

IPSA

# TP3-Transformée de Fourier discrète (TFD) et Analyse spectrale

Aéro 3 2022-2023

Valentin Sousa bouquet  
30/03/2023

## SOMMAIRE

INTRODUCTION .....	2
Exercice 1 : Analyse spectrale d'un signal par la TFD .....	3
1. Analyse spectrale élémentaire .....	3
2. Amélioration de la précision fréquentielle.....	5
3. Intérêt d'une fenêtre de pondération.....	6
Exercice 2 : Analyse spectrale d'un signal par la TFD .....	10
CONSLUSION .....	15

## INTRODUCTION

Ce travail a pour but de nous permettre d'acquérir une maîtrise approfondie des outils de traitement numérique du signal, en particulier ceux associés à la Transformée de Fourier Discrète (TFD).

Le traitement numérique du signal est une discipline qui trouve de nombreuses applications dans de nombreux domaines tels que la communication, la géolocalisation, la médecine, la physique, etc. Il permet de traiter et d'analyser des signaux électriques, sonores, visuels, etc., en vue de les transformer, de les filtrer, de les compresser, ou encore de les coder, pour ensuite les utiliser à des fins diverses.

La Transformée de Fourier Discrète (TFD) est un outil fondamental du traitement numérique du signal, qui permet de passer d'un signal temporel (ou spatial) à son équivalent fréquentiel, en décomposant ce signal en une somme de sinus et de cosinus de fréquences différentes.

Cette transformation est largement utilisée en analyse spectrale, en compression de données, en filtrage numérique, etc.

Au cours de ce TP, nous serons amené à maîtriser les différents aspects de la TFD, en apprenant à la mettre en pratique à travers divers exercices. Nous serons ainsi en mesure d'appliquer cette technique à des signaux réels, de les analyser et de les transformer en vue de les utiliser à des fins spécifiques.

En somme, ce TP nous permettra d'acquérir une maîtrise solide des outils de traitement numérique du signal associés à la TFD, ce qui nous sera utile dans de nombreux domaines de l'ingénierie, de la recherche scientifique, et de l'industrie.

## Exercice 1 : Analyse spectrale d'un signal par la TFD

### 1. Analyse spectrale élémentaire

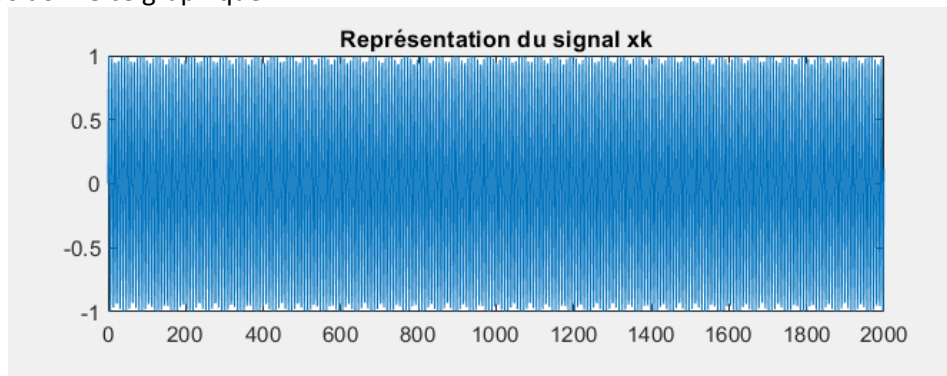
On charge les données du fichier à l'aide du code suivant :

```
load('signal_inconnu.mat'); %charge le fichier inconnu
```

On échelonne l'axe des abscisses et on représente le signal avec le code suivant :

```
load('signal_inconnu.mat'); %charge le fichier inconnu
whos("-file", 'signal_inconnu.mat');
n=0 :1 :1999 ;%comme xk contient 2000 valeurs, on va afficher toutes les valeurs
du signal
size(n);
N=2000;
subplot(2,1,1);
plot(n,xk) ;
```

Ce qui nous donne ce graphique :

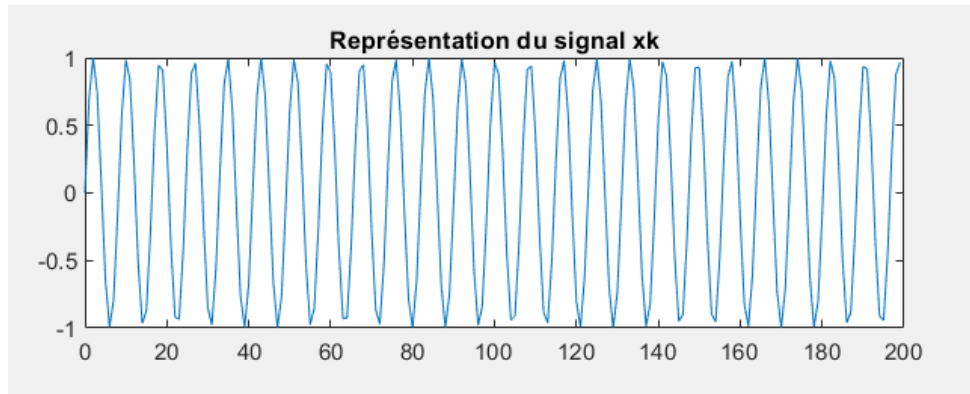


Malheureusement, cette courbe est illisible car on affiche ici trop de points de  $x_k$ . On peut supposer que cette courbe est sinusoïdale en raison de l'amplitude du signal qui oscille entre -1 et 1.

