. No segundo caso, trajetórias do fluxo podem passar do lado de dentro para o lado de fora de  $\Gamma$ , mas não em sentido contrário.

FIGURA 12.9.2 – USANDO O TEOREMA DA CURVA FECHADA



*Demonstração.* Sejam  $x_1 = f^{s_1}(p)$  e  $x_2 = f^{s_2}(p)$  as duas primeiras interseções de  $\{f^t(p): t \geq 0\}$  com  $\Sigma_{x_1, x_2}$ .

1. Se  $x_1 = x_2$ , então a trajetória de  $p$  é periódica. Assim, a sequência  $(x_n)_n$  é constante.
2. Se  $x_1 > x_2$ , consideremos a curva  $\Gamma$  formada pela união entre  $\{f^t(p): s_1 \leq t \leq s_2\}$  e o segmento em  $\Sigma$  delimitado por  $x_1$  e  $x_2$ . Portanto,  $\Gamma$  é uma curva fechada sem auto-interseções (por causa da definição de  $x_2$ ). Logo,  $\Gamma$  desconecta o plano (teorema da curva de Jordan). Assim,  $f^t(p)$ , para  $t > s_2$  próximo de  $s_2$ , está no interior de  $\Gamma$ . E o fluxo no segmento  $\Sigma_{x_1, x_2}$  aponta para o interior de  $\Sigma$ . Consequentemente,  $x_3 < x_2$ . Do mesmo modo,  $x_{n+1} < x_n$  para todo  $n$ .
3. Se  $x_1 < x_2$ , então  $x_{n+1} > x_n$  para todo  $n$ .

■

**Lema 12.9.3.** Uma seção transversal  $\Sigma$  intersecta  $\omega(p)$  no máximo em um ponto.

*Demonstração.* Suponhamos que existem  $x, y \in \omega(p) \cap \Sigma$ . Pelo lema 12.9.1, a sequência  $(x_n = f^{s_n}(p))_n$  do lema 12.9.2 admite uma subsequência que converge para  $x$  e uma subsequência que converge para  $y$ . Porém, isso contradiz com a monotonicidade do lema 12.9.2. ■

**Lema 12.9.4.** Seja  $x \in \omega(p)$  e  $\omega(x)$  contém pontos regulares. Então,  $x$  é periódico e  $\omega(p) = \gamma$ .

*Demonstração.* Pelo lema 12.9.2,  $\{f^t(x) : t \geq 0\} \cap \Sigma$  é uma sequência monótona em  $\Sigma$ . Todavia, não pode ser crescente e nem decrescente, pois iria contradizer o lema 12.9.3. Portanto,  $\{f^t(x) : t \geq 0\} \cap \Sigma$  é um único ponto. Isso implica que a trajetória de  $x$  ( $\gamma$ ) é periódica. Logo,  $\omega(x)$  é a própria trajetória de  $x$ .

Por fim, basta provar que  $\omega(p) = \gamma$ . Para tanto, é necessário provar que  $\gamma$  é um aberto em  $\omega(p)$ .

Então, seja  $y$  pertencente a uma vizinhança  $V$  de  $\gamma$  e suponhamos que  $y \in \omega(p)$ . Supondo  $V$  suficientemente pequena, temos que

1.  $y$  é ponto regular
2.  $\{f^t(y) : t \geq 0\}$  intersecta  $\Sigma$  (contradição com o lema 12.9.3)

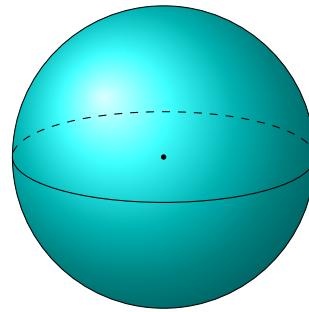
■

*Demonstração.* Com isso, vamos a prova do Teorema 12.9.1 no plano. Para tanto, temos no plano de fundo o teorema da curva de Jordan<sup>5</sup>.

1. Como  $\omega(p)$  é conexo e  $\omega(p)$  está contido no conjunto dos pontos estacionários que é finito, então  $\omega(p)$  consiste em único ponto.
2. Seja  $x \in \omega(p)$ . Então,  $\omega(x) \neq \emptyset$  e  $\omega(x) \subset \omega(p)$ . Por que  $\omega(x) \notin \emptyset$  isso é verdade? Uma vez que  $x \in \omega(p)$  e  $\omega(p)$  é um conjunto invariante, a trajetória  $\{f^t(x) : t \geq 0\}$  está contida no compacto  $\omega(p)$ . Portanto,  $\omega(x)$  contém pontos regulares. Sendo não-vazio, existe pelo menos um ponto regular em  $\omega(x)$ . Pelo lema 12.9.4,  $\omega(p) = \gamma$  e essa trajetória é periódica.
3. Seja  $\gamma$  qualquer trajetória regular contida em  $\omega(p)$ . Sabemos que  $\omega(x) \neq \emptyset$  e  $\omega(x) \subset \omega(p)$ . Suponhamos que  $\omega(\gamma)$  contém pontos regulares. Então,  $\omega(p)$  seria uma trajetória periódica. Isso é uma contradição, pois  $\omega(p)$  não conteria pontos estacionários. Portanto,  $\omega(\gamma)$  só contém pontos estacionários e, assim,  $\omega(\gamma)$  é igual a um único ponto estacionário.

■

**Teorema 12.9.2** (Teorema de Poincaré–Bendixson na Esfera  $S^2$ ). *Seja a esfera  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$*



<sup>5</sup> Em topologia, o teorema da curva de Jordan afirma que uma curva fechada simples no plano divide-o em duas partes, ou seja, que o complementar da curva tem duas componentes conexas, uma das quais é limitada a outra ilimitada.

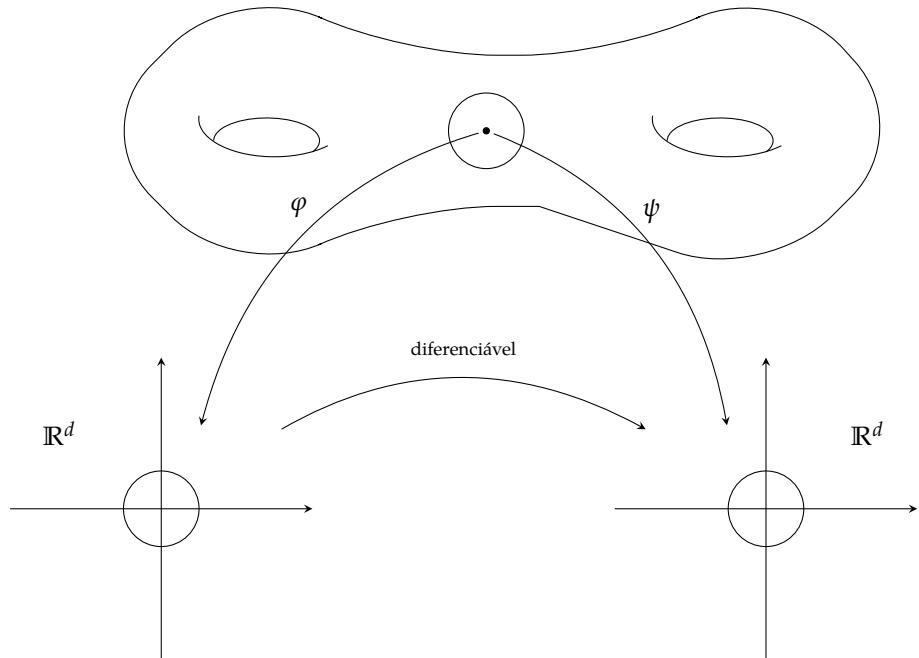
Seja o campo de vetores  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de classe  $C^1$ , em que  $U$  é uma vizinhança aberta de  $\mathcal{S}^2$ , tal que  $F(x) \in T_x \mathcal{S}^2$  para todo  $x \in \mathcal{S}^2$  (é tangente à esfera). Essa condição de tangência garante que as trajetórias do fluxo (curvas)  $f^t(x) \in \mathcal{S}^2$  para todo  $t$  qualquer que seja  $x \in \mathcal{S}^2$ . Como a esfera é compacta, temos que  $t \in (-\infty, +\infty)$ .

Vamos considerar o fluxo restrito a  $\mathcal{S}^2$ , isto é,

$$f^t: \mathcal{S}^2 \rightarrow \mathcal{S}^2, \quad t \in \mathbb{R} \quad (12.9.4)$$

Suponhamos que  $F$  tem um número finito de pontos estacionários (singularidades) em  $\mathcal{S}^2$ . Para todo  $p \in \mathcal{S}^2$ , o conjunto  $\omega(p)$  satisfaz uma das três condições do Teorema de Poincaré–Bendixson.

Vamos fazer uma breve digressão sobre equações diferenciais ordinárias em variedades. Seja  $M$  uma variedade, tal que na vizinhança de qualquer ponto existe um homeomorfismo  $\varphi$  que envia essa vizinhança num aberto de  $\mathbb{R}^d$ , em que  $d$  é a dimensão da variedade. Do mesmo modo, na vizinhança de qualquer ponto existe um homeomorfismo  $\psi$  que envia essa vizinhança num outro aberto de  $\mathbb{R}^d$ . Assim, a composição é diferenciável, digamos  $\mathcal{C}^\infty$ .

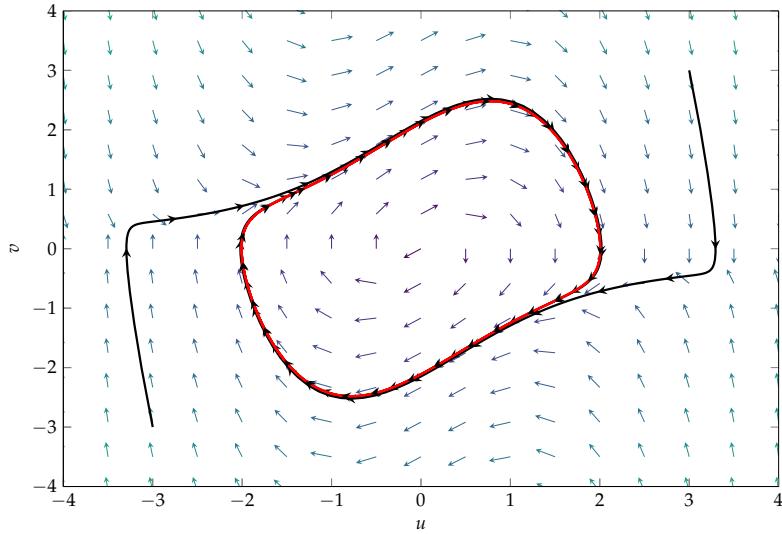


Um campo de vetores em  $M$  é uma aplicação  $F: M \ni x \mapsto F(x) \in T_x M$ .

Vamos ver mais uma aplicação do Teorema de Poincaré–Bendixson, a saber: a equação de Van der Pol. É representada por

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0 \quad (12.9.5)$$

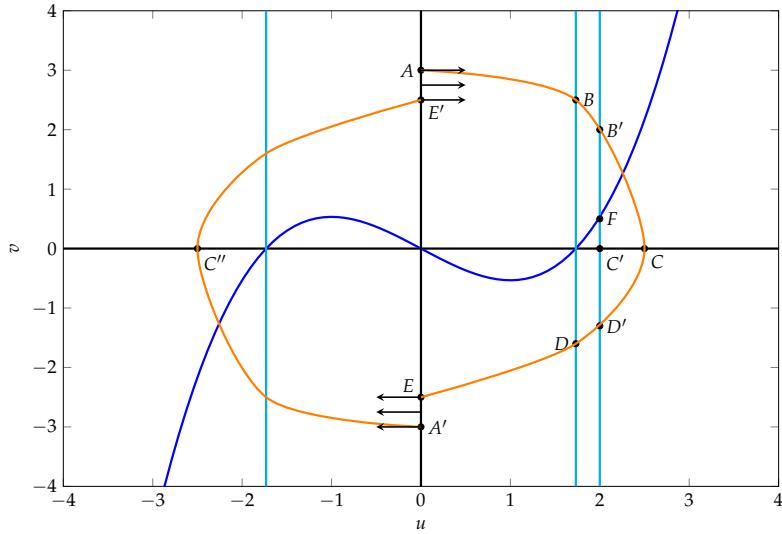
O Teorema de Poincaré–Bendixson garante que a equação acima admite uma trajetória periódica.



Seja  $g(x) = \mu(x^2 - 1)$  e  $G(x) = \int_0^x g(s)ds = \mu \left( \frac{x^3}{3} - x \right)$  (representada no gráfico abaixo pela linha azul). Podemos converter a equação acima:

$$\begin{cases} u' = v - G(u) \\ v' = -u \end{cases} \quad (12.9.6)$$

Observe que  $u'' = v' - G'(u)u'$ .



Vamos analisar o campo de vetores  $F(v - G(u), -u)$ . Os pontos estacionários são tais que

$F(u, v) = (0, 0)$  e, portanto,

$$\begin{cases} u = 0 \\ v - G(0) = 0 \end{cases} \quad (12.9.7)$$

O único ponto estacionário é a origem. Como o número de pontos estacionários é finito, o campo de vetores está nas condições do Teorema de Poincaré–Bendixson.

Vamos considerar a seguinte função auxiliar  $\phi(u, v) = \|(u, v)\|^2 = u^2 + v^2$ . Dada uma trajetória  $(u(t), v(t))$  vamos entender o comportamento de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi(u(t), v(t)) &= 2uu' + 2vv' \\ &= 2uv - 2uG(u) - 2vu \\ &= -2u(t)G(u(t)) \end{aligned} \quad (12.9.8)$$

Próximo da origem, especificamente o domínio  $D = ((-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \times \mathbb{R})$ , temos que  $u \cdot G(u) \leq 0$  (quando  $u$  é positiva,  $G(u)$  é negativa; quando  $u$  é negativa,  $G(u)$  é positiva) e  $u \cdot G(u) = 0$  se e somente se  $u = 0$ . Portanto,  $\frac{d\phi}{dt} > 0$  e  $t \mapsto \phi(t)$  é monótona crescente. Logo,  $(0, 0)$  é um repulsor.

Por fim, nos falta encontrar uma trajetória que não saia de um compacto. Na região que está entre as duas retas azul-claro a norma da trajetória cresce e decresce na região de fora. Se  $A = (0, a) > E = (0, -e)$ . Aqui, o campo de vetores é ímpar, isto é, para  $F(u, v) = (v - G(u), -u)$  temos que  $F(-u, -v) = -F(u, v)$  pois a função  $G = \mu \left( \frac{x^3}{3} - x \right)$  é ímpar. Dito de outro modo, o campo de vetores é invariante por simetria, ou seja, para qualquer ponto, o ponto antípoda a ele o campo de vetores é simétrico. Por essa propriedade, temos uma trajetória que conecta os pontos  $A' = (0, -a)$  e  $E' = (0, e)$ . A curva fechada  $ACEA'C'E'A$  (curva de Jordan) delimita um domínio compacto  $\mathcal{D}$  positivamente invariante, o que significa que nenhuma trajetória pode sair desse domínio, isto é, se  $x \in \mathcal{D} \implies f^t(x) \in \mathcal{D}, \forall t \geq 0$ . Então, para qualquer  $x \in \mathcal{D} \setminus \{(0, 0)\}$  temos que  $\omega(x)$  será uma órbita periódica (usando o Teorema de Poincaré–Bendixson e o fato de que a origem é repulsor).

Além disso, como  $a > e$ , então  $\phi(A) > \phi(E)$ . Isto é, temos a seguinte integral de caminho

$$\int_A^E d\phi < 0 \quad (12.9.9)$$

desde que  $A$  seja suficientemente grande.

*Demonstração.* Sabemos que

$$\int_A^E d\phi = \int_A^B d\phi + \int_B^D d\phi + \int_D^E d\phi \quad (12.9.10)$$

Vamos fazer cada integral separadamente

$$\begin{aligned}
\int_A^B d\phi &= \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\phi}{dt} dt \\
&= \int_{u_A}^{u_B} \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{du} du \\
&= \int_{u_A}^{u_B} -2uG(u) \frac{1}{v_a(u) - G(u)} du \quad \left[ \frac{du}{dt} = v - G(u) \right] \\
&= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{-2uG(u)}{v_a(u) - G(u)} du
\end{aligned} \tag{12.9.11}$$

Na segunda linha trocamos  $t$  por  $u$  observando que a aplicação  $t \mapsto u$  é uma bijeção. Além disso,  $v$  é uma função de  $t$  e com a troca de variável passa a ser uma função de  $u$ .

Como o numerador é limitado, quando  $a \rightarrow \infty$ , a função  $v_a(u) \rightarrow \infty$  uniformemente no intervalo  $[0, \sqrt{3}]$ . Portanto,  $\int_A^B d\phi \rightarrow 0$ .

Analogamente, quando  $a \rightarrow -\infty$ , a função  $v_a(u) \rightarrow -\infty$  uniformemente no intervalo  $[0, \sqrt{3}]$ . Portanto,  $\int_D^E d\phi \rightarrow 0$  ( $e \rightarrow -\infty$ ).  
Por fim,

$$\begin{aligned}
\int_B^D d\phi &= \int_{t_B}^{t_D} \frac{d\phi}{dt} dt \\
&= \int_{v_B}^{v_D} \frac{d\phi}{dt} \left| \frac{dt}{dv} \right| dv \\
&= \int_{v_D}^{v_B} -2uG(u) \frac{1}{-u} dv \\
&= - \int_{v_B}^{v_D} 2G(u) dv
\end{aligned} \tag{12.9.12}$$

Na segunda linha trocamos  $t$  por  $v$  observando que  $v$  é monótono negativo.

Observe que

$$\begin{aligned}
-\int_{v_B}^{v_D} G(u) dv &\leq -\int_{v'_B}^{v'_D} G(u) dv \\
&\leq -\int_{v'_B}^{v'_D} |C'F| dv \\
&\leq |C'F||B'D'|
\end{aligned} \tag{12.9.13}$$

porque  $G \geq 0$  (restringimos a um intervalo menor) e  $G \geq |C'F|$ .

Assim,  $\int_B^D d\phi \rightarrow -\infty$  quando  $a \rightarrow \infty$ .

Portanto,

$$\int_A^E d\phi = \underbrace{\int_A^B d\phi}_{\approx 0} + \underbrace{\int_B^D d\phi}_{\approx -\infty} + \underbrace{\int_D^E d\phi}_{\approx 0} < 0 \quad \text{quando } a \rightarrow \infty \quad (12.9.14)$$

■

## 12.10 Hiperbolicidade

A teoria local das equações diferenciais está baseada na seguinte estratégia: considerar certas soluções especiais da equação, tais como pontos estacionários ou trajetórias periódicas, e buscar descrever o comportamento das demais soluções em uma vizinhança. A ideia é que tal informação, obtida para diferentes soluções especiais, possa servir como ponto de partida para montar uma descrição global do comportamento da equação.

Uma das linhas que se segue em equações diferenciais é tentar classificá-las. Temos várias noções do que significa duas equações diferenciais serem essencialmente as mesmas, entre elas as ideias de conjugação e de equivalência. De fato, cada uma delas é uma família, pois podemos falar de conjugação contínua, conjugação  $\mathcal{C}^1$  etc. Vamos analisar agora o comportamento local.

Seja um campo de vetores  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , em que  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^d$ , e vamos supor que temos um ponto  $p \in U$  tal que  $F(p) = 0$ . E vamos denotar  $A = DF(p): \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ .

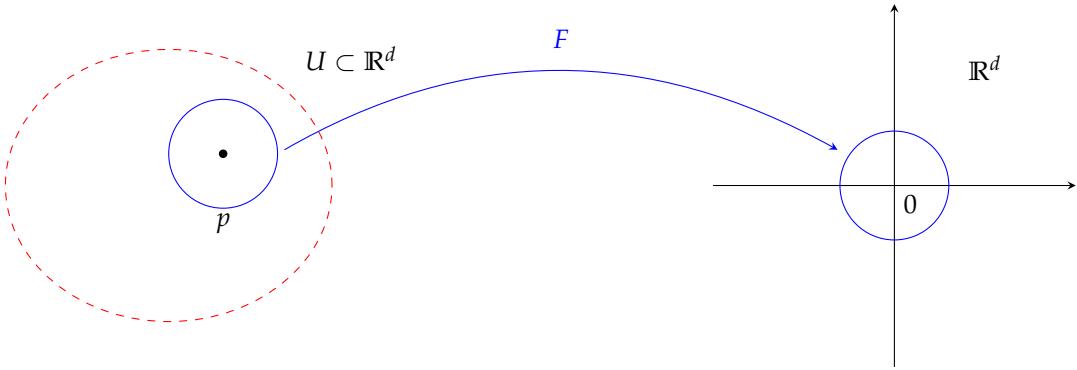
Dizemos que  $p$  é ponto estacionário hiperbólico se todos os valores característicos de  $A$  têm parte real não-nula, o que é equivalente a dizer que  $A$  é campo de vetores linear hiperbólico. E dizemos que

1.  $p$  é um atrator se e somente se todos os valores característicos de  $A$  têm parte real negativa.
2.  $p$  é um repulsor se e somente se todos os valores característicos de  $A$  têm parte real positiva.
3.  $p$  é uma sela se alguns valores característicos de  $A$  têm parte real negativa e alguns valores característicos de  $A$  têm parte real positiva.

Sejam os seguintes fatos:

1. Suponhamos que  $p$  é ponto estacionário hiperbólico de  $F$ . Isso implica que  $A = DF(p)$  é um isomorfismo, o que é o mesmo que dizer que nenhum valor característico é zero. Por sua vez, isso significa que  $p$  é um zero isolado de  $F$ . Do mesmo modo,  $A = DF(p)$  ser um isomorfismo implica que  $F$  é um difeomorfismo na vizinhança de  $p$ .

FIGURA 12.10.1 – HIPERBOLICIDADE



Dito de outro modo, existe uma vizinhança de  $p$  que é enviada em uma vizinhança de 0 de forma difeomorfa (bijetiva).

2. Suponhamos que temos uma família de campos de vetores  $F_\lambda: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  sendo que  $F = F_{\lambda_0}$  tal que  $(\lambda, x) \mapsto F_\lambda(x)$  é  $\mathcal{C}^1$ . Consideremos a equação  $F_\lambda(x) = 0$ . Conhecemos a solução  $(\lambda_0, p)$ . Também,  $\Phi(\lambda, x) \rightarrow F_\lambda(x)$ . Dessa função decorre que

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{(\lambda_0, p)} = DF_\lambda(x) \Big|_{(\lambda_0, p)} = DF(p) \quad (12.10.1)$$

é um isomorfismo.

Pelo teorema da função implícita, existe uma função  $p(\lambda)$  de classe  $\mathcal{C}^1$  definida numa vizinhança de  $\lambda_0$  tal que  $\begin{cases} F_\lambda(x) = 0 \iff x = p(\lambda) \\ p(\lambda_0) = p \end{cases}$ .

**Exemplo 12.10.1.** Seja  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dado por  $F(x) = x^2$ . O único ponto estacionário (não-hiperbólico) é  $p = 0$ . Agora, vamos considerar uma família parametrizada de campos de vetores, a saber:  $F_\lambda(x) = x^2 + \lambda$ . Para todo  $\lambda > 0$ ,  $F_\lambda(x)$  não tem pontos estacionários.

**Exemplo 12.10.2.** Seja  $F = A$  campo linear hiperbólico ( $p = 0$ ). E seja  $F_\lambda(x) = Ax + \lambda$  com  $\lambda \in \mathbb{R}^d$ . Assim,  $F_\lambda(x) = 0 \iff Ax = -\lambda \iff x = A^{-1}(-\lambda)$ . E a inversa de  $A$  faz sentido porque  $A$  sendo hiperbólico é um isomorfismo.

3.  $p(\lambda)$  é ponto estacionário hiperbólico de  $F_\lambda$  para todo  $\lambda$  próximo de  $\lambda_0$ . Se

$$\lambda \approx \lambda_0 \implies \begin{cases} DF_\lambda \approx DF \\ p(\lambda) \approx p(\lambda_0) = p \end{cases} \implies DF_\lambda(p(\lambda)) \approx DF(p) \quad (12.10.2)$$

Como os valores característicos variam continuamente com o operador linear, temos que  $DF_\lambda(p(\lambda)) \approx DF(p)$  implica que os valores característicos de  $DF_\lambda(p(\lambda))$  estão próximos dos

valores característicos de  $DF(p)$ . Logo, têm parte real não-nula.

**Lema 12.10.1.** *Seja  $\phi = f^1$  o tempo 1 do fluxo de  $F$ . Se  $p$  é ponto estacionário hiperbólico de  $F$ , então  $B = D\Phi(p)$  é tal que todos os seus valores característicos têm módulo diferente de 1.*

*Demonstração.* Da dependência contínua da soluções, sabemos que dado  $x \in U$ ,  $\gamma(t) = Df^t(x)$  é solução da equação diferencial  $X' = DF(f^t(x))X$  com condição inicial  $X(0) = I$ . Tomando  $x = p$ , concluímos que  $\gamma(t)$  é solução de  $X' = DF(p)X$  (esta equação é autônoma) com condição inicial  $X(0) = I$ . Portanto,  $\gamma(t) = DF^t(p) = e^{tDF(p)}$ . Em particular, com  $t = 1$  tem-se  $DF^1(p) = e^{DF(p)}$ . Todos os valores característicos têm módulo diferente de 1. ■

Dizemos que uma aplicação linear  $B: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é hiperbólica se todos os seus valores característicos têm módulo diferente de 1.

Sejam as seguintes observações:

1. se  $A$  é um campo de vetores linear hiperbólico, então  $B = e^A$  é transformação linear hiperbólica.
2. se  $p$  é ponto estacionário hiperbólico do campo de vetores  $F$ , então  $B = Df^1(p) = e^{DF(p)}$  é transformação hiperbólica.
3. seja  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma aplicação diferenciável e  $p \in U$  um ponto fixo, isto é,  $f(p) = p$ . Dizemos que  $p$  é ponto fixo hiperbólico de  $f$  se  $Df(p)$  é transformação linear hiperbólica, isto é, se todos os valores característicos de  $Df(p)$  têm módulo diferente de 1.

TABELA 12.1 – RELAÇÃO  $Df^t(p) = e^{tDF(p)}$

Campo de Vetores	Transformação Tempo 1
$p$ é estacionário	$p$ é fixo (para todo $t$ )
$p$ é hiperbólico (valores característicos não-nulos)	$p$ é hiperbólico (valores característicos com módulo $\neq 1$ )
$p$ é atrator (parte real $< 0$ )	$p$ é atrator (parte real $ \cdot  < 1$ )
$p$ é repulsor (parte real $> 0$ )	$p$ é repulsor (parte real $ \cdot  > 1$ )

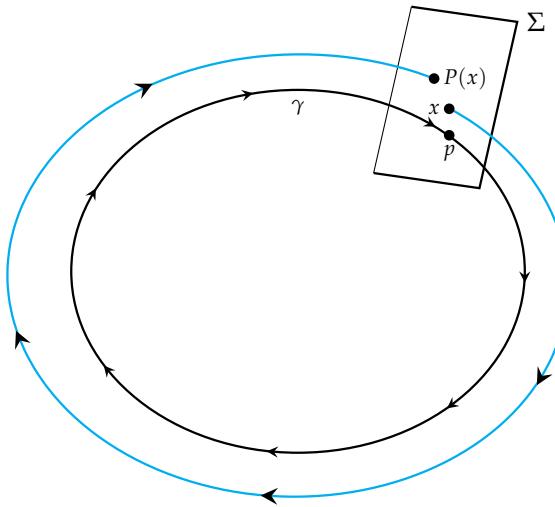
Vamos supor, agora, que temos uma trajetória (órbita) periódica e gostaríamos de definir uma noção de hiperbolideidade. Por exemplo, para mostrar que na vizinhança dessa órbita periódica existe uma conjugação a um modelo de interesse.

Na abordagem de Poincaré, vamos considerar um ponto  $p$  qualquer na órbita periódica e vamos considerar uma seção transversal  $\Sigma$ . Seja uma transformação de Poincaré associada à seção transversal  $\Sigma$  tal que  $x \mapsto P(x)$  de modo que  $P: \Sigma' \rightarrow \Sigma$ , em que  $\Sigma'$  é uma vizinhança de  $p$  em  $\Sigma$ .

Sabemos que  $P(p) = p$  é ponto fixo da transformação de Poincaré e  $P$  é de classe  $\mathcal{C}^k$  se  $F$  é de classe  $\mathcal{C}^k$ .

Dizemos que  $\gamma$  é órbita periódica hiperbólica se  $p$  é ponto fixo hiperbólico de transformação de Poincaré  $P$ , isto é, todos os valores característicos de  $DP(p)$  têm módulo diferente de 1.

FIGURA 12.10.2 – ÓRBITA PERIÓDICA HIPERBÓLICA



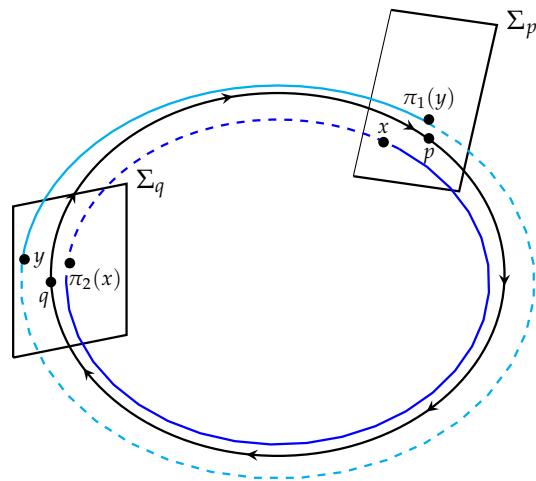
A definição de hiperbolicidade não depende da escolha de  $P$  e de  $\Sigma$ . Então,

$$\pi_1: \Sigma'_q \rightarrow \Sigma_p \quad (12.10.3)$$

$$\pi_2: \Sigma'_p \rightarrow \Sigma_q \quad (12.10.4)$$

Então, como obtemos  $P_q: \Sigma'_q \rightarrow \Sigma_q$ ? Fazemos  $P_q = \pi_2 \circ \pi_1$  próximo de  $q$ . E como obtemos  $P_p: \Sigma'_p \rightarrow \Sigma_p$ ? Fazemos  $P_p = \pi_1 \circ \pi_2$  próximo de  $p$ .

FIGURA 12.10.3 – MATRIZES SIMILARES



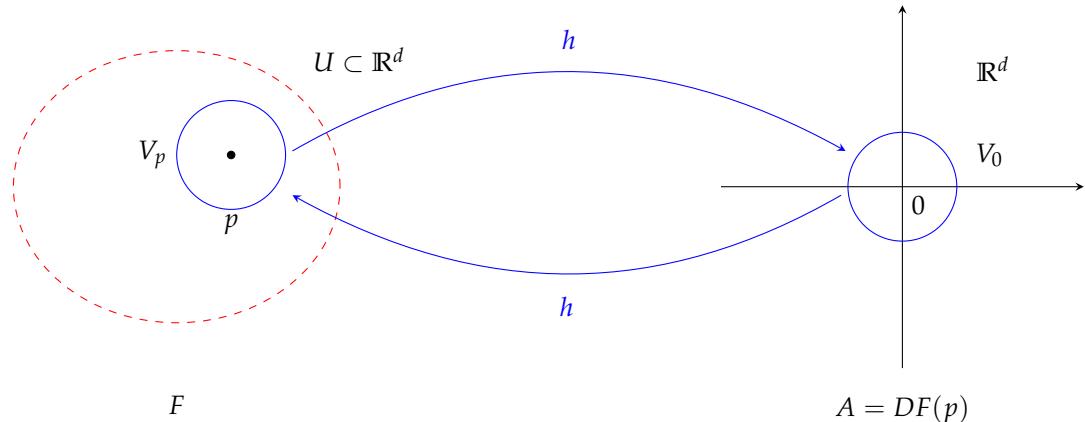
**Corolário 12.10.0.1.** Portanto,  $P_q = \pi_1^{-1} \circ P_p \circ \pi_1$ .  $P_q$  é  $\mathcal{C}^1$ -conjugada a  $P_p$ . E isso implica que  $Dp_q(q) = D\pi_1^{-1}(q) \circ DP_p(p) \circ D\pi_1(q)$ . Desse modo,  $DP_q(q)$  e  $DP_p(p)$  são matrizes (operadores) similares. E, logo, têm os mesmos valores característicos.

Essa manipulação é válida, pois as transformações de Poincaré são difeomorfismos, isto é, têm inversa. E esse corolário significa que duas transformações de Poincaré quaisquer de uma órbita periódica são conjugadas uma a outra e são conjugadas por um difeomorfismo.

Observe que esse é um invariante muito interessante, pois não depende da escolha do ponto e nem da seção transversal.

**Teorema 12.10.1** (Teorema de Grobman-Hartman). *Seja  $F: U \rightarrow \mathbb{R}^d$ , em que  $U$  é um aberto de  $\mathbb{R}^d$ , de classe  $\mathcal{C}^1$ . Suponhamos que  $p \in U$  é ponto estacionário hiperbólico de  $F$ , de tal modo que  $F(p) = 0$ . Hiperbólico aqui significa que nenhum valor característico de  $A = DF(p)$  tem parte real nula. Então existem vizinhanças  $V_p$  de  $p$  e  $V_0$  de  $0 \in \mathbb{R}^d$  e existe  $h: V_p \rightarrow V_0$  homeomorfismo que envia  $p$  em  $0$  e conjuga o fluxo  $(f^t)_t$  de  $F$  ao fluxo  $(e^{tA})_t$  do campo de vetores linear  $A = DF(p)$ .*

FIGURA 12.10.4 – TEOREMA DE GROBMAN-HARTMAN



Dito de outro modo,

$$h(f^t(x)) = e^{tA}(x), \quad \forall t, x \quad (12.10.5)$$

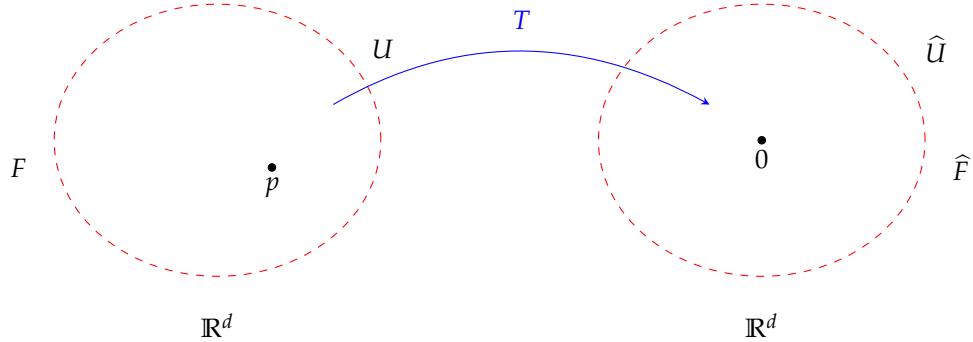
em que  $f^t(x)$  denota o fluxo de  $F$ . De modo que  $f^t(x) \in V_p$ . Então, na vizinhança de um ponto  $p$  estacionário hiperbólico qualquer equação diferencial se parece (no sentido de uma conjugação por um homeomorfismo) com a respectiva linearização (o fluxo linear). Não podemos tomar  $h$  como sendo um difeomorfismo.

Denotando  $f = f^1$  (a transformação de tempo 1 do fluxo), temos que  $f(p) = p$  (é um ponto fixo) e que  $Df(p) = e^{DF(p)}$ . Portanto, nenhum valor característico de  $B = Df(p)$  tem módulo igual a 1. Isso implica que  $p$  é ponto fixo hiperbólico da transformação de  $f$ .

Podemos supor que  $p = 0$ . A origem das coordenadas em  $\mathbb{R}^d$  é totalmente arbitrária.

Podemos considerar uma transformação simples do espaço  $\mathbb{R}^d$  em  $\mathbb{R}^d$  que envia o ponto  $p$  no ponto 0. Para tanto, fazemos  $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  definida por  $T(x) = x - p$ , em que  $\widehat{U} = T(U)$ . Além disso,  $\widehat{F}: \widehat{U} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , de modo que  $\widehat{F} = F \circ T^{-1}$ .

FIGURA 12.10.5 – CONJUGAÇÃO DE FLUXOS



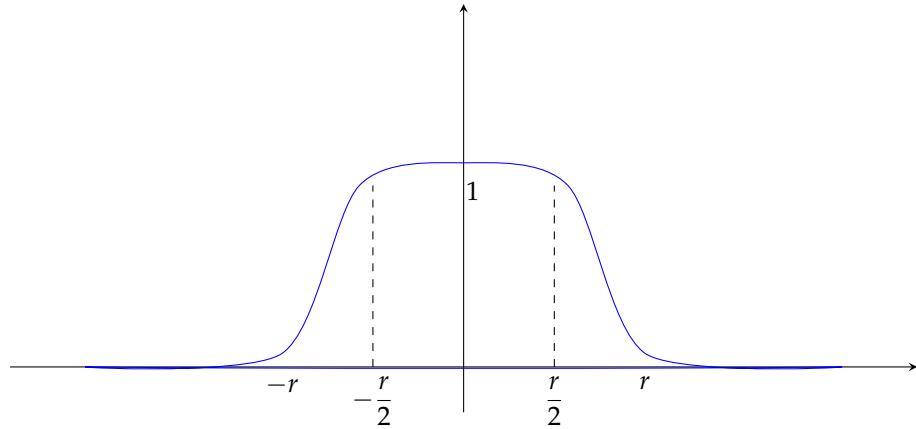
Assim,  $\widehat{F}(0) = F(p) = 0$  e  $D\widehat{F}(0) = DF(p)$ . Portanto, 0 é ponto estacionário hiperbólico de  $\widehat{F}$  e o fluxo  $(\widehat{f}^t)_t$  de  $\widehat{F}$  é dado por  $\widehat{f}^t = T \circ f^t \circ T^{-1}$ , isto é,  $T$  conjuga os dois fluxos.

A partir daqui vamos supor  $p = 0$ .

**Lema 12.10.2.** *Dado qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $r_2 > r_1 > 0$  e existe um campo de vetores  $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^1$  tal que*

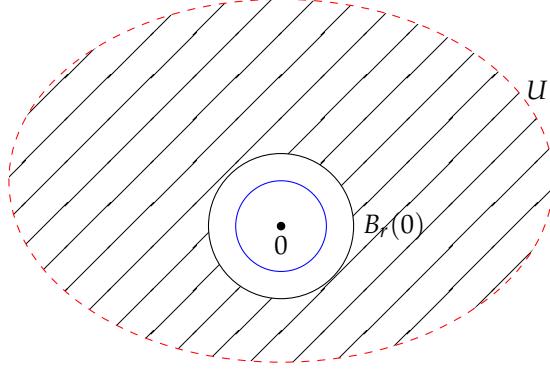
1.  $G = F$  em  $B_{r_1}(0)$
2.  $G = A$  fora de  $B_{r_2}(0)$
3.  $\Psi = G - A$  é de classe  $C^1$ ,  $\Psi$  e  $D\Psi$  são limitadas e  $\Psi$  é globalmente  $\varepsilon$ -Lipschitz
4.  $\Psi^t = g^t - e^{tA}$  é globalmente  $\varepsilon$ -Lipschitz para todo  $t \in [-2, 2]$

*Demonação.* Fixamos  $\beta$  e, em seguida, escolhemos  $\alpha(x) = \beta\left(\frac{|x|}{r}\right)$ . Escolhemos uma função  $\alpha: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^\infty$ , com  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , de modo que  $\alpha \equiv 1$  em  $B_{\frac{r}{2}}(0)$  e  $\alpha \equiv 0$  fora de  $B_{\frac{r}{2}}(0)$ .



E vamos definir o novo campo de vetores como  $\phi(x) = F(x) - A(x)$  para  $x \in U$ . Também definimos  $G(x) = A(x) + \alpha(\|x\|)\phi(x)$  se  $x \in U$ . Fixamos  $r > 0$  tal que  $B_r(0) \subset U$ .

Lembrando que  $\phi(x) = F(x) - A(x)$ . Assim,  $\phi(0) = 0$ . A continuidade, junto desse fato, implica que  $\|\phi(x)\| < \varepsilon$  para qualquer  $x \in B_r(0)$  desde que  $r$  seja suficientemente pequeno. Pelo mesmo argumento,  $D\phi(0) = 0$  e  $\|D\phi(x)\| < \varepsilon$ . Portanto, dado  $\varepsilon > 0$  podemos escolher  $r$  tal que  $\|D\phi(x)\| < \varepsilon$  para todo  $z \in B_r(0)$ . Logo,  $\phi(z)$  é  $\varepsilon$ -Lipschitz. Disso decorre que  $\|\phi(z) - \phi(0)\| \leq \varepsilon\|z - 0\|$  para todo  $z \in B_r(0)$ .



Fora da bola de raio  $r$  e centro em  $0$ , a função  $\alpha(\|x\|)$  é nula quando  $\|x\| > r$ . Então,  $G(x) = A(x)$  fora de  $U$ .

Escolhemos  $r_1 = \frac{r}{2}$  e  $r_2 = r$ .

Vamos provar cada item do lema.

1. Assim, em  $B_{\frac{r}{2}}(0)$ ,  $\alpha(\|x\|) \equiv 1$ . Logo,  $G(x) = A(x) + \phi(x) = F(x)$ .

2. Fora de  $B_r(0)$ ,  $\alpha(\|x\|) \equiv 0$ . Logo,  $G(x) = A(x)$ .

3. Também,  $\Psi(x) = G(x) = A(x) = \begin{cases} \alpha(\|x\|)\phi(x) & \text{se } x \in U \\ 0 & \text{se } x \notin B_r(0) \end{cases}$

Logo,

$$\begin{aligned} \sup \|\Psi(x)\| &\leq \sup_{x \in B_r(0)} \alpha(\|x\|) \|\phi(x)\| \\ &\leq \sup_{x \in B_r(0)} \|\phi(x)\| < \infty \end{aligned} \tag{12.10.6}$$

Além disso, supondo que  $x, y \in B_r(0)$  temos que

$$\begin{aligned} \|\Psi(x) - \Psi(y)\| &= \|\alpha(\|x\|)\phi(x) - \alpha(\|y\|)\phi(y)\| \\ &\leq |\alpha(\|x\|) - \alpha(\|y\|)| \cdot \|\phi(x)\| + \alpha(\|y\|) \cdot [\|\phi(x) - \phi(y)\|] \\ &\leq \sup |D\alpha| \cdot \|x - y\| \cdot \sup_{x \in B_r(0)} \|\phi(x)\| + \sup \|\alpha\| \cdot \sup_{z \in B_r(0)} \|D\phi(z)\| \cdot \|x - y\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup ||D\alpha| \cdot \|x - y\| \cdot \sup_{x \in B_r(0)} \|\phi(x)\| + 1 \cdot \sup_{z \in B_r(0)} \|D\phi(z)\| \cdot \|x - y\| \\
&\leq \left[ \frac{1}{r} \sup |D\beta| + \varepsilon r + 1 \cdot \varepsilon \right] \cdot \|x - y\| \\
&\leq \varepsilon (1 + \sup |D\beta|) \cdot \|x - y\|
\end{aligned} \tag{12.10.7}$$

Analogamente, para os casos em que (i)  $x \in B_r(0)$  e  $y \notin B_r(0)$ ; e (ii)  $x \notin B_r(0)$  e  $y \in B_r(0)$ .

4. Seja  $\Psi^t(x) = g^t(x) - e^{tA}(x)$ . Queremos mostrar que  $\|\Psi^t(x) - \Psi^t(y)\| \leq \varepsilon \|x - y\|$ .

Sabemos que

$$g^t(x) = x + \int_0^t G(g^s(x)) ds \tag{12.10.8}$$

$$g^t(y) = y + \int_0^t G(g^s(y)) ds \tag{12.10.9}$$

e

$$e^{tA}(x) = x + \int_0^t A e^{sA} x ds \tag{12.10.10}$$

$$e^{tA}(y) = y + \int_0^t A e^{sA} y ds \tag{12.10.11}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\Psi^t(x) - \Psi^t(y) &= [g^t(x) - g^t(y)] - [e^{tA}(x) - e^{tA}(y)] \\
&= (x - y) + \int_0^t [G(g^s(x)) - G(g^s(y))] ds - (x - y) + \\
&\quad - \int_0^1 A [e^{sA} x - e^{sA} y] ds \\
&= \int_0^t [\Psi(g^s(x)) - \Psi(g^s(y))] ds + \int_0^t [A(g^s(x)) - A(g^s(y))] ds + \\
&\quad - \int_0^1 A [e^{sA} x - e^{sA} y] ds \\
&= \int_0^t [\Psi(g^s(x)) - \Psi(g^s(y))] ds + \int_0^t A(\Psi^s(x) - \Psi^s(y)) ds
\end{aligned} \tag{12.10.12}$$

Temos que

$$\|\Psi(g^s(x)) - \Psi(g^s(y))\| \leq \varepsilon \|g^s(x) - g^s(y)\|$$

$$\leq \varepsilon e^{K|s|} \|x - y\| \quad (12.10.13)$$

em que  $K$  é uma constante de Lipschitz para  $G$  (independente de  $\varepsilon$ ). Veremos no lema 12.10.3 que  $G$  é globalmente  $K$ -Lipschitz, o que implica que  $g^s$  é  $e^{K|s|}$ -Lipschitz.

Disso concluímos que

$$\begin{aligned} \|\Psi^t(x) - \Psi^t(y)\| &\leq \varepsilon e^{2K} \|x - y\| + \|A\| \int_0^t \|\Psi^s(x) - \Psi^s(y)\| ds, \quad \forall t \in [-2, 2] \\ &\leq \varepsilon e^{2K} e^{\|A\|} \|x - y\|, \quad \forall t \in [-2, 2] \text{ [pelo lema de Gronwall]} \end{aligned} \quad (12.10.14)$$

■

**Lema 12.10.3.** Seja  $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^1$  um campo de vetores globalmente Lipschitz tal que  $G(0) = 0$ . Então, o fluxo  $(g_t)^t$  é completo e satisfaz  $\|g^t(x) - g^t(y)\| \leq e^{K\|t\|} \|x - y\|$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}^d$ , em que  $K$  é uma constante de Lipschitz para  $G$ .

Vamos demonstrar o lema 12.10.3, que é essencialmente uma aplicação da desigualdade de Gronwall.

*Demonstração.* Suponhamos que dado  $x \in \mathbb{R}^d$  o intervalo maximal de definição de  $f^t(x)$  é o intervalo  $(a, b)$ . Temos que

$$g^t(x) = x + \int_0^t G(g^s(x)) ds \quad (12.10.15)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|g^t(x)\| &\leq \|x\| + \int_0^t \|G(g^s(x)) - G(0)\| ds \\ &\leq \|x\| + \int_0^t K \|g^s(x)\| ds \end{aligned} \quad (12.10.16)$$

pois o campo de vetores  $G$  é Lipschitz.

Pelo lema de Gronwall,

$$\begin{aligned} \|g^t(x)\| &\leq e^{Kt} \|x\|, \quad \forall t \in (0, b) \\ &\leq e^{Kb} \|x\| \end{aligned} \quad (12.10.17)$$

Portanto,

$$b < +\infty \implies \{g^t(x): t \in (0, b)\} \subset \bar{B}_{e^{Kb} \|x\|}(0) \quad (12.10.18)$$

Como  $\bar{B}_{e^{Kb}\|x\|}(0)$  é um compacto, a trajetória contida nesse compacto implica que  $b = +\infty$ . Assim,  $b = +\infty$ . E de forma análoga,  $a = -\infty$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} g^t(x) - g^t(y) &= x - y + \int_0^t [G(g^s(x)) - G(g^s(y))] ds \\ \|g^t(x) - g^t(y)\| &\leq \|x - y\| + \int_0^t K \|g^s(x) - g^s(y)\| ds \\ &\leq \|x - y\| e^{Kt}, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d \quad [\text{por Gronwall}] \end{aligned} \quad (12.10.19)$$

Analogamente,

$$\|g^t(x) - g^t(y)\| \leq \|x - y\| e^{-Kt}, \quad \forall t \leq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d \quad [\text{por Gronwall}] \quad (12.10.20)$$

■

**Lema 12.10.4.** *Dado qualquer isomorfismo linear hiperbólico  $B: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que para qualquer função  $\Psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$   $\varepsilon$ -Lipschitz existe um único homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  satisfazendo*

1.  $h \circ (B + \Psi) = B \circ h$
2.  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|h(x) - x\| < \infty$ :  $h$  está a uma distância finita da identidade.

*Demonstração.* Ideia de demonstração.

Consideremos o espaço de Banach

$\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) = \left\{ u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \text{ contínuas e limitadas tais que } \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|u(x)\| < \infty \right\}$  munido de norma da convergência uniforme  $\|u\| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|u(x)\|$ . É um espaço normado completo de dimensão infinita. Devemos procurar  $h$  da forma  $h = \text{id} + u$  em que  $u \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ . Observe que  $u$  não é necessariamente linear. Assim, encontramos

$$\begin{aligned} (\text{id} + u) \circ (B + \Psi) &= B \circ (\text{id} + u) \\ B + \Psi + u \circ (B + \Psi) &= B + B \circ u \\ u \circ (B + \Psi) - B \circ u + \Psi &= 0 \end{aligned} \quad (12.10.21)$$

Se  $\Psi \equiv 0$ , podemos tomar  $u \equiv 0$ . Para resolver  $u \circ (B + \Psi) - B \circ u + \Psi = 0$  usamos o teorema da função implícita em espaço de Banach.

■

**Lema 12.10.5.** Dado qualquer isomorfismo linear hiperbólico  $B: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  existe  $\varepsilon > 0$  tal que para quaisquer  $\Psi'$  e  $\Psi''$   $\varepsilon$ -Lipschitz existe um único homeomorfismo  $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  de classe  $C^0$  a distância finita da identidade tal que  $(B + \Psi') \circ h = h \circ (B + \Psi'')$ .

*Demonstração.* Temos que  $h$  é tal que

$$(B + \Psi') \circ h = h \circ (B + \Psi'') \quad (12.10.22)$$

Também temos que  $g$  é tal que

$$(B + \Psi'') \circ g = g \circ (B + \Psi') \quad (12.10.23)$$

Então,

$$(B + \Psi') \circ h \circ g = h \circ (B + \Psi'') \circ g = h \circ g \circ (B + \Psi') \quad (12.10.24)$$

Por unicidade,  $h \circ g = \text{id} = g \circ$ . Portanto,  $h$  é um homeomorfismo.  $\blacksquare$

**Lema 12.10.6.** Temos que  $H \circ g^t = e^{tA} \circ H$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Temos dois casos

1. Suponhamos  $t = n \in \mathbb{Z}$ . Queremos calcular  $(e^{-nA} \circ H \circ g^n)$ .

Tomemos  $h$  como no lema 12.10.4 e  $H: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  dada por  $H(x) = \int_0^1 (e^{-sA} \circ h \circ g^s)(x) ds$ .

Então,

$$\begin{aligned} e^{-nA} \circ H \circ g^n &= e^{-nA} \circ \left( \int_0^1 (e^{-sA} \circ h \circ g^s) ds \right) \circ g^n \\ &= \int_0^1 (e^{-nA} \circ e^{-sA} \circ h \circ g^s \circ g^n) ds \\ &= \int_0^1 (e^{-sA} \circ e^{-nA} \circ h \circ g^n \circ g^s) ds \end{aligned} \quad (12.10.25)$$

uma vez que  $e^{-sA}$  e  $e^{-nA}$  comutam e  $g^n$  e  $g^s$  comutam.

Temos que

$$\begin{aligned} h \circ (B + \Psi) &= B \circ h \\ \iff h \circ g &= e^A \circ h \end{aligned}$$

$$\iff e^{-A} \circ h \circ g = h \quad (12.10.26)$$

Dessa relação decorre que

$$e^{-2A} \circ h \circ g^2 = e^{-A} (e^{-A} \circ h \circ g) g = e^{-A} \circ h \circ g = h \quad (12.10.27)$$

Por indução,

$$e^{-nA} \circ h \circ g^n = h, \forall n \geq 0 \quad (12.10.28)$$

De modo semelhante,

$$h = e^{nA} \circ h \circ g^{-n}, \forall n \geq 0 \quad (12.10.29)$$

Portanto,  $e^{-nA} \circ h \circ g^n = h, \forall n \in \mathbb{Z}$ .

