$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(2i+t)} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n t^{n+1}}{2^{n+1}}$$

$|z-i| < 2$ {расстояние до $z=-i$ есть 2}.

Д/З №2.

№1.

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} + \frac{2z}{z^2-\pi^2}; \quad z = \pm\pi;$$

$\odot$ z_0: особая точка $\underbrace{\odot,\ 0<|z-z_0|<r}_{\text{изолированная сингулярность}}$

$$\lim_{z\to z_0} f(z)$$

- не существует — существенная особая точка
- $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ (конечный) — устранимая особая точка
- $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$: $z=z_0$: полюс

$\hookrightarrow f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

$$\begin{cases} \cdot \text{ всех } n<0: a_n \neq 0 \\ \cdot \ \forall n<0: a_n = 0 \\ \cdot \ a_n \{n < n_0\} = 0, \text{ полюс порядка } n. \end{cases}$$

$\boxed{\sin(-\pi) = \sin(\pi) = 0}$

$z=\pi$.

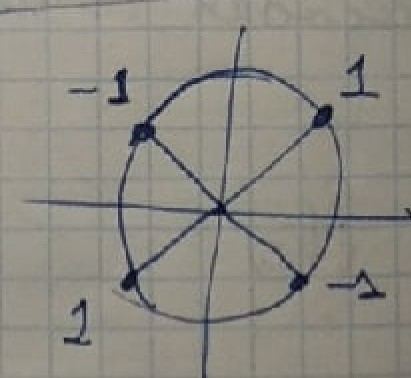
$$\frac{1}{\sin z} \approx -\frac{1}{z-\pi} - \frac{z-\pi}{6};$$

$$\frac{2z}{(z-\pi)(z+\pi)} \approx \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{z-\pi} - \frac{z-\pi}{4\pi^2};$$

• Предел $\exists$ и конечен $\{0\}$.

№2

1). $f(z) = \dfrac{\sin z}{1-\operatorname{tg} z}$; $\boxed{z = \frac{\pi}{4} + \pi n}$



$$\operatorname{tg} z \approx 1 + 2\left(z - \frac{\pi}{4}\right)$$

$z \to \frac{\pi}{4}$

$$\cancel{\operatorname{tg} z \approx -1 + 2\left(z + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$\cancel{z \to -\frac{\pi}{4}}$

$$f(z) = \frac{\sin z}{-2\left(z - \frac{\pi}{4}\right)} = \infty \quad \lim_{z \to \frac{\pi}{4} + \pi n} \ldots = \infty$$

at $z = \frac{\pi}{4} + \pi n$

$z \to \frac{\pi}{4} + \pi n$, тогда

$$\underset{z \to \frac{\pi}{4} + \pi n}{f(z)} = \frac{1}{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)} \cdot \overbrace{\left(\frac{\text{const}}{-2}\right)}^{\text{его вычет, кстати}} + \varphi(z), \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ полюс 1-го порядка.

2) $f(z) = \dfrac{e^{c/(z-a)}}{e^{z/a}-1}$;

проверяем, что там с предлом вариантами

$z = \pi i n a$:

$$\frac{e^{\frac{c}{(\pi i n-1)a}}}{e^{\pi i n}-1}; \qquad e^{i(\pi n)} = \underbrace{\cos(\pi n)}_{\pm 1} + i\cancel{\sin(\pi n)}^{0}$$

$$\frac{c}{ia(\pi n+i)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-ic}{a(\pi n+i)} = \boxed{0}$$

то есть особая точка наблюдается только

в $\boxed{z = 2\pi i n a}$ ← при нале 1-го порядка вновь

а что в $z = a$? $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{e^{\frac{c}{(z-z_0)}}}{e-1} = \boxed{\infty}$

изолированная сингулярность

№3.

$$f(z) = z e^{\frac{1}{z}} \cdot e^{-\frac{1}{z^2}} = z e^{\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}},$$

$z \to 0$: $\quad e^{\frac{1}{z}} \simeq \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots\right)$

$$e^{\frac{1}{z^2}} \simeq \left(1 + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z^4} + \ldots\right)$$

тогда at $z_0 = 0$ получаем $\boxed{\text{СОТ}}$.