Afin d'y voir plus clair, nous allons afficher moins de valeurs du signal avec le code suivant :

```
load('signal_inconnu.mat'); %charge le fichier inconnu
whos("-file", 'signal_inconnu.mat');
n=0 :1 :199 ;%on va afficher 200 valeurs du signal
size(n);
N=2000;
subplot(2,1,1);
plot(n,xk(1:200)) ;
title('Représentation du signal xk')
```

On obtient la courbe suivante :

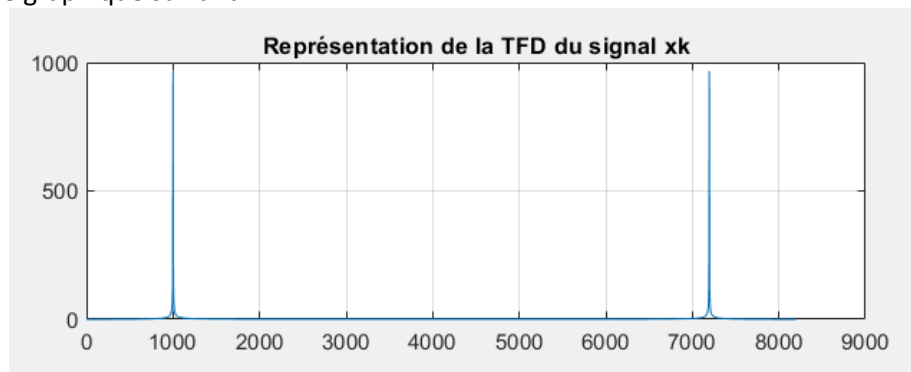


On remarque que le signal est très probablement sinusoïdal.

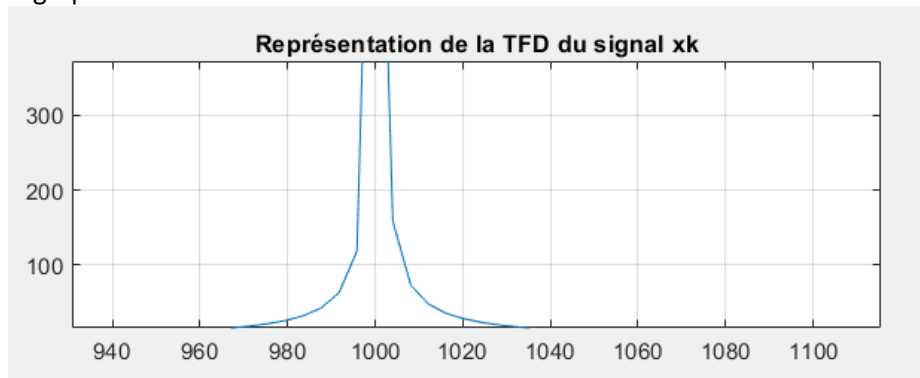
Afin de calculer et de représenter le module de la TFD  $X_n$  de  $x_k$ , on utilise le code suivant :

```
f=0 : (Fs/(N-1)) :Fs; %création du vecteur fréquence
subplot(2,1,2);
Xn=fft(xk);
plot(f,abs(Xn));
title('Représentation de la TFD du signal xk')
grid on;
```

On obtient le graphique suivant :



On remarque que l'allure de cette TDF est similaire à celle d'un sinus, en zoomant sur l'une des raies, on observe le graphe suivant :



On remarque que la raie ne comporte pas de lobes secondaires, on ne peut pas savoir si un autre signal que le sinus est présent dans le signal  $x_k$ .

## 2.Amélioration de la précision fréquentielle

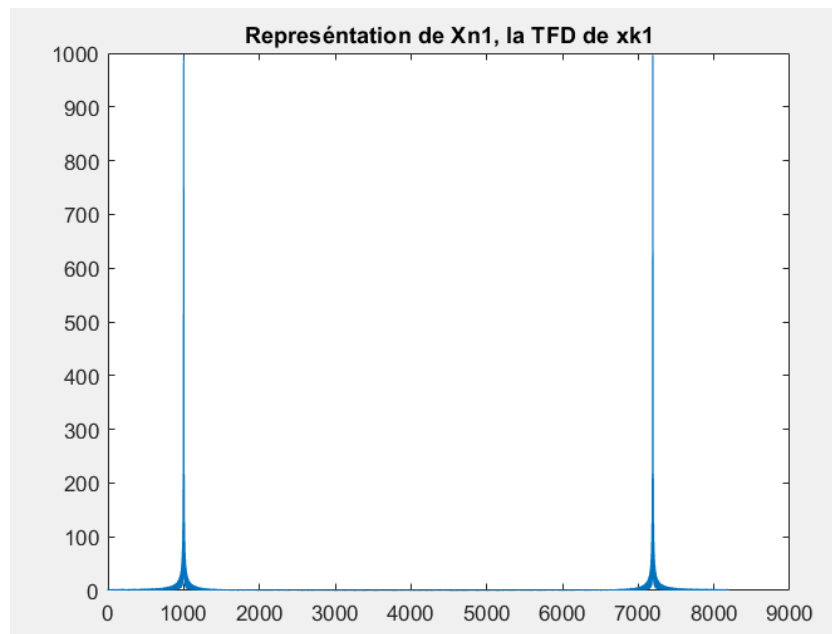
On concatène  $M \times N$  zéros à  $x_k$  afin de construire  $x_{k1}$  grâce au code suivant :

```
M=10;  
xk1 = [xk zeros(1,M*N)]; %On concatène M*N zéros à xk
```

