Узкополосная частотная модуляция

Narrow Band Frequency Modulation

(NBFM)

Для запуска скриптов необходимо корневую папку репозитория сделать рабочей папкой Matlab!

1. Введение

В FM Transitter Basics были рассмотрены оснывные принципы частотной модуляции и введены такие важные понятия как девиация и индекс модуляции. Было показано, что при малых индексах модуляции спектр сигнала состоит из несущей и бововых полос и чем-то напоминает спектр AM-сигнала. Такой случай называется узкополосной частотной модуляцией (Narrow Band Frequency Modulation - NBFM). Рассмотрим NBFM подробнее.

2. Аппроксимации при NBFM

Начнем с наиболее простого случая однотональной модуляции.Информационное сообщение представляет из себя гармонический сигнал вида:

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t),$$

где A_m - амплитуда тона, f_m - частота в герцах.

Напомним, что в общем случае частотно-модулированный сигнал можно записать в виде:

$$s(t) = A_c \cdot \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau\right) \qquad (1),$$

где A_c - амплитуда несущей, f_c - частота несущей, K_f - чувствительность модулятора.

Подставим в это выражение в уравнение для однотонального сообщения и получим:

$$s(t) = A_c \cdot \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} A_m \cos(2\pi f_m t) \cdot d\tau\right).$$

После интегрирования получим:

$$s(t) = A_c \cdot \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi K_f A_m}{2\pi f_m} \cdot \sin(2\pi f_m t)\right) = A_c \cdot \cos\left(2\pi f_c t + \frac{K_f A_m}{f_m} \cdot \sin(2\pi f_m t)\right) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t + \beta \cdot \sin(2\pi f_m t)),$$

где $\beta = \frac{K_f A_m}{f_m}$ - индекс модуляции.

Применим к найденному уравнению формулу суммы углов для косинуса. Тогда модулированный сигнал примет вид:

$$s(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t + \beta \cdot \sin(2\pi f_m t)) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot \cos(\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)) - A_c \cdot \sin(2\pi f_c t) \cdot \sin(\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)).$$

Далее воспользуемся условием, что модуляция узкополосная, то есть, что $\beta << 1$. Так как значение синуса и косинуса ограничено диапазоном от -1 до 1, получаем что $|\beta \cdot \sin(2\pi f_m t)| << 1$. Это позволяет нам воспользоваться аппроксимацией для гармонических функций при малых углах $x << 1$: $\cos(x) \approx 1$ и $\sin(x) \approx x$. Тогда уравнение для узкополосного сигнала упростится:

$$s(t) = A_c \cdot \cos(2\pi f_c t) \cdot 1 - A_c \cdot \sin(2\pi f_c t) \cdot \beta \cdot \sin(2\pi f_m t).$$

Наконец, воспользуемся формулой произведения синусов и получим окончательный результат:

$$s(t) = A_c \cdot \left[\cos(2\pi f_c t) + \frac{\beta}{2}\cos(2\pi (f_c + f_m)t) - \frac{\beta}{2}\cos(2\pi (f_c - f_m)t)\right].$$

Таким образом, при однотональной узкополосной частотной модуляции сигнал будет состоять из трех гармоник: несущей и двух боковых тонов на частотах $f_c + f_m$ и $f_c - f_m$. Именно этот результат был получен в FM Transitter Basics при однотональной модуляции с низким значением β.

Рассмотрим теперь общий случай NBFM сигнала, который описывается формулой (1). Применим к нему правило суммы углов косинуса и получим:

$$s(t) = A_c \cdot \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau\right) =$$

$$= A_c \cdot \left[\cos(2\pi f_c t) \cdot \cos\left(2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau\right) - \sin(2\pi f_c t) \cdot \sin\left(2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau\right)\right].$$

Заметим, что чувствительность приемника связана с индексом модуляции следующим соотношением:

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{K_f \cdot \max|m(t)|}{f_m},$$

где f_m - максимальная частота в спектре информационного сообщения, $\max|m(t)|$ - максимальная амплитуда информационного сообщения, Δf - девиация. Выразим K_f и получим:

$$K_f = \beta \cdot \frac{f_m}{\max|m(t)|}.$$

То есть, при заданном информационном сообщении значения $\max|m(t)|$ и f_m являются константами, и чувствительность модулятора K_f прямо пропрорциональна индексу модуляции β. Уменьшая β, мы уменьшаем значение K_f, а значит и величину произведения $2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau$. При достаточно низких значениях β мы получим, что

$$\left|2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau\right| << 1.$$

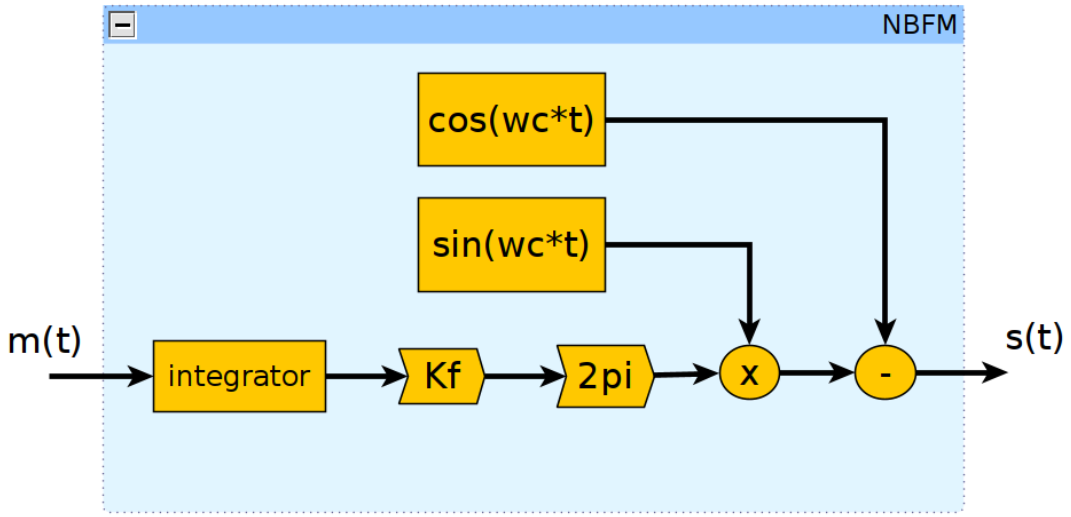
Тогда мы можем воспользоваться аппроксимацией малых углов для синуса и косинуса:

