Introduction aux Mathématiques Financières

Ecole Centrale Paris
Deuxième année, S3

Lionel Gabet, Frédéric Abergel, Ioane Muni Toke

Version 2010

Table des matières

Première partie

Produits et marchés financiers

Chapitre 1

Les produits financiers classiques

1.1 Les actions et les indices

Les actions

Une action est un titre négociable de propriété sur une fraction du capital social d'une entreprise.

A leur émission, la valeur de ces titres est fixée par la société. Ensuite, les titres sont côtés sur un marché en fonction des lois de l'offre et de la demande.

En outre, l'actionnaire reçoit une fraction des bénéfices de l'entreprise sous forme de dividendes.

La bourse NYSE-Euronext

Euronext est la Bourse paneuropéenne, société de droit néerlandais créée le 22 septembre 2000 par la fusion des entreprises gérant les marchés des bourses de Paris, de Bruxelles (BXS) et d'Amsterdam (AEX), les bourses de Lisbonne et de Porto (BVLP) ayant été intégrées à ce Groupe en 2001, le LIFFE (London International Financial Futures and options Exchange) en 2002.

Ces fusions et rachats ont ainsi participé d'un mouvement de regroupement des bourses, indispensable pour réduire les coûts de négociation dans un environnement de concurrence européenne et mondiale de plus en plus intense.

Chaque société de bourse est restée cotée sur sa Bourse d'origine, mais ses titres sont négociés sur la plateforme commune. Euronext Paris SA, Euronext Amsterdam NV et Euronext Brussels SA/NV sont dès lors devenues filiales à 100 % de l'entité Euronext.

Le 1 er juin 2006, Euronext a annoncé un accord de fusion " entre égaux " avec la principale place boursière américaine et mondiale, le NYSE (New York Stock Exchange), fusion devenue effective depuis le 4 avril 2007.

La plus importante plateforme boursière du monde en est née : Nyse-Euronext. Cette nouvelle structure n'a cessé de se développer depuis, devenant par exemple actionnaire de la bourse brésilienne Bovespa en octobre 2007 et rachetant l'American Stock Exchange (Amex) en janvier 2008.

Euronext comprend des marchés non réglementés (comme le Marché libre ou Alternext, créé en 2005 pour permettre spécifiquement l'introduction en Bourse des PME) et des marchés réglementés (comme Eurolist).

Les indices

La plupart des Bourses mondiales proposent des indices qui permettent d'évaluer les performances d'un marché ou d'un secteur.

Citons les principaux indices des marchés actions français.

- Le CAC 40 est l'indice principal de la place de Paris. Il est calculé à partir de 40 valeurs choisies parmi les cents sociétés dont les échanges sont les plus abondants sur Euronext Paris.
- Le CAC Next 20 regroupe les vingt valeurs dont l'importance suit celle des valeurs composants le CAC 40.
- Le SBF 120 est calculé à partir des actions du CAC 40 et du CAC Next 20 ainsi que de 60 valeurs du premier et du second marché les plus actives de la côte.
- Le SBF 250 calculé à partir de 250 sociétés reflettant l'ensemble des secteurs d'activités. Il est composé des valeurs du CAC 40 et du CAC Next 20 ainsi que celles du CAC Mid 100 et du CAC Small 90.

Une nouvelle gamme d'indices européens a été lancée le 26 février 1998 par STOXX Limited, société conjointe détenue à parts égales par la SBF Bourse de Paris, la Deutsche Borse, le Swiss Exchange et la Dow Jones Company. Ces indices principaux sont :

- Le Dow Jones Stoxx, composé de 665 valeurs de 16 pays.
- Le Dow Jones Euro Stoxx, composé de 326 valeurs de 10 pays de la zone Euro.
- Le Dow Jones Stoxx 50 et le Dow Jones Euro Stoxx 50, composés chacun de 50 valeurs sélectionnées pour leur capitalisation, leur liquidité et leur poids sectoriel.

Parmi les indices internationaux citons aussi :

- Le Dow-Jones Industrial Average. C'est le plus vieil indice du monde. Il est composé des 30 principales valeurs industrielles de la bourse de New-York (les blue chips). Pour des raisons historiques, sa valeur est la moyenne arithmétique (non pondérée par la capitalisation) des valeurs qui le compose.
- Le SP 500 regroupe les 500 plus importantes sociétés de Wall Street. Sa valeur est bien plus représentative que celle du Dow-Jones.

– Le Nasdaq Composite est un indice calculé à partir de toutes les valeurs du marché NASDAQ (deuxième marchés action des Etats-Unis derrère le NYSE). Il contient plus de 3000 valeurs notamment, mais pas uniquement, technologiques.
– Le Nikkéi 225 est l'indice principal de la bourse de Tokyo. Sa valeur est calculée comme celle du Dow-Jones.
– Le Footsie (FTSE 100) est l'indice principal de la bourse de Londres.
– Le DAX est l'indice principal de la bourse de Francfort composé de 30 valeurs vedettes.

1.2 Les obligations

Les obligations

Une obligation est un titre négociable émis par une société ou une collectivité publique lors d'un emprunt et remis au prêteur en représentation de sa créance.

Une obligation est définie par le nom de l'émetteur, le taux d'intérêt, la date d'échéance, la devise dans laquelle elle est émise, une périodicité de coupon, la date d'émission.

Les modalités de remboursement et le mode de rémunération des prêteurs sont fixés contractuellement, la rémunération pouvant être fixe ou variable, indexée alors sur un taux d'intérêt et non sur le résultat de l'entreprise.

La valeur nominale permet le calcul des intérêts (coupon) que l'emprunteur s'engage à verser annuellement (en général dans la zone euro), trimestriellement (obligations anglaises et américaines surtout) ou encore avec une périodicité plus courte.

Le remboursement est lui aussi fixé contractuellement dès l'émission des obligations. Il peut être "in fine", "par tranches" ou "par annuités constantes".

Les cours des obligations sont exprimés en pourcentage de la valeur nominale. Ainsi, une obligation de valeur nominale 10000 euros (prix de la coupure) ne cotera pas 9900 euros, mais 99 %.

Le marché obligataire s'étant internationalisé, les investisseurs ont besoin de références (les "ratings" des agences de notation) pour mesurer le risque de défaut des émetteurs.

Les emprunts d'états

La plupart des états émettent des obligations dans le but de collecter des fonds sur les marchés. Les principales obligations européennes sont : OAT (France), Bonos (Espagne), Olo (Belgique), Btp (Italie), Guilt (GB), Bund (Allemagne).

Un emprunt d'état (en anglais : government bond, dont le diminutif usuel est govvie) est une obligation ou un titre de créance négociable émis généralement dans sa propre devise par un gouvernement.

Dans le cas d'une émission dans une devise convertible, celle du pays ou d'un autre, on utilise généralement l'appellation d'"obligation souveraine", adaptation directe de l'anglais sovereign bond.

Les OAT

La plupart des Trésors des grands pays développés utilisent le système des OAT (Obligations Assimilables au Trésor).

Le principe de l'assimilation (en anglais : reopening, réouverture) est le suivant : l'Etat émet un emprunt de départ qui est complété ultérieurement par l'émission de tranches d'obligations assimilables aux précédentes, c'est-à-dire ayant les mêmes valeurs nominales, taux de coupon (intérêts), dates de paiement des coupons et dates de remboursement (en France, 25 avril ou 25 octobre).

Une OAT est toujours une obligation dont le principal est remboursé in fine, c'est-à-dire en un seul versement à la date d'échéance, les coupons étant versés annuellement.

Toutes les obligations créées lors de l'emprunt initial (dont le but est toujours de financer le déficit budgétaire d'un Etat) ou de ses "rallonges" sont identiques : elles font l'objet d'une seule ligne de cotation, et bénéficient ainsi d'une forte liquidité et d'une capitalisation boursière totale considérable.

Il existe des OAT à taux fixe, à taux variable, à taux indexé sur l'inflation, ou encore "de capitalisation".

Un investisseur qui acquiert une OAT de capitalisation sait exactement quelle somme il percevrait à l'échéance, mais il peut réaliser une plus-value ou une moins-value avant l'échéance, en fonction des variations de cours de cette OAT.

1.3 Les swaps

Un swap est un contrat par lequel deux contreparties conviennent de s'échanger deux séries de flux financiers (en général de dettes ou de devises) entre deux dates fixées. Ces flux sont calculés à partir d'un montant théorique de référence appelé notionnel.

Contrairement aux échanges d'actifs financiers, les échanges de flux financiers sont des instruments de gré à gré sans incidence sur le bilan, qui permettent de modifier des conditions de taux ou de devises (ou des deux simultanément), d'actifs et de passifs actuels ou futurs.

Il permet à un investisseur de transformer ou d'améliorer un des caractères des actifs dont il dispose pour un autre qu'il lui est impossible d'accéder sur le marché des capitaux courant. Cette incapacité d'accéder aux genres d'actifs dont il a besoin, peut être le résultat de la politique financière adoptée par son pays de résidence ou par l'inexistence d'instruments spécifiques liés aux actifs. Le produit synthétique résultant de l'échange reflète les caractéristiques uniques cherchées par l'investisseur. Cette opération permet de diminuer les risques de contrepartie tout en accédant un produit synthétique non accessible sur le marché habituel.

Par exemple, deux parties peuvent s'engager à payer à des dates prédéterminées le différentiel entre un taux fixe et un taux variable prédéfini.

1.4 Les forwards et les futures

Un contrat à terme constitue un engagement à acheter ou à vendre à une certaine échéance T future une quantité d'un actif (titres ou marchandises) à un cours négocié le jour t où on prend le dit engagement mais payable à l'échéance T.

Les Futures sont des contrats à terme négociés sur les marchés réglementés par opposition aux Forwards, contrats à terme négociés "de gré à gré ".

Les sous-jacents des Futures sont soit des actifs physiques (les contrats à terme de marchandises ayant existé dès l'Antiquité), soit des actifs financiers (ces contrats à terme étant apparus au début des années 1970).

Les marchés réglementés (tels que le Chicago Mercantile Exchange Group, le LIFFE de NYSE-Euronext ou l'Eurex) proposent des contrats Futures standardisés quant aux montants, aux échéances et à la qualité des sous-jacents. Ils disposent de chambres de compensation qui servent d'intermédiaires, de sorte que l'acheteur a en face de lui ces chambres de compensation comme vendeur, et réciproquement pour le vendeur.

Les paiements quotidiens entre gagnants et perdants se font exclusivement par l'intermédiaire de cette chambre, le risque de contrepartie lui étant donc transféré, la garantie des contrats Futures étant ainsi beaucoup plus importante contre le risque de défaillance de la partie perdante que pour les contrats de gré à gré (Forwards pour lesquels la perte est décaissée en bloc à l'échéance).

Les dépôts de garantie initiaux et appels de marge quotidiens (sommes perdues) sont ainsi les principaux instruments des autorités de marchés de Futures, la position de marché du "perdant" sur un contrat Future étant annulée par l'autorité de marché si celui-ci ne peut pas payer sa marge quotidienne (le dépôt de garantie initial étant toujours supérieur à la variation maximale quotidienne du cours boursier d'un contrat Future).

Les Futures sur actifs physiques sont des contrats à terme dont les sous-jacents sont des marchandises ou des matières premières : produits agricoles (bœuf, porc, laitages, blé, mas, soja, sucr, bois, etc.), métaux (or, argent, cuivre, aluminium, zinc, palladium, etc.) et matières liées à l'énergie (gaz, pétrole, charbon, électricité).

Ces Futures sur actifs physiques, qui permettent notamment aux producteurs et aux négociants de se couvrir contre le risque de variation des prix, donnent le plus souvent lieu à la livraison du sous-jacent, contrairement aux Futures sur actifs financiers.

Les Futures sur actifs financiers ont également pour les investisseurs un objectif de couverture contre les risques et ils portent sur les actions, les obligations et autres titres de créance négociables, les taux d'intérêt (80 % des Futures échangés dans le monde en 2007), les indices et les devises.

1.5 Les options

Une option est un contrat établi entre deux parties et permettant à l'une des parties de s'assurer, moyennant le versement d'une *prime*, le droit (et non l'obligation) d'acheter ou de vendre à l'autre partie un actif donné à un cours prédéterminé, à l'issue d'une certaine période (options dites européennes) ou pendant une certaine période (options dites américaines).

Les actifs sous-jacents peuvent être un actif financier (action, obligation, bon du Trésor, contrat à terme, devise, indices boursiers, etc.) ou un actif physique (matière première agricole ou minérale).

La valeur de l'option est le montant de la prime que l'acheteur de l'option est prêt à verser à son vendeur.