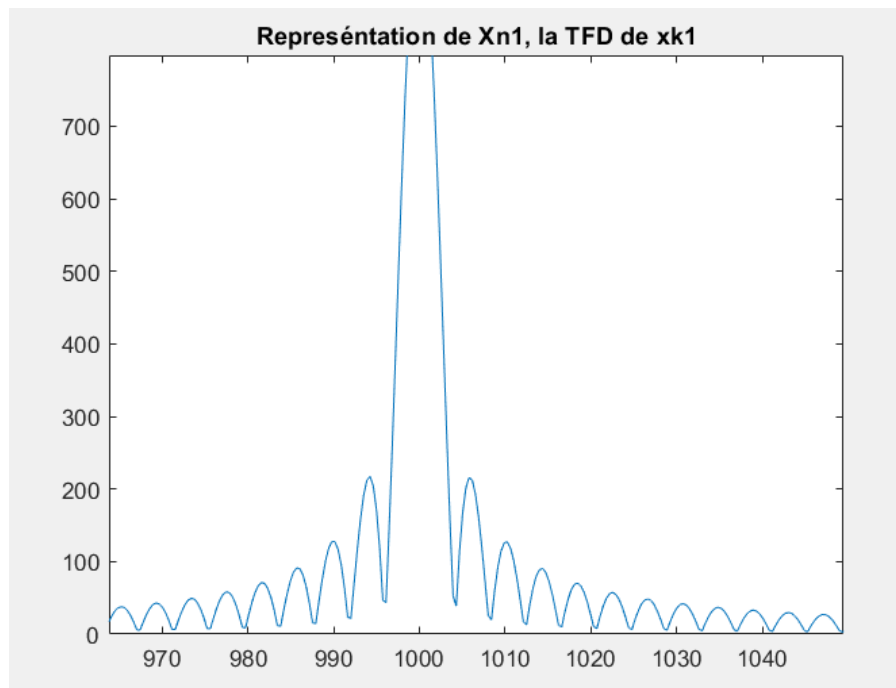
On calcule sa TFD  $X_{n1}$  puis on représente son module :

```
Xn1=fft(xk1); %On calcule la transformée de Fourier de xk1  
figure(2);  
title('Représentation de Xn1, la TFD de xk1')  
plot(linspace(0,Fs,length(Xn1)),abs(Xn1));% On trace la courbe de Xn1
```

Ce qui nous donne la courbe suivante :



A première vue, il ne semble pas y avoir de changements entre  $X_n$  et  $X_{n1}$ , on remarque bien les deux raies autour de 1000Hz et 7200 Hz. Cependant, si on zoome sur le premier pic, on observe :



On remarque des lobbes secondaires, ces lobbes secondaires représentent des sinus cardinaux et sont dû à l'ajout des zéros dans  $x_k$ .

Grâce à la concaténation, nous avons amélioré la précision fréquentielle du signal.

Pour l'instant, on ne peut pas en déduire une forme analytique du signal car il est possible qu'un signal de fréquence proche que celui du sinus soit « caché » dans les lobbes secondaires.

### 3. Intérêt d'une fenêtre de pondération

On crée le signal  $x_{kh}$  en pondérant par une fenêtre de Hamming :

```
w = window(@hamming, length(xk)); %Pondération avec une fenêtre de Hamming
xkh = xk.*w.';
```

On calcule la TFD  $X_{nh}$  du signal  $x_{kh}$  :

```
%Calcul de la TFD
Xnh = fft(xkh, 2048);
```

On concatène  $M \cdot N$  zéros à  $x_{kh}$ , ce qui crée  $x_{kh1}$ :

```
xkh1 = [xkh zeros(1, M*N)]; %On concatène M*N zéros à xkh
```

On calcule la TFD  $X_{nh1}$  du signal  $x_{kh1}$  :