$$s(t) = A_c \cdot \left[\cos(2\pi f_c t) \cdot \cos\left(2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau \right) - \sin(2\pi f_c t) \cdot \sin\left(2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau \right) \right] =$$

$$= A_c \cdot \left[\cos(2\pi f_c t) - \sin(2\pi f_c t) \cdot 2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau \right].$$

Отсюда видно, как формируется NBFM сигнал. Он состоит из произведения интеграла от информационного сообщения и несущей $(\sin(2\pi f_c t))$, к которому добавляется несущая сдвинутая по фазе на 90 градусов $(\cos(2\pi f_c t))$. В результате получим, что сигнал будет состоят из тона на частоте несущей $A_c \cdot \cos(2\pi f_c t)$, и двух боковых полос: $\sin(2\pi f_c t) \cdot 2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau$.

Полученные результаты также позволяют предложить схему узкополосного частотного модулятора:



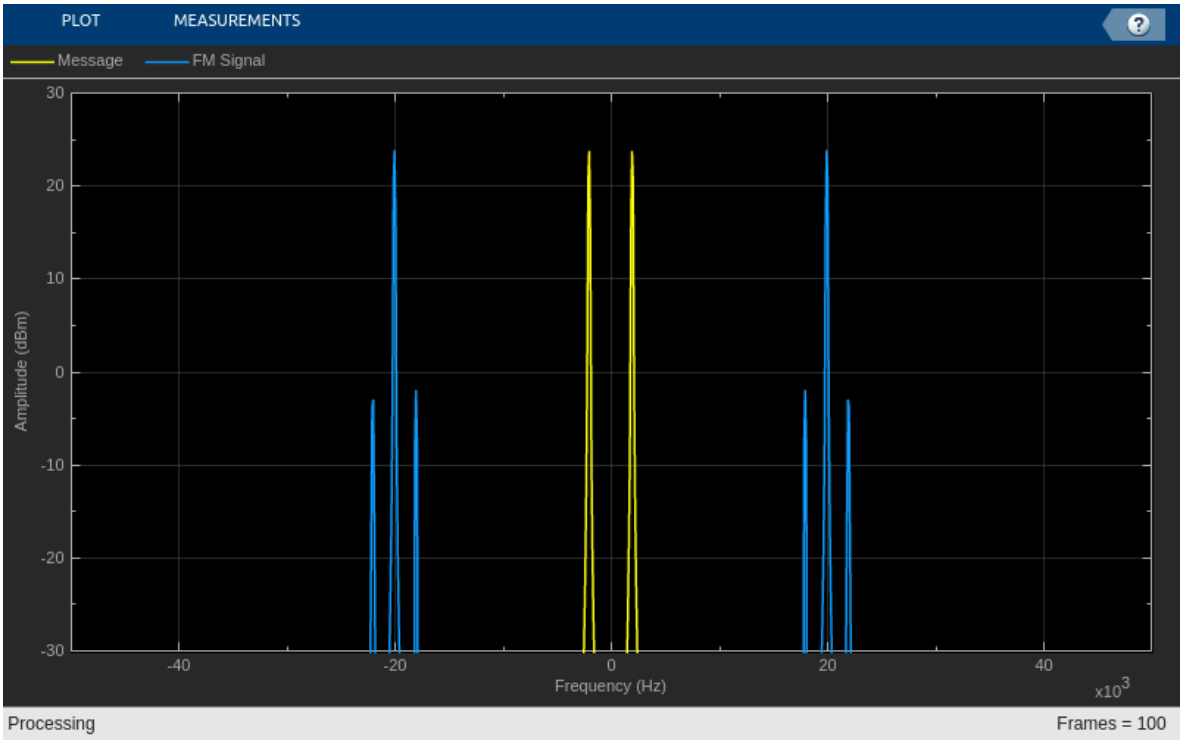
3. Однотональная узкополосная модуляция

Рассмотрим схему узкополосного частотного модулятора на примере однотонального сообщения. Скрипт, реализующий модулятор и позволяющий увидеть спектр сигнала представлен ниже:

```
clc; clear; close all;

FrameSize = 1011;       % размер обрабатываемой за один раз пачки данных
Fs = 100e3;             % частота дискретизации (Hz)
Fc = 20e3;              % частота несущей (Hz)
Am = 1;                 % амплитуда тонального сообщения
Fm = 2e3;               % частота тонального сообщения (Hz)
ModIndex = 0.1;         % индекс модуляции

% вычисление чувствительности модулятора
Kf = ModIndex * Fm / Am;

% генератор однотонального сигнала
Message = dsp.SineWave(...
    'SampleRate',Fs,...
    'SamplesPerFrame',FrameSize,...
```

```
    'Frequency', Fm,...
    'Amplitude', Am ...
    );

% генератор несущей
Carrier = dsp.SineWave(...
    'SampleRate',Fs,...
    'SamplesPerFrame',FrameSize,...
    'Frequency', [Fc Fc],...
    'Amplitude', [1 1], ...
    'PhaseOffset', [0 pi/2] ...
    );

