<u>הסתברות להנדסת תוכנה – תרגול 9</u>

<u>שאלה 1</u>

באיזור מסויים מתרחשות בממוצע 2.1 רעידות אדמה בשנה.

א. מהי ההסתברות שבשנה מסוימת לא יתרחשו רעידות אדמה כלל?

ב. מהי ההסתברות שבשנה מסוימת יתרחשו 2 רעידות אדמה או יותר?

ג. אם ידוע שבשנה מסוימת התרחשו 2 רעידות אדמה או יותר, מהי ההסתברות שהתרחשו בדיוק 3?

ד. כיצד מתפלג מספר השנים החל משנה מסוימת, עד השנה הראשונה בה תתרחש בדיוק רעידת אדמה אחת?

<u>שאלה 2</u>

אליס מתעטשת בכל יום מספר בלתי מוגבל של פעמים, ובממוצע 2.2 פעמים ביום.

א. חשבו את ההסתברות שאליס לא התעטשה כלל במשך שבוע.

ב. חשבו את תוחלת מספר הימים שבהם אליס לא התעטשה כלל במשך שבוע.

ג. חשבו את ההסתברות שבמשך שבוע היו בדיוק שני ימים שבכל אחד מהם אליס התעטשה 3 פעמים.

<u>שאלה 3</u>

א. מטילים מטבע הוגנת עד לקבלת 4 ראשים. מה ההסתברות שהטילו את המטבע 6 פעמים?

ב. ביצעו את הניסוי המתואר בסעיף א' 7 פעמים. מה ההסתברות שבדיוק ב-3 פעמים מס' ההטלות היה 6?

ג. ביצעו את הניסוי המתואר בסעיף א' עד שמס' ההטלות יצא בדיוק 6 פעמים. מה ההסתברות שביצעו את הניסוי 4 פעמים?

<u>שאלה 4</u>

לאליס יש שתי מגירות. כל מגירה מכילה N עטים.

בכל פעם שבה היא זקוקה לעט חדש, אליס שולפת עט מאחת המגירות באופן אקראי.

בשלב מסויים אחת המגירות מתרוקנת.

עבור $k=1,\dots,N$ חשבו את ההסתברות שבשלב זה המגירה האחרת מכילה k עטים.

<u>שאלה 5</u>

נתבונן בהתפלגות מולטינומית עם פרמטרים $n,p_1,\dots,p_k$.

כלומר, בכל אחד מ-n ניסויים ב"ת קיימות k תוצאות אפשריות, שההתפלגות שלהן מבוטאת ע"י ההסתברויות $p_1,\dots,p_k$.

יהיו $X_1, \dots, X_k$ מ"מ כך שלכל i המשתנה X_i סופר את מספר הפעמים שבהם התקבלה תוצאה i.

הוכיחו כי לכל $1 \le i \neq j \le k$ מתקיים: $Cov(X_i, X_j) = -np_ip_j$

<u>שאלה 6</u>

במפעל ברגים יוצרו 10 שקים שכל אחד מהם מכילים 20 ברגים.

5 מהשקים מכילים בורג פגום אחד.

חמשת האחרים מכילים 5 ברגים פגומים כל אחד.

דוגמים 3 שקים אקראיים ללא חזרות ומכל אחד מהם דוגמים 4 ברגים אקראיים ללא חזרות.

מה הסתברות שמתוך כל הברגים שנדגמו נמצא בדיוק בורג אחד פגום?

<u>פתרונות</u>

<u>שאלה 1</u>

א. אם המטבע הוטלה 6 פעמים, פירוש הדבר שבהטלה השישית קיבלנו ראש בפעם הרביעית. אם נתייחס לראש כאל "כשלון" ולזנב כאל "הצלחה", אזי ארעו 2 הצלחות לפני הכשלון הרביעי.