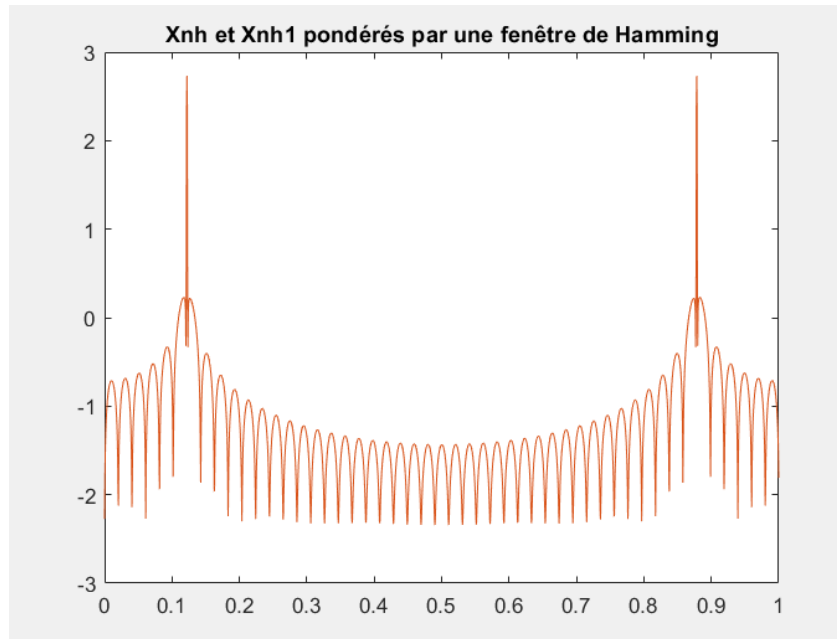
```
%Calcul de la TFD
Xnh1 = fft(xkh1, 2048);
```

Ici, afin de bien étalonner la TFD dans la fenêtre de Hamming, on choisit 2048, ce qui correspond à une puissance de 2.

On trace ensuite  $X_{nh}$  et  $X_{nh1}$  sur le même graphique :

```
%tracés
figure(3);
plot(linspace(0,1,2048), log10(abs(Xnh)), linspace(0,1,2048), log10(abs(Xnh1)));
title('Xnh et Xnh1 pondérés par une fenêtre de Hamming');
```

D'où le graphique suivant :



On remarque ici que les deux courbes se superposent, elles sont identiques.

Ceci est dû au fait que dans une fenêtre rectangulaire, les lobes sont grands, ce qui explique que lorsque l'on ajoute des zéros en concaténant, la précision augmente. Ce qui n'est pas le cas de la fenêtre de Hamming.

Nous allons maintenant étudier la différence entre une fenêtre de Hamming et une fenêtre de Blackman et de Hanning :

```
%fenêtre de hanning et Blackman
w2 = window(@hanning, length(xk));
xkh2 = xk.*w2.;
```

```
w3 = window(@blackman, length(xk));
xkh3 = xk.*w3.;
```

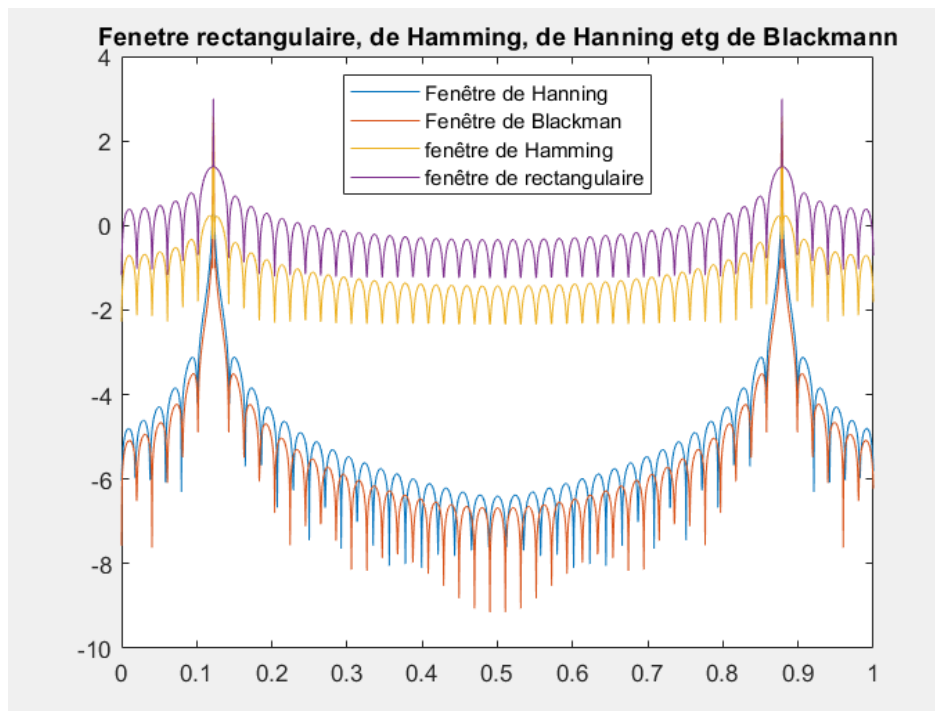
```
%Calcul des TFD
Xnh2 = fft(xkh2, 2048);
```

```
Xnh3 = fft(xkh3, 2048);
```

```
%tracés
figure(4);
plot(linspace(0,1,2048), log10(abs(Xnh2)), linspace(0,1,2048), log10(abs(Xnh3)),
linspace(0,1,2048), log10(abs(Xnh)),linspace(0,1,2048), log10(abs(Xn1)) );
legend('Fenêtre de Hanning','Fenêtre de Blackman','fenêtre de Hamming','fenêtre de
rectangulaire','Location','north')
title('Fenetre rectangulaire, de Hamming, de Hanning et de Blackmann');
```