Une option est dite *négociable* si elle peut faire l'objet de transactions sur un marché règlementé. Sinon, on parle d'échanges de gré à gré.

Le marché international des produits dérivés du groupe NYSE Euronext est le Iiffe. Il gère les marchés électroniques réglementés d'Amsterdam, Bruxelles, Lisbonne, Londres et Paris où chaque jour environ 2000 milliards deuros en valeur nominale sont échangés sur les produits dérivés par des intervenants du monde entier.

1.6 Les produits structurés

Un produit structuré est un produit conçu par une banque pour satisfaire les besoins de ses clients. C'est souvent une combinaison complexe de produits classiques et de produits dérivés. Ce sera, par exemple, un placement à taux fixe avec une participation à la hausse ou à la baisse des cours d'un panier d'actions. Ils peuvent prendre des formes juridiques variées et sont échangés de gré à gré.

Comme un produit structuré ne peut pas se trouver coté sur un marché, son prix est déterminé en utilisant des modèles mathématiques restituant le comportement du produit en fonction du temps et des différentes évolutions du marché.

Ce sont souvent des produits vendus avec des marges importantes. La crise financière déclanchée en 2007 les a frappé de plein fouet car leur opacité est devenue suspecte et redhibitoire.

Chapitre 2

Les options

2.1 Les options sur actions

Définitions

Une option d'achat (call) sur une valeur mobilière est un contrat passé entre deux parties á une date t et donnant le droit (et non le devoir) à l'acquéreur d'acheter cette valeur (appelée sous-jacent) à un prix convenu à l'avance (prix d'exercice ou strike) une date $T > t$ (dite échéance) ou avant celle-ci .

Une option de vente (put) sur une valeur mobilière est un contrat donnant le droit à l'acquéreur de vendre cette valeur à un prix convenu à l'avance.

L'acquéreur, en contrepartie de ce droit, verse une somme appelée prime ou premium (c'est le prix de l'option). Le premium est coté sur le marché pour chaque série d'options, une série étant définie par le sous-jacent, le type (achat ou vente), l'échéance et le prix d'exercice.

L'acquéreur peut exercer son droit à l'échéance (options dites européennes) ou à toute date précédent l'échéance (options dites américaines). Le vendeur de l'option est lié à la décision du vendeur.

Dans le cas d'une option européenne, le flux généré à l'échéance T est appelé "pay-off". Dans le cas d'un call il vaut $(S_T - K)_+$ et dans le cas d'un put $(K - S_T)_+$.

Lors de leur création, puis au cours de leur cotation, trois catégories de call (resp. de put) peuvent être proposées :

- ceux dont le prix d'exercice est proche du cours (options dites "at the money", "au cours" ou "à parité")
- ceux dont le prix d'exercice est supérieur (resp. inférieur) au cours (options dites "in the money", "dans le cours" ou "en dedans")
- ceux dont le prix d'exercice est inférieur (resp. supérieur) au cours (options dites "out the money", "hors du cours" ou "en dehors")

Stratégies

Le détenteur d'une option peut :

1. vendre son option au prix du marché (à tout moment)
2. exercer son option (seulement à échéance si l'option est européenne, sinon à tout moment)
3. abandonner son option (à tout moment)

Notons que le dernier jour de cotation, les options "bénéficiaires" sont automatiquement exercées si elles n'ont pas été abandonnées.

L'acheteur d'un call échange une perte certaine mais limitée (la prime) contre un gain aléatoire mais théoriquement illimité quand le cours du sous-jacent augmente. Il spécule donc à la hausse. Pour le vendeur d'un call les perspectives sont inverses. Il doit donc fixer la prime en fonction du risque de hausse du cours du sous-jacent.

L'acheteur d'un put échange une perte certaine mais limitée (la prime) contre un gain aléatoire, limité au prix d'exercice mais pouvant être important si le cours du sous-jacent baisse fortement. Il spécule donc à la baisse. Pour le vendeur d'un put, les perspectives sont inverses. Il doit donc fixer la prime en fonction du risque de baisse du cours du sous-jacent.

Facteurs de variation des cours d'une option

A une date t, la valeur (le cours) d'une option peut être décomposée en deux :

1. La valeur intrinsèque qui correspond aux gains qui seraient réalisés si l'acquéreur exerçait l'option. Pour un call elle vaut $(S_t - K)_+$ et pour un put $(K - S_t)_+$.
2. La valeur temporelle qui est la différence entre le cours de l'option et sa valeur intrinsèque.

La valeur temporelle dépend des facteurs suivants :

- Le cours de l'action.
  Pour un prix d'exercice donné :
  Quand le cours monte, le prix du call augmente et celui du put diminue.
  Quand le cours descend, le prix du call diminue et celui du put augmente.
- Le prix d'exercice.
  Les calls à strike faible sont les plus chers.
  les puts à strike élevé sont les plus chers.
- La volatilité de l'action.
  Les calls correspondant à des actions volatiles (à la hausse) sont plus recherchés et donc plus chers.
  Les puts correspondant à des actions volatiles (à la baisse) sont plus recherchés et donc plus chers.

- La durée jusqu'à échéance (maturité).
  Plus la date d'échéance est éloignée plus la probabilité d'une hausse du cours (coûteuse pour le vendeur d'un call) ou d'une baisse (coûteuse pour le vendeur d'un put) est élevée et donc plus l'option sera chère.
  Le prix d'une option est donc une fonction croissante de la maturité (et décroissante du temps).
- Le taux sans risque.
  Le prix d'un call varie en sens inverse du taux du marché.
  Le prix d'un put varie dans le même sens que le taux du marché.
- Le taux de prêt-emprunt.
  A cause de la stratégie de couverture de ces produits, leur prix dépend du taux de prêt-emprunt (repo) des titres sous-jacents.
- Le dividende.
  Si le sous-jacent est une action, son cours diminuera du montant des dividendes le jour de leur versement. La date de versement et le montant de ceux-ci vont donc avoir un impact sur le prix des options.

Sensibilités (ou dérivées)

Le prix d'une option est une fonction de nombreux paramètres : S, K, T, t, σ, r... La sensibilité de ce prix aux paramètres dont il dépend régulièrement (au moins de manière dérivable) s'exprime simplement à travers ses grecques (dérivés).

Ainsi pour une option dont le prix est noté C, on peut définir indicateurs suivants :

- Sensibilité de la prime au sous-jacent :

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

- Sensibilité du delta au sous-jacent :

$$\Gamma = \frac{\partial C^2}{\partial S^2}$$

- Sensibilité de la prime à la volatilité :

$$V = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

- Sensibilité de la prime á l'échéance :

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial T}$$

– Elasticité de la prime par rapport au sous-jacent :

$$\Omega = \frac{\frac{dC}{C}}{\frac{dS}{S}}$$

– Sensibilité de la prime au strike :

$$\varepsilon = \frac{\partial C}{\partial K}$$

– Sensibilité de la prime au taux d'intérêt :

$$\iota = \frac{\partial C}{\partial r}$$

Notons bien qu'en revanche, la sensibilité d'une option au dividende du sous-jacent ne s'exprime pas simplement à l'aide d'une dérivée.

2.2 Les différents types d'options

Il existe des options sur différentes familles de sous-jacents :

– Les options sur actions
– Les options sur obligations ou sur taux
– Les options de change (le sous-jacent est une devise)
– Les options sur dettes et crédits
– Les options sur matières premières
– Les options sur l'inflation, le climat...

Les options peuvent aussi porter sur des types de sous-acents différents :

– Les options sur futures
– Les options sur indice
– Les options sur swaps (swaptions)
  Elles donnent à leur détenteur le droit de mettre en place, à une échéance donnée, un swap. Elles permettent de garantir le taux d'intérêt d'un prêt ou d'un emprunt futur.
– Les options sur spread : elles permettent de garantir l'écart entre les taux considérés.
– Les options composées : ce sont des options sur options
– Les rainbows : elles portent sur deux sous-jacents.
– Les varswaps : se sont des options sur volatilité réalisée.
  Les varswaps, grâce à une demande soutenue du marché et à une couverture possible par des options simples, sont devenus rapidement un produit de flux standard. Néanmoins, ils se sont révélés bien plus dangereux que prévus.

Outre les options européennes et américaines, d'autres options procurent des droits différents :

- Les options bermudéennes (ou périodiques)
  Ces options ne peuvent être exercées qu'à des dates prédéterminées.
- Les options asiatiques (ou sur moyenne) :
  Une option asiatique classique garantit à son détenteur un cours moyen d'achat déterminé par l'observation des cours du marché à des dates fixées à l'avance (fixing).
- Les Look-back et les Average Look-back :
  Une option look-back permet de garantir à celui qui la détient le meilleur cours réalisé au cours de la vie de l'option. Son prix est en général de 50% plus élevé qu'une option classique.
  Une option average look-back permet de garantir à celui qui la détient un cours égal à la moyenne des cours observés pendant de la vie de l'option. Son prix est du même ordre de grandeur que celui d'une option classique.
- Les options à cliquets :
  Le payoff est $\max(S_{t_i}, 0)$ avec (t_i) une série de dates prédéterminées.
- Les options à barrières :
  En plus des caractéristiques des options classiques, elles possèdent un niveau de barrière et un montant de remboursement (rebate) qui peut être nul.
  Les knockouts (up & out ou down & out) cessent d'exister dès que le spot atteint la barrière. Il peut alors y avoir versement d'un rebate.
  Les knockins (up & in ou down & in) existent dès que le spot atteint la barrière. Il peut y avoir versement d'un rebate si la barrière n'est pas touchée.

Citons aussi :

- Les Caps et les Floors :
  Un cap est une option sur taux qui garantit à son détenteur un cours "plafond" à l'achat.
  A des dates d'observation régulièrement espacées, le vendeur doit payer la différence entre le taux variable et le taux de base du swap, si cette différence est positive.
  Un floor est une option sur taux qui garantit à son détenteur un cours "plancher" à l'achat.
- Les quantos :
  Le prix d'exercice et le sous-jacent sont exprimés dans une devise mais le règlement se fait dans une autre devise avec un taux de change fixé à l'avance.
- Les digitales :
  Son détenteur touche un nominal si le sous-jacent atteint une barrière et rien sinon. Elles peuvent être de type européen ou américain.
- Les starts forwards :

Le strike est définit en fonction de la valeur du sous-jacent à une date future.

- Les choosers :
  Le type call ou put est à choisir avant échéance mais après émission à une date prédéterminée.

Généralement on distinque trois groupes d'options en fonction de leur complexité de gestion :

- Les options vanilles qui sont constituées des puts et calls européens et américains ainsi que maintenant des varswaps.
- Les options semi-exotiques qui présentent quelques dangers de gestion : options barrières, digitales…
- Les options exotiques qui sont des options multi sous-jacents avec des pay-offs complexes. Elles sont très exposées aux risques de corrélation et s'echangent de gré à gré.

Deuxième partie

Modèles financiers

Chapitre 3

Objectifs et principes

Le développement considérable des échanges de produits dérivés (sur des marchés organisés ou de gré à gré), notamment les options, s'est accompagné d'un accroissement considérable des besoins de maîtrise des risques financiers. Pour quantifier et gérer ces risques, les institutions financières se sont très rapidement tournées vers la recherche en mathématiques.

3.1 L'approche classique

3.1.1 Les objectifs

Une option est, comme de nombreux autres produits financiers, un outil d'échange de risques, sa particularité étant la disymétrie des positions. Le détenteur de l'option est parfaitement protégé (sauf s'il a acheté à découvert) puisqu'au pire il risque de perdre la prime de l'option. Le vendeur doit au contraire assumer tous les risques que l'acheteur ne peut pas ou ne veut pas prendre ; il peut donc être amené à supporter des pertes considérables au cas ou sa stratégie de gestion est prise en défaut. Les options sont donc des produits commercialement très attractifs pour leur détenteur mais à priori très dangereux pour leur émetteur si les risques sont mal couverts.

Le vendeur (une banque en général) doit donc être capable d'évaluer les risques qu'il prend. Plus exactement, deux questions se posent :

– A quel prix vendre une option ? C'est *le problème du pricing* (dit aussi évaluation ou valorisation)
– Comment gérer la prime au cours du temps pour disposer d'une somme suffisante au moment où le détenteur décidera d'exercer son option ? C'est *le problème de la couverture* qui doit être gérée par le trader.

Sans réponse précise à ces deux questions, une option ne devrait pas être émise sur le marché.

3.1.2 Les outils de modélisation

Nous allons présenter ici les outils conceptuels de base utilisés en mathḿematiques financières modernes.