Assim,

$$e^{-nA} \circ H \circ g^n = \int_0^1 (e^{-sA} \circ h \circ g^s) ds = H \quad (12.10.30)$$

2. Suponhamos agora que  $t \in [0, 1]$ .

Então,

$$\begin{aligned} e^{-tA} \circ H \circ g^t &= e^{-tA} \circ \left( \int_0^1 (e^{-sA} \circ h \circ g^s) ds \right) \circ g^t \\ &= \int_0^1 (e^{-(t+s)A} \circ h \circ g^{(t+s)}) ds \\ &= \int_{t-1}^t (e^{-(u+1)A} \circ h \circ g^{(u+1)}) du \\ &= \int_{t-1}^0 (e^{-(u+1)A} \circ h \circ g^{(u+1)}) du + \int_0^t (e^{-(u+1)A} \circ h \circ g^{(u+1)}) du \\ &= \int_t^1 (e^{-vA} \circ h \circ g^v) dv + \int_0^t (e^{-vA} \circ e^{-A} \circ h \circ g \circ g^v) dv \\ &= \int_0^1 (e^{-vA} \circ h \circ g^v) dv \\ &= H \end{aligned} \quad (12.10.31)$$

em que fizemos as mudanças de variável  $u = t + s - 1$ ,  $v = u + 1$  e  $v = u$ .

3. Caso geral:  $t \in \mathbb{R}$

Escrevemos  $t = n + t_0$  com  $n \in \mathbb{Z}$  e  $t_0 \in [0, 1]$ . Portanto,

$$\begin{aligned} e^{-tA} \circ H \circ g^t &= e^{-t_0 A} e^{-nA} \circ H \circ g^n \circ g^{t_0} \\ &= e^{-t_0 A} \circ H \circ g^{t_0} \\ &= H \end{aligned} \tag{12.10.32}$$

■

**Lema 12.10.7.** Temos que  $H \circ \hat{H} = id = \hat{H} \circ H$ .

*Demonstração.* Vamos à prova do teorema 12.10.1.

Dado  $F$  construímos  $G$  como no lema 12.10.2. Como  $G = F$  próximo de 0 isso implica que  $G(0) = 0$  e  $DG(0) = A = DF(0)$ . Além disso, a operação identidade conjuga o fluxo  $(f^t)_t$  ao fluxo  $(g^t)_t$  restrito à bola  $B_{r_1}(0)$ . Basta mostrar que o fluxo de  $G$  é conjugado ao fluxo ao campo de vetores  $A$ .

Existe um único  $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  homeomorfismo a distância finita da identidade tal que  $(B + \Psi^1) \circ h = h \circ B$ , em que  $B = e^A$  e  $B + \Psi^1 = g^1$ .

Vamos encontrar  $H: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $g^t \circ H = H \circ e^{tA}$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Denotemos  $g = g^1$  (tempo 1 do fluxo). Do lema 12.10.2,  $g = e^A + \Psi^1$ . Observe que  $B = e^A: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é isomorfismo linear hiperbólico e  $\Psi^1: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é  $\varepsilon$ -Lipschitz. Do mesmo lema,  $\Psi^1(0) = g^1(0) - e^A 0 = 0 - 0 = 0$ , pois 0 é ponto estacionário do campo de vetores  $G$  e  $e^A$  é linear.

Precisamos mostrar que  $H$  é um homeomorfismo. Sabemos que

$$H(x) = \int_0^1 (e^{-sA} \circ h \circ g^s) ds \tag{12.10.33}$$

1.  $H$  é contínua, pois  $e^{-sA}$ ,  $h$  e  $g^s$  são contínuas
2.  $H$  é invertível com inversa contínua  $\hat{H}(x) = \int_0^1 (g^{-s} \circ h^{-1} \circ e^{sA}) ds$

Em particular,

$$g^1 \circ H = H \circ e^A \tag{12.10.34}$$

Além disso,  $H$  está a distância finita de  $id$ , o que significa que  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|H(x) - x\| < \infty$ .

Portanto,  $H = h$ . Logo,  $H$  é um homeomorfismo.

■

## 12.11 Teorema da Variedade Estável

Nesta seção vamos enunciar e demonstrar outro teorema fundamental da teoria local das equações diferenciais, o qual caracteriza a estrutura dos conjuntos de pontos cujas trajetórias convergem para um ponto estacionário hiperbólico dado, no futuro (quando  $t \rightarrow +\infty$ ) ou no passado (quando  $t \rightarrow -\infty$ ). Para facilitar, vamos supor que o fluxo é completo.

O campo linear  $A = DF(p)$  é hiperbólico. Portanto, existe uma decomposição do espaço  $\mathbb{R}^d$  por meio de soma direta, sítio é,  $\mathbb{R}^d = E^s \oplus E^u$ . Temos as seguintes propriedades

1. essa decomposição é invariante, ou seja,  $A(E^s) = E^s$  e  $A(E^u) = E^u$ .
2. os valores característicos de  $A|E^s$  são os valores característicos de  $A$  cuja parte real é negativa e os valores característicos de  $A|E^u$  são os valores característicos de  $A$  cuja parte real é positiva.

Assim, o fluxo  $e^{tA}$  de  $A$  satisfaz

1.  $e^{tA}(E^s) = E^s$  e  $e^{tA}(E^u) = E^u$
2.  $e^{tA}(x) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$  para todo  $x \in E^s$  e  $e^{tA}(x) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$  para todo  $x \in E^u$

Agora, vamos analisar o fluxo não-linear.

Dada uma vizinhança  $W$  de um ponto estacionário  $p$ , chamamos variedade estável e variedade instável de um ponto estacionário  $p$ , respectivamente, os conjuntos:

$$W_W^s(p) = W^s(p, F) = \left\{ x \in W : \lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(x) = p \right\} \quad (12.11.1)$$

$$W_W^u(p) = W^u(p, F) = \left\{ x \in W : \lim_{t \rightarrow -\infty} f^t(x) = p \right\} \quad (12.11.2)$$

Em geral, estes conjuntos podem ser muito complicados. Segue do Teorema de Grobman-Hartman que se o ponto estacionário  $p$  é hiperbólico, então eles são cópias topologicamente imersas dos subespaços  $E^s$  e  $E^u$ , respectivamente. Mais precisamente,  $W^s(p)$  é a imagem de  $E^s$  por alguma aplicação contínua injetiva e, analogamente,  $W^u(p)$  é a imagem de  $E^u$  por alguma aplicação contínua injetiva.

Seja  $y_s \in W$ . Considere que  $f^t(y_s) \rightarrow p$  quando  $t \rightarrow +\infty$  para todo  $y_s \in W_W^s(p)$ . Sabemos que

$$f^t(y_s) = h^{-1} \left( e^{tA}(h(y_s)) \right) \quad (12.11.3)$$

Como  $h(y_s)$  está em  $E^s$ , então  $e^{tA}(h(y_s)) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ . Logo,  $f^t(y_s) = h^{-1}(0) = p$ . Sempre usando o fato de que  $h$  é contínua e é uma conjugação.

De modo semelhante,  $f^t(y_u) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow -\infty$  para todo  $y_u \in W_W^u(p)$ .

**Teorema 12.11.1** (Teorema da Variedade Estável). *Suponhamos que o ponto estacionário  $p$  é hiperbólico e que o campo de vetores  $F$  é de classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ . Então, para toda a vizinhança  $W$  suficientemente pequena*

1.  $W_W^s(p)$  é uma subvariedade  $C^k$  mergulhada em  $U$  tangente a  $E^s$  no ponto  $p$

2.  $f^t(x) \rightarrow p$  quando  $t \rightarrow +\infty$  para todo  $x \in W_W^s(p)$

Denotando

$$W^s(p) = \left\{ x \in U : \lim_{t \rightarrow +\infty} f^t(x) = p \right\} \quad (12.11.4)$$

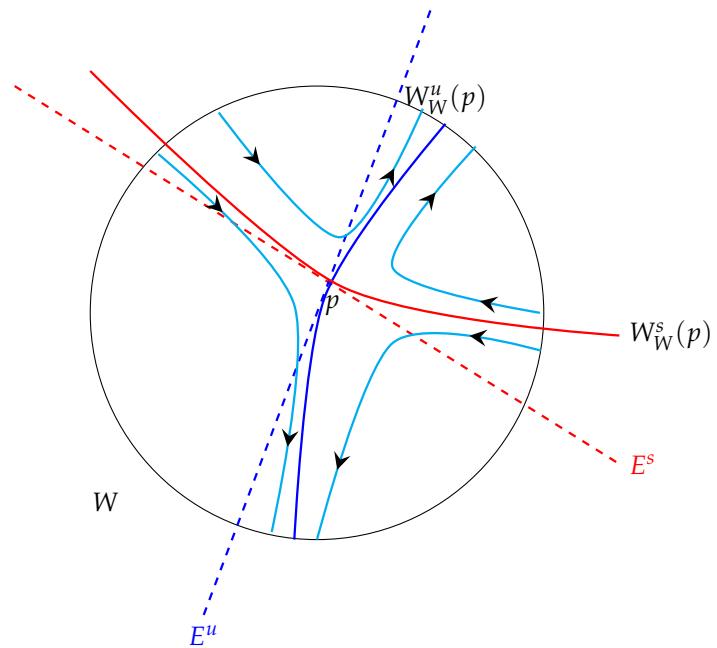
temos uma variedade estável (global) do ponto  $p$ .

3.  $W^s(p) = \bigcup_{t \geq 0} f^{-t}(W_W^s(p))$  é uma subvariedade  $C^k$  imersa em  $U$ , em que  $W_W^s(p)$  e  $f^{-t}$  são ambos de classe  $C^k$ .

Então, uma variedade estável é o conjunto dos pontos cuja trajetória converge para  $p$ . Em algum momento, entra na vizinhança  $W$  para nunca mais sair. Na vizinhança de  $W$  vale o Teorema de Grobman-Hartman. Observe que  $f^t(W_W^s(p)) \subset W_W^s(p)$ ,  $\forall t > 0$ . Logo,  $f^{-t}(W_W^s(p)) \supset W_W^s(p)$ ,  $\forall t > 0$ . Além disso, é monótona:

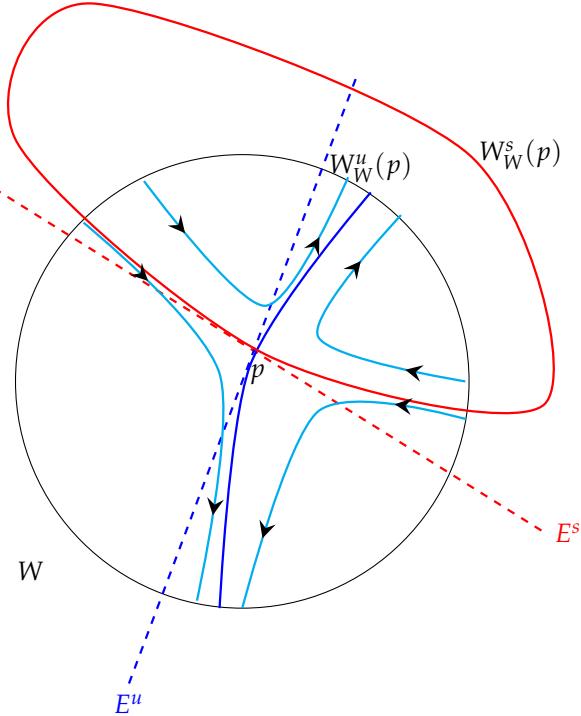
$$t_1 > t_2 \implies f^{t_2-t_1}(W_W^s(p)) \supset W_W^s(p) \iff f^{-t_1}(W_W^s(p)) \supset f^{-t_2}(W_W^s(p)) \quad (12.11.5)$$

FIGURA 12.11.1 – TEOREMA DA VARIEDADE ESTÁVEL



A situação abaixo não poderia ocorrer, pois isso implicaria que o trecho vermelho em  $W$  também teria uma auto-interseção uma vez que é a imagem de toda a trajetória vermelha por  $f^t$  e  $f^t$  é um difeomorfismo (bijeção).

FIGURA 12.11.2 – VIOLAÇÃO DO TEOREMA DA VARIEDADE ESTÁVEL



**Teorema 12.11.2** (Teorema da Variedade Estável para Órbitas Periódicas Hiperbólicas). *Seja  $\gamma$  uma órbita periódica hiperbólica, isto é,  $p$  é ponto fixo hiperbólico da transformação de Poincaré. Assim,  $P: \Sigma' \rightarrow \Sigma$ . Então,*

1. *Dada a vizinhança  $W$  suficientemente pequena de  $\gamma$ ,*

$$W_W^s(\gamma) = \{x: f^t(x) \in W, \forall t \geq 0\} \quad (12.11.6)$$

*é subvariedade classe  $C^k$ ,  $1 \leq k \leq \infty$ .*

2. *para todo  $x \in W_W^s(\gamma)$  tem-se que  $d(f^t(x), \gamma) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow +\infty$ .*

**Teorema 12.11.3** (Teorema da Variedade Estável para Difeomorfismos). *Seja  $p$  um ponto fixo hiperbólico (módulo diferente de 1) de um difeomorfismo  $f$  de classe  $C^1$ . Então, para toda vizinhança  $W$  pequena a variedade estável*

- 1.

$$W_W^s(p) = \{x: f^n(x) \in W, \forall n \geq 0\} \quad (12.11.7)$$

*é subvariedade  $\mathcal{C}^k$  mergulhada.*

2. para todo  $x \in W_W^s(p)$  temos  $f^n(x) \rightarrow P$  quando  $n \rightarrow +\infty$ .

---

**13**

---

---

**SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**

---

# 13.1 Sistema de Equações Diferenciais Lineares de Primeira Ordem Homogêneas

Seja o sistema geral de equações diferenciais  $2 \times 2$  dado por

$$\dot{x}_1 = ax_1 + bx_2, \quad (13.1.1)$$

$$\dot{x}_2 = cx_1 + dx_2, \quad (13.1.2)$$

que pode ser reescrito como

$$\dot{x} = Ax. \quad (13.1.3)$$

Antes de resolver este sistema de EDO's usando técnicas matriciais, quero primeiro mostrar que podemos realmente resolver essas equações convertendo o sistema em uma única equação de segunda ordem. Nós tomamos a derivada da primeira equação e usamos ambas as equações para escrever

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 &= a\dot{x}_1 + b\dot{x}_2 \\ &= a\dot{x}_1 + b(cx_1 + dx_2) \\ &= a\dot{x}_1 + bcx_1 + d(\dot{x}_1 - ax_1) \\ &= (a+d)\dot{x}_1 - (ad-bc)x_1.\end{aligned} \quad (13.1.4)$$

O sistema de duas equações de primeira ordem, portanto, torna-se a seguinte equação de segunda ordem:

$$\ddot{x}_1 - (a+d)\dot{x}_1 + (ad-bc)x_1 = 0. \quad (13.1.5)$$

De forma semelhante para a segunda equação:

$$\ddot{x}_2 - (a+d)\dot{x}_2 + (ad-bc)x_2 = 0. \quad (13.1.6)$$

Em geral, um sistema de  $n$  equações homogêneas lineares de primeira ordem pode ser convertido em uma equação homogênea linear de ordem  $n$ .

Podemos resolver por eliminação, mas não é uma solução elegante. Vamos estudar a solução a partir de autovalores e autovetores.

**Exemplo 13.1.1.** Encontre a solução geral de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 + x_2 \end{cases} \quad (13.1.7)$$

A equação pode ser resolvida ao ser escrita no formato matricial como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (13.1.8)$$

Seja a solução  $x(t) = v \exp(\lambda t)$ , em que  $v$  e  $\lambda$  são independentes de  $t$ . Logo,

$$\lambda v \exp(\lambda t) = Av \exp(\lambda t) \implies Av = \lambda v. \quad (13.1.9)$$

Montando a equação característica, temos:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \lambda^2 - 2\lambda - 3 &= 0 \\ (\lambda - 3)(\lambda + 1) &= 0. \end{aligned} \quad (13.1.10)$$

Portanto, os dois autovalores são  $\lambda_1 = 3$  e  $\lambda_2 = -1$ .

Para determinar os correspondentes autovetores, substituímos os autovalores em:

$$(A - \lambda I)v = 0. \quad (13.1.11)$$

Para  $\lambda = 3$ , temos:

$$-2v_{11} + v_{21} = 0, \quad (13.1.12)$$

$$4v_{11} - 2v_{21} = 0. \quad (13.1.13)$$

Encontramos que  $v_{21} = 2v_{11}$ . Vamos normalizar  $v_{11} = 1$ .

Para  $\lambda = -1$ , temos:

$$2v_{12} + v_{22} = 0. \quad (13.1.14)$$

Encontramos que  $v_{22} = -2v_{12}$ . Vamos normalizar  $v_{12} = 1$ .

Assim, os autovetores são:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (13.1.15)$$

As soluções são:

$$x_1(t) = c_1 \exp(3t) + c_2 \exp(-t), \quad (13.1.16)$$

$$x_2(t) = 2c_1 \exp(3t) - 2c_2 \exp(-t). \quad (13.1.17)$$

A matriz fundamental é dada por:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \exp(3t) & \exp(-t) \\ 2\exp(3t) & -2\exp(-t) \end{pmatrix}, \quad (13.1.18)$$

cujo determinante é  $|\Phi(t)| = -4\exp(2t) \neq 0, \forall t$ , o que significa que as soluções são linearmente independentes.

**Exemplo 13.1.2.** Encontre a solução geral de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{1}{2}x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases} \quad (13.1.19)$$

A equação pode ser resolvida ao ser rescrita no formato matricial como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (13.1.20)$$

Montando a equação característica, temos:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda + \frac{5}{4} &= 0. \end{aligned} \quad (13.1.21)$$

Portanto,  $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i$ , ou seja, os autovetores ocorrem como um par complexo. Denotaremos os dois autovalores como  $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i$  e  $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i$ .

Para determinar os correspondentes autovetores, substituímos os autovalores em:

$$(A - \lambda I)v = 0. \quad (13.1.22)$$

Temos:

$$-iv_1 + v_2 = 0. \quad (13.1.23)$$

Vamos normalizar  $v_1 = 1$ . Logo,  $v_2 = i$ .

Portanto, determinamos duas soluções complexas independentes para a EDO, isto é,

$$v \exp(\lambda t), \quad \bar{v} \exp(\bar{\lambda} t), \quad (13.1.24)$$

e podemos formar uma combinação linear dessas duas soluções complexas para construir duas soluções reais independentes. Ou seja, se as funções complexas  $z(t)$  e  $\bar{z}(t)$  são escritas como

$$z(t) = \operatorname{Re}\{z(t)\} + i \operatorname{Im}\{z(t)\}, \quad \bar{z}(t) = \operatorname{Re}\{\bar{z}(t)\} + i \operatorname{Im}\{\bar{z}(t)\}, \quad (13.1.25)$$

então duas funções reais podem ser construídas a partir das seguintes combinações lineares de  $z$  e de  $\bar{z}$ :

$$\frac{z + \bar{z}}{2} = \operatorname{Re}\{Z(t)\}, \quad \frac{z - \bar{z}}{2i} = \operatorname{Im}\{Z(t)\}. \quad (13.1.26)$$

Assim, as duas funções vetoriais reais que podem ser construídas a partir de nossas duas funções vetoriais complexas são

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{v \exp(\lambda t)\} &= \operatorname{Re}\left\{\binom{1}{i} \exp\left(-\frac{1}{2} + i\right)t\right\} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \operatorname{Re}\left\{\binom{1}{i} (\cos t + i \sin t)\right\} \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13.1.27)$$

e

$$\operatorname{Im}\{v \exp(\lambda t)\} = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \operatorname{Im}\left\{\binom{1}{i} (\cos t + i \sin t)\right\}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}. \quad (13.1.28)$$

Tomando uma superposição linear dessas duas soluções reais chegamos a seguinte solução geral para as EDO's:

$$x = \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \left( A \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right). \quad (13.1.29)$$

**Exemplo 13.1.3.** Encontre a solução geral de

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 3x_2 \end{cases} \quad (13.1.30)$$

A equação pode ser resolvida ao ser escrita no formato matricial como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (13.1.31)$$

Seja a solução  $x(t) = v \exp(\lambda t)$ , em que  $v$  e  $\lambda$  são independentes de  $t$ . Logo,

$$\lambda v \exp(\lambda t) = Av \exp(\lambda t) \implies Av = \lambda v. \quad (13.1.32)$$

Montando a equação característica, temos:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= 0 \\ \lambda^2 - 4\lambda + 4 &= 0 \\ (\lambda - 2)^2 &= 0. \end{aligned} \quad (13.1.33)$$

Portanto,  $\lambda = 2$  é um autovalor repetido. O autovetor associado a esse autovalor é encontrado a partir de  $-v_1 - v_2 = 0$  ou  $v_2 = -v_1$ . Normalizando  $v_1 = 1$ , temos:

$$\lambda = 2, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (13.1.34)$$

e precisamos encontrar a segunda solução que falta para satisfazer as condições iniciais. Um palpite de  $t$  vezes a primeira solução é tentador, mas falhará. Aqui, vamos trapacear e encontrar a segunda solução que falta, solucionando a equação diferencial homogênea de coeficiente constante de segunda ordem equivalente. Nós já sabemos que esta equação diferencial de segunda ordem para  $x_1(t)$  tem uma equação característica com um

autovalor degenerado dado por  $\lambda = 2$ . Portanto, a solução geral para  $x_1$  é dada por

$$x_1(t) = (c_1 + tc_2) \exp(2t). \quad (13.1.35)$$

Uma vez que  $x_2 = x_1 - \dot{x}_1$ , computamos:

$$\dot{x}_1 = (2c_1 + (1+2t)c_2) \exp(2t), \quad (13.1.36)$$

então,

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \dot{x}_1 \\ &= (c_1 + tc_2) \exp(2t) - (2c_1 + (1+2t)c_2) \exp(2t) \\ &= -c_1 \exp(2t) + c_2(-1-t) \exp(2t). \end{aligned} \quad (13.1.37)$$

Combinando nossos resultados para  $x_1$  e  $x_2$ , chegamos a:

$$x_1(t) = [c_1 + tc_2] \exp(2t), \quad (13.1.38)$$

$$x_2(t) = -[c_1 + c_2(1+t)] \exp(2t). \quad (13.1.39)$$

## 13.2 Retrato de fase

Na seção anterior aprendemos como se pode resolver um sistema de equações diferenciais lineares. No entanto, as equações que surgem na maioria das situações práticas são inherentemente não-lineares, e normalmente é impossível resolvê-las explicitamente. No entanto, às vezes é possível obter uma ideia de como são suas soluções (o “comportamento qualitativo”), e aprendemos um método desse tipo nesta seção, chamado de análise do plano (retrato) de fase. A análise do plano de fase é um método gráfico para estudar sistemas autônomos (significa que  $t$  não é uma variável independente) 2D. Este método foi introduzido por matemáticos (entre outros, Henri Poincaré) na década de 1890. A ideia básica do método é gerar as trajetórias de movimento do espaço de estados correspondentes a várias condições iniciais, e depois examinar as características qualitativas das trajetórias. Como um método gráfico, permite visualizar o que acontece em um sistema não linear a partir de várias condições iniciais, sem ter que resolver analiticamente as equações não-lineares. Assim, informações relativas à estabilidade e outros padrões de movimento do sistema podem ser obtidas. Nesta seção vamos aprender as ferramentas básicas da análise do plano de fase.

O método do plano de fase diz respeito ao estudo gráfico de sistemas autônomos bidimensionais:

$$x'_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)), \quad (13.2.1)$$

$$x'_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)), \quad (13.2.2)$$

em que  $x_1$  e  $x_2$  são os estados do sistema, e  $f_1$  e  $f_2$  são funções não-lineares do  $\mathbb{R}^2$  para  $\mathbb{R}$ . Geometricamente, o espaço de estado é um plano e chamamos este plano de fase.

Dado um conjunto de condições iniciais  $x(0) = x_0$ , denotamos por  $x$  as soluções das equações. Assumimos que, dada uma condição inicial, existe uma solução única para todo  $t \geq 0$ . Com o tempo  $t$  variando de 0 a  $\infty$ , a solução  $t \mapsto x(t)$  pode ser representada geometricamente como uma curva no plano de fase. Tal curva é chamada de trajetória (plano de fase). Uma família de trajetórias de fase correspondente a várias condições iniciais é chamada de retrato de fase do sistema. Partindo do pressuposto sobre a existência de solução, sabemos que a partir de cada ponto no plano de fase passa uma curva, e a partir da unicidade, sabemos que só pode haver uma curva. Assim, não há interseção de duas trajetórias no plano de fase, pois se elas se cruzassem em um ponto, então com esse ponto como condição inicial, teríamos duas soluções, o que é uma contradição!

Um conceito importante na análise do plano de fase é o de um ponto singular.

**Definição 13.2.1.** Um ponto singular do sistema  $\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$  é um ponto  $(x_1^*, x_2^*)$  no plano da fase de modo que  $f_1(x_1^*, x_2^*) = 0$  e  $f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$ .

Tal ponto é também chamado de ponto de equilíbrio, isto é, um ponto onde o sistema pode ficar para sempre: se começarmos com essa condição inicial, então a solução única é  $x_1(t) = x_1^*$  e  $x_2(t) = x_2^*$ . Através desse ponto no plano de fase, apenas a curva trivial que compreende apenas esse ponto pode passar. Para um sistema linear  $x = Ax$ , se  $A$  é invertível, então o único ponto singular é  $(0, 0)$ , e se  $A$  não é invertível, então todos os pontos do kernel de  $A$  são pontos singulares. Assim, no caso de sistemas lineares, ou existe apenas um ponto de equilíbrio, ou infinitamente muitos pontos singulares, nenhum dos quais é então isolado. Mas, no caso de sistemas não lineares, pode haver mais de um ponto singular isolado, como demonstrado no exemplo a seguir.

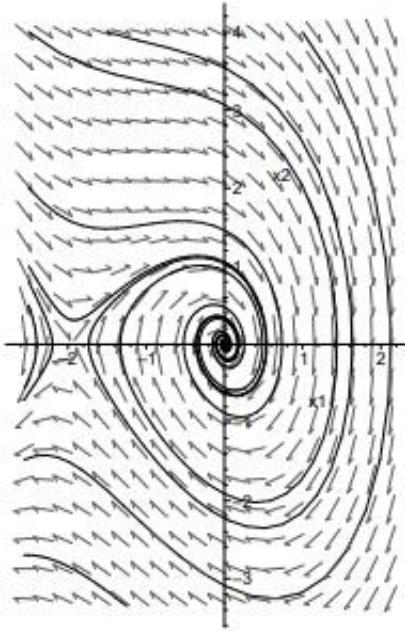
**Exemplo 13.2.1.** Considere o sistema

$$x'_1 = x_2, \quad (13.2.3)$$

$$x'_2 = -\frac{1}{2}x_2 - 2x_1 - x_1^2. \quad (13.2.4)$$

O sistema possui dois pontos singulares:  $(0, 0)$  e  $(-2, 0)$ . Os padrões de movimento das trajetórias do sistema, começando na vizinhança dos dois pontos singulares, têm naturezas diferentes. As trajetórias se movem em direção ao ponto  $(0, 0)$ , enquanto se afastam de  $(-2, 0)$ . O retrato de fase do sistema está esboçado na Figura abaixo.

FIGURA 13.2.1 – RETRATO DE FASE DO SISTEMA  $x'_1 = x_2$  E  $x'_2 = -\frac{1}{2}x_2 - 2x_1 - x_1^2$



**Exemplo 13.2.2.** Considere a EDO  $x' = -x + x^3$ .

Os pontos singulares são determinados pela equação  $-x + x^3 = 0$ , que tem como soluções  $-1, 0$  e  $1$ .

Se nós considerarmos a solução

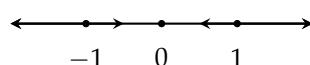
$$x'(t) = -x(t) - (x(t))^3, \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad (13.2.5)$$

com  $0 < x_0 < 1$ , então observamos que

$$x'(t_0) = -x_0 - x_0^3 = -x_0(1 - x_0^2) < 0, \quad (13.2.6)$$

e isto significa que  $t \mapsto x(t)$  está diminuindo, e assim o “movimento” começando a partir de  $x_0$  tende à esquerda. Isso explica a direção da seta para a região  $0 < x_0 < 1$  no retrato de fase abaixo:

FIGURA 13.2.2 – RETRATO DE FASE DA EDO  $x' = -x + x^3$



Existem duas técnicas para gerar retratos de fase analiticamente. Uma consiste em resolver explicitamente para  $x_1$  e  $x_2$  como funções de  $t$ , e então eliminar  $t$ . O outro método analítico não envolve um cálculo explícito das soluções como funções do tempo, mas em vez disso, resolve-se a

equação diferencial

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}. \quad (13.2.7)$$

Assim, dada uma trajetória  $t \mapsto (x_1(t), x_2(t))$ , eliminamos  $t$  estabelecendo uma equação diferencial para a derivada da segunda função em relação à primeira, não envolvendo  $t$ , e resolvendo esta equação diferencial. Ilustramos isso no mesmo exemplo.

**Exemplo 13.2.3.** Considere o sistema

$$x'_1 = x_2, \quad (13.2.8)$$

$$x'_2 = -x_1. \quad (13.2.9)$$

Nós temos

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1}{x_2} \implies x_2 \left( \frac{dx_2}{dx_1} \right) = -x_1. \quad (13.2.10)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dx_1} \left( \frac{1}{2} x_2^2 \right) = x_2 \left( \frac{dx_2}{dx_1} \right) = -x_1. \quad (13.2.11)$$

Integrando em relação a  $x_1$ , e usando o teorema fundamental do cálculo, obtemos  $x_1^2 + x_2^2 = C$ . Esta equação descreve um círculo no plano  $x_1x_2$ . Logo, a trajetória satisfaz

$$(x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 = C = (x_1(0))^2 + (x_2(0))^2, t \geq 0. \quad (13.2.12)$$

Notamos que quando  $x_1(0)$  pertence ao meio plano da direita, então  $x'_2(0) = -x_1(0) < 0$ , e então  $t \mapsto x_2(t)$  deve estar diminuindo. Assim, vemos que o movimento é no sentido horário.

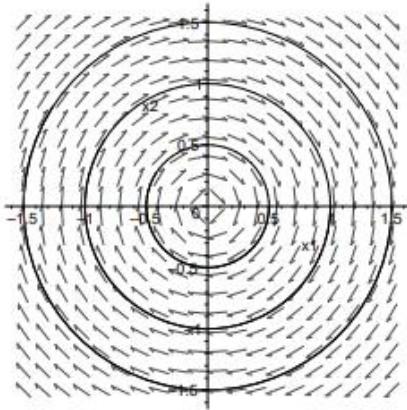
Em um ponto  $(x_1, x_2)$  no plano de fase, a inclinação da tangente à trajetória é  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)}$ .

Uma isoclinia é uma curva no  $\mathbb{R}^2$  definida por  $\frac{f_1(x_1, x_2)}{f_2(x_1, x_2)} = \alpha$ , onde  $\alpha$  é um número real. Isto significa que se olharmos para todas as trajetórias que passam por vários pontos na mesma isoclinia, então todas essas trajetórias têm a mesma inclinação (igual a  $\alpha$ ) nos pontos desta isoclinia. Para obter trajetórias das isoclinias, assumimos que as inclinações tangenciais são localmente constantes. O método de construir o retrato de fase usando isoclinias é, portanto, o seguinte:

1. Para vários valores de  $\alpha$ , construa as isoclinias correspondentes. Ao longo de uma isoclinia, desenhe pequenos segmentos de linha com inclinação  $\alpha$ . Desta maneira, um campo de direções é obtido.
2. Como as inclinações tangenciais são localmente constantes, podemos construir uma trajetória de plano

de fase conectando segmentos de linha em sequência.

FIGURA 13.2.3 – RETRATO DE FASE DO SISTEMA  $x'_1 = x_2$  E  $x'_2 = -x_1$



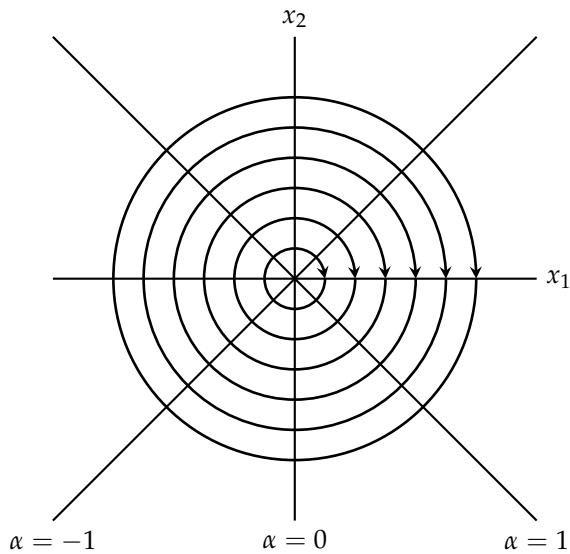
**Exemplo 13.2.4.** Considere o sistema

$$x'_1 = x_2, \quad (13.2.13)$$

$$x'_2 = -x_1. \quad (13.2.14)$$

A inclinação é dada por  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_1}{x_2}$ . Assumindo diferentes valores para  $\alpha$ , um conjunto de isoclinas pode ser desenhado, e desta forma um campo de direções de tangentes às trajetórias são gerados, como mostrado na Figura abaixo, e as trajetórias no retrato de fase são círculos. Se  $x_1 > 0$ , então  $x'_2(0) = -x_1(0) < 0$ , e assim o movimento é no sentido horário.

FIGURA 13.2.4 – RETRATO DE FASE DO SISTEMA  $x'_1 = x_2$  E  $x'_2 = -x_1$



Vamos descrever a análise do plano de fase de sistemas lineares. Além de nos permitir observar visualmente os padrões de movimento dos sistemas lineares, isso também ajudará no desenvolvimento da análise de sistemas não-lineares, uma vez que padrões de movimento similares também podem ser observados no comportamento local de sistemas não-lineares. Vamos analisar três tipos simples de matrizes. Acontece que é suficiente considerar esses três tipos, já que todas as outras matrizes podem ser reduzidas a essa matriz por uma mudança de base apropriada (no retrato de fase, isso corresponde a substituir os eixos usuais por novos, o que pode não ser ortogonal).

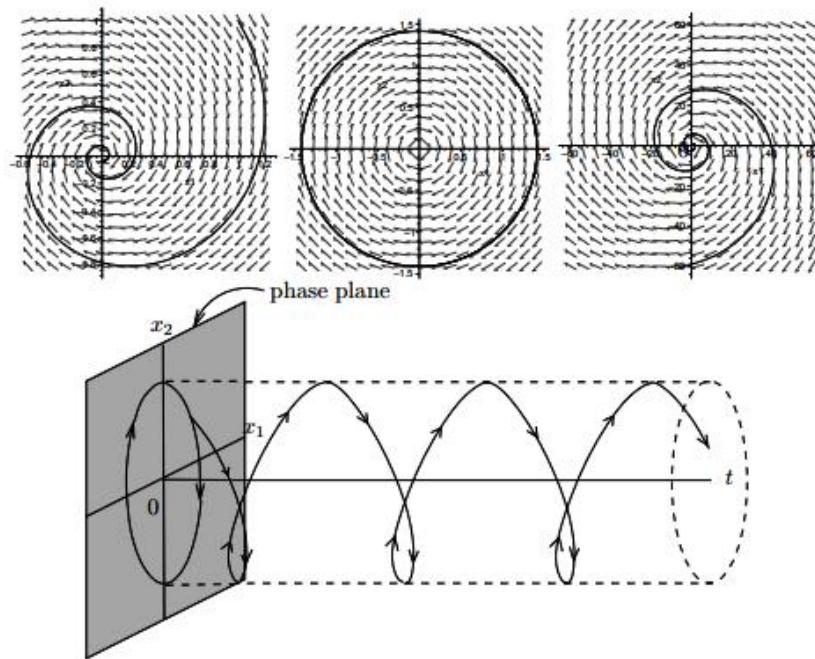
### 13.2.1 Autovalores Complexos

Considere o sistema  $x' = Ax$ , em que  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ . Então,  $\exp(tA) = \exp(ta) \begin{pmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{pmatrix}$ . Seja  $x(0)$  uma condição inicial cuja coordenada polar é  $(r_0, \theta_0)$ . A solução é dada por:

$$x(t) = \exp(ta)r_0 \cos(\theta_0 - bt) \quad \text{e} \quad y(t) = \exp(ta)r_0 \sin(\theta_0 - bt), \quad t \geq 0, \quad (13.2.15)$$

de modo que as trajetórias são espirais se  $a$  é diferente de zero, movendo-se para a origem se  $a < 0$ , e para fora se  $a > 0$ . Se  $a = 0$ , as trajetórias são círculos.

FIGURA 13.2.5 – RETRATO DE FASE DE UM SISTEMA COM AUTOVALORES COMPLEXOS



A figura mostra a trajetória do plano de fase como projeção da curva  $(t, x_1(t), x_2(t))$  no  $\mathbb{R}^3$ :

caso quando  $a = 0$  e  $b > 0$ .

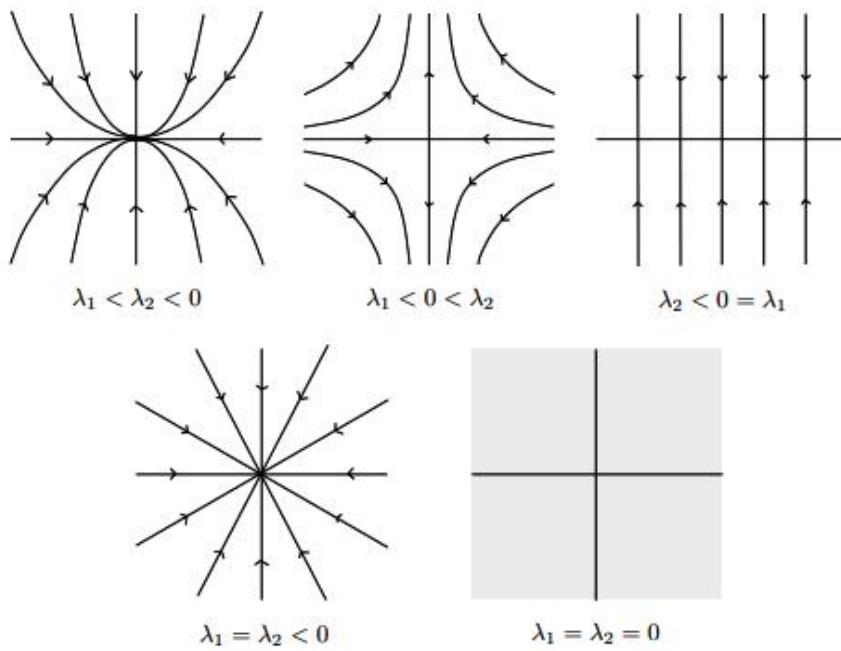
### 13.2.2 Caso Diagonal com Autovalores Reais

Considere o sistema  $x' = Ax$ , em que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (13.2.16)$$

onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são números reais. A trajetória a partir da condição inicial  $(x_1(0), x_2(0))$  é dada por  $x_1(t) = \exp(\lambda_1 t)x_1(0)$  e  $x_2(t) = \exp(\lambda_2 t)x_2(0)$ . Também vemos que  $Ax_1^{\lambda_1} = Bx_2^{\lambda_2}$  com valores apropriados para as constantes  $A$  e  $B$ . Em geral, obtemos os retratos de fase mostrados na Figura abaixo, dependendo dos sinais de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .

FIGURA 13.2.6 – RETRATO DE FASE PARA O CASO DIAGONAL COM AUTOVALORES REAIS



### 13.2.3 Caso Não-Diagonal

Considere o sistema  $x' = Ax$ , em que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (13.2.17)$$

onde  $\lambda$  é um número real. É fácil ver que

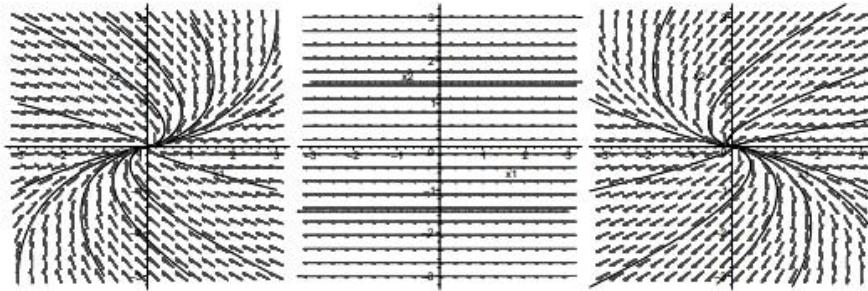
$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda t) & t \exp(\lambda t) \\ 0 & \exp(\lambda t) \end{pmatrix}. \quad (13.2.18)$$

A trajetória a partir da condição inicial  $(x_1(0), x_2(0))$  é dada por  $x_1(t) = \exp(\lambda t)(x_1(0) + tx_2(0))$  e  $x_2(t) = \exp(\lambda t)x_2(0)$ . Em geral, obtemos os retratos de fase mostrados na Figura abaixo, dependendo dos sinais de  $\lambda$ . Para  $\lambda < 0$ ,  $\lambda = 0$  e  $\lambda > 0$ , temos os seguintes retratos de fase. Observamos que o ângulo que um ponto na trajetória faz com o eixo  $x_1$  é dado por

$$\arctan\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right) = \arctan\left(\frac{x_2(0)}{x_1(0) + tx_2(0)}\right), \quad (13.2.19)$$

que tende a zero ou  $\pi$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

FIGURA 13.2.7 – RETRATO DE FASE PARA O CASO NÃO DIAGONAL



#### 13.2.4 Diagrama de Fase de Sistemas de EDO Não-Lineares

Com a análise do plano de fase de sistemas não-lineares, devemos manter duas coisas em mente. Uma é que a análise do plano de fase está relacionada com a dos sistemas lineares, porque o comportamento local de um sistema não linear pode ser aproximado por um sistema linear. E o segundo é que, apesar dessa similaridade com sistemas lineares, sistemas não lineares podem exibir padrões muito mais complicados no plano de fase, como múltiplos pontos singulares.

Para ver a semelhança com sistemas lineares, decomponemos o sistema não-linear em uma parte linear e um termo de erro (que é pequeno perto de um ponto singular), usando o teorema de Taylor, como segue.

Então, pelo teorema de Taylor, temos

$$\begin{aligned} x'_1 &= \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1(0), x_2(0)) \right] (x_1 - x_1(0)) + \left[ \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1(0), x_2(0)) \right] (x_2 - x_2(0)) + \\ &\quad + e_1(x_1 - x_1(0), x_2 - x_2(0)) \\ x'_2 &= \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1(0), x_2(0)) \right] (x_1 - x_1(0)) + \left[ \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1(0), x_2(0)) \right] (x_2 - x_2(0)) + \end{aligned} \quad (13.2.20)$$

$$+ e_2(x_1 - x_1(0), x_2 - x_2(0)), \quad (13.2.21)$$

em que  $e_1$  e  $e_2$  são tais que  $e_1(0, 0) = e_2(0, 0) = 0$ . Defina  $y_1 = x_1 - x_1(0)$  e  $y_2 = x_2 - x_2(0)$  e

$$a := \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1(0), x_2(0)), \quad b := \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1(0), x_2(0)) \quad (13.2.22)$$

$$c := \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1(0), x_2(0)), \quad d := \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1(0), x_2(0)). \quad (13.2.23)$$

Assim, o sistema (13.2.20)-(13.2.21) se torna:

$$y'_1 = ay_1 + by_2 + e_1(y_1, y_2), \quad (13.2.24)$$

$$y'_2 = cy_1 + dy_2 + e_2(y_1, y_2). \quad (13.2.25)$$

**Teorema 13.2.1.** Seja  $(x_1(0), x_2(0))$  um ponto singular. Assuma que

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1(0), x_2(0)) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_1(0), x_2(0)) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_1(0), x_2(0)) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_1(0), x_2(0)) \end{pmatrix}. \quad (13.2.26)$$

Então, temos as seguintes situações:

1. Se todo autovalor de  $A$  tiver partes reais negativas, então todas as soluções começando em uma bola pequena o suficiente com centro  $(x_1(0), y_1(0))$  convergem para  $(x_1(0), y_1(0))$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Esta situação significa que o ponto de equilíbrio  $(x_1(0), y_1(0))$  é assintoticamente estável.
2. Se a matriz  $A$  tem um autovalor com uma parte real positiva, então existe uma bola  $B$  tal que para cada bola  $B'$  de raio positivo ao redor de  $(x_1(0), y_1(0))$ , existe um ponto em  $B$  tal que uma solução a partir desse ponto deixa a bola  $B$ . Esta situação significa que o ponto de equilíbrio  $(x_1(0), y_1(0))$  é instável.

**Exemplo 13.2.5.** Considere o sistema:

$$x'_1 = -x_1 + x_2 - x_1(x_2 - x_1), \quad (13.2.27)$$

$$x'_2 = -x_1 - x_2 + 2x_1^2x_2. \quad (13.2.28)$$

Este sistema não linear possui os pontos singulares  $(-1, -1)$ ,  $(1, 1)$  e  $(0, 0)$ . Se nós linearizarmos ao redor do ponto singular  $(0, 0)$ , obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(-x_1 + x_2 - x_1(x_2 - x_1)) \right|_{(0,0)} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(-x_1 + x_2 - x_1(x_2 - x_1)) \right|_{(0,0)} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(-x_1 - x_2 + 2x_1^2x_2) \right|_{(0,0)} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(-x_1 - x_2 + 2x_1^2x_2) \right|_{(0,0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (13.2.29)$$

que possui autovalores  $-1 + i$  e  $-1 - i$ . Assim, pelo Teorema acima, segue-se que para o sistema não linear acima, se começarmos perto de  $(0, 0)$ , então as soluções convergem para  $(0, 0)$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Em  $(-1, -1)$  temos ponto de sela.

**Exemplo 13.2.6.** Considere o sistema:

$$x'_1 = x_2, \quad (13.2.30)$$

$$x'_2 = x_1 - x_2 + x_1(x_1 - 2x_2). \quad (13.2.31)$$

Os pontos singulares são as soluções para

$$x_2 = 0, \quad x_1 - x_2 + x_1(x_1 - 2x_2) = 0, \quad (13.2.32)$$

e, portanto, são  $(0, 0)$  e  $(-1, 0)$ .

Além disso,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \quad (13.2.33)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = 1 + 2x_1 - 2x_2, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -1 - 2x_1. \quad (13.2.34)$$

Em  $(0, 0)$ , a matriz da parte linear é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (13.2.35)$$

cujos autovalores satisfazem  $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ . As raízes são reais e com sinais opostos. Logo, a origem é um ponto de sela.

Em  $(-1, 0)$ , a matriz da parte linear é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (13.2.36)$$

cujos autovalores satisfazem  $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ . As trajetórias são assim espirais para fora.

Temos o seguinte retrato de fase

FIGURA 13.2.8 – RETRATO DE FASE DO SISTEMA  $x'_1 = x_2$  e  $x'_2 = x_1 - x_2 + x_1(x_1 - 2x_2)$

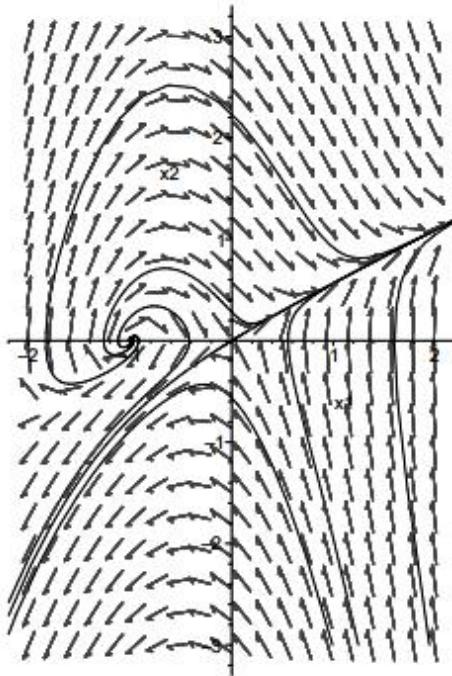


TABELA 13.1 – TABELA-RESUMO

Autovalores	Tipo de ponto	Estabilidade
Dois reais com sinais opostos	Ponto de sela	Instável
Dois reais positivos	Nó repulsivo	Instável
Dois reais negativos	Nó atrativo	Estável
Dois complexos com parte real positiva	Foco repulsivo	Instável
Dois complexos com parte real negativa	Foco atrativo	Estável
Dois imaginários	Centro	Estável
Um real positivo	Nó impróprio repulsivo	Instável
Um real negativo	Nó impróprio atrativo	Estável

### 13.3 Aplicações

Nas últimas décadas, tem se tornado crescentemente importante incorporar dinâmica de forma explícita na análise econômica. As duas ferramentas que os matemáticos desenvolveram, as equações diferenciais e a teoria do controle ótimo, são provavelmente os principais instrumentais para analisar problemas de dinâmica econômica. Agora que já estudamos como trabalhar com

sistemas de equações diferenciais, vamos estudar três aplicações econômicas não-triviais. A primeira trata da estabilidade do equilíbrio competitivo. O segundo trata da estabilidade do equilíbrio competitivo quando há tês bens e como se dá essa dinâmica. O último trata do modelo proposto por Tobin (1975) e é uma aplicação das condições de Routh-Hurwitz.

### 13.3.1 A Estabilidade do Equilíbrio Competitivo: O Processo Walrasiano

Seja  $x_i$  o excesso de demanda pelo bem  $i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n+1$ . Se  $D_i$  e  $S_i$  denotam, respectivamente, a demanda de mercado e a oferta de mercado pelo bem  $i$ , então,  $x_i \equiv D_i - S_i$ . Seja  $P_i$  o preço do bem  $i$  e assuma que  $x_i$  depende somente dos preços  $P'_i$ 's, em que:

$$x_i = F_i(P_1, P_2, \dots, P_n, P_{n+1}), \quad (13.3.1)$$

ou mais compactamente,  $x = F(P)$ , em que  $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ . Para lançar luz à diferença entre estabilidade walrasiana e estabilidade marshalliana, assumimos que as  $D'_i$ 's dependem de  $P$ , mas que  $S_i$  é constante para cada  $i$ <sup>1</sup>. Um equilíbrio competitivo pode então ser definido por

$$F_i(P_1^*, \dots, P_n^*, P_{n+1}^*) = 0, \quad (13.3.2)$$

ou mais compactamente,  $F(P^*) = 0$ . As  $n+1$  equações em (13.3.2) determinam os valores de equilíbrio dos  $n+1$  preços,  $P_1^*, \dots, P_{n+1}^*$ . Assuma que existe um preço  $P^*$  tal que  $F(P^*) = 0$ .

Por outro lado, a soma ponderada dos preços dos excessos de demanda para todos os bens deve ser idêntico a zero, ou seja,

$$P_1 F_1(P) + \dots + P_n F_n(P) + P_{n+1} F_{n+1}(P) \equiv 0. \quad (13.3.3)$$

A equação acima é obtida pela soma de todas as condições orçamentárias de todos os agentes na economia e é chamada Lei de Walras. Então uma das equações em (13.3.2) torna-se supérflua e, portanto, o número de equações torna-se menor do que o número de variáveis. Entretanto, este problema é evitado ao simplesmente notar que a função excesso de demanda por cada bem é homogênea de grau zero nos preços. Para cada  $i = 1, 2, \dots, n+1$ , temos  $F_i(\alpha P_1, \dots, \alpha P_{n+1}) = F_i(P_1, \dots, P_{n+1})$ ,  $\alpha > 0$ . Isto pode ser justificado em termos de racionalidade do comportamento. Em outras palavras, se os  $P'_i$ 's são mensurados em termos de alguma unidade de medida, então mudanças na unidade de medida não deve afetar o comportamento de cada indivíduo.