D'où le graphique suivant :



On remarque qu'il n'y a pas de raie supplémentaire dans ce graphe, il n'y a pas de signal autre que le signal sinusoïdal. Il est désormais possible de trouver une forme analytique du signal qui sera de la forme :

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t)$$

$A$  correspond à l'amplitude maximale du signal, et  $f_0$  correspond à la fréquence fondamentale, qui est visible sur les graphiques où l'on calcule la transformée de Fourier du signal.

On aura donc  $f_0 \approx 1000 \text{ Hz}$ .

$A$  est aussi visible tel que  $A \approx 1$ .

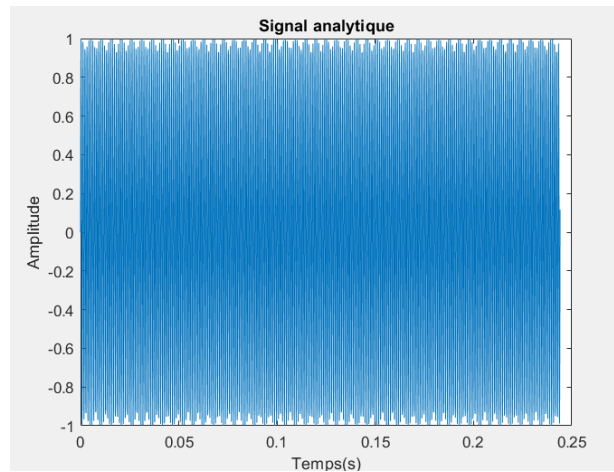
Nous avons déterminé une forme analytique du signal tel que :

$$x(t) = \sin(2\pi * 1000 * t)$$

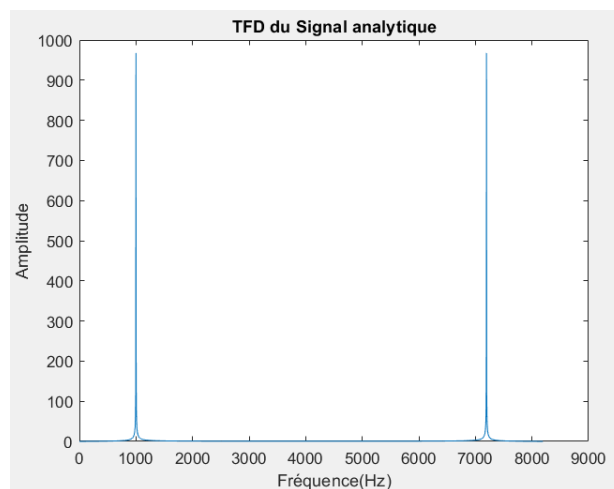
Afin de vérifier ce résultat et de le comparer au signal étudié, nous traçons sur le même graphe, le signal qui était inconnu et la forme analytique que l'on a déterminé :

```
%Vérification
f0=1000;%frequence fondamentale
t=0 :(1/Fs) :(N-1)*(1/Fs);%vecteur temps
x=sin(2*pi*f0*t);%signal analytique
%on trace
figure(5)
plot(t,x)%signal analytique
title('Signal analytique')
xlabel('Temps(s)')
ylabel('Amplitude')
X=fft(x)
figure(6)
plot(f,abs(X))% TF du signal analytique
title('TFD du Signal analytique')
xlabel('Fréquence(Hz)')
ylabel('Amplitude')
```

Nous obtenons ainsi deux graphiques, un qui représente le signal analytique et l'autre, sa TFD :



Ce graphique est similaire à celui du signal inconnu que nous avons étudié au début.



La TFD du signal analytique est également la même que celle du signal inconnu, nous avons donc trouvé le signal analytique correspondant à un signal qui à la base nous était inconnu.

## Exercice 2 : Analyse spectrale d'un signal par la TFD

Dans ce cas, nous allons utiliser le même code qui pour le premier exercice, seul le signal inconnu change.

