

Отчет о выполнении лабораторной работы 3.2.5

Свободные и вынужденные колебания в электрическом контуре

Шубин Владислав, Байбулатов Амир

16 декабря 2023 г.

1 Аннотация

В работе исследуется параллельный колебательный контур: определяется зависимость периода свободных колебаний контура от емкости; определяется зависимость логарифмического декремента затухания от сопротивления; исследуется построение резонансных кривых колебательного контура: АЧХ и ФЧХ.

2 Теоретические сведения

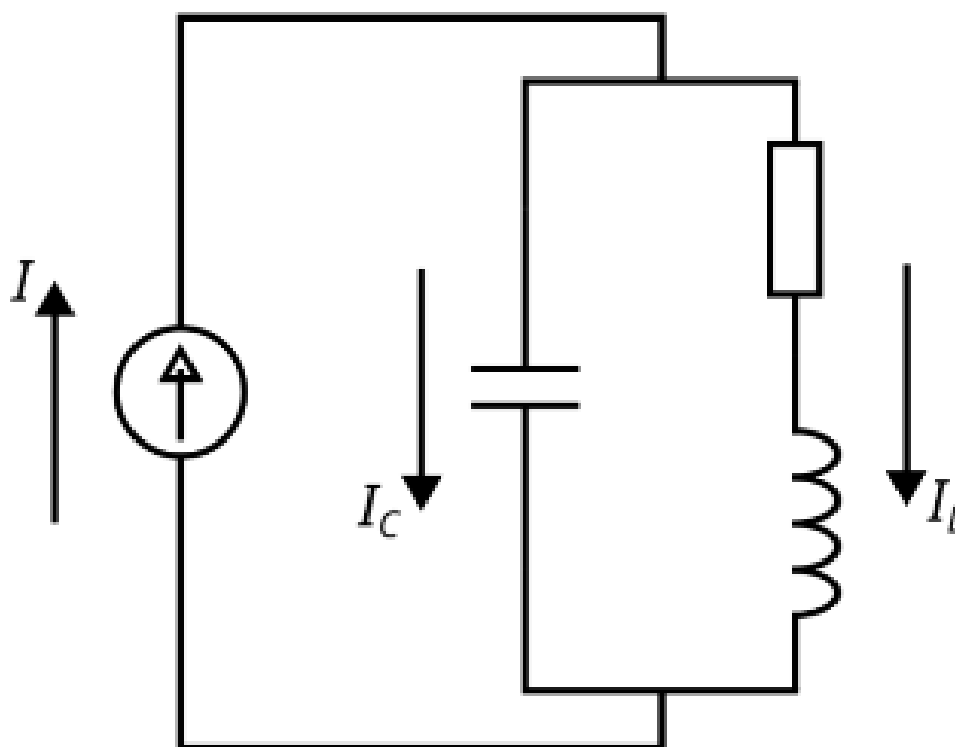


Рис. 1: Схема RLC контура

Для RLC контура 1 применим 2 правило Кирхгофа:

$$RI + U_C + L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (1)$$

Подставив в уравнение (1) выражение для тока через 1-ое правило Кирхгофа, и разделив обе части уравнения на CL , получим:

$$\frac{d^2 U_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dU_C}{dt} + \frac{U_C}{CL}. \quad (2)$$

Произведём замены $\gamma = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ – собственная круговая частота, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ – период собственных колебаний. Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\ddot{U}_C + 2\gamma\dot{U}_C + \omega_0^2 U_C = 0, \quad (3)$$

где точкой обозначено дифференцирование по времени. Будем искать решение данного дифференциального уравнения в классе функций следующего вида:

$$U_C(t) = U(t)e^{-\gamma t}.$$

Получим:

$$\ddot{U} + \omega_1^2 U = 0, \text{ где } \omega_1^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \quad (4)$$

Для случая $\gamma < \omega_0$ в силу того, что $\omega_1 > 0$, получим:

$$U_C(t) = U_0 \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0). \quad (5)$$