Processus aléatoires : Comme les techniques de prévision existantes ne permettent pas d'estimer avec une précision suffisante l'évolution future des cours du sous-jacent, on évolue en *avenir incertain*. En outre, les prix vont dépendre finalement de très nombreux facteurs (financiers, économiques, politiques, judiciaires, climatiques etc. . .) dont les influences simultannées ne sont pas modélisables de manière satisfaisante. Finalement, on peut se contenter d'affirmer que les cours vont évoluer en fonction du temps et du hasard.

Les cours des différents produits financiers étudiés vont donc être modélisés par des processus aléatoires.

Le hasard lui-même va être structuré par un choix judicieux des espaces probabilisables ou probabilisés.

On notera $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ l'espace de probabilité observable.

Les prix des actifs risqués seront des p.a notés S_t^i pour $i \in [1, d]$ et le prix de l'actif sans risque sera une fonction S_t^0.

Dans une stratégie de couverture, on notera H_t^i la quantité d'actif i détenu à la date t et $V_t = \sum_0^d H_t^i.S_t^i$ la valeur du portefeuille à la date t.

Filtrations : Au fur et à mesure de l'écoulement du temps, l'information relative aux produits étudiés augmente. La tribu constituée de ces informations va donc former une famille croissante dans le temps que l'on appelle filtration.

Pour représenter les informations disponibles au cours du temps, on se servira de la notion de filtration c'est-à-dire d'une famille croissante de sous-tribus notée $(\mathcal{F}_t)$ *de la tribu* $\mathcal{F}$ *modélisant la structure du hasard. A une date considérée, la sous-tribu correspondante contiendra les évènements dont on sait qu'ils ont eu lieu ou non auparavant.*

De manière naturelle, la filtration sera souvent choisie comme la filtration engendrée par le cours financier étudié quand l'information provient de l'observation d'un tel cours.

Martingales : Les martingales sont des processus aléatoires aux propriétés remarquables : la meilleure estimation en moyenne quadratique que l'on peut faire d'une valeur future du processus est sa valeur actuelle.

Sous l'hypothèse financière de l'abscence d'opportunité d'arbitrage (voir plus loin), *on peut démontrer que les prix actualisés $\tilde{S}_t$ des actifs à risques sont des martingales.*

De cette propriété fondamentale, on peut souvent déduire, par des calculs plus ou moins compliqués, des formules explicites de prix.

Equations différentielles stochastiques : La dynamique de la plupart des processus aléatoires étudiés sera modélisée par des *équations différentielles stochastiques* dépendant d'un mouvement brownien noté B_t ou W_t. En effet, alors que les équations fondamentales de la physique classique sont des équations aux dérivées partielles, celles de la finance sont des équations différentielles stochastiques.

3.1.3 Les hypothèses sur les marchés

Classiquement, l'actif sous-jacent (action, obligation...) peut s'échanger sur un marché organisé ou son prix est coté en continu.

Si, comme dans le cas des produits dérivés climatiques, il n'existe pas de tel marché, la méthode d'évaluation doit être fondamentalement différente.

Quant à lui, le produit dérivé, peut être émis de gré à gré ou échangé sur un autre marché. Sur ce marché on peut étudier des produits de même échéance (hypothèse forte d'univers mono-périodique) ou d'échéances variées (hypothèse plus faible d'univers multi-périodique).

Pour élaborer les modèles, des hypothèses plus ou moins fortes doivent être faites sur le marché du sous-jacent :

– Les *marchés viables* sont ceux où il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage c'est-à-dire où l'on ne peut pas s'enrichir sans prendre de risque. L'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) est une notion fondamentale en finance ; elle se situe à la base de nombreux raisonnements.
– Les *marchés complets* sont ceux dans lesquels il existe toujours une stratégie (à déterminer) permettant d'atteindre une richesse donnée à l'échéance.
– Les *marchés parfaits* (on dit parfois sans friction) sont ceux où il n'existe pas de frais de transaction (fixes ou variables) ni aucune restriction sur le nombre ou la fréquence des transactions.

3.2 La finance quantitative

3.2.1 La physique des marchés

Le terme " physique des marchés " - ou celui d'" éconophysique " qu'on lui substitue parfois - désigne la discipline scientifique qui vise à décrire le comportement des actifs de marchés à partir de modèles issus de l'observation des fluctuations de ces actifs, et à valider ces modèles par des expériences numériques reproduisant ces comportements. Cette discipline récente et en pleine expansion doit son essor à la généralisation des marchés électroniques et au fort développement des marchés de produits dérivés. Ces deux phénomènes ont créé des conditions expérimentales favorables en générant d'énormes masses de données fournissant une description exhaustive des mouvements des actifs, et permettant donc de tester des modèles probabilistes complexes de manière fine. Plus important, ces données concernent, non pas seulement un historique de prix, mais un historique complet de " carnet d'ordre ", ce qui permet de produire des modèles physiquement interprétables pour expliquer la dynamique des prix. Cette évolution est majeure, elle permet à la physique des marchés de proposer des modélisation qui dépassent le cadre purement mathématique des modèles stochastiques financiers habituels, du moins en ce qui concerne leur pouvoir d'interprétation et d'explication ; en particulier, les modélisations " multi-agents " (*agent-based models)* sont couramment utilisées pour décrypter le fonctionnement des marchés financiers.

Grâce à cette approche " éconophysicienne ", des outils et notions fondamentales ont vu le jour - on en cite ici quelques unes :

- Différentes mesures du temps : temps de transaction, temps calendaire,...
- Relation entre volatilité et flot d'arrivée des ordres au marché
- Nature stochastique de la volatilité
- Non-gaussianité des rendements

3.2.2 Les risques et leur minimisation

La notion de risque est essentielle à la compréhension de toute activité sur les marchés financiers : sans risque, pas de rendement, certes mais sans contrôle de risque, pas de rendement non plus - en tout cas, pas à long terme. Il est donc naturel d'imposer que le risque des portefeuilles d'actifs de marché soit mesuré et, d'une certaine manière, contrôlé. On décrira les principaux types de risques rencontrés dans les activités de marché, et on verra la façon dont ces risques sont évalués de manière quantitative. Plus pertinente encore est l'étude de certaines approches permettant de minimiser les risques courus par une institution financière en fonction de la composition de son portefeuille : on montrera comment la gestion d'un produit dérivé repose sur des critères de mesure et de contrôle du risque associé à une certaine stratégie de réplication.

Chapitre 4

Rappels sur les processus aléatoires et premières applications en finance

L'objectif de ce chapitre est de montrer comment les concepts fondamentaux liés aux processus stochastiques s'utilisent naturellement en finance et comment des hypothèses financières simples permettent d'obtenir des premiers résultats fondamentaux sans avoir à établir de modèles mathématiques élaborés.

4.1 Danger de l'évaluation par actualisation de l'espérance des flux futurs

Nous allons montrer qu'un simple calcul d'espérance permet d'obtenir pour une option européenne, une formule de prix ressemblant à celle de Black et Scholes.

Il faudra surtout retenir que ce type d'approche (actualisation des flux futurs) utilisée pour valoriser des entreprises ne peut pas être appliqué directement pour l'évaluation des produits financiers. Néanmoins nous montrerons dans la suite qu'un changement de probabilité induit par un raisonnement financier (l'absence d'opportunité d'arbitrage) pourra nous ramener à un calcul du même type pour établir la véritable formule de Black et Scholes.

Considérons une option d'achat, de strike K et d'échéance T portant sur une action dont le prix en T peut être modélisé par une variable aléatoire h telle que :

$$h = S_0 \mathrm{e}^{\hat{\mu}T + \sigma\sqrt{T}U}$$

avec $\mathcal{S}_0$ prix à l'origine de l'action et U variable aléatoire de loi normale.

Interprétons les paramètres. La formule donnant h conduit à interpréter σ comme un facteur d'incertitude et donc de risque. Ce paramètre σ est appelé

volatilité. Par ailleurs, un simple calcul d'espérance donne $E(h) = S_0 \exp(\hat{\mu}T + \sigma^2/2T)$. Posons $\mu = \hat{\mu} + \sigma^2/2$. La formule $E(h) = S_0 \exp(\mu T)$ conduit à interpréter μ comme la **tendance** de l'action.

Supposons que le prix de l'option se trouve par un simple calcul d'actualisation de l'espérance du pay-off (flux à l'échéance). On a alors :

$$V = \mathrm{e}^{-rT} E((h-K)_+)$$

On trouve :

$$E((h-K)_+) = \int_{-\infty}^{+\infty} (S_0 \mathrm{e}^{\hat{\mu}T + \sigma\sqrt{T}u} - K) \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Or $S_0 \exp(\hat{\mu}T + \sigma\sqrt{T}u) - K \geq 0$ équivaut à $u \geq \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \Big(\ln(\frac{K}{S_0}) - \hat{\mu}T\Big)$. Donc en notant $d_2 = -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \Big(\ln(\frac{K}{S_0}) - \hat{\mu}T\Big)$:

$$E((h-K)_+) = \int_{-d_2}^{+\infty} S_0 \mathrm{e}^{\hat{\mu}T + \sigma\sqrt{T}u} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du - K \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$$

ou encore :

$$E((h-K)_+) = \mathrm{e}^{\hat{\mu}T} \frac{S_0}{\sqrt{2\pi}} \int_{-d_2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(u+\sigma\sqrt{T})^2 du + \frac{1}{2}\sigma^2 T} - K \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$$

Notons maintenant $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$ et $F(d) = \displaystyle\int_{-\infty}^{d} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$. On a alors $E((h-K)_+) = S_0 \exp((\hat{\mu} + \sigma^2/2)T) F(d_1) - K F(d_2)$ et donc :

$$V = S_0 \mathrm{e}^{(\mu - r)T} F(d_1) - K \mathrm{e}^{-rT} F(d_2)$$

On notera bien le prix obtenu n'est pas celui de l'option mais qu'en prenant $\mu = r$ on obtient bien la formule de Black et Scholes. Ceci sera expliqué plus loin.

4.2 Processus stochastiques

4.2.1 Généralités

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, appelé espace d'épreuve, et un espace probabilisable $(\Omega', \mathcal{F}')$, appelé espace d'état.

Nous nous placerons en temps discret.

Définition 4.1 (Processus aléatoire)**.**

$X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un processus aléatoire si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $(\Omega', \mathcal{F}')$.

Un processus aléatoire peut donc être considéré de trois manières :
- comme une application qui à $n \in \mathbb{N}$ associe la variable aléatoire X_n ;
- comme une application de $\mathbb{N} \times \Omega$ dans Ω'
- comme une application qui à $\omega \in \Omega$ associe la suite $n \mapsto X_n(\omega)$.

Définition 4.2 (Trajectoire ou réalisation).
A $\omega \in \Omega$ fixé, la suite $n \mapsto X_n(\omega)$ est appelée trajectoire du p.a X.

Pour une expérience reproductible, une trajectoire est le résultat d'une expérimentation. Dans des études non reproductibles (par exemple en finance) une seule trajectoire peut être réalisée.

4.2.2 Comparaisons

Soit X et Y deux p.a définis de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $(\Omega', \mathcal{F}')$

Définition 4.3.
- *X et Y sont dits parfaitement égaux si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \omega \in \Omega\ X_n(\omega) = Y_n(\omega)$$

- *X et Y sont dits indistingables si et seulement si*

$$P(X_n = Y_n, \forall n \in \mathbb{N}) = 1$$

- *Y est une modification de X si et seulement si*

$$\forall n \in \mathbb{N}\ P(X_n = Y_n) = 1$$

Remarque : en temps discret les deux dernières définitions sont équivalentes.

4.3 Filtrations

4.3.1 Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F})$ un espace probabilisable.

Définition 4.4 (Filtration).
Une filtration de $(\Omega, \mathcal{F})$ est une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{F}$

Notations : $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $\{\mathcal{F}_t, n \in \mathbb{N}\}$

Définition 4.5 (Filtration engendrée par un processus).
La filtration engendrée par un processus $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est notée $(\mathcal{F}_n^X)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_p, 0 \leq p \leq n)$. C'est la plus petite tribu rendant les $X_p, p \in [0, n] \cap \mathbb{N}$, mesurables.

4.3.2 Mesurabilité d'un processus

En temps discret, un processus à la date n peut dépendre des informations disponibles à cette date ou à la date précédente. On distingue donc deux mesurabilités :

Définition 4.6.
- *X est adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ \omega \mapsto X_n(\omega)$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable.*
- *X est prévisible pour $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}\ \omega \mapsto X_n(\omega)$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.*

4.4 Espérance conditionnelle

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{S}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Définition 4.7 (Espérance conditionnelle dans L^1)**.**
Pour toute v.a.r L^1 notée X, il existe une unique v.a.r L^1 $\mathcal{S}$-mesurable notée Y telle que :

$$\forall A \in \mathcal{S}\ E(Y.1_A) = E(X.1_A)$$

Y est dite espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{S}$.