יהי X מ"מ הסופר את מספר ההצלחות. אזי $X \sim NB(r=4, p=1/2)$. (p מייצגת את הסתברות ה"הצלחה" – קבלת זנב.) מכאן:

$$\Pr[X=2] = \binom{2+4-1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^4 = \binom{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 10\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{5}{32}$$

ב. יהי Y מספר הניסויים שבהם היו בדיוק 6 הטלות. אזי מסעיף א' (ומכך שכל ההטלות ב"ת זו בזו) נובע כי $Y \sim B(7, 5/32)$. מכאן:

$$\Pr[Y=3] = \binom{7}{3}\cdot\left(\frac{5}{32}\right)^3\cdot\left(\frac{27}{32}\right)^4 \approx 0.029$$

ג. ההתפלגות כאן היא גיאומטרית, כאשר הסתברות ההצלחה היא 5/32 . אם נסמן את מספר הניסויים הכולל ע"י Z, אזי $Z \sim G(5/32)$ וההסתברות היא:

$$\Pr[Z=4] = \left(\frac{27}{32}\right)^3\cdot\frac{5}{32} \approx 0.0938$$

<u>שאלה 2</u>

נתבונן במאורע שבו אליס מגלה שהמגירה הימנית היא ריקה כאשר במגירה השמאלית $k \geq 1$ עטים. נחשב את ההסתברות לכך ונכפול פי 2, עבור המקרה הסימטרי.

מאורע זה יתרחש אם"ם המגירה הימנית תבחר בפעם ה-$N+1$ לאחר שהמגירה הימנית נבחרה $N-k$ פעמים, ולכן זה יקרה בבחירת העט ה-$2N-k+1$.

נתבונן בבחירת המגירה הימנית בתור "כשלון" ובבחירת המגירה השמאלית בתור "הצלחה".

אזי השאלה היא מה ההסתברות שמספר ההצלחות לפני הכשלון ה-$\mathrm{N}+1$ יהיה k.

יהיה מ"מ עבור מספר ההצלחות הנ"ל.

בכל אירוע ההסתברות להצלחה היא ½ באופן ב"ת בניסויים קודמים (אנו לא עוסקים בשאלה מה אליס תעשה לאחר שהיא גילתה מגירה ריקה).

לצורך הניתוח ניתן לדמיין כאילו המגירה השמאלית מכילה מספר אינסופי של גרבים (מספר ההצלחות אינו מוגבל). זה לא יפגע בניתוח כי הוא עוסק במאורע שבו מספר ההצלחות הוא $k \leq \mathrm{N}$.

לכן, $X \sim NB(r = N+1, p = 1/2)$, וההסתברות של מאורע זה היא:

$$\Pr[X = N+1] = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-k}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} = \binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1}$$

(לדוגמה, אם $k = N$, פירוש הדבר שהמגירה השמאלית מעולם לא נבחרה, וההסתברות לכך היא $\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$.)

מכאן, ההסתברות הכוללת שבעת גילוי מגירה ריקה במגירה השניה יהיו בדיוק k מגירות היא:

$$2\binom{2N-k}{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1}$$

<u>שאלה 3</u>

$$Cov(X_i, X_j) = E[X_iX_j] - E[X_i]E[X_j]$$

מתקיים:

$$X_i \sim \mathrm{B}(n, p_i), \quad X_j \sim \mathrm{B}(n, p_j)$$

ולכן:

$$E[X_i] = np_i, \qquad E[X_j] = np_j$$

נחשב את $E[X_iX_j]$:

$$\sum_m m \cdot \Pr[X_iX_j = m] = \sum_m \sum_{ab=m} m \cdot \Pr[X_i = a, X_j = b] = \sum_m \sum_{ab=m} ab \cdot \Pr[X_i = a, X_j = b]$$

לכל a, b כך ש-$a + b > n$ מתקיים $\Pr[X_i = a,\ X_i = b] = 0$.

ההסתברות היא חיובית עבור a, b המקיימים $0 \leq a + b \leq n$. לכן ניתן לרשום את הסכום כסכום יחיד על כל הזוגות של ערכים אלו:

$$\sum_{0\le a+b\le n} ab\cdot\Pr[X_i=a,X_j=b]=\sum_{0\le a+b\le n} ab\cdot\binom{n}{a,b,n-a-b}\cdot {p_i}^a\cdot {p_j}^b\left(1-p_i-p_j\right)^{n-a-b}$$

ההסתברות מתקבלת ע"י ההתפלגות המולטינומית שבה 3 התוצאות המעניינות אותנו הן $i,j,\{1,..,k\}\setminus\{i,j\}$

$$=\sum_{0\le a+b\le n} ab\cdot\frac{n!}{a!\,b!\,(n-a-b)!}\cdot {p_i}^a\cdot {p_j}^b\left(1-p_i-p_j\right)^{n-a-b}$$