Assim, assumindo  $p_i \equiv \frac{P_i}{P_{n+1}}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , podemos definir a função  $f_i$  por

---

<sup>1</sup> Como Peter Newman (1965, pp. 106–108) apontou, a confusão comum deste ponto reside na falha em discutir claramente a teoria da troca da teoria da produção. Marshall e Walras teorizam sobre a produção bem como sobre a troca pura e ambos concordam que o ajuste marshalliano é explicitamente elaborado para a teoria da produção, enquanto o ajuste de preços walrasiano é mais adequado à teoria da troca.

$$f_i(p_1, p_2, \dots, p_n) = F_i(p_1, p_2, \dots, p_n, 1) = 0. \quad (13.3.4)$$

O  $n + 1$ -ésimo bem é chamado numerário. O equilíbrio competitivo é então definido em termos de  $f'_i$ 's como:

$$f_i(p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*) = 0, \quad (13.3.5)$$

ou mais compactamente,  $f(p^*) = 0$ . As  $n$  equações em (13.3.5) determinam os  $n$  valores de equilíbrio dos preços  $p_1^*, p_2^*, \dots, p_n^*$ . Assumimos que existe um  $p^* > 0$  tal que  $f(p^*) = 0$ , que chamamos de um vetor de preços de equilíbrio (normalizado). Se  $p$  não é um vetor de preços de equilíbrio, então  $f_i(p) \neq 0$  para algum ou todos os  $i$ 's. O valor do excesso de demanda para o bem  $n + 1$ -ésimo bem,  $x_{n+1}$  é obtido usando (13.3.3):

$$x_{n+1} = -[p_1 f_1(p) + p_2 f_2(p) + \dots + p_n f_n(p)]. \quad (13.3.6)$$

Note que se  $p^*$  é um vetor de preços de equilíbrio, então (13.3.6) mostra que  $x_{n+1} = 0$ . Em outras palavras, se os primeiros  $n$  mercados estão em equilíbrio, então o  $n + 1$ -ésimo mercado está automaticamente em equilíbrio.

O problema de estabilidade de um equilíbrio competitivo está preocupado com a questão de se o vetor de preços  $p$ , quando desviado do ponto de equilíbrio  $p^*$ , retornará a  $p^*$ . A premisa fundamental para estudar este problema é que um excesso de demanda pelo bem  $i$  aumenta o preço do bem  $i$  e um excesso de oferta do bem  $i$  reduz o preço do bem  $i$ . Seguindo a reformulação de Samuelson do problema de estabilidade walrasiano, podemos especificar tal pressuposto por meio do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{p}_i(t) = k_i f_i[p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)], i = 1, 2, \dots, n, \quad k_i > 0, \quad (13.3.7)$$

em que  $\dot{p}_i$  denota a derivada de  $p_i$  em relação ao tempo e  $k_i$  é a velocidade de ajustamento do  $i$ -ésimo mercado. Assuma que a condição inicial do sistema acima seja especificada por  $p = p^0$  quando  $t = 0$  e seja a solução indicada como  $p(t; p^0)$ . Assumimos que  $p(t; p^0)$  existe e é única e que  $p^*$  para o qual  $f(p^*) = 0$  é um ponto de equilíbrio isolado do sistema (13.3.7). Então, o problema de estabilidade do equilíbrio competitivo pode ser apresentado como:

$$\text{Dado um } p^* \text{ tal que } f(p^*) = 0, p(t; p^0) \rightarrow p^* \text{ quando } t \rightarrow \infty? \quad (13.3.8)$$

Esta questão torna-se um problema de estabilidade local assintótica (do sistema de equações diferenciais) quando permitimos que  $p^0$  esteja na vizinhança de  $p^*$ . Se  $p^0$  não é restrito a vizinhança

de  $p^*$ , então temos um problema de estabilidade global assintótica.

Para facilitar a exposição, vamos assumir que há dois bens (agrícolas e manufaturados ou exportáveis e não-exportáveis) e o segundo bem é o numerário. Então, assumindo  $f_1 = p_1$ , temos:

$$\dot{p}(t) = kf[p(t)], \quad p \equiv \frac{P_1}{P_2}, \quad (13.3.9)$$

em que  $p$  é um escalar. Assuma que  $p^*$  é um preço relativo de equilíbrio em que  $f(p^*) = 0$ . Com isso, obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 13.3.1.** *Em um mundo com dois bens,  $p^*$  é local e assintoticamente estável se e somente se  $f'(p^*) < 0$ . Se  $f'(p^*) < 0$  para qualquer  $p^*$  para o qual  $f(p^*) = 0$ , então  $p^*$  é único e estável global e assintoticamente.*

Observe que  $f'(p) < 0$  significa que um aumento no preço do bem 1 vis-à-vis o bem 2, reduz o excesso de demanda pelo bem 1. Se isto é válido para um intervalo relevante de  $p$ , então o preço de equilíbrio é único e estável global e assintoticamente.

Para um caso de  $n$  bens, temos:

$$\dot{p}(t) = Kf[p(t)], \quad (13.3.10)$$

em que  $K$  é uma matriz diagonal  $n \times n$  cujos  $i$ -ésimo elementos da diagonal principal são  $k_i > 0$ . Sendo  $p^*$  o ponto de equilíbrio, a aproximação linear do sistema pode ser escrita como

$$\dot{p} = KA(p - p^*), \quad (13.3.11)$$

em que  $A = [a_{ij}]$ ,  $a_{ij} \equiv \frac{\partial f_i(p^*)}{\partial p_j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . A questão da estabilidade local repousa sobre as propriedades da matriz  $A$ , que está intimamente relacionada ao estudo de Hicks sobre a estabilidade (1939, 1946). Ele demonstra que a “estabilidade perfeita” é estabelecida em termos de sinais alternados dos menores principais de  $A$ . Samuelson em 1947 mostrou que tal condição não é nem necessária e nem suficiente para a estabilidade do sistema dinâmico (13.3.11) para o caso de  $n$ -bens. Em 1958, Hahn e Negishi e Arrow e Hurwicz mostraram que  $p^*$  é um equilíbrio estável global e assintoticamente se  $a_{ij} > 0$  para  $i \neq j$ . Isto implica que  $p^*$  é um equilíbrio estável local e assintoticamente para o sistema de equações diferenciais exposto em (13.3.7).

Em 1959, Arrow, Block e Hurwicz obtiveram um novo resultado:  $p^*$  é um equilíbrio estável global e assintoticamente para (13.3.7) se  $f_{ij} \left( \equiv \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \right) > 0$  para todo  $p$  e todo  $i \neq j$ . Este pressuposto é chamado de substitutibilidade bruta global, enquanto em contraste o pressuposto  $a_{ij} \equiv \frac{\partial f_i(p^*)}{\partial p_j} > 0$  para  $i \neq j$  é chamado de substitutibilidade bruta local.

### 13.3.2 O Equilíbrio Competitivo para Três Bens

Agora vamos trabalhar com três bens (exportáveis, importáveis e nontradáveis). Nós não devemos considerar a aproximação linear do sistema. Ao invés disso, assumindo substitutibilidade bruta, nós devemos provar a estabilidade global do equilíbrio competitivo.

Seja  $x_i = F_i(P_1, P_2, P_3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , o excesso de demanda pelo bem  $i$ . A lei de Walras pode ser escrita como

$$P_1 F_1(P) + P_2 F_2(P) + P_3 F_3(P) \equiv 0, \quad (13.3.12)$$

em que  $P = (P_1, P_2, P_3)$ . Usando a homogeneidade de grau zero das funções excesso de demanda, obtemos:

$$F_i(P_1, P_2, P_3) = F_i(p_1, p_2, 1) \quad [\equiv f_i(p_1, p_2)], \quad i = 1, 2, 3, \quad (13.3.13)$$

em que  $p_i \equiv \frac{P_1}{P_3}$ . A dinâmica de ajustamento pode ser descrito por meio do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{p}_i = k_i F_i(p_1, p_2, 1) \quad [\equiv k_i f_i(p_1, p_2)], \quad i = 1, 2, \quad (13.3.14)$$

em que  $k_i, i = 1, 2$  são constantes maiores que zero, representando a velocidade de ajustamento do  $i$ -ésimo mercado. O vetor de preços de equilíbrio competitivo  $(p_1^*, p_2^*)$  é definido por:

$$F_i(p_1^*, p_2^*, 1) = 0 \quad \text{ou} \quad f_i(p_1^*, p_2^*) = 0. \quad (13.3.15)$$

O vetor de preços de equilíbrio competitivo significa um ponto de equilíbrio do sistema de equações diferenciais. Assumimos que existe e é único. Observe que a lei de Walras é válida.

Uma vez que  $F_i(P), i = 1, 2, 3$ , são homogêneas de grau zero, usando a equação de Euler, temos que:

$$F_{i1}(P)(P_1) + F_{i2}(P)P_2 + F_{i3}(P)P_3 \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (13.3.16)$$

em que  $F_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial P_j}, i, j = 1, 2, 3$ . A partir disso, podemos obter:

$$F_{i1}(p_1) + F_{i2}p_2 + F_{i3} \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (13.3.17)$$

em que  $F_{ij} = F_{ij}(p_1, p_2, 1), i, j = 1, 2$ . De (13.3.17), obtemos:

$$\frac{p_1}{p_2} = -\frac{F_{12}}{F_{11}} - \frac{F_{13}}{F_{11}p_2} \quad (13.3.18)$$

$$\frac{p_1}{p_2} = -\frac{F_{22}}{F_{21}} - \frac{F_{23}}{F_{21}p_2}. \quad (13.3.19)$$

Assumimos substitutibilidade bruta global no sentido de que:

$$F_{ij}(p, 1) > 0, \quad \forall p = (p_1, p_2), \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2. \quad (13.3.20)$$

Isto e (13.3.17) implicam:

$$F_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \forall p. \quad (13.3.21)$$

$F_{ij} > 0, i \neq j$  e  $F_{ii} < 0$  podem ser interpretados como segue. Um aumento no preço de  $j$  desloca a demanda do bem  $j$  para outros bens  $\left( \frac{\partial D_j}{\partial P_j} < 0, \frac{\partial D_i}{\partial P_j} > 0, i \neq j \right)$ . Em termos da equação de Hicks-Slutsky,  $\frac{\partial D_i}{\partial P_j} > 0$  exclui a possibilidade do efeito renda ser suficientemente grande, bem como a possibilidade do efeito adverso devido a complementariedade.

A saber, o efeito preço deve ser sempre negativo. Combinando (13.3.20) e (13.3.21), chegamos a:

$$\frac{p_1}{p_2} > -\frac{F_{12}}{F_{11}}, \quad \frac{p_1}{p_2} < -\frac{F_{22}}{F_{21}}, \quad \forall p. \quad (13.3.22)$$

Isso implica que:

$$-\frac{F_{22}}{F_{21}} > -\frac{F_{12}}{F_{11}}, \quad \forall p. \quad (13.3.23)$$

Assim, temos a seguinte proposição.

**Proposição 13.3.2.** Sob o pressuposto de substitutibilidade bruta, o equilíbrio competitivo  $(p_1^*, p_2^*)$  é estável global e assintoticamente sob o processo dinâmico de ajustamento dado pelo sistema de equações diferenciais.

Do teorema de Olech,  $p^*$  é estável global e assintoticamente se:

1.  $k_1 F_{11} + k_2 F_{22} < 0, \forall p$ : traço < 0
2.  $k_1 k_2 (F_{11} F_{22} - F_{12} F_{21}) > 0, \forall p$ : determinante > 0
3. ou  $F_{11} F_{22} \neq 0, \forall p$  ou  $F_{12} F_{21} \neq 0, \forall p$

Toda essa discussão pode ser obtida graficamente por meio do diagrama de fase. Vamos considerar o plano  $p_1 \times p_2$ . Defina a curva  $F_i = 0$  como o locus do par  $(p_1, p_2)$  no qual  $F_i(p_1, p_2, 1) = 0$  com  $i = 1, 2$ . Para obter a inclinação da curva  $F_i = 0$ , diferenciamos  $F_i = 0$  para obtermos:

$$F_{i1}dp_1 + F_{i2}dp_2 = 0, \quad i = 1, 2. \quad (13.3.24)$$

Disso, a inclinação das duas curvas são obtidas como:

$$\left. \frac{dp_1}{dp_2} \right|_{F_1=0} = -\frac{F_{12}}{F_{11}} > 0, \quad \left. \frac{dp_1}{dp_2} \right|_{F_2=0} = -\frac{F_{22}}{F_{21}} > 0. \quad (13.3.25)$$

Portanto, ambas as curvas têm inclinação positiva no plano  $(p_1, p_2)$ . Manipulando os resultados encontramos que:

$$\left. \frac{dp_1}{dp_2} \right|_{F_1=0} < \frac{p_1}{p_2}, \quad \left. \frac{dp_1}{dp_2} \right|_{F_2=0} > \frac{p_1}{p_2}. \quad (13.3.26)$$

Isso significa que a inclinação do segmento a partir da origem para qualquer ponto sobre  $F_1 = 0$  é maior do que a inclinação de  $F_1 = 0$  neste ponto. Para o caso de  $F_2 = 0$  temos o oposto. Isto é ilustrado nas figuras abaixo. A figura da esquerda representa a curva  $F_1 = 0$  e a figura da direita a curva  $F_2 = 0$ .

O equilíbrio competitivo definido por

$$F_i(p_1^*, p_2^*, 1) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (13.3.27)$$

pode ser descrito pela intersecção das curvas  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 0$ . Isto é ilustrado na figura abaixo, em que o ponto  $A$  representa o equilíbrio competitivo. Note que o segmento  $0A$  deve estar entre as curvas  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 0$ , ou seja, a curva  $F_1 = 0$  deve cortar a curva  $F_2 = 0$  exatamente acima do ponto  $A$ . Isto estabelece uma prova gráfica da existência de um único equilíbrio competitivo sob o pressuposto de substitutibilidade bruta.

FIGURA 13.3.1 – CURVAS  $F_1 = 0$  E  $F_2 = 0$

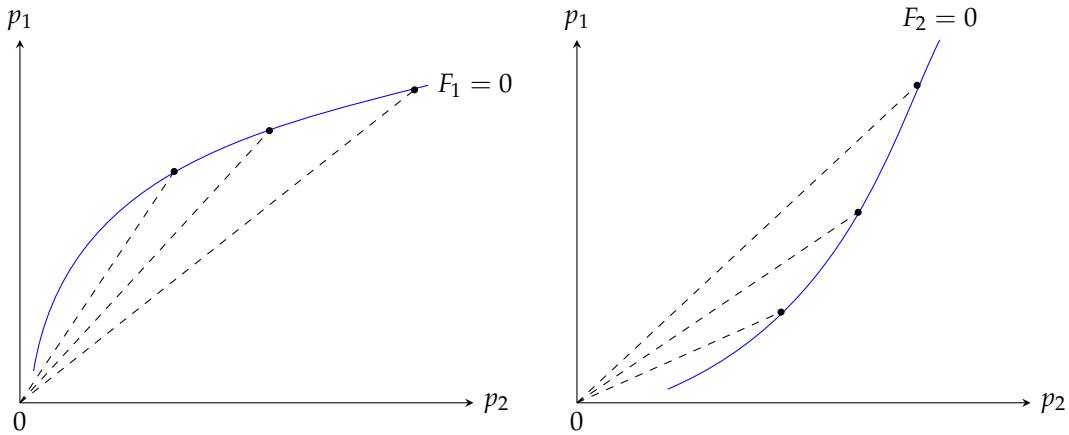
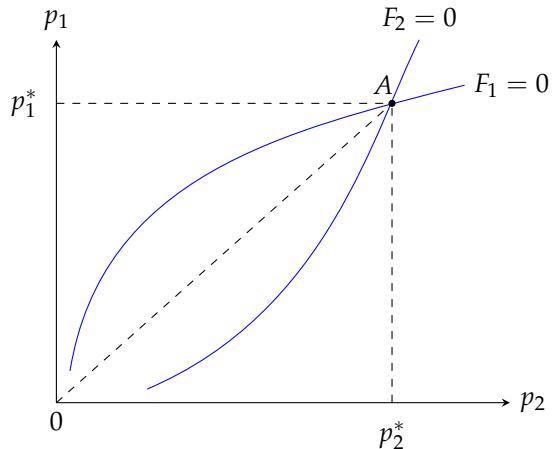
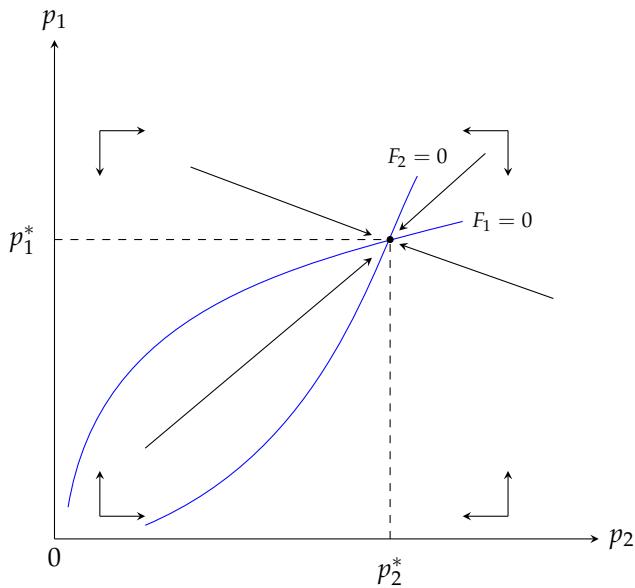


FIGURA 13.3.2 – EXISTÊNCIA E UNICIDADE DO EQUILÍBRIO COMPETITIVO



Nós podemos agora estabelecer um representação gráfica do comportamento dinâmico de  $(p_1, p_2)$ , conforme o sistema de equações diferenciais estabelecido acima. Note que as curvas  $F_1 = 0$  e  $F_2 = 0$  dividem o ortante não-negativo do espaço de  $(p_1, p_2)$  dentro de quatro regiões. Uma vez que  $F_{12} > 0$ , temos que  $F_1 > 0$  à direita da curva  $F_1 = 0$  e  $F_1 < 0$  à esquerda de  $F_1 = 0$ . Portanto,  $\dot{p}_1 > 0$  ou  $p_1$  cresce ao longo do tempo à direita da curva  $F_1 = 0$  e  $\dot{p}_1 < 0$  ou  $p_1$  decresce ao longo do tempo à esquerda de  $F_1 = 0$ . De forma similar, uma vez que  $F_{22} < 0$ , temos que  $F_2 < 0$  à direita da curva  $F_2 = 0$  e  $F_2 > 0$  à esquerda de  $F_2 = 0$ . Portanto,  $\dot{p}_2 < 0$  ou  $p_2$  decresce ao longo do tempo à direita da curva  $F_2 = 0$  e  $\dot{p}_2 > 0$  ou  $p_2$  cresce ao longo do tempo à esquerda de  $F_2 = 0$ .

FIGURA 13.3.3 – COMPORTAMENTO DINÂMICO DE  $(p_1, p_2)$



O ponto de equilíbrio  $A$  é conhecido como um nó impróprio. Para um sistema não-linear, sabe-se que o comportamento dinâmico da solução das equações diferenciais na vizinhança de um ponto de equilíbrio pode, com algumas exceções, ser aproximado pelo comportamento dinâmico da solução de sua aproximação linear. Este resultado é conhecido como Teorema de Poincaré. A técnica diagramática utilizada aqui é muito útil para obter a representação gráfica do comportamento da solução de sistemas não lineares para o caso de duas dimensões. Esta técnica, conhecida com técnica do diagrama de fase, é amplamente utilizada em economia.

### 13.3.3 O Modelo Walras-Keynes-Phillips de Tobin: Aplicação do Teorema de Routh-Hurwitz

A discussão deste exemplo terá como base Tobin (1975). Começamos nossa análise discutindo o usual modelo IS-LM. Para tanto, seja:

$$Y = E(Y - T, r - \pi^e) + G, \quad (13.3.28)$$

$$\frac{M}{p} = L(Y, r), \quad (13.3.29)$$

em que  $Y$  é o produto,  $E$  é a soma de consumo e investimento,  $r$  é a taxa de juros nominal,  $\pi^e$  é a taxa de inflação esperada,  $T$  são os impostos líquidos,  $G$  é o montante de gasto governamental,  $M$  é a oferta monetária,  $p$  é o nível de preços e  $L$  é a demanda por moeda. Assume-se que  $G$ ,  $T$  e  $M$  são constantes. Neste modelo assume-se que  $\pi^e$  é endógeno. Note que  $r - \pi^e$  é a taxa real de juros.

Com base nisso, podemos proceder ao modelo proposto por Tobin (1975). Uma característica neste modelo é que o mercado de bens não se ajusta rapidamente. Representamos tal pressuposto

como

$$\dot{Y} = \alpha [E(Y - T, r - \pi^e) + G - Y], \quad (13.3.30)$$

em que  $\alpha$  é uma constante positiva. Tobin justifica o formato desta equação ao afirmar que isto implementa a visão Keynesiana que no curto prazo salários e preços são fixos (ou se movem muito lentamente) e o produto responde às variações de demanda. Cabe destacar que enquanto podemos concordar que o produto se ajusta mais lentamente do que os preços, é questionável se esta equação captura este argumento. Não vamos discutir tal aspecto aqui, mas vamos supor que o pressuposto exposto é capturado por essa dinâmica.

Diferentemente deste pressuposto, assume-se que o mercado monetário ajusta-se rapidamente às flutuações das taxas de juros e  $\frac{M}{p} = L(Y, r)$  é válido para  $t$ . Resolvendo essa expressão para  $r$ , obtemos:

$$r = r(Y, p, M), \quad (13.3.31)$$

em que

$$r_Y \left( \equiv \frac{\partial r}{\partial Y} \right) = -\frac{L_Y}{L_r} > 0, \quad (13.3.32)$$

$$r_p \left( \equiv \frac{\partial r}{\partial p} \right) = -\frac{M}{p^2 L_r} > 0. \quad (13.3.33)$$

Usando estas definições, podemos construir a seguinte função  $D$ :

$$D(Y, p, \pi^e) \equiv E[Y - T, r(Y, p, M) - \pi^e] + G, \quad (13.3.34)$$

em que

$$D_Y \left( \equiv \frac{\partial D}{\partial Y} \right) = E_Y - \frac{E_r L_Y}{L_r}, \quad (13.3.35)$$

$$D_p \left( \equiv \frac{\partial D}{\partial p} \right) = -\frac{E_r M}{p L_r} < 0, \quad (13.3.36)$$

$$D_{\pi^e} \left( \equiv \frac{\partial D}{\partial \pi^e} \right) = -E_r > 0. \quad (13.3.37)$$

Uma vez que  $E_Y < 1$ , temos que  $D_Y - 1 = (E_Y - 1) - \frac{E_r L_Y}{L_r} < 0$ . Logo decorre que  $D_Y < 1$ . Substituindo a função  $D$  dentro da equação que descreve a dinâmica do produto, obtemos a seguinte equação de ajustamento do mercado de bens:

$$\dot{Y} = \alpha[D(Y, p, \pi^e) - Y]. \quad (13.3.38)$$

Seguindo Tobin (1975), assumimos que a expectativa de inflação é formada com base em expectativas adaptativas:

$$\dot{\pi}^e = \beta(\pi - \pi^e), \quad \beta > 0. \quad (13.3.39)$$

Vamos definir que  $Y^*$  seja o nível de produto de pleno emprego, isto é,  $Y^*$  representa o nível de produto que corresponde a taxa natural de desemprego. Isto posto, seja a seguinte curva de Phillips:

$$\pi \left( \equiv \frac{\dot{p}}{p} \right) = \gamma(Y - Y^*) + \pi^e, \quad \gamma > 0. \quad (13.3.40)$$

Assim, a equação de ajustamento do mercado de bens, a equação de formação da expectativa de inflação e a curva de Phillips captura a essência do que Tobin chamou de modelo WKP (Walras-Keynes-Phillips).

Substituindo a curva de Phillips na equação que determina a formação de expectativa sobre a taxa de inflação, chegamos a:

$$\dot{\pi}^e = \beta\gamma(Y - Y^*). \quad (13.3.41)$$

O sistema das três equações diferenciais, (13.3.38), (13.3.40) e (13.3.41), determinam a trajetória de  $Y$ ,  $p$  e  $\pi^e$ , dadas as condições iniciais. Os valores de equilíbrio são obtidos fazendo  $\dot{Y} = \dot{p} = \dot{\pi}^e = 0$  nas equações (13.3.38), (13.3.40) e (13.3.41). Note que no equilíbrio temos  $Y = Y^*$  e  $p$  igual a uma constante ( $\pi = \pi^e$ ). Isto é, em equilíbrio temos pleno emprego e estabilidade de preços. Denotaremos os valores de equilíbrio de  $p$  por  $p^*$ .

Linearizando as equações (13.3.38), (13.3.40) e (13.3.41) em torno do ponto de equilíbrio, chegamos a:

$$\begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{p} \\ \dot{\pi}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(D_Y - 1) & \alpha D_p & -\alpha E_r \\ \gamma p^* & 0 & p^* \\ \beta\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y - Y^* \\ p - p^* \\ \pi^e \end{pmatrix}. \quad (13.3.42)$$

A equação característica dessa matriz de coeficientes pode ser escrita como:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0, \quad (13.3.43)$$

em que  $a_1 \equiv -\alpha(D_Y - 1)$ ,  $a_2 \equiv -\alpha\gamma(D_p p^* - \beta E_r)$  e  $a_3 \equiv -\alpha\beta\gamma D_p p^*$ .

As condições de Routh-Hurwitz para a estabilidade podem ser escritas como:

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1 a_2 - a_3 > 0. \quad (13.3.44)$$

As condições  $a_1 > 0$  e  $a_3 > 0$  são satisfeitas automaticamente, uma vez que  $D_Y < 1$  e  $D_p < 0$ . A condição  $a_2 > 0$  deriva das outras condições. O modelo de Tobin será estável se  $D_p p^* - \beta E_r < 0$ .

Em resumo, o equilíbrio no modelo de Tobin não necessariamente é estável. O modelo tem duas equações de ajustamento, (13.3.38) e (13.3.40), para um mercado, o mercado de bens. Isto pode explicar o equilíbrio não-estável do mercado. Ademais, o modelo WKP de Tobin assume que a oferta de moeda é constante, mas o sistema de equações diferenciais é capaz de produzir inflação mesmo no equilíbrio de longo-prazo, no qual  $\pi = \pi^e = 0$ .

É importante entendermos a tecnicidade do teorema de Routh-Hurwitz. Se  $A$  for a matriz associada ao sistema de equações diferenciais e se for simétrica e negativa definida, então todos os autovalores de  $A$  são reais e negativos. Essa é uma condição suficiente para a estabilidade do sistema. A condição de Routh-Hurwitz é necessária e suficiente para a estabilidade de um sistema linear. Agora, se o sistema for não-linear, tal condição fornecerá uma condição necessária e suficiente para a estabilidade da versão linearizada do sistema original, e uma condição suficiente, mas não necessária, para o sistema original. Isso significa que a estabilidade de uma aproximação linear não é necessária para a estabilidade do sistema original. Portanto, a condição de Routh-Hurwitz não pode ser utilizada para obter informações para determinar resultados de estática comparativa. Somente quando conhecemos as condições necessárias para a estabilidade de um sistema não-linear, podemos utilizar este teorema para estudar os efeitos de mudanças de parâmetros sobre o equilíbrio.

### 13.3.4 Oligopólio: O Modelo de Cournot

O modelo clássico de oligopólio de Cournot (1838) ainda está presente em todos os livros didáticos de microeconomia, onde se mostra que pode ser interpretado em termos da moderna teoria dos jogos (ver, por exemplo, Varian, 1992, Cap. 16). Também é possível dar uma interpretação dinâmica ao modelo, seguindo o que Coumot tinha em mente quando escreveu sobre a estabilidade do seu modelo. Isso equivale a supor um processo de aprendizagem em que cada empresa observa a escolha de produto da outra empresa, refinando assim sua própria crença em seu comportamento. Mais precisamente, em qualquer período  $t$  cada empresa  $i$  observa os produtos das outras empresas e assume que essas quantidades permanecerão inalteradas no período  $t + 1$ . Portanto, dada a curva de demanda do mercado, a empresa  $i$  escolherá seu produto maximizando o lucro consistente com esta crença.

O resultado surpreendente – primeiro encontrado por Theocaris (1960) – é que, quando formalizamos esse comportamento dinâmico, a trajetória dos produtos não é mais estável quando o número de empresas é maior que duas.

Vamos considerar um mercado com  $n$  empresas oligopolísticas produzindo uma produção homogênea e com uma curva de demanda de mercado linear,

$$p_t = a - b \sum_{i=1}^n x_{it} \quad (13.3.45)$$

em que  $a > 0$ ,  $b > 0$  e  $x_{it}$  é o produto real da empresa  $i$  no tempo  $t$ . Nós também assumimos curvas de custo linear  $C_i$  para cada empresa, de modo que o custo marginal  $c_i$  seja constante.

Dada a suposição de comportamento feita acima, cada empresa tem um preço de mercado ex ante com base na crença de que os produtos das outras empresas permanecerão inalterados, ou seja,

$$p_{t+1}^i = a - b \left( x_{it+1} - \sum_{j \neq i}^n x_{jt} \right) \quad (13.3.46)$$

com base na qual a empresa  $i$  determina  $x_{it+1}$ , de modo a maximizar seu lucro esperado  $\pi_{t+1}^i = p_{t+1}^i x_{it+1} - C_i = ax_{it+1} - bx_{it+1}^2 - bx_{it+1} \sum_{j \neq i}^n x_{jt} - C_i$ . As condições de primeira ordem para um máximo interior são  $\frac{\partial \pi_{t+1}^i}{\partial x_{it+1}} = 0$ , a saber

$$(a - c_i) - 2bx_{it+1} - b \sum_{j \neq i}^n x_{jt} = 0 \iff x_{it+1} = -\frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^n x_{jt} + \frac{a - c_i}{2b} \quad (13.3.47)$$

As condições de segunda ordem  $\frac{\partial^2 \pi_{t+1}^i}{\partial x_{it+1}^2} < 0$  são satisfeitas uma vez que  $b > 0$ .

No caso  $N = 2$  (duopólio), temos:

$$x_{1t+1} = -\frac{1}{2}x_{2t} + \frac{a - c_1}{2b} \quad (13.3.48)$$

$$x_{2t+1} = -\frac{1}{2}x_{1t} + \frac{a - c_2}{2b} \quad (13.3.49)$$

A equação característica da parte homogênea do sistema acima é

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{1}{4} = 0 \quad (13.3.50)$$

para a qual  $\lambda_1, \lambda_2 = \pm \frac{1}{2}$ . Assim, o movimento será convergente para o solução de equilíbrio, que é obtida fazendo  $x_{1t+1} = x_{1t} = \bar{x}_1$  e  $x_{2t+1} = x_{2t} = \bar{x}_2$ . Logo,  $\bar{x}_1 = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}$  e  $\bar{x}_2 = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}$ . Isso prova a intuição de Cournot de que seu equilíbrio era estável, ou seja, “se algum dos

produtores, induzido em erro quanto ao seu verdadeiro interesse, o abandone temporariamente, ele será trazido de volta a ele por uma série de reações, em constante declínio em amplitude". Mas também prova o perigo de acreditar que o que vale para sistemas bidimensionais automaticamente vale para sistemas  $n$ -dimensionais.

Segue-se que para  $n = 3$  o sistema terá raiz igual a  $-1$  (oscilações de amplitude constante), enquanto para  $n > 3$  essas oscilações serão explosivas. Portanto, o sistema é estável apenas para  $n = 2$ .

---

## EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS

---

Este capítulo é inteiramente dedicado à análise de equações em diferenças lineares não homogêneas de dimensão um ( $n = 1$ ) e ordem  $p \geq 1$  com coeficientes constantes:

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + Z_t, \quad \phi_p \neq 0, \quad (14.0.1)$$

em que  $\phi_1, \dots, \phi_p$  são números reais constantes. A variável  $Z_t$  representa a parte não homogênea da equação que influencia a evolução de  $X_t$  ao longo do tempo. Seus valores são dados de fora do sistema. Assim,  $Z_t$  é chamada variável exógena ou independente.

## 14.1 Equações em Diferenças de Primeira Ordem

Como ponto de partida e motivação da análise, vamos considerar o caso mais simples, ou seja, a equação não homogênea linear de primeira ordem ( $p = 1$ ):

$$X_t = \phi X_{t-1} + Z_t, \quad \phi \neq 0. \quad (14.1.1)$$

Para esta equação não homogênea corresponde uma equação homogênea linear de primeira ordem:

$$X_t = \phi X_{t-1}. \quad (14.1.2)$$

Começando no período 0 com algum valor inicial arbitrário  $X_0 = x_0$ , todos os valores subsequentes podem ser recursivamente computados inserindo-se iterativamente na equação em diferença acima:

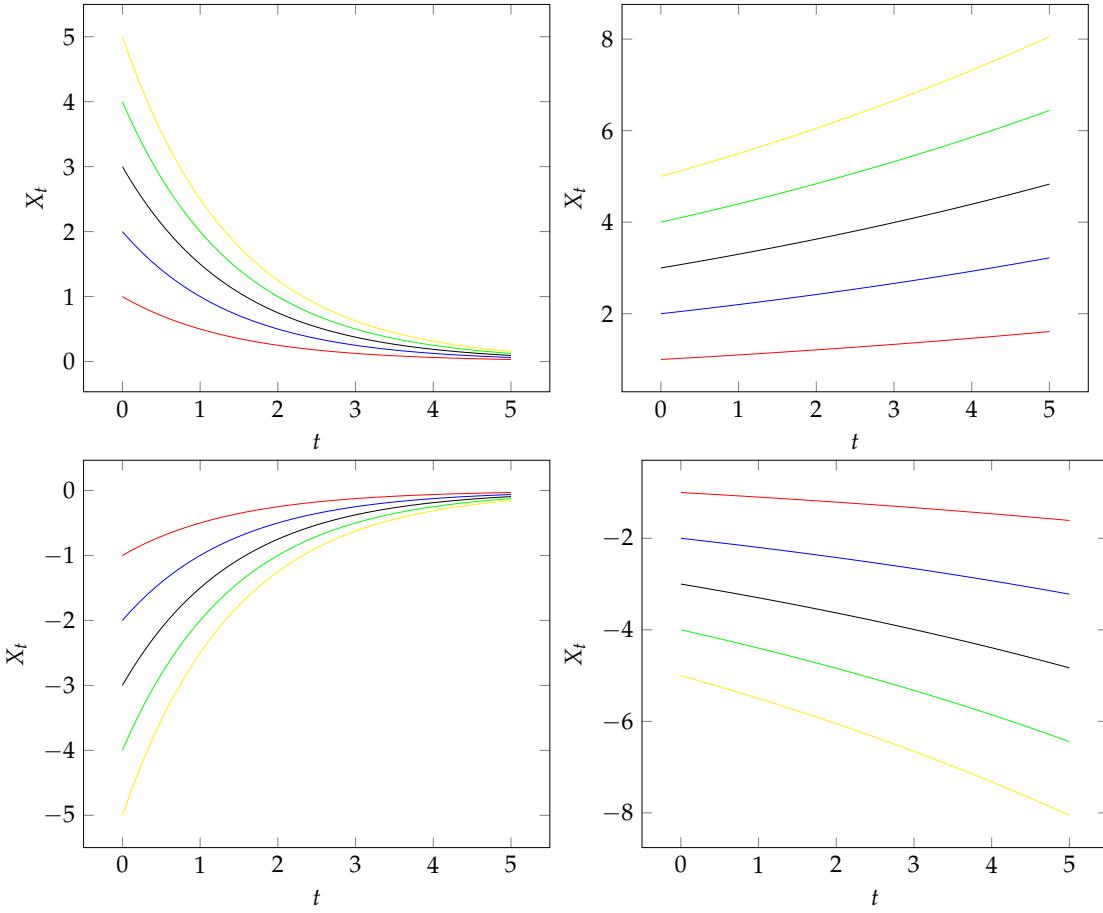
$$\begin{aligned} X_1 &= \phi x_0 \\ X_2 &= \phi X_1 = \phi^2 x_0 \\ X_3 &= \phi X_2 = \phi^3 x_0 \\ &\vdots \\ X_t &= \phi X_{t-1} = \phi^t x_0 \end{aligned} \quad (14.1.3)$$

Disso, percebe-se que:

$$X_t = \phi^t c, \quad (14.1.4)$$

que pode ser visto como a solução geral da equação em diferença linear homogênea de primeira ordem original. Na verdade, a equação acima fornece uma família inteira de soluções indexadas pelo parâmetro  $c \in \mathbb{R}$ . Para cada valor de  $c$ , corresponde uma trajetória,  $X_t = \phi^t c$ . Para destacar essa dependência, podemos escrever as soluções como  $X_t(c)$ . Observe que as trajetórias de duas soluções diferentes  $X_t(c_1)$  e  $X_t(c_2)$ ,  $c_1 \neq c_2$ , não podem se cruzar.

FIGURA 14.1.1 – COMPORTAMENTO DE  $X_t = \phi^t c$  ( $\phi = 0.5$  e  $\phi = 1.1$ )



O parâmetro  $c$  pode ser fixado usando uma única condição de limite. Uma forma simples de tal condição de limite requer, por exemplo, que  $X_t$  assuma um valor particular  $x_{t_0}$  em algum período  $t_0$ . Assim, exigimos que  $X_{t_0} = x_{t_0}$  no período  $t_0$ . Neste caso, falamos de um problema de valor inicial. O valor de  $c$  pode então ser recuperado resolvendo a equação  $x_{t_0} = \phi^{t_0}c$  para  $c$ . Isso nos leva a  $c = \frac{x_{t_0}}{\phi^{t_0}}$ . Assim, a solução pode ser reescrita como:

$$X_t = x_{t_0}\phi^{t-t_0}. \quad (14.1.5)$$

Note que a solução depende de  $t - t_0$  e não de  $t$  ou de  $t_0$  separadamente. Em muitos casos, assumimos o valor em  $t_0 = 0$  para que  $c = x_0$ .

Suponha que nos sejam dadas duas soluções da equação homogênea,  $X_t^{(1)}$  e  $X_t^{(2)}$ . Então é fácil verificar que qualquer combinação linear das duas soluções,  $c_1 X_t^{(1)} + c_2 X_t^{(2)}$ , com  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , também é uma solução. Isto implica que o conjunto de todas as soluções para a equação homogênea forma um espaço vetorial.

Considere agora duas soluções da equação em diferença não homogênea  $X_t = \phi X_{t-1} + Z_t$ ,

a saber:  $X_t^{(1)}$  e  $X_t^{(2)}$ . Então, como pode ser facilmente verificado,  $X_t^{(1)} + X_t^{(2)}$  satisfaz a equação homogênea  $X_t = \phi X_{t-1}$ . Esse fato é chamado de princípio da superposição. O princípio da superposição implica que  $X_t^{(1)} + X_t^{(2)} = \phi^t c$ , o que leva ao seguinte teorema.

**Teorema 14.1.1.** *Toda solução  $X_t$  da equação em diferença linear não homogênea de primeira ordem pode ser representada como a soma da solução geral da equação homogênea,  $X_t^{(g)}$ , e da solução particular para a equação não homogênea,  $X_t^{(p)}$ :*

$$X_t = X_t^{(g)} + X_t^{(p)}. \quad (14.1.6)$$

Antes de continuar com a análise teórica, considere o seguinte exemplo.

**Exemplo 14.1.1.** *Uma das configurações mais simples em economia onde uma equação em diferença surge naturalmente é o cálculo de juros compostos. Tomemos, por exemplo, a evolução de uma dívida. Denote por  $D_t$  a dívida no início do período  $t$ . Então a dívida no período subsequente  $t+1$ ,  $D_{t+1}$ , é obtida pela regra contábil simples:*

$$D_{t+1} = D_t + rD_t - Z_t = (1+r)D_t - Z_t, \quad (14.1.7)$$

em que  $rD_t$  são os juros acumulados no final do período  $t$ . Aqui estamos usando para simplicidade uma taxa de juros constante  $r$ . O contrato de dívida é atendido pelo pagamento do valor de  $Z_t$  no final do período  $t$ . Esse pagamento normalmente inclui um pagamento pelos juros e um reembolso do principal. A equação constitui uma equação linear em diferença de primeira ordem não homogênea com  $\phi = 1+r$ .

Dada a dívida inicial no início do período 0,  $D_0$ , o valor da dívida em aberto nos períodos subsequentes pode ser calculado recursivamente usando a regra contábil estabelecida acima:

$$\begin{aligned} D_1 &= (1+r)D_0 - Z_0 \\ D_2 &= (1+r)D_1 - Z_1 = (1+r)^2 D_0 - (1+r)Z_0 - Z_1 \\ &\vdots \\ D_{t+1} &= (1+r)^{t+1} D_0 - (1+r)Z_{t-1} - \dots - (1+r)^t Z_0 \\ &= (1+r)^{t+1} D_0 - \sum_{i=0}^t (1+r)^i Z_{t-i}. \end{aligned} \quad (14.1.8)$$

Note que  $D_{t+1}$  é determinado como a soma de duas partes:  $(1+r)^{t+1} D_0$  e  $\sum_{i=0}^t (1+r)^i Z_{t-i}$ . A primeira expressão corresponde assim à solução geral da equação homogênea e a segunda a uma solução particular da equação não homogênea de acordo com o Teorema visto acima. Como o valor inicial da dívida é dado, este valor naturalmente fixa o parâmetro  $c$  igual a  $D_0$ .

Suponha que, em vez de exigir que a dívida seja zero em algum momento (incluindo o infinito), impomos a condição de que o valor atual descontado da dívida não seja positivo quando  $T$  tende ao infinito:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} \leq 0. \quad (14.1.9)$$

Esta condição é referida como a condição de jogo não Ponzi (NPG) em economia. Um jogo Ponzi é um esquema em que todos os pagamentos de principal e juros são rolados perpetuamente com a emissão de novas dívidas. Se o limite acima for positivo, o mutuário seria capaz de extrair recursos (em termos de valor presente) dos credores (Veja O'Connell e Zeldes (1988) e a literatura citada para uma avaliação da significância da condição NPG em economia). Dada a equação em diferença para a evolução da dívida, a condição de jogo não Ponzi com pagamento constante por período é equivalente a:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D_{T+1}}{(1+r)^{T+1}} = \lim_{T \rightarrow \infty} D_0 - \left(1 - (1+r)^{-T-1}\right) \frac{Z}{r} = D_0 - \frac{Z}{r} \leq 0, \quad (14.1.10)$$

o que implica que  $Z \geq rD_0$ . Assim, a condição non Ponzi game é válida se os pagamentos constantes  $Z$  forem pelo menos tão grandes quanto os juros.

## 14.2 Steady State e Estabilidade

Normalmente, não estamos interessados apenas em descrever a evolução da variável dependente ao longo do tempo, mas também queremos conhecer algumas propriedades qualitativas da solução. Em particular, queremos caracterizar seu comportamento de longo prazo. É apropriado formular os conceitos relevantes de estabilidade não apenas para equações lineares, mas também para equações em diferenças não lineares. Assim, considere a equação em diferença não-autônoma  $n$ -dimensional de primeira ordem, possivelmente não linear,  $X_t = f(X_{t-1}, t) \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^n$ . Então, podemos dar a seguinte definição de ponto de equilíbrio, ponto fixo ou estado estável.

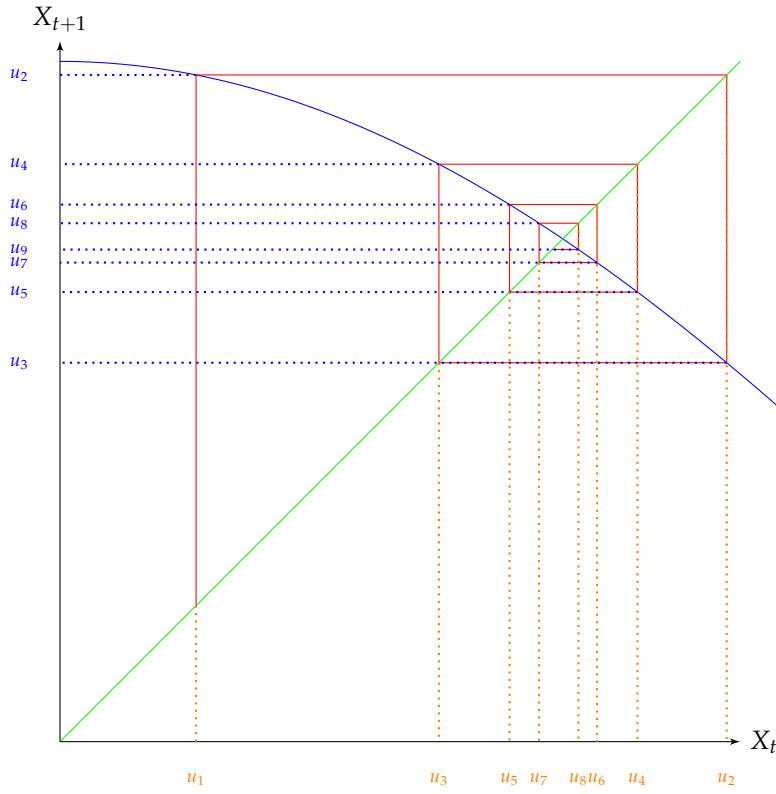
**Definição 14.2.1.** Um ponto  $X^* \in \mathbb{R}^n$  no domínio de  $f$  é chamado ponto de equilíbrio, estado estacionário, ou ponto fixo se for um ponto fixo da função  $f(X, t)$ , ou seja, se  $X^*$  satisfaz a equação

$$X^* = f(X^*, t) \quad \forall t \in \mathbb{N}. \quad (14.2.1)$$

No caso de uma equação autônoma de primeira ordem de dimensão um, é conveniente representar a localização dos pontos de equilíbrio e a dinâmica de  $X_t$  como um gráfico no plano  $X_t \times X_{t+1}$ . Para este propósito, desenhe primeiro o gráfico da função  $y = f(x)$  no plano  $X_t \times X_{t+1}$ . Em seguida, desenhe o gráfico da função identidade  $y = x$ , que é apenas uma linha através da origem com um ângulo de  $45^\circ$  com o eixo  $x$ . Os pontos de equilíbrio são os pontos onde a linha de  $45^\circ$  intercepta o gráfico da função  $y = f(x)$ . Começando com algum valor inicial  $X_0 = x_0$ , a evolução de  $X_t$  é então representada no plano  $X_t \times X_{t+1}$  pela seguinte sequência de pontos:  $(0, x_0), (x_0, f(x_0)), (f(x_0), f(f(x_0))), (f(f(x_0)), f(f(f(x_0)))), \dots$ . Conectar esses pontos por segmentos de linha dá o chamado gráfico de escada ou Diagrama de Cobweb.

**Exemplo 14.2.1.** Tomemos como exemplo a função cosseno:  $y = \cos(x)$ :

FIGURA 14.2.1 – GRÁFICO DA FUNÇÃO  $f(x) = \cos(x)$



A figura mostra o único steady state e a evolução de  $X_t$  iniciando em  $X_0 = x_0 = u_1$ .

**Exemplo 14.2.2.** Outro exemplo consiste de uma equação em diferença não homogênea linear de primeira ordem com  $Z_t$  constante ao longo do tempo, ou seja,  $Z_t = Z$ . É fácil calcular o estado estacionário neste caso simples:

$$X^* = \phi X^* + Z \implies X^* = \frac{Z}{1 - \phi}, \quad \phi \neq 1. \quad (14.2.2)$$

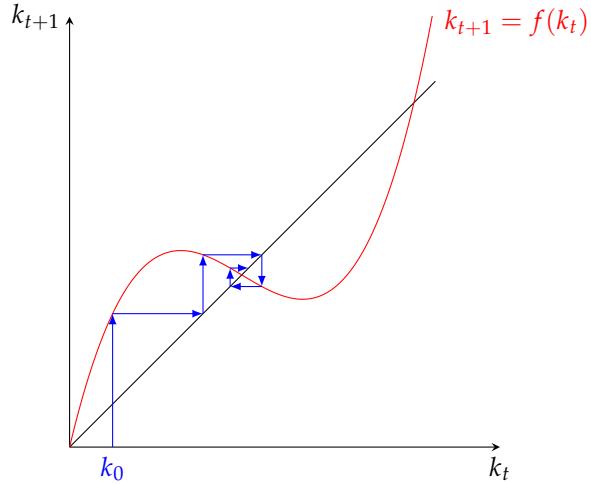
Para  $\phi = 1$ , não existe ponto de equilíbrio, a menos que  $Z = 0$ , em cujo caso cada ponto é um ponto de equilíbrio. Como o estado estacionário cumpre a equação em diferença, é um candidato válido para uma solução específica. Assim, a solução geral neste caso é

$$X_t = \phi^t c + X^* = \phi^t c + \frac{Z}{1 - \phi}, \quad \phi \neq 1. \quad (14.2.3)$$

Um dos principais objetivos do estudo de equações em diferenças é analisar seu comportamento próximo a um ponto de equilíbrio. Este tópico é chamado de teoria da estabilidade.

**Exemplo 14.2.3.** Outro exemplo consiste de uma equação em diferença para o modelo Solow-Swan, como segue

FIGURA 14.2.2 – MODELO SOLOW-SWAN



**Definição 14.2.2.** No contexto das equações em diferenças lineares, os seguintes conceitos básicos de estabilidade são suficientes.

1. Um ponto de equilíbrio  $X^*$  é chamado estável se para todo  $\varepsilon > 0$ , há um  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que

$$|X_0 - X^*| < \delta_\varepsilon \text{ implica } |X_t - X^*| < \varepsilon, \quad \forall t > 0. \quad (14.2.4)$$

Se  $X^*$  não é estável, ele é dito instável.

2. Um ponto de equilíbrio  $X^*$  é dito atrativo se existe um  $\eta > 0$  tal que

$$|X_0 - X^*| < \eta \text{ implica } \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X^*. \quad (14.2.5)$$

Se  $\eta = \infty$ ,  $X^*$  é dito globalmente atrativo.

3. O ponto  $X^*$  é assintoticamente estável se for estável e atrativo. Se  $\eta = \infty$ ,  $X^*$  é estável global e assintoticamente.
4. Um ponto de equilíbrio  $X^*$  é chamado exponencialmente estável se existirem  $\delta > 0$ ,  $M > 0$ , e  $\eta \in (0, 1)$  tal que para a solução  $X_t(x_0)$  temos

$$|X_t(x_0) - X^*| \leq M\eta^t |x_0 - X^*| \quad \text{sempre que } |x_0 - X^*| < \delta. \quad (14.2.6)$$

5. Uma solução  $X_t(x_0)$  é chamada limitada se houver uma constante positiva  $M < \infty$  tal que

$$|X_t(x_0)| \leq M, \quad \forall t. \quad (14.2.7)$$

Observe que  $X^*$  pode ser atrativo, mas instável, como mostrado no exemplo a seguir, retirado de Sedaghat (1997) e Elaydi (2005, 181-182). Considere a equação em diferença

$$X_t = f(X_{t-1}) = \begin{cases} -2X_{t-1}, & \text{se } X_{t-1} < \mu \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (14.2.8)$$

em que  $\mu > 0$  é um determinado limite. É óbvio que  $X^* = 0$  é um ponto fixo. A solução para esta equação em diferença é

$$X_t = \begin{cases} (-2)^t x_0, & \text{se } (-2)^{t-1} x_0 < \mu \\ 0, & \text{se } (-2)^{t-1} x_0 \geq \mu \end{cases} \quad (14.2.9)$$

em que  $X_0 = x_0$  é algum valor inicial. Se  $x_0 \geq \mu$ , então  $X_t = 0$  para todo  $t \geq 0$ . Se  $x_0 < \mu$ , então  $f(X_\tau) \geq \mu$  para algum  $\tau > 0$ . Assim,  $X_t = 0$  para  $t \geq \tau$ . O ponto fixo  $X^* = 0$  está, portanto, atraindo, até mesmo atraindo globalmente. No entanto,  $X^* = 0$  é instável porque os pontos  $x_0 \neq 0$ , mas arbitrariamente próximos de zero, são mapeados para pontos mais distantes até que excedam o limite  $\mu$ .

Pode ser mostrado que tal situação só pode surgir porque  $f$  não é contínua. Em particular, se  $f$  é uma função contínua na linha real, um ponto fixo não pode ser simultaneamente atrativo e instável.

**Teorema 14.2.1.** Um ponto fixo  $X^*$  de uma função contínua  $f$  é assintoticamente estável se, e somente se, existir um intervalo aberto  $(a, b)$  contendo  $X^*$  tal que  $f^2(x) > x$  para  $a < x < X^*$  e  $f^2(x) < x$  para  $X^* < x < b$ .

A estabilidade local de um ponto fixo pode ser estudada linearizando-se a equação não linear em torno do ponto fixo. Em particular, seja o seguinte teorema:

**Teorema 14.2.2.** Seja  $X^*$  um ponto de equilíbrio da equação em diferença autônoma não-linear

$$X_{t+1} = f(X_t). \quad (14.2.10)$$

em que  $f$  é continuamente diferenciável em  $X^*$ . Então:

1. Se  $|f'(X^*)| < 1$ , então  $X^*$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.
2. Se  $|f'(X^*)| > 1$ , então  $X^*$  é um ponto de equilíbrio instável.

