הסתברות להנדסת תוכנה – תרגול 8

<u>שאלה 1</u>

יהי $X \sim B(n, \frac{1}{2})$ ("מ"מ בינומי סימטרי").

הוכיחו כי לכל $i = 0,1, \dots, n$ מתקיים: $\Pr[X = i] = \Pr[X = n - i]$.

<u>שאלה 2</u>

מר קו חי על ישר אינסופי. מדי יום הוא מחליט באופן אקראי האם ללכת ימינה או שמאלה, וצועד קילומטר אחד בכיוון הנבחר.

מצאו חסם עליון להסתברות שלאחר n ימים מר קו התרחק לפחות $0.1n$ קילומטרים מנקודת המוצא.

<u>שאלה 3</u>

הוכיחו כי אם הסתברות **ההצלחה** של אלגוריתם מונטה קרלו היא $\frac{1}{\ln n}$, ומריצים אותו $(\ln n)^2$ פעמים, אזי ההסתברות שכל ההרצות יכשלו קטנה מ-$\frac{1}{n}$.

<u>שאלה 4</u>

ההסתברות לזכות בהגרלת האוטוטו היא 1/100. ההגרלות ב"ת זו בזו. בוב קונה כרטיסי הגרלה עד לזכיה הראשונה.

א. חשבו את תוחלת מספר ההגרלות שבוב ישתתף בהן.
ב. חשבו את ההסתברות שמספר ההגרלות ישתתף בהן יהיה לפחות פעמים מהתוחלת.
ג. חשבו את ההסתברות שבוב יזכה תוך 30 הגרלות.

<u>שאלה 5</u>

ההתפלגות הגיאומטרית מקיימת תכונה המכונה "חוסר זכרון". פירושה היא שמספר כלשהו של ניסויים ללא הצלחה אינו קובע את הסתברות ההצלחה בניסוי(ים) הבא(ים). עובדה זו נובעת מכך שהניסויים בלתי תלויים.

הוכיחו את נכונות התכונה באופן פורמלי.

צ"ל: אם $X{\sim}G(p)$, אזי לכל $s,t \in \{0,1,2,\dots\}$ מתקיים:

$$\Pr[X > s + t \mid X > s] = \Pr[X > t]$$

כלומר, בהנתן שלא הצלחנו ב-s ניסויים, ההסתברות שלא נצליח ב-t הניסויים הבאים, שווה להסתברות לא להצליח ב-t ניסויים שלא קדמו להם ניסויים כלשהם.

<u>שאלה 6</u>

יהי $X = \sum_{i=1}^{h} G_i$, כאשר לכל i מתקיים: $G_i{\sim}G(p)$ והמ"מ G_i הם ב"ת.

א. תארו במילים את המשמעות של X.
ב. חשבו את התוחלת והשונות של X.
ג. עבור $k = h, h+1, \dots$, חשבו את $\Pr[X = k]$.

<u>שאלה 7</u>

יהיו $n > m > 0$ שלמים. קיימים n שובכים, שבכל אחד מהם מקום ליונה אחת בלבד. משחררים m יונים בזו אחר זו. כל יונה עפה לשובך אקראי. אם השובך תפוס, היונה עפה שוב לשובך אקראי. שימו לב - ליונה אין זכרון טוב: היא עשויה לעוף שוב לשובך שכבר ביקרה בו, כולל השובך שביקרה בו זה עתה.

שחרור היונה הבאה בתור מתבצע רק לאחר שהיונה הנוכחית מצאה שובך.

א. עבור $1 \leq i \leq m$, חשבו את תוחלת מספר השובכים שהיונה ה-i ביקרה בהם, עד (כולל) מציאת השובך הפנוי.

ב. חשבו את תוחלת מספר הביקורים הכולל של יונים בשובכים.

שאלה 8

נניח כי תהליך הגשת מועמדות לעבודה מסויימת מסתיים תוך יום בקבלה או דחיה.

אמיר ויסמין מחפשים עבודה אחת בכל יום עד לקבלה.

בכל יום, ההסתברות של אמיר להתקבל לעבודה היא 0.1 ושל יסמין 0.2, באופן ב"ת.