№4.

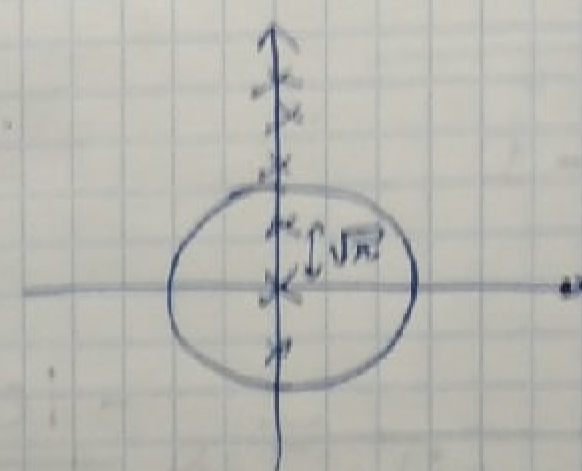
1) $\displaystyle\int_C \frac{z\cdot e^{z}\,dz}{tg(z^2)}$ — $f(z)$

~~$z = e^{i\varphi}$~~

особые точки

• $z=\infty$ $\quad z=0;$

• $z^2 = \pi n;$



• $z=0$:

$tg(z^2) \approx z^2 + \frac{z^6}{3} + \ldots$

$e^z \approx 1 + z + \frac{z^2}{2} + \ldots$

~~$\lim\limits_{z\to 0} \frac{z(1+z)}{z^2} = \infty$~~

$f(z=0) = \infty$

• ~~Посчитаем~~ через вычет на ∞:

~~$tg(z^2) = \frac{\sin^2(z^2)}{\cos(z^2)} = \frac{i(e^{iz^2} - e^{-iz^2})}{e^{iz^2} + e^{-iz^2}}$~~

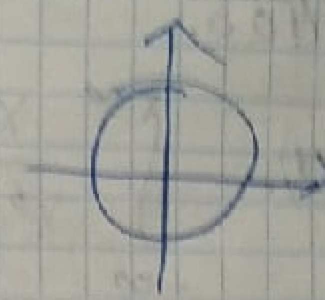
~~$f(z) = \frac{-i\cdot z e^z \{e^{iz^2} + e^{-iz^2}\}}{(e^{iz^2} - e^{-iz^2})}$~~

$\displaystyle\oint_C \frac{z e^z\,dz}{tg(z^2)} = +2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=0} f(z); = 2\pi i$ — ans

$\displaystyle\mathop{f(z)}_{z=0;} = \frac{z(1+z)}{z^2}; \Rightarrow \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 1$

2)

2). $\oint\limits_C \frac{\sin(\frac{1}{z})}{e^{\frac{1}{z}}}\,dz$; $= -2\pi i \cdot \operatorname{Res}\limits_{z\to\infty} f(z)$; $\boxed{z=0}$;



$$\boxed{g(\omega) = -f\left(\frac{1}{\omega}\right)\cdot\frac{1}{\omega^2}}$$

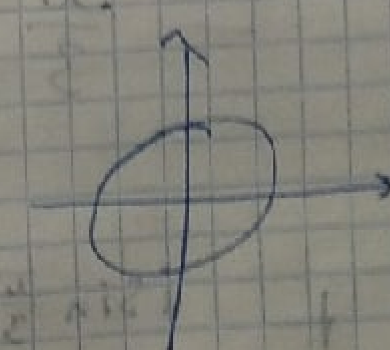
$$\boxed{g(\omega) = -\frac{\sin(\omega)}{e^{\omega}}\cdot\frac{1}{\omega^2}}$$

$$\operatorname{Res}\limits_{z\to\infty} f(z) = \operatorname{Res}\limits_{\omega\to 0} g(\omega) \Rightarrow -\frac{\omega - \frac{\omega^3}{3!}}{(1+\omega+\frac{\omega^2}{2})\,\omega^2} =$$

$$= -\frac{1}{\omega(1+\cancel{\omega+\frac{\omega^2}{2}})} = -\frac{1}{\omega}, \Rightarrow \boxed{\operatorname{Res}\limits_{\omega\to 0} g(\omega) = -1}$$