**Exemplo 14.2.4.** Seja a função logística

$$f(x) = \begin{cases} \mu x(1-x), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (14.2.11)$$

Os steady-states são determinados pela equação  $X^* = \mu X^*(1 - X^*)$ . Esta equação tem duas soluções que fornecem os pontos de equilíbrio:  $X^* = 0$  e  $X^* = \frac{\mu-1}{\mu}$  com  $0 < X^* < 1$ .  $f(x)$  atinge seu máximo em

$$\frac{\mu}{4} \text{ com } x = \frac{1}{2}.$$

A estabilidade da equação em diferença logística no ponto de equilíbrio  $X^* = \frac{\mu - 1}{\mu}$  depende da inclinação de  $f'(X^*) = \mu - 2\mu X^* = 2 - \mu$ . Assim, de acordo com o Teorema,  $X^*$  é assintoticamente estável se  $1 < \mu < 3$ . A partir de qualquer valor  $X_0$  em  $(0, 1)$ ,  $X_t$  convergirá para  $X^*$ . Para valores de  $\mu > 3$ , dinâmicas complicadas surgem incluindo comportamento caótico.

## 14.3 Solução de Equações em Diferenças Lineares de Primeira Ordem

Esta seção discute uma maneira mais sistemática de encontrar uma solução particular para uma equação em diferença linear de primeira ordem. Seja o problema de amortização visto anteriormente:

$$\begin{aligned} X_t &= \phi X_{t-1} + Z_t \\ X_t &= \phi(\phi X_{t-2} + Z_{t-1}) + Z_t = \phi^2 X_{t-2} + \phi Z_{t-1} + Z_t \\ &\vdots \\ X_t &= \phi^t X_0 + \phi^{t-1} Z_1 + \phi^{t-2} Z_2 + \dots + \phi Z_{t-1} + Z_t \\ &= \phi^t X_0 + \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j Z_{t-j}. \end{aligned} \tag{14.3.1}$$

Tomando o valor absoluto da diferença entre  $X_t$  e o segundo termo do lado direito da equação leva a:

$$\left| X_t - \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j Z_{t-j} \right| = |\phi^t X_0| = |\phi^t| |X_0|. \tag{14.3.2}$$

Quando há um período inicial como no exemplo da amortização de um empréstimo, digamos o período 0 sem perda de generalidade, paramos a iteração reversa nesse período e tomamos  $X_t^{(p)} = \sum_{j=0}^{t-1} \phi^j Z_{t-j}$  como a solução particular. No entanto, em muitos casos, não há um período de partida natural, de modo que faz sentido continuar a iteração até o infinito. Dado que  $|\phi^t|$  tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$  se  $|\phi| < 1$ , isso sugere considerar

$$X_t^{(b)} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z_{t-j}, \quad (14.3.3)$$

como uma solução particular. O sobrescrito  $(b)$  indica que a solução foi obtida por meio da iteração da equação para trás no tempo. Para que isso seja uma escolha significativa, a soma infinita deve ser bem definida. Este é, por exemplo, o caso se  $Z_t$  é uma sequência limitada, ou seja, se  $Z \in \ell_\infty$ . Isto é,  $\|z\|_\infty = \max\{|z_t|, 1 \leq t \leq T\}$ , a norma do máximo. Em particular, se  $Z_t$  é constante e igual a  $Z$ , a solução específica acima se torna

$$X_t^{(b)} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j Z = \frac{Z}{1-\phi}, \quad (14.3.4)$$

como obtido anteriormente.

A exigência de que  $Z_t$  permaneça limitado pode, por exemplo, ser violada se  $Z_t$  em si satisfaz a equação em diferença homogênea  $Z_t = \psi Z_{t-1}$ , que implica que  $Z_t = \psi^t c$  para algum  $c \neq 0$ . Substituindo isto na solução particular leva a:

$$X_t^{(b)} = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j \psi^{t-j} c = \psi^t \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\phi}{\psi}\right)^j c. \quad (14.3.5)$$

A soma infinita converge somente se  $\left|\frac{\phi}{\psi}\right| < 1$ . Isso mostra que além da condição de estabilidade  $|\phi| < 1$ , alguns requisitos adicionais com relação à sequência da variável exógena são necessários para tornar  $X_t^{(b)}$  uma solução particular significativa. Normalmente, assumimos que  $Z_t$  é limitado.

Considere  $|\phi| > 1$ . Neste caso, a iteração para a solução particular não logra sucesso porque  $X_t^{(b)}$  não é bem definida mesmo com  $Z_t = Z$ . Para tentar uma solução alternativa, podemos realizar o procedimento de iteração recursiva para frente. Fazendo os mesmos procedimentos anteriores, obtemos:

$$X_t^{(f)} = -\phi^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \phi^{-j+1} Z_{t+j}, \quad |\phi| > 1. \quad (14.3.6)$$

A soma é bem-comportada se  $Z_t$  for uma sequência limitada.

No caso  $|\phi| = 1$  nem a estratégia de iteração para trás nem para frente leva a uma solução sensata mesmo quando  $Z_t$  é constante e igual a  $Z \neq 0$ . Ou um ponto de equilíbrio não existe como no caso  $\phi = 1$  ou o ponto de equilíbrio existe como é o caso para  $\phi = -1$ , mas  $X_t$  oscila para sempre entre  $X_0$  e  $-X_0 + Z$ , de modo que o ponto de equilíbrio é instável. Na maioria das vezes, nos restringimos ao caso de situações hiperbólicas e excluímos o caso  $|\phi| = 1$ .

Dependendo do valor de  $\phi$ , podemos distinguir os três casos a seguir:

1.  $|\phi| < 1$ : a solução backward é assintoticamente estável no sentido de que  $X_t$  se aproxima de  $X_t^{(b)}$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Qualquer desvio de  $X_t$  de  $X_t^{(b)}$  desaparece com o tempo, independentemente do valor escolhido para  $c_b$ . A solução forward, normalmente, não faz sentido porque  $X_t^{(f)}$  não permanece limitada mesmo se a variável  $Z_t$  for constante ao longo do tempo.
2.  $|\phi| > 1$ : ambas as soluções têm um comportamento explosivo devido ao termo  $\phi$ . Mesmo pequenos desvios de  $X_t^{(b)}$  ou  $X_t^{(f)}$  crescerão sem limites. Existe, no entanto, uma e apenas uma solução que permanece limitada. É dada por  $c_f = 0$ , o que implica que  $X_t$  é sempre igual ao seu valor de equilíbrio  $X_t^{(f)}$ .
3.  $|\phi| = 1$ : nem a solução backward nem a solução forward convergem para a constante  $Z_t \neq 0$ .

Qual solução é apropriada depende da natureza do problema econômico em questão. Em particular, a escolha da condição limítrofe requer algumas considerações adicionais e não pode ser determinada em termos gerais. Como os exercícios abaixo demonstram, a natureza do mecanismo de formação de expectativas é às vezes decisiva.

## 14.4 Aplicações de Equações em Diferenças Lineares de Primeira Ordem

Nesta seção vamos discutir a aplicação dos conceitos vistos anteriormente. Para tanto, discutiremos três exemplos, a saber: o modelo formalizado por Moore (1914) – amplamente apresentado como modelo Cobweb – que estuda o comportamento dos modelos agrícolas e que culminou na introdução de expectativas racionais por Muth (1961). Em seguida, estudaremos o modelo de Solow, que permite ver como analisamos a estabilidade de um modelo não-linear. Por fim, veremos o modelo de hierinflação de Cagan e como as diferenças na formação das expectativas pode alterar a trajetória ótima do modelo e ter impacto sobre as soluções.

### 14.4.1 O Modelo Cobweb

O modelo Cobweb, originalmente introduzido por Moore (1914) para analisar o comportamento cíclico dos mercados agrícolas, foi um dos primeiros modelos dinâmicos em economia. Inspirou uma enorme literatura empírica e teórica. Sua análise culminou na introdução de expectativas racionais por Muth (1961). O modelo, em sua forma mais simples, analisa as flutuações de preço de curto prazo em um mercado único, onde, em cada período, o nível de preço é determinado para equacionar a demanda e oferta indicadas por  $D_t$  e  $S_t$ , respectivamente. O bem comercializado nesse mercado não é estocável e é produzido com uma defasagem fixa de

um período. A decisão de fornecimento dos produtores no período  $t - 1$  é baseada no preço que eles esperam obter por seu produto no período  $t$ . Denotando o logaritmo do nível de preços no período  $t$  por  $p_t$  e assumindo uma curva de demanda negativamente inclinada e uma curva de oferta positivamente inclinada, o modelo simples Cobweb pode ser resumido pelas quatro equações seguintes:

$$D_t = -\beta p_t, \quad \beta > 0 \quad (\text{demanda}) \quad (14.4.1)$$

$$S_t = \gamma p_t^e + u_t, \quad \gamma > 0 \quad (\text{oferta}) \quad (14.4.2)$$

$$S_t = D_t, \quad (\text{market clearing}) \quad (14.4.3)$$

$$p_t^e = p_{t-1} \quad (\text{formação de expectativas}) \quad (14.4.4)$$

em que  $u_t$  denota um choque de oferta. Nos mercados agrícolas,  $u_t$  normalmente representa as condições climáticas.

Dada a formação de expectativas,  $p_t^e = p_{t-1}$ , o modelo pode ser resolvido para produzir uma equação em diferença linear de primeira ordem em  $p_t$ :

$$p_t = -\frac{\gamma}{\beta} p_{t-1} - \frac{u_t}{\beta} = \phi p_{t-1} + Z_t. \quad (14.4.5)$$

Devido ao valor negativo de  $\phi$ , o preço oscila: preços altos tendem a ser seguidos por preços baixos que são novamente seguidos por preços altos. Essas oscilações de preço se traduzem em oscilações de quantidade correspondentes. Se  $u_t$  for independente do tempo e igual a  $u$ , o preço de equilíbrio do modelo Cobweb pode ser calculado da seguinte forma:

$$p^* = -\frac{\gamma}{\beta} p^* - \frac{u}{\beta} \implies p^* = \frac{-u}{\beta + \gamma}. \quad (14.4.6)$$

A Figura abaixo mostra vários casos possíveis, dependendo das inclinações relativas das curvas de oferta e de demanda. No primeiro painel,  $\phi = -0.8$ , de modo que tenhamos um equilíbrio assintoticamente estável. Começando em  $p_0$ , o preço aproxima-se do estado estacionário oscilando em torno dele. No segundo painel  $\phi = -1$ , então, independentemente do valor inicial, o preço oscila para sempre entre  $p_0$  e  $p_1$ . No terceiro painel, temos um equilíbrio instável. Começando em  $p_0 \neq p^*$ ,  $p_t$  diverge.

FIGURA 14.4.1 – MODELO COBWEB: COMPORTAMENTO DE CONVERGÊNCIA ( $\beta = 1$  e  $\gamma = 0.8$ ;  $\beta = 0.6$  e  $\gamma = 0.2$ )

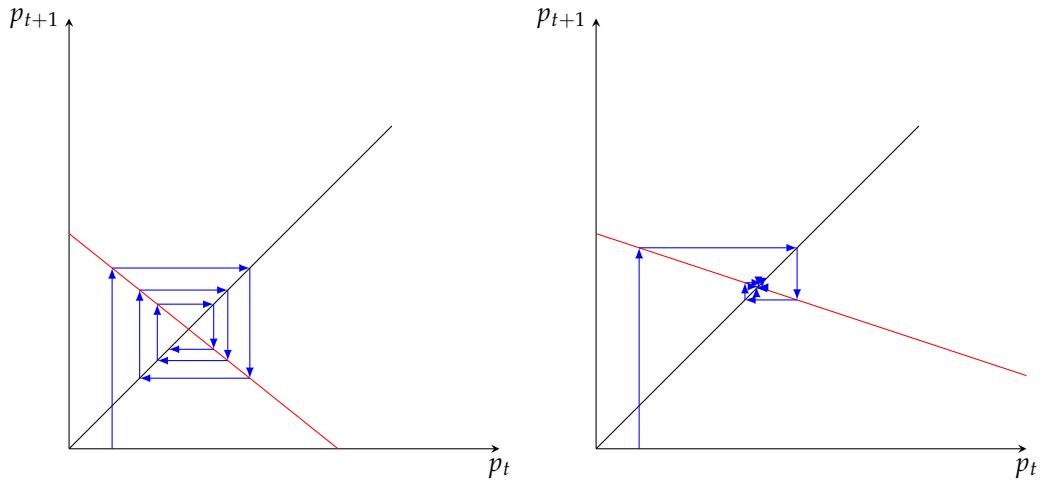


FIGURA 14.4.2 – MODELO COBWEB: COMPORTAMENTO OSCILATÓRIO ( $\beta = 1$  e  $\gamma = 1$ )

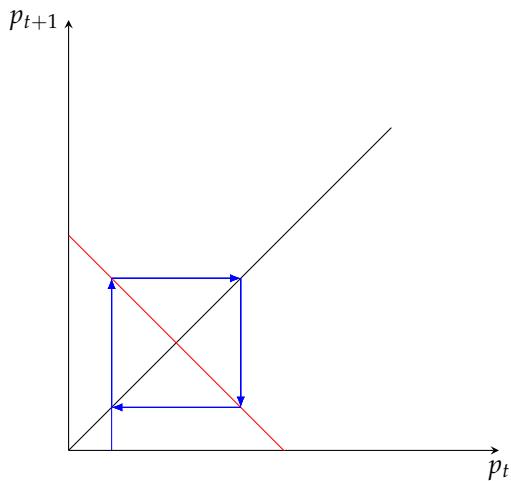
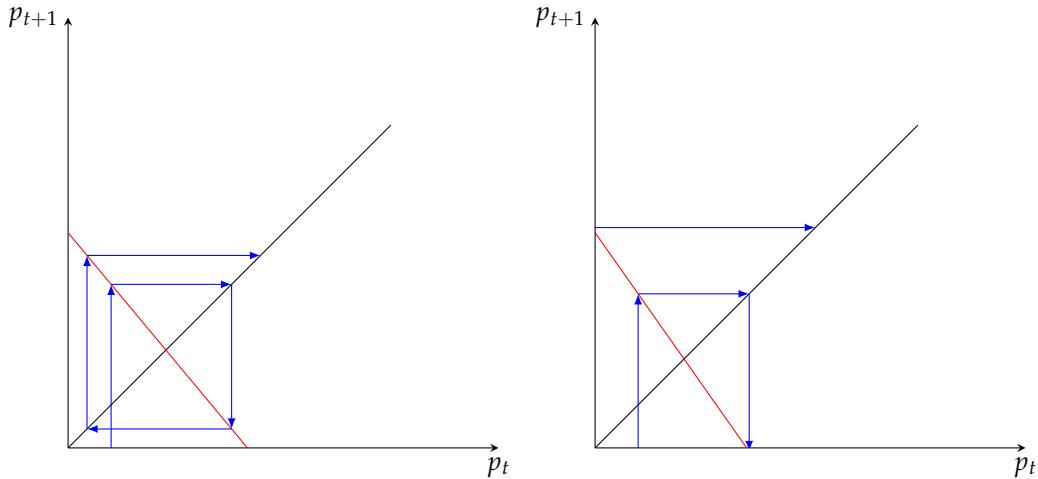


FIGURA 14.4.3 – MODELO COBWEB: COMPORTAMENTO EXPLOSIVO ( $\beta = 1$  e  $\gamma = 1.2$ ;  $\beta = 1.2$  e  $\gamma = 1.7$ )



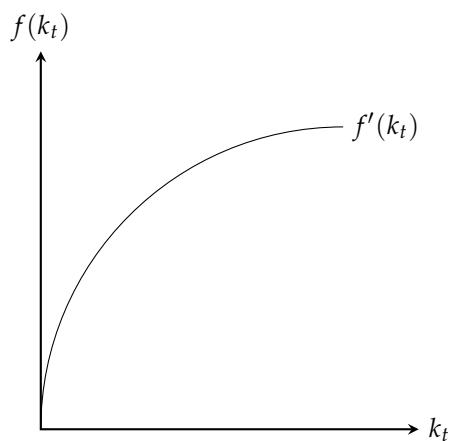
#### 14.4.2 O Modelo de Solow

O comportamento local de equações em diferenças não-lineares pode ser estudado linearizando-se a equação em diferença em torno do estado estacionário e aplicando o Teorema visto acima. Vamos exemplificar esta técnica estudando o famoso modelo de crescimento de Solow. Uma versão simples deste modelo descreve uma economia fechada sem progresso técnico. A produção no período  $t$ , denotada por  $Y_t$ , é produzida com dois fatores essenciais de produção: capital,  $K_t$ , e trabalho,  $L_t$ . As possibilidades de produção desta economia no período  $t$  são descritas por uma função de produção neoclássica  $Y_t = F(K_t, L_t)$ . Esta função de produção é definida no ortante não negativo do  $\mathbb{R}^2$ .

Vamos supor as seguintes propriedades acerca da função de produção:

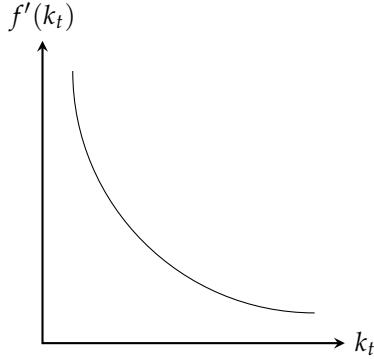
1.  $f(k_t)$  é estritamente côncava:  $f'(k_t) = PMgK > 0$  e  $f''(k_t) < 0$ .

FIGURA 14.4.4 – FUNÇÃO DE PRODUÇÃO COM RETORNOS MARGINAIS DECRESCENTES



2. Condições de Inada:  $\lim_{k_t \rightarrow 0} f'(0) = \infty$  e  $\lim_{k_t \rightarrow \infty} f'(\infty) = 0$ .

FIGURA 14.4.5 – CONDIÇÕES DE INADA



As condições de Inada geralmente não estão listadas entre as propriedades de uma função de produção neoclássica, no entanto, elas se tornam necessárias para garantir um estado estacionário estritamente positivo. O exemplo clássico para uma função de produção com essas propriedades é a função de produção de Cobb-Douglas:  $F(K, L) = AK^{(1-\alpha)}L^\alpha$ ,  $A > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

3. Indispensabilidade dos fatores:  $f(0) = 0$ , i.e.,  $k_0 > 0 \implies K_0 > 0$  e  $N_0 > 0$ .

A indispensabilidade de fatores pode ser obtida dentre outras formas pelas condições de Inada.

A economia poupa uma fração constante do produto,  $s \in (0, 1)$ . Como a poupança é igual ao investimento em uma economia fechada,

$$I_t = sY_t. \quad (14.4.7)$$

O investimento é computado como segue:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t = (1 - \delta)K_t + sY_t = (1 - \delta)K_t + sF(K_t, L_t). \quad (14.4.8)$$

Assumimos que o trabalho é um fator fixo de produção que cresce a uma taxa exógena  $\mu > 0$ :

$$L_{t+1} = (1 + \mu)L_t, \quad \mu > 0. \quad (14.4.9)$$

Começando no período o com algum capital positivo  $K_0 > 0$ , o sistema que consiste nas duas equações em diferenças acima, capital e trabalho, descreve completamente a evolução da

economia ao longo do tempo. Uma primeira inspeção das duas equações revela imediatamente que tanto o trabalho quanto o capital tendem ao infinito. De fato, como o trabalho cresce sem limite, a produção também cresce sem limite. Isso não é muito revelador se alguém está procurando estados estacionários estáveis e está interessado em uma análise de estabilidade. Em tal situação, muitas vezes é aconselhável olhar para a relação entre as duas variáveis, no nosso caso em  $\frac{K}{L}$ . Isto tem duas vantagens principais. Primeiro, a dimensão do sistema é reduzida a uma e, mais importante, a singularidade no infinito é, pelo menos no caso linear, eliminada. Segundo, essas proporções frequentemente têm um significado econômico claro, tornando a sua interpretação mais compreensível.

Assim, a equação sobre a dinâmica do capital pode ser vista como:

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{(1-\delta)K_t + sF(K_t, L_t)}{(1+\mu)L_t} = \frac{(1-\delta)}{1+\mu}k_t + \frac{s}{1+\mu}f(k_t) = g(k_t), \quad (14.4.10)$$

em que  $k_t = \frac{K_t}{L_t}$  é conhecida como intensidade do capital e  $f(k_t) = \left(\frac{K_t}{L_t}, 1\right)$ .

A economia começa no período zero com uma intensidade de capital inicial  $k_0 > 0$ . A equação em diferença de primeira ordem não linear acima juntamente com a condição inicial determina unicamente a evolução da intensidade de capital ao longo do tempo e consequentemente de todas as outras variáveis no modelo. Note que a concavidade de  $F$  é herdada por  $f$  e, portanto, por  $g$ , de modo que tenhamos  $g' > 0$  e  $g'' < 0$ . Além disso,  $\lim_{k \rightarrow 0} g(k) = 0$  e  $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) = \infty$ .

Dadas as suposições do modelo de Solow, a equação fundamental de Solow tem dois estados estacionários,  $k^* = 0$  e  $k^* > 0$ . Este *steady-state* deve satisfazer a seguinte equação não-linear:

$$k^* = g(k^*). \quad (14.4.11)$$

Isto implica que

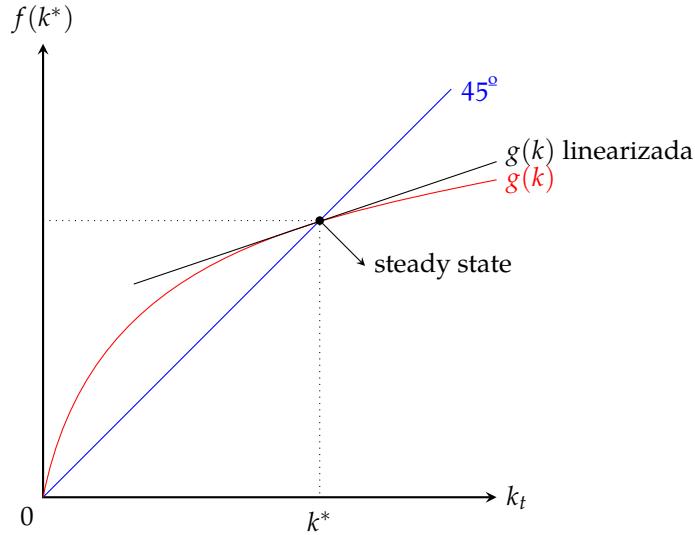
$$k^* = \frac{s}{\delta + \mu}f(k^*). \quad (14.4.12)$$

Como  $f(0) = 0$ ,  $k^* = 0$  é um estado estacionário. Na Figura abaixo fica claro que as condições de Inada garantem a existência de um estado estacionário estritamente positivo e único com  $k^* > 0$ . Em particular, as propriedades  $g(0) = 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow 0} g'(k) = \infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} g'(k) = \frac{1-\delta}{1+\mu} < 1$  e  $g'(k) > 0$  asseguram que a função  $g$  seja suficientemente íngreme na origem e se torne plana o suficiente para cruzar a linha de  $45^\circ$  uma única vez acima.

O estado estacionário  $k^* = 0$  não tem significado econômico. A estabilidade assintótica de  $k^* > 0$  é facilmente estabelecida observando-se que  $k_t$  é monotonicamente crescente em  $k_0 \in (0, k^*)$  e monotonicamente decrescente para  $k_0 > k^*$ . Assim,  $k_t$  converge monotonicamente para  $k^*$  independentemente do valor inicial  $k_0 > 0$ . Isso mostra que  $k^* > 0$  é um equilíbrio atrator. A monotonicidade também implica estabilidade porque para todos os valores de  $\varepsilon > 0$ , tomando

$\delta_\varepsilon = \varepsilon$ , temos que  $|k_0 - k^*| < \delta_\varepsilon$  implica  $|k_t - k^*| < \varepsilon$  para todo  $t \leq t_0$ . Assim,  $k^* > 0$  é estável e, portanto, assintoticamente estável.

FIGURA 14.4.6 – INTENSIDADE DO CAPITAL NO MODELO DE SOLOW



Para vermos isso, vamos linearizar a nossa equação que descreve a dinâmica dessa economia em torno do *steady-state* ( $k^* > 0$ ):

$$k_{t+1} = \frac{K_{t+1}}{L_{t+1}} = \frac{(1-\delta)K_t + sF(K, L)}{(1+\mu)L_t} = \frac{(1-\delta)}{1+\mu}k_t + \frac{s}{1+\mu}f(k_t) = g(k_t). \quad (14.4.13)$$

Isto é, seja a aproximação de Taylor de primeira ordem:

$$k_{t+1} \approx k^* + \left. \frac{\partial g(k)}{\partial k} \right|_{k=k^*} (k_t - k^*). \quad (14.4.14)$$

Podemos, portanto, estudar o comportamento local da equação em diferença não linear ao redor do estado estacionário  $k^* > 0$  investigando as propriedades da equação em diferença linear homogênea de primeira ordem:

$$k_{t+1} - k^* = \phi(k_t - k^*), \quad (14.4.15)$$

em que  $0 < \phi = \left. \frac{\partial g(k)}{\partial k} \right|_{k=k^*} < 1$ . Vamos entender porque isso ocorre. Note que  $g'(k) > 0$  para todo  $k > 0$ . A concavidade de  $g$  implica que  $g(k) - k^* \leq g'(k^*)(k - k^*)$  para todo  $k > 0$ . Tome  $k < k^*$ . Então,  $g(k) > k$ . Portanto,  $g(k) - k^* \leq g'(k^*)(k - k^*) < 0$ , então  $g'(k^*) < 1$ .

A solução do problema é

$$k_t = k^* + \phi^t(k_0 - k^*). \quad (14.4.16)$$

Como  $0 < \phi < 1$ , o *steady-state* é assintoticamente estável.

### 14.4.3 O Modelo de Hiperinflação de Cagan

Em períodos de hiperinflação, o nível de preços aumenta em mais de 50% ao mês. Como esses períodos costumam ser bastante curtos, eles podem servir como um laboratório para o estudo da relação entre a oferta de moeda e o nível de preços, porque outros fatores, como mudanças na produção real, podem ser ignorados. O modelo também serve para ilustrar as implicações dos mecanismos de expectativas alternativas, em particular a diferença entre expectativas adaptativas e racionais. Denotando por  $m_t$  logaritmo do estoque monetário no período  $t$  e por  $p_t$  o logaritmo do nível de preços no período  $t$ , o primeiro modelo proposto por Cagan (1956) consiste nas três equações abaixo:

$$m_t^d - p_t = \alpha(p_{t+1}^e - p_t), \quad \alpha < 0, \quad (\text{demanda por moeda}) \quad (14.4.17)$$

$$m_t^s = m_t^d = m_t \quad (\text{oferta de moeda}) \quad (14.4.18)$$

$$p_{t+1}^e - p_t = \gamma(p_t - p_{t-1}) \quad (\text{expectativa adaptativa}) \quad (14.4.19)$$

A primeira equação é uma equação de demanda por moeda na forma logarítmica. Relaciona a demanda registrada do estoque de moeda real,  $m_t^d - p_t$ , à taxa de inflação esperada a prevalecer no período  $t + 1$ ,  $p_{t+1}^e - p_t$ , onde o sobrescrito  $e$  representa a expectativa. Esta relação é negativa porque as famílias e as empresas querem manter menos dinheiro se esperam que o valor real do dinheiro se deteriore no próximo período devido às altas taxas de inflação. Assim,  $\alpha < 0$ . Neste modelo, o banco central controla perfeitamente o estoque de moeda e o define independentemente do nível de preço. O modelo trata o logaritmo da oferta do estoque monetário,  $m_t^s$ , como exógeno. O estoque de moeda injetado na economia é completamente absorvido pela economia, de modo que, em cada ponto no tempo, a oferta de moeda é igual à demanda por moeda. Combinando as duas primeiras equações, isto é, substituindo  $m_t^d$  por  $m_t$  na primeira equação, leva a uma condição de equilíbrio do portfólio. Como veremos, o comportamento do modelo depende crucialmente do modo como as expectativas são formadas. Seguindo a contribuição original da Cagan, postulamos que as expectativas são formadas de forma adaptativa, ou seja, os agentes formam suas expectativas extrapolando a inflação passada. A terceira equação postula um esquema de formação de expectativa adaptativa muito simples: a inflação esperada a prevalecer no próximo período é apenas proporcional à inflação atual. Desse modo, o fator de proporcionalidade  $\gamma$  é considerado positivo, o que significa que a inflação esperada aumenta se a inflação atual aumentar. Combinando todas as três equações do modelo e resolvendo para  $p_t$ , chegamos à seguinte equação em diferença de primeira ordem linear não homogênea:

$$p_t = \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} p_{t-1} + \frac{1}{1+\alpha\gamma} m_t = \phi p_{t-1} + Z_t. \quad (14.4.20)$$

De nossa discussão anterior, sabemos que a solução geral desta equação em diferença é dada como a soma da solução geral para a equação homogênea e uma solução particular,  $p_t^{(p)}$ , para a equação não homogênea:

$$p_t = \phi^t c + p_t^{(p)}. \quad (14.4.21)$$

Resolvendo recursivamente,

$$\begin{aligned} p_1 &= \phi p_0 + Z_1 \\ p_2 &= \phi p_1 + Z_2 \\ &\vdots \\ p_t &= \phi^t p_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i Z_{t-i}. \end{aligned} \quad (14.4.22)$$

Isso é novamente uma ilustração do princípio da superposição. O preço registrado no período  $t$ ,  $p_t$ , é apenas a soma de dois componentes. O primeiro é uma função de  $p_0$ , enquanto o segundo é uma soma ponderada do estoque de moeda defasado. Em economia não há um período de partida natural para que se possa continuar a equação acima. Assim, vamos ao infinito:

$$p_t = \lim_{i \rightarrow \infty} \phi^i p_{t-i} + \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i Z_{t-i}. \quad (14.4.23)$$

De um ponto de vista matemático, essa expressão só faz sentido se o limite da soma infinita existir. Assim, suposições adicionais são necessárias. Suponha que o estoque de moeda permaneça constante, ou seja,  $m_t = m < \infty$  para todo  $t$ , então a lógica do modelo sugere que o nível de preço registrado também deve permanecer finito. Em termos matemáticos, isso significa que  $\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i$  deveria convergir. No entanto, uma soma geométrica converge se e somente se:

$$|\phi| = \left| \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right| < 1. \quad (14.4.24)$$

Assumindo que esta condição de estabilidade é válida, a solução geral da equação em diferença implícita no modelo Cagan é:

$$p_t = \phi^t c + \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i Z_{t-i}, \quad (14.4.25)$$

em que a constante  $c$  pode ser calculada a partir de uma condição de valor inicial. Tal condição inicial surge naturalmente porque a formação de expectativas adaptativas requer o conhecimento do preço do período anterior que pode então servir como uma condição inicial.

A condição de estabilidade, portanto, tem consequências importantes. Primeiro, independentemente do valor de  $c$ , o primeiro termo da solução (a solução geral para a equação homogênea),  $\phi^t c$ , torna-se cada vez menos importante à medida que o tempo passa. Assim, para um  $t$  grande o suficiente, o nível de preço registrado será dominado pela solução particular para a equação não homogênea,  $\sum_{i=0}^{\infty} \phi^i Z_{t-i}$ . Segundo, nesta soma infinita, os valores mais recentes do estoque de moeda são mais importantes para a determinação do nível de preços. A importância do estoque de moeda no passado diminui à medida que se volta ao passado. Terceiro, suponha que o estoque monetário seja aumentado em um ponto percentual constante,  $\Delta m$ , em cada período, então o efeito no nível de preço registrado,  $\Delta p_t$  é dado por:

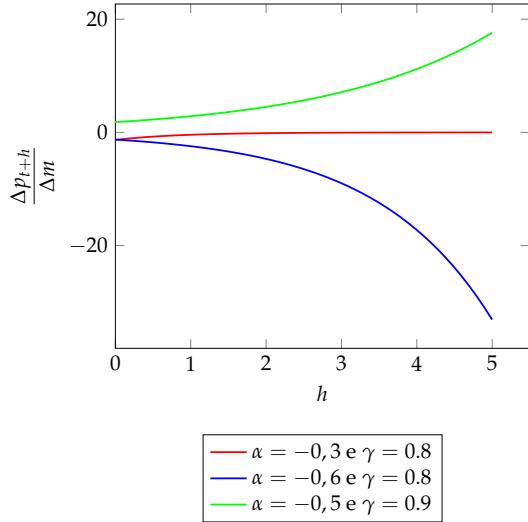
$$\Delta p_t = \sum_{i=0}^{\infty} \phi^i \left( \frac{1}{1+\alpha\gamma} \Delta m \right) = \frac{1}{1-\phi} \frac{1}{1+\alpha\gamma} \Delta m = \Delta m. \quad (14.4.26)$$

Assim, o nível de preços muda na mesma proporção que muda o estoque monetário. Tal mudança é denominada uma mudança permanente. Em contraste, uma mudança transitória é uma mudança que ocorre apenas uma vez. O efeito de uma mudança transitória de  $m_t$  por  $\Delta m$  no período  $t$  sobre o nível de preço registrado no período  $t+h$  para algum  $h \geq 0$  é dado por:

$$\Delta p_{t+h} = \phi^h \frac{1}{1+\alpha\gamma} \Delta m = \left( \frac{\alpha\gamma}{1+\alpha\gamma} \right)^h \frac{1}{1+\alpha\gamma} \Delta m. \quad (14.4.27)$$

O valor  $\frac{\Delta p_{t+h}}{\Delta m}$  é chamada de função impulso resposta. Ele dá a reação do nível de preço registrado ao longo do tempo a uma mudança transitória do estoque monetário.

FIGURA 14.4.7 – FUNÇÃO DE IMPULSO RESPOSTA COM EXPECTATIVAS ADAPTATIVAS



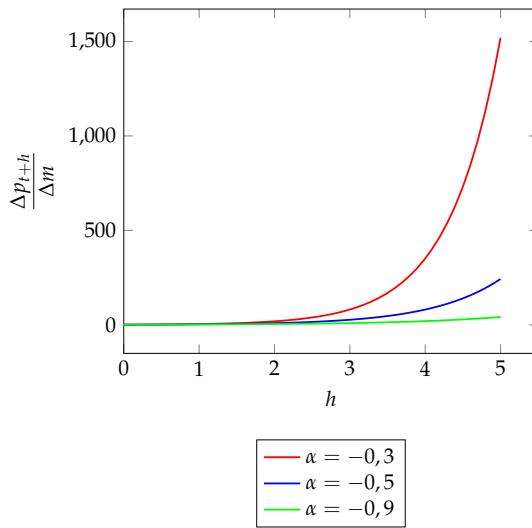
Agora, se assumirmos expectativas racionais, a terceira equação do modelo é substituída por:

$$p_{t+1}^e = p_{t+1}. \quad (14.4.28)$$

Com isso, a nova equação em diferença torna-se:

$$p_{t+1} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} p_t + \frac{1}{\alpha} m_t = \phi p_t + Z_t. \quad (14.4.29)$$

FIGURA 14.4.8 – FUNÇÃO DE IMPULSO RESPOSTA COM EXPECTATIVAS RACIONAIS



Como  $\frac{\alpha - 1}{\alpha} > 1$ , a condição de estabilidade é violada. Pode-se, no entanto, encontrar uma solução particular significativa da equação não homogênea, iterando a equação para frente no tempo, em vez de para trás.

Assim, a solução geral da equação em diferença não-homogênea é dada por:

$$p_t = \phi^t c - \phi^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \phi^{-i} Z_{t+i}. \quad (14.4.30)$$

Devido ao termo  $\phi^t c$ , o nível de preço registrado cresce exponencialmente sem limite, embora se possa esperar que o estoque monetário permaneça limitado, a menos que  $c = 0$ . Assim, definir  $c = 0$  ou equivalentemente  $p_0 = p_0^{(p)}$  garante um equilíbrio não-explosivo sob expectativas racionais.

Das duas versões do modelo decorre que sob expectativas adaptativas é necessária uma condição inicial para determinar o nível de preços; sob expectativas racionais, o nível de preços é determinado sem a necessidade de condição inicial.

## 14.5 Equações em Diferenças de Ordem p

Com o objetivo de encontrar a solução geral da equação homogênea, imaginamos que ela será da mesma forma que no caso de primeira ordem, ou seja, da forma  $c\lambda^t$ ,  $c \neq 0$ . Assim, podemos escrever:

$$c\lambda^t = \phi_1 c\lambda^{t-1} + \phi_2 c\lambda^{t-2} + \dots + \phi_p c\lambda^{t-p}, \quad (14.5.1)$$

que depois de pôr  $c$  em evidência, dividir por  $\lambda^t$  em ambos os lados, substituir  $\frac{1}{\lambda}$  por  $z$  e reorganizar os termos nos dá:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \dots - \phi_p z^p = 0. \quad (14.5.2)$$

Essa equação é chamada de equação característica da equação homogênea. Assim, para que  $c\lambda^t$  seja uma solução para a equação homogênea,  $z = \frac{1}{\lambda}$  deve ser uma raiz para a equação característica. Essas raízes são chamadas de raízes características. Note que a suposição  $\phi_p \neq 0$  implica que nenhuma das raízes características é igual a zero.

A partir do Teorema Fundamental da Álgebra, sabemos que existem  $p$  raízes, possivelmente complexas, na equação característica. Denote essas raízes por  $z_1, \dots, z_p$  e seus correspondentes  $\lambda$ 's por  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ .

### 1. Raízes Distintas

Se todas as raízes da equação característica forem distintas, o conjunto  $\{\lambda_1^t, \dots, \lambda_p^t\}$  forma um conjunto fundamental de soluções. Portanto, implica que a solução geral para a equação homogênea  $X_t^{(g)}$  é dada por:

$$X_t^{(g)} = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t + \dots + c_p \lambda_p^t. \quad (14.5.3)$$

## 2. Raízes Múltiplas

Quando as raízes da equação característica não são distintas, a situação se torna mais complicada. Denote as  $r$  raízes distintas por  $z_1, \dots, z_r$ ,  $r < p$ , e suas multiplicidades correspondentes por  $m_1, \dots, m_r$ . Escreva a equação em diferença homogênea em termos do operador defasagem, tal que:

$$(1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p) X_t = (1 - \lambda_1 L)^{m_1} (1 - \lambda_2 L)^{m_2} \dots (1 - \lambda_r L)^{m_r} X_t = 0, \quad (14.5.4)$$

em que  $\lambda_i, 1 \leq i \leq r$ , é igual a  $\frac{1}{z_i}$ .

A solução geral pode ser escrita como:

$$X_t = \sum_{i=1}^r (c_{i0} + c_{i1} t + c_{i2} t^2 + \dots + c_{i,m_i-1} t^{m_i-1}) \lambda_i^t. \quad (14.5.5)$$

Sem perda de generalidade, para uma equação em diferença não-homogênea de ordem  $p$ , temos a seguinte solução:

$$X_t = X_t^{(g)} + X_t^{(p)} \quad (14.5.6)$$

Vamos ver exemplos a frente para este caso ficar mais claro.

### 14.5.1 Comportamento Limite das Soluções

Antes de analisar exemplos concretos, nos voltamos para o comportamento qualitativo das soluções. Em particular, exploraremos as propriedades de estabilidade dos estados estacionários e o comportamento limite das soluções, ou seja, o comportamento quando o tempo passa para o infinito. A análise pode ser reduzida à discussão de equações homogêneas de segunda ordem:

$$X_t - \phi_1 X_{t-1} - \phi_2 X_{t-2} = 0. \quad (14.5.7)$$

Equações de ordem mais alta não adicionarão novos recursos qualitativos. Assumindo que  $1 - \phi_1 - \phi_2 \neq 0$ , o único ponto fixo desta equação homogênea é zero. A correspondente equação característica é dada por:

$$1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 = 0. \quad (14.5.8)$$

A solução desta equação é:

$$z_{1,2} = \frac{-\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2\phi_2}. \quad (14.5.9)$$

Ou em termos de  $\lambda = \frac{1}{z}$ :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\phi_1 \pm \sqrt{\phi_1^2 + 4\phi_2}}{2}. \quad (14.5.10)$$

Para entendermos o comportamento qualitativo de  $X_t$ , distinguimos três casos:

1. Raízes reais e distintas

A solução geral é dada por:

$$X_t = c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t = \lambda_1^t \left[ c_1 + c_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \right]. \quad (14.5.11)$$

Suponha sem perda de generalidade que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ . Então,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^t \rightarrow 0$ . Isto significa que o comportamento de  $X_t$  é assintoticamente governado pela maior raiz  $\lambda_1$ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = \lim_{t \rightarrow \infty} c_1 \lambda_1^t. \quad (14.5.12)$$

Dependendo do valor de  $\lambda_1$ , seis diferentes casos emergem:

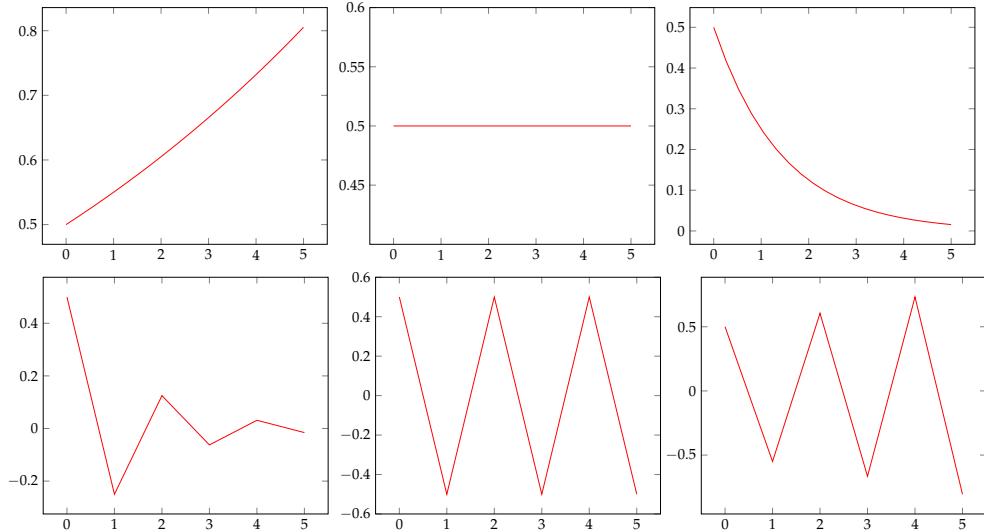
- (a)  $\lambda_1 > 1$ :  $c_1 \lambda_1^t$  diverge para o infinito quando  $t \rightarrow \infty$ . O ponto fixo é instável.
- (b)  $\lambda_1 = 1$ :  $c_1 \lambda_1^t$  permanece constante e  $X_t$  tende a  $c_1$  assintoticamente.
- (c)  $0 < \lambda_1 < 1$ :  $c_1 \lambda_1^t$  decresce monotonicamente para zero. Zero é um ponto fixo estável assintoticamente.
- (d)  $-1 < \lambda_1 < 0$ :  $c_1 \lambda_1^t$  oscila em torno de zero alternando o sinal, mas converge para zero. Zero é um ponto fixo estável assintoticamente.

(e)  $\lambda_1 = -1$ :  $c_1 \lambda_1^t$  alterna entre os valores de  $c_1$  e  $-c_1$ . Portanto, a sequência  $\{X_t\}$  tem dois pontos de acumulação:  $c_1$  e  $-c_1$ .

(f)  $\lambda_1 < -1$ :  $c_1 \lambda_1^t$  alterna de sinal, mas diverge e tende a infinito. O ponto fixo é instável.

A Figura abaixo apresenta a trajetória de  $X_t$  para os seis casos.

FIGURA 14.5.1 – COMPORTAMENTO DE  $X_t = c\lambda_1^t$



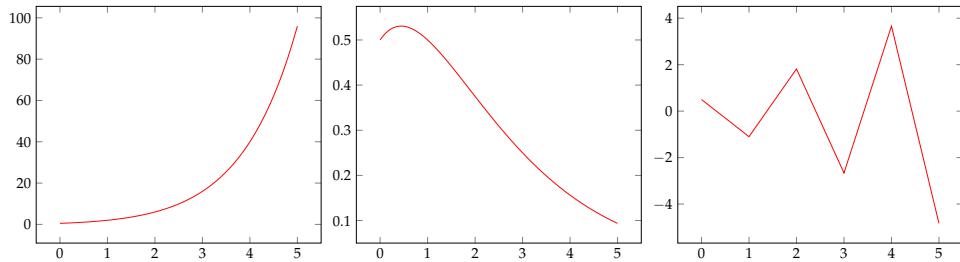
## 2. Raízes iguais

A solução geral é dada por:

$$(c_1 + c_2 t) \lambda^t. \quad (14.5.13)$$

Claramente, se  $\lambda \geq 1$ ,  $X_t$  diverge monotonicamente; se  $\lambda \leq -1$  diverge alternando sinais. Para  $|\lambda| < 1$ , a solução converge para zero, uma vez que  $\lim_{t \rightarrow \infty} t \lambda^t = 0$ .

FIGURA 14.5.2 – COMPORTAMENTO DE  $(c_1 + c_2 t) \lambda^t$



## 3. Raízes complexas

As duas raízes aparecem como um par conjugado e podem ser escritas como  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  com  $\beta \neq 0$ . Em termos de coordenadas polares, elas podem ser escritas alternativamente como  $\lambda_1 = re^{i\theta}$  e  $\lambda_2 = re^{-i\theta}$ , em que  $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  e  $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ . A solução é dada por:

$$\begin{aligned}
 X_t &= c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t \\
 &= c_1 (\alpha + i\beta)^t + c_2 (\alpha - i\beta)^t \\
 &= c_1 r^t e^{i\theta t} + c_2 r^t e^{-i\theta t} \\
 &= r^t [c_1 (\cos(\theta t) + i \sin(\theta t)) + c_2 (\cos(\theta t) - i \sin(\theta t))] \\
 &= r^t [(c_1 + c_2) \cos(\theta t) + i(c_1 - c_2) \sin(\theta t)]. \tag{14.5.14}
 \end{aligned}$$

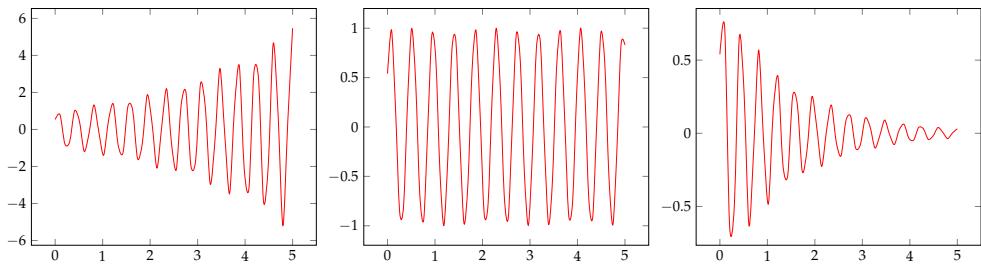
Uma vez que  $X_t$  deve ser um número real,  $c_1 + c_2$  deve ser um real, enquanto  $c_1 - c_2$  deve ser puramente imaginário. Isto implica que  $c_1$  e  $c_2$  devem ser um complexo conjugado. A solução também pode ser escrita usando o fato de que  $c_1 = \rho e^{i\omega}$  e  $c_2 = \rho e^{-i\omega}$  para algum  $\rho$  e  $\omega$ , isto é, usando coordenadas polares e equação de Euler. Inserindo isto na solução, encontramos:

$$\begin{aligned}
 X_t &= \rho r^t [e^{i(\theta t + \omega)} + e^{-i(\theta t + \omega)}] \\
 &= 2\rho r^t \cos(\theta t + \omega). \tag{14.5.15}
 \end{aligned}$$

A solução, portanto, oscila claramente porque a função cosseno oscila. Dependendo da localização das raízes conjugadas, três casos devem ser distinguidos:

- (a)  $r > 1$ : ambas as raízes estão fora do círculo unitário (isto é, o círculo do raio um e centrado no ponto  $(0, 0)$ ).  $X_t$  oscila, mas com amplitude cada vez maior. O ponto fixo zero é instável.
- (b)  $r = 1$ : ambas as raízes estão no círculo unitário.  $X_t$  oscila, mas com amplitude constante.
- (c)  $r < 1$ : ambas as raízes estão dentro do círculo unitário. A solução oscila, mas com amplitude diminuindo monotonicamente e converge para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . O ponto fixo zero é assintoticamente estável.

FIGURA 14.5.3 – COMPORTAMENTO DE  $(c_1 \lambda_1^t + c_2 \lambda_2^t)$



Podemos resumir tudo o que vimos até agora dentro do seguinte teorema.

**Teorema 14.5.1.** *Para equações em diferenças homogêneas e lineares de segunda ordem, temos que:*

1. *Todas as soluções oscilam em torno de zero se e somente se a equação não possui raízes reais positivas.*
2. *Todas as soluções convergem para zero se e somente se  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ .*

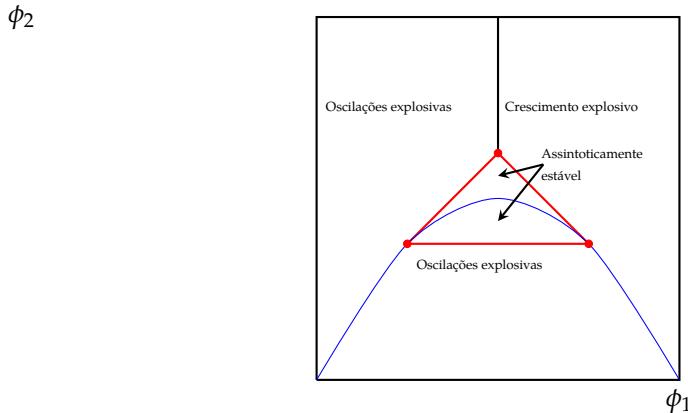
Podemos analisar a estabilidade da equação em diferença de segunda ordem por meio dos parâmetros originais. Para tanto, seja o seguinte teorema:

**Teorema 14.5.2.** *O ponto de equilíbrio  $X^*$  é assintoticamente estável (ou seja, todas as soluções convergem para  $X^*$ ) se e somente se as três condições a seguir forem satisfeitas:*

1.  $1 - \phi_1 - \phi_2 > 0$
2.  $1 + \phi_1 - \phi_2 > 0$
3.  $1 + \phi_2 > 0$

As três condições listadas acima determinam um triângulo no plano  $\phi_1 \times \phi_2$  com vértices  $(-2, -1)$ ,  $(0, 1)$  e  $(2, -1)$ . Pontos dentro do triângulo implicam um comportamento assintoticamente estável, enquanto que pontos fora do triângulo levam a um comportamento instável. A parábola  $\phi_1^2 + 4\phi_2 = 0$  determina a região das raízes complexas. Valores de  $\phi_1$  e  $\phi_2$  acima da parábola levam a raízes reais, enquanto valores abaixo da parábola levam a raízes complexas. A situação é representada na Figura abaixo.

FIGURA 14.5.4 – PROPRIEDADES DE ESTABILIDADE



## 14.5.2 Aplicações

### Modelo Multiplicador-Acelerador

Um exemplo econômico clássico de uma equação em diferença de segunda ordem é o modelo multiplicador-acelerador originalmente proposto por Samuelson (1939). Ele foi projetado para demonstrar como a interação do multiplicador e do acelerador pode gerar ciclos de negócios.