% объект для вычисления спектра
SpecEstimator = dsp.SpectrumEstimator(...
    'PowerUnits','dBm', ...
    'FrequencyRange', 'centered', ...
    'SampleRate', Fs ...
    );

% объект для отрисовки графиков
Plotter = dsp.ArrayPlot(...
    'PlotType','Line', ...
    'XOffset', -Fs/2, ...
    'YLimits', [-30, 30], ...
    'XLabel', 'Frequency (Hz)', ...
    'YLabel', 'Amplitude (dBm)', ...
    'ChannelNames', {'Message', 'FM Signal'}, ...
    'SampleIncrement', Fs/FrameSize ...
    );

% начальное значение интегратора
AccumInitValue = 0;

% запуск симуляции
for i = 1:100
    % формирование тонального сигнала
    MessageData = Message();

    % интегрирование сообщения
    MessageIntegral = AccumInitValue + 1/Fs * cumsum(MessageData);

    % обновление начального значения интегратора
    AccumInitValue = MessageIntegral(end);

    % получание несущей
    CarrierWave = Carrier();
    SinWave = CarrierWave(:,1);
    CosWave = CarrierWave(:,2);

    % умножение на несущую и добавление несущей сдвинутой по фазу
    FmSignal = CosWave - 2*pi*Kf * SinWave.*MessageIntegral;

    % вычисление спектров
```

```
    Spectrums = SpecEstimator([MessageData, FmSignal]);

    % вывод результатов на график
    Plotter(Spectrums)

    % задержка в 0.1 секунды для лучшей визуализации
    pause(0.1)
end
```



На спектрограмме можно увидеть, что модулированный сигнал действительно состоит их несущей и двух боковых тонов.

4. Коррекция побочной амплитудной модуляции

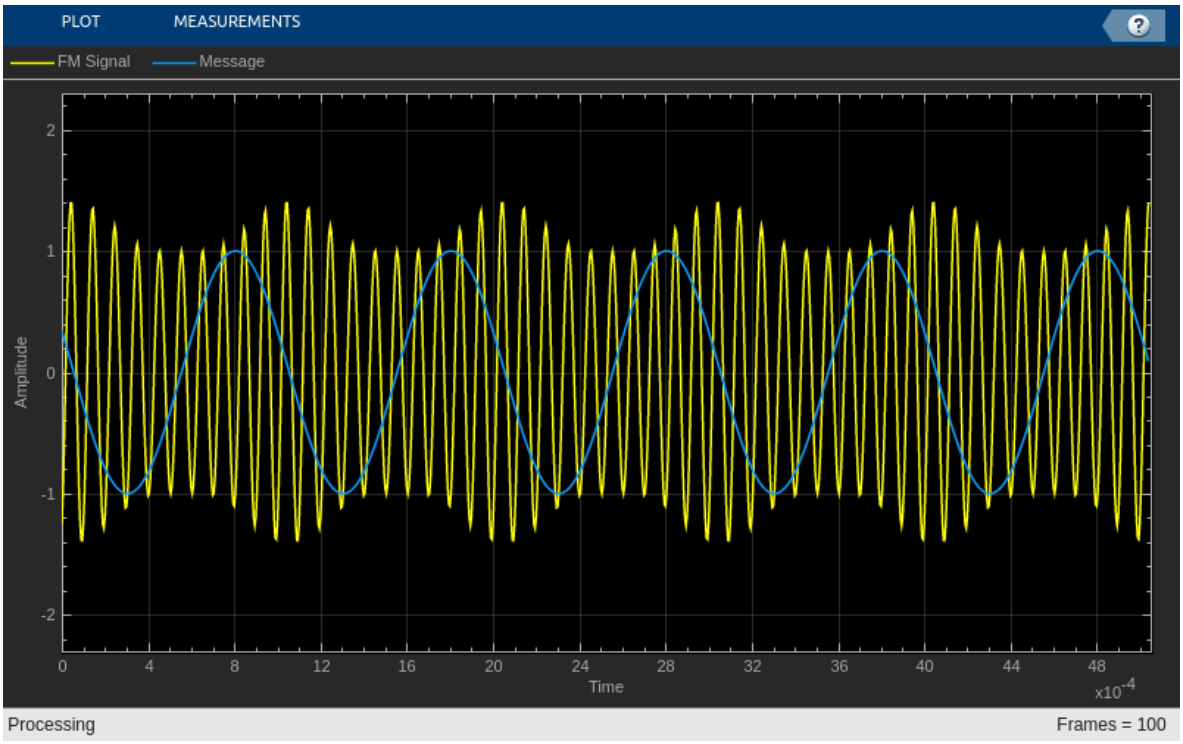
Так как в узкополосном частотном модуляторе используется аппроксимация гармонических функций при условии малого угла, полученный сигнал будет иметь некоторые искажения. Например, амплитуда сигнала может не быть строго постоянной, и в сигнале будет присутствовать побочная амплитудная модуляция. Причем, чем сильнее будут отклонения от предположения о малом угле, тем хуже будет выполняться аппроксимация, и тем сильнее будет проявляться побочная амплитудная модуляция.