א. לכל $i = 1,2, \dots$ חשבו את ההסתברות שאמיר מצא עבודה ביום ה-i (בדיוק) ויסמין לא מצאה עבודה ב-i הימים הראשונים.

ב. חשבו את ההסתברות שאמיר מצא עבודה לפני יסמין.

ג. אם אמיר מצא עבודה לפני יסמין, מהי ההסתברות שהוא התקבל לעבודה ביום הראשון?

פתרונות

שאלה 1

מההגדרה, לכל i מתקיים:

$$Pr[X=i]=\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^i\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-i}=\binom{n}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$Pr[X=n-i]=\binom{n}{n-i}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{n-i}\left(\frac{1}{2}\right)^i=\binom{n}{n-i}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

נזכר כי: $\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}=\frac{n!}{i!(n-i)!}$ ונקבל את השוויון המבוקש.

שאלה 2

יהי $X\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$ מספר הימים (והקילומטרים) שמר קו הלך ימינה.

אזי מספר הימים (והקילומטרים) שהלך שמאלה הוא $n-X$.

המרחק של מר קו מנקודת המוצא שווה לערך המוחלט של ההפרש בין השנים, כלומר:

$$|X-(n-X)|=|2X-n|$$

כעת:

$$\Pr[|2X-n|\geq 0.1n]=\Pr\left[\left|X-\tfrac{n}{2}\right|\geq 0.05n\right]$$

נזכר בחסם שהוכחנו בהרצאה עבור מ"מ בינומי סימטרי:

$$\Pr\left[\left|X-\frac{n}{2}\right|\geq t\right]\leq 2e^{-\frac{t^2}{n}}$$

נציב ונקבל:

$$\Pr\left[\left|X-\tfrac{n}{2}\right|\geq 0.05n\right]\leq 2e^{-\frac{(0.05n)^2}{n}}=2e^{-0.0025n}$$

שאלה 3

הסתברות הכשלון בכל הרצה היא $1-\frac{1}{\ln n}$. מכאן, ההסתברות שכל ההרצות יכשלו היא:

$$\left(1-\frac{1}{\ln n}\right)^{(\ln n)^2}\underset{\text{א.ש שימושי}}{\leq}\left(e^{-\frac{1}{\ln n}}\right)^{(\ln n)^2}=e^{-\ln n}=n^{-1}=\frac{1}{n}$$

שאלה 4

מספר ההגרלות עד לזכיה מתפלג $X \sim G(0.01)$. מכאן, לפי התכונות שלמדנו:

א. תוחלת מספר ההגרלות שבוב ישתתף בהן הוא $E[X] = \frac{1}{0.01} = 100$

ב. לפי מה שלמדנו, זו ההסתברות שבוב יפסיד ב-199 ההגרלות הראשונות:

$$\Pr[X \geq 200] = (1-0.01)^{199} = 0.99^{199} \approx 0.135$$

ג. ההסתברות שבוב ינצח תוך 30 הגרלות:

$$\Pr[X \leq 30] = 1 - \Pr[X \geq 31] = 1 - (1-0.01)^{30} = 1 - 0.99^{30} \approx 0.26$$

שאלה 5

$$\Pr[X > s+t \mid X > s] = \frac{\Pr[X > s+t \ \cap \ X > s]}{\Pr[X > s]} = \frac{\Pr[X > s+t]}{\Pr[X > s]} = \frac{(1-p)^{s+t}}{(1-p)^s}$$

$$= (1-p)^t = \Pr[X > t]$$

שאלה 6

א. מספר הניסויים עד להצלחה ה-h בסדרה של ניסויים ב"ת עם הסתברות הצלחה p בכל ניסוי.