O modelo é de uma economia fechada e consiste em uma função de consumo, uma função de investimento que incorpora a ideia do acelerador e a identidade da renda:

$$C_t = \alpha + \beta Y_{t-1}, \quad 0 < \beta < 1, \alpha > 0, \quad (\text{consumo}) \quad (14.5.16)$$

$$I_t = \gamma(Y_{t-1} - Y_{t-2}), \quad \gamma > 0, \quad (\text{investimento}) \quad (14.5.17)$$

$$Y_t = C_t + I_t + G_t \quad (\text{identidade da renda}) \quad (14.5.18)$$

em que  $C_t$ ,  $I_t$ ,  $Y_t$  e  $G_t$  denotam gastos de consumo privado, investimentos, renda e consumo do governo, respectivamente. O parâmetro  $\beta$  é chamado de propensão marginal a consumir e é fixado entre zero e um. Os demais parâmetros do modelo,  $\alpha$  e  $\gamma$ , não possuem nenhuma restrição além de terem que ser positivos. Inserir o consumo e o investimento na identidade de renda leva à seguinte equação em diferença de segunda ordem não homogênea:

$$Y_t = (\beta + \gamma)Y_{t-1} - \gamma Y_{t-2} + (\alpha + G_t). \quad (14.5.19)$$

Se os gastos do governo permanecerem constantes ao longo do tempo e iguais a  $G$ , o ponto de equilíbrio  $Y^*$  pode ser calculado da seguinte forma:

$$Y^* = (\beta + \gamma)Y^* - \gamma Y^* + (\alpha + G) \implies Y^* = \frac{\alpha + G}{1 - \beta}. \quad (14.5.20)$$

A estabilidade deste ponto de equilíbrio pode ser investigada verificando se as três condições do Teorema são satisfeitas:

1.  $1 - (\beta + \gamma) + \gamma = 1 - \beta > 0$
2.  $1 + (\beta + \gamma) + \gamma = 1 + \beta + 2\gamma > 0$
3.  $1 - \gamma > 0$

Dadas as suposições do modelo, as duas primeiras condições são automaticamente satisfeitas. A terceira condição, no entanto, só é válida se o acelerador não for muito forte, ou seja, se  $\gamma < 1$ . O estado estacionário  $Y^*$  é portanto assintoticamente estável se impusermos este requisito adicional.  $Y_t$  oscila em torno de seu estado estacionário se não houver nenhuma raiz inversa positiva real da equação característica. As raízes características são dadas por:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(\beta + \gamma) \pm \sqrt{(\beta + \gamma)^2 - 4\gamma}}{2}. \quad (14.5.21)$$

Se as raízes são reais, elas são estritamente positivas e estritamente menores que um. Assim,  $Y_t$  pode apenas oscilar em torno de seu estado estacionário se e somente se as raízes são complexas,

ou seja, se  $(\beta + \gamma)^2 - 4\gamma < 0$ . Se elas são complexas, seus módulos são estritamente menores que um.

No caso geral em que os gastos do governo não são constantes, mas variam com o tempo, aplicamos o método dos coeficientes indeterminados para encontrar uma solução particular,  $Y_t^{(p)}$ . Esse método conjectura um certo tipo de solução e, em seguida, tenta fixar uma solução inserindo-a na equação em diferença. No caso particular em questão, as raízes da função característica estão todas fora do círculo unitário. Assim, conjecturamos uma solução particular da forma:

$$Y_t^{(p)} = c + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i G_{t-i}. \quad (14.5.22)$$

Os coeficientes  $\psi$  são chamados de impulso resposta ou multiplicadores dinâmicos. Eles traçam o efeito no produto de um impulso (estímulo) nos gastos do governo ao longo do tempo. Assim, um impulso unitário é especificado como  $\Delta G_t = 1$  e  $\Delta G_{t-i} = 0$  para  $i \neq 0$ . O efeito sobre o produto é então:

$$\Delta Y_{t+h}^{(p)} = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i \Delta G_{t+h-i} = \psi_h \Delta G_t = \psi_h, \quad h = 0, 1, 2, \dots \quad (14.5.23)$$

Inserindo essa solução específica na equação em diferença, temos que:

$$c + \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i G_{t-i} = c(\beta + \gamma) + (\beta + \gamma) \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i G_{t-1-i} - c\gamma - \gamma \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i G_{t-2-i} + \alpha + G_t. \quad (14.5.24)$$

Os termos constantes levam a uma equação para  $c$ :

$$c(1 - (\beta + \gamma) + \gamma) = \alpha \implies c = \frac{\alpha}{1 - \beta} > \alpha > 0. \quad (14.5.25)$$

Da mesma forma para o componente dinâmico:

$$\psi_j = (\beta + \gamma)\psi_{j-1} - \gamma\psi_{j-2}, \quad j \geq 2 \quad (14.5.26)$$

Assim, os coeficientes  $\psi_j, j \geq 2$ , seguem a mesma equação homogênea em diferença de segunda ordem com valores iniciais  $\psi_0 = 1$  e  $\psi_1 = \beta + \gamma$ . A solução pode, portanto, ser escrita como:

$$\psi_j = d_1 \lambda_1^j + d_2 \lambda_2^j. \quad (14.5.27)$$

Os coeficientes  $d_1$  e  $d_2$  podem então ser determinados a partir das condições iniciais:

$$\psi_0 = 1 = d_1 + d_2, \quad (14.5.28)$$

$$\psi_1 = \beta + \gamma = d_1\lambda_1 + d_2\lambda_2. \quad (14.5.29)$$

Samuelson demonstrou que existem vários tipos de trajetória para a renda nacional a serem derivadas desta equação em diferença linear de segunda ordem. Este caminho-solução altera sua forma, dependendo dos valores das raízes da equação ou das relações entre o parâmetro  $\alpha$  e  $\beta$ .

### **Modelo de Taylor de Ajustamento de Salários**

Neste exemplo, analisamos uma versão determinística simples do modelo de negociação salarial proposto por Taylor (1980) e Ashenfelter e Card (1982). Nesse modelo, em cada período, metade dos salários são renegociados, de tal forma que os salários são definidos de acordo com a seguinte regra:

$$w_t = 0.5w_{t-1} + 0.5w_{t+1} + h(y_t + y_{t+1}), \quad h > 0. \quad (14.5.30)$$

Assim, a fixação dos salários no período  $t$  leva em conta os salários dos contratos ainda em vigor,  $w_{t-1}$ , e o contrato salarial esperado no próximo período,  $w_{t+1}$ . Além disso, os salários dependem do estado da economia ao longo da duração do contrato, aqui representados pela média da demanda agregada no período atual e no próximo período. O salário agregado no período  $t$ ,  $W_t$ , é então simplesmente a média de todos os salários de contratos individuais existentes em vigor no período  $t$ :

$$W_t = \frac{1}{2}(w_t + w_{t-1}). \quad (14.5.31)$$

O modelo é fechado pela adição de uma equação de demanda agregada teórica relacionando  $W_t$  e  $y_t$ :

$$y_t = \gamma W_t + v_t, \quad \gamma < 0. \quad (14.5.32)$$

O sinal negativo de  $\gamma$  reflete o fato de que, na ausência de acomodação total pela autoridade monetária, maiores salários nominais médios reduzem a demanda agregada.  $v_t$  representa um choque na demanda agregada.

Combinando as equações, obtemos uma equação em diferença linear de segunda ordem:

$$(1 + h\gamma)w_{t+1} - 2(1 - h\gamma)w_t + (1 + h\gamma)w_{t-1} = -2h(v_t + v_{t+1}), \quad (14.5.33)$$

ou

$$w_{t+1} - \phi w_t + w_{t-1} = Z_t, \quad (14.5.34)$$

$$\text{com } \phi = 2 \frac{(1-h\gamma)}{(1+h\gamma)} \text{ e } Z_t = -\frac{2h}{(1+h\gamma)} (v_t + v_{t+1}).$$

A equação característica desta equação em diferença é:

$$1 - \phi z + z^2 = 0. \quad (14.5.35)$$

A natureza simétrica dos coeficientes polinomiais implica que as raízes aparecem em pares de tal forma que uma raiz é o inverso da outra. Isso significa que uma raiz, digamos  $\lambda_1$ , é menor que um enquanto que a outra é maior que um, ou seja,  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$ . Para ver isto note primeiro que o discriminante é igual a  $\Delta = h\gamma > 0$ . Assim, as raízes são reais. Segundo, que  $\lambda_1\lambda_2 = 1$ . Se denotarmos  $\lambda_1$  por  $\lambda$  então  $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda}$  e temos  $\phi = \lambda + \lambda^{-1}$ . Aplicando o princípio da superposição, a solução se torna

$$w_t = c_1 \lambda^t + c_2 \lambda^{-t} + w_t^{(p)}, \quad (14.5.36)$$

em que os coeficientes  $c_1$  e  $c_2$  e uma solução particular  $w_t^{(p)}$  ainda precisam ser determinados. A fim de eliminar as soluções explosivas, definimos  $c_2 = 0$ . A outra constante pode então ser determinada observando-se que  $w_t$  é uma variável predeterminada de modo que as negociações salariais no primeiro período levem os salários do outro grupo negociado no período zero. Assim,  $c_1 = w_0 - w_0^{(p)}$ . Para encontrar a solução específica, defina

$$w_t^{(p)} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Z_{t-j}, \quad (14.5.37)$$

e insira esta solução na solução e faça uma comparação de coeficientes como no exercício anterior. Isto leva novamente a duas equações em diferenças homogêneas para os coeficientes  $\psi_j$  e  $\psi_{-j}$ ,  $j \geq 1$ , com soluções

$$\psi_j = d_1 \lambda^j + d_2 \lambda^{-j} \quad (14.5.38)$$

$$\psi_{-j} = e_1 \lambda^j + e_2 \lambda^{-j}, \quad (14.5.39)$$

em que os coeficientes  $d_1, d_2, e_1$  e  $e_2$  ainda precisam ser determinados. A eliminação de sequências de coeficientes explosivos leva a  $d_2 = e_2 = 0$ . Além disso, ambas as soluções devem dar o mesmo  $\psi_0$  de modo que  $d_1 = e_1$ . Denote esse valor por  $d$ , comparando os coeficientes para  $Z_t$  e observando

que  $\phi = \lambda + \lambda^{-1}$  leva a:

$$\psi_1 = \phi\psi_0 - \psi_{-1} + 1 \iff d\lambda = \phi d - d\lambda + 1. \quad (14.5.40)$$

Portanto,

$$d = \frac{1}{\lambda - \lambda^{-1}} < 0. \quad (14.5.41)$$

O efeito de um choque na demanda agregada no período  $j \geq 0$  é então:

$$\frac{\partial w_{t+j}}{\partial v_t} = \psi_{-j} + \psi_{-j-1} = -\frac{2h}{1+h\gamma} d(1+\lambda)\lambda^j. \quad (14.5.42)$$

### Modelo Cobweb com Entrada de Firmas

Vamos adicionar uma expressão para a entrada de firmas. As equações que definem o modelo são:

$$Q_t^D = \beta_0 - \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t \quad (14.5.43)$$

$$Q_t^S = \alpha_0 + \alpha_1 P_{t-1} + \alpha_2 N_t \quad (14.5.44)$$

$$Q_T^D = Q_T^S \quad (14.5.45)$$

$$N_t = N_{t-1} + \gamma(P_t - P^c), \gamma > 0 \quad (14.5.46)$$

em que  $Q$  é a quantidade,  $P$  é o preço,  $Y$  é o nível de renda,  $N$  é o número de firmas dentro do mercado e  $P^c$  é um limiar de preços. No caso de um mercado perfeitamente competitivo, podemos pensar no preço crítico como sendo igual ao ponto mínimo na curva de custo médio das empresas. O termo  $\gamma$  é um coeficiente de velocidade de ajuste: quanto maior  $\gamma$ , mais empresas entram ou saem em resposta a um desvio do preço do último período do crítico nível.

Igualando oferta e demanda, temos:

$$\beta_0 - \beta_1 P_t + \beta_2 Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 P_{t-1} + \alpha_2 N_t \quad (14.5.47)$$

Agora temos duas equações em diferença: para  $P$  e  $N$ . Há uma forma de colapsar elas dentro de uma equação única.

Como assumimos o equilíbrio no curto prazo, a equação (14.5.47) é válida. Então, rearranjamos essa equação para  $N_t$  e chegamos a:

$$N_t = \left( \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_2} \right) - \left( \frac{\beta_1}{\alpha - 2} \right) P_t - \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) P_{t-1} + \left( \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) Y_t \quad (14.5.48)$$

Agora, defasando (14.5.48) um período chegamos a:

$$N_{t-1} = \left( \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_2} \right) - \left( \frac{\beta_1}{\alpha - 2} \right) P_{t-1} - \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) P_{t-2} + \left( \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) Y_{t-1} \quad (14.5.49)$$

Substituindo em (14.5.46), chegamos a:

$$N_t = \left( \frac{\beta_0 - \alpha_0}{\alpha_2} \right) - \left( \frac{\beta_1}{\alpha - 2} \right) P_{t-1} - \left( \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) P_{t-2} + \left( \frac{\beta_2}{\alpha_2} \right) Y_{t-1} + \gamma(P_t - P^c) \quad (14.5.50)$$

Rearranjamos os termos, obtemos:

$$P_t - \left( \frac{\beta_1 - \alpha_1 - \gamma\alpha_2}{\beta_1} \right) P_{t-1} - \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) P_{t-2} = \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) Y_t - \left( \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) Y_{t-1} + \left( \frac{\gamma\alpha_2}{\beta_1} \right) P^c \quad (14.5.51)$$

Observe que no lado direito da equação acima temos os termos em  $Y_t$  e  $Y_{t-1}$ . Isso não significa que temos uma equação de diferença em  $Y$ . Para ter uma equação de diferença em  $Y$ , teríamos que ter uma equação refletindo o mecanismo que liga os valores atuais aos passados de  $Y$ . A presença de  $Y_t$  e  $Y_{t-1}$  reflete o que é conhecido como efeito de ajuste defasado. Assumindo que a renda é constante ao longo do tempo (pelo menos no curto prazo), teríamos:

$$P_t - \left( \frac{\beta_1 - \alpha_1 - \gamma\alpha_2}{\beta_1} \right) P_{t-1} - \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) P_{t-2} = \left( \frac{\gamma\alpha_2}{\beta_1} \right) P^c \quad (14.5.52)$$

Uma vez que  $P^c$  é considerado constante (não há nenhuma mudança tecnológica ocorrendo, o que pode mudar a curva de custo médio das empresas), assumimos que o preço de equilíbrio,  $P^*$ , também é constante. Assim,

$$P^* = P^c \quad (14.5.53)$$

que diz que o preço de equilíbrio de longo prazo para o modelo é o preço crítico, o preço pelo qual o número de empresas permanece inalterado ao longo do tempo. Isso é, obviamente, consistente com a definição de equilíbrio de mercado de longo prazo na teoria microeconômica introdutória, e também confirma nossa afirmação de que as informações contidas na equação (14.5.46) não foram perdidas para o sistema no curso de nossas manipulações. Isso nos diz que se o preço atual não for igual a  $P^c$  o sistema não pode estar em equilíbrio, e dado que  $P^c$  só aparece na equação de entrada da empresa, isso deve ser porque quando o preço atual não é igual a  $P^c$ , novas empresas entrarão ou

os antigos irão embora, mudando a curva de oferta e fazendo com que o preço de equilíbrio mude.

A equação característica é

$$\lambda^2 - \left( \frac{\beta_1 - \alpha_1 - \gamma\alpha_2}{\beta_1} \right) \lambda - \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) = 0 \quad (14.5.54)$$

As condições de estabilidade (suficientes e necessárias) que precisamos são<sup>1</sup>:

$$1 - \left( \frac{\beta_1 - \alpha_1 - \gamma\alpha_2}{\beta_1} \right) - \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) > 0 \quad (14.5.55)$$

$$1 + \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) > 0 \quad (14.5.56)$$

$$1 + \left( \frac{\beta_1 - \alpha_1 - \gamma\alpha_2}{\beta_1} \right) - \left( \frac{\alpha_1}{\beta_1} \right) > 0 \quad (14.5.57)$$

A expressão  $\gamma \frac{\alpha_2}{\beta_1} > 0$  é claramente satisfeita. A expressão (14.5.56) também é válida por construção. Isso nos leva à equação (14.5.57), que pode ser reescrita como  $\beta_1 > \alpha_1 + \frac{\gamma\alpha_2}{2}$ . No modelo de teia de aranha original, a estabilidade exigia que a curva de demanda fosse mais íngreme do que (ou, se as variáveis estiverem em logs, mais elástica do que) a curva de oferta. No caso presente, isso não é suficiente: a curva de demanda deve ser ainda mais íngreme (ou mais elástica de preço) para compensar o deslocamento da curva de oferta devido à entrada de empresas.

Basicamente, um aumento em  $P$  no período  $t - 1$  tem dois efeitos no período  $t$ : faz com que as empresas existentes aumentem sua produção em um valor que é determinado pela inclinação da curva de oferta, o termo  $\alpha_1$ , e também faz com que novas empresas entrem no mercado. Assim, um aumento em  $P$  em  $t - 1$  tem um efeito duplo sobre a oferta no período  $t$ , ambos os efeitos tendendo a aumentar a quantidade de produção posta à venda no mercado. Consequentemente, condições mais rigorosas são colocadas na inclinação da curva de demanda.

Sem realmente avaliar as raízes da equação (14.5.54), então, podemos dizer que as raízes do sistema serão reais (portanto, não haverá oscilações de preço); que o sistema terá uma raiz positiva e uma negativa (portanto, haverá alternâncias de preço) e que a estabilidade do sistema depende da inclinação da curva de demanda em relação aos dois efeitos refletindo a resposta da oferta no período  $t$  às mudanças no preço no período  $t - 1$ .

### Modelo de Ciclo de Estoques

A importância dos estoques foi reconhecida há muito tempo e – embora o investimento em estoque seja um componente relativamente pequeno do PIB – a mudança do acúmulo de estoque para a liquidação é um fator crítico na propagação de reversões cíclicas na atividade econômica. A pesquisa teórica e empírica sobre os ciclos de estoque está acontecendo ativamente.

---

<sup>1</sup> Para uma equação em diferença de segunda ordem, as condições necessárias e suficientes para a estabilidade são:  $1 + \beta_1 + \beta_2 > 0$ ,  $1 - \beta_2 > 0$  e  $1 - \beta_1 + \beta_2 > 0$ .

Um dos modelos seminais para explicar os ciclos de estoque é o de Metzler (1941), que desempenhou o mesmo papel do modelo multiplicador-acelerador de Samuelson para investimento fixo.

Observemos que a produção corrente total é a soma da produção de bens de consumo e a produção de bens de investimento, sendo este último considerado exógeno. A produção de bens de consumo é composta por dois componentes:

1. produção a ser vendida atualmente, de acordo com as expectativas dos produtores sobre as vendas,  $U_t$ ;
2. produção para trazer os estoques ao nível desejado  $\hat{Q}_t$ .

O componente (2) pode, é claro, ser negativo, o que significa simplesmente que as empresas produzirão vendas abaixo do esperado, sendo a diferença prevista, em seus planos, pela redução desejada dos estoques.

Naturalmente, as expectativas podem estar erradas, ou seja, as vendas reais podem ser diferentes das vendas esperadas, a diferença implicando uma variação não intencional nos estoques. Observe que as vendas reais coincidem com a demanda de consumo atual  $C_t$ , que não é a mesma que a produção de bens de consumo, uma vez que no modelo de Metzler a produção e a demanda por bens de consumo podem ser diferentes.

Assim, reunindo essas informações, obtemos:

$$Y_t = U_t + (\hat{Q}_t - Q_{t-1}) + I_0 \quad (14.5.58)$$

Devemos agora especificar o estoque desejado de estoques, que é determinado assumindo que os produtores desejam manter uma razão  $\kappa$  constante entre estoques e vendas (o acelerador de estoque). Como as vendas reais serão conhecidas apenas ex post, os produtores aplicam essa proporção às vendas esperadas para calcular o nível desejado de estoques. Portanto

$$\hat{Q}_t = \kappa U_t \quad (14.5.59)$$

Para completar o modelo, temos que especificar as expectativas. Metzler considera várias formulações, entre as quais

$$U_t = C_{t-1} + \rho(C_{t-1} - C_{t-2}), \quad \rho > 0 \quad (14.5.60)$$

que relaciona as vendas esperadas às vendas realizadas de acordo com um mecanismo de extração. A demanda de consumo depende da renda atual, ou seja, não presume-se que exista nenhuma defasagem na função de consumo:

$$C_t = bY_t \quad (14.5.61)$$

Para reduzir o modelo a uma única equação de diferença em uma função desconhecida do tempo ( $Y_t$ ), observamos que em qualquer período  $t$  o nível de estoque real  $Q_t$  é igual ao nível que os produtores planejaram para aquele período, ou seja,  $\hat{Q}_t$ , menos a variação não intencional nos estoques (se houver) ocorrendo porque da diferença entre as vendas realizadas e as esperadas,  $C_t - U_t$ . Assim

$$Q_{t-1} = \hat{Q}_{t-1} - (C_{t-1} - U_{t-1}) = (1 + \kappa)U_{t-1} - C_{t-1} \quad (14.5.62)$$

Logo,

$$\begin{aligned} Y_t &= U_t + (\hat{Q}_t - Q_{t-1}) + I_0 \\ Y_t &= C_{t-1} + \rho(C_{t-1} - C_{t-2}) + [\kappa U_t - (1 + \kappa)U_{t-1} - C_{t-1}] + I_0 \\ Y_t &= C_{t-1} + \rho(C_{t-1} - C_{t-2}) + \{\kappa[C_{t-1} + \rho(C_{t-1} - C_{t-2})] - \\ &\quad + (1 + \kappa)[C_{t-2} + \rho(C_{t-2} - C_{t-3})] - C_{t-1}\} + I_0 \\ Y_t &= bY_{t-1} + \rho(bY_{t-1} - bY_{t-2}) + \{\kappa[bY_{t-1} + \rho(bY_{t-1} - bY_{t-2})] - \\ &\quad + (1 + \kappa)[bY_{t-2} + \rho(bY_{t-2} - bY_{t-3})] - bY_{t-1}\} + I_0 \\ Y_t - b[(1 + \kappa)(1 + \rho) + 1]Y_{t-1} + b(1 + \kappa)(1 + 2\rho)Y_{t-2} - (1 + \kappa)b\rho Y_{t-3} &= I_0 \end{aligned} \quad (14.5.63)$$

Uma solução particular é obtida fazendo-se  $\bar{Y}_t = \bar{Y}$ , uma constante, que resulta em

$$\bar{Y} = \frac{I_0}{1 - b} \quad (14.5.64)$$

que é o equilíbrio estacionário.

A correspondente equação homogênea é

$$\lambda^3 - b[(1 + \kappa)(1 + \rho) + 1]\lambda^2 + b(1 + \kappa)(1 + 2\rho)\lambda - (1 + \kappa)b\rho Y_{t-3} = 0 \quad (14.5.65)$$

Aplicando as condições de estabilidade para uma equação em diferenças de terceira ordem, temos:

$$1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 > 0$$

$$3 - \beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3 > 0$$

$$\begin{aligned}
1 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 &> 0 \\
3 + \beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3 &> 0 \\
(3 + \beta_1 - \beta_2 - 3\beta_3)(3 - \beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3) \\
- (1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3)(1 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3) &\equiv 8(-\beta_3^2 + \beta_1\beta_3 - \beta_2 + 1) > 0
\end{aligned} \tag{14.5.66}$$

A segunda ou quarta das condições acima pode ser eliminadas, dada que é uma delas é claramente redundante.

Uma outra possibilidade de condições de estabilidade (necessárias e suficientes) para uma equação de terceira ordem é

$$\begin{aligned}
1 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &> 0 \\
1 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 &> 0 \\
1 - \beta_2 + \beta_1\beta_3 - \beta_3^2 &> 0 \\
\beta_2 < 3
\end{aligned} \tag{14.5.67}$$

Okuguchi and Irie (1990) mostram que a quarta condição é redundante.

Para o problema em questão, teríamos:

$$1 - b[(1 + \kappa)(1 + \rho) + 1] + b(1 + \kappa)(1 + 2\rho) - (1 + \kappa)b\rho > 0 \tag{14.5.68}$$

$$1 + b[(1 + \kappa)(1 + \rho) + 1] + b(1 + \kappa)(1 + 2\rho) + (1 + \kappa)b\rho > 0 \tag{14.5.69}$$

$$3 - b[(1 + \kappa)(1 + \rho) + 1] - b(1 + \kappa)(1 + 2\rho) + 3(1 + \kappa)b\rho > 0 \tag{14.5.70}$$

$$-(1 + \kappa)^2 b^2 \rho^2 + b^2(1 + \kappa)\rho[(1 + \kappa)(1 + \rho) + 1] - b(1 + \kappa)(1 + 2\rho) + 1 > 0 \tag{14.5.71}$$

A primeira condição pode ser reescrita como

$$1 - b + b\kappa\rho > 0 \tag{14.5.72}$$

que é claramente positiva, uma vez que a propensão marginal a consumir é menor que a unidade.

A segunda condição pode ser reescrita como

$$1 + 2b(1 + \kappa)(1 + 2\rho) > 0 \tag{14.5.73}$$

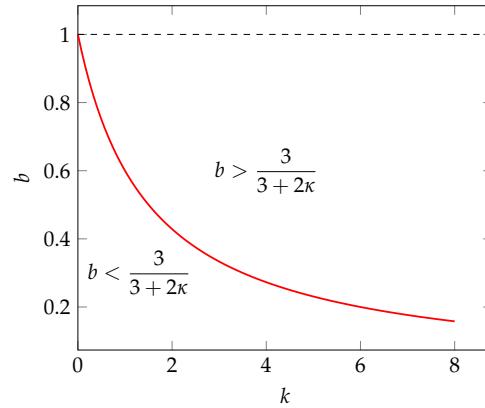
que é claramente positiva.

A terceira condição pode ser reescrita como

$$3 - b(3 + 2\kappa) > 0 \tag{14.5.74}$$

que será positiva se  $b < \frac{3}{3+2\kappa}$ . Como  $\frac{3}{3+2\kappa}$  é menor que 3 sempre, a terceira condição será automaticamente satisfeita.

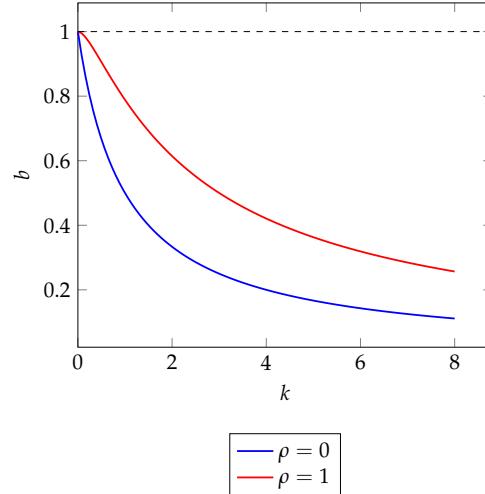
Graficamente, essa condição pode ser vista abaixo.



A quarta condição pode ser reescrita como

$$(1 + \kappa)(2 + \kappa)\rho b^2 - (1 + \kappa)(1 + 2\rho)b + 1 > 0 \quad (14.5.75)$$

Graficamente, essa condição pode ser vista abaixo.



Para as duas últimas condições a positividade depende da combinação dos parâmetros  $b, \kappa$  e  $\rho$ .

---

SISTEMAS DE EQUAÇÕES EM DIFERENÇAS

---

Este capítulo trata os sistemas de equações em diferenças lineares. Para cada variável  $X_{1t}, \dots, X_{nt}$ ,  $n \geq 1$ , nos é dada uma equação em diferença não homogênea linear de ordem  $p$ , onde cada variável pode, em princípio, depender de todas as outras variáveis com certa defasagem. Escrevendo cada equação em diferença separadamente, o sistema é dado por

$$\begin{aligned} X_{1t} &= \phi_{11}^{(1)} X_{1,t-1} + \phi_{12}^{(1)} X_{2,t-1} + \dots + \phi_{1n}^{(1)} X_{n,t-1} + \dots + \\ &\quad \phi_{11}^{(p)} X_{1,t-p} + \phi_{12}^{(p)} X_{2,t-p} + \dots + \phi_{1n}^{(p)} X_{n,t-p} + Z_{1t}, \end{aligned} \quad (15.0.1)$$

$$\begin{aligned} X_{2t} &= \phi_{21}^{(1)} X_{1,t-1} + \phi_{22}^{(1)} X_{2,t-1} + \dots + \phi_{2n}^{(1)} X_{n,t-1} + \dots + \\ &\quad \phi_{21}^{(p)} X_{1,t-p} + \phi_{22}^{(p)} X_{2,t-p} + \dots + \phi_{2n}^{(p)} X_{n,t-p} + Z_{2t}, \end{aligned} \quad (15.0.2)$$

$$\begin{aligned} X_{nt} &= \phi_{n1}^{(1)} X_{1,t-1} + \phi_{n2}^{(1)} X_{2,t-1} + \dots + \phi_{nn}^{(1)} X_{n,t-1} + \dots + \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (15.0.3)$$

$$\phi_{n1}^{(p)} X_{1,t-p} + \phi_{n2}^{(p)} X_{2,t-p} + \dots + \phi_{nn}^{(p)} X_{n,t-p} + Z_{2t}. \quad (15.0.4)$$

Usando notação matricial, esse sistema de equações pode ser escrito mais compactamente como:

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \dots + \Phi_p X_{t-p} + Z_t, \quad \Phi_p \neq 0, \quad (15.0.5)$$

em que  $Z_t$  denota um vetor  $n$  dimensional de variáveis exógenas e em que  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  denota a matriz  $\Phi_k = (\phi_{i,j}^k)_{i,j=1,2,\dots,n}$  para  $k = 1, 2, \dots, p$ .

A solução dessa equação em diferença baseia-se novamente nos mesmos princípios do caso univariado. Antes de fazer isso, mostramos como reduzir este sistema de ordem  $p$  para um sistema de primeira ordem. Qualquer sistema de ordem  $p$  pode ser reescrito como um sistema de ordem 1. Para ver isso, defina uma nova variável  $Y_t$  que concatena as variáveis  $X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1}$ . Essa nova variável satisfaz o seguinte sistema de primeira ordem:

$$Y_t = \begin{pmatrix} X_t \\ X_{t-1} \\ X_{t-2} \\ \vdots \\ X_{t-p+2} \\ X_{t-p+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 & \dots & \Phi_{p-1} & \Phi_p \\ I_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{t-1} \\ X_{t-2} \\ \vdots \\ X_{t-p+2} \\ X_{t-p+1} \\ X_{t-p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Z_t \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15.0.6)$$

A matriz  $\Phi$  é uma matriz  $np \times np$  chamada de matriz complementar. Assim, multiplicando o sistema de equações, pode-se ver que a primeira equação retorna novamente a equação original, enquanto as restantes  $p - 1$  equações são apenas identidades. O estudo de um sistema de  $p$ -ordem pode, portanto, ser sempre reduzido a um sistema de primeira ordem.

# 15.1 Sistema de Equações em Diferenças de Primeira Ordem

A introdução acima demonstrou que o sistema de primeira ordem de equações em diferenças abrange sistemas simples e de equações em diferenças de ordem  $p$ . Portanto, reduzimos nossa análise ao sistema de primeira ordem de equações em diferenças.

$$X_t = \Phi X_{t-1} + Z_t, \Phi \neq 0, \quad (15.1.1)$$

em que  $X_t$  indica um vetor de dimensão  $n$  e  $\Phi$  é uma matriz  $n \times n$ . A parte não autônoma é representada pelo vetor  $Z_t$  de dimensão  $n$  que corresponde a um vetor de variáveis exógenas. Em geral, as soluções podem não existir para tempos negativos. Assim, por simplicidade, nos restringimos ao caso onde  $\Phi$  é não-singular, isto é,  $\Phi \in \text{GL}(n)$ , o conjunto de matrizes invertíveis reais  $n \times n$ .

## 15.1.1 Sistema de Equações em Diferenças de Primeira Ordem Homogêneas

Como no caso unidimensional, iniciamos a análise com a discussão da equação homogênea

$$X_t = \Phi X_{t-1}, \quad \Phi \in \text{GL}(n). \quad (15.1.2)$$

Nós imediatamente vemos que começando com algum vetor inicial  $X_0 = x_0$ , todos os valores subsequentes de  $X_t$ ,  $t > 0$ , são determinados de forma única. Em particular

$$X_t = \Phi^t x_0. \quad (15.1.3)$$

Para destacar a dependência da condição inicial, escrevemos  $X(t, x_0) = \Phi^t x_0$ . Olhando para o conjunto de pontos alcançados a partir de uma condição inicial  $x_0$  sugere-se a seguinte definição.

**Definição 15.1.1 (Órbita).** O conjunto  $\mathcal{O}^+(x_0) = \{X(t, x_0) | t \in \mathbb{N}_0\}$  é chamado de órbita direta de  $x_0$ . O conjunto  $\mathcal{O}(x_0) = \{X(t, x_0) | t \in \mathbb{Z}\}$  é chamado de órbita inteira.

**Corolário 15.1.1.** A invertibilidade de  $\Phi$  implica que, se  $x_0 \neq y_0$ ,  $\mathcal{O}(x_0) \cap \mathcal{O}(y_0) = \emptyset$ . Assim, duas trajetórias ou órbitas não se cruzam a menos que tenham um valor inicial comum.

**Corolário 15.1.2.** Observe que as soluções  $X(t, x_0)$  induzem um mapa contínuo  $X: \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com as duas propriedades a seguir:

1.  $X(0, x) = x, \forall x \in \mathbb{R}^n;$

$$2. X(t+s, x) = X(t, X(s, x)), \forall t, s \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Essas propriedades definem um sistema dinâmico contínuo em tempo discreto ao longo do índice de tempo  $\mathbb{Z}$  com o espaço de estados  $\mathbb{R}^n$  (ver Colonius e Kliemann, 2014, seção 2.3).

Suponha que temos duas soluções para o sistema homogêneo,  $X_t^{(1)}$  e  $X_t^{(2)}$ . Então, fica claro que qualquer combinação linear dessas duas soluções,  $c_1 X_t^{(1)} + c_2 X_t^{(2)}$ , também é uma solução. Assim, o conjunto de todas as soluções para o sistema homogêneo forma um espaço linear.

A solução de qualquer sistema homogêneo tem a forma:

$$X_t = \mathcal{U}(t)c = \Phi^t c. \quad (15.1.4)$$

### 15.1.2 Solução de Sistemas Homogêneos

Com o objetivo de encontrar as soluções explícitas do sistema homogêneo e entender suas propriedades, precisamos, portanto, encontrar uma expressão para  $\Phi^t$ . Tal expressão pode ser encontrada em termos de autovalores e autovetores da matriz  $\Phi$ . É útil diferenciar neste contexto dois casos.

#### 1. Autovalores Distintos

Se todos os autovalores,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  de  $\Phi$  são distintos, então  $\Phi$  é diagonalizável, isto é, semelhante a uma matriz diagonal. Assim, existe uma matriz não-singular  $Q$  tal que  $Q^{-1}\Phi Q = \Lambda$ , em que  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . As colunas de  $Q$  consistem nos autovetores de  $\Phi$ . Com essa transformação de similaridade em mente, é fácil computar

$$\begin{aligned} \Phi^t &= Q\Lambda Q^{-1}Q\Lambda Q^{-1}\dots Q\Lambda Q^{-1} \\ &= Q\Lambda^t Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}^t Q^{-1} \\ &= Q \begin{pmatrix} \lambda_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^t \end{pmatrix} Q^{-1}. \end{aligned} \quad (15.1.5)$$

Em caso de autovalores distintos, temos o seguinte teorema.

**Teorema 15.1.1.** Se o espectro de  $\Phi$ ,  $\sigma(\Phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , consiste em  $n$  autovalores distintos com autovetores correspondentes  $q_i, i = 1, \dots, n$ , então o conjunto:

$$X_t^{(i)} = q_i \lambda_i^t, \quad i = 1, \dots, n \quad (15.1.6)$$

*representa um conjunto fundamental de soluções para o sistema homogêneo.*

Assim, a solução geral para o sistema homogêneo pode ser escrita como:

$$X_t = \sum_{i=1}^n c_i q_i \lambda_i^t, \quad t \geq 0 \quad (15.1.7)$$

## 2. Autovalores Repetidos

A situação com autovalores repetidos é mais complicada. Antes de lidar com o caso geral, note que, mesmo com autovalores repetidos, a matriz  $\Phi$  pode ser diagonalizável. Este é, por exemplo, o caso de matrizes normais, isto é, matrizes para as quais  $\Phi\Phi' = \Phi'\Phi$ . Exemplos de matrizes normais incluem matrizes simétricas ( $\Phi = \Phi'$ ), matrizes antisimétricas ( $\Phi = -\Phi'$ ) e matrizes unitárias ou ortogonais ( $\Phi\Phi' = \Phi'\Phi = I$ ). Em termos gerais,  $\Phi$  é diagonalizável se e somente se, para cada autovalor, a multiplicidade algébrica (a multiplicidade como raiz do polinômio característico) for igual à multiplicidade geométrica (o número máximo de autovetores linearmente independentes). Neste caso, o autovalor é chamado semisimples. Se o número máximo de autovetores linearmente independentes correspondentes a algum autovalor for estritamente menor que sua multiplicidade algébrica, a matriz é chamada defeituosa.

Como  $\Phi$  não é, em geral, diagonalizável, temos que usar sua forma canônica para encontrar uma expressão para a solução da equação. Para cada matriz  $\Phi$  com autovalores distintos  $\sigma(\Phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$ , existe uma matriz  $Q$  não singular, de tal forma que  $\Phi$  pode ser reduzida a uma matriz  $J$  por uma transformação de similaridade, isto é,  $Q^{-1}\Phi Q = J$ . A matriz diagonal de blocos  $J$  é da seguinte forma:

$$J = Q^{-1}\Phi Q = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\lambda_s) \end{pmatrix}. \quad (15.1.8)$$

Cada solução  $X_t$  para o sistema não homogêneo de primeira ordem pode ser representada como a soma da solução geral para o sistema homogêneo e uma solução particular para o sistema não homogêneo.

## 15.2 Teoria da Estabilidade

Como no caso univariado, estamos interessados em caracterizar o comportamento de longo prazo ou assintótico da solução. Para este propósito, estendemos a análise univariada para o caso

multivariado. Em geral, um sistema de equações em diferenças de primeira ordem, possivelmente não-linear, pode ser escrito como:

$$X_{t+1} = f(X_t, t), \quad (15.2.1)$$

em que  $f(x, t)$  é uma função do  $\mathbb{R} \times \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow \mathbb{R}^n$  que é contínua em  $x$ . Um ponto fixo, um estado estacionário, ou um ponto de equilíbrio do sistema é definido como segue:

**Definição 15.2.1.** Um ponto  $X^* \in \mathbb{R}^n$  no domínio de  $f$  é chamado ponto fixo, estado estacionário ou ponto de equilíbrio se

$$X^* = f(X^*, t) \quad t \geq 0 \quad (15.2.2)$$

**Definição 15.2.2.** Sejam as seguintes condições de estabilidade.

1. Um ponto de equilíbrio  $X^*$  é chamado estável se para todo  $\varepsilon > 0$ , há um  $\delta_\varepsilon > 0$  tal que

$$\|X_0 - X^*\| < \delta_\varepsilon \text{ implica } \|X_t - X^*\| < \varepsilon, \quad \forall t > 0. \quad (15.2.3)$$

Se  $X^*$  não é estável, ele é dito instável.

2. Um ponto de equilíbrio  $X^*$  é dito atrativo se existe um  $\eta > 0$  tal que

$$\|X_0 - X^*\| < \eta \text{ implica } \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X^*. \quad (15.2.4)$$

Se  $\eta = \infty$ ,  $X^*$  é dito globalmente atrativo.

3. O ponto  $X^*$  é assintoticamente estável se for estável e atrativo. Se  $\eta = \infty$ ,  $X^*$  é estável global e assintoticamente.
4. Um ponto de equilíbrio  $X^*$  é chamado exponencialmente estável se existirem  $\delta > 0$ ,  $M > 0$ , e  $\eta \in (0, 1)$  tal que para a solução  $X(t, x_0)$  temos

$$\|X(t, x_0) - X^*\| \leq M\eta^t \|x_0 - X^*\| \quad \text{sempre que } \|x_0 - X^*\| < \delta. \quad (15.2.5)$$

5. Uma solução  $X_t(x_0)$  é chamada limitada se houver uma constante positiva  $M < \infty$  tal que

$$\|X(t, x_0)\| \leq M, \quad \forall t. \quad (15.2.6)$$

A estabilidade dos pontos de equilíbrio está intimamente relacionada aos autovalores de  $\Phi$ , especialmente ao raio espectral de  $\Phi$ ,  $\rho(\Phi)$ .

Para um sistema homogêneo, as seguintes afirmações são verdadeiras:

1. a solução zero é estável se e somente se  $\rho(\Phi) \leq 1$  e os autovalores no círculo unitário forem semisimples.

2. a solução zero é assintoticamente estável se e somente se  $\rho(\Phi) < 1$ . Neste caso, a solução é exponencialmente estável.

Seja a seguinte definição.

**Definição 15.2.3.** Uma matriz hiperbólica é uma matriz sem autovalores no círculo unitário. Se  $A$  é uma matriz hiperbólica, então a equação em diferença homogênea linear correspondente  $X_{t+1} = AX_t$  é também chamada de hiperbólica.

Como no caso das equações em diferenças unidimensionais, podemos analisar as propriedades de estabilidade de sistemas não-lineares por meio de uma aproximação linear em torno do estado estacionário. Considere para este propósito o sistema homogêneo não-linear  $X_{t+1} = F(X_t)$  com  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  e ponto fixo  $X^*$ . Suponha que  $F$  é continuamente diferenciável em uma vizinhança aberta de  $X^*$ , então a equação em diferença linearizada é dada por:

$$X_{t+1} - X^* = A(X_{t+1} - X^*), \quad (15.2.7)$$

em que  $A$  é a derivada de  $F$  avaliada em  $X$ , isto é,  $A = DF(X)$ , a matriz de derivadas parciais. Se  $A$  é uma matriz hiperbólica, então dizemos que  $X^*$  é um ponto fixo hiperbólico.

Um caso especial interessante, frequentemente encontrado em economia, é obtido quando o sistema se expande em algumas direções, mas se contrai em outras. Nesse caso, o ponto fixo é chamado ponto de sela.

**Definição 15.2.4.** A solução zero da equação em diferença linear hiperbólica  $X_{t+1} = AX_t$  é chamada de ponto de sela se existirem pelo menos dois autovalores de  $A$ ,  $\lambda_u$  e  $\lambda_s$ , tais que  $|\lambda_u| > 1$  e  $|\lambda_s| < 1$ .

## 15.3 Sistemas Bidimensionais

Muitos modelos econômicos teóricos são reduzidos e investigados como sistemas. Assim, dedicamos esta seção à análise de tais sistemas. No caso de o sistema ser de dimensão  $n = 2$ , uma condição necessária e suficiente para a estabilidade assintótica é dada no seguinte teorema.

**Teorema 15.3.1.** O sistema bidimensional homogêneo tem uma solução assintoticamente estável se e somente se

$$|\text{tr}(\Phi)| < 1 + \det \Phi < 2, \quad (15.3.1)$$

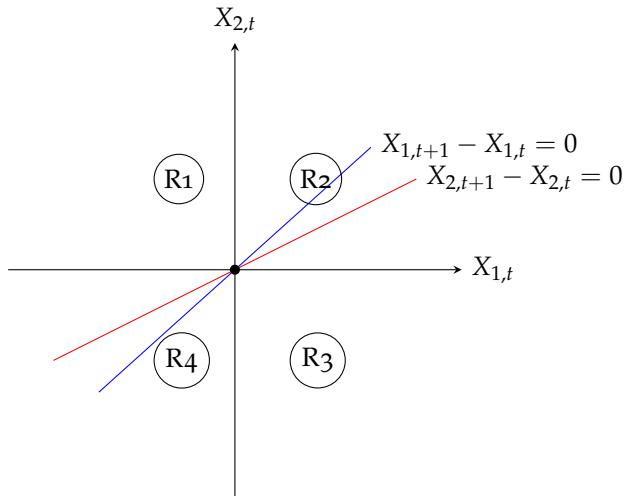
Uma vantagem adicional dos sistemas bidimensionais é que suas propriedades qualitativas podem ser facilmente analisadas por um diagrama de fases. Considere para este propósito o sistema homogêneo de primeira ordem escrito como um sistema de duas equações:

$$X_{t+1} = \begin{pmatrix} X_{1,t+1} \\ X_{2,t+1} \end{pmatrix} = \Phi X_t = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{1,t} \\ X_{2,t} \end{pmatrix}. \quad (15.3.2)$$

É claro que  $(0, 0)'$  é um equilíbrio para este sistema. Para entender a dinâmica do sistema, podemos desenhar duas linhas em um diagrama no plano  $X_1 X_2$ . A primeira linha é dada por todos os pontos em que a primeira variável não muda, isto é, onde  $X_{1,t+1} = X_{1,t}$ . A partir do visto acima, esses pontos são representados por uma reta com equação  $(\phi_{11} - 1)X_{1,t} + \phi_{12}X_{2,t} = 0$ . Similarmente, os pontos onde a segunda variável não muda é a linha com a equação  $\phi_{21}X_{1,t} + (\phi_{22} - 1)X_{2,t} = 0$ . Essas duas linhas dividem o plano em quatro regiões,  $R_1, R_2, R_3$  e  $R_4$ , como na figura abaixo. Neste exemplo, ambas as linhas têm declives positivos.

A dinâmica do sistema em cada uma das quatro regiões pode ser obtida a partir dos sinais dos coeficientes da seguinte forma. Suponha que começamos em um ponto no espaço  $X_{1,t+1} - X_{1,t} = (\phi_{11} - 1)X_{1,t} + \phi_{12}X_{2,t} = 0$ , então sabemos que a primeira variável não muda. Agora aumente  $X_{2,t}$  um pouco. Isso nos move para a região 1 ou 4. Se  $\phi_{12}$  é positivo, isso implica que  $X_{1,t+1} - X_{1,t} > 0$ , então a primeira variável aumenta. Assim, sabemos que acima da linha  $X_{1,t+1} - X_{1,t} = 0$ ,  $X_{1,t}$  aumenta e que abaixo dessa linha  $X_{1,t}$  diminui. Podemos indicar este resultado na figura por setas da esquerda para a direita nas regiões 1 e 4 e setas da direita para a esquerda nas regiões 2 e 3. Se  $\phi_{12}$  é negativo, obtemos, é claro, o resultado oposto. Da mesma forma, considere o esquema  $X_{2,t+1} - X_{2,t} = \phi_{21}X_{1,t} + (\phi_{22} - 1)X_{2,t} = 0$ , em que a segunda variável não muda. Considere agora um aumento em  $X_{1,t}$ . Isso nos move para a região 3 ou 4. Se o coeficiente  $\phi_{21}$  é positivo, isso implica que  $X_{2,t+1} - X_{2,t} > 0$  e a segunda variável deve aumentar. Como antes podemos inferir que abaixo de  $X_{2,t+1} - X_{2,t} = 0$ ,  $X_{2,t}$  aumenta enquanto que acima desta linha  $X_{2,t}$  diminui. Podemos novamente indicar esse comportamento por meio de setas: setas para cima nas regiões 3 e 4 e setas para baixo nas regiões 1 e 2. Se o sinal de  $\phi_{21}$  for negativo, o resultado oposto é obtido. Este tipo de análise nos dá um diagrama de fases, como na figura abaixo. Este diagrama nos mostra a dinâmica do sistema, começando em cada ponto possível. Neste exemplo, as setas indicam que, onde quer que estejamos, nos aproximaremos do estado estacionário. Mas isso corresponde exatamente à definição de um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Assim, concluímos a partir deste diagrama que o estado estacionário é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

FIGURA 15.3.1 – EXEMPLO DE UM DIAGRAMA DE FASE



Claro que a situação descrita na figura acima não é a única possível. Para analisar todas as situações possíveis que podem surgir em um sistema bidimensional, fazemos uma transformação de variável usando a forma canônica de Jordan<sup>1</sup> para  $\Phi$ . Se  $\Phi$  tem a forma canônica de Jordan  $\Phi = QJQ^{-1}$ , então fazemos a transformação de variável  $Y_t = Q^{-1}X_t$ . Isso resulta em um novo sistema de equações diferenciais homogêneas de primeira ordem:

$$Y_{t+1} = Q^{-1}X_{t+1} = Q^{-1}\Phi X_t = Q^{-1}\Phi Q Q^{-1}X_t = JY_t. \quad (15.3.3)$$

em que  $J$  pode assumir três formas:

1.  $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ : autovalores reais distintos ou repetidos semisimples.
2.  $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ : autovalores repetidos com um autovetor independente.
3.  $J = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ : autovalores complexos com  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ .

Observe que o estado estacionário não é afetado por essa transformação de variável. Ainda é o ponto  $(0,0)'$ . Vamos tratar esses três casos separadamente.

### 1. Autovalores reais distintos ou repetidos semisimples

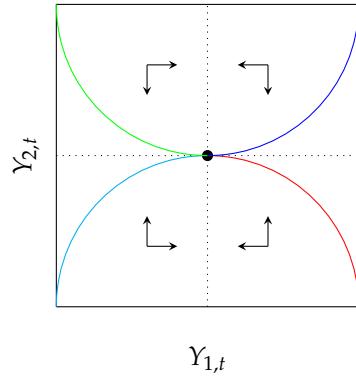
A transformação de variável dissociou efetivamente o sistema bidimensional em duas equações em diferenças homogêneas de primeira ordem com soluções:  $Y_{1,t} = \lambda_1^t y_{1,0}$  e  $Y_{2,t} = \lambda_2^t y_{2,0}$

---

<sup>1</sup> Isto é,  $J(\lambda, r) = \lambda I + W$ , em que  $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  é nilpotente de ordem  $r$ .

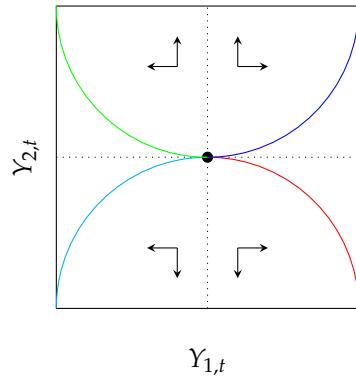
em que  $y_{1,0}$  e  $y_{2,0}$  são valores iniciais. A partir da discussão anterior, sabemos que o estado estacionário é assintoticamente estável se e somente se ambos os autovalores forem menores que um em valor absoluto. Tal situação é plotada na figura abaixo. As setas indicam que, para cada ponto inicial, o sistema convergirá em direção ao ponto de equilíbrio. Como exemplo, traçamos quatro trajetórias iniciando nos pontos  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  e  $(-1, -1)$ , respectivamente.

FIGURA 15.3.2 – STEADY-STATE ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL,  $\lambda_1 = 0.8$  E  $\lambda_2 = 0.5$



Abaixo a figura mostra uma situação em que o ponto de equilíbrio é instável. De fato, ambos os autovalores são maiores que um e as trajetórias divergem rapidamente nas direções indicadas pelas setas. Na figura, traçamos novamente quatro trajetórias com os mesmos valores iniciais do exemplo anterior.

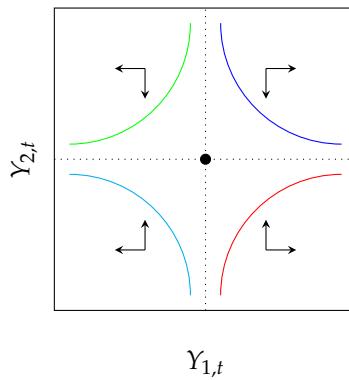
FIGURA 15.3.3 – STEADY-STATE INSTÁVEL,  $\lambda_1 = 1.2$  E  $\lambda_2 = 2$



A próxima Figura mostra uma configuração interessante que é frequentemente encontrada em modelos econômicos, especialmente naqueles que envolvem expectativas racionais. Temos um autovalor menor que um em valor absoluto e um autovalor maior que um em valor absoluto, ou seja,  $|\lambda_1| > 1 > |\lambda_2|$ . Isto implica que o sistema está se expandindo na direção do autovetor correspondente a  $\lambda_1$ , mas está se contraindo na direção do autovetor correspondente a  $\lambda_2$ . Esta configuração dos autovalores leva a um equilíbrio de ponto de sela. Embora o estado

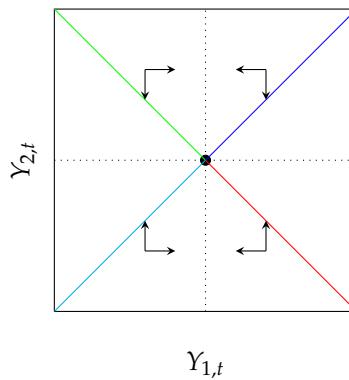
estacionário seja instável, como quase todas as trajetórias divergem, há alguns valores iniciais para os quais o sistema converge para o estado estacionário. Na figura abaixo todas as trajetórias iniciando no eixo  $y$  convergem para o estado estacionário. Assim, dado um valor inicial  $y_{2,0}$  para  $Y_{2,t}$ , o requisito de que a solução deve ser limitada determina unicamente uma condição inicial para  $Y_{1,t}$  também, que nessa configuração reduzida é justamente  $Y_{1,0} = y_{1,0} = 0$ . Assim, a solução é dado por  $Y_{1,t} = 0$  e  $Y_{2,t} = \lambda_2^t y_{2,0}$  para algum valor inicial  $y_{2,0}$ . Note que o caminho de sela, em contraste com os outros caminhos, é uma linha reta através da origem. Esta propriedade é transportada quando o sistema é transformado de volta para suas variáveis originais. De fato, a solução torna-se  $X_{1,t} = q_{12}\lambda_2^t y_{2,0}$  e  $X_{2,t} = q_{22}\lambda_2^t y_{2,0}$  em que  $(q_{12}, q_{22})'$  é o autovetor correspondente a  $\lambda_2$ . Assim, a razão de  $X_{1,t}$  e  $X_{2,t}$  é igual a constante de  $\frac{q_{12}}{q_{22}}$ .