Ниже представлен скрипт, выполняющий узкополосную модуляцию однотональным сигналом с индексом модуляции, равным 0.5.

```
clc; clear; close all;

FrameSize = 1011;       % размер обрабатываемой за один раз пачки данных
Fs = 200e3;             % частота дискретизации (Hz)
Fc = 10e3;              % частота несущей (Hz)
Am = 1;                 % амплитуда тонального сообщения
Fm = 1e3;               % частота тонального сообщения (Hz)
```

```
ModIndex = 0.5;         % индекс модуляции

% вычисление чувствительности модулятора
Kf = ModIndex * Fm / Am;

% генератор однотонального сигнала
Message = dsp.SineWave(...
    'SampleRate',Fs,...
    'SamplesPerFrame',FrameSize,...
    'Frequency', Fm,...
    'Amplitude', Am ...
    );

% генератор несущей
Carrier = dsp.SineWave(...
    'SampleRate',Fs,...
    'SamplesPerFrame',FrameSize,...
    'Frequency', [Fc Fc],...
    'Amplitude', [1 1], ...
    'PhaseOffset', [0 pi/2] ...
    );

% объект для отрисовки графиков
Plotter = dsp.ArrayPlot(...
    'PlotType', 'Line', ...
    'YLimits', [-2.3, 2.3], ...
    'SampleIncrement', 1/Fs, ...
    'XLabel', 'Time', ...
    'YLabel', 'Amplitude', ...
    'ChannelNames', {'FM Signal', 'Message'} ...
    );

% начальное значение интегратора
AccumInitValue = 0;

% запуск симуляции
for i = 1:100
    % формирование тонального сигнала
    MessageData = Message();

    % интегрирование сообщения
    MessageIntegral = AccumInitValue + 1/Fs * cumsum(MessageData);

    % обновление начального значения интегратора
    AccumInitValue = MessageIntegral(end);

    % получание несущей
    CarrierWave = Carrier();
    SinWave = CarrierWave(:,1);
    CosWave = CarrierWave(:,2);

    % умножение на несущую и добавление несущей сдвинутой по фазу
    FmSignal = CosWave - 2*pi*Kf * SinWave.*MessageIntegral;
```

```
    % вывод результатов на график
    Plotter([FmSignal, MessageData])

    % задержка в 0.1 секунды для лучшей визуализации
    pause(0.1)
end
```



На временной диаграмме можно увидеть появление побочной амплитудной модуляции. Непостоянство амплитуды сигнала может вносить искажения в восстановленное сообщения при демодуляции, поэтому с этим явлением нужно бороться.

Один из способов решения данной проблемы заключается в использовании ограничителя и полосового фильтра после NBFM модулятора. Рассмотрим, как этом работает. Запишем еще раз, как выглядит частотно-модулированный сигнал в общем виде:

$$s(t) = A(t) \cdot \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau\right) = A(t) \cdot \cos(\theta(t)),$$

где $A(t)$ - изменяющаяся со временем из-за побочной модуляции амплитуда сигнала.

Пропустим данный сигнал, через огриничитель (limiter), принцип работы которого описывается следующим выражением:

$$s_{\text{lim}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } s(t) > 0 \\ -1 & \text{при } s(t) < 0 \end{cases}.$$

То есть, выходной сигнал будет равен единице, если входной сигнал больше нуля, и минус единице, если входной сигнал отрицательный. Амплитуда сигнала $A(t)$ всегда больше нуля, поэтому выход ограничителя будет зависеть только от знака косинуса. Можем переписать уравнение ограничителя в виде:

$$s_{\text{lim}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } \cos(\theta(t)) > 0 \\ -1 & \text{при } \cos(\theta(t)) < 0 \end{cases}.$$

Таким образом, на выходе ограничителя получим прямоугольный сигнал, амплитуда которого равна 1 или -1, и частота которого совпадает с частотой модулированного сигнала. Если разложить данный прямоугольный сигнал в ряд Тейлора, то получим:

$$s_{\text{lim}}(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos(\theta(t)) - \frac{1}{3}\cos(3 \cdot \theta(t)) + \frac{1}{5}\cos(5 \cdot \theta(t)) + \ldots \right),$$

где $\theta(t) = 2\pi f_c t + 2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau.$

Отсюда видим, что выход ограничителя будет состоять из суммы частотно-модулированных сигналов, амплитуды которых постоянны. Из этой суммы нам требуется только первое слагаемое, которые можно выделить с помощью полосового фильтра. Сигнал на выходе фильтра будет иметь вид:

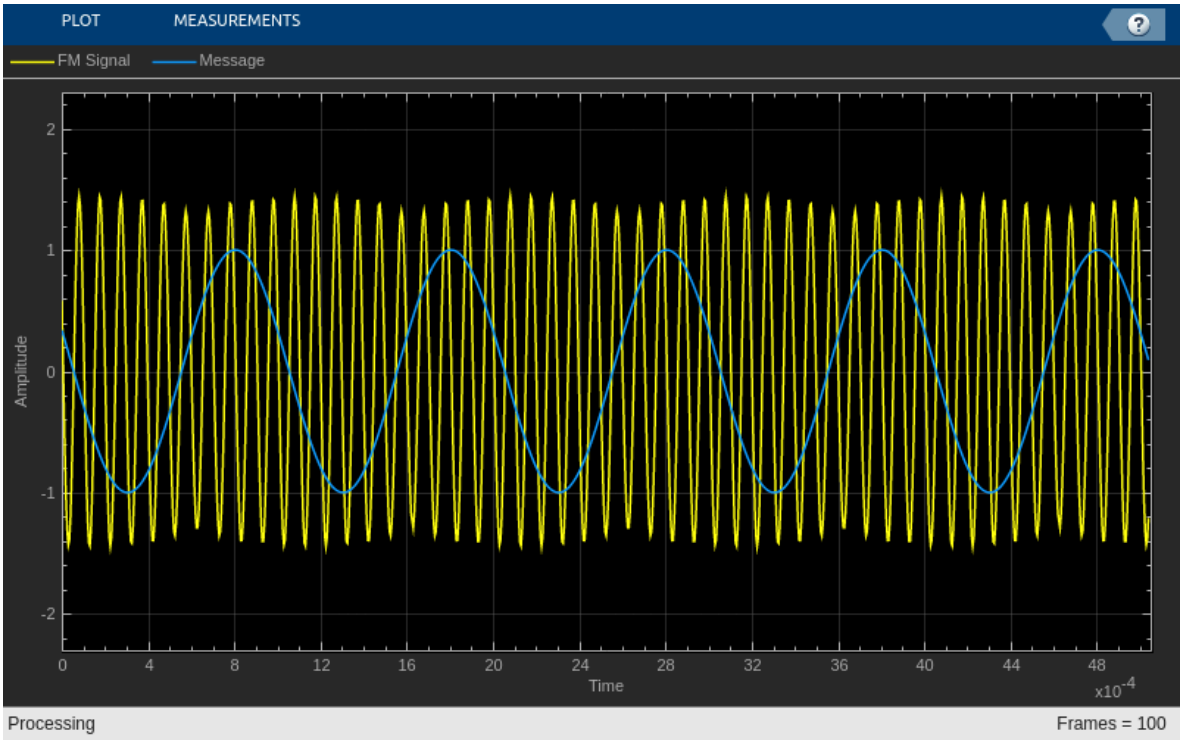
$$s_{\text{fllter}}(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \cos(\theta(t)) = \frac{4}{\pi} \cdot \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau \right).$$