Voici le code complet que l'on utilise pour afficher les graphes :

```
"Exercice 2: Analyse spectrale d'un signal par la TFD";
clear all; clc; close all;

load('signal_inconnu2.mat'); %charge le fichier inconnu
whos("-file", 'signal_inconnu2.mat');
Fs
xk
n=0 :1 :1999 ;%on va afficher 200 valeurs du signal
size(n);
N=2000;
subplot(2,1,1);
plot(n,xk) ;
title('Représentation du signal xk')
%Génération du vecteur fréquence
f=0 :(Fs/(N-1)) :Fs;
subplot(2,1,2);
Xn=fft(xk);
plot(f,2/N*abs(Xn));
title('Représentation de la TFD du signal xk')
grid on;

%2. Amélioration de la précision fréquentielle (% lobbes secondaires sin cardinal)

M=10;
xk1 = [xk zeros(1,M*N)]; %On concatène M*N zéros à xk
Xn1=fft(xk1,2048); %On calcule la transformée de Fourier de xk1
figure(2);
plot(linspace(0,Fs,length(Xn1)),abs(Xn1));% On trace la courbe de Xn1
title('Représentation de Xn1, la TFD de xk1')

%3.Intérêt d'une fenêtre de pondération
w = window(@hamming, length(xk));%Pondération avec une fenêtre de Hamming
xkh = xk.*w.';

%Calcul de la TFD
Xnh = fft(xkh, 2048);

xkh1 = [xkh zeros(1,M*N)];%On concatène M*N zéros à xkh
Xnh1=fft(xkh1, 2048);

%tracés
figure(3);
plot(linspace(0,1,2048), log10(abs(Xnh)), linspace(0,1,2048), log10(abs(Xnh1)));
title('Xnh et Xnh1 pondérés par une fenêtre de Hamming');

%fenêtre de hanning et Blackman
w2 = window(@hanning, length(xk));
xkh2 = xk.*w2.';

w3 = window(@blackman, length(xk));
```

```

xkh3 = xk.*w3.';

%Calcul des TFD
Xnh2 = fft(xkh2, 2048);

Xnh3 = fft(xkh3, 2048);

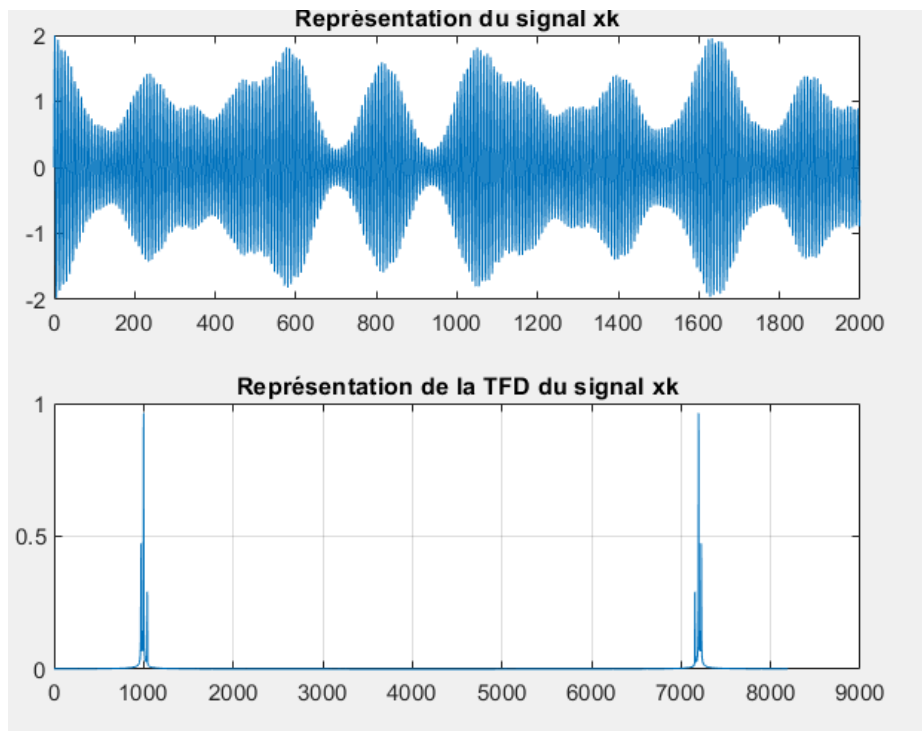
%tracés
figure(4);
plot(linspace(0,1,2048), log10(abs(Xnh2)), linspace(0,1,2048), log10(abs(Xnh3)),
linspace(0,1,2048), log10(abs(Xnh)),linspace(0,1,2048), log10(abs(Xn1)) );
legend('Fenêtre de Hanning','Fenêtre de Blackman','fenêtre de Hamming','fenêtre de
rectangulaire','Location','north')
title('Fenetre rectangulaire, de Hamming, de Hanning et de Blackmann');

%Vérification
t=0 :(1/Fs) :(N-1)*(1/Fs);%vecteur temps
%On lit les amplitudes
A1 = 0.473178;
A2 = 0.145188;
A3 = 0.963602;
A4 = 0.291654;
%On lit les fréquences
f1 = 968;
f2 = 984;
f3 = 1000;
f4 = 1040;
x1 = A1*sin(2*pi*f1*t);
x2 = A2*sin(2*pi*f2*t);
x3 = A3*sin(2*pi*f3*t);
x4 = A4*sin(2*pi*f4*t);
x = x1+x2+x3+x4%Signal analytique

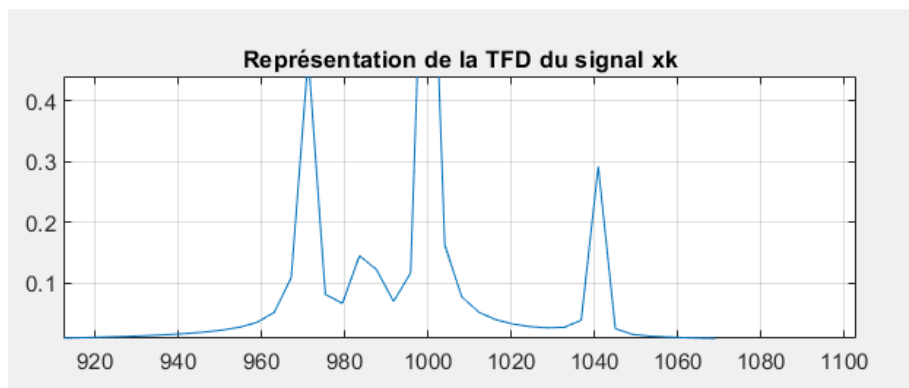
figure(7);
plot(n,x);
title('Signal analytique')
xlabel('Temps(s)')
ylabel('Amplitude')
figure(8);
X=fft(x)
plot(f,abs(X))
title('Signal analytique')
xlabel('Frequence(Hz)')
ylabel('Amplitude')