$\cancel{-\frac{1}{2\pi i}}$ $\frac{i}{2\pi}$ or $(\cdot)$ $+2\pi i$

3). $\int\limits_C \frac{e^z}{z^n}\,dz$; $\boxed{z=0}$



$f(z) = \frac{1+z}{z^n}$

$e^z = t$,

$z = \ln t$

$dz = \frac{1}{t}\,dt$

$\cancel{\oint\limits_C \frac{t\,dt}{t(\ln t)^n}}$

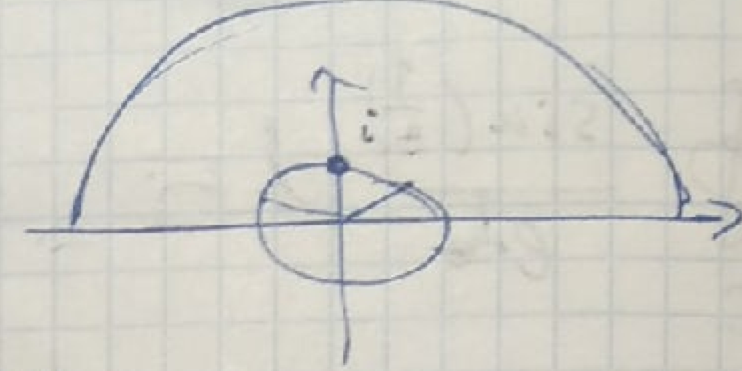
~~Выгодно по частям~~

$2\pi i \operatorname{Res}_0 \left\{\frac{e^z}{z^n}\right\} = 2\pi i \cdot \left\{\frac{1}{z^n}\cdot\left(1+z+\frac{z^2}{2}+\ldots\right)\right\} =$

коэф перед $\frac{1}{z}$

$$= \frac{2\pi i}{(n-1)!}$$

№5.



а). $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^4}{x^6+1}$ $\qquad e^{i\frac{\pi}{2}} \to x_1$

$x_0 = i \to e^{i\frac{\pi}{2}}$

$x_0 = \frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$; $\to e^{i\frac{\pi}{6}}$ и $e^{\frac{5i\pi}{6}}$ $\qquad \to x_2, \to x_3$

$$\int_C \frac{x^4}{x^6+1} = 2\pi i\sum_{i=1,2,3}\frac{x_i^4}{6x_i^5} = 2\pi i\left[\frac{e^{i\cdot 2\pi}}{6e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{\frac{4i\pi}{6}}}{6e^{\frac{5i\pi}{6}}} + \frac{e^{\frac{2i\pi}{6}}}{6e^{\frac{i\pi}{6}}}\right] = 2\pi\left[\frac{1}{6} + \right.$$

$$\left. + \frac{\{\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})\}\cdot i}{6[-\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})]} + \frac{\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin(\frac{\pi}{3})\}i}{6[\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})]}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{3} * \left\{1 + \frac{i\{-\cos(\frac{\pi}{3})\cdot\cos(\frac{\pi}{6}) - i\cos(\frac{\pi}{3})\sin(\frac{\pi}{6})}{-1}\right.$$

$$\left. + \frac{i\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + -\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}}{-1}\right\} =$$

$$= \boxed{\frac{2\pi}{3};}$$

б). $$\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\varphi}{2+\cos\varphi}d\varphi = \oint_C \frac{e^{2i\varphi}+e^{-2i\varphi}}{2\left(2+\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)}\cdot\frac{dz}{iz} =$$

$z = e^{i\varphi}$; $\varphi = \frac{\ln z}{i}$; $d\varphi = \frac{dz}{iz}$

$$\oint_C \frac{\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)dz}{2\left(2+\frac{z+\frac{1}{z}}{2}\right)iz} = \oint_C \frac{(z^4+1)\,dz}{\frac{2i z^3(z^2+4z+1)}{2z}} =$$