Notation : $Y = E(X|\mathcal{S})$

Théorème 4.1 (Espérance conditionnelle dans L^2)**.**
Si $\mathcal{F}$ contient $\mathcal{N}$ alors $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace de Hilbert et $L^2(\Omega, \mathcal{S}, P)$ est un s.e.v fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
$E(X|\mathcal{S})$ est la projection de $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur $L^2(\Omega, \mathcal{S}, P)$.

Propriété 4.1. *L'espérance conditionnelle vérifie les propriétés de :*
- *linéarité*
- *positivité*
- *convergence dominée*

Propriété 4.2.

1. *$E(X|\mathcal{S}) = X$ si X est $\mathcal{S}$-mesurable*
2. *$E(X|\mathcal{S}) = E(X)$ si X est indépendant de $\mathcal{S}$*
3. *$E(X|\{\emptyset, \Omega\}) = E(X)$*
4. *$E(X.Y|\mathcal{S}) = X.E(Y|\mathcal{S})$ si X est $\mathcal{S}$-mesurable et (X borné ou $X.Y \in L^1$)*
5. *$E(E(X|\mathcal{S})) = E(X)$*

6. $E(E(X|\mathcal{S}_1)|\mathcal{S}_2) = E(X|\mathcal{S}_2)$ *si* $\mathcal{S}_2 \subset \mathcal{S}_1$
7. $||E(X|\mathcal{S})||_{L^2} < ||X||_{L^2}$
8. $\phi(E(X|\mathcal{S})) \leq E(\phi(X)|\mathcal{S})$ *si* ϕ *est une fonction convexe et* $\phi(X) \in L^1$

Définition 4.8 (Espérance conditionnelle sachant un vecteur aléatoire)**.**
Soit X *une v.a.r* L^1 *et* Y *une v.a alors :*

$$E(X|Y) = E(X|\sigma(Y))$$

Théorème 4.2 (Cas des vecteurs gaussiens)**.**
Soit $(Y, X_1, \ldots, X_n)$ *un vecteur gaussien. Alors* $E(Y|X_1, \ldots, X_n)$ *est la meilleure approximation affine de* Y *par* $(X_1, \ldots, X_n)$.

4.5 Martingales

On est souvent amené à estimer les valeurs futures d'un processus en fonction des informations disponibles et donc à calculer des espérances conditionnelles. Dans ce cadre, les martingales sont des processus qui vérifient des propriétés remarquables.

Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ adapté et tel que $\forall n \in \mathbb{N}\ X_n \in \mathcal{L}^1$.

Définition 4.9.

- X *est une sous-martingale (relativement à la filtration* $(\mathcal{F}_n)$*) si et seulement si*
$$\forall p \leq n\ E(X_n|\mathcal{F}_p) \geq X_p\ p.s$$
- X *est une sur-martingale (relativement à la filtration* $(\mathcal{F}_n)$*) si et seulement si*
$$\forall p \leq n\ E(X_n|\mathcal{F}_p) \leq X_p\ p.s$$
- X *est une martingale (relativement à la filtration* $(\mathcal{F}_n)$*) si et seulement si*
$$\forall p \leq n\ E(X_n|\mathcal{F}_p) = X_p\ p.s$$

On montre alors facilement que l'espérance d'une martingale est constante, que celle d'une sous-martingale est croissante et que celle d'une sur-martingale est décroissante.

Théorème 4.3 (Transformée par une fonction convexe)**.**
Soit X *une martingale (resp. une sous-martingale) et* ϕ *une fonction convexe (resp. convexe et croissante) de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $\forall n \in \mathbb{N}\ E|\phi(X_n)| < \infty$ *alors* $\phi(X) = \{\phi(X_n), \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\}$ *est une sous-martingale.*

4.6 Prix actualisés, martingales et rendements

A travers un exercice et pour préparer l'obtention de la formule de Black et Scholes, nous allons voir que si les rendements d'un actif sont indépendants et identiquement distribués (iid) et lognormaux et si les prix actualisés forment une martingales alors il existe une relation simple (mais surprenante) entre la tendance de l'actif et le taux sans risque.

Soit S_n le prix d'un actif à l'instant t_n.

On note $Y_i = S_i/S_{i-1}$ le rendement entre t_{i-1} et t_i.

On suppose :

– S_0 connu

– les $Y_i > 0$ et iid ; notons $m = E(Y_i)$ et $c^2 = E(Y_i^2)$.

– il existe un taux court constant r ; notons $\tilde{S_n} = S_n \mathrm{e}^{-rn}$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour avoir $(\tilde{S_n})$ martingale ;

2) Supposons les Y_i lognormaux avec $Y_i = \exp(V_i)$, V_i étant $LG(\hat{\mu}, \sigma^2)$:

2a) Traduire la condition nécessaire et suffisante en fonction de $\hat{\mu}$ puis de $\mu = \hat{\mu} + \sigma^2/2$.

2b) Exprimer S_n en fonction d'une variable aléatoire V de loi normale centrée réduite.

4.7 Arbitrage et applications

4.7.1 Arbitrages et marchés viables

On peut modéliser un portefeuille par un processus (H_n) à valeurs dans R^d dont la ième composante H_n^i représente la quantité d'actifs i détenu à la date n.

Si les prix des actifs sont modélisés par un processus (S_n) à valeurs dans R_+^d dont la ième composante S_n^i représente le prix de l'actif i à la date n, alors la valeur du portefeuille à la date n est :

$$V_n = H_n.S_n = \sum_{i=1}^{v} H_n^i S_n^i$$

Définition 4.10 (Arbitrage).

On appelle arbitrage toute stratégie (portefeuille) de valeur initiale nulle ($V_0 = 0$ p.s.) et de valeur finale strictement positive ($E(V_N) > 0$).

Remarque : on définit parfois une stratégie de valeur initiale nulle $E(V_0) = 0$.

On peut alors définir un marché viable :

Définition 4.11 (Marché viable).

On appelle marché viable tout marché dans lequel il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage.

On utilise aussi l'acronyme AOA pour Absence d'Opportunité d'Arbitrage.

4.7.2 AOA et applications

Nous allons montrer ici que des raisonnement financiers simples, basés sur l'AOA, permettent d'obtenir des résultats fondamentaux pour la finance.

Il faut noter que l'on peut retrouver ces résultats dans des contextes plus mathématisés et plus formels mais ce n'est l'objectif de ce paragraphe.

Prix d'un forward

Cherchons le prix en $t = 0$ d'un forward ne versant pas de dividende et engageant deux contreparties à échanger en T une somme F contre une action au prix S_T.

Montrons par un raisonnement d'arbitrage que $F = S_0 \exp(rT)$.

Si $F > S_0 \exp(rT)$. En $t = 0$ on s'engage par un forward à livrer une action en T et on couvre cela par l'achat d'une action grâce à un à un emprunt au taux r. A l'échéance T, on livre l'action, on rembourse l'emprunt et on touche le prix du forward. On a donc mis en oeuvre une stratégie de valeur initiale nulle et de valeur finale $F - S_0 \exp(rT) > 0$. C'est donc une stratégie d'arbitrage.

Si $F < S_0 \exp(rT)$. En $t = 0$ on s'engage par un forward à livrer le flux F contre une action en T. On vend alors à découvert une action au prix S_0 et on place cette somme au taux r. A l'échéance T, on reçoit l'action, on touche la somme $S_0 \exp(rT)$ et on délivre le prix du forward. On a donc mis en oeuvre une stratégie de valeur initiale nulle et de valeur finale $S_0 \exp(rT) - F > 0$. C'est donc une stratégie d'arbitrage.

Dans un marché viable on a donc $F = S_0 \exp(rT)$.

Rendement d'un portefeuille sans risque

Montrons que dans un marché viable le rendement de tout portefeuille sans risque est égal au taux r sans risque (supposé constant) : $V_t = V_0 \exp(rt)$ pour tout $t \geq 0$.

S'il existe $t > 0$ tel que $V_t > V_0 \exp(rt)$, alors en $t = 0$ on emprunte la somme V_0 au taux r et on l'investit dans la stratégie. On a alors créé un arbitrage nous permettant de gagner $V_t - V_0 \exp(rt) > 0$ en t.

S'il existe $t > 0$ tel que $V_t < V_0 \exp(rt)$, alors en $t = 0$ on vend à découvert pour une somme V_0 de la stratégie (en supposant que la stratégie soit disponible sur des supports le permettant) et on place cette somme V_0 au taux r. On a alors créé un arbitrage nous permettant de gagner $V_0 \exp(rt) - V_0 > 0$ en t.

On a bien $V_t = V_0 \exp(rt)$ en l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Couverture dans un arbre à un pas de temps

Considérons qu'entre la date $t = 0$ et la date $t = 1$, le prix d'une action ne puisse passer que du prix S_0 supposé connu à l'un des deux prix $S_0.d$ ou $S_0.u$, d et u étant deux nombres tels que $0 < d < u$.

Supposons que dans le même temps, une option sur cette action ne puisse passer que du prix C (éventuellement inconnu) à l'un des deux prix C_d ou C_u.

Commençons par chercher la quantité δ d'actions à posséder lors de la vente du call en $t = 0$ pour avoir un portefeuille sans risque. Si le portefeuille est sans risque, on nécessairement $\delta.S_0.u - C_u = \delta.S_0.d - C_d$ et donc $\delta = \frac{C_u - C_d}{S_0.u - S_0.d}$ ou encore $\delta = \frac{\Delta C}{\Delta S}$

Cherchons maintenant la probabilité p^* que notre monde évolue vers le scénario "up". La valeur du portefeuille (vente d'un call plus couverture) est en $t = 0$, $V_0 = \delta S_0 - C$. En $t = 1$, sa valeur est $V_1 = \delta.S_0.u - C_u = \delta.S_1.d - C_d$. Ce portefeuille étant sans risque, on a $V_1 = V_0 \exp(r)$. En remplaçant V_1, V_0 puis δ par leurs valeurs on trouve finalement :

$$p^* = \frac{r - d}{u - d}$$

Remarque : sous cette probabilité p^* on a $C = \exp(-r)E^*(C_1)$: le prix du call s'évalue bien alors comme une espérance actualisée.

Relation de parité call-put

Considérons deux portefeuilles qui en $t \leq T$ contiennent respectivement :

- Un call d'échéance T au prix du marché C_t et une somme $K \exp(-r(T - t))$ placé au taux r.
- Un put d'échéance T au prix du marché P_t et une action au prix S_t.

A l'échéance T, si $K \geq S_T$ alors les deux portefeuilles valent tous les deux K tandis que que si $K \leq S_T$ alors ils valent tous les deux S_T. Finalement, les deux portefeuilles ont la même valeur en T donc par AOA en toute date antérieure, notamment en t. On a donc :

$$C_t + K\mathrm{e}^{-r(T-t)} = P_t + S_t$$

Remarque : on pourra en exercice en déduire qu'en l'absence de dividende, le prix d'un call américain est égale à celui d'un call européen.

Prix actualisé d'un actif dans un marché viable

Montrons enfin que dans un marché viable, les prix actualisés $\tilde{S}_t = S_t \exp(-rt)$ des actifs sont des martingales.

Supposons qu'il existe $u > t$ tel que $E(\tilde{S}_u|\mathcal{F}_t) > \tilde{S}_t$. A la date t on achète une action au prix S_t grâce à un emprunt au taux r. A la date u on revend l'action et on rembourse l'emprunt. On a donc une stratégie de valeur initiale (en t) nulle et de valeur finale (en u) V_u telle que $E(V_u|\mathcal{F}_t) > 0$.

Supposons qu'il existe $u > t$ tel que $E(\tilde{S}_u|\mathcal{F}_t) < \tilde{S}_t$. A la date t on vend à découvert une action au prix S_t en on place la somme obtenue au taux r. A la date u on rachète l'action et on touche la somme placée au taux fixe. On a encore une stratégie de valeur initiale (en t) nulle et de valeur finale (en u) V_u telle que $E(V_u|\mathcal{F}_t) > 0$.

Remarque : dans un cadre plus formalisé, on établit en fait que dans un marché viable il existe une probabilité sous laquelle les prix actualisés sont des martingales.

4.8 Une première obtention de la formule de Black et Scholes

Pour établir la formule de Black et Scholes, nous allons nous placer dans un cadre simplifié à temps discrets qui permet de se passer du mouvement brownien, de l'intégrale stochastique et des équations différentielles stochastiques (cf cours de 3ème année).

Nous pouvons reprendre les hypothèses historiques du modèle sauf celles faisant appel à la dynamique stochastique du sous-jacent.

On suppose que le marché :
- fonctionne en continu ;
- est liquide ;
- est viable ;
- est parfait (pas de frais de transactions, pas de fiscalité).