ב. מלינאריות התוחלת ותוחלת המ"מ הגיאומטרי:

$$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{h} G_i\right] = \sum_{i=1}^{h} E[G_i] = \sum_{i=1}^{h} 1/p = h/p$$

כיוון שהמ"מ G_i ב"ת, מתקיים תוחלת של השונות

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{h} G_i\right] = \sum_{i=1}^{h} Var[G_i] = \sum_{i=1}^{h} \frac{1-p}{p^2} = h\frac{1-p}{p^2}$$

ג. נשים לב כי $X = k$ אם"ם ב-$k-1$ הנסיונות– הראשונים היו $h-1$ הצלחות (ו-$k-h+1$ כשלונות) ובניסוי ה-k הייתה הצלחה. כלומר:

$$\Pr[X = k] = \binom{k-1}{h-1} p^{h-1}(1-p)^{k-h} p = \binom{k-1}{h-1} p^h (1-p)^{k-h}$$

שאלה 7

א. לכל $1 \leq i \leq n$, יהי X_i מספר השובכים שהיונה שהיונה ה-i ביקרה בהם. כיוון שבחירת השובך נעשית אקראית באופן ב"ת (כי ליונה אין זכרון טוב), קל לראות כי X_i מתפלג גיאומטרית.

לחישוב הסתברות ההצלחה של היונה בכל ביקור בשובך, נשים לב כי בעת מעופה של היונה, $i-1$ היונים שלפניה אכלסו $i-1$ שובכים. מכאן שמספר השובכים הפנויים הוא $n-i+1$.

לכן, ההסתברות של היונה למצוא שובך פנוי בכל נסיון היא $\frac{n-i+1}{n}$, ולכן $X_i \sim \mathrm{G}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$.

על פי מה שלמדנו, $E[X_i] = \frac{n}{n-i+1}$.

ב. המספר הכולל של ביקורים של יונים בשובכים הוא $\sum_{i=1}^{m} X_i$. מלינאריות התוחלת:

$$E\left[\sum_{i=1}^{m} X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} E[X_i] \overset{\text{א}}{=} \sum_{i=1}^{m} \frac{n}{n-i+1} = \frac{n}{n} + \frac{n}{n-1} + \cdots + \frac{n}{2} + \frac{n}{n-m+i} = n\sum_{i=1}^{n-m+1} \frac{1}{i}$$

$n(H_n - H_{n-m})$

<u>שאלה 8</u>

יהי A מספר הימים שנדרשו לאמיר למצוא עבודה ויהי Y מספר הימים שנדרשו ליסמין.

אזי מנתוני השאלה $A \sim G(0.1), Y \sim G(0.2)$ והמ"מ ב"ת.

א. מאי התלות בין המשתנים ומתכונות התפלגות גיאומטרית:

$$\Pr[A = i \ \cap Y > i] = \Pr[A = i] \cdot \Pr[Y > i] = 0.9^{i-1} \cdot 0.1 \cdot 0.8^i = 0.08 \cdot 0.72^{i-1}$$

ב. מאורע זה הוא איחוד של המאורעות מהסוג שחישבנו בסעיף א' – אמיר מצא עבודה לפני יסמין אם"ם קיים יום $i \in \{1,2,3.,,,\}$ שבו הוא מצא עבודה ויסמין עדיין לא מצאה עבודה. כיוון שהמאורעות עבור ערכים שונים של i הם זרים, הסתברות האיחוד שווה לסכום ההסתברויות שחישבנו בסעיף א':

$$\sum_{i=1}^{\infty} 0.08 \cdot 0.72^{i-1} = 0.08 \sum_{i=0}^{\infty} 0.72^i = 0.08 \cdot \frac{1}{1 - 0.72} \approx 0.286$$

השתמשנו בנוסחה לסכום של טור הנדסי אינסופי.

ג. בסעיף ב' הוכחנו כי ההסתברות שאמיר מצא עבודה לפני יסמין היא:

$$\Pr[A < Y] = 0.286$$

בהנתן שאמיר מצא עבודה לפני יסמין, ההסתברות שהוא מצא עבודה ביום הראשון היא:

$$\Pr[A = 1 \,|\, A < Y] = \frac{\Pr[A=1 \cap A < Y]}{\Pr[A<Y]}$$

המאורע במונה הוא למעשה המאורע שחישבנו את ההסתברות שלו בסעיף א' עבור $i = 1$, ואת ההסתברות של המאורע במכנה חישבנו כאמור בסעיף ג'. מכאן:

$$\Pr[A = 1 \,|\, A < Y] = \frac{0.08}{0.286} \approx 0.28$$