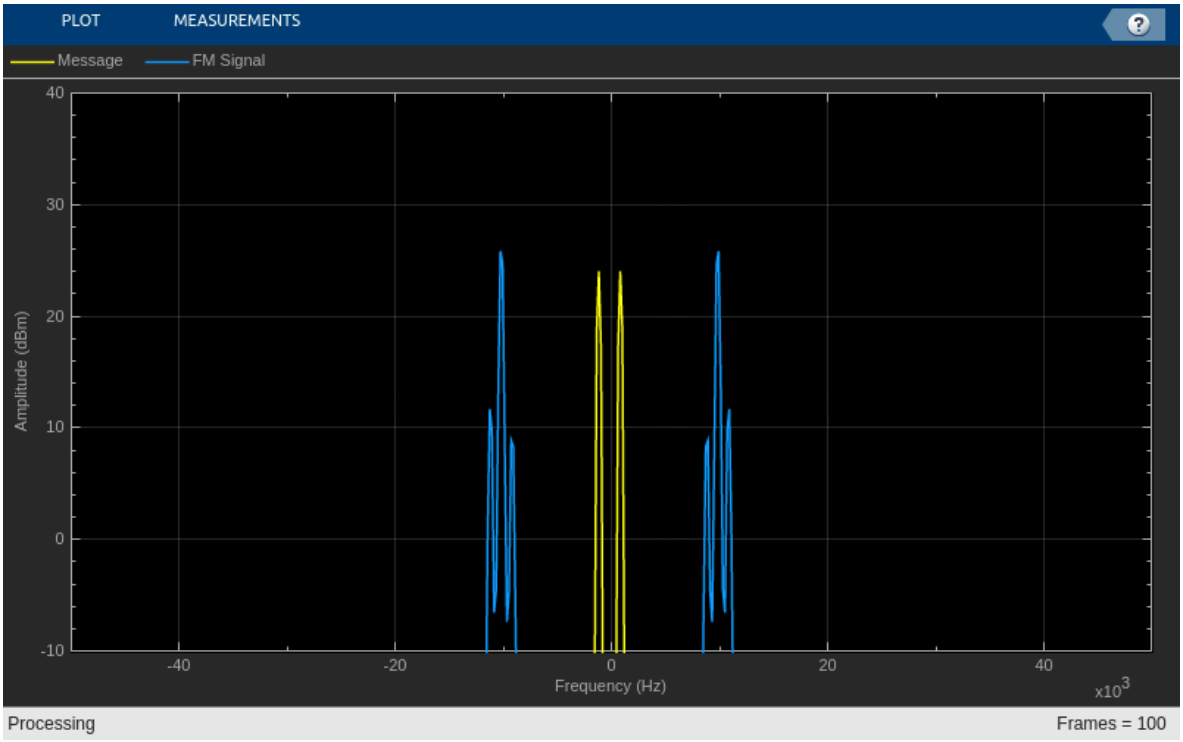
Таким образом, с помощью ограничителя и фильтра можно избавиться от побочной амплитудной модуляции. Скрипт, выполняющий описанные ранее преобразования представлен ниже:

```
clc; clear; close all;
addpath('matlab/modulation');

FrameSize = 1011;       % размер обрабатываемой за один раз пачки данных
Fs = 200e3;             % частота дискретизации (Hz)
Fc = 10e3;              % частота несущей (Hz)
Am = 1;                 % амплитуда тонального сообщения
Fm = 1e3;               % частота тонального сообщения (Hz)
ModIndex = 0.5;         % индекс модуляции

% вычисление чувствительности модулятора
Kf = ModIndex * Fm / Am;

% генератор однотонального сигнала
Message = dsp.SineWave(...
    'SampleRate',Fs,...
    'SamplesPerFrame',FrameSize,...
    'Frequency', Fm,...
    'Amplitude', Am ...
    );

% генератор несущей
Carrier = dsp.SineWave(...
    'SampleRate',Fs,...
    'SamplesPerFrame',FrameSize,...
```

```
    'Frequency', [Fc Fc],...
    'Amplitude', [1 1], ...
    'PhaseOffset', [0 pi/2] ...
    );

% расчет коэффициентов полосового фильтра
H = Limiter_Bandpass_Filter_Tone();
BandpassFIR = dsp.FIRFilter(H.Numerator);

% объект для вычисления спектра
SpecEstimator = dsp.SpectrumEstimator(...
    'PowerUnits','dBm', ...
    'FrequencyRange', 'centered', ...
    'SampleRate', Fs ...
    );

% объекты для отрисовки графиков
PlotterSpectrum = dsp.ArrayPlot(...
    'PlotType','Line', ...
    'XOffset', -Fs/4, ...
    'YLimits', [-10, 40], ...
    'XLabel', 'Frequency (Hz)', ...
    'YLabel', 'Amplitude (dBm)', ...
    'ChannelNames', {'Message', 'FM Signal'}, ...
    'SampleIncrement', Fs/FrameSize ...
    );

PlotterTime = dsp.ArrayPlot(...
    'PlotType', 'Line', ...
    'YLimits', [-2.3, 2.3], ...
    'SampleIncrement', 1/Fs, ...
    'XLabel', 'Time', ...
    'YLabel', 'Amplitude', ...
    'ChannelNames', {'FM Signal', 'Message'} ...
    );


% начальное значение интегратора
AccumInitValue = 0;

% запуск симуляции
for i = 1:100
    % формирование тонального сигнала
    MessageData = Message();

    % интегрирование сообщения
    MessageIntegral = AccumInitValue + 1/Fs * cumsum(MessageData);

    % обновление начального значения интегратора
    AccumInitValue = MessageIntegral(end);

    % получание несущей
    CarrierWave = Carrier();
    SinWave = CarrierWave(:,1);
```

```
    CosWave = CarrierWave(:,2);

    % умножение на несущую и добавление несущей сдвинутой по фазу
    FmSignal = CosWave - 2*pi*Kf * SinWave.*MessageIntegral;

    % ограничение сигнала
    % проверяем знак сигнала. Если сигнал больше нуля получаем 1 (True),
    % если меньше - то 0 (False). Умножая полученные значения на 2 и
    % вычитая 1, получаем сигнал принимающий значения 1 или -1.
    % Этот сигнал и есть выход ограничителя
    FmSignal = (FmSignal >= 0)*2 - 1;

    % фильтрация сигнала
    FmSignal = BandpassFIR(FmSignal);

    % вычисление спектров
    Spectrums = SpecEstimator([MessageData(1:2:end), FmSignal(1:2:end)]);

    % вывод результатов на график
    PlotterTime([FmSignal, MessageData])
    PlotterSpectrum(Spectrums)

    % задержка в 0.1 секунды для лучшей визуализации
    pause(0.1)
end
```