FIGURA 15.3.4 – STEADY-STATE DE PONTO DE SELA,  $\lambda_1 = 1.2$  E  $\lambda_2 = 0.8$



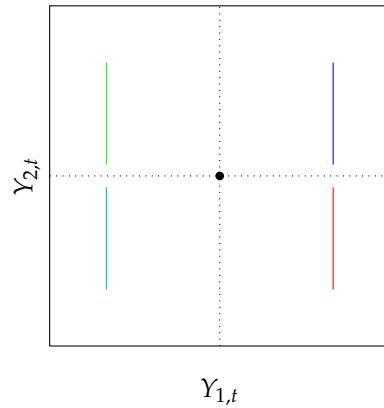
Quando existem múltiplos autovalores com dois autovetores independentes,  $\Phi$  pode novamente ser reduzido por uma transformação de similaridade para uma matriz diagonal. As trajetórias são, então, linhas retas que levam à origem, se o autovalor for menor que um, como na figura abaixo, e linhas retas que se afastam da origem, se o autovalor for maior que um, em termos absolutos.

FIGURA 15.3.5 – STEADY-STATE ASSINTOTICAMENTE ESTÁVEL COM RAÍZES REPETIDAS,  $\lambda_1 = 0.8$  E  $\lambda_2 = 0.8$



Quando um autovalor é igual a 1, enquanto o segundo autovalor é menor que um em valor absoluto, chegamos a uma situação degenerada. Enquanto  $Y_{1,t}$  permanece em seu valor inicial  $y_{1,0}$ ,  $Y_{2,t}$  converge para zero, de modo que o sistema converge para  $(y_{1,0}, 0)'$ , como é exemplificado pela figura abaixo. Somente quando  $y_{1,0} = 0$  haverá uma convergência para o estado estacionário  $(0, 0)$ . No entanto,  $(0, 0)$  não é o único estado estacionário porque a definição de um autovalor implica que  $A - I$  é singular. Assim, existe  $X^* \neq 0$  tal que  $X^* = \Phi X^*$ . No caso em que o primeiro autovalor é igual a menos um, não há convergência e  $Y_{1,t}$  irá oscilar entre  $y_{1,0}$  e  $-y_{1,0}$ .

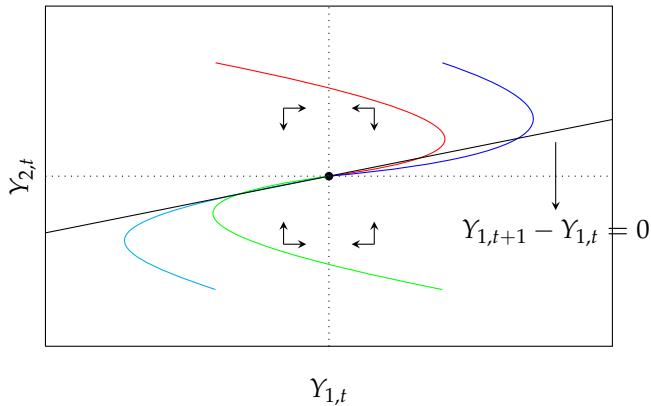
FIGURA 15.3.6 – STEADY-STATE DEGENERADO,  $\lambda_1 = 1$  E  $\lambda_2 = 0.8$



## 2. Autovalores repetidos com um autovetor independente

Neste caso,  $\Phi$  não pode mais ser reduzido a uma matriz diagonal por uma transformação de similaridade. Como  $J$  não é mais uma matriz diagonal, o locus de todos os pontos onde  $Y_{1,t}$  não muda não é mais o eixo  $x$ , mas é dado pela linha com a equação  $(\lambda - 1)Y_{1,t} + Y_{2,t} = 0$ . A Figura abaixo exibe este caso com um autovalor de 0,8, o que implica um estado estacionário assintoticamente estável. Note que, dados nossos quatro pontos iniciais, o sistema se move primeiro para longe do ponto de equilíbrio até atingir o ponto onde  $Y_{1,t}$  não muda, então muda de direção e tende ao estado estacionário.

FIGURA 15.3.7 – AUTOVALORES REPETIDOS COM UM AUTOVETOR INDEPENDENTE,  $\lambda = 0.8$



### 3. Autovalores complexos

Se os dois autovalores complexos conjugados forem  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ , então  $\Phi$  é semelhante à matriz

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = |\lambda| \begin{pmatrix} \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix}. \quad (15.3.4)$$

em que  $|\lambda| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  e  $\omega = \tan^{-1} \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)$ . As figuras abaixo mostram três casos. A primeira mostra a dinâmica no caso de autovalores dentro do círculo unitário. Pode-se discernir claramente o comportamento oscilatório e a convergência para o estado estacionário. A figura a seguir mostra uma situação com um estado estacionário instável, onde todas as trajetórias se afastam do estado estacionário. Finalmente a última figura mostra um caso degenerado onde os autovalores estão no círculo unitário. Em tal situação, o sistema se move em torno de seu estado estacionário em um círculo.

FIGURA 15.3.8 – AUTOVALORES COMPLEXOS COM UM STEADY STATE ESTÁVEL,  $\lambda_{1,2} = 0.7 \pm 0.2i$

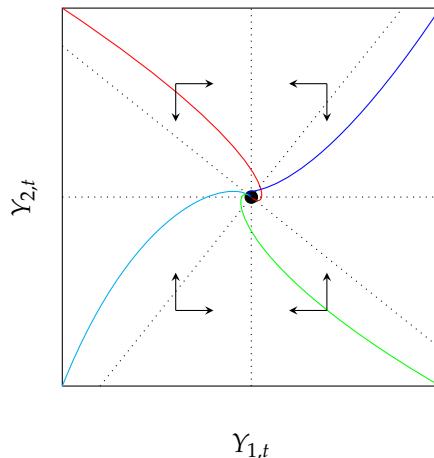
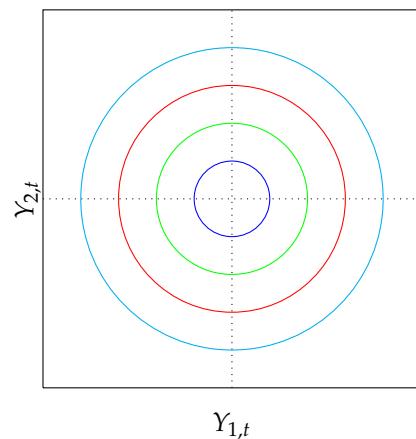


FIGURA 15.3.9 – AUTOVALORES COMPLEXOS DENTRO DO CÍRCULO UNITÁRIO,  $\lambda_{1,2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \pm i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$



## 15.4 Aplicações de Sistemas de Equações em Diferenças

Em muitos casos econômicos, a dinâmica sobre um fenômeno não pode ser analisada como um caso univariado, mas está intimamente relacionada à dinâmica de outras variáveis relevantes. Para vermos como isso é operacionalizado, vamos estudar, de forma breve, dois modelos macroeconômicos: i) o modelo de overshooting da taxa de câmbio proposto por Dornbusch; e ii) o modelo macroeconômico novo keynesiano seguindo a formulação de Galí (2011).

### 15.4.1 Overshooting da Taxa de Câmbio

Um exemplo clássico para um sistema de equações em diferenças é o modelo de overshooting da taxa de câmbio de Dornbusch (1976). O modelo descreve o comportamento do nível de preços e da taxa de câmbio em uma pequena economia aberta. Consiste em uma equação IS, uma equação de ajuste do nível de preços e uma equação LM. Além disso, a paridade descoberta da taxa de juros (UIP) é assumida juntamente com expectativas racionais:

$$y_t^d = \delta(e_t + p^* - p_t) - \sigma(r_t - p_{t+1} + p_t), \quad \delta > 0, \sigma > 0, \quad (\text{IS}) \quad (15.4.1)$$

$$p_{t+1} - p_t = \alpha(y_t^d - y), \quad \alpha > 0, \quad (\text{Ajust. de preços}) \quad (15.4.2)$$

$$m - p_t = \phi y - \lambda r_t, \quad \phi > 0, \lambda > 0, \quad (\text{LM}) \quad (15.4.3)$$

$$r_t = r^* + e_{t+1} - e_t, \quad (\text{UIP}) \quad (15.4.4)$$

em que os parâmetros  $\delta$ ,  $\sigma$ ,  $\alpha$ ,  $\phi$  e  $\lambda$  são todos positivos. As variáveis são todas expressas em logaritmo. A equação IS representa a dependência da demanda agregada em relação ao preço relativo de bens estrangeiros e domésticos e à taxa de juros real. Uma desvalorização da taxa de câmbio<sup>2</sup>, um aumento no nível do preço externo,  $p^*$ , ou uma diminuição no nível de preço doméstico levam a um aumento na demanda agregada. Por outro lado, um aumento na taxa de juros nominal doméstica,  $r_t$ , ou uma diminuição na taxa de inflação esperada,  $p_{t+1} - p_t$ , levam a uma redução na demanda agregada. Uma característica crucial do modelo Dornbusch é que os preços sofrem um ajustamento lento. Em particular, o ajuste de preço  $p_{t+1} - p_t$  é proporcional ao desvio da demanda agregada do produto potencial  $y$ . Se a demanda agregada é maior do que o produto potencial, os preços aumentam, enquanto que se a demanda agregada estiver abaixo do produto potencial, os preços caem. Em particular, o nível de preço é tratado como uma variável predeterminada cujo valor é fixado no período atual. A equação LM representa o equilíbrio no mercado monetário. A demanda por saldos reais,  $m - p_t$ , depende positivamente do produto potencial e negativamente da taxa de juros nominal doméstica. O modelo é fechado assumindo que a paridade de juros descobertos é válida, em que  $r^*$  denota a taxa de juros nominal estrangeira. Em contraste com o nível de preços, a taxa de câmbio não é predeterminada. Pode se ajustar imediatamente dentro do período atual a qualquer choque que possa ocorrer. Por simplicidade, presume-se que as variáveis exógenas  $y$ ,  $m$ ,  $r^*$  e  $p^*$  permaneçam constantes.

Este sistema pode ser reduzido a um sistema bidimensional na taxa de câmbio e no nível de preços:

$$e_{t+1} - e_t = \frac{1}{\lambda}(\phi y + p_t - m) - r^*, \quad (15.4.5)$$

$$p_{t+1} - p_t = \frac{\alpha}{1 - \alpha\sigma} \left[ \delta(e_t + p^* - p_t) - y - \frac{\sigma}{\lambda}(\phi y - m + p_t) \right]. \quad (15.4.6)$$

A primeira equação foi obtida combinando a equação LM com a UIP. A segunda equação foi

---

<sup>2</sup> A taxa de câmbio  $e_t$  é cotada como o preço de uma unidade de moeda estrangeira em termos da moeda nacional. Um aumento em  $e_t$ , portanto, corresponde a uma desvalorização da moeda local.

obtida inserindo a equação IS na equação de ajuste de preços, substituindo a taxa de juros nominal usando a equação LM e depois resolvendo para  $p_{t+1} - p_t$ .

O estado estacionário deste sistema é obtido definindo  $e_t = e^{ss}$  e  $p_t = p^{ss}$  para todo  $t$  e resolvendo para estas duas variáveis:

$$p^{ss} = \lambda r^* + m - \phi y, \quad (15.4.7)$$

$$e^{ss} = p^{ss} - p^* + \frac{1}{\delta}(y + \sigma r^*) \quad [\text{usando } \phi y - m + p = p^{ss} = p]. \quad (15.4.8)$$

No estado estacionário, a UIP e a regra de formação de preços implicam  $r_{t+1} = r^*$  e  $y_t^d = y$ . O sistema pode ser ainda mais reduzido escrevendo-o em termos de desvios:

$$\begin{pmatrix} e_{t+1} - e^{ss} \\ p_{t+1} - p^{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{\alpha\delta}{(1-\alpha\sigma)} & 1 - \left( \left( \frac{\alpha}{1-\alpha\sigma} \right) \left( \delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_t - e^{ss} \\ p_t - p^{ss} \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} e_t - e^{ss} \\ p_t - p^{ss} \end{pmatrix}. \quad (15.4.9)$$

O comportamento dinâmico do sistema depende dos autovalores de  $\Phi$ . Denotando o polinômio característico de  $\Phi$  por  $\mathcal{P}(\mu)$  e os dois autovalores correspondentes por  $\mu_1$  e  $\mu_2$ , então:

$$\mathcal{P}(\mu) = (\mu - \mu_1)(\mu - \mu_2) = \mu^2 - \text{tr}(\Phi)\mu + \det \Phi. \quad (15.4.10)$$

Sem suposições adicionais sobre os parâmetros, é impossível obter mais informações sobre o comportamento qualitativo do sistema. Supomos que o ajuste dos preços seja suficientemente lento. Especificamente, assumimos que:

$$0 < \alpha\sigma < 1, \quad \alpha < \frac{4}{\left(2 + \frac{1}{\lambda}\right)(\delta + 2\sigma)}. \quad (15.4.11)$$

Assim, obtemos:

$$\text{tr}(\Phi) = \mu_1 + \mu_2 = 2 - \frac{\alpha}{1-\alpha\sigma} \left( \delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) < 2, \quad (15.4.12)$$

$$\det(\Phi) = \mu_1\mu_2 = 1 - \frac{\alpha}{1-\alpha\sigma} \left( \delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) < 1, \quad (15.4.13)$$

$$\Delta = (\text{tr}(\Phi))^2 - 4\det(\Phi) = \left[ \frac{\alpha}{1-\alpha\sigma} \left( \delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) \right]^2 > 0, \quad (15.4.14)$$

$$\mathcal{P}(1) = 0 \quad (15.4.15)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(-1) &= (1 + \mu_1)(1 + \mu_2) = 1 + \det(\Phi) + \text{tr}(\Phi) \\ &= 4 - \frac{2\alpha}{1 - \alpha\sigma} \left( \delta + \frac{\sigma}{\lambda} \right) > 0,\end{aligned}\quad (15.4.16)$$

em que  $\Delta$  denota o discriminante da equação quadrática. As desigualdades acima têm as seguintes implicações para os dois autovalores:

1.  $\Delta > 0$  implica que os autovalores são reais.
2.  $\mathcal{P}(1)$  implica que eles se encontram em lados opostos de 1;
3.  $\mathcal{P}(-1)$  finalmente implica que um autovalor, digamos  $\mu_1$ , é maior que 1, enquanto o segundo autovalor,  $\mu_2$ , está entre -1 e 1.

Como os autovalores são distintos, podemos diagonalizar  $\Phi$  como  $\Phi = Q\Lambda Q^{-1}$ , onde  $\Lambda$  é uma matriz diagonal com  $\mu_1$  e  $\mu_2$  em sua diagonal. As colunas da matriz  $Q$  consiste nos autovetores de  $\Phi$ . Multiplicando o sistema por  $Q^{-1}$ , obtemos o sistema transformado:

$$\begin{pmatrix} \hat{e}_{t+1} \\ \hat{p}_{t+1} \end{pmatrix} = Q^{-1} \begin{pmatrix} e_{t+1} - e^{ss} \\ p_{t+1} - p^{ss} \end{pmatrix} = Q^{-1} \Phi Q Q^{-1} \begin{pmatrix} e_t - e^{ss} \\ p_t - p^{ss} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{e}_t \\ \hat{p}_t \end{pmatrix}. \quad (15.4.17)$$

Através desta mudança de variáveis obtivemos um sistema desacoplado: o sistema bidimensional original é decomposto em duas equações em diferença homogêneas unidimensionais. Essas duas equações têm a solução geral:

$$\hat{e}_t = c_1 \mu_1^t, \quad (15.4.18)$$

$$\hat{p}_t = c_2 \mu_2^t, \quad (15.4.19)$$

em que  $c_1$  e  $c_2$  são duas constantes ainda a serem determinadas. Transformar a solução dos sistemas desacoplados de volta nas variáveis originais produz:

$$e_t = e^{ss} + c_1 q_{11} \mu_1^t + c_2 q_{12} \mu_2^t, \quad (15.4.20)$$

$$p_t = p^{ss} + c_1 q_{21} \mu_1^t + c_2 q_{22} \mu_2^t. \quad (15.4.21)$$

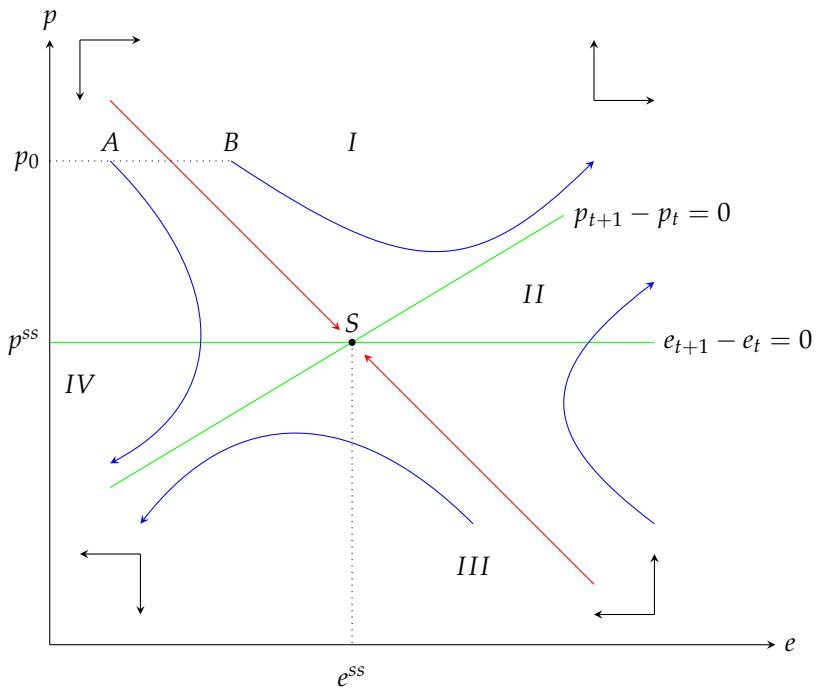
Como  $\mu_1 > 1$ , isso representa um sistema instável. Com o passar do tempo, o autovalor instável acabará por dominar. Para evitar esse comportamento explosivo, definimos  $c_1$  igual a zero. A segunda constante  $c_2$  pode ser determinada a partir da condição de contorno associada à variável predeterminada, no nosso caso, o nível de preços. Suponha que o sistema inicie no período zero e nos seja dado um valor  $p_0$  para o nível de preços nesse período:  $c_2 = \frac{p_0 - p^{ss}}{q_{22}}$ . Com isso e combinando as equações que determinam as soluções, chegamos a:

$$e_t = e^{ss} + \frac{q_{12}}{q_{22}}(p_t - p^{ss}). \quad (15.4.22)$$

Em seguida, mostramos que o caminho da sela é inclinado para baixo, ou seja,  $\frac{q_{12}}{q_{22}} < 0$ . Isto pode ser estabelecido investigando as equações definidoras para o autovetor correspondente ao segundo autovalor  $\mu_2$ . Elas são dados por  $(\phi_{11} - \mu_2)q_{12} + \phi_{12}q_{22} = 0$  e  $\phi_{21}q_{12} + (\phi_{22} - \mu_2)q_{22} = 0$ . Como  $(\phi_{11} - \mu_2) > 0$  e  $\phi_{12} > 0$ ,  $q_{12}$  e  $q_{22}$  devem apresentar sinais opostos. O mesmo é válido utilizando a segunda equação.

O modelo de Dornbusch é mais facilmente analisado em termos de um diagrama de fases representando o nível de preços e a taxa de câmbio, como na figura abaixo. O gráfico consiste em dois esquemas:  $p_{t+1} - p_t = 0$  e  $e_{t+1} - e_t = 0$ . Sua interseção determina o estado estacionário denotado por  $S$ . Estes dois esquemas correspondem às equações de steady-state. A configuração  $e_{t+1} - e_t = 0$  não depende da taxa de câmbio  $e$ , portanto, é horizontal cruzando o eixo de preços em  $p^{ss}$ . Acima desta a taxa de câmbio se desvaloriza enquanto abaixo desta a taxa de câmbio se valoriza. Isto é indicado por setas apontando para a direita e para a esquerda, respectivamente. A configuração  $p_{t+1} - p_t = 0$  é inclinada para cima. À sua esquerda, os preços estão diminuindo, enquanto os preços estão aumentando a sua direita. Assim, temos quatro regiões: I, II, III e IV. Em cada região, o movimento de  $e$  e de  $p$  é indicado por setas. No modelo de Dornbusch, o nível de preços se ajusta lentamente e é considerado uma variável predeterminada. Suponha que no período o seu nível seja dado por  $p_0$ . A taxa de câmbio neste período não é dada, mas endógena e tem que ser determinada pelo modelo. Suponha que a taxa de câmbio no período o esteja em um nível correspondente ao ponto  $A$ . Este ponto está à esquerda de  $p_{t+1} - p_t = 0$  e acima de  $e_{t+1} - e_t = 0$  e, portanto, na região I. Isso implica que o nível de preços tem que cair e a taxa de câmbio aumentar. O caminho de  $e$  e de  $p$  continuará nessa direção até atingir o espaço  $e_{t+1} - e_t = 0$ . Nesse momento, o sistema entra na região IV e a direção é alterada: tanto o nível de preços quanto a taxa de câmbio diminuem. Eles vão assim para sempre. Estamos, portanto, em um caminho instável. Considere agora uma taxa de câmbio no período o correspondente ao ponto  $B$ . Como  $A$ , esse ponto também está na região I, de modo que a taxa de câmbio aumente e o nível de preços diminua. No entanto, em contraste com o caso anterior, o caminho que inicia em  $B$  atingirá o espaço  $p_{t+1} - p_t = 0$  e se moverá para a região II. Nesta região, tanto o nível de preços quanto a taxa de câmbio aumentam para sempre. Novamente, isso não pode ser um caminho estável. Assim, deve haver uma taxa de câmbio menor do que a correspondente ao ponto  $B$ , mas maior do que a correspondente ao ponto  $A$ , que define o sistema em um caminho que leva à constante estável. Esta é exatamente a taxa de câmbio que corresponde ao caminho da sela. Desta forma, a taxa de câmbio no período o é fixada unicamente pela exigência de que a trajetória de  $(e_t, p_t)'$  convirja.

FIGURA 15.4.1 – MODELO DE OVERSHOOTING DE DORNBUSCH



O diagrama de fases também é muito conveniente para analisar os efeitos de mudanças nas variáveis exógenas. Considere, por exemplo, um aumento permanente imprevisto na oferta monetária. Isso faz com que  $e_{t+1} - e_t = 0$  se move para cima e  $p_{t+1} - p_t = 0$  se move para a esquerda. O estado estacionário, portanto, muda. Suponha que o nível de preços tenha estado inicialmente em  $p^{ss}$ . Como o nível de preços não pode reagir à nova situação, ele permanecerá inicialmente no antigo nível estacionário. A taxa de câmbio, no entanto, pode se adaptar imediatamente e muda para  $e_0$  de forma que o sistema esteja no novo caminho de sela. Como esse valor está tipicamente acima do novo nível constante, dizemos que a taxa de câmbio ultrapassa o esperado (overshooting). A razão para esta depreciação “excessiva” da taxa de câmbio é a rigidez do nível de preços. No curto prazo, a taxa de câmbio carrega todo o peso do ajuste. Conforme o tempo evolui, o sistema se move ao longo de seu caminho de sela para seu novo estado estacionário. Durante essa transição, o nível de preços aumenta e a taxa de câmbio se valoriza. Assim, a reação imediata da economia é uma depreciação da taxa de câmbio associada a uma valorização esperada.

### 15.4.2 Modelo Novo Keynesiano

Nesta seção, estudamos uma versão simples do modelo macroeconômico novo keynesiano, como se tornou popular recentemente. Uma descrição detalhada do modelo e seus microfundamentos podem ser encontrados em Woodford (2003) e Galí (2008). Aqui seguimos a exposição de Galí (2011). O modelo consiste nas três equações a seguir:

$$y_t = y_{t+1} - \frac{1}{\sigma}(i_t - \pi_{t+1}), \quad (\text{IS}) \quad (15.4.23)$$

$$\pi_t = \beta\pi_{t+1} + \kappa y_t + u_t, \quad (\text{Curva de Phillips}) \quad (15.4.24)$$

$$i_t = \phi\pi_t, \quad (\text{Regra de Taylor}) \quad (15.4.25)$$

em que  $y_t$ ,  $\pi_t$  e  $i_t$  denotam a renda, a taxa de inflação e taxa de juros nominal, todos medidos como desvios do estado estacionário.  $u_t$  é um choque de custo exógeno. Além disso, assumimos que  $\sigma > 0$ ,  $\kappa > 0$  e  $0 < \beta < 1$ . Além disso, assumimos um banco central agressivo, ou seja,  $\phi > 1$ .

Este sistema pode ser resolvido para  $(y_{t+1}, \pi_{t+1})'$  inserindo a regra de Taylor e a curva de Phillips na equação IS:

$$X_{t+1} = \begin{pmatrix} \pi_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} 1 & -\kappa \\ \frac{(\phi\beta - 1)}{\sigma} & \beta + \frac{\kappa}{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{u_t}{\beta} \\ \frac{u_t}{(\sigma\beta)} \end{pmatrix}. \quad (15.4.26)$$

Denote o polinômio característico de  $\Phi$  por  $\mathcal{P}(\lambda)$  e os autovalores correspondentes por  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , então temos:

$$\mathcal{P}(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - \text{tr}(\Phi)\lambda \det(\Phi), \quad (15.4.27)$$

em que

$$\text{tr}(\Phi) = 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{\kappa}{\sigma\beta} > 2, \quad (15.4.28)$$

$$\det(\Phi) = \frac{1}{\beta} + \frac{\kappa\phi}{\sigma\beta} > 1, \quad (15.4.29)$$

$$\Delta = (\text{tr}(\Phi))^2 - 4\det(\Phi) = \frac{1}{\sigma\beta} \left( \frac{(\sigma\beta + \sigma + \kappa)^2}{\sigma\beta} - 4(\sigma - \phi\kappa) \right), \quad (15.4.30)$$

$$\mathcal{P}(1) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) = \frac{\kappa}{\sigma\beta}(\phi - 1) > 0 \quad \text{se } \phi > 1. \quad (15.4.31)$$

Dependendo da magnitude de  $\phi$ , as raízes podem ser complexas. Assuma que  $\phi$  é significativo, tal que  $\Delta < 0$ . Neste caso, temos duas raízes conjugadas complexas. Uma vez que  $\det(\Phi) > 1$ , eles estão localizados fora do círculo unitário. Como alternativa, assuma que  $\phi$  é pequeno o suficiente para que  $\Delta > 0$ . Nesse caso, ambos os autovalores são reais. Usando a suposição de que  $\phi > 1$ , isso implica que  $\mathcal{P}(1) > 0$ . Assim, ambas as raízes são maiores ou menores que 1. Eles não podem ser menores que um porque  $\text{tr}(\Phi) > 2$ . Assim, em ambos os casos, chegamos à conclusão de que os autovalores estão fora do círculo unitário. Como as duas variáveis não são predeterminadas, a condição de limitação,  $Q_c = 0$ , que é equivalente a  $c = 0$ , determina a solução única:

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} Q \begin{pmatrix} \lambda_1^{-j} & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-j} \end{pmatrix} Q^{-1} \begin{pmatrix} \frac{u_{t-1+j}}{\beta} \\ \frac{u_{t-1+j}}{\sigma\beta} \end{pmatrix}. \quad (15.4.32)$$

em que as colunas de  $Q$  correspondem aos autovetores associados aos autovalores.

Suponha agora que o banco central fixe a trajetória da taxa de juros. A taxa de juros torna-se então uma variável exógena e o sistema muda para:

$$X_{t+1} = \begin{pmatrix} \pi_{t+1} \\ y_{t+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\beta} \begin{pmatrix} 1 & -\kappa \\ -\frac{1}{\sigma} & \beta + \frac{\kappa}{\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_t \\ y_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{u_t}{\beta} \\ \frac{i_t^*}{\sigma} + \frac{u_t}{(\sigma\beta)} \end{pmatrix}. \quad (15.4.33)$$

em que  $i_t^*$  é a variável exógena agora. O traço, determinante e discriminante do polinômio característico de  $\tilde{\Phi}$  se torna:

$$\text{tr}(\tilde{\Phi}) = 1 + \frac{1}{\beta} + \frac{\kappa}{\sigma\beta} > 2, \quad (15.4.34)$$

$$\det(\Phi) = 1 + \frac{\sigma}{\beta\kappa} > 1, \quad (15.4.35)$$

$$\Delta = (\text{tr}(\tilde{\Phi}))^2 - 4\det(\tilde{\Phi}) > 0, \quad (15.4.36)$$

$$\mathcal{P}(1) = (1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2) = \frac{\kappa(1 - \beta)}{\sigma\beta^2} < 0. \quad (15.4.37)$$

O discriminante é agora inequivocamente positivo e ambos os autovalores sejam reais. Além disso,  $\mathcal{P}(1) < 0$  para que um autovalor seja menor que um e outro maior que um. Assim, a condição de limitação não determina uma solução única. Em vez disso, há um continuum de soluções indexadas por  $c_1$  e nos deparamos com o caso da indeterminação. As implicações dessa indeterminação para a política monetária e possíveis soluções são discutidas em Galí (2011).

---

**16**

---

---

## CÁLCULO DE VARIAÇÕES

---

O principal problema no cálculo de variações é determinar uma função maximizadora ou minimizadora de um dado funcional, o que permite expressar um problema variacional em qualquer coordenada, ou seja, encontrar extremos de um funcional. Um funcional é uma aplicação de um espaço de funções sobre o conjunto dos números reais, isto é, associa a uma função de uma certa classe um número no conjunto dos reais. Este é claramente um problema dimensional infinito. O análogo dimensional finito é o problema de cálculo padrão de determinar um ponto no qual uma função específica alcança seu valor máximo ou mínimo. A abordagem típica para resolver esse problema é calcular a primeira derivada da função para encontrar seus zeros, levando à condição de primeira ordem para a existência de um ponto extremo para a função. Um procedimento similar será usado para obter a condição de primeira ordem para o problema variacional. A analogia com a otimização clássica se estende à condição de maximização de segunda ordem. É interessante lembrar que o princípio de Hamilton, do controle ótimo, tem por base o cálculo variacional.

## 16.1 Tempo Contínuo

Seja  $x: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função  $\mathcal{C}^1$  definida no intervalo  $[0, T]$ , isto é,  $x(\cdot)$  é continuamente diferenciável em  $[0, T]$ . Dizemos que  $x(\cdot) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  é uma função admissível se satisfizer as seguintes condições de contorno:

$$x(0) = x_0 \tag{16.1.1}$$

$$x(T) = x_T, \tag{16.1.2}$$

em que  $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ . Denotamos por  $A[0, T]$  o conjunto de tais funções admissíveis. Seja  $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável. O problema do cálculo de variações é encontrar a função admissível  $x^*(\cdot) \in A[0, T]$  para a qual o funcional  $J: \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$J[x(\cdot)] = \int_0^T L(t, x, \dot{x}) dt, \tag{16.1.3}$$

tem um extremo (máximo ou mínimo). A função  $L$  é uma função de três variáveis reais. Os limites de integração, 0 e  $T$ , são fixos. Esta condição é o núcleo do cálculo de variações. A função  $L$  chama-se função de Lagrange. Notamos que este é um dos problemas mais simples do cálculo de variações. Várias modificações podem ser feitas.

### 16.1.1 Equação de Euler-Lagrange

Seja  $\eta \in \mathcal{C}^1([0, T])$ ,  $\alpha$  um número suficientemente pequeno, e  $x(t)$  um extremo do funcional  $J$ . Considere a função  $x_1(t) = x(t) + \alpha\eta(t)$ , em que  $\eta(t)$  é uma função diferenciável arbitrária.

Observe que o que fizemos foram variações na função  $x(t)$ , isto é, somamos a ela um número  $\alpha$  multiplicado por outra função  $\eta(t)$ . Daí deriva o nome cálculo de variações.

A função  $x_1(t)$  pertence a uma vizinhança de  $x(t)$ , no sentido da norma no espaço  $C^1([0, T])$ , em que a norma é definida como  $\|X\| = \sup_{[0, T]} |x| + \sup_{[0, T]} |\dot{x}|$ . De fato, considere um  $\delta > 0$  qualquer. Temos que

$$\|x_1 - x\| = \|x(t) + \alpha\eta(t) - x(t)\| = \|\alpha\eta\| = |\alpha||\eta| \leq C|\alpha|, \quad (16.1.4)$$

em que  $C$  é um majorante de  $\|\eta\|$ , ou seja, valores pelos quais todos os elementos de  $\eta$  são menores. Então, se  $\alpha$  é tal que  $|\alpha| < \frac{\delta}{C}$ , é válida a desigualdade

$$\|x_1 - x\| \leq \delta. \quad (16.1.5)$$

Impondo as condições  $x_1(0) = x_0$  e  $x_1(T) = x_T$ , temos  $\eta(0) = \eta(T) = 0$ . Isso implica que a função  $x_1(t)$  também passa pelos mesmos pontos inicial e final que  $x(t)$ . Como a função pertence ao domínio de definição do funcional  $J$ , podemos introduzir a função

$$\varphi(\alpha) := J[x(t) + \alpha\eta(t)] = \int_0^T L(t, x + \alpha\eta, \dot{x} + \alpha\dot{\eta}) dt. \quad (16.1.6)$$

Do cálculo diferencial, a condição  $\varphi'(0) = 0$  é uma condição necessária para  $x$  ser extremo, ou seja,  $\varphi = 0$  implica que  $J[\cdot]$  é um máximo ou um mínimo. Desta forma, segue da regra da cadeia que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \varphi(\alpha) &= \varphi'(x) = \int_0^T \frac{d}{d\alpha} L(t, x + \alpha\eta, \dot{x} + \alpha\dot{\eta}) dt \\ &= \int_0^T [L_x(t, x + \alpha\eta, \dot{x} + \alpha\dot{\eta})\eta + L_{\dot{x}}(t, x + \alpha\eta, \dot{x} + \alpha\dot{\eta})\dot{\eta}] dt \end{aligned} \quad (16.1.7)$$

Fazendo a integração por partes do segundo termo,

$$\int_0^T L_{\dot{x}}\dot{\eta} dt = L_{\dot{x}}\eta|_0^T - \int_0^T \eta \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} dt = - \int_0^T \eta \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} dt \quad (16.1.8)$$

Assim, temos que:

$$\varphi'(0) = \int_0^T \left( L_x - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}} \right) \eta dt = 0 \quad (16.1.9)$$

Logo,

$$L_x(t, x, \dot{x}) - \frac{d}{dt} L_{\dot{x}}(t, x, \dot{x}) = 0 \quad (16.1.10)$$

e, assim, obtemos a equação de Euler-Lagrange.

Derivamos assim uma condição necessária para que uma função admissível seja um extremo do funcional (16.1.3): a equação de Euler-Lagrange.

**Teorema 16.1.1.** *Seja  $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{C}^2$  e seja  $A_1[0, T]$  o seguinte conjunto:*

$$A_1[0, T] = \{x(\cdot) \in \mathcal{C}^2([0, T], \mathbb{R}^n) : x(0) = x_0, x(T) = x_T\}. \quad (16.1.11)$$

Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_1[0, T]$ , então  $x^*(\cdot)$  é uma solução da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} D_{\dot{x}} L = D_x L. \quad (16.1.12)$$

com condições de contorno dadas por  $x(0) = x_0$  e  $x(T) = x_T$ . Assim, requer-se que  $L_x$ ,  $L_{tx}$  e  $L_{t\dot{x}}$  existam e sejam contínuas.

A equação de Euler-Lagrange é em geral uma equação diferencial de segunda ordem, portanto sua solução dependerá de duas constantes arbitrárias, determinadas a partir das condições de contorno  $x(0) = x_0$  e  $x(T) = x_T$ , ou de algumas condições de transversalidade nos casos em que as condições de contorno não são impostas. O problema geralmente considerado na teoria das equações diferenciais é o de encontrar uma solução que é definida na vizinhança de algum ponto e satisfaz as condições iniciais dadas. Isto é, a equação de Euler-Lagrange é uma equação diferencial em que as soluções são funções estacionárias. Já que uma função diferencial é estacionária em seus extremos, a equação de Euler-Lagrange é útil na resolução de problemas de otimização. A existência de soluções da equação é garantida pelo teorema de Bernstein.

Os próximos dois resultados referem-se à condição de segunda ordem para otimização do funcional  $J[\cdot]$  em  $A[0, T]$ . Deve-se observar que tais condições são apenas necessárias.

**Teorema 16.1.2 (Condição Necessária de Jacobi).** *Seja  $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{C}^2$ . Suponha que  $x^*(\cdot) \in A[0, T]$  seja um maximizador (minimizador) do funcional  $J[\cdot]$  em  $A[0, T]$ . Então, para cada  $\eta(\cdot) \in \mathcal{C}^1([0, T], \mathbb{R}^n)$  tal que  $\eta(0) = \eta(T) = 0$  a integral*

$$\int_0^T \frac{1}{2} \left( L_{xx} - \frac{d}{dt} L_{x\dot{x}} \right) \eta^2 + \frac{1}{2} L_{\dot{x}\dot{x}} \dot{\eta}^2 dt \quad (16.1.13)$$

é negativa (positiva). Esta condição equivale a segunda variação de  $J$ , dada por  $\delta^2 J_x(\eta^2) := \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} |_{\alpha=0} J(x + \alpha\eta)$ .

**Corolário 16.1.1 (Condição Necessária de Legendre).** *Seja  $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{C}^2$ . Suponha que  $x^*(\cdot) \in A[0, T]$  seja um maximizador (minimizador) do funcional  $J[\cdot]$  em  $A[0, T]$ . Então,  $D_{\dot{x}\dot{x}} L(t, x^*, \dot{x}^*)$  é negativa semidefinida (positiva semidefinida).*

Também existe a condição de Weierstrass.

A equação de Euler-Lagrange é geralmente uma equação diferencial não-linear de segunda ordem muito complicada. Resolvê-la explicitamente em termos de funções elementares e suas integrais é muito difícil. No entanto, para vários casos especiais, soluções explícitas podem ser derivadas. Consideramos alguns desses casos abaixo:

1.  $L$  não depende de  $\dot{x}$ .

Uma vez que  $D_{\dot{x}}L = 0$ , a equação de Euler reduz-se à seguinte condição de otimização estática:

$$D_x L(t, x) = 0, \quad t \in [0, T]. \quad (16.1.14)$$

A equação anterior não é sequer uma equação diferencial, sua solução não envolve quaisquer constantes arbitrárias. Portanto, o problema de maximizar  $J[\cdot]$  em  $A[0, T]$  geralmente não terá solução. No entanto, a condição de optimidade é necessária para o problema de maximizar a função  $J[\cdot]$  sem condições de contorno.

2.  $L$  não depende de  $x$ . Neste caso,  $D_x L = 0$  e a equação de Euler nos diz que a derivada temporal  $D_{\dot{x}}L(t, \dot{x})$  é igual a 0 para todo  $t \in [0, T]$ . Portanto, temos:

$$D_{\dot{x}}L(t, x) = c, \quad (16.1.15)$$

para alguma constante  $c$  para todo  $t \in [0, T]$ . Esta é uma equação diferencial de primeira ordem, que eventualmente pode ser resolvida explicitamente. Uma estratégia seria resolvê-lo para  $\dot{x}$  e integrar com relação a  $t$ .

### 16.1.2 Condições de Contorno

As restrições sobre as funções  $x(\cdot)$  podem variar. Resumimos algumas variações simples na proposição abaixo.

**Proposição 16.1.1.** Seja  $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^2$  e defina os conjuntos:

$$A_2[0, t] = \{x(\cdot) \in C^2([0, T], \mathbb{R}^n) : x(0), x(T) \in \mathbb{R}^n\}, \quad (16.1.16)$$

$$A_3[0, t] = \{x(\cdot) \in C^2([0, T], \mathbb{R}^n) : x(0) = x_0, x(T) \in \mathbb{R}^n\}, \quad (16.1.17)$$

$$A_4[0, t] = \{x(\cdot) \in C^2([0, T], \mathbb{R}^n) : x(0) = x(T) \in \mathbb{R}^n\}. \quad (16.1.18)$$

Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_i[0, T]$ ,  $i \in \{2, 3, 4\}$ , então  $x^*(\cdot)$  é uma solução da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} = L_x. \quad (16.1.19)$$

Assim, as seguintes condições de transversalidade devem ser satisfeitas:

1. Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_2[0, T]$ , então:

$$L_{\dot{x}}(0, x(0), \dot{x}(0)) = L_{\dot{x}}(T, x(T), \dot{x}(T)) = 0. \quad (16.1.20)$$

2. Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_3[0, T]$ , então:

$$L_{\dot{x}}(T, x(T), \dot{x}(T)) = 0, \quad x(0) = x_0. \quad (16.1.21)$$

3. Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_4[0, T]$ , então:

$$L_{\dot{x}}(0, x(0), \dot{x}(0)) = L_{\dot{x}}(T, x(T), \dot{x}(T)), \quad x(0) = x(T). \quad (16.1.22)$$

### 16.1.3 Horizonte Infinito

Uma das principais áreas para aplicação de métodos variacionais em economia é a teoria do crescimento, onde muitos modelos têm a característica de que o período de planejamento é infinito. Esse recurso leva a problemas variacionais com domínios de integração ilimitados. Dois problemas matemáticos surgem: (i) encontrar alguma classe natural de funções admissíveis; e (ii) encontrar condições corretas de transversalidade no infinito. Para o propósito desta condição, a equação de Euler ainda é uma condição necessária para otimalidade.

Seja  $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável e seja  $J: C^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  o seguinte funcional:

$$J[x(\cdot)] = \int_0^\infty L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt. \quad (16.1.23)$$

Defina o conjunto  $A_\infty$  de funções admissíveis como:

$$A_\infty = \{x(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^n): \text{existe } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \text{ e } |J[x(\cdot)]| < +\infty\}. \quad (16.1.24)$$

Agora, vamos considerar o seguinte problema: encontrar um critério para uma função admissível  $x^*(\cdot) \in A_\infty$  ser um máximo relativo do funcional  $J[\cdot]$ . A proposição a seguir afirma que se  $x^*(\cdot) \in A_\infty \cap C^2(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^n)$  é um ponto crítico de  $J[\cdot]$ , então ele deve satisfazer a equação de Euler-Lagrange e algumas condições de transversalidade associadas a algumas eventuais restrições de limite impostas a  $x^*(\cdot)$ .

**Proposição 16.1.2.** *Seja  $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^2$  e defina os conjuntos:*

$$A_\infty^1 = \{x(\cdot) \in A_\infty \cap C^2(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^n): x(0) = x_0, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_\infty\}, \quad (16.1.25)$$

$$A_\infty^2 = \{x(\cdot) \in A_\infty \cap C^2(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^n): x(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \text{ livre}\}, \quad (16.1.26)$$

$$A_\infty^3 = \{x(\cdot) \in A_\infty \cap C^2(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^n): x(0) = x_0, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \text{ livre}\}. \quad (16.1.27)$$

Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_\infty^i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , então  $x^*(\cdot)$  é uma solução da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} = L_x. \quad (16.1.28)$$

Assim, as seguintes condições de transversalidade devem ser satisfeitas:

1. Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_\infty^1$ , então:

$$x(0) = x_0 \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_\infty. \quad (16.1.29)$$

2. Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_\infty^2$ , então:

$$L_{\dot{x}}(0, x(0), \dot{x}(0)) = \lim_{T \rightarrow +\infty} L_{\dot{x}}(T, x(T), \dot{x}(T)) = 0. \quad (16.1.30)$$

3. Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_\infty^3$ , então:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} L_{\dot{x}}(T, x(T), \dot{x}(T)) = 0, \quad x(0) = x_0. \quad (16.1.31)$$

#### 16.1.4 Condição Suficiente

Vamos agora enunciar um teorema fornecendo uma condição suficiente para uma solução da equação de Euler-Lagrange ser um maximizador (ou minimizador) do funcional  $J[\cdot]$  para todo  $t \in [0, T]$ . A condição chave no teorema é que  $L(t, x, \dot{x})$  deve ser uma função côncava (respectivamente convexa) de  $(x, \dot{x})$ . Tal condição restringe substancialmente a classe de funções  $L$  para as quais o teorema pode ser aplicado. No entanto, a exigência de concavidade (ou convexidade) é muitas vezes natural em problemas econômicos, e o teorema é, portanto, um resultado muito importante.

**Teorema 16.1.3.** Suponha que as condições da equação de Euler-Lagrange são satisfeitas e que  $x^*(\cdot) \in A_1[0, T]$  seja uma solução da equação de Euler-Lagrange. Então:

1. se o mapa  $(x, \dot{x}) \rightarrow L(t, x, \dot{x})$  é côncavo (convexo) para todo  $t \in [0, T]$ , então  $x^*(\cdot)$  é um máximo (mínimo) de  $J[\cdot]$  em  $A[0, T]$ .
2. se o mapa  $(x, \dot{x}) \rightarrow L(t, x, \dot{x})$  é estritamente côncavo (estritamente convexo) para todo  $t \in [0, T]$ , então o máximo (mínimo) de  $J[\cdot]$ , se existe, é único.

#### 16.1.5 Crescimento Ótimo em Ramsey

Vamos agora discutir a questão de Ramsey sobre o crescimento ótimo. Considere que  $K = K(t)$  denote o capital acumulado,  $C = C(t)$  o consumo e  $Y = Y(t)$  a renda nacional líquida no tempo  $t$ . Suponha que o produto nacional é uma função apenas do capital acumulado:

$$Y = f(K), \quad (16.1.32)$$

em que  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função côncava estritamente crescente do capital acumulado. Para cada  $t$ , temos a seguinte relação:

$$C(t) = f(K(t)) - \dot{K}(t), \quad (16.1.33)$$

significando que o produto é alocado entre consumo e investimento.

Seja  $K(0) = K_0$  o capital acumulado em algum instante do tempo  $t = 0$  e suponha que estamos considerando um período de planejamento fixo  $[0, T]$ , para algum  $T > 0$ . Para cada escolha da função de investimento  $\dot{K}(t)$  em  $[0, T]$ , a acumulação de capital é totalmente determinada por

$$K(t) = K_0 + \int_0^t \dot{K}(s)ds. \quad (16.1.34)$$

O problema enfrentado pelo policymaker é escolher a função de investimento. O consumo elevado no momento atual é preferível, mas leva a uma taxa baixa de investimento que resulta em uma menor acumulação de capital no futuro, reduzindo o consumo futuro. O planejador precisa encontrar uma maneira de reconciliar o conflito de prover o presente e cuidar do futuro.

Para resolver esse problema, assumimos que as preferências da sociedade podem ser descritas por uma função de utilidade  $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Assumimos que  $U$  é uma função estritamente crescente e estritamente côncava. Além disso, introduzimos um fator de desconto e assumimos que o critério de investimento é o seguinte: escolha  $\dot{K}(t)$  para  $t \in [0, T]$  tal que a utilidade total com desconto no período  $[0, T]$  seja o máximo, isto é, encontrar a função de acumulação de capital  $K = K(t)$ , com  $K(0) = K_0$  e  $K(T) = K_T$ , que maximize o funcional

$$J[K(t)] = \int_0^T \exp(-\rho t) U(C(t)) dt = \int_0^T \exp(-\rho t) U[f(K(t)) - \dot{K}(t)]. \quad (16.1.35)$$

Denote por  $L$  a função a ser integrada:

$$L(t, K, \dot{K}) = \exp(-\rho t) U(f(K) - \dot{K}). \quad (16.1.36)$$

Uma condição necessária que deve ser satisfeita para ser uma solução ótima é:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{K}} = \frac{\partial L}{\partial K}. \quad (16.1.37)$$

Computando as derivadas de  $L$  em relação a  $K$  e  $\dot{K}$ , obtemos:

$$\frac{d}{dt} [-\exp(-\rho t)U'(f(K) - \dot{K})] = \exp(-\rho t)U'(f(K) - \dot{K})f'(K). \quad (16.1.38)$$

Agora calculamos a derivada em relação a  $t$  da equação acima para obter

$$\rho \exp(-\rho t)[U'(f(K) - \dot{K})] - \exp(-\rho t)U''[(f(K) - \dot{K})][f'(K)\dot{K} - \ddot{K}] = \exp(-\rho t)U'(f(K) - \dot{K})f'(K). \quad (16.1.39)$$

Dividindo a igualdade anterior por  $\exp(-\rho t)U''[(f(K) - \dot{K})]$  e rearranjando termos, obtemos:

$$\dot{K} - f'(K)\dot{K} + (\rho - f'(K))\frac{U'(f(K) - \dot{K})}{U''(f(K) - \dot{K})} = 0 \quad (16.1.40)$$

Uma solução para o problema variacional sob consideração deve então satisfazer a equação diferencial de segunda ordem acima, com as condições de contorno  $K(0) = K_0$  e  $K(T) = K_T$ . Deve-se notar que soluções explícitas não podem ser obtidas para esta equação diferencial, exceto em alguns casos muito especiais. No entanto, podemos obter informações extras da equação sem precisar resolvê-la.

Vamos agora calcular a taxa de crescimento de  $C$ , dada pela razão  $\frac{\dot{C}}{C}$ . Lembre-se que  $C = f(K) - \dot{K}$  para obter

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{f'(K)\dot{K} - \ddot{K}}{C} = (\rho - f'(K))\frac{U'(C)}{CU''(C)}. \quad (16.1.41)$$

Como estamos assumindo que  $U'(C) > 0$  e  $U''(C) < 0$ , obtemos que a taxa de crescimento relativo de  $C$  é positiva se  $f'(K)$  (a produtividade marginal do capital) for maior que a taxa de desconto  $\rho$ .

Veremos agora que uma solução acima é de fato um maximizador de  $J[\cdot]$ . Note que: (i)  $f$  é uma função côncava; (ii)  $f(K) + (\dot{K})$  é a soma de duas funções côncavas, portanto côncava em  $(K, \dot{K})$ ; (iii)  $U$  é crescente e côncava; obtemos que  $L(t, K, \dot{K}) = \exp(-\rho t)U(f(K) - \dot{K})$  é côncava em  $(K, \dot{K})$  para cada  $t$  fixo. Assim, pelo teorema que garante a suficiência, a solução acima é um maximizador de  $J[\cdot]$ .

## 16.2 Tempo Discreto

Seja  $\Theta = \{0, 1, \dots, T\}$  um conjunto de índices temporais e  $x = \{x_t\}_{t \in \Theta}$  uma sequência no  $\mathbb{R}^n$  indexada pelos elementos de  $\Theta$ . Note que  $x$  pode ser visto como uma função  $x: \Theta \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $x(\cdot) \in \ell^\infty(\Theta, \mathbb{R}^n)$  é uma função admissível se satisfizer as seguintes condições de contorno:

$$x(0) = x_0 \quad (16.2.1)$$

$$x(T) = x_T, \quad (16.2.2)$$

em que  $x_0, x_T \in \mathbb{R}^n$ . Denotamos por  $A_1^\Theta$  o conjunto de tais funções admissíveis.

Seja  $L: \Theta \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função continuamente diferenciável para todo  $t \in \Theta$ . O problema do cálculo de variações é encontrar a função admissível  $x^*(\cdot) \in A_1^\Theta$  para a qual o funcional  $J: A_1^\Theta \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$J[x(\cdot)] = \sum_{t=0}^{T-1} L(t, x_t, x_{t+1}), \quad (16.2.3)$$

tem um máximo relativo.

### 16.2.1 Equação de Euler-Lagrange

Derivamos abaixo uma condição necessária para que uma função admissível seja um extremo do funcional (16.2.3): a equação de Euler-Lagrange.