On suppose qu'il existe un actif sans risque tel que :
- on peut prêter ou emprunter à un même taux r ;
- ce taux r est constant.

On suppose que l'action sous jacente :
- est indéfiniment divisible ;
- ne distribue pas de dividendes ;
- peut être vendu à découvert ;
- possède des accroissements i.i.d. et lognormaux.

Le marché étant viable, nous sommes assurés que le prix actualisé du sous-jacent, $\tilde{S}_n$ est une martingale.

Par ailleurs, nous avons établi en exercice que sous les hypothèses prises :

$$S_n = S_0 \mathrm{e}^{(r-\frac{\sigma^2}{2})n+\sigma\sqrt{n}U}$$

avec U v.a.r le loi normale et σ écart-type de $ln(Y_{i+1}/Y_i)$.

Alors, le prix du call d'échéance $N = T$ s'obtient alors par calcul d'une espérance :

$$C_0 = E((S_T - K)_+) = S_0 F(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT} F(d_2)$$

avec $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T\right)$, $d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T\right)$ et $F(d) = \displaystyle\int_{-\infty}^{d} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} du$

Remarque : cette formule sera obtenue dans le chapitre suivant comme limite du modèle binomial.

Cette formule peut bien sûr être établie de manière plus moderne avec les outils du calcul stochastique (cf cours de 3ème année). On comprendra alors plus finement pourquoi le calcul d'un prix par espérance ne peut pas se faire sous n'importe quelle probabilité : il était injustifié dans le premier paragraphe mais valide ici. Ce type de paradoxe contribue à l'intérêt des mathématiques financières !

Chapitre 5

Evaluation par arbitrage en temps discret – Le modèle binomial

5.1 Introduction

Nous présentons ici les principes généraux de la théorie de l'évaluation par arbitrage dans le cadre de modèles à temps discret. L'utilisation de méthodes probabilistes pour donner un prix à un produit financier remonte au début du siècle avec les travaux de Bachelier (Bachelier, 1900), dont la thèse intitulée "Théorie de la spéculation" introduit le processus aujourd'hui appelé "mouvement brownien". Les chapitres précédents ont présenté différents types de produits financiers et montré comment leur développement s'est accompagné de nombreux travaux de modélisation mathématique, dont le célèbre modèle de Black & Scholes en 1973 (Black and Scholes, 1973).

La théorie de l'évaluation par arbitrage est une formalisation théorique regroupant les modèles d'évaluation de produits dérivés. Elle s'appuie sur le principe d'absence d'opportunité d'arbitrage et sur les outils probabilistes de processus stochastiques, martingales et mesures de probabilité. Un article est fondateur pour l'exposé de cette théorie en temps discret : (Harrison and Pliska, 1981).

Pour cette présentation, nous nous appuierons en particulier sur les ouvrages (Lamberton and Lapeyre, 1997) et (Follmer and Schied, 2004). D'autres références sont données en bibliographie. Les démonstrations données ne sont pas toujours très détaillées. Elles feront l'objet de développements en cours, ou peuvent être consultées dans les ouvrages cités.

5.2 Un modèle financier à plusieurs périodes

5.2.1 Actifs financiers

On considère un marché financier sur lequel sont échangés $d+1$ actifs financiers (*assets*). Les échanges peuvent se dérouler aux dates t d'un échéancier à T périodes : $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0\ldots T}$. Le prix des actifs est représenté par $(S_t)_{t=0\ldots T} = (S_t^0, \ldots, S_t^d)_{t=0\ldots T}$ *processus stochastique adapté* (*adapted stochastic process*).

5.2.2 Stratégies (de trading)

Définition 5.1. *On appelle* **stratégie** *(de trading) tout processus stochastique prévisible (*predictable*) à valeur dans* $\mathbb{R}^{d+1}$.

La prévisibilité du processus impose aux décisions d'investissement d'être prises en début de période, au vu des informations disponibles, et sans connaissance des prix futurs.

Définition 5.2. *Le* **processus de valeur** *d'une stratégie* $(\phi_t)_{t=1\ldots T}$ *s'écrit :*

$$V_0(\phi) \ := \ \phi_1 \cdot S_0 = \sum_{i=0}^{d} \phi_1^i S_0^i, \tag{5.1}$$

$$V_t(\phi) \ := \ \phi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^{d} \phi_t^i S_t^i, \quad \forall t = 1 \ldots T. \tag{5.2}$$

Par définition, $(V_t(\phi))_{t=0\ldots T}$ est donc le processus de prix d'un portefeuille associé à la stratégie $(\phi_t)_{t=1\ldots T}$. Ce processus sera noté $(V_t)_{t=0\ldots T}$ sauf en cas de confusion possible. V_0 est le prix de la stratégie à la date 0.

5.2.3 Actif sans risque

Notons S^0 un actif sans risque (*riskless asset*) dont le prix dépend d'un taux d'intérêt constant $r > -1$. Son prix s'écrit :

$$S_t^0 := (1+r)^t, \quad \forall t = 0 \ldots T \tag{5.3}$$

Définition 5.3. *On appelle* **processus des prix actualisés** *(*discounted price process*) le processus stochastique :*

$$\tilde{S}_t^i := \frac{S_t^i}{S_t^0}, \quad \forall i = 1 \ldots d, \forall t = 0 \ldots T. \tag{5.4}$$

5.2.4 Stratégies autofinancées

Définition 5.4. *Une stratégie est dite* **autofinancée** *(*self-financing*) si*

$$\phi_t \cdot S_t = \phi_{t+1} \cdot S_t, \quad \forall t = 1 \dots T-1. \tag{5.5}$$

Ainsi, tous les changements de valeur d'un portefeuille associé à une stratégie autofinancée sont dûs à des variations des prix S et non à une intervention extérieure. La totalité du portefeuille est réinvestie d'une période à l'autre.

Proposition 5.1. *Soit* $(\phi_t)_{t=1\dots T}$ *une stratégie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

i. $(\phi_t)_{t=1\dots T}$ *est autofinancée,*

ii. $\phi_t \cdot \tilde{S}_t = \phi_{t+1} \cdot \tilde{S}_t, \quad \forall t = 1 \dots T-1,$

iii. $\tilde{V}_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \phi_k \cdot (\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}), \forall t = 0, \dots, T.$

Démonstration. (i) est équivalent à (ii) par définition de l'autofinancement et actualisation. Pour la deuxième équivalence, on écrit d'après (ii)

$$\tilde{V}_k - \tilde{V}_{k-1} = \phi_k \cdot \tilde{S}_k - \phi_{k-1} \cdot \tilde{S}_{k-1} = \phi_k \cdot (\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1})$$

et on obtient (iii) en sommant. □

On notera désormais $(\Delta\tilde{S}_t)_{t=1\dots T} := (\tilde{S}_t - \tilde{S}_{t-1})_{t=1\dots T}$ le processus des accroissements.

Définition 5.5. *On appelle* **processus des gains actualisés** *(*discounted gains process*) et on note* $(\tilde{G}_t)_{t=0\dots T}$ *le processus défini par :*

$$\tilde{G}_t := \sum_{k=1}^{t} \phi_k \cdot (\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}) = \sum_{k=1}^{t} \phi_k \cdot \Delta\tilde{S}_k \tag{5.6}$$

Proposition 5.2. *Soit* $(\bar{\phi}_t)_{t=1\dots T}$ *un processus prévisible à valeur dans* $\mathbb{R}^d$*. Soit* V_0 *une variable aléatoire mesurable par rapport à* $\mathcal{F}_0$*. Alors il existe un unique processus stochastique* $(\phi_t^0)_{t=1\dots T}$ *à valeur dans* $\mathbb{R}$ *tel que le processus*

$$(\phi_t)_{t=1\dots T} = (\phi_t^0, \bar{\phi}_t)_{t=1\dots T}$$

soit une stratégie autofinancée de valeur initiale V_0*.*

Démonstration. L'existence et l'unicité du processus s'obtiennent par une méthode constructive. Si ϕ^0 est un processus tel que $(\phi_t) = (\phi_t^0, \bar{\phi}_t)$ soit une stratégie de valeur initiale V_0, alors nécessairement $V_0 = \phi_1 \cdot \tilde{S}_0$ et $\phi_1^0 = V_0 - \sum_{i=1}^{d} \phi_1^i \tilde{S}_0^i$ est entièrement déterminé par V_0 et $\bar{\phi}$. On montre ensuite par récurrence la même propriété pour $\phi_t^0, t > 1$ en écrivant l'autofinancement de la stratégie (ϕ_t). Finalement, la prévisibilité du processus obtenu se vérifie également par récurrence. □

5.3 Opportunités d'arbitrage et probabilité martingale

5.3.1 Définition d'une oppportunité d'arbitrage

Définition 5.6. *Une stratégie autofinancée est dite* **admissible** *si son processus de valeur vérifie*

$$V_t \geq 0 \ \ \mathbf{P}-p.s, \ \ \forall t = 0 \dots T. \tag{5.7}$$

Définition 5.7. *Une stratégie autofinancée admissible est appelée* **opportunité d'arbitrage** *(*arbitrage opportunity*) si son processus de valeur vérifie*

$$\begin{cases} V_0 = 0, \\ V_t \geq 0 \ \ \mathbf{P}-p.s, \ \ \forall t = 0 \dots T, \\ E_{\mathbf{P}}[V_T] > 0. \end{cases} \tag{5.8}$$

Définition 5.8. *Un modèle de marché financier est dit* **sans arbitrage** *ou encore* **viable** *(*arbitrage-free*) s'il n'existe pas d'opportunité d'arbitrage, i.e. si pour toute stratégie admissible $(\phi)_{t=1\dots T}$*

$$V_0 = 0 \Rightarrow V_T = 0 \ \ \mathbf{P}-p.s. \tag{5.9}$$

5.3.2 Définition d'une probabilité martingale

Définition 5.9. *Une mesure de probabilité* $\mathbf{Q}$ *sur l'espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est appelée* **probabilité martingale** *(*martingale measure*) si le processus des prix actualisés* $(\tilde{S}_t)_{t=0\dots T}$ *est une martigale sous* $\mathbf{Q}$*, i.e. si*

$$E_{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_t^i] < \infty \ \textit{et} \ \tilde{S}_s^i = E_{\mathbf{Q}}[\tilde{S}_t^i | \mathcal{F}_s], \ \ i = 1 \dots d, \ \ 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{5.10}$$

Définition 5.10. *Une probabilité martingale* $\mathbf{Q}$ *est appelée* **probabilité martingale équivalente** *(*equivalent martingale measure*) si elle est équivalente à la probabilité originale* $\mathbf{P}$*.*

5.3.3 Théorème fondamental de l'évaluation par arbitrage

Théorème 5.1. *Un modèle de marché financier est viable si et seulement si il existe une probabilité martingale équivalente.*

Démonstration. Soit $\mathbf{Q}$ une probabilité martingale équivalente et $(\phi_t)_{t=1,\dots,T}$ une stratégie admissible autofinancée de processus de valeur V. L'autofinancement s'écrit $\tilde{V}_t = \tilde{V}_0 + \sum_{k=1}^t \phi_k \cdot (\tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1})$, donc $(\tilde{V}_t)$ est martingale sous $\mathbf{Q}$ comme transformée de la martingale $(\tilde{S}_t)$. Ainsi, si ϕ est telle que $\tilde{V}_0 = 0$, il vient $E_{\mathbf{Q}}[\tilde{V}_T] = 0$

et par conséquent $\tilde{V}_T = 0$ puisque le processus de valeur d'une stratégie admissible est positif ou nul. Finalement, ϕ n'est pas une opportunité d'arbitrage, d'où la première implication.

La réciproque est plus délicate à montrer. Elle nécessite l'utilisation de résultats de convexité dans une caractérisation de l'ensemble des stratégies. Le cas d'un espace Ω fini sera montré en cours. □

5.4 Marché complet

5.4.1 Options et stratégie de "réplication"

Définition 5.11. *On appelle* **actif conditionnel (européen)** *(*(European) contingent claim*) une variable aléatoire positive C définie sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.*

Définition 5.12. *Un actif conditionnel est dit* **simulable** *(*attainable *ou* replicable*) si il existe une stratégie (autofinancée) admissible $(\phi_t)_{t=1\dots T}$ telle que*

$$V_T = C \ \ \mathbf{P} - p.s. \tag{5.11}$$

La stratégie $(\phi_t)_{t=1\dots T}$ est alors appelée **stratégie de "réplication"** *(*replicating strategy*).*

Théorème 5.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité muni d'une filtration $(\mathcal{F})_{t=0\dots T}$ définissant un modèle de marché financier sans arbitrage. Soit $\mathbf{Q}$ une probabilité martingale équivalente. Soit C un actif conditionnel. Pour toute stratégie admissible $(\phi_t)_{t=1\dots T}$ "répliquant" (i.e. permettant de simuler) l'actif conditionnel C, le processus de valeur actualisée du portefeuille associé s'écrit :*

$$\tilde{V}_t = E_{\mathbf{Q}}\left[\frac{C}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right], \ \ \forall t = 0 \dots T. \tag{5.12}$$

En particulier, le processus $(\tilde{V}_t)_{t=0\dots T}$ de la valeur actualisée du portefeuille associé est une martigale positive sous la probabilité $\mathbf{Q}$.