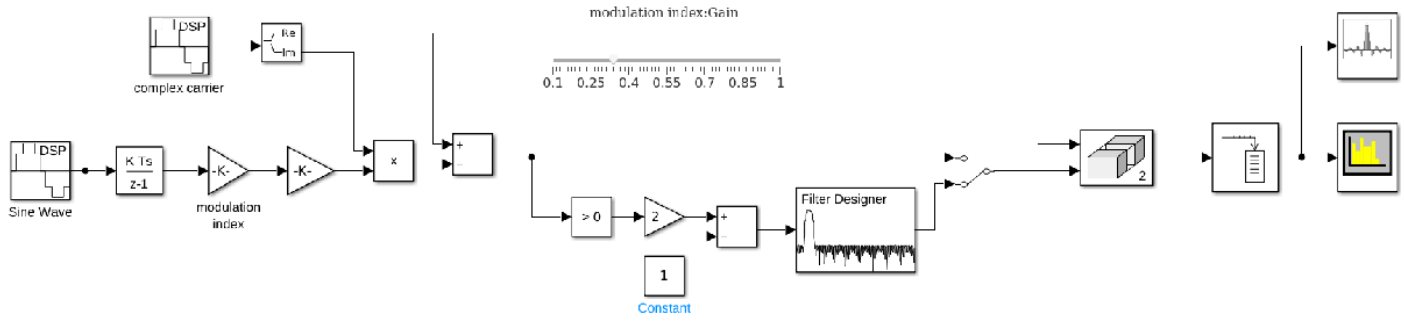




Выше представленна временная диаграмма сигнала, на которой можно увидеть, что побочная амплитудная модуляция после ограничения и фильтрации существенно ослаблена. На спектрограмме видно, что спектр сигнала по-прежнему состит из трех тонов: несущей и двух боковых гармоник. Для большей наглядности перед построением спектра сигнал быль продецимирован вдвое.

5. Simulink модель

В файле FM_Transmitter_NBFM.slx представлена Simulink-модель узкополосной однотональной модуляции. С помощью слайдера можно изменять индекс модуляции и наблюдать появление побочной амплитудной модуляции. С помощью переключателя можно включать и выключать ограничение и фильтрацию сигнала.