**Teorema 16.2.1.** Seja  $L: \Theta \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{C}^1$  para todo  $t \in A_1^\Theta$ . Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_1^\Theta$ , então  $x^*(\cdot)$  é uma solução da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x_t}(t-1, x_{t-1}, x_t) + \frac{\partial L}{\partial x_t}(t, x_t, x_{t+1}) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T-1 \quad (16.2.4)$$

com condições de contorno dadas por  $x(0) = x_0$  e  $x(T) = x_T$ .

### 16.2.2 Condições de Contorno

As restrições sobre as funções  $x(\cdot)$  podem variar. Resumimos algumas variações simples na proposta abaixo.

**Proposição 16.2.1.** Seja  $L: \Theta \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $\mathcal{C}^1$  e defina os conjuntos:

$$A_2^\Theta = \{x(\cdot) \in \ell^\infty(\Theta, \mathbb{R}^n) : x(0), x(T) \in \mathbb{R}^n\}, \quad (16.2.5)$$

$$A_3^\Theta = \{x(\cdot) \in \ell^\infty(\Theta, \mathbb{R}^n) : x(0) = x_0, x(T) \in \mathbb{R}^n\}, \quad (16.2.6)$$

$$A_4^\Theta = \{x(\cdot) \in \ell^\infty(\Theta, \mathbb{R}^n) : x(0) = x(T) \in \mathbb{R}^n\}. \quad (16.2.7)$$

Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_i^\Theta$ ,  $i \in \{2, 3, 4\}$ , então  $x^*(\cdot)$  é uma solução da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x_t}(t-1, x_{t-1}, x_t) + \frac{\partial L}{\partial x_t}(t, x_t, x_{t+1}) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T-1 \quad (16.2.8)$$

Assim, as seguintes condições de transversalidade devem ser satisfeitas:

1. Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_2^\Theta$ , então:

$$\frac{\partial L}{\partial x_0}(0, x_0, x_1) = \frac{\partial L}{\partial x_T}(T-1, x_{T-1}, x_T) = 0. \quad (16.2.9)$$

2. Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_3^\Theta$ , então:

$$\frac{\partial L}{\partial x_T}(T-1, x_{T-1}, x_T) = 0, \quad x(0) = x_0 \quad (16.2.10)$$

3. Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_4^\Theta$ , então:

$$\frac{\partial L}{\partial x_0}(0, x_0, x_1) + \frac{\partial L}{\partial x_T}(T-1, x_{T-1}, x_T) = 0, \quad x(0) = x(T). \quad (16.2.11)$$

### 16.2.3 Horizonte Infinito

Vamos agora discutir brevemente o problema variacional em tempo discreto com horizonte infinito, de grande relevância para tópicos como a teoria do crescimento ótimo. Seja  $T = \infty$  e  $\Theta = \mathbb{N}_0$ . Considere o funcional  $J: \ell^\infty(\Theta, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  dado por

$$J[x(\cdot)] = \sum_{t=0}^{\infty} L(t, x_t, x_{t+1}) \quad (16.2.12)$$

e seja  $A_\infty$  o conjunto de funções admissíveis:

$$A_\infty^1 = \{x(\cdot) \in \ell^\infty(\Theta, \mathbb{R}^n) : \text{existe } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \text{ e } |J[x(\cdot)]| < +\infty\} \quad (16.2.13)$$

**Proposição 16.2.2.** Seja  $L: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^2$  e defina os conjuntos:

$$A_\infty^2 = \{x(\cdot) \in A_\infty \cap C^2(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^n) : x(0), \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \text{ livre}\}, \quad (16.2.14)$$

$$A_\infty^3 = \{x(\cdot) \in A_\infty \cap C^2(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^n) : x(0) = x_0, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \text{ livre}\}. \quad (16.2.15)$$

Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_\infty^i$ ,  $i \in \{2, 3\}$ , então  $x^*(\cdot)$  é uma solução da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x_t}(t-1, x_{t-1}, x_t) + \frac{\partial L}{\partial x_t}(t, x_t, x_{t+1}) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T-1 \quad (16.2.16)$$

Assim, as seguintes condições de transversalidade devem ser satisfeitas:

1. Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_\infty^2$ , então:

$$\frac{\partial L}{\partial x_0}(0, x_0, x_1) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\partial L}{\partial x_T}(T-1, x_{T-1}, x_T) = 0. \quad (16.2.17)$$

2. Se  $x^*(\cdot)$  é um ponto crítico do funcional  $J[\cdot]$  em  $A_\infty^3$ , então:

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{\partial L}{\partial x_T}(T-1, x_{T-1}, x_T) = 0, \quad x(0) = x_0 \quad (16.2.18)$$

#### 16.2.4 Condição Suficiente

Vamos agora enunciar um teorema fornecendo uma condição suficiente para uma solução da equação de Euler-Lagrange ser um maximizador (ou minimizador) do funcional  $J[\cdot]$  para todo  $t \in \Theta$ .

**Teorema 16.2.2.** *Suponha que as condições da equação de Euler-Lagrange são satisfeitas e que  $x^*(\cdot) \in A_1^\Theta$  seja uma solução da equação de Euler-Lagrange. Então:*

1. se o mapa  $(x, y) \rightarrow L(t, x, y)$  é côncavo (convexo) para todo  $t \in [0, T]$ , então  $x^*(\cdot)$  é um máximo (mínimo) de  $J[\cdot]$  em  $A^\Theta$ .
2. se o mapa  $(x, y) \rightarrow L(t, x, y)$  é estritamente côncavo (estritamente convexo) para todo  $t \in [0, T]$ , então o máximo (mínimo) de  $J[\cdot]$ , se existe, é único.

#### 16.2.5 Consumo ótimo

Considere o problema de um consumidor que enfrenta um período de planejamento de  $T$  períodos, em que  $T$  é um número inteiro positivo. Assumimos que esse consumidor tem riqueza inicial  $w_0 > 0$ . Se em algum momento o consumidor tiver riqueza e consumir sua riqueza, então, no início do próximo período, o consumidor terá uma riqueza de  $w_{t+1} = (1+r)(w_t - c_t)$ , em que  $r$  é uma taxa de juros positiva constante. Seja  $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função utilidade descrevendo as preferências do consumidor. Suponha que a função  $U$  seja duas vezes continuamente diferenciável com a primeira derivada positiva e segunda derivada negativa. Seja  $\beta \in (0, 1)$  um fator de desconto. O objetivo do consumidor é maximizar:

$$J[w] = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t U(c_t), \quad (16.2.19)$$

com as condições de contorno  $w_0$  e  $w_T$ .

Reescrevendo o funcional como:

$$J[w] = \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t U \left( w_t - \frac{1}{1+r} w_{t+1} \right). \quad (16.2.20)$$

A correspondente equação de Euler-Lagrange é dada por:

$$U' \left( w_t - \frac{1}{1+r} w_{t+1} \right) - \frac{1}{\beta(1+r)} U' \left( w_{t-1} - \frac{1}{1+r} w_t \right) = 0, \quad t = 1, 2, \dots, T-1 \quad (16.2.21)$$

com  $w(0) = w_0$  e  $w(T) = w_T$ .

Veja que

$$\frac{U' \left( w_t - \frac{1}{1+r} w_{t+1} \right)}{U' \left( w_{t-1} - \frac{1}{1+r} w_t \right)} = \frac{1}{\beta(1+r)}, \quad (16.2.22)$$

ou seja, a taxa marginal de substituição de consumo futuro por consumo presente dependerá de forma inversa da taxa de preferência intertemporal e da taxa de juros, isto é, essa taxa marginal é igual ao preço relativo do consumo.

---

## PROGRAMAÇÃO DINÂMICA

---

Os modelos de otimização dinâmica podem se dar em uma estrutura de tempo discreto ou de tempo contínuo. No primeiro caso, trabalhamos com a equação de Bellman, o teorema da contração de um mapa, as condições suficientes de Blackwell e resolvemos o modelo por meio de métodos numéricos. Podemos utilizar essa abordagem para estudar modelos de crescimento econômico, consumo ótimo, precificação de ativos, entre outros. No caso de tempo contínuo, também trabalhamos com a equação de Bellman, mas precisamos da noção de movimento browniano, processo de Itô e lema de Itô. Podemos utilizar essa abordagem para estudar a formação de preços, decisões de investimento, organização industrial, busca por trabalho, entre outros.

O princípio de Bellman apresenta um problema de otimização usando uma equação diferencial parcial de primeira ordem não linear - o objeto que está sendo otimizado é uma função. O princípio do máximo de Pontryagin apresenta o mesmo problema usando uma forma de cálculo de variações - o objeto otimizado é uma curva. O método de Bellman foi originalmente formulado para tempo discreto e estendido para tempo contínuo.

Isto implica em diferenças técnicas e diferentes condições de existência de soluções, que são discutidas na literatura. A curva ótima dada pelo princípio do máximo é uma característica de Cauchy da equação diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman - o problema de encontrar uma solução de uma equação diferencial parcial.

Em qualquer problema de programação dinâmica, existem duas variáveis principais: uma variável de estado e uma variável de ação (variável de decisão ou variável de controle). Essas variáveis podem ser vetores. A decisão ótima é uma função dependente da variável de estado e do tempo  $t$ . A função é chamada de função de política em Bellman. A equivalência entre os problemas de decisão sequencial e seus correspondentes problemas de programação dinâmica é chamada de princípio de otimalidade.

Estamos interessados em métodos recursivos para resolver problemas de otimização dinâmica. Vamos começar ilustrando métodos recursivos no caso de um problema de programação dinâmica de horizonte finito e, então, passar para o caso do horizonte infinito.

Os modelos com os quais estamos preocupados consistem em um problema de otimização dinâmica e um plano de escolha ideal (ótima) resultante que o resolva. Em princípio, isso envolvia a busca de uma solução para uma sequência infinita de equações - uma equação em diferença (a equação de Euler). A busca por uma sequência às vezes é impraticável e nem sempre intuitiva. Uma abordagem alternativa, a programação dinâmica, é muitas vezes disponível. A chave para a programação dinâmica é pensar em decisões dinâmicas como sendo feitas não de uma vez por todas, mas recursivamente: período a período.

Existem três maneiras básicas de resolver um problema de programação dinâmica. São elas:

1. “Chutar” e verificar a forma da função valor
2. Iterar a equação de Bellman analiticamente
3. Iterar a equação de Bellman numericamente

Se você “chutar” corretamente, o primeiro método é bastante simples. No entanto, adivinhar corretamente é difícil e muitas vezes não é possível a todos os problemas. O segundo método sempre funcionará, mas pode não levar a uma expressão de forma definida. O terceiro método é a

principal maneira pela qual os problemas de programação dinâmica são resolvidos na prática, mas não entraremos nos detalhes.

Quando não há uma solução para um problema de tempo contínuo, o método numérico mais comumente utilizado é aproximar o problema de tempo contínuo pela versão de tempo discreto com pequenos intervalos de tempo entre decisões sucessivas e resolver o problema de tempo discreto aproximado usando métodos de programação dinâmica de tempo discreto. Isso é prático porque as soluções dos problemas de programação dinâmica em tempo discreto convergem para a solução de tempo contínuo sob algumas condições gerais, pois os intervalos de tempo tendem a zero.

## 17.1 Horizonte Finito

O ambiente em que vamos pensar é aquele que consiste em uma sequência de períodos de tempo indexados como  $1, \dots, T < \infty$ . Vamos pensar sobre o problema de alguém que está escolhendo uma sequência de variáveis de controle,  $c_t \in C \subset \mathbb{R}$ , para cada período (em um problema de consumo padrão, isso representa o quanto se consome em cada período).

Assumimos que a escolha de maximização em cada período pode depender de um conjunto de parâmetros que descrevem o ambiente do tomador de decisão, mas também qualquer informação que ele tenha no momento de decidir. O estado no momento  $t$  contém todas as informações disponíveis para o tomador de decisão e relevantes para as decisões de hoje e no futuro.

Em cada período, descrevemos o estado atual da economia por  $x_t \in X \subset \mathbb{R}^n$  (possivelmente um vetor). A função objetivo em um problema dinâmico é tipicamente a sequência descontada de funções instantâneas  $u: X \times C \subset \mathbb{R}$  que assumimos ser contínua e limitada (no problema de consumo, isso seria apenas a utilidade do consumidor em um determinado período, mas observe que a utilidade em um período pode depender da variável de estado também). Com fator de desconto  $\beta$ , a função objetivo é

$$\sum_{t=0}^T \beta^t u(x_t, c_t). \quad (17.1.1)$$

Além disso, permitiremos a incerteza no modelo dado por uma variável aleatória  $z_t \in Z \subset \mathbb{R}^m$  que é assumida como seguindo um processo estacionário de Markov. Isto significa que a distribuição da variável aleatória no tempo  $t+1$  depende apenas do seu valor no tempo  $t$ , de modo que  $\Pr(z_{t+1} \leq z | z_t, z_{t-1}, \dots) = \Pr(z_{t+1} \leq z | z_t)$ . Vamos denotar o processo estocástico por  $Q(z', z) = \Pr(z_{t+1} \leq z' | z_t = z)$ . No problema de consumo padrão  $z$  pode ser, por exemplo, a renda. Vamos também supor que o valor de  $z_t$  é conhecido pelo indivíduo no período  $t$ , então  $(z_t, x_t)$  representa a descrição completa do estado da economia no momento  $t$ .

Assumimos que todas as informações relevantes no momento  $t$  estão contidas em  $x_t$  e  $z_t$ . Este requisito significa que encontrar o estado é uma arte (Sargent, 2003). Em um problema de economia de consumo completamente padrão (determinístico), o estado do sistema é apenas o nível

de riqueza atual. No entanto, em problemas mais complicados, encontrar uma variável de estado tratável pode ser muito difícil ou impossível. Em particular, como o espaço de estados consiste em todas as combinações possíveis dos diferentes valores de cada parâmetro, o espaço de estados cresce rapidamente com o número de dimensões. Este problema de um espaço de estado em rápida expansão é chamado de “maldição da dimensionalidade” (curse of dimensionality). Por exemplo, em modelos em que os mercados são incompletos e os agentes são heterogêneos, pode ser que o estado precise incluir o nível de riqueza de cada pessoa na economia, tornando o problema de otimização intratável.

Além da função objetivo e da variável de estado, precisamos descrever as restrições das escolhas que o indivíduo pode fazer. Assumiremos que existe uma correspondência de restrição estacionária, denotada por  $\Gamma: X \times Z \Rightarrow C$ , que descreve o conjunto de opções para um dado estado. Observe que a suposição de que  $\Gamma$  é estacionário é restritiva: significa, por exemplo, que pode haver restrições de crédito, mas não podemos exigir que o agente não morra endividado. Finalmente, precisamos de uma lei de movimento para a variável de estado,  $f: X \times Z \times C$ . Esta função nos diz o estado no tempo  $t + 1$ , dado  $x_t, z_t$  e  $c_t$ . No problema padrão do consumidor, isso seria uma equação que descreve como a riqueza muda (ou seja, a riqueza no próximo período é a riqueza nesse período, menos o consumo, mais a renda, todos multiplicados pela taxa de retorno).

A última peça que falta é uma especificação da escolha do agente. No problema do consumo, ele escolhe níveis de consumo para cada período. Podemos também permitir que ele condicione o nível de consumo no tempo  $t$  sobre a variável de estado no tempo  $t$ . Se o problema fosse determinístico, isso não importaria muito, mas, como estamos permitindo um elemento estocástico para o problema, essa é uma distinção importante. Aqui, o consumidor está realmente escolhendo uma sequência de regras de decisão ou regras de consumo condicional. Seja  $g_t: X \times Z \Rightarrow C$  uma regra de decisão para o tempo  $t$ . Chamamos o conjunto  $\pi_T = (g_0, g_1, \dots, g_T)$  uma política para  $T$  períodos. Dizemos que uma política é viável se, para todo  $t$ ,  $g_t(x_t, z_t) \in \Gamma(x_t, z_t)$ . Dizemos que uma política é estacionária se a regra de decisão não depende de  $t$ .

Podemos agora descrever o valor presente esperado de uma política  $\pi_{(T)}$  dadas as variáveis de estado iniciais  $x_0$  e  $z_0$ . As expectativas são tomadas com relação à distribuição  $Q(z'|z)$ , e a variável de estado é considerada como seguindo a lei de movimento:

$$W_{(T)}(x_0, z_0, \pi_T) = \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^T \beta^t u(x_t, g_t(x_t, z_t)) \right]. \quad (17.1.2)$$

Assim, podemos enunciar o seguinte problema de otimização dinâmica:

$$\begin{aligned} & \max_{\pi_{(T)}} \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^T \beta^t u(x_t, g_t(x_t, z_t)) \right] \\ & \text{sujeito a } x_{t+1} = f(x_t, z_t, g_t(x_t, z_t)) \\ & \qquad g_t(x_t, z_t) \in \Gamma(x_t, z_t) \end{aligned}$$

$$\text{dados } x_0, z_0, Q(z', z). \quad (17.1.3)$$

Esse é um problema complexo, mas, felizmente, a abordagem recursiva nos permitirá resolver as funções de política  $g_t$  - uma de cada vez. Primeiro mostramos que existe uma solução para este problema. Para isso, precisamos de algumas suposições adicionais:

1. Para cada  $x \in X$  e  $z \in Z$  o conjunto de restrições  $\Gamma(x, z)$  é não-vazio e compacto.
2.  $\Gamma$  é contínuo.
3.  $f$  é contínua.
4.  $Q$  satisfaz algumas restrições para garantir que  $\mathbb{E}_0$  seja limitado e contínuo em  $x_t$ <sup>1</sup>.

Com isso podemos aplicar o teorema do máximo:

**Teorema 17.1.1.** Seja  $X \subset \mathbb{R}^\ell$  e  $Y \subset \mathbb{R}^m$ . Suponha que  $u: X \times C \Rightarrow \mathbb{R}$  seja uma função contínua e  $\Gamma: X \Rightarrow C$  seja uma correspondência contínua de valor compacto. Então  $U(x) = \max_{c \in \Gamma(x)} u(x, c)$  é bem definido e contínuo, e  $c^*(x) = \arg \max_{y \in \Gamma(x)} u(x, y)$  é bem definido, não vazio, de valor compacto e hemicontínua superior.

Usando o Teorema do Máximo, temos o seguinte teorema:

**Teorema 17.1.2.** O problema de programação dinâmica tem uma solução, a política ótima  $\pi_T^*$ . A função valor  $V_{(T)}(x_0, z_0) = \mathbb{E}_0 \sum_{t=0}^T \beta^t u(x_t, g_t^*(x_t, z_t))$  é contínua em  $x_0$ .

Disso decorre o seguinte corolário:

**Corolário 17.1.1.** Se  $\Gamma(x_t, z_t)$  é convexo e  $u(\cdot)$  e  $f(\cdot)$  são estritamente côncavos em  $c_t$ , então  $g_t(x_t, z_t)$  também é contínua.

Observe que podemos reescrever o problema de maneira recursiva. Ou seja, escrevemos o valor presente como uma função da escolha (ótima) presente mais o valor amanhã, assumindo que a política ótima seria executada a partir daquele momento (essa é a função  $V_{(T)}$ ). Generalizando esse resultado para o caso em que temos mais períodos no futuro, inserindo a equação de estado na função de valor do próximo período, e usando a definição de expectativa condicional, chegamos à equação de Bellman com horizonte finito:

$$V_{(s)}(x, z) = \max_{c \in \Gamma(x, z)} \left\{ u(x, c) + \beta \int_Z V_{(s-1)}(f(x, z, c), z') dQ(z', z) \right\}. \quad (17.1.4)$$

onde  $x$  e  $z$  denotam mais precisamente  $x_{T-s}$  e  $z_{T-s}$  respectivamente, e  $z'$  denota  $z_{T-s+1}$ .

A equação de Bellman é útil porque reduz a escolha de uma sequência de regras de decisão para uma sequência de escolhas para as regras de decisão. Dito de outra forma, a equação de Bellman expressa a função valor como uma combinação de um fluxo de payoffs e payoffs descontados no tempo. Isto é suficiente para resolver o problema em (17.1.4) sequencialmente  $T + 1$  vezes.

---

<sup>1</sup> Um exemplo é o semigrupo de Feller (Stockey e Lucas, p. 220).

Portanto, um problema dinâmico é reduzido a uma sequência de problemas estáticos. Uma consequência desse resultado é o chamado princípio de otimalidade de Bellman, que afirma que se a sequência de funções  $\pi_T^* = \{g_0^*, g_1^*, \dots, g_T^*\}$  é uma política ótima, então maximizar a função objetivo  $W_{(T-s)}(x_s, z_s, \pi_{(T-s)})$  após  $s$  períodos é tal que, as regras de decisão  $\{g_s^*, g_{s+1}^*, \dots, g_T^*\}$  ainda são ótimas. Em outras palavras, à medida que o tempo avança, não há incentivo para se afastar do plano original. Políticas com essa propriedade também são consideradas consistentes no tempo.

A consistência temporal depende da estrutura recursiva do problema e não se aplica a configurações mais gerais. David Laibson ficou famoso ao sugerir que as pessoas não descontam exponencialmente. Em vez disso, ele propôs que as pessoas sofrem de um “viés presente” e colocam peso extra no consumo que ocorre no período atual. Assim, sua função de utilidade é dada por

$$\mathbb{E}_0 \left\{ u(x_0, c_0) + \delta \sum_{t=1}^T \beta^t u(x_t, c_t) \right\}, \quad (17.1.5)$$

onde  $0 < \delta < 1$  é a taxa de desconto intertemporal. Assumindo que existe uma política ótima  $c_t = g_t^*(x_t, z_t)$  observe que

$$V_{(T)}(x_0, z_0) = \mathbb{E}_0 \left\{ u(x_0, g_0^*(x_0, z_0)) + \delta \sum_{t=1}^T \beta^t u(x_t, g_t^*(x_t, z_t)) \right\}, \quad (17.1.6)$$

não é o mesmo que

$$V_{(T)}(x_0, z_0) = \mathbb{E}_0 \left\{ u(x_0, g_0^*(x_0, z_0)) + \delta \mathbb{E}_0 \left[ V_{(T-1)}(f(x_0, z_0, g_0^*(x_0, z_0))), z_1 \right] \right\}. \quad (17.1.7)$$

A razão é que a função objetivo do período  $t = 1$  em diante parece diferente do período zero e do período um:

$$\begin{aligned} & \delta \sum_{t=1}^T \beta^t u(x_t, c_t) \\ & u(x_1, c_1) + \delta \sum_{t=2}^T \beta^t u(x_t, c_t). \end{aligned} \quad (17.1.8)$$

Isso implica que o problema não tem uma estrutura recursiva e que os planos ideais feitos no período 0 não podem mais ser ótimos no período 1.

Se o problema que estamos considerando for realmente recursivo, podemos aplicar indução reversa para resolvê-lo. Assim, procedemos da seguinte forma:

1. Comece do último período  $T$ , com 0 períodos a percorrer. Então o problema é estático e pode ser visto como:

$$V_{(0)}(x_T, z_T) = \max_{c_T \in \Gamma(x_T, z_T)} u(x_T, c_T), \quad (17.1.9)$$

que produz a escolha ótima  $g_T^*(x_T, z_T)$  para o valor final de  $x_T$  e a realização final de  $z_T$ . Assim, dada uma dada especificação de  $u(\cdot)$ , temos uma forma funcional explícita para  $V_{(0)}(x_T, z_T)$ .

2. Podemos agora voltar por um período e usar a restrição  $x_T = f(x_{T-1}, z_{T-1}, c_{T-1})$  para escrever:

$$V_{(1)}(x_{T-1}, z_{T-1}) = \max_{c_{T-1} \in \Gamma(x_{T-1}, z_{T-1})} \left\{ u(x_{T-1}, c_{T-1}) + \beta \int_Z V_{(0)}(f(x_{T-1}, z_{T-1}, c_{T-1}), z_T) dQ(z_T, z_{T-1}) \right\}, \quad (17.1.10)$$

que permite resolver para  $g_{T-1}^*(x_{T-1}, z_{T-1})$  e obter  $V_{(1)}(x_{T-1}, z_{T-1})$  explicitamente.

3. Continuamos até o tempo 0 e coletamos a sequência de regras de decisão em cada  $t$ . Desta forma, podemos construir a política ótima dependente de  $x_0$  e de qualquer realização de  $\{z_t\}_{t=0}^T$ .

Em resumo, a solução da equação de Bellman será uma solução para um problema sequencial e vice-versa.

**Exemplo 17.1.1.** *Como um exemplo simples, considere o seguinte problema:*

$$\begin{aligned} & \max_{\{c_t\}_{t=0}^T} \sum_{t=0}^T \beta^t \ln(c_t) \\ & \text{sujeto a } x_{t+1} = (1 - \delta)x_t - c_t \\ & \quad c_t \geq 0 \\ & \quad x_{t+1} \geq 0 \\ & \quad x_0 \text{ dado.} \end{aligned} \quad (17.1.11)$$

A equação de Bellman para este problema é dada por

$$V_{(s)}(x) = \max_{c \in \Gamma(x, z)} \left\{ \ln(c) + \beta V_{(s-1)}((1 - \delta)x - c) \right\} \quad (17.1.12)$$

Para o período final, sabemos que a melhor política deve ser consumir o que sobrar, gerando

$$g_{(T)}(x) = x \quad (17.1.13)$$

$$V_{(0)}(x) = \ln(x) \quad (17.1.14)$$

Voltando um período, nós temos o seguinte problema estático:

$$V_{(1)}(x) = \max_{c \in \Gamma(x, z)} \{\ln(c) + \beta V_{(0)}((1 - \delta)x - c)\} = \max_{c \in \Gamma(x, z)} \{\ln(c) + \beta \ln((1 - \delta)x - c)\}. \quad (17.1.15)$$

A condição de primeira ordem implica:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta}{(1 - \delta)x - c}, \quad (17.1.16)$$

tal que:

$$(1 - \delta)x - c = c\beta \\ c = \frac{(1 - \delta)}{(1 + \beta)}x. \quad (17.1.17)$$

Portanto,

$$g_{T-1}(x) = \frac{(1 - \delta)}{(1 + \beta)}x \\ V_{(1)}(x) = \ln\left(\frac{(1 - \delta)}{(1 + \beta)}x\right) + \beta \ln\left((1 - \delta)x - \frac{(1 - \delta)}{(1 + \beta)}x\right) \\ = \ln\left(\frac{(1 - \delta)}{(1 + \beta)}x\right) + \beta \ln\left(\beta \frac{(1 - \delta)}{(1 + \beta)}x\right) \\ = (1 + \beta) \ln\left(\frac{(1 - \delta)}{(1 + \beta)}x\right) + \beta \ln \beta. \quad (17.1.18)$$

Este processo pode então ser iterado para resolver o problema de programação dinâmica.

## 17.2 Horizonte Infinito

Vamos agora abandonar a suposição de que o problema é de horizonte finito e pensar no caso em que  $T = \infty$ . A má notícia é que (obviamente), não podemos mais resolver esses problemas por indução retroativa. A boa notícia é que isso ocorre quando a programação dinâmica recursiva realmente entra em cena. Note que o problema da sequência é agora

$$\max_{\pi} \mathbb{E}_0 \left[ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(x_t, g_t(x_t, z_t)) \right]$$

sujeito a  $x_{t+1} = f(x_t, z_t, g_t(x_t, z_t))$

$$\begin{aligned} g_t(x_t, z_t) &\in \Gamma(x_t, z_t) \\ x_0, z_0, Q(z', z) \text{ dados.} \end{aligned} \tag{17.2.1}$$

Intuitivamente, o equivalente da equação funcional recursiva deve ser:

$$V(x_0, z_0) = \max_c u(x_0, z_0, c) + \beta \mathbb{E}_0 V(f(x_0, z_0, c), z_1) \tag{17.2.2}$$

Deve ser o caso que o problema não é apenas recursivo, é também estacionário. Afinal de contas, no caso de horizonte infinito, o problema que começa amanhã é exatamente igual a partir de hoje, desde que o estado inicial seja o mesmo. Assim, poderemos eliminar o índice de tempo das funções de política e valor. Na verdade, esse é o caso (sob algumas condições de regularidade). Este é o princípio da otimização, formulado primeiramente por Richard Bellman.

Essa função de valor existe? Se não podemos adivinhar a forma da função valor, podemos tentar encontrá-la aplicando repetidamente o operador de Bellman. O operador Bellman é definido abaixo. Considere um mapeamento  $T$  que mapeie um conjunto de funções  $V: X \times Z \Rightarrow \mathbb{R}$  em si mesmo. Ele é dado por

$$T(V)(x, z) = \max_c u(x, c) + \beta \mathbb{E}(V(f(x, z, c), z_1)). \tag{17.2.3}$$

Queremos encontrar um ponto fixo deste mapeamento, ou seja,  $V = T(V)$ . Para tanto, precisamos de um teorema e de um lema. Sejam eles:

**Teorema 17.2.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach).** *Seja  $X$  um espaço métrico completo e  $f$  uma contração sobre  $X$ . Então existe um único  $x^*$  tal que  $f(x^*) = x^*$ .*

Agora vamos combinar isso com o seguinte lema.

**Lema 17.2.1 (Lema da Contração de Blackwell).** *Seja  $S$  um conjunto não vazio e  $F$  um subconjunto não vazio de  $\mathcal{B}(S)$  que é fechado sob a adição de funções positivas. Suponha que  $T$  é um auto-mapa crescente sobre  $F$ . Se existe um  $\delta$ ,  $0 < \delta < 1$ , tal que*

$$T(f + \alpha) \leq T(f) + \delta\alpha \quad \forall (f, \alpha) \in \mathcal{B}(S)\mathbb{R}_+ \tag{17.2.4}$$

então  $T$  é uma contração.

É verdade que nossas suposições são suficientes para garantir que as condições do Lema de Blackwell sejam válidas para  $T$ , e que  $T$  mapeie o espaço de funções contínuas e limitadas (o que é completo) em si mesmo. Assim, sabemos que  $T$  tem um ponto fixo e podemos caracterizar  $V$  como um ponto fixo de um mapeamento de contração. Uma vantagem é que isso nos fornece uma maneira direta de encontrar  $V$ .

Associado à função de valor estacionário, existe uma função de política estacionária  $g: X \times Z \Rightarrow C$  que resolve o problema de maximização relevante:

$$V(x, z) = \max_{c \in \Gamma(x, z)} \left\{ u(x, c) + \beta \int_Z V[f(x, z, c), z'] dQ(z', z) \right\}. \quad (17.2.5)$$

Assumindo que o mapeamento entre estados  $f(x, z, c)$  é invertível, podemos escrever  $c = \gamma(x, x', z)$  e tratar o problema como se o tomador de decisão escolhesse  $x'$ , o estado no próximo período:

$$V(x, z) = \max_{x'} \left\{ u[x, \gamma(x, x', z)] + \beta \int_Z V(x', z') dQ(z', z) \right\}. \quad (17.2.6)$$

Se soubéssemos que  $V$  é diferenciável em  $x$ , então poderíamos caracterizar a solução usando a condição de primeira ordem:

$$u_c(x, c)\gamma_2(x, x', z) + \beta \int_Z V_x(x'') dQ(z', z) = 0 \quad (17.2.7)$$

Como sabemos que  $V$  é diferenciável? Podemos usar o teorema do envelope:

**Teorema 17.2.2 (Teorema do Envelope).** Sejam  $V$  uma função côncava definida no conjunto  $X$ ,  $x_0 \in \text{int}(X)$  e  $N(x_0)$  uma vizinhança de  $x_0$ . Se houver uma função côncava diferenciável  $\Omega: N(x_0) \Rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Omega(x) \leq V(x)$ ,  $\forall x \in N(x_0)$  com a igualdade válida para  $x_0$ , então  $V$  é diferenciável em  $x_0$  e  $V_x(x_0) = \Omega_x(x_0)$ .

Para resolver os problemas de otimização dinâmica, temos a equação de Euler:

$$u_c(x, c)\gamma_2(x, x', z) + \beta \int_Z u_x(x', c') + u_c(x', c')\gamma_1(x', x'', z'', z) = 0. \quad (17.2.8)$$

**Exemplo 17.2.1.** Para entender isso, vale a pena pensar sobre o problema padrão do consumidor (vamos trabalhar o caso determinístico).

Seja o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \\ & \text{sujeito a } (1 - \delta)w_t - c_t + I_t \end{aligned} \quad (17.2.9)$$

onde  $w_t$  é riqueza no tempo  $t$  e  $I_t$  é a renda. Assim,  $\gamma = (w_t, w_{t+1}) = w_{t+1} - (1 - \delta)w_t - I_t$  e, portanto,  $\gamma_2(w_t, w_{t+1}) = 1$  e  $\gamma_1(w_t, w_{t+1}) = -(1 - \delta)$ . A equação de Euler nos dá

$$u'(w_{t+1} - (1 - \delta)w_t - I_t) = \beta(1 - \delta)u'(w_{t+2} - (1 - \delta)w_{t+1} - I_{t+1})$$

$$u'(c_t) = \beta(1 - \delta)u'(c_{t+1}) \quad (17.2.10)$$

Esta é uma equação em diferença não linear na variável de estado. Para poder caracterizar completamente o caminho dinâmico ideal da variável de estado  $\{x_t^*\}_{t=0}^\infty$  precisamos de duas condições de contorno:

1. Condição inicial:  $x_0$  e  $z_0$  dados.
2. Condição de transversalidade:  $\lim_{t \rightarrow \infty} \beta^t u_x(x_t^*, c_t^*) x_t^* = 0$ .

A última condição requer que o valor atual descontado da variável de estado em  $t$  ao longo do caminho ótimo tenda a zero quando  $t$  tende ao infinito. Portanto, a variável de estado é pequena o suficiente no limite ou seu valor marginal é pequeno o suficiente.

## 17.3 Aplicações

### 17.3.1 Ramsey

Neste exemplo, vamos ilustrar como resolver problemas de programação dinâmica, encontrando uma função valor correspondente. Considere a seguinte equação funcional:

$$\begin{aligned} V(k) &= \max_{c,k'} \{\log(c) + \beta V(k')\} \\ \text{sujeito a } c &= Ak^\alpha - k' \end{aligned} \quad (17.3.1)$$

A restrição orçamentária é escrita como uma restrição de igualdade porque sabemos que as preferências representadas pela função de utilidade logarítmica exibem monotonicidade estrita - os bens são sempre valiosos, portanto não serão descartados por um tomador de decisão otimista. A tecnologia de produção é representada por uma função Cobb-Douglas.

Uma expressão mais compacta pode ser derivada por substituições na equação de Bellman:

$$V(k) = \max_{k' \geq 0} \{\log[Ak^\alpha - k'] + \beta V(k')\} \quad (17.3.2)$$

Vamos resolver o problema fazendo uma iteração sobre a função valor. O procedimento será semelhante ao da solução de um problema com  $T$  para trás. Começamos com um “palpite” inicial  $V_0(k) = 0$ , ou seja, uma função que assume valor zero:

$$\begin{aligned} V_1(k) &= \max_{k' \geq 0} \{\log[Ak^\alpha - k'] + \beta V_0(k')\} \\ &= \max_{k' \geq 0} \{\log[Ak^\alpha - k'] + \beta \cdot 0\} \end{aligned}$$

$$= \max_{k' \geq 0} \{\log[Ak^\alpha - k']\} \quad (17.3.3)$$

Esta é maximizada quando  $k' = 0$ . Então,

$$V_1(k) = \log A + \alpha \log k' \quad (17.3.4)$$

Indo para o próximo passo na iteração

$$\begin{aligned} V_2(k) &= \max_{k' \geq 0} \{\log[Ak^\alpha - k'] + \beta V_1(k')\} \\ &= \max_{k' \geq 0} \{\log[Ak^\alpha - k'] + \beta[\log A + \alpha \log k']\} \end{aligned} \quad (17.3.5)$$

A condição de primeira ordem implica que:

$$\frac{1}{Ak^\alpha - k'} = \frac{\beta\alpha}{k'} \Rightarrow k' = \frac{\alpha\beta Ak^\alpha}{1 + \alpha\beta} \quad (17.3.6)$$

Podemos interpretar a expressão resultante para  $k'$  como a regra que determina quanto seria ótimo poupar se estivéssemos no período  $T - 1$  no modelo de horizonte finito. Substituindo, implica:

$$\begin{aligned} V_2(k) &= \log \left[ Ak^\alpha - \frac{\alpha\beta Ak^\alpha}{1 + \alpha\beta} \right] + \beta \left[ \log A + \alpha \log \left( \frac{\alpha\beta Ak^\alpha}{1 + \alpha\beta} \right) \right] \\ &= (\alpha + \alpha^2\beta) \log k + \log \left( A - \frac{\alpha\beta A}{1 + \alpha\beta} \right) + \beta \log A + \alpha\beta \log \left( \frac{\alpha\beta A}{1 + \alpha\beta} \right) \end{aligned} \quad (17.3.7)$$

Poderíamos agora usar  $V_2(k)$  novamente no algoritmo para obter  $V_3(k)$  e assim por diante. Sabemos pelas caracterizações acima que este procedimento faria a sequência de funções valor convergir para algum  $V^*(k)$ . No entanto, há uma abordagem mais direta, usando um padrão que já apareceu em nossa iteração:

Seja

$$a \equiv \log \left( A - \frac{\alpha\beta A}{1 + \alpha\beta} \right) + \beta \log A + \alpha\beta \log \left( \frac{\alpha\beta A}{1 + \alpha\beta} \right) \quad (17.3.8)$$

e

$$b \equiv (\alpha + \alpha^2\beta) \quad (17.3.9)$$

Então  $V_2(k) = a + b \log k$ . Lembre-se que  $V_1(k) = \log A + \alpha \log k$ , ou seja, no segundo passo

o que fizemos foi plugar uma função  $V_1(k) = a_1 + b_1 \log k$ , e obtemos a função  $V_2(k) = a_2 + b_2 \log k$ . Isto sugere claramente que, se continuarmos usando nosso procedimento iterativo, os resultados  $V_3(k), V_4(k), \dots, V_n(k)$ , serão da forma  $V_n(k) = a_n + b_n \log k$  para todo  $n$ . Portanto, podemos adivinhar que a função para a qual essa sequência está convergindo deve ser da seguinte forma:

$$V(k) = a + b \log k \quad (17.3.10)$$

Portanto, vamos supor que a função valor que resolve a equação de Bellman tenha essa forma e determinar os parâmetros correspondentes  $a$  e  $b$ :

$$V(k) = a + b \log k = \max_{k' \geq 0} \{ \log(Ak^\alpha - k') + \beta(a + b \log k') \} \quad (17.3.11)$$

Nossa tarefa é encontrar os valores de  $a$  e  $b$  de forma que essa igualdade seja válida para todos os valores possíveis de  $k$ . Se obtivermos esses valores, a equação funcional será resolvida.

Da condição de primeira ordem:

$$\frac{1}{Ak^\alpha - k'} = \frac{\beta b}{k'} \Rightarrow k' = \frac{\beta b}{1 + \beta b} Ak^\alpha \quad (17.3.12)$$

Podemos interpretar  $\frac{\beta b}{1 + \beta b}$  como a taxa de poupança. Portanto, a política ótima será uma fração constante da renda de cada período.

Defina

$$LHS = a + b \log k \quad (17.3.13)$$

e

$$RHS = \max_{k' \geq 0} \{ \log(Ak^\alpha - k') + \beta(a + b \log k') \} \quad (17.3.14)$$

Substituindo a expressão para  $k'$  em RHS, obtemos:

$$\begin{aligned} RHS &= \left\{ \log \left( Ak^\alpha - \frac{\beta b}{1 + \beta b} Ak^\alpha \right) + a\beta + b\beta \log \left( \frac{\beta b}{1 + \beta b} Ak^\alpha \right) \right\} \\ &= (1 + b\beta) \log A + \log \left( \frac{1}{1 + b\beta} \right) + a\beta + b\beta \log \left( \frac{b\beta}{1 + b\beta} \right) + (\alpha + b\alpha\beta) \log k \end{aligned} \quad (17.3.15)$$

Dado que  $LHS = RHS$ , então:

$$\begin{cases} a = (1 + b\beta) \log A + \log \left( \frac{1}{1 + b\beta} \right) + a\beta + b\beta \log \left( \frac{b\beta}{1 + b\beta} \right) \\ b = \alpha + b\alpha\beta \end{cases} \quad (17.3.16)$$

que são duas equações com duas incógnitas. A solução será:

$$b = \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \quad (17.3.17)$$

e usando este resultado:

$$a = \frac{1}{1 - \beta} \frac{1}{1 - \alpha\beta} [\log A + (1 - \alpha\beta) \log(1 - \alpha\beta) + \alpha\beta \log(\alpha\beta)] \quad (17.3.18)$$

Disso decorre que:

$$\begin{aligned} k' &= \frac{b\beta}{1 + b\beta} Ak^\alpha \\ k' &= \alpha\beta Ak^\alpha \end{aligned}$$

Se  $y$  denotar a renda, isto é,  $y \equiv Ak^\alpha$ , então  $k' = \alpha\beta y$ . Isso significa que a trajetória ótima de consumo e de capital é economizar uma fração constante da renda.

### 17.3.2 Teoria dos Jogos

Um agente recebe uma oferta  $x$  a partir de uma distribuição uniforme com suporte no intervalo unitário. O agente pode aceitar a oferta e receber o valor presente líquido (encerrando o jogo), ou o agente pode rejeitar a oferta e repetir novamente o processo um período depois. Todos os sorteios são independentes. As rejeições são custosas porque o agente desconta o futuro exponencialmente com o fator de desconto  $\delta$ . Este jogo continua até que o agente receba uma oferta que ela esteja disposto a aceitar.

A equação de Bellman para este problema pode ser escrita como:

$$V(x) = \max\{x, \delta \mathbb{E}[V(x_{+1})]\} \quad (17.3.19)$$

em que o subscrito  $+1$  indica que é válido para todo  $t$ .

Nosso problema consiste em encontrar a função valor  $V(\cdot)$  que resolve a equação de Bellman. Também queremos encontrar a regra de política associada. Lembre-se que um política é uma função que mapeia  $x$  para o espaço de ação. E que uma política ótima atinge  $V(x)$  para todos os possíveis valores de  $x$ .

Nesse problema, o threshold  $x^*$  é a melhor resposta para a função de continuaçāo ou parada,  $\hat{V}$ , se e somente se:

$$x^* = \delta \mathbb{E}[\hat{V}(x_{+1})] \quad (17.3.20)$$

Observe que o processo de otimização gera a seguinte política:

$$\begin{cases} \text{Aceita se e somente se } x > x^* = \delta \mathbb{E}[\hat{V}(x_{+1})] \\ \text{Rejeita se e somente se } x < x^* = \delta \mathbb{E}[\hat{V}(x_{+1})] \end{cases} \quad (17.3.21)$$

Se  $x = x^* = \delta \mathbb{E}[\hat{V}(x_{+1})]$ , então aceitar e rejeitar geram o mesmo payoff.

Assim, nosso problema se resume a encontrar o threshold  $x^*$  associado a função valor

$$V(x) = \begin{cases} x \text{ se } x \geq x^* \\ x^* \text{ se } x \leq x^* \end{cases} \quad (17.3.22)$$

que satisfaz a equação de Bellman. Em outras palavras, encontrar o valor de  $x^*$  tal que  $V(x)$  satisfaça a equação de Bellman.

Se  $x = x^*$ , então o agente é indiferente entre continuar ou parar. Então:

$$\begin{aligned} V(x^*) &= x^* \\ &= \delta \mathbb{E}[\hat{V}(x_{+1})] \\ &= \delta \int_{x=0}^{x=x^*} x^* f(x) dx + \delta \int_{x=x^*}^{x=1} x f(x) dx \\ &= \delta x^* x \Big|_{x=0}^{x=x^*} + \delta \frac{x^2}{2} \Big|_{x=x^*}^{x=1} \\ &= \delta \frac{1}{2} (x^*)^2 + \delta \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (17.3.23)$$

Então,

$$\frac{dx^*}{d\delta} = \frac{(x^*)^2 + 1}{2(\delta x + 1)} > 0, \quad (17.3.24)$$

que é satisfeita uma vez que  $\delta > 0$ . Isso implica que o valor necessário para que o agente escolha parar no presente demanda uma alta taxa de desconto intertemporal. Dito de outra forma, quanto maior a preferência pelo ganho no presente, maior deverá ser o payoff.

---

18

---

---

CONTROLE ÓTIMO

---

Controle ótimo é uma das mais importantes ferramentas de análise. Pode ser visto como uma versão moderna do cálculo de variações. Vamos ver incialmente o princípio do máximo de Pontryagin. Posteriormente, veremos como trabalhar em um horizonte infinito, característica, aliás, muito comum em modelos econômicos.

## 18.1 O Princípio do Máximo de Pontryagin

Considere o problema de obter a trajetória  $x(t)$  que maximiza ou minimiza certa função objetivo. Claramente,  $x(t)$  pode ser controlado por um certo número de variáveis. O problema consiste em encontrar uma trajetória  $x(t)$  escolhendo uma função  $u(t)$  a ser maximizada ou minimizada. Este problema é conhecido como um problema de controle ótimo e a trajetória para tal problema é conhecida como teoria do controle ótimo.

O resultado básico de Pontryagin (1962) é chamado princípio do máximo de Pontryagin. Este está preocupado com as condições necessárias para a otimalidade. Esta condição é análoga ao problema de maximização do Lagrangeano na teoria clássica de maximização ou minimização com restrição.

Sendo assim, considere o seguinte sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem,

$$\dot{x}_i(t) = f_i[x(t), u(t), t], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (18.1.1)$$

em que

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)] \quad (18.1.2)$$

$$u(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)] \quad (18.1.3)$$

As funções  $f'_i$ 's,  $x_i(t)$  e  $u_k(t)$  são funções de valor real. A condição de contorno para (18.1.1) pode ser especificada como:

$$x_i(t^0) = x_i^0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.1.4)$$

Se especificarmos as trajetórias dos  $u_k(t)$ 's, digamos  $u(t) = \bar{u}(t)$ , então, assumindo a existência e a unicidade de uma solução, podemos especificar completamente a trajetória  $x(t; x^0, t^0)$  como uma solução de (18.1.1) que satisfaz (18.1.4). O Teorema de Cauchy-Peano fornece um conjunto de condições suficientes para a existência (local) e a unicidade da solução. A trajetória  $x(t; x^0, t^0)$  claramente depende da especificação de  $u(t)$ .

Na teoria do controle ótimo, não se especifica  $u(t)$  a priori, mas em vez disso escolhe-se  $u(t)$  a partir de um conjunto de funções – diga-se  $U$  – para maximizar (ou minimizar) certo objetivo.

Por exemplo, podemos ter a seguinte função a ser maximizada (onde  $T$  é uma constante fixa):

$$S = \sum_{i=1}^n c_i x_i(T), \quad (18.1.5)$$

e considere o problema de escolher  $u(t) \in U$ . Assim,

$$\begin{aligned} & \max S \\ & \text{sujeito a } \dot{x}_i(t) = f_i[x(t), u(t), t], \\ & \quad x_i(t^0) = x_i^0, i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (18.1.6)$$

em que  $u(t)$  é definido no intervalo  $t^0 \leq t \leq T$ . Uma vez que a função  $u^*(t)$  é encontrada, é possível obter a correspondente função  $x^*(t)$  como uma solução do sistema de equações diferenciais que satisfazem a condição de contorno.

Em geral, as variáveis  $x_i(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , que assume-se serem contínuas em  $t$ , são chamadas de variáveis de estado, e as variáveis  $u_k(t)$ ,  $k = 1, 2, \dots, r$ , são chamadas de variáveis de controle. Quando  $u(t) \in U$ ,  $u(t)$  é chamada de função de controle admissível.  $U$  é chamado de conjunto de controles admissíveis. O domínio de  $u(t)$  em  $U$  é denotado por  $\bar{U}$  e  $\bar{U}$  é chamado de região de controle. Assumimos que  $U$  é restrito ao conjunto em que  $u(t)$  é contínuo por partes, isto é, uma função contínua exceto possivelmente em número fixo de pontos e que a descontinuidade é tal que os limites laterais existem e são finitos, mas não são iguais.

Assume-se que as funções  $f'_i$ 's são contínuas em  $x_i$ ,  $u_k$  e  $t$ , e possuam derivadas parciais contínuas com respeito a cada  $x_i$  e  $t$ . O intervalo de  $x(t)$  é denotado por  $X$ . A condição de fronteira  $(x^0, t^0)$  deve ser tal que  $x^0 \in X$  e  $x(t^0) = x^0$ .

Com isso, pode-se enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 18.1.1.** *Sob a especificação do problema (18.1.6), para  $u^*(t)$  ser a solução do problema com a correspondente variável de estado  $x^*(t)$ , é necessário que exista uma função de valor real e contínua  $p(t) \equiv [p_1(t), \dots, p_n(t)]$  não-nula, tal que:*

1. *p(t) juntamente com  $x^*(t)$  e  $u^*(t)$  resolvam o seguinte sistema Hamiltoniano:*

$$\dot{x}_i^* = \frac{\partial H^*}{\partial p_i}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (18.1.7)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H^*}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (18.1.8)$$

*em que  $H$ , chamado de Hamiltoniano, é definido por:*

$$H[x(t), u(t), t, p(t)] \equiv \sum_{i=1}^n p_i(t) f_i[x(t), u(t), t]. \quad (18.1.9)$$

2. O Hamiltoniano é maximizado com respeito a  $u(t)$ , isto é,

$$H[x^*(t), u^*(t), t, p(t)] \geq H[x^*(t), u(t), t, p(t)], \forall u(t) \in U. \quad (18.1.10)$$

3. A seguinte condição de transversalidade é válida:

$$p_i(T) = c_i, i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.1.11)$$

4.  $x_i(t^0) = x_i^0, i = 1, 2, \dots, n.$

A condição (2), que requer que  $H$  seja maximizada, é o núcleo deste teorema. Em função disso, este teorema é chamado de princípio do máximo e ficou conhecido como princípio do máximo de Pontryagin em função de seu estudo. Este teorema fornece a condição necessária para  $u^*(t)$  ser um ótimo. Sabe-se que essas condições também são suficientes (para um ótimo global) se as funções  $f'_i$ s são côncavas em  $x$  e em  $u$ . À semelhança do problema de otimização estática, os  $p'_i$ s correspondem aos multiplicadores de Lagrange e  $H$  corresponde ao Lagrangeano. A maximização do Lagrangeano é convertida à maximização do Hamiltoniano. As variáveis  $p'_i$ s são chamadas de multiplicadores (de Pontryagin), variáveis auxiliares ou variáveis de coestado.

Note que podemos reescrever

$$\dot{x}_i^* = f_i[x^*(t), u^*(t), t] \quad (18.1.12)$$

$$\dot{p}_i = - \sum_{j=1}^n p_j \left( \frac{\partial f_j^*}{\partial x_i} \right), i = 1, \dots, n, \quad (18.1.13)$$

em que  $\frac{\partial f_j^*}{\partial x_i}$  denota  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  avaliada em  $[x^*(t), u^*(t), t]$ . O sistema de equações fornece, assim,  $2n$  equações diferenciais de segunda ordem com  $2n$  variáveis,  $x_i(t), p_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ . Há  $2n$  condições de contorno,  $x_i(t^0), p_i(T) = c_i, i = 1, 2, \dots, n$ . O papel da condição de transversalidade é, portanto, fornecer condições de contorno adicionais. Essas  $2n$  equações diferenciais não são solucionáveis se  $u(t)$  não for especificado. O papel da condição (2) é especificar a escolha de  $u(t)$ . Uma vez que encontramos a trajetória de  $[x^*(t), u^*(t)]$  como solução das equações diferenciais, podemos obter  $x^*(T)$ . Note que não especificamos  $x(T)$  a priori. O par  $[x^*(t), u^*(t)]$  é o par ótimo ou par solução.

De forma semelhante, podemos trabalhar com outra representação. A função objetivo apresenta uma configuração mais geral como segue:

$$I \equiv \int_{t^0}^T f_0[x(t), u(t), t] dt \quad (18.1.14)$$

Para ver isso, defina  $x_0(t)$  como  $\dot{x}_0 \equiv f_0[x(t), u(t), t]$  com  $x_0(t^0) = 0$ . Então,  $I = x_0(T)$  é claramente um caso especial de (18.1.5). Portanto, o problema de maximizar  $I$  sujeito a

$\dot{x}_0 = f_0[x(t), u(t), t]$ , (18.1.1) e (18.1.4) pode ser convertido ao problema de maximizar  $x_0(T)$  sujeito a (18.1.1), (18.1.4) e  $x_0(t^0) = 0$ . De forma semelhante, podemos aplicar o teorema acima.