Démonstration. Soit ϕ une stratégie autofinancée simulant l'actif conditionnel C. $(\tilde{V}_t)$ est martingale sous $\mathbf{Q}$ en tant que transformée de la martingale $(\tilde{S}_t)$ donc pour $t = 0, \dots, T$:

$$\tilde{V}_t = E_{\mathbf{Q}}\left[\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t \right] = E_{\mathbf{Q}}\left[\frac{C}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right] \tag{5.13}$$

□

On déduit aisément de cette démonstration que dans un marché viable, une stratégie autofinancée simulant un actif conditionnel est nécessairement admissible.

5.4.2 Définition d'un marché complet

Définition 5.13. *Un modèle de marché financier viable est appelé* **complet** *(*complete*) si tout actif conditionnel est simulable.*

5.4.3 Second théorème fondamental de l'évaluation par arbitrage

Théorème 5.3. *Un modèle de marché financier est complet si et seulement si il existe une unique probabilité martingale équivalente.*

Démonstration. Supposons le marché viable et complet. Soient $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ deux probabilités martingales équivalentes (viabilité). Soit C un actif conditionnel. Soit ϕ une stratégie simulant C (complétude), de processus de valeur $\tilde{V}$. $\tilde{V}$ est martingale sous $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ (transformée de martingale), donc

$$E_{\mathbf{Q}_1}\left[\frac{C}{S_T^0}\right] = E_{\mathbf{Q}_1}\left[\tilde{V}_T\right] = \tilde{V}_0 = E_{\mathbf{Q}_2}\left[\tilde{V}_T\right] = E_{\mathbf{Q}_2}\left[\frac{C}{S_T^0}\right]$$

Finalement, C étant quelconque, on en déduit que $\mathbf{Q}_1$ et $\mathbf{Q}_2$ sont égales sur $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.

La réciproque est plus délicate. On la montrera en cours dans le cas Ω fini. □

5.5 Le modèle binômial

5.5.1 Introduction

On montrera en cours le résultat suivant :

Théorème 5.4. *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F})_{t=0\ldots T}, \mathbf{P})$ *un espace de probabilité définissant un modèle de marché financier viable et complet sur d actifs risqués. Alors le nombre d'atomes de l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *est majoré par* $(d+1)^T$.

Ce résultat montre qu'un modèle financier viable et complet sur $d = 1$ actif doit avoir une structure d'arbre binaire. Un modèle d'arbre binaire recombinant a été proposé en 1979 par Cox, Ross et Rubinstein (Cox et al., 1979), et est connu aujourd'hui sous le nom modèle d'arbre binômial. Notre présentation de ce modèle suivra la démarche suivante : construction, viabilité, complétude, évaluation d'une option, couverture d'une option, convergence vers le modèle de Black and Scholes. Les démonstrations seront faites en cours.

5.5.2 Construction du modèle binômial

Le modèle binômial est un modèle de marché financier monodimensionnel, i.e. comportant $d = 1$ actif risqué évoluant sur T périodes. Le prix de l'actif sans risque S^0 dépend d'un taux d'intérêt $r > -1$ supposé constant :

$$S_t^0 := (1+r)^t, \quad \forall t = 0 \dots T. \tag{5.14}$$

Le prix de l'actif risqué S est le processus $(S_t)_{t=0\dots T}$ de valeur initiale S_0.

Pour toute période de trading, le *rendement* (*return*)

$$R_t := \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \tag{5.15}$$

peut prendre deux valeurs possibles a et b vérifiant

$$-1 < a < b. \tag{5.16}$$

On pose alors $\Omega = \{a, b\}^T = \{\omega = y_1, \dots, y_T | \forall i, y_i \in \{a, b\}\}$, et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. On choisit ensuite une filtration naturelle $\mathcal{F}_t = \sigma - \{S_0, \dots, S_t\}$. Finalement, on choisit une probabilité $\mathbf{P}$ quelconque avec pour seule condition : $\forall \omega \in \Omega, \mathbf{P}(\omega) > 0$.

5.5.3 Viabilité et complétude

Théorème 5.5. *Un modèle binômial est viable si et seulement si $a < r < b$.*

Théorème 5.6. *Un modèle binômial viable est nécessairement complet, et la probabilité martingale $\mathbf{Q}$ est définie de manière unique par la loi des rendements $R_1, \dots, R_T$: sous la probabilité $\mathbf{Q}$, les rendements $R_1, \dots, R_T$ sont indépendants et identiquement distribués selon*

$$\mathbf{Q}(R_t = b) = \frac{r-a}{b-a} =: q, \quad \forall t = 1 \dots T. \tag{5.17}$$

5.5.4 Evaluation des options

Soit C un actif conditionnel définit par la fonction de “payoff” $h(S_0, \dots, S_T)$.

Proposition 5.3. *Dans le modèle binômial, le processus de valeur d'une stratégie “répliquant” C vaut :*

$$\tilde{V}_t = \tilde{v}_t(S_0, S_1, \dots, S_t), \quad \forall t = 0 \dots T \tag{5.18}$$

où la fonction $\tilde{v}_t$ est définie par :

$$\tilde{v}_t : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^t & \to & \mathbb{R} \\ (x_0, \dots, x_t) & \mapsto & E_{\mathbf{Q}}\left[\tilde{h}(x_0, \dots, x_t, x_t \frac{S_1}{S_0}, \dots, x_t \frac{S_{T-t}}{S_0})\right] \end{array} \right. \tag{5.19}$$

Proposition 5.4. *Soit $C = h(S_T)$ un actif conditionnel dont la fonction "payoff" h ne dépend que de la valeur terminale S_T du prix de l'actif risqué (C est une option européenne). Dans le modèle binômial, le prix à la date 0 de cet actif conditionnel s'écrit :*

$$\Pi^{h(S_T)} = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=0}^{T} \mathrm{C}_T^k q^k (1-q)^{T-k} h\left(S_0(1+b)^k(1+a)^{T-k}\right) \tag{5.20}$$

Proposition 5.5. *Dans le modèle binômial, le prix à la date 0 d'une option d'achat européenne de strike K et de maturité T ("standard call") s'écrit :*

$$\Pi^{call} = S_0\bar{\Phi}(k_0; T, q') - K(1+r)^{-T}\bar{\Phi}(k_0; T, q) \tag{5.21}$$

où

$$k_0 \quad := \quad \min\left\{k \in \mathbb{N} \middle| S_0(1+b)^k(1+a)^{T-k} > K\right\}, \tag{5.22}$$

$$q' \quad := \quad \frac{1+b}{1+r}q = \frac{1+b}{1+r}\frac{r-a}{b-a}, \tag{5.23}$$

et $\bar{\Phi}$ est la fonction de répartition de la loi binômiale complémentaire.

5.5.5 Couverture (*Hedging*)

Proposition 5.6. *Dans le modèle binômial, la stragégie de "réplication" d'un actif conditionnel $C = h(S_0, \ldots, S_T)$ vérifie pour tout $t = 1 \ldots T$,*

$$\phi_t = \frac{v_t(S_0, \ldots, S_{t-1}, S_{t-1}(1+b)) - v_t(S_0, \ldots, S_{t-1}, S_{t-1}(1+a))}{S_{t-1}(1+b) - S_{t-1}(1+a)}. \tag{5.24}$$

5.5.6 Vers un modèle à temps continu

Dans cette partie, T ne représente plus le nombre de périodes mais une date fixée (la plus grande échéance de notre modèle). Le nombre de périodes de notre échéancier est maintenant noté N, de sorte que l'intervalle de temps $[0, T]$ est divisé en N pas de temps équidistants $T_i = \frac{iT}{N}, \;\; i = 1 \ldots N$.

Pour N quelconque, nous pouvons construire un modèle binômial à N périodes, comprenant un actif sans risque $(S_k^{0(N)})_{k=0\ldots N}$ et un actif risqué $(S_k^{(N)})_{k=0\ldots N}$, de paramètres a_N, b_N, et r_N, et défini sur un espace de probabilité $(\Omega_N, \mathcal{F}^{(N)}, \mathbf{P}_N)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t^{(N)})_{t=0\ldots T}$. Nous avons montré précédemment que si $-1 < a_N < r_N < b_N$, le modèle à N périodes ainsi construit est viable et complet, et qu'il existe une unique probabilité martingale équivalente que nous noterons $\mathbf{Q}_N$.

Nous nous intéressons à la limite du modèle binômial lorsque N tend vers l'infini. Faisons trois hypothèses :

$$\text{(H1)} \qquad \lim_{N\to\infty} (1+r_N)^N = e^{rT}, \tag{5.25}$$

$$\text{(H2)} \qquad \lim_{N\to\infty} a_N = 0 \text{ et } \lim_{N\to\infty} b_N = 0, \tag{5.26}$$

$$\text{(H3)} \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Var}_{\mathbf{Q}_N}\left[R_k^{(N)}\right] = \sigma^2, \tag{5.27}$$

où les $R_k^{(N)}$, $k = 1,\ldots,N$ sont les rendements de l'actif risqué $S^{(N)}$ du modèle à N périodes.

Théorème 5.7. *Sous les hypothèses (H1)-(H3), la distribution de* $S_N^{(N)}$ *sous* $\mathbf{Q}_N$ *converge en loi vers une variable aléatoire* S_T *suivant une loi log-normale de paramètres* $\ln S_0 + rT - \frac{\sigma^2}{2}T$ *et* $\sigma\sqrt{T}$.

Démonstration. Par un développement de Taylor on peut écrire

$$\ln S_N^{(N)} = \ln S_0 + \sum_{k=1}^{N}\left[R_k^{(N)} - \frac{(R_k^{(N)})^2}{2} + \rho(R_k^{(N)})(R_k^{(N)})^2\right] \tag{5.28}$$

avec ρ tendant vers 0 en 0. On montre directement que le dernier terme de la somme converge en probabilité vers 0. La démonstration repose alors sur l'application d'un théorème central limite (plus général que celui vu en cours de première année) à la somme de variables aléatoires $\sum_{k=1}^{N}\left[R_k^{(N)} - \frac{(R_k^{(N)})^2}{2}\right]$. □

Corollaire 5.1. *Sous les hypothèses (H1)-(H3), le prix* $\Pi_{call}^{(N)}$ *d'un call européen dans le modèle binômial à* N *périodes tend lorsque* N *croît vers le prix* Π_{call}^{BS} *du call européen dans le modèle classique à temps continu dit de Black & Scholes, i.e.*

$$\lim_{N\to\infty} \Pi_{call}^{(N)} = \Pi_{call}^{BS} := S_0\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2) \tag{5.29}$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{5.30}$$

$$d_2 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{5.31}$$

où $\mathcal{N}$ *est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.*

5.5.7 Algorithme d'évaluation

Considérons une option européenne de maturité T et de fonction "payoff" $h(S_T)$ sur un actif risqué S de volatilité σ. On peut évaluer cette option dans un modèle binômial à N périodes. Choisissons les paramètres suivants :

$$\begin{aligned} 1 + r_N &= e^{\frac{rT}{N}} && (5.32) \\ 1 + a_N &= e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} && (5.33) \\ 1 + b_N &= e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} && (5.34) \end{aligned}$$

Ces paramètres vérifient les conditions (H1)-(H3). Posons $q_N = \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N}$. D'après les résultats précédents, le prix $V_0(S_0)$ de cette option est solution de la récurrence suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} V_T(S_0, \ldots, S_T) &=& h(S_T) \\ V_t(S_0, \ldots, S_t) &=& q_N V_{t+1}(S_0, \ldots, S_t, S_t(1 + b_N)) \\ && +(1 - q_N)V_{t+1}(S_0, \ldots, S_t, S_t(1 + a_N)) \end{array} \right. \tag{5.35}$$

Tout actif conditionnel peut être évalué par cet algorithme.

5.6 Bibliographie

Bachelier L., *Théorie de la spéculation.* Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, **3**, 17 (1900), p.21-86.

Black F. and Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities.* Journal of Political Economy, **81**, 3 (1973), p.637.