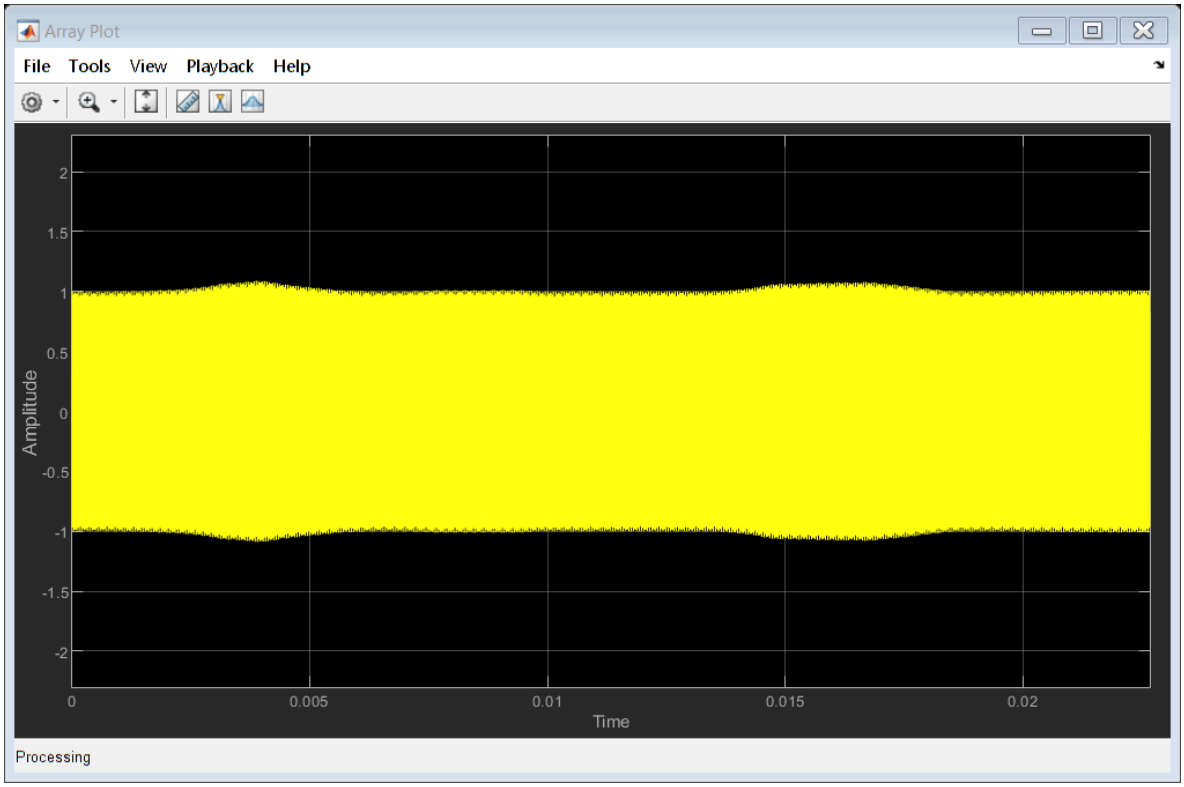
6. Модуляция аудиосообщением

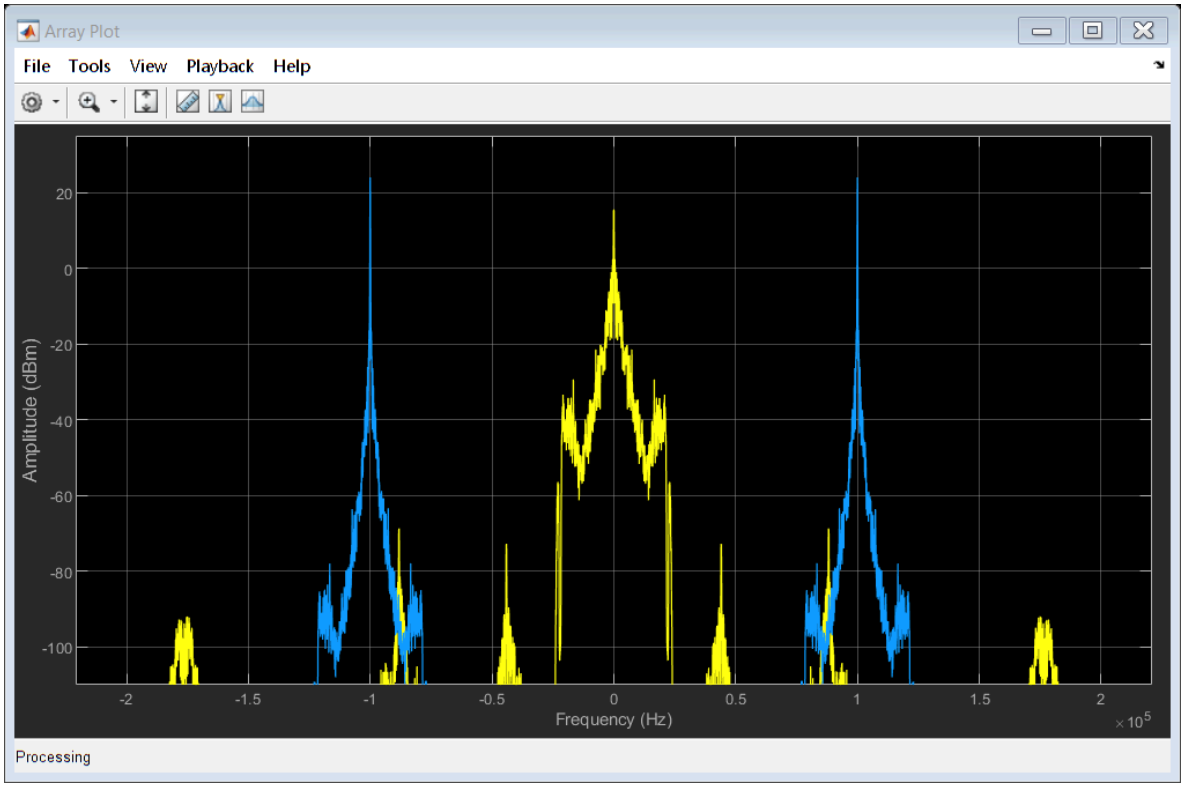
В завершении применим узкополосный модулятор для формирования сигнала, модулированного аудиосообщением. В файле Audio_Source.wav записано звуковое сообщение с частотой дискретизации 44.1 kHz.