Observe que no teorema acima trabalhamos com o caso em que o horizonte temporal  $T$  é fixo e o ponto final  $x(T)$  não é fixo a priori (ele é determinado a partir da solução do problema). Entretanto, em muitas situações este pode não ser o caso. Em geral, pode-se formular vários problemas dependendo (i) se o vetor de estado  $x(T)$  é fixo a priori e (ii) se o “tempo final” ( $T$ ) é fixo.

## 18.2 Problemas de Controle ótimo em Horizonte Infinito

Em aplicações econômicas da teoria de controle ótimo, alguns tipos particulares de problemas de controle são usados repetidamente. Aqui, vamos nos preocupar com um deles. Vamos ver o problema quando o horizonte do planejador é infinito, com o futuro sendo descontado a valor presente.

Assim, considere o problema de determinar  $u(t)$  tal que seja o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \max \int_0^\infty f_0[x(t), u(t), t] e^{-\rho t} dt \\ & \text{sujeito a } \dot{x}_i(t) = f_i[x(t), u(t), t], i = 1, 2, \dots, n, \\ & \quad u_k(t) \geq 0, k = 1, 2, \dots, r, \\ & \quad x(0) = x^0, \end{aligned} \tag{18.2.1}$$

em que  $\rho$  é uma constante positiva. Assume-se que as funções  $f'_0$ s e  $f'_i$ s são continuamente diferenciáveis no espaço  $(x, u, t)$ . As funções  $x_i(t)$ 's,  $0 \leq t < \infty$ , são contínuas e as funções  $u_k(t)$ 's,  $0 \leq t < \infty$ , são contínuas em quase todos os pontos.

Assuma que  $[x(t), u(t)]$  seja o ótimo. Então, é necessário que haja multiplicadores  $p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$  tais que as seguintes condições são satisfeitas:

1.  $p(t)$  juntamente com  $x(t)$  e  $u(t)$  resolvem o sistema Hamiltoniano:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i}, i = 1, 2, \dots, n \tag{18.2.2}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n, \tag{18.2.3}$$

em que  $\tilde{H}$  é definido por:

$$\tilde{H}[x(t), u(t), t, p(t)] \equiv f_0[x(t), u(t), t]e^{-\rho t} + \sum_{i=1}^n p_i f_i[x(t), u(t), t]e^{-\rho t}. \quad (18.2.4)$$

2.  $\tilde{H}$  é maximizado com respeito a  $u(t)$ , sujeito a  $u_k(t) \geq 0, k = 1, 2, \dots, r$ , isto é,

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial u_k} \leq 0 \quad (18.2.5)$$

$$u_k \left( \frac{\partial \tilde{H}}{\partial u_k} \right) = 0, k = 1, 2, \dots, r. \quad (18.2.6)$$

3. A seguinte condição de transversalidade é satisfeita:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t)x_i(t) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.2.7)$$

Se  $f_0$  e  $f_i, i = 1, 2, \dots, n$ , são todas côncavas em  $x$  e  $u$ , e se existem multiplicadores,  $p_1, \dots, p_n$ , que satisfazem (18.2.2), (18.2.3), (18.2.5) e (18.2.7) com  $p_1 \geq 0, \dots, p_n \geq 0$ , então  $[x(t), u(t)]$  é um par ótimo. Se  $f_0$  é estritamente côncava em  $x$  e  $u$ , então a trajetória ótima é única.

Agora, seja a seguinte convenção. Defina  $q_i(t)$  por

$$q_i(t) \equiv p_i(t)e^{\rho t}, \quad \text{ou} \quad p_i(t) = q_i(t)e^{-\rho t}. \quad (18.2.8)$$

Em termos de  $q_i(t)$ , pode-se definir a função  $H$  como:

$$H[x(t), u(t), t, q(t)] \equiv f_0[x(t), u(t), t] + \sum_{i=1}^n q_i(t)f_i[x(t), u(t), t]. \quad (18.2.9)$$

Disso decorre que:

$$H[x(t), u(t), t, q(t)] \equiv \tilde{H}[x(t), u(t), t, p(t)]e^{\rho t}. \quad (18.2.10)$$

A função  $H$  é chamada de Hamiltoniana de valor corrente. Então, (18.2.2), (18.2.5), (18.2.6) e (18.2.7) podem ser reescritas como:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (18.2.11)$$

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} \leq 0, k = 1, 2, \dots, r \quad (18.2.12)$$

$$u_k \left( \frac{\partial H}{\partial u_k} \right) = 0, k = 1, 2, \dots, r \quad (18.2.13)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) e^{-\rho t} x_i(t) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.2.14)$$

De modo semelhante, a partir de (18.2.8), temos:

$$\dot{p}_i = (\dot{q}_i - \rho q_i) e^{-\rho t}. \quad (18.2.15)$$

Então também obtemos as seguintes relações de (18.2.3) ao usar (18.2.10):

$$(\dot{q}_i - \rho q_i) e^{-\rho t} = - \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x_i} = - \left( \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) e^{-\rho t} \Rightarrow \dot{q}_i = \rho q_i - \frac{\partial H}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.2.16)$$

Com a versão do Hamiltoniano de valor presente, temos o seguinte teorema:

**Teorema 18.2.1.** Assuma que  $[x(t), u(t)]$  seja a solução do problema de maximização. Então, é necessário que haja multiplicadores  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$  tais que as seguintes condições são satisfeitas:

1.  $q(t)$  juntamente com  $x(t)$  e  $u(t)$  resolvem o sistema Hamiltoniano:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}, i = 1, 2, \dots, n \quad (18.2.17)$$

$$\dot{q}_i = \rho q_i - \frac{\partial H}{\partial x_i}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (18.2.18)$$

em que  $H$  é definido por:

$$H[x(t), u(t), t, q(t)] \equiv f_0[x(t), u(t), t] + \sum_{i=1}^n q_i f_i[x(t), u(t), t]. \quad (18.2.19)$$

2.  $H$  é maximizado com respeito a  $u(t)$ , sujeito a  $u_k(t) \geqq 0, k = 1, 2, \dots, r$ , isto é,

$$\frac{\partial H}{\partial u_k} \leqq 0 \quad (18.2.20)$$

$$u_k \left( \frac{\partial H}{\partial u_k} \right) = 0, k = 1, 2, \dots, r. \quad (18.2.21)$$

3. A seguinte condição de transversalidade é satisfeita:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) e^{-\rho t} x_i(t) = 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (18.2.22)$$

## 18.3 Aplicações

A teoria do controle ótimo, como vista acima, nos permite entender uma série de fenômenos econômicos, de caráter macroeconômico e microeconômico. Podemos citar o modelo clássico de crescimento de Koopmans e Cass, o modelo de política monetária ótima de Tobin, o modelo de renda permanente de Friedman, a teoria “neoclássica” de investimento, job search, a discussão sobre custos de ajustamentos, o  $q$  de Tobin, o processo de alocação de consumo intertemporal em um horizonte finito e o problema de escolha de localização de uma planta produtiva (aqui o indexador  $t$  não faz referência ao tempo, mas sim a uma localização, mostrando a flexibilidade desse instrumental), entre outros. Vamos estudar duas aplicações de controle ótimo, a saber: o modelo de política monetária ótima à lá Tobin e o modelo de renda permanente.

### 18.3.1 Política Monetária Ótima

Nesta seção investigamos um problema de crescimento ótimo no contexto de uma economia descentralizada. Mostra-se, com um simples modelo, como o crescimento ótimo pode ser alcançado por meio da política monetária. A estrutura desenvolvida aqui é baseada no modelo de crescimento monetário à la Tobin. Uma característica chave dele é que a ideia de uma taxa real de retorno sobre a moeda proposta por Fisher e o processo cumulativo de Wicksell é justaposto com o modelo de crescimento neoclássico de Solow-Swan.

Para compreender esse modelo, seja seguinte equação diferencial que representa a evolução do capital

$$\dot{k} = f(k) - nk - c, \quad (18.3.1)$$

em que a notação  $t$  é omitida para evitar confusão. Por simplicidade, assume-se que o consumo per capita ( $c_t$ ) é uma fração constante da renda per capita disponível ( $y^D$ ), ou seja,

$$c = (1 - s)y^D, \quad 0 < s < 1. \quad (18.3.2)$$

Vamos assumir que  $p$  e  $M$  sejam, respectivamente, o nível de preços e a oferta monetária. Sabemos que  $Y = C + I$ . Além disso, sendo  $Y^D \equiv C + \dot{W}$ , em que  $W \equiv \frac{W^n}{p}$  e  $W^n \equiv pK + M$ , temos:

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \dot{K} + \left( \frac{\dot{M}}{p} \right) \\ &= \dot{K} + \left( \frac{\dot{M}}{p} - \frac{M\dot{p}}{p^2} \right) \\ &= \dot{K} + \left( \frac{\dot{M}}{P} \frac{M}{M} - \frac{\dot{p}}{p} \frac{M}{P} \right) \end{aligned}$$

$$= \dot{K} + (\theta - \pi) \frac{M}{p}, \quad (18.3.3)$$

em que  $Y$  é o produto real corrente,  $\theta = \frac{\dot{M}}{M}$  é a taxa de crescimento da base monetária e  $\pi = \frac{\dot{p}}{p}$  é a taxa de inflação.

Ignorando a depreciação, temos que  $\dot{K} = I$ . Logo, a expressão para a renda disponível real ( $Y^D$ ) sob expectativas racionais é:

$$\begin{aligned} Y^D &\equiv C + I + (\theta - \pi) \frac{M}{p} \\ Y^D &= Y + (\theta - \pi) \frac{M}{p}. \end{aligned} \quad (18.3.4)$$

Isto significa que a renda disponível é igual a renda total mais os saldos reais transferidos ao público pelo governo menos a perda de capital de manter moeda devido à inflação.

Denotando por  $N$  a força de trabalho, podemos reescrever a expressão para a renda disponível como:

$$yD = f(k) + (\theta - \pi)m. \quad (18.3.5)$$

Assumindo que  $K$  denote o estoque de capital, o equilíbrio monetário pode ser escrito da seguinte forma:

$$M = L[f'(k) + \pi, pY, M + pK], \quad L_1 < 0, L_2 > 0, 0 < L_3 < 1 \quad (18.3.6)$$

em que se assume que a expectativa da taxa de inflação é igual ao seu valor atual.

Uma vez que a demanda por moeda,  $L$ , é homogênea de grau um com relação à renda nominal ( $pY$ ) e ao valor nominal da riqueza ( $M + pK$ ), obtemos, a partir de (18.3.6), que

$$g = L[f'(k) + \pi, f(k), m + k]. \quad (18.3.7)$$

Resolvendo (18.3.7) para  $\pi$ , a taxa de inflação pode ser vista como:

$$\pi = \pi(k, m), \quad (18.3.8)$$

em que

$$\pi_k \left( \equiv \frac{\partial \pi}{\partial k} \right) = -\frac{\partial g / \partial k}{\partial g / \partial \pi} = -\frac{L_1 f''(k) + L_2 f'(k) + L_3}{L_1} > 0 \quad (18.3.9)$$

$$\pi_m \left( \equiv \frac{\partial \pi}{\partial m} \right) = -\frac{\partial g / \partial m}{\partial g / \partial \pi} = \frac{1 - L_3}{L_1} < 0. \quad (18.3.10)$$

Substituindo a expressão da renda disponível per capita e da taxa de inflação na função consumo per capita, encontra-se:

$$\begin{aligned} c &= (1 - s)[f(k) + (\theta - \pi)m] \\ &= (1 - s)\{f(k) + [\theta - \pi(k, m)]m\}. \end{aligned} \quad (18.3.11)$$

Combinando este resultado com a equação diferencial que expressa a dinâmica do capital, resulta em:

$$\begin{aligned} \dot{k} &= f(k) - nk - \{(1 - s)\{f(k) + [\theta - \pi(k, m)]m\}\} \\ &= f(k) - nk - f(k) + sf(k) - (1 - s)[\theta - \pi(k, m)]m \\ &= sf(k) - nk - (1 - s)[\theta - \pi(k, m)]m. \end{aligned} \quad (18.3.12)$$

Agora, seja  $m \equiv M/pN$ . Calculando a diferencial total:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= \frac{pN\dot{M} - M[p\dot{N} + \dot{p}N]}{(pN)^2} \\ &= \frac{pN\dot{M} - pM\dot{N} - \dot{p}MN}{(pN)^2} \\ &= \frac{\dot{M}}{pN} - \frac{M}{pN} \frac{\dot{N}}{N} - \frac{M}{pN} \frac{\dot{p}}{p} \\ &= \frac{\dot{M}}{pN} - mn - m\pi \\ &= \frac{\dot{M}}{pN} \frac{M}{M} - mn - m\pi \\ &= \frac{\dot{M}}{M} \frac{M}{pN} - mn - m\pi \\ &= \theta m - mn - m\pi \\ &= (\theta - \pi - n)m. \end{aligned} \quad (18.3.13)$$

Substituindo a equação que determina a taxa de inflação dentro da equação diferencial que determina a evolução dos saldos monetários reais per capita, obtemos:

$$\dot{m} = [\theta - \pi(k, m) - n]m. \quad (18.3.14)$$

Se a trajetória de crescimento da base monetária é especificada, então  $\dot{k}$  e  $\dot{m}$  são descritos pelas

equações acima. Se trajetória de crescimento da base monetária for uma constante para todo  $t$ , obtemos um comportamento de sela para  $(k, m)$ .

Neste exemplo, a autoridade monetária procura escolher a trajetória de crescimento da base monetária. Portanto, o problema de otimização dinâmica é dado abaixo:

$$\begin{aligned} & \max \int_0^\infty u((1-s)\{f(k) + [\theta - \pi(k, m)]m\}) e^{-\rho t} dt \\ & \text{sujeito a } \dot{k} = sf(k) - nk - (1-s)[\theta - \pi(k, m)]m \\ & \quad \dot{m} = [\theta - \pi(k, m) - n]m \\ & \quad k_0 \text{ dado} \end{aligned} \tag{18.3.15}$$

Para resolver este problema, definimos a Hamiltoniana de valor presente:

$$H \equiv u(c) + p_1\{sf(k) - nk - (1-s)[\theta - \pi(k, m)]m\} + p_2\{[\theta - \pi(k, m) - n]m\}, \tag{18.3.16}$$

em que  $p_1$  e  $p_2$  são os multiplicadores de Pontryagin. As seguintes condições são necessárias e suficientes para  $(k, m)$  ser um ótimo único:

$$\dot{k} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \tag{18.3.17}$$

$$\dot{m} = \frac{\partial H}{\partial p_2}, \tag{18.3.18}$$

$$\dot{p}_1 = \rho p_1 - \frac{\partial H}{\partial k}, \tag{18.3.19}$$

$$\dot{p}_2 = \rho p_2 - \frac{\partial H}{\partial m}, \tag{18.3.20}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0, \tag{18.3.21}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_1 e^{-\rho t} k = 0, \tag{18.3.22}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_2 e^{-\rho t} m = 0. \tag{18.3.23}$$

De (18.3.21), obtém-se:

$$(1-s)u' = (1-s)p_1 - p_2, \tag{18.3.24}$$

com  $m > 0$ . A partir de (18.3.19) e de (18.3.24), encontramos:

$$\dot{p}_1 = (n + \rho)p_1 - (p_1 - p_2)f'. \tag{18.3.25}$$

Usando (18.3.20) e de (18.3.24), encontramos:

$$\dot{p}_2 = (n + \rho)p_2, \quad \text{ou} \quad p_2 = p_2(0)e^{-(n+\rho)t} \quad (18.3.26)$$

Combinando este resultado com (18.3.23), obtemos que  $p_2(0) = 0$ . Logo,

$$p_2 = 0, \forall t. \quad (18.3.27)$$

Isto significa que o preço-sombra de mudar a oferta de moeda é zero. Também encontramos um resultado muito interessante, a saber:

$$u'(c) = p_1. \quad (18.3.28)$$

O resultado obtido acima reflete a regra encontrada no modelo Ramsey-Cass-Koopmans (ou regra Ramsey-Keynes), a qual afirma que a perda de utilidade marginal em consumir uma unidade adicional é igualada ao preço sombra de acumular um ativo físico. Por sua vez,  $p_2 = 0$  indica que o custo de oportunidade de acumular moeda é zero, uma vez que o custo de imprimir moeda é muito baixo.

Também é possível notar que:

$$\dot{p}_1 = -p_1 [f'(k) - (n + \rho)] \equiv \psi(k_t, p_{1,t}). \quad (18.3.29)$$

Da regra Ramsey-Cass-Koopmans, pode-se resolver para  $c$ :

$$c = c(p_1), \quad c' = \frac{1}{u''} < 0. \quad (18.3.30)$$

Disso decorre que a regra de acumulação do capital físico é dada por:

$$\dot{k} = f(k) - nk - c(p_1) \equiv \phi(k_t, p_{1,t}). \quad (18.3.31)$$

Assim, a trajetória ótima de  $(k, p_1)$  é especificada pelas equações (18.3.29) e (18.3.31). O comportamento dinâmico de  $(k, p_1)$  é exatamente o mesmo que o obtido na literatura padrão para uma economia centralizada e em que a moeda não tem papel central.

Os valores de steady-state de  $k$  e  $p_1$  são definidos por:

$$\psi(k_t, p_{1,t}) = 0 \quad (18.3.32)$$

$$\phi(k_t, p_{1,t}) = 0. \quad (18.3.33)$$

Do sistema dinâmico, computamos:

$$\phi_k \left( \equiv \frac{\partial \phi}{\partial k_t} \right) = f'(k_t) - n, \quad (18.3.34)$$

$$\phi_{p_1} \left( \equiv \frac{\partial \phi}{\partial p_1} \right) = -c'(p_1), \quad (18.3.35)$$

$$\psi_k \left( \equiv \frac{\partial \psi}{\partial k_t} \right) = -p_1 f''(k_t), \quad (18.3.36)$$

$$\psi_{p_1} \left( \equiv \frac{\partial \psi}{\partial p_1} \right) = -[f'(k_t) - (n + \rho)]. \quad (18.3.37)$$

Sabemos que no steady-state  $\dot{p}_1 = 0$ . Assim, o jacobiano é computado como segue:

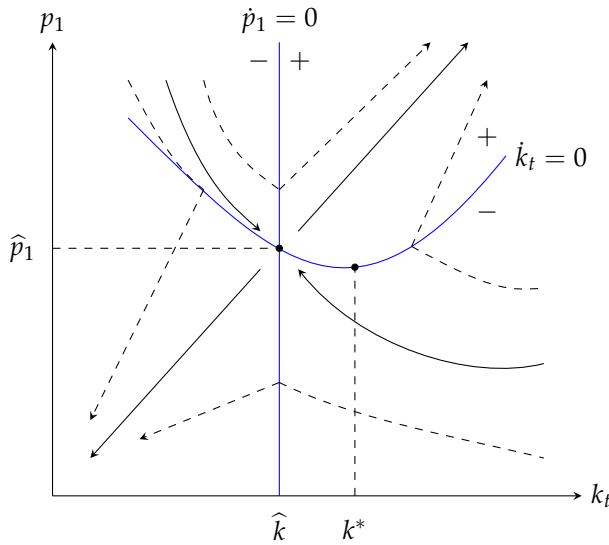
$$\begin{aligned} J &= -(f'(k_t) - n)[f'(k_t) - (n + \rho)] - (-p_1 f''(k_t))(-c'(p_1)) \\ &= -p_1 f''(k_t)c'(p_1) < 0. \end{aligned} \quad (18.3.38)$$

ou seja, o steady-state é um ponto de sela. Note que a trajetória temporal de  $(k, p_1)$  é determinada independentemente de  $m$  ou da equação que descreve o comportamento da moeda, equação (18.3.14).

O comportamento dinâmico deste modelo pode ser visualizado em termos de um diagrama de fase, como apresentado abaixo. Note que os valores de  $k_t$  para os quais  $\dot{p}_1 = 0$  são constantes e iguais a  $\hat{k}$ . Também, uma vez que  $\hat{\psi}_k = -\hat{p}_1 f''(\hat{k}) > 0$ , podemos concluir que  $\dot{p}_1 > 0$  ( $\dot{p}_1 < 0$ ) à direita (à esquerda) da linha  $\dot{p}_1 = 0$  no plano  $(p_1, k_t)$ . O formato da curva  $\dot{k}_t = 0$  é obtida como:

$$\frac{dp_1}{dk_t} \Big|_{\dot{k}_t=0} = -\frac{\phi_k}{\phi_{p_1}} = \frac{f' - n}{c'}. \quad (18.3.39)$$

FIGURA 18.3.1 – COMPORTAMENTO DINÂMICO DE  $k_t$  E  $p_1$



Sendo  $\dot{p}_1 = 0$  no steady-state, o valor de  $k$  é determinado unicamente por:

$$f'(k^*) = n + \rho. \quad (18.3.40)$$

Isto é, a razão capital-trabalho no steady-state assume a trajetória conhecida da regra de ouro modificada. Também, sendo  $\dot{k} = 0$  e  $\dot{m} = 0$  em (18.3.12) e em (18.3.14), respectivamente, obtemos os seguintes valores de steady-state de  $m$  e de  $\theta$  (denotados por  $m^*$  e  $\theta^*$ ):

$$m^* = \frac{sf(k^*) - nk^*}{(1-s)n}, \quad (18.3.41)$$

$$\theta^* = n + \pi^*, \quad (18.3.42)$$

em que  $\pi^* = \pi(k^*, m^*)$ . O consumo real per capita de steady-state ( $c^*$ ) é obtido de (18.3.11) e de (18.3.42) como:

$$\begin{aligned} c^* &= (1-s)[f(k^*) + nm^*] \\ &= f(k^*) - nk^*. \end{aligned} \quad (18.3.43)$$

O valor de  $c^*$  é precisamente o mesmo que o obtido na literatura de crescimento econômico.

Sumarizando o modelo de crescimento monetário à la Tobin, encontramos três resultados principais:

1. A trajetória ótima de crescimento segue a mesma regra do modelo Ramsey-Cass-Koopmans.

2. O comportamento dinâmico dos valores ótimos da razão capital-trabalho ( $k$ ), o preço sombra da acumulação de capital físico ( $p_1$ ) e o consumo real per capita ( $c$ ) são idênticos aos encontrados na literatura padrão para  $\rho > 0$ . A trajetória ótima de  $(k, p_1, c)$  é independente da trajetória temporal de  $m$ , isto é, a política monetária é neutra.
3. Os valores de steady-state de  $k$  e de  $c$  são idênticos aos do modelo Cass-Koopmans com  $\rho > 0$ . O steady-state da taxa de inflação é igual ao steady-state da expansão monetária ( $\theta^*$ ) subtraído a taxa de crescimento populacional ( $n$ ).

### 18.3.2 Poupança: A Hipótese da Renda Permanente

Nesta seção vamos analisar o comportamento de poupança de um indivíduo. Em particular, estamos interessados na hipótese de ciclo de vida desenvolvida por Modigliani e Brumberg (1954) e a hipótese da renda permanente de Friedman (1954). Há uma similaridade básica entre as duas teorias: ambas encontram o comportamento do consumo e da poupança de um indivíduo a partir de uma escolha intertemporal com base em uma função de utilidade. Vamos estudar especificamente a hipótese da renda permanente de Friedman (1954).

A característica básica da teoria de Friedman é, como proposto por Farell (1959), o reconhecimento de que se um indivíduo planeja racionalmente maximizar sua utilidade ao longo do seu ciclo de vida, seu consumo em um ano qualquer dependerá não somente de sua renda nesse ano, mas dos recursos que ele dispõe. Porém, Farell chama essa proposição de “plausível mas vaga”. Ele então oferece um sumário sucinto desta proposição em termos de duas hipóteses:

1. A hipótese da renda normal: em um dado período, a renda corrente de um indivíduo afeta seu consumo somente através de seu efeito sobre sua renda normal (em que a relação funcional entre o consumo e a renda normal é independente da renda corrente e dos ativos).
2. A hipótese da proporcionalidade: para um dado indivíduo, a relação entre seu consumo e sua renda normal é de proporcionalidade.

Em termos de símbolos, seja  $c_0$  o consumo real corrente no tempo zero e  $y_0^*$  a renda real permanente ou normal. Então, a hipótese da renda corrente pode ser escrita como:

$$c_0 = f(y_0^*), \quad (18.3.44)$$

em que se assume que o consumo transitório é negligenciável. A hipótese de proporcionalidade impõe uma forma funcional específica para a função  $f$ :

$$c_0 = ky_0^*, \quad (18.3.45)$$

em que o fator de proporcionalidade  $k$ , como postulado por Friedman, depende da taxa de juros, das preferências do consumidor, etc. Observe que podemos reescrever essa equação como

$$c_0 = (1 - s)y_0^*, \quad (18.3.46)$$

em que  $s$  significa a propensão a poupar e supomos que  $s$  depende da taxa real de juros. Como a equação (18.3.46) captura tanta a hipótese de renda normal e a hipótese de proporcionalidade, essa equação é a equação principal da teoria da renda permanente.

O propósito desta seção é então indicar as circunstâncias sob as quais essa equação pode ser obtida por meio da teoria do controle ótimo com o reconhecimento explícito de um comportamento racional por parte do indivíduo ao longo do tempo.

Consideramos um consumidor cuja renda nominal no período  $t$ , ( $Y_t$ ), consiste da renda do salário ( $W_t$ ) e da renda decorrente de ativos ( $i_t A_t$ ):

$$Y_t \equiv W_t + i_t A_t, \quad (18.3.47)$$

em que  $i_t$  é a taxa nominal de juros. A introdução de um ativo que não rende juros, mas que compõe a renda do indivíduo não altera a essência da presente análise e por isso omitimos essa variável no modelo.

A renda do consumidor,  $Y_t$ , é alocada entre gastos com consumo,  $C_t$ , e a acumulação de ativos,  $A_t$ :

$$Y_t \equiv C_t + \dot{A}_t. \quad (18.3.48)$$

Combinando as equações acima, chegamos a:

$$W_t + i_t A_t = C_t + \dot{A}_t \Rightarrow \dot{A}_t \equiv W_t + i_t A_t - C_t. \quad (18.3.49)$$

Vamos representar o nível de preços em  $t$  por  $p_t$  e definir as variáveis em termos reais como  $a_t$ ,  $w_t$  e  $c_t$ , tal que:

$$a_t \equiv \frac{A_t}{p_t} \quad (18.3.50)$$

$$w_t \equiv \frac{W_t}{p_t} \quad (18.3.51)$$

$$c_t \equiv \frac{C_t}{p_t}. \quad (18.3.52)$$

A partir disso, note que  $\dot{a}_t \equiv \frac{\dot{A}_t}{p_t} - a_t \frac{\dot{p}_t}{p_t}$ . Assim, podemos reescrever (18.3.49) como

$$\dot{a}_t = w_t + (i_t - \pi_t)a_t - c_t, \quad (18.3.53)$$

em que  $\pi_t$  é a taxa de inflação. Seguindo Fisher, assuma que  $r_t \equiv i_t - \pi_t$  seja a taxa real de juros no período  $t$ . Portanto, reescrevemos (18.3.53) como

$$\dot{a}_t = w_t + r_t a_t - c_t. \quad (18.3.54)$$

A hipótese do ciclo de vida tipicamente considera um consumidor cuja expectativa de vida é finita. Embora justificável, isso é dificultado pelo fato de que seu consumo ótimo dependerá da herança que deixará para seus descendentes e da utilidade que isso gerará. Isso produz um problema envolvendo uma cadeia infinita de gerações. Tal problema foi extensivamente estudado por meio de modelos de gerações sobrepostas à la Samuelson (1958). Porém, também há limitações com essa abordagem. Para evitar tais complicações e ainda incorporar o aspecto do horizonte infinito, assumimos que o indivíduo vive infinitamente.

Sendo  $c_t$  o consumo real de nosso consumidor representativo em  $t$ , a sua utilidade é dada por:

$$U \equiv \int_0^\infty u(c_t) e^{-\rho t} dt, \quad (18.3.55)$$

em que  $u' > 0$ ,  $u'' < 0$  e  $u'(0) = \infty$ , e  $\rho$  é uma taxa subjetiva de desconto intertemporal (positiva e constante).

O objetivo do consumidor é escolher uma trajetória para  $c_t$  que maximize  $U$  sujeito a equação de acumulação de ativos e as restrições de não-negatividade sobre  $c_t$  juntamente com as condições iniciais.

Para resolver este problema definimos o Hamiltoniano de valor corrente por

$$H(a_t, c_t, q_t) \equiv u(c_t) + q_t(w_t + r_t a_t - c_t), \quad (18.3.56)$$

em que  $q_t$  é o multiplicador de Pontryagin. Entre as equações que determinam as condições necessárias para uma solução interna única, temos:

$$\dot{a}_t = \frac{\partial H}{\partial q_t} \Rightarrow \dot{a}_t = w_t + r_t a_t - c_t \quad (18.3.57)$$

$$\dot{q}_t = \rho q_t - \frac{\partial H}{\partial a_t} \Rightarrow \dot{q}_t = (\rho - r_t) q_t \quad (18.3.58)$$

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = 0 \Rightarrow u'(c_t) = q_t \quad (18.3.59)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_t e^{-\rho t} a_t = 0. \quad (18.3.60)$$

Devido a concavidade estrita de  $u$  e a linearidade da restrição (18.3.54), essas condições são suficientes para uma solução ótima única.

Note que, de (18.3.59), temos:

$$\dot{q}_t = u''(c_t) \dot{c}_t. \quad (18.3.61)$$

Definindo a elasticidade da utilidade marginal do consumo como:

$$\eta(c_t) \equiv \frac{-u''(c_t)c_t}{u'(c_t)} > 0, \quad (18.3.62)$$

podemos reescrever (18.3.61) como:

$$\frac{\dot{q}_t}{q_t} = \frac{-\eta(c_t)\dot{c}_t}{c_t} \quad (u'(c_t) = q_t). \quad (18.3.63)$$

Combinando este resultado com (18.3.58), obtemos:

$$r_t = \rho + \frac{\eta(c_t)\dot{c}_t}{c_t}, \quad (18.3.64)$$

em que o lado direito de (18.3.64) é a taxa de preferência intertemporal. Esta equação é a condição chave para a otimalidade do problema proposto.

Para simplificar a discussão assumimos que o consumidor espera que a taxa real de juros,  $r_t$ , seja constante para todo  $t$ , isto é,  $r_t = r$ . Portanto,

$$\dot{a}_t - ra_t = w_t - c_t. \quad (18.3.65)$$

Multiplicando ambos os lados por  $e^{-rt}$ , obtemos:

$$\frac{d}{dt} (a_t e^{-rt}) = (\dot{a}_t - ra_t) e^{-rt} = (w_t - c_t) e^{-rt}. \quad (18.3.66)$$

Dado que  $\frac{d}{dt} (a_t e^{-rt}) = (\dot{a}_t - ra_t) e^{-rt}$ , reescrevemos o problema como:

$$\frac{d}{dt} (a_t e^{-rt}) = (w_t - c_t) e^{-rt}. \quad (18.3.67)$$

Integrando ambos os lados entre 0 e  $\infty$ , podemos observar:

$$a_t e^{-rt} \Big|_0^\infty = \int_0^\infty (w_t - c_t) e^{-rt} dt. \quad (18.3.68)$$

Disso decorre que:

$$\int_0^\infty c_t e^{-rt} dt = a_0 + \int_0^\infty w_t e^{-rt} dt \equiv a_0^*, \quad (18.3.69)$$

em que  $a_0^*$  é a soma dos valores dos ativos do consumidor e o valor presente dos salários futuros. Aqui,  $a_0^*$  significa o valor real de sua riqueza total. Vamos assumir que  $a_0^*$  é finito. Portanto, a equação acima é a restrição orçamentária intertemporal. Assim, podemos definir a renda permanente presente,  $y_0^*$ , como:

$$y_0^* \equiv r a_0^*. \quad (18.3.70)$$

Isto é, o valor das perpetuidades que geram o fluxo de renda  $y_0^*$  é igual a  $a_0^*$  se a taxa de juros é  $r$ . Todavia, a hipótese de que a taxa de juros é constante não é passível de manutenção. Portanto, vamos permitir que ela varie no tempo, ou seja,

$$\int_0^\infty c_t e^{-\int_0^t r_s ds} dt = a_0 + \int_0^\infty w_t e^{-\int_0^t r_s ds} dt \equiv a_0^*. \quad (18.3.71)$$

Observe que podemos definir a renda permanente por meio de ambas as hipóteses. Vamos trabalhar com duas simplificações:

1. a taxa de juros  $r_t$  é constante;
2. a elasticidade da utilidade marginal do consumo é constante, isto é,  $\eta(c_t) \equiv \eta, \forall t$ .

A hipótese acerca da natureza da elasticidade é satisfeita se assumirmos que a função de utilidade  $u$  é especificada por:

$$u(c_t) = \alpha c_t^{1-\eta} + \text{constante}, \quad 0 < \eta < 1 \quad (18.3.72)$$

$$u(c_t) = \alpha \log(c_t) + \text{constante}, \quad \eta = 1. \quad (18.3.73)$$

Tais formas da função de utilidade aparecem com frequência no contexto de modelos de crescimento econômico. Por exemplo, Goodwin (1961) e Stiglitz (1974) assumem  $\eta = 1$ , enquanto Tinberge (1960) assume que  $\eta = 0.6$ . No contexto de modelos de ciclo de vida, tais formulações foram utilizadas por Yaari (1964), Blinder (1974), entre outros. Seguindo Blinder, chamamos essa

função utilidade de isoelástica (uma transformação afim positiva), de tal forma que o coeficiente de aversão relativa ao risco,  $R_r(c_t) = -c_t \frac{u''(c_t)}{u'(c_t)}$ , é constante.

Com base nisso, a regra ótima de consumo se torna

$$r = \rho + \eta \left( \frac{\dot{c}_t}{c_t} \right) \Rightarrow \frac{\dot{c}_t}{c_t} = \mu, \quad \mu = \frac{r - \rho}{\eta}. \quad (18.3.74)$$

Podemos resolver essa equação e obter:

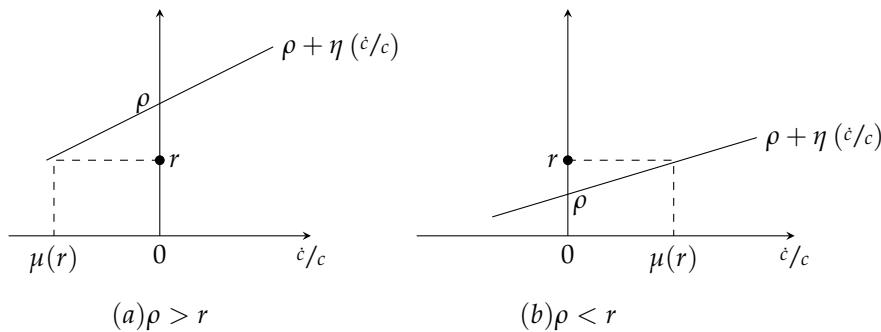
$$c_t = c_0 e^{\mu t} \quad (18.3.75)$$

Logo, o consumo cresce ou diminui dependendo se a taxa real de juros excede ou não a taxa de desconto subjetiva  $\rho$ . Este resultado é interessante porque não depende da especificação da função utilidade. O pressuposto da função de utilidade isoelástica impõe a restrição de que a taxa de expansão ou contração do consumo seja uma constante.

Este resultado foi obtido por Yaari (1964) e sua interpretação econômica é direta. Por exemplo, se  $\rho > r$ , o consumidor pode melhorar sua posição tomando recursos emprestados a taxa  $r$  de forma a melhorar seu consumo no presente. Portanto, o consumo ótimo de  $c_t$  deve declinar ao longo do tempo. A interpretação do caso  $\rho < r$  é análoga.

Lembrando que  $\mu \equiv \frac{(r - \rho)}{\eta}$  por definição, e dado que  $\rho$  e  $\eta$  são constantes,  $\mu$  é uma função apenas de  $r$ , isto é,  $\mu = \mu(r)$ . A determinação de  $\mu(r)$  pode ser obtida graficamente na figura abaixo. Ilustra-se os dois casos discutidos acima:  $\rho > r$  e  $\rho < r$ .

FIGURA 18.3.2 – DIAGRAMA DE IRVING FISHER: DETERMINAÇÃO DE  $\mu(r)$



Assim, podemos computar:

$$\int_0^\infty c_t e^{-rt} dt = \int_0^\infty c_0 e^{-(r-\mu)t} dt = \frac{c_0}{r - \mu}, \quad (18.3.76)$$

em que assumimos que

$$r - \mu > 0, \quad (18.3.77)$$

para garantir que a integral acima converja e assuma um valor positivo. Note que se  $r = \rho$  (caso em que  $\mu = 0$  e  $r > 0$ ), esta condição é sempre satisfeita.

Das condições estabelecidas acima, encontramos:

$$\begin{aligned} y_0^* &= r a_0^* \\ &= r \int_0^\infty c_t e^{-rt} dt \\ &= r \left[ \frac{c_0}{r - \mu} \right] \\ c_0 &= \left[ 1 - \frac{\mu(r)}{r} \right] y_0^* \\ c_0 &= [1 - s(r)] y_0^*. \end{aligned} \quad (18.3.78)$$

Esta equação fornece a relação que determina o valor ótimo do consumo corrente ( $c_0$ ) a partir da renda permanente,  $y_0^*$ . Note que as propensões a poupar e a consumir são dadas, respectivamente, por  $s(r)$  e  $1 - s(r)$ , e que elas dependem da taxa real de juros,  $r$ . Também percebemos que a elasticidade renda do consumo é igual a unidade, isto é,  $\varepsilon = \frac{dc_0}{dy_0^*} \times \frac{y_0^*}{c_0} = (1 - s(r)) \times \frac{y_0^*}{[1 - s(r)] y_0^*} = 1$ . Isto também significa que a elasticidade riqueza do consumo é igual a unidade.

Lembrando da definição de  $\mu = \frac{r - \rho}{\eta}$ , podemos obter a seguinte expressão para  $s(r)$ :

$$s(r) \equiv \frac{1 - \frac{\rho}{r}}{\eta}. \quad (18.3.79)$$

Desse resultado decorre que

$$\frac{ds(r)}{dr} = \frac{\rho}{\eta r^2} > 0, \quad (18.3.80)$$

$$\frac{d^2 s(r)}{d^2 r} = -\frac{2\rho}{\eta r^3} < 0, \quad (18.3.81)$$

isto é, a propensão a poupar é uma função crescente da taxa de juros, mas a taxas decrescentes.

A partir destes resultados, obtemos a seguinte proposição:

**Proposição 18.3.1.** A hipótese da renda permanente na forma  $c_0 = (1 - s)y_0^*$  ou na forma  $c_0 = [1 - s(r)]y_0^*$  pode ser obtida como a solução de uma escolha intertemporal do indivíduo, se a taxa de juros  $r$  permanecer constante. Um aumento em  $r$  eleva a propensão a poupar. Se a taxa de juros não é constante, então a hipótese da renda permanente não necessariamente é válida.

Observe que nós enfatizamos que (18.3.78) foi obtida sob a hipótese de que a taxa real de juros permanece constante. Em geral, este pressuposto é violado e não podemos encontrar esta especificação para o consumo real corrente ótimo. Se a taxa de inflação ( $\pi_t$ ) e a taxa nominal de juros ( $i_t$ ) movem-se de tal forma a causar flutuações na taxa real de juros, então são necessárias modificações no desenvolvimento visto acima. Friedman argumenta que a taxa real de juros é estável no longo prazo.

É importante percebermos que a hipótese da renda permanente pode ser obtida por meio de técnicas de controle ótimo, em que a natureza intertemporal das escolhas do consumidor assume um papel fundamental. Encontramos que o consumo corrente é proporcional a renda permanente, em que o fator de proporcionalidade depende da taxa real de juros, se apreciarmos a hipótese de que a função de utilidade é isoelástica. A teoria de controle ótimo fornece, portanto, uma estrutura que nos permite derivar os principais resultados. O consumo sendo proporcional a riqueza ou a renda permanente emerge naturalmente desta demonstração.

---

## ANEXO

---

```

install.packages(c("mosaic","mosaicCalc"))
suppressPackageStartupMessages(library(mosaic))
suppressPackageStartupMessages(library(mosaicCalc))

supply <- makeFun(exp(-2+1.7*log(x))~x)
demand <- makeFun(exp(8.5-0.82*log(x))~x)

q1 <- findZeros(supply(x)-demand(x) ~ x, x.lim=range(60,80))
q1 <- q1$x
q1
p1 <- supply(q1)
p1

S <- antiD(supply(x)~x)
D <- antiD(demand(x)~x)
#Excedente do consumidor (20 ao preço de equilíbrio )
(D(q1)-D(20))-p1*(q1-20)
#Excedente do produtor
p1*(q1-20)-(S(q1)-S(20))
#Excedente total
(D(q1)-D(20))-p1*(q1-20)+p1*(q1-20)-(S(q1)-S(20))

Uof <- function(XY) {
    # x não pode ser menor que o ou maior que todo o
    # orçamento gasto em x
    x <- min(max(XY[1],0), b/px)

    # y não pode ser menor que o ou maior que todo o
    # orçamento disponível depois do gasto em x
}

```

```

y <- min(max(XY[2],0), (b - x*px)/py)
# z é adquirido com a parte restante do orçamento
z <- (b - x*px - y*py)/pz

# Display a quantidade de x,y, e z escolhido
print(pasteo("x:", x, "y:", y, "z:", z))

# Dado que função optim minimiza uma função, fazemos o negativo dela
-utility(x,y,z)
}

# Escolha de algumas potenciais funções

cobb.douglas2 <- function(x,y,z) x^.3*y^.3
cobb.douglas3 <- function(x,y,z) x^.3*y^.3*z^.4
lentief3      <- function(x,y,z) min(x,y,z)
linear.concave <- function(x,y,z) x^.3 + y^.2 + z^.5
mixed          <- function(x,y,z) min(x, y)^.5*z^.5
addative       <- function(x,y,z) 2*x+3*y+z

# Escolhendo a função a ser minimizada
utility <- cobb.douglas3

# Escolhendo os preços
px <- 1
py <- 1
pz <- 1

# Orçamento total
b <- 100

# Vamos ver quanta utilidade obtemos ao definir x=1 e y=1
Uof(c(1,1))

# O comando a seguir maximizará a utilidade sujeita à escolha
# da função de utilidade, preços e orçamento

optim(c(1,1), Uof, method="BFGS")

utility <- mixed

```

```

xv <- NULL
yv <- NULL

pxv <- seq (.25,10,.25)

for (px in pxv) {
  res <- optim(c(1,1), Uof, method="BFGS")
  xv <- c(xv, max(res$par[1],0))
  yv <- c(yv, max(res$par[2],0))
}

plot(xv, pxv, type="l", main="Demanda\u00e1por\u00e1X(px)",
      xlab="Quantidade\u00e1de\u00e1X", ylab="Pre\u00e7o\u00e1de\u00e1X")

plot(yv, pxv, type="l", main="Demanda\u00e1por\u00e1Y(px)",
      xlab="Quantidade\u00e1de\u00e1Y", ylab="Pre\u00e7o\u00e1de\u00e1X")

install.packages("NlcOptim")

#####
#Deriving Demand Curves in R#
#####

library('NlcOptim')

#####
# Initializing by defining sequence of prices , #
#Null vector for storage of demands and initial#
#"guess" for our solver.                      #
#####


price<-seq(1,15,by=0.05)
qdemand<-NULL
xo<-c(1,1)

#####
# Preferences #
#####
preferences<-function(x){
  return(-(x[1])^0.3*x[2]^0.3)
}

```

```

#####
#Budget Constraint#
#####
budgetconstraint<-function(x){
  f=NULL
  f= rbind(f,p*x[1]+1*x[2]-10)
  return(list(ceq = NULL, c = f))
}

#####
#Define for loop and Solve#
#####

for(p in price){
  umax<-solnl(xo,preferences,budgetconstraint)
  d<- umax$par[1]
  qdemand<-rbind(qdemand,d)
}

#####
#Plot data#
#####
df<-data.frame(price,qdemand)
plot(qdemand,price,type='l',col='blue', xlab='Quantity',ylab='Price',
main="The Demand Curve", lwd=4.0)

```

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- Acemoglu, D. (2008). *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press.
- Aleskerov, F., Ersel, H., and Piontковski, D. (2011). *Linear Algebra for Economists*. Springer Science & Business Media.
- Altug, S., Chadha, J. S., and Nolan, C. (2003). *Dynamic Macroeconomic Analysis: Theory and Policy in General Equilibrium*. Cambridge University Press.
- Amman, H. M., Tesfatsion, L., Kendrick, D. A., Judd, K. L., and Rust, J. (1996). *Handbook of Computational Economics*. Elsevier.
- Apóstol, T. M. (1976a). *Calculus, Volume I*. Wiley & Sons.
- Apóstol, T. M. (1976b). *Calculus, Volume II*. Wiley & Sons.
- Apostol, T. M. (1996). *Análisis Matemático*. Reverté.
- Apostol, T. M. (2014). *Linear Algebra: A First Course with Applications to Differential Equations*. John Wiley & Sons.
- Arrow, K. and Intriligator, M. (2000). *Handbook of Mathematical Economics*. Elsevier.
- Ashenfelter, O. and Card, D. (1982). Time series representations of economic variables and alternative models of the labour market. *The Review of Economic Studies*, 49(5):761–782.
- Bellman, R. (2013). *Dynamic Programming*. Courier Corporation.
- Bellman, R. E. and Dreyfus, S. E. (2015). *Applied Dynamic Programming*. Princeton university press.
- Binmore, K. and Davies, J. (2002). *Calculus: Concepts and Methods*. Cambridge University Press.
- Birchenhall, C. and Grout, P. (1984). *Mathematics for Modern Economics*. Barnes & Noble Imports.
- Brandimarte, P. (2013). *Numerical Methods in Finance and Economics: A MATLAB-Based Introduction*. John Wiley & Sons.
- Cagan, P. (1956). The monetary dynamics of hyperinflation. *Studies in the Quantity Theory if Money*.
- Callahan, J. J. (2010). *Advanced Calculus: A Geometric View*. Springer Science & Business Media.
- Callioli, C. A., Domingues, H. H., and Costa, R. C. F. (2007). *Álgebra Linear e Aplicações*. Atual.
- Caputo, M. R. and Caputo, M. R. (2005). *Foundations of Dynamic Economic Analysis: Optimal Ccontrol Theory and Applications*. Cambridge University Press.
- Carter, M. (2001). *Foundations of Mathematical Economics*. MIT Press.
- Cerreia-Vioglio, S., Marinacci, M., and Vigna, E. (2018). *Principles of Mathematics for Economics*. Springer.
- Chiang, A. C. (1992). *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill.
- Colonius, F. and Kliemann, W. (2014). *Dynamical Systems and Linear Algebra*. American Mathematical Society.
- Costa, B. and Werzler, F. (1986). *Álgebra Linear*. Harbra Editora.
- Dadkhah, K. (2011). *Foundations of Mathematical and Computational Economics*. Springer Science & Business Media.
- Dorfman, R. (1969). An economic interpretation of optimal control theory. *American Economic Review*, 59(5):817–831.
- Dornbusch, R. (1976). Expectations and exchange rate dynamics. *Journal of Political Economy*, 84(6):1161–1176.

- Elaydi, S. N. (2007). *Discrete Chaos: With Applications in Science and Engineering*. Chapman and Hall/CRC.
- Friedberg, S. H. and Insel, A. J. (1986). *Introduction to Linear Algebra with Applications*. Prentice Hall.
- Friesz, T. L. (2010). *Dynamic Optimization and Differential Games*. Springer Science & Business Media.
- Galí, J. (2011). The return of the wage phillips curve. *Journal of the European Economic Association*, 9(3):436–461.
- Gali, J. and Monacelli, T. (2008). Optimal monetary and fiscal policy in a currency union. *Journal of International Economics*, 76(1):116–132.
- Gandolfo, G. (1997). *Economic Dynamics: Study Edition*. Springer Science & Business Media.
- Heer, B. and Maussner, A. (2009). *Dynamic General Equilibrium Modeling: Computational Methods and Applications*. Springer Science & Business Media.
- Holly, S. and Hallet, A. H. (1989). *Optimal Control, Expectations and Uncertainty*. Cambridge University Press.
- Hoy, M., Livernois, J., McKenna, C., Rees, R., and Stengos, T. (2011). *Mathematics for Economics*. MIT press.
- Judd, K. L. (2002). *Numerical Methods in Economics*. MIT Press, Cambridge, MA.
- Kamien, M. I. and Schwartz, N. L. (2012). *Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management*. Courier Corporation.
- Kirk, D. E. (2012). *Optimal Control Theory: An Introduction*. Courier Corporation.
- Kiusalaas, J. (2013). *Numerical Methods in Engineering with Python 3*. Cambridge university press.
- Klein, M. W. et al. (2014). *Mathematical Methods for Economics*. Harlow, Essex: Pearson.
- Kusuoka, S. and Maruyama, T. (2018). *Advances in Mathematical Economics*, volume 22. Springer.
- Leonard, D., Van Long, N., and Ngo, V. L. (1992). *Optimal Control Theory and Static Optimization in Economics*. Cambridge University Press.
- Liberzon, D. (2011). *Calculus of Variations and Optimal Control Theory: A Concise Introduction*. Princeton University Press.
- Lima, E. L. (1996). *Algebra Linear*. IMPA, Rio de Janeiro.
- Lipschutz, S. and Lipson, M. (2009). *Algebra Linear: Coleção Schaum*. Bookman Editora.
- Ljungqvist, L. and Sargent, T. J. (2018). *Recursive Macroeconomic Theory*. MIT press.
- Melkumian, A. (2012). *Mathematical Economics*. Routledge.
- Miranda, M. J. and Fackler, P. L. (2004). *Applied Computational Economics and Finance*. MIT press.
- Moore, H. L. (1914). *Economic Cycles: Their Law and Cause*. New York: The Macmillan Company.
- Moreira, H. A. and Cysne, R. (2000). *Curso de Matemática para Economistas. 2ª Edição*. São Paulo: Editora Atlas.
- Muth, R. F. (1961). Rational expectations and the theory of price movements. *Econometrica*, 29(3):315–335.
- Nikaido, H. (1960). *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*. North-Holland.
- Robert, A. A. (2013). *Calculus: A Complete Course*. Prentice Hall.
- Sagan, H. (1969). *Introduction to the Calculus of Variations*. Courier Corporation.
- Samuelson, P. A. (1939). Interactions between the multiplier analysis and the principle of acceleration. *The Review of Economics and Statistics*, 21(2):75–78.
- Schönbucher, P. (2004). *Applied Computational Economics and Finance*. Taylor & Francis.
- Scott, B. (1999). *Computational Methods for the Study of Dynamic Economies*. Oxford University Press.
- Sedaghat, H. (1997). A class of nonlinear second order difference equations from macroeconomics. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 29(5):593–603.
- Seierstad, A. and Sydsæter, K. (1986). *Optimal Control Theory with Economic Applications*. Elsevier North-Holland, Inc.
- Shone, R. (2002). *Economic Dynamics: Phase Diagrams and their Economic Application*. Cambridge University Press.
- Simon, C. P. and Blume, L. (1994). *Mathematics for Economists*. Norton New York.
- Stachurski, J. (2009). *Economic Dynamics: Theory and Computation*. MIT Press.

- Stokey, N. and Lucas, J. R. E. (1989). *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press.
- Stokey, N. L. (2008). *The Economics of Inaction: Stochastic Control Models with Fixed Costs*. Princeton University Press.
- Sundaram, R. K. (1996). *A First Course in Optimization Theory*. Cambridge university press.
- Sydsæter, K., Hammond, P., Seierstad, A., and Strom, A. (2008). *Further Mathematics for Economic Analysis*. Pearson education.
- Takayama, A. (1985). *Mathematical Economics*. Cambridge University Press.
- Takayama, A. (1993). *Analytical Methods in Economics*. University of Michigan Press.
- Taylor, J. B. (1980). Aggregate dynamics and staggered contracts. *Journal of Political Economy*, 88(1):1–23.
- Vali, S. (2014). *Principles of Mathematical Economics*. Springer.
- Weber, T. A. (2011). *Optimal Control Theory with Applications in Economics*. MIT Press.
- Woodford, M. (2003). Optimal interest-rate smoothing. *Review of Economic Studies*, 70(4):861–886.