Cox J.C., Ross S.A. and Rubinstein M., *Option pricing : a simple approach.* Journal of Financial Economics, **7**, (1979), p.229-263.

Follmer H. and Schied A., *Stochastic Finance : An Introduction in Discrete Time.* de Gruyter Studies in Mathematics 27, de Gruyter, Berlin, (2004).

Harrison, J.M. and Pliska, S.R., *Martingales and stochastic integrals in the theory of continous trading.* Stochastic processes and their applications, **11** (1981), p.215-260.

Lamberton D. and Lapeyre B., *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* Ellipses, Paris, (1997).

Shreve S.E. *Stochastic Calculus for Finance I : The Binomial Asset Pricing Model*, Springer Finance, Springer-Verlag, New-York, (2004).

Chapitre 6

Le modèle de Black et Scholes et introduction au trading

6.1 Introduction

Depuis sa publication en 1973, **la formule de Black et Scholes** s'est imposée comme la référence pour la valorisation des options [1]. Sa notoriété s'est maintenant largement répandue hors des frontières des mathématiques financières. La modélisation choisie par ses auteurs, basée sur les processus stochastiques, leur a apporté notoriété et reconnaissance : le prix Nobel d'économie a été décerné à Scholes (Black étant décédé avant).

Cet incontestable succès est dû à la fois à la simplicité des formules obtenues et à leur utilisation intensive par les opérateurs de marché. Néanmoins, nous allons voir que ce n'est pas la justesse du modèle qui en est à l'origine mais la manière universelle de calculer la grandeur financière véritablement intéressante : **la volatilité**.

6.2 La formule de Black et Scholes

6.2.1 Les hypothèses

L'objectif est d'évaluer le prix d'options européennes de strike K et d'échéances T portant sur une action donnée.

Nous noterons :

- C le prix d'un call européen ;
- P le prix d'un put européen ;
- S le prix de l'action sous jacente ;

1. alors qu'elle n'évalue que les options européennes

– r le taux sans risque du marché (supposé constant) ;
– μ tendance du sous-jacent (supposée constante) ;
– σ : volatilité du sous-jacent (supposée constante).

Nous allons présenter maintenant les hypothèses historiques de Black et Scholes.

On suppose que le marché :
– fonctionne en continu ;
– est liquide ;
– est viable (pas d'opportunité d'arbitrage) ;
– est parfait (pas de frais de transactions, pas de fiscalité).

On suppose qu'il existe un actif sans risque tel que :
– on peut prêter ou emprunter à un même taux r ;
– ce taux r est constant.

On suppose que l'action sous jacente :
– est indéfiniment divisible ;
– ne distribue pas de dividendes ;
– peut être vendu à découvert ;
– **possède un cours qui est un mouvement brownien géométrique :**

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$$

où les coefficients constants μ et σ sont appelés respectivement tendance (ou drift) et volatilité (ou dispersion).

On notera bien que l'équation suivie par S n'est pas une équation différentielle ordinaire mais une équation différentielle stochastique dont le sens n'est pas naturel puisque les trajectoires du mouvement brownien B (cf cours électif de modélisation aléatoire) sont non différentiables presque partout.

6.2.2 La formule

Sous les hypothèses précédentes, on peut établir qu'en toute date t comprise entre l'origine et l'échéance de l'option, le prix du call et du put sont :

$$C_t = S_t F(d_1) - K e^{-r(T-t)} F(d_2)$$

et

$$P_t = -S_t F(-d_1) + K e^{-r(T-t)} F(-d_2)$$

avec :

$$F(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{\frac{-q^2}{2}} dq$$

et

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}(\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)) \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

6.2.3 La couverture en delta

On a vu dans que si l'on vend une option, il suffit d'acheter $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$ actions pour obtenir un portefeuille sans risque.

Une question plus judicieuse serait de se demander si en vendant un call au prix donné par le modèle et en plaçant la somme obtenue dans un portefeuille composé d'actions et d'actifs sans risque, il serait possible d'obtenir de manière autofinancée la somme nécessaire en cas d'exercice de l'option à l'échéance. C'est le problème de la couverture, résolu par Merton.

6.2.4 Estimation des paramètres

Le modèle dépend a priori de deux paramètres endogènes : la tendance μ (espérance du rendement instantanné du sous-jacent) et la volatilité σ (écart type du rendement instantanné du sous-jacent). En fait, de manière assez surprenante au premier abord, la formule du prix ne dépend que de σ et pas de μ.

Il y a deux principales manières d'estimer cet unique paramètre endogène σ :

i. réaliser une étude statistique des cours : la valeur obtenue est appelée volatilité historique.

ii. inverser la formule de pricing : la valeur obtenue est appelée volatilité implicite.

6.3 Critique du modèle et volatilités

6.3.1 Les points forts apparents

Le modèle de Black et Scholes possède suffisamment de qualités pour s'être imposé comme la référence pour le pricing d'options européennes simples :

- On obtient une formule explicite facile à implémenter sur ordinateur.
- Celle-ci ne dépend que de deux paramètres, la volatilité qui a une signification financière bien précise et que l'on peut évaluer numériquement et le taux court qui est une donnée du marché.
- On possède une méthode de couverture en temps continu dite couverture en delta.
- Les sensibilités qui sont des paramètres de gestions importants sont aussi obtenues de manière explicite.

6.3.2 Volatilités historiques et implicites, smile de volatilités

Grâce à la bijection qu'il réalise entre le prix d'une option et la volatilité, on a une autre utilisation importante du modèle de Black et Scholes : si l'on connait la prime d'une option, on peut, par inversion de la formule, en déduire la volatilité du sous-jacent. Cette valeur, dite *volatilité implicite*, peut alors servir comme indicateur pour les opérateurs du marché ou encore comme donnée dans un modèle plus complexe.

Malgré son succès, le modèle de Black et Scholes est très imparfait car il repose sur des hypothèses trop fortes et parfois non justifiées. Parmi ses inconvénients citons :

- La volatilité historique et la volatilité implicite diffèrent.
- La volatilité dépend du prix d'exercice. Les prix côtés des options dans la monnaie et en dehors de la monnaie ne correspondent pas à la même volatilité.
- La volatilité dépend aussi de l'échéance.
- Le modèle ne permet pas de traiter directement les options américaines ni les options sur taux ni les options “path-dependent”.

Pour des produits simples (vanilles) ces difficultés sont contournées par les opérateurs de marché grâce à l'utilisation d'un **smile de volatilité** correspondant à une surface donnant une volatilité (éventuellement interpolée) pour chaque échéance et chaque strike.

Ainsi, pour un sous-jactent de type action, la courbe représentant la volatilité implicite en fonction du strike (appelée skew) est décroissante. L'interpréation de ce phénomène est très importante. Il faut aussi comprendre pourquoi ce phénomène peut s'inverser ou est différent pour les dérivés de change.

Pour des produits plus complexes (dépendant de la trajectoire par exemple), des modèles plus complexes doivent être utilisés (cf cours de 3ème année) :

- volatilité paramétrique ;
- volatilité locale ;
- volatilité stochastique ;
- processus à sauts ;
- processus de Levy.

Dans tous les cas, l'inversion de la formule de Black et Scholes reste le moyen de transformer un prix en volatilité.

6.4 Introduction au trading

6.4.1 Calcul des sensibilités (grecques)

La mission essentielle d'un trader est de gérer son book afin de ne pas obtenir de résultats négatifs. Pour cela, il doit absolument connaître son exposition à tous les facteurs de risques : variations du sous-jacent, de la volatilité, du taux sans risque mais aussi des dividendes, des corrélations (sans compter les risques de contrepartie, les risques opérationnels. . .). Pour cela, on lui demande d'avoir une vue sur les évolutions possibles (grâce à sa connaissance du marché, des positions des acteurs, conseils d'analystes financiers et d'économistes etc. . .), de connaître son exposition actuelle aux différents risques (les valeurs des différentes sensibilités) ainsi que l'évolution possible de ses résultats (P& L) dans les pires scénarios (différents indicateurs de Value at Risk délivrées par les services de risques)

Les sensibilités (appelés grecques) sont les dérivés de la valeur d'un book par rapport aux paramètres de marchés. Ils permettent de retrouver une premìere approximation de la variation de la valeur du book en cas de variation de ces paramètres.

Sensibilités d'un call

Après calculs et simplifications, on obtient :

- Sensibilité de la prime au sous-jacent :

$$\Delta_c = F(d_1) > 0$$

- Sensibilité du delta au sous-jacent :

$$\Gamma_c = \frac{g(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} > 0$$

- Sensibilité de la prime à la volatilité :

$$V_c = g(d_1)S\sqrt{T-t} > 0$$

- Sensibilité de la prime à l'échéance :

$$\Theta_c = g(d_1)\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}F(d_2) > 0$$

- Elasticité de la prime par rapport au sous-jacent :

$$\Omega_c = \frac{S}{C}\,\Delta_c > 1$$

– Sensibilité de la prime au strike :

$$\varepsilon_c = -e^{-r(T-t)}F(d_2) < 0$$

– Sensibilité de la prime au taux d'intérêt :

$$\iota_c = (T-t)Ke^{-r(T-t)}F(d_2) > 0$$

avec : $g(q) = F'(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-q^2}{2}}$

Sensibilités d'un put

Les sensibilités du put se déduisent de celles du call grâce à la relation de parité call-put $P + S = C + Ke^{-r(T-t)}$:

– Sensibilité de la prime au sous-jacent :

$$\Delta_p = F(d_1) - 1 < 0$$

– Sensibilité du delta au sous-jacent :

$$\Gamma_p = \frac{g(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} > 0$$

– Sensibilité de la prime à la volatilité :

$$V_p = e^{-r(T-t)}g(d_1)S\sqrt{T-t} > 0$$

– Sensibilité de la prime à l'échéance :

$$\Theta_p = g(d_1)\frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}} + rKe^{-r(T-t)}(F(d_2) - 1)$$

– Elasticité de la prime par rapport au sous-jacent :

$$\Omega_p = \frac{S}{C}\,\Delta_p < 0$$

– Sensibilité de la prime au strike :

$$\varepsilon_p = e^{-r(T-t)}(1 - F(d_2)) > 0$$

– Sensibilité de la prime au taux d'intérêt :

$$\iota_p = (T-t)Ke^{-r(T-t)}(F(d_2) - 1) < 0$$

avec : $g(q) = F'(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-q^2}{2}}$

Sensibilités d'ordre deux et croisées

Les sensibilités usuelles traduisent des expositions au premier ordre (sauf pour le gamma puisque la couverture en delta annule le premier ordre). Pour des certains produits, il est tout de même nécessaire de connaître les sensibilités d'ordre supérieur ainsi que les sensibilités croisées.

Dans tous les cas, un trader doit connaître les graphes d'évolution de ses grecques en fonction des paramètres.

6.4.2 Vente d'un call et couverture

Un des cas les plus simple est celui où l'on a vendu un call et que l'on a immédiatement couvert en achetant Δ_0 actions. Dans ce cas la valeur du portefeuille est :

$$\Pi = -C + \Delta_0 S$$

Une simple étude (graphique par exemple) donne le signe des grecques les plus usuelles :

$$\Gamma < 0 \qquad \Theta > 0 \qquad V < 0$$

On connait donc (à court terme) l'évolution de notre portefeuille en cas d'évolution du sous-jacent, du temps ou de la volatilité.

6.4.3 Etude en Gamma et Théta

Une petite étude simple montre qu'une position $\Gamma > 0$ est confortable puisque l'on gagne quelque soit les variations du sous-jacent. En revanche, comme on est presque toujours $\theta < 0$ en même temps que l'on est $\Gamma > 0$, on perd de l'argent lorsque le temps passe.

En fait, on peut trouver le point-mort, valeur au delà de laquelle les variations du sous-jacent permettent de gagner plus en Γ que l'on en perd en Θ. En deça de cette valeur, un trader aura intérêt (mais seulement à court terme) de se mettre dans la position inverse (s'il le peut).

6.4.4 P&L du trader

On peut démontrer que la variation infinitésimale de la valeur d'un portefeuille peut s'exprimer sous la forme :

$$d\Pi = \frac{1}{2}\Gamma S^2 \left(\left(\frac{dS}{S} \right)^2 - \sigma^2 dt \right) + V d\sigma$$

Ainsi le P&L est proportinnel à la différence entre le carré de la volatilité réalisée (dS/S) et le carré de la volatilité implicite de gestion (σ). Le coefficient de proportionnalité étant Γ, les périodes à fort γ sont donc celles ayant le plus d'influence sur le résultat.

6.4.5 Quelques missions du trader

Contrairement à ce qu'on pourrait penser au premier abord, le trader de produits dérivés ne se contente pas de couvrir son portefeuille en Δ après avoir fait un pari sur le niveau de volatilité.