האיברים בסכום שבהם $a=0$ או $b=0$ הם 0. לכן ניתן לרשום:

$$=\sum_{\substack{a+b\le n\\ a,b\ge 1}} ab\cdot\frac{n!}{a!\,b!\,(n-a-b)!}\cdot {p_i}^a\cdot {p_j}^b\left(1-p_i-p_j\right)^{n-a-b}$$

$$=\sum_{\substack{a+b\le n\\ a,b\ge 1}} \frac{n!}{(a-1)!\,(b-1)!\,(n-a-b)!}\cdot {p_i}^a\cdot {p_j}^b\left(1-p_i-p_j\right)^{n-a-b}$$

נסמן $s=a-1,t=b-1$. אז בכל האיברים בסכום מתקיים $s+t\le n-2$, $s\ge 0,t\ge 0$. נקבל:

$$=\sum_{0\ge s+t\le n-2} \frac{n!}{s!\,t!\,(n-2-s-t)!}\cdot {p_i}^{s+1}\cdot {p_j}^{t+1}\left(1-p_i-p_j\right)^{n-2-s-t}$$

$$=n(n-1)p_ip_j\sum_{0\ge s+t\le n-2}\binom{n-2}{s,t,n-2-a-b}\cdot {p_i}^s\cdot {p_j}^t\left(1-p_i-p_j\right)^{n-2-s-t}$$

מנוסחת המולטינום:

$$=n(n-1)p_ip_j\cdot\left(p_i+p_j+1-p_i-p_j\right)^n=n(n-1)p_ip_j$$

לסיום:

$$Cov\left(X_i,X_j\right)=E\left[X_iX_j\right]-E[X_i]E\left[X_j\right]=n(n-1)p_ip_j-np_inp_j=np_ip_j(n-1-n)=-np_ip_j$$

<u>שאלה 4</u>

ההסתברות תלויה במספר השקים שנדגמו מכל סוג.

נקרא לשקים שמכילים בורג אחד פגום "טובים" ולאלו שמכילים 5 ברגים פגומים "רעים".

יהי A המאורע שנמצא בסה"כ בורג פגום אחד.

עבור $i=0,1,2,3$ יהי B_i המאורע שנדגמו i שקים טובים. אזי:

$$\Pr[A]=\sum_{i=0}^{3}\Pr[A|B_i]\Pr[B_i]$$

נחשב ראשית את ההסתברויות של B_i.

ההסתברות לדגום 0 שקים טובים היא:

$$\Pr[B_0] = \frac{\binom{5}{0}\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{10 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{12}$$

ההסתברות לדגום שק טוב אחד היא

$$\Pr[B_1] = \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 6}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{5 \cdot 6}{9 \cdot 8} = \frac{5}{12}$$

מטעמי סימטריה (כיוון שמספר השקים הטובים שווה למספר השקים הרעים):

$\Pr[B_2] = \Pr[B_1] = \frac{5}{12}$

$\Pr[B_3] = \Pr[B_0] = \frac{1}{12}$

(סכום ההסתברויות הוא 1 כנדרש ממאורעות זרים ומשלימים.)

בכל אחד מהמקרים נצטרך להשתמש בהסתברות למצוא בורג אחד פגום ולהסתברות למצוא 0 ברגים פגומים – כי בסה"כ מתוך 3 השקים הנדגמים, רק באחד נמצא בורג פגום.

- ההסתברות לא למצוא אף בורג פגום בשק טוב:

$$g_0 = \frac{\binom{19}{4}\binom{1}{0}}{\binom{20}{4}} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17} = \frac{16}{20} = 0.8$$

- כיוון שבשק טוב יש רק בורג פגום אחד, ההסתברות למצוא בורג פגום אחד בשק טוב: היא

$$g_1 = 1 - g_0 = 0.2$$

- ההסתברות לא למצוא אף בורג פגום בשק רע:

$$b_0 = \frac{\binom{15}{4}\binom{5}{0}}{\binom{20}{4}} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 24}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 24} = \frac{91}{323} \approx 0.28$$

- ההסתברות למצוא בורג פגום אחד בשק רע:

$$b_1 = \frac{\binom{15}{3}\binom{5}{1}}{\binom{20}{4}} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 24}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 6} = \frac{1365}{2904} \approx 0.47$$

כעת:

$\Pr[A|B_0] = \binom{3}{1} {b_0}^2 b_1$

$\Pr[A|B_1] = {b_0}^2 g_1 + 2 g_0 b_0 b_1$

$\Pr[A|B_2] = 2 g_1 g_0 b_0 + {g_0}^2 b_1$

$\Pr[A|B_3] = \binom{3}{1} {g_0}^2 g_1$