```

Nous obtenons les graphes suivant :

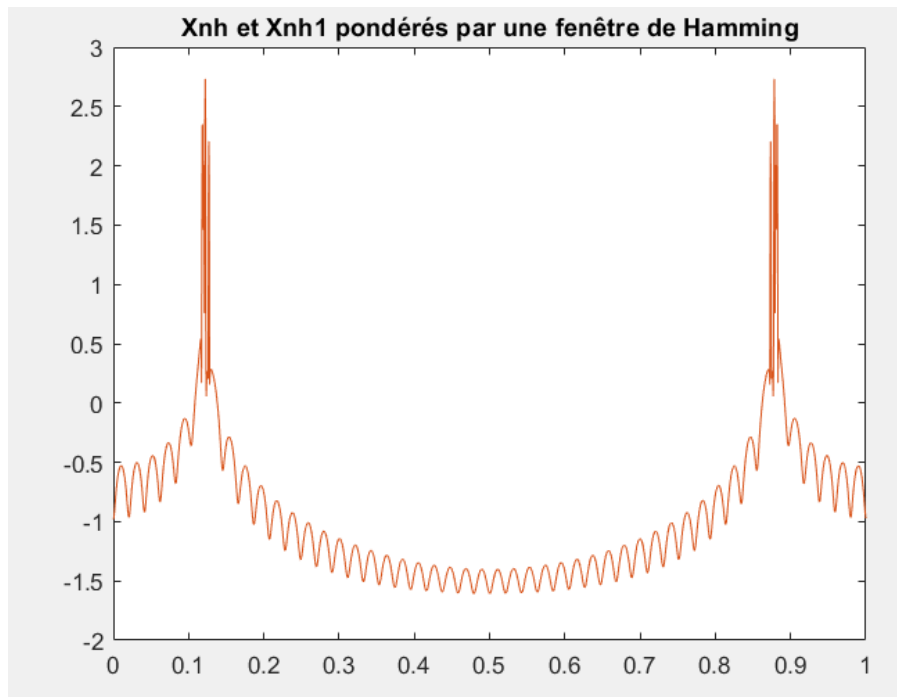


Voici la représentation du deuxième signal inconnu, on remarque une courbe qui semble être une somme de signaux sinusoïdaux. Sa transformée de Fourier présente deux raies, ce qui est caractéristique des signaux sinusoïdaux. En zoomant sur le graphique, nous voyons :



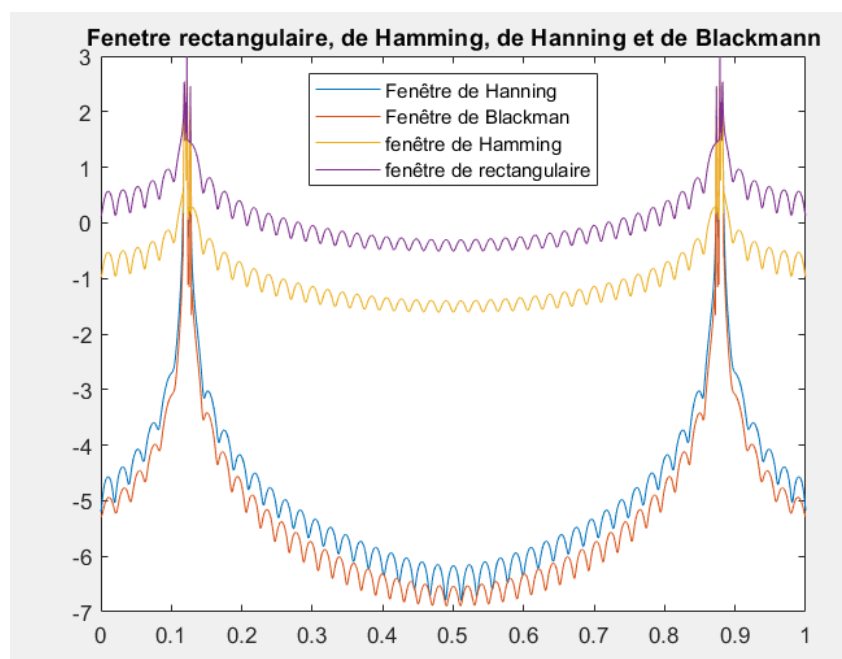
On remarque qu'il n'y a pas une seule raie mais qu'il y en a 4, ces raies sont proches en fréquences, ce qui explique qu'à première vue, nous ne pouvons pas les détecter.