Частота несущей равна 100 kHz. Перед модуляцией частота дискретизации увеличивается в 10 раз. Значение индекса модуляции β выбрано равным 0.005.

```
clc; clear; close all;

AudioFrameSize = 1000;      % количество отсчетов аудиофайла, получаемых за один раз
FramesNumber = 300;         % число обрабатываемых пачек данных
RateRatio = 10;             % коэффициент увеличения частоты дискретизации
Fc = 100e3;                 % частота несущей (Hz)
ModIndex = 0.005;           % индекс модуляции

% объект для считываения отсчетов аудиофайла
AudioReader = dsp.AudioFileReader(...
    'wav/Audio_Source.wav', ...
    'SamplesPerFrame',AudioFrameSize...
    );

% дополнительные расчеты
AudioFs = AudioReader.SampleRate;               % получаем частоту дискретизации аудиосообщения
SignalFs = AudioFs * RateRatio;                 % частота дискретизации модулированного сигнала
SignalFrameSize = AudioFrameSize * RateRatio;   % количество отсчетов Ам-сигнала, получаемых за один раз

% вычисление чувствительности модулятора
Kf = ModIndex * AudioFs / 2;

% интерполятор
Upsampler = dsp.SampleRateConverter(...
    'Bandwidth', 40e3, ...
    'InputSampleRate',AudioFs, ...
    'OutputSampleRate', SignalFs ...
    );

% генератор несущей
Carrier = dsp.SineWave(...
    'SampleRate',SignalFs,...
    'SamplesPerFrame',SignalFrameSize,...
    'Frequency', [Fc Fc],...
    'Amplitude', [1 1], ...
    'PhaseOffset', [0 pi/2] ...
    );

% объект для вычисления спектра
SpecEstimator = dsp.SpectrumEstimator(...
    'PowerUnits','dBm',...
    'FrequencyRange','centered',...
    'SampleRate',SignalFs);

% объект для отрисовки графиков
PlotterSpectrum = dsp.ArrayPlot(...
    'PlotType','Line', ...
    'XOffset', -SignalFs/2, ...
    'YLimits', [-110, 35], ...
    'XLabel', 'Frequency (Hz)', ...
```

```
    'YLabel', 'Amplitude (dBm)', ...
    'ChannelNames', {'Message', 'FM Signal'}, ...
    'SampleIncrement', SignalFs/SignalFrameSize ...
    );

PlotterTime = dsp.ArrayPlot(...
    'PlotType', 'Line', ...
    'YLimits', [-2.3, 2.3], ...
    'SampleIncrement', 1/SignalFs, ...
    'XLabel', 'Time', ...
    'YLabel', 'Amplitude', ...
    'ChannelNames', {'FM Signal', 'Message'} ...
    );

% начальное значение интегратора
AccumInitValue = 0;

% запуск симуляции
for i = 1:FramesNumber
    % считывание отсчетов аудиосообщения и выделение одного канала из
    % стерео сигнала
    AudioData = AudioReader();
    AudioData = AudioData(:,1);

    % увеличение частоты дискретизации аудиосообщения
    MessageData = Upsampler(AudioData);

    % интегрирование сообщения
    MessageIntegral = AccumInitValue + 1/SignalFs * cumsum(MessageData);

    % обновление начального значения интегратора
    AccumInitValue = MessageIntegral(end);

    % получание несущей
    CarrierWave = Carrier();
    SinWave = CarrierWave(:,1);
    CosWave = CarrierWave(:,2);

    % умножение на несущую и добавление несущей сдвинутой по фазу
    FmSignal = CosWave - 2*pi*Kf * SinWave.*MessageIntegral;

    % вычисление спектров
    SpectrumData = SpecEstimator([MessageData, FmSignal]);

    % вывод результатов на график
    PlotterTime(FmSignal)
    PlotterSpectrum(SpectrumData)

    % задержка в 0.1 секунды для лучшей визуализации
    pause(0.05)
end
```





На временной диаграмме можно увидеть появляение побочной амплитудной модуляции. Для борьбы с ней можно попробовать применить рассмотренный ранее способ ограничения и фильтрации. Однако, это будет сопряжено с рядом трудностей. Рассмотрим еще раз сигнал на выходе ограничителя:

$$s_{\text{lim}}(t) = \frac{4}{\pi} \cdot \left(\cos(\theta(t)) - \frac{1}{3}\cos(3 \cdot \theta(t)) + \frac{1}{5}\cos(5 \cdot \theta(t)) + \ldots \right),$$

где $\theta(t) = 2\pi f_c t + 2\pi K_f \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau$.

Каждое слагаемое в скобках представляет из себя частотно-модулированный сигнал. Нам необходимо только первое слагаемое и его требуется получить, отфильтровав все остальные.

Посмотрим, что представляет из себя второе слагаемое:

$$s_2(t) = -\frac{4}{3\pi} \cdot \cos(3 \cdot \theta(t)) = -\frac{4}{3\pi} \cdot \cos\left(2\pi(3 \cdot f_c)t + 2\pi \cdot (3 \cdot K_f) \cdot \int_{-\infty}^{t} m(\tau) \cdot d\tau\right).$$

Можно увидеть, что $s_2(t)$ - это модулированный сигнал, несущая которого равна $3f_c$. Чувствительность модулятора $3 \cdot K_f$ увеличина в трое относительно первого слагаемого. Так как, девиация и полоса сигнала пропорцианальны чувствительности, то второе слагаемое будет иметь более широкую полосу, чем первое.

Соответственно, несущая частота и чувствительность третьего слагаемого увеличины в пять раз. Амплитуды слагаемых в сумме $s_{\text{lim}}(t)$ уменьшается достаточно медленно, поэтому после ограничения мы получим много высокочастотных и широкополосных слагаемых. Так как все преобразования выполняются в цифровом виде, чтобы избежать наложения спектров требуется существенно увеличить частоту дискретизации. Если этого не сделать, то высокочастотные слагаемые завернуться относительно частоты Найквиста и попадут в полосу первого слагаемого $\cos(\theta(t))$, после чего их уже не получиться удалить с помощью полосового фильтра.

Сильное увеличение частоты дискретизации тоже не явялется хорошим решением, так как это потребует увеличения числа коэффициентов в полосовом фильтре, и соответственно увеличит вычислительные затраты.

Таким образом, описанный выше метод узкополосной модуляции можно применять для упрощения передающего устройства, если сигнал формируется аналоговыми методами. Если сигнал формируется цифровыми методами, например с помощью SDR, то лучше использовать прямой метод с малым значение индекса модуляции.

Литература:

1. B. P. Lathi Modern Digital and Analog Communication Systems
2. R. Stewart, K. Barlee, D. Atkinson, L. Crockett Software Defined Radio using MATLAB® & Simulink and the RTL-SDR