UFRJ — COPPE — PEE — CPE723 — Otimização Natural

Aula 05 — Fast Simulated Annealing (FSA) (Szu e Hartley, 1987)

Distribuição de Cauchy (Lorentz): $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi\gamma \cdot \left(1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2\right)}$

$$\left(\int f_X(x)\,dx = \frac{\operatorname{atan}(x)}{\pi} + C \right)$$

Distribuição de Cauchy com $x_0 = 0$ e $\gamma = 1$: $f_X(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

Média: $E[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}\,dx = \left.\frac{\ln(x^2+1)}{2\pi}\right|_{-\infty}^{\infty} \longrightarrow \text{"}\infty - \infty\text{"}$ (indefinida)

Variância: $E[(X - \overset{\text{"0"}}{E[X]})^2] = \text{"}E[X^2]\text{"} = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\pi(1+x^2)}\,dx = \left.\frac{x - \operatorname{atan} x}{\pi}\right|_{-\infty}^{\infty} \longrightarrow \infty$

(http://en.m.wikipedia.org/wiki/Cauchy-distribution)

No loop principal do Simulated Annealing, substituimos as linhas:

```
T = To/np.log2(2+k)
```

por :

```
T = To/(1+k)
```

```
xhat = x + epsilon * np.random.normal(0,1,np.shape(x))
```

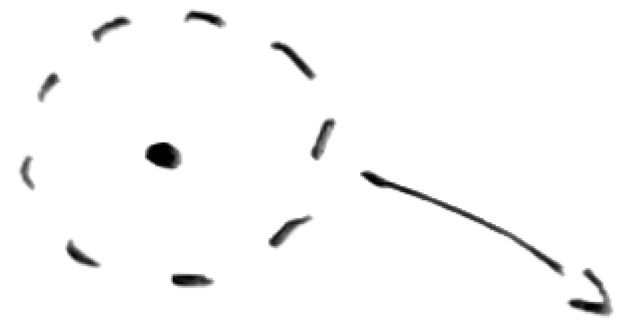
por :

```
xhat = x + epsilon * np.random.standard_cauchy(np.shape(x))
```

Todo o resto do código permanece igual. Idéia básica do FSA: o uso de perturbações "com caudas pescadas" ("heavy tails") cria, ocasionalmente, "saltos longos" ("long jumps"), e permite a redução mais rápida da temperatura.

(rápida)

Esboço da demonstração de convergência global (é o mesmo esboço nos dois artigos de Szu & Hartley)



vizinhança de um ponto (conjunto "V")

(para que seja impossível $x \notin V$ quando $k \to \infty$)

Probabilidade de k-ésimo sorteio gerar $x \notin V$: $1 - g_k$

Probabilidade de todos os sorteios gerarem $x \notin V$: $\prod (1 - g_k) = 0$

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - g_k) = (1 - g_1)(1 - g_2)(1 - g_3)\dots$$

$\ln 0 \to -\infty$

$$\ln\left(\prod (1 - g_k)\right) = \sum \ln(1 - g_k) \simeq -\sum g_k = -\infty \Rightarrow \boxed{\sum g_k \to \infty}$$

$\ln(1 - x) \simeq x$, se $x \simeq 0$ (série de Taylor)

Considerando como "origem" o estado atual, podemos escrever g_k para o SA (perturbação Gaussiana) e para o FSA (perturbação de Cauchy) ($\mathbb{R}^1$):

SA: $g_k \propto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}$ $\Big|$ $\sigma^2 = T = \frac{T_0}{\ln k}$

$$g_k \propto \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi T_0}{\ln k}}} e^{\frac{-x^2}{2T_0}\cdot \ln k}$$

$$g_k \propto \frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi T_0}{\ln k}}} \left(e^{-\ln k}\right)^{\frac{x^2}{2T_0}} = \frac{\sqrt{\ln k}}{\sqrt{2\pi T_0}} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{x^2}{2T_0}}$$

Simplificando a análise (SA):

$g_k = e^{-\frac{\beta}{T}}$ $\Big|$ $T = \frac{T_0}{\ln k}$

$$g_k = e^{-\frac{\beta}{T_0}\cdot \ln k}$$

$$g_k = \left(e^{-\ln k}\right)^{\frac{\beta}{T_0}} \longleftarrow T_0 = \beta$$

$\boxed{g_k = \frac{1}{k}}$ $\left(e \sum g_k \to \infty\right)$

FSA: $g_k \propto \left.\dfrac{T}{(T^2+x^2)}\right|_{T=\frac{T_0}{k}}$

$$g_k \propto \frac{\frac{T_0}{k}}{\left(\frac{T_0}{k}\right)^2 + x^2}$$

$k \to \infty$

$$g_k \propto \frac{T_0 k}{T_0^2 + k^2 x^2} \simeq \frac{T_0}{k x}$$

$$\boxed{g_k \simeq \frac{T_0}{x^2}\cdot\frac{1}{k}} \quad \left(e \ \Sigma g_k \to \infty\right)$$

Obs.: $\dfrac{1}{\pi\gamma\left(1+\left(\frac{x-x_0}{\gamma}\right)^2\right)} \cdot \dfrac{\gamma^2}{\gamma^2}$ $\quad x_0 = 0$

$$\frac{\gamma^{\cancel{2}}}{\pi\cancel{\gamma}\,(\gamma^2+x^2)}$$

$$\frac{\gamma}{\pi(\gamma^2+x^2)}$$

Leitura dos artigos de Szu & Hartley:

Secção 3 (Junho 1987)

Secção 4 (Novembro 1987)