Для получения фазовой траектории представим формулу (6) в другом виде:

$$U_C(t) = e^{-\gamma t} (a \cos \omega_1 t + b \sin \omega_1 t), \quad (6)$$

где a и b получаются по формулам:

$$a = U_0 \cos \varphi_0, \quad b = -U_0 \sin \varphi_0.$$

В более удобном виде запишем выражения для напряжения на конденсаторе и тока через катушку:

$$U_C(t) = U_{C0} \cdot e^{-\gamma t} (\cos \omega_1 t + \frac{\gamma}{\omega_1} \sin \omega_1 t), \quad (7)$$

$$I(t) = C\dot{U}_C = -\frac{U_{C0}}{\rho} \frac{\omega_0}{\omega_1} e^{-\gamma t} \sin \omega_1 t. \quad (8)$$

Введём некоторые характеристики колебательного движения:

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R}, \quad (9)$$

где τ – время затухания (время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз).

$$\Theta = \ln \frac{U_k}{U_{k+1}} = \gamma T_1 = \frac{1}{N_\tau} = \frac{1}{n} \ln \frac{U_k}{U_{k+n}}, \quad (10)$$

где Θ – логарифмический декремент затухания, U_k и U_{k+1} – два последовательных максимальных отклонения величины в одну сторону, N_τ – число полных колебаний за время затухания τ .

Теперь рассмотрим случай *вынужденных колебаний* под действием внешней внешнего синусоидального источника. Для этого воспользуемся методом *комплексных амплитуд* для схемы на рис.1:

$$\ddot{I} + 2\gamma\dot{I} + \omega^2 I = -\varepsilon \frac{\Omega}{L} e^{i\Omega t}. \quad (11)$$

Решая данное дифференциальное уравнение получим решение:

$$I = B \cdot e^{-\gamma t} \sin(\omega t - \Theta) + \frac{\varepsilon_0 \Omega}{L\varphi_0} \sin(\Omega t - \varphi). \quad (12)$$

Нетрудно видеть, что частота резонанса будет определяться формулой:

$$\omega_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (13)$$

3 Оборудование и инструментальные погрешности

Оборудование: осциллограф АКТАКОМ ADS-6142Н, генератор сигналов специальной формы АКИП-3409/4, магазин сопротивлений МСР-60, магазин емкости Р5025, магазин индуктивности Р567 типа МИСП, соединительная коробка с шунтирующей емкостью, соединительные одножильные и коаксиальные провода.

4 Результаты измерений и обработка данных

4.1 Описание экспериментальной установки

Схема установки для исследования колебаний приведена на рис.2. Колебательный контур состоит из постоянной индуктивности L с активным сопротивлением R_L , переменной емкости C и сопротивления R . Картина колебаний напряжения на емкости наблюдается на экране двухканального осциллографа. Для возбуждения затухающих колебаний используется генератор сигналов специальной формы. Сигнал с генератора поступает через конденсатор C_1 на вход колебательного контура. Данная емкость необходима чтобы выходной импеданс генератора был много меньше импеданса колебательного контура и не влиял на процессы, проходящие в контуре.