Voici, la transformée de Fourier du signal inconnu ainsi que celle du signal inconnu auquel on a concaténé  $M \cdot N$  zéros, le tout pondéré par une fenêtre de Hamming :



On remarque ici que les deux courbes se superposent, elles sont identiques. Ceci est dû au fait que dans une fenêtre rectangulaire, les lobes sont grands, ce qui explique que lorsque l'on ajoute des zéros en concaténant, la précision augmente. Ce qui n'est pas le cas de la fenêtre de Hamming.

Nous allons maintenant étudier la différence entre une fenêtre de Hamming et une fenêtre de Blackman et de Hanning grâce au graphique suivant :



On remarque qu'il n'y a pas de raie supplémentaire dans ce graphe, il n'y a pas de signal autre que le signal sinusoïdal. Il est désormais possible de trouver une forme analytique du signal qui sera une somme de 4 signaux sinusoïdaux de la forme :

$$x(t) = A_1 \sin(2\pi f_1 t) + A_2 \sin(2\pi f_2 t) + A_3 \sin(2\pi f_3 t) + A_4 \sin(2\pi f_4 t)$$

Les valeurs de des amplitudes ainsi que des fréquences seront lues sur le graphiques de la transformée de Fourier.

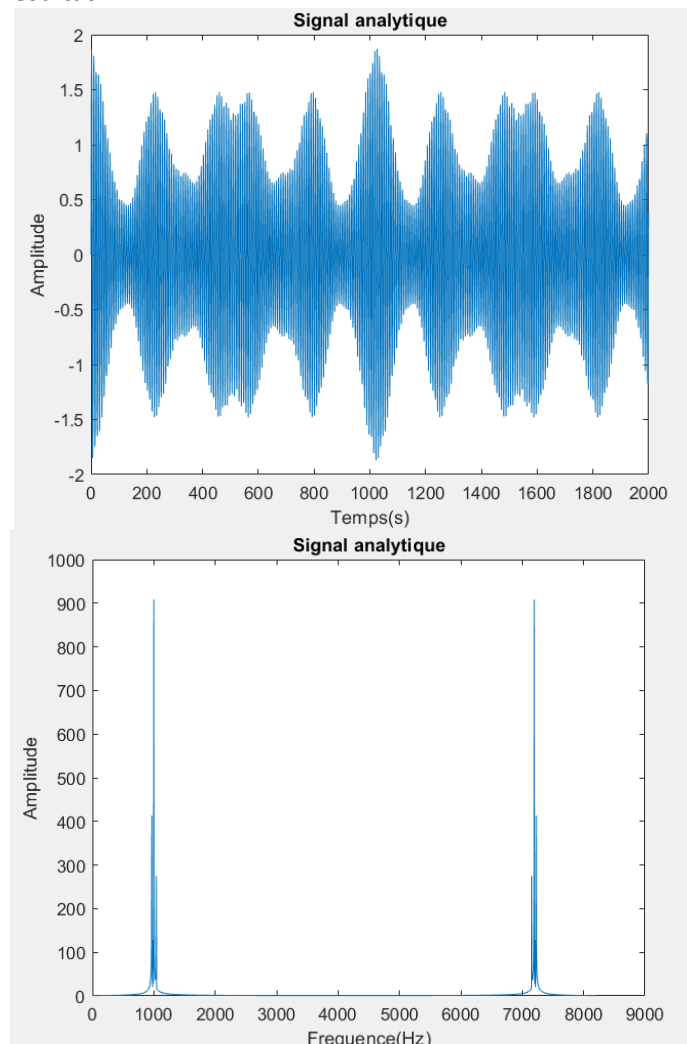
Ce qui nous donne :

- $A_1 = 0.473178$
- $A_2 = 0.145188$
- $A_3 = 0.963602$
- $A_4 = 0.291654$

Et :

- $f_1 = 968$
- $f_2 = 984$
- $f_3 = 1000$
- $f_4 = 1040$

On trace donc le signal  $x(t)$  dont la forme est exprimée ci-dessus ainsi que sa transformée de Fourier afin de vérifier notre résultat :



Les courbes obtenues sont similaires à celles du signal inconnu, on a donc trouvé la forme analytique du signal qui de base, nous était inconnu.

## CONSLUSION

Grâce à ce TP, nous avons appris à utiliser les outils de Matlab tels que la Transformée de Fourier Discrète ainsi que d'autres outils comme les fenêtrage de Hamming, de Hanning et de Blackman afin de déterminer la forme analytique de signaux inconnus.