Il doit d'abord gérer ses risques à travers les grecques, soit en les annulant (cas du Δ), soit en leur faisant prendre un signe et une valeur conformes à ses vues (cas des autres grecques). Pour cela, il n'a d'autres recours que d'acheter de nouveaux produits dérivés.

Le portefeuille d'un trader peut donc être alimenter par des activités de vente (cas des produits structurés et exotiques), par des activités de market-making (animation du marché), mais aussi (et parfois surtout) par des activités de couvertures et de prises de position.

En outre, d'autres risques apparaissent :

- variations de la volatilité
- dates et montant dividendes
- proximité de barrières
- arrivés à échéance (calendar, roll)
- taux d'intérêts
- taux de prêt/emprunt de titres (repo)
- krach (à la baisse comme à la hausse)
- défaillance de contreparties (voire du système)
- liquidité insuffisante de certains titres
- variations de corrélation
- risques opérationnels (informatique. . .)

Bien-sûr, la situation est encore plus complexes pour certains produits (énergie, matières premières, inflation, climat. . .).

Notons que toutes les prises de position du trader sont contrôlées en premier lieu par des limites en nominal (montant) et sur les grecques. Le dénouement et la comptabilité des opérations sont contrôlés par le middle et le back office. Les modèles sont validés par un service de risques qui fournit aussi toutes les études liés aux pires scenarii. Des services de contrôle interne (audit, inspection) vérifie aussi l'efficacité des processus de production, vente et gestion des produits et rendent compte directement à la Direction Générale. En outre, la hiérarchie doit bien évidemment valider (voire imposer) les stratégies choisies. Néanmoins les responsabilités prises par un trader restent extrêment importantes.

Chapitre 7

Risque et valorisation

7.1 Quelques notions de risque sur les marchés financiers

On identifie traditionnellement cinq types de risques sur les marchés financiers :

i. Risque de marché : c'est l'incertitude liée à la valeur future d'un actif de marché (*tradable asset*) détenu dans un portefeuille. C'est le risque le plus évident, celui dont les institutions financières et les investisseurs sont le plus conscients.

ii. Risque de crédit : c'est l'incertitude liée à la réception de flux financiers – on dit qu'un défaut a lieu lorsqu'une des contreparties d'un contrat financier ne paye pas ses dettes.

iii. Risque de modèle : c'est l'incertitude liée à la valorisation d'instruments illiquides (non traités sur un marché organisé) présents dans le portefeuille d'une institution financière. Ce risque concerne pratiquement tous les produits dérivés.

iv. Risque de liquidité : c'est l'incertitude portant sur la possibilité de revendre (ou : d'acheter) l'intégralité d'une position sur une période donnée. Ce risque est d'autant plus important que la quantité représente une fraction significative du volume moyen habituellement traité sur la période considérée.

v. Risque opérationnel : c'est le risque de faillite d'un système de production, pour des causes humaines ou mécaniques. Par exemple : le “ gros doigt ” (erreur de saisie), la panne informatique, la fraude.

7.2 Gestion quantitative du risque

La notion de gestion quantitative du risque recouvre l'ensemble des techniques de prise de décision visant à limiter les risques que courent une institution financière ou un investisseur sur la base d'informations quantitatives. Les notions de " gestion du risque " et de " mesure du risque " y sont indissociables.

7.2.1 Mesure de risque

Commençons tout d'abord par préciser la notion de mesure de risque : dans le cadre classique - celui du risque de marché - on se donne une distribution de perte à l'horizon de temps T, c'est-à-dire une variable aléatoire L_T qui représente la perte encourue par le portefeuille d'actifs dont on cherche à mesurer les risques. Idéalement, cette variable aléatoire devrait être nulle (ou du moins, constante). Ce n'est évidemment jamais le cas, et on va s'attacher à trouver des indicateurs numériques mesurant sa dangerosité. Voici quelques uns des plus classiques :

i. Risque quadratique
   On mesure $E\left(L_T^2\right)$
ii. Variance
   On mesure $E\left(L_T^2\right) - \left(E\left(L_T\right)\right)^2$ pour quotienter par les distributions constantes
iii. Semivariance
   Ne considérant que les cas défavorables, c'est-à-dire les événements pour lesquels $L_T$est positive, on mesure $E\left(X_T^2\right) - \left(E\left(X_T\right)\right)^2$avec $X_T = \left(L_T\right)^+ = \max\left(L_T, 0\right)$
iv. VaR (*Value At Risk)*
   Cette mesure de risque n'est autre qu'un quantile de niveau α. La VaR de niveau α, soit VaR_α, est la plus petite valeur l telle que la probabilité de l'événement $\{L_T > l\}$soit inférieure à $(1-\alpha)$. C'est le quantile de niveau $(1-\alpha)$ de la fonction de répartition de L_T :

$$VaR_\alpha = \inf\left\{l \in \mathrm{R}/P\left(L_T > l\right) \leq 1-\alpha\right\}$$

v. Perte moyenne (*expected shortfall)* de niveau α
   La définition générale de ES_αest la suivante :

$$ES_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u du$$

C'est donc la moyenne des VaR_ude niveaux $u > \alpha$. Dans le cas où $L_T$est intégrable et admet une densité continue, on montre la relation suivante qui justifie le nom de " perte moyenne " :

$$ES_\alpha = E\left(L_T | L_T \geq VaR_\alpha\right)$$

7.2.2 Exemples

Nous pouvons préciser, à l'aide d'exemples, certains types de risques associés à des distributions de pertes particulières. Considérons par exemple les trois distributions ci-dessous :

$$\begin{array}{l} L_T^1 = \sigma_0 X \\ L_T^2 = \sigma_0 \left(\lambda X + (1-\lambda)\left(Y - E\left(Y\right)\right)\right) \\ L_T^3 = \Sigma X \end{array}$$

où X est une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $N(0,1)$, Y est une loi binomiale prenant la valeur $y > 0$ (resp. 0) avec la probabilité p_y (resp. $1-p_y$), λ, $0 < \lambda < 1$, est un réel fixé et Σ est une variable aléatoire positive admettant une densité $q_\Sigma(x)$. On suppose les trois variables indépendantes et on choisit les paramètres λ, y, p_y et la fonction $q_\Sigma(x)$ de telle sorte que les variances des trois distributions de perte soient identiques. En étudiant les densités des ces trois variables aléatoires, on voit facilement que les distributions de perte (et donc les " risques " associés) sont de nature assez différentes. La densité de L_T^1 est symétrique avec une décroissance en $e^{-\beta x^2}$ à l'infini. La densité de L_T^2 est asymétrique, elle possède une " bosse " autour d'une valeur y. Quant à celle de L_T^3, elle est symétrique, mais son comportement asymptotique dépend du comportement de la densité $q_\Sigma(x)$ et ne décroît plus nécessairement en $e^{-\beta x^2}$ (phénomène de subordination).

7.3 Gestion optimale par minimisation du risque pour les dérivés

Dans cette section, nous proposons une introduction à la théorie et la pratique de la couverture des produits dérivés. Nous allons décrire les grandes lignes de la méthode de régression séquentielle due à Föllmer et Schweizer qui est, sous une forme plus ou moins explicite, la base de la couverture en delta (*delta hedging)* des produits dérivés.

7.3.1 Marché à une période

Nous allons présenter la méthode dans le cas simple d'une seule couverture (marché à une période). Nous considérons donc une variable aléatoire C représentant la distribution terminale d'un produit dérivé (le *payoff*) de maturité T, et nous cherchons à nous rapprocher le plus possible – dans un sens à définir – de Cpar un portefeuille constitué d'actifs de marché. Dans le cas le plus simple, nous disposons d'un actif sans risque (le *cash*) et d'un actif risqué S (une action), et Cne dépend que de la valeur de Sà la date T. Nous allons maintenant définir un critère de proximité qui s'interprétera comme une minimisation du risque du portefeuille.

Soit donc à la date $t_0 = 0$un portefeuille de couverture de valeur initiale $V_0 = \alpha_0 + \phi_0 S_0$. En T, après paiement du payoff du produit dérivé, la valeur du portefeuille est égale à $V_T = \alpha_0 + \phi_0 S_T - C = V_0 - C + \phi_0 \left(S_T - S_0\right)$- en faisant l'hypothèse simplificatrice que le taux sans risque est nul. La perte associée à cette stratégie est donc l'opposé de cette valeur, soit $L_T = C - V_0 - \phi_0 \left(S_T - S_0\right) =$ (payoff - prime - gain sur la stratégie)

et le risque de la stratégie, dans un cadre quadratique simple, est alors mesuré par le second moment $R_T = E\left(\left(C - V_0 - \phi_0 \left(S_T - S_0\right)\right)^2\right)$. La stratégie optimale est alors déterminée par la valeur initiale V_0et la couverture ϕ_0 solutions du problème de minimisation ci-dessous :

$$(V_0, \phi_0) = \text{Argmin } E\left(\left(C - V_0 - \phi_0 \left(S_T - S_0\right)\right)^2\right)$$

dont la solution est :

$$\begin{array}{l} V_0 = E\left(C\right) - \phi_0 E\left(S_T - S_0\right) \\ \phi_0 = \frac{Covar(C, S_T - S_0)}{Var(S_T - S_0)} = \frac{E(C(S_T - S_0)) - E(C)E(S_T - S_0)}{E\left((S_T - S_0)^2\right) - E((S_T - S_0))^2} \end{array}$$

qui correspond à un risque minimal

$$\bar{R}_T = \frac{Var\left(C\right)Var\left(S_T - S_0\right) - Covar\left(C, S_T - S_0\right)^2}{var\left(S_T - S_0\right)}.$$

Ce calcul est général, il ne dépend absolument pas des hypothèses de distribution sur la distribution de perte L_T. Nous verrons en cours comment particulariser ce résultat aux trois cas de distribution évoqués précédemment.

7.3.2 Généralisation

L'approche décrite dans la section précédente est généralisable au cas d'un marché à plusieurs périodes en appliquant le principe de récurrence : à chaque instant t_n nous cherchons à déterminer la valeur du portefeuille, soit V_n, et la part de la stratégie investie dans l'actif risqué, soit ϕ_n , telles que le risque conditionnel à l'étape suivante soit minimum :

$$(V_n, \phi_n) = \text{Argmin } E\left(\left(V_{n+1} - V_n - \phi_n \left(S_{t_{n+1}} - S_{t_n}\right)\right)^2 |\mathcal{F}_n\right).$$

En appliquant la formule de la section précédente, on voit bien apparaître une relation permettant de trouver la stratégie optimale et la fonction valeur du portefeuille associée par récurrence.

7.3.3 Passage au temps continu

L'extension des ces résultats au temps continu repose sur des résultats plus fins de modélisation des processus de Markov et de leurs générateurs infinitésimaux. Il est intéressant cependant d'étudier de manière heuristique le comportement des risque associés aux stratégies optimales obtenues par la méthode précédemment décrite dans le cas où l'actif de marché sous-jacent a l'une des trois dynamique suivante (correspondant à des versions continues des distributions déjà utilisées dans section précédente) :

$$\begin{array}{l} \frac{dS_t}{S_t} = \sigma_0 dW_t \\ \frac{dS_t}{S_t} = \sigma_0 dW_t + (J-1)\, dN_t \\ \frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t dW_t,\ d\sigma_t = q(\sigma_t)\, dB_t \end{array}$$

Pour cela, on reprendra en cours les formules de calcul de la couverture optimale et du risque résiduel dans le modèle à un pas, et on les étudiera pour les temps “ petits ” avec des dynamiques comme ci-dessus.

7.4 Références

A. J. McNeil, R. Frey, P. Embrechts, *Quantitative risk management*, Princeton Series in Finance, Princeton University Press, 2005

H. Föllmer, A. Schied, *Stochastic Finance*, Walter de Gruyter, 2004

H. Föllmer, M. Schweizer, *Hedging by sequential regression : an introduction to the mathematics of trading,* ASTIN Bulletin, vol. 19, 5, 1986, pp 29-42, 1986

Rappel des notations

p.a : processus aléatoire.
v.a : variable aléatoire.
v.a.r : variable aléatoire réelle.
p.p : presque partout.
p.s : presque sûrement.
MB : mouvement Brownien.
$(a)_+$: $max(a, 0)$
$(a)_-$: $min(a, 0)$
$a \wedge b$: $min(a, b)$
$a \vee b$: $max(a, b)$
$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$: tribu borélienne de $\mathbb{R}^n$.
AOA : absence d'opportunité d'arbitrage.
EDO : équation différentielle ordinaire.
EDP : équation aux dérivées partielles.
EDS : équation différentielle stochastique.
$\sigma(X)$: tribu engendrée par la v.a X