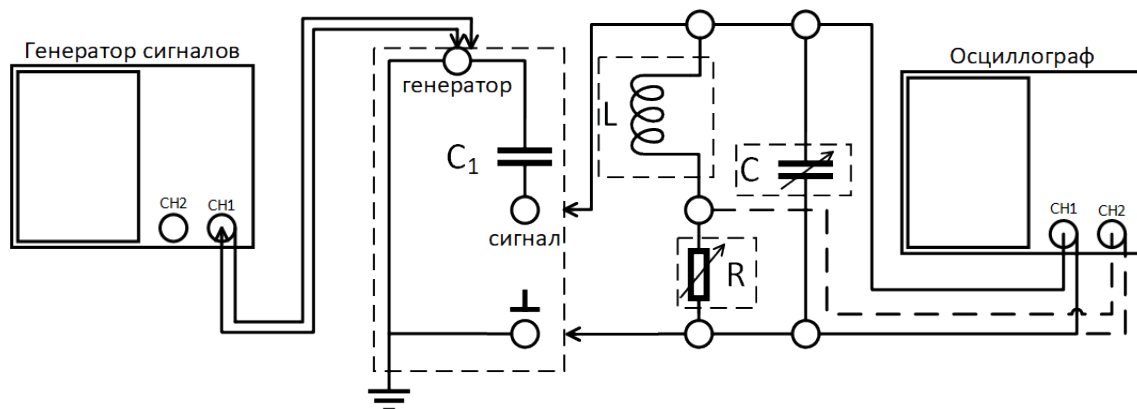


Рис. 2: Схема установки для исследования вынужденных колебаний

Установка предназначена для исследования не только возбужденных, но и свободных колебаний в электрической цепи.

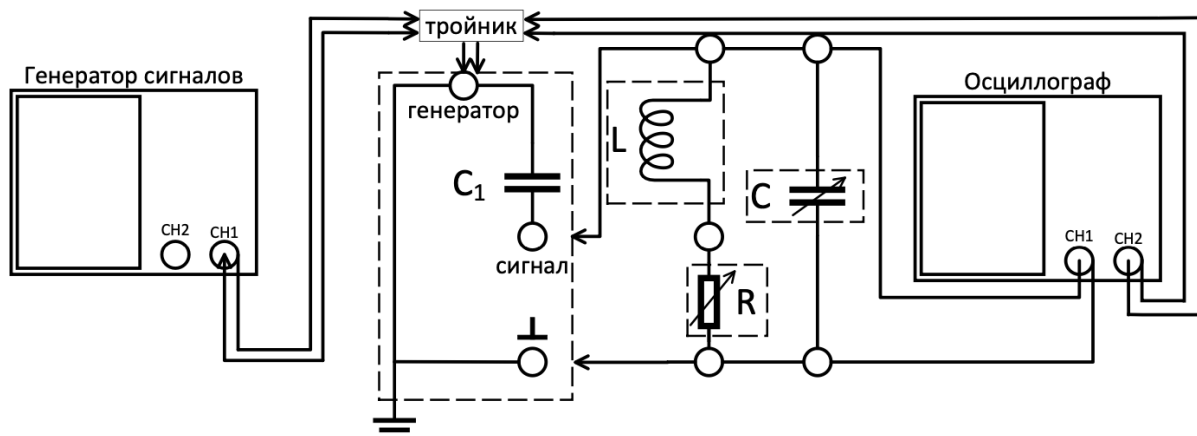


Рис. 3: Схема установки для исследования АЧХ и ФЧХ

4.2 Характеристики системы

$L = 100 \text{ мГн}$

$R = 0.001 \text{ Ом}$

4.3 Предварительные расчеты:

$$C_0 = 7.6 * 10^{-10} \text{ Ф} \quad (14)$$

$$R_{cr} = 8165 \text{ Ом} \quad (15)$$

4.4 Практическая часть

№	C, мкФ	$T_{\text{теор, мкс}}$	$T_{\text{практ, мкс}}$
1	0.002	88.8	88.2
2	0.003	108.8	100.1
3	0.004	125.6	115.1
4	0.005	140.4	130.3
5	0.006	153.8	140.1

Таблица 1: Результаты измерений

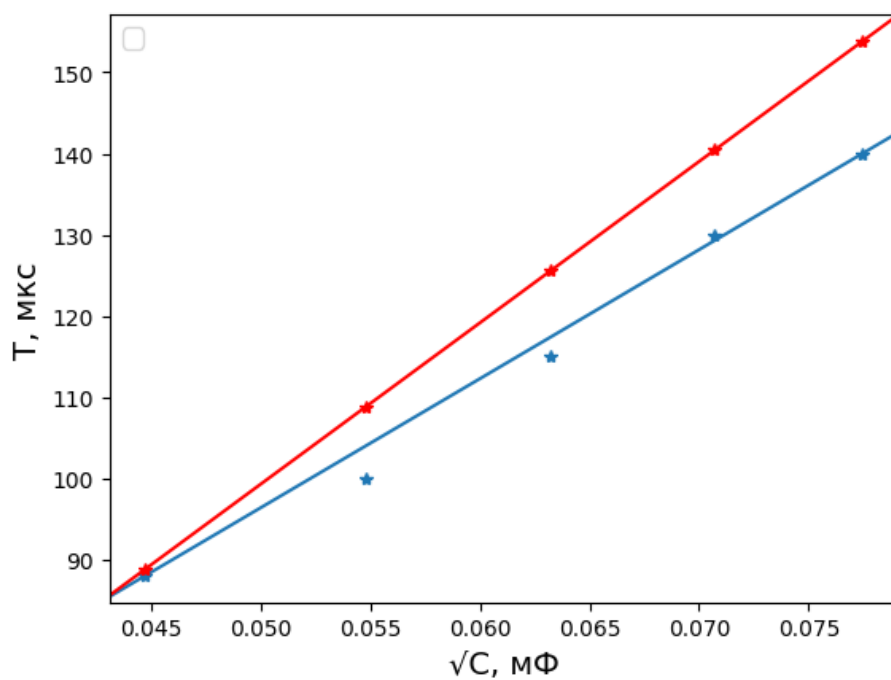


Рис. 4: График зависимости периода собственных колебаний от корня из ёмкости системы

№	R, Ом	$U_1, \text{ мВ}$	$U_2, \text{ мВ}$	θ
1	408.2	176.0	260	0.39
2	458.2	216.0	332.0	0.43
3	688.2	112.0	204.0	0.6
4	988.2	106.0	248.0	0.85
5	1488.2	124.0	423.0	1.23
5	1888.2	75.0	338.0	1.51

Таблица 2: Результаты измерений декрементов

5 Заключение

1. В ходе сравнения зависимости с теоретической была обнаружена некоторая небольшая ёмкость колебательной системы (исключая магазин ёмкостей), которая смещает зависимость $T(C)$ на некоторую константу, однако, достаточно мала, чтобы изменить характер зависимости (изменений установить не удалось).
2. Удалось снять зависимость логарифмического декремента затухания от активного сопротивления цепи (погрешность составила порядка 5%), основной причиной такой погрешности послужили наводки, которые «размазывали сигнал», особенно на пиках амплитуд, делая невозможным поддерживать точность на уровне точности приборов. График данной зависимости в линеализирующих координатах:
3. Определили критическое сопротивление, при котором характер колебаний меняется на апериодический, тремя способами: теоретическим $R_{кр} = 8,16 \pm 0,12$ кОм, по наклону графика зависимости логарифмического декремента затухания от сопротивления цепи $R_{кр} = 6,2 \pm 0,4$ кОм, с помощью наблюдением за картиной колебаний $R_{кр} = 3$ кОм. Как видим, значения довольно сильно отличаются, это связано с неточностью $R_{кр}$ по своей природе.
4. Были сняты АЧХ и ФЧХ для вынужденных колебаний в цепи, проведена аппроксимация соответствующих теоретических зависимостей к экспериментальным точкам, функции из теории хорошо ложатся на точки, однако при этих измерениях возникли ещё большие наводки, сделали случайную погрешность кратно больше системной ($\sigma_{случ} \sim 7\sigma_{сист}$), однако из-за аппроксимации они не имеют большого вклада в итоговые результаты.
5. Удалось определить логарифмические декременты затухания по установлению и затуханию вынужденных колебаний, получены значения декремента для двух значений сопротивления магазина:
при $R = 140$ Ом $\Theta_{затух} = 0.19 \pm 0.015$; $\Theta_{устан} = 0.179 \pm 0.01$,
при $R = 280$ Ом $\Theta_{затух} = 0.293 \pm 0.013$; $\Theta_{устан} = 0.29 \pm 0.03$.
Как видим, значения хорошо совпадают в пределах погрешностей.