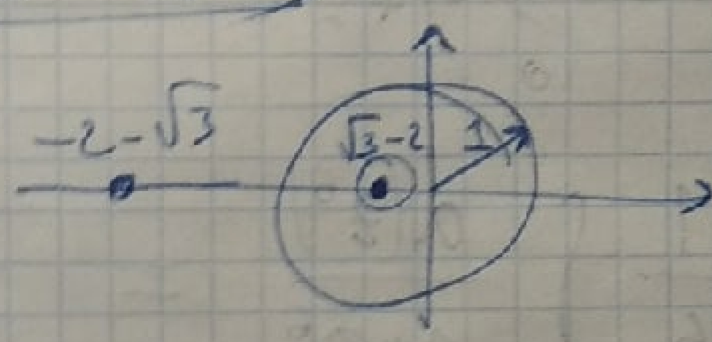
$$= \oint_C \frac{(z^4+1)\,dz}{i z^2(z^2+4z+1)} = -i\oint_C \frac{(z^4+1)\,dz}{z^2(z^2+4z+1)};$$

$z=0;$ $\quad D = 4-1 = 3$

$z = -2 \pm \sqrt{3}$

учет 0

$\boxed{\mathrm{res}\, f(z=0) = -4}$ (!)



$$-i\oint \frac{(z^4+1)\,dz}{z^2(z^2+4z+1)} = -i\cdot 2\pi i\cdot \mathrm{res}\left(f(z=\sqrt{3}-2)\right);$$

$$\mathrm{res}\, f(z=\sqrt{3}-2) = \frac{(\sqrt{3}-2)^4+1}{2z(z^2+4z+1)+z^2(2z+4)} =$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-2)^4+1}{4z^3+12z^2+2z} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$

итог $\cancel{2\pi}\ \cancel{\frac{14\pi\sqrt{3}}{3}} = \frac{14\pi}{\sqrt{3}}$ итог $\boxed{\left(\frac{14}{\sqrt{3}}-8\right)\pi}$

б). $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} =$$

$x = ia;$

$x = ib$

№6. $\int\limits_C \frac{z^5 dz}{1+z^6}$ $\quad z = 2e^{i\varphi}$;

$$\frac{1}{2}\int\limits_C \frac{z^4 dz^2}{1+z^6} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \frac{16 \cdot 8 i e^{8i\varphi} d\varphi}{1+2^6 e^{6i\varphi}} =$$

$$d(z^2) = 4\, d(e^{2i\varphi}) = \boxed{4 \cdot 2i \cdot e^{2i\varphi} d\varphi}$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{2^6 e^{6i\varphi} d\varphi}{1+2^6 e^{6i\varphi}}; \quad e^{6i\varphi} = t; \quad 2^6 e^{6i\varphi} = t$$

$$\frac{1}{6}\int\limits_C \frac{d(z^6)}{1+z^6} = \frac{1}{6}\int\limits_C \frac{d(1+z^6)}{1+z^6} =$$

$$= \frac{1}{6} \ln(1+z^6) \Big|_C$$

$$dz^6 = \frac{\varphi = \ln\left(\frac{t}{2^6}\right)}{6i} \quad d\varphi = \frac{t}{2^6 \cdot 6i} \cdot \frac{dt}{2^6};$$

$$\cancel{\frac{1}{2^{12} \cdot 6i}} \oint\limits_0^{2\pi} \cancel{\frac{t\,dt}{1+t}}$$

№6.

~~посчитаем вычет на ∞.~~

~~$g(\omega) =$~~

$$\boxed{\frac{z_0^5}{6\cdot z_0^5} = \frac{1}{6}}$$

и так 6 раз.

это наши 6 вычетов.

итог: $2\pi i\cdot 1 = 2\pi i$

№7.

№8.

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(ax)}{x^2+k^2}dx = \frac{k^2}{k^2}\int_0^\infty \frac{\left(\frac{x}{k}\right)\sin\left(ka\frac{x}{k}\right)}{1+\left(\frac{x}{k}\right)^2}d\left(\frac{x}{k}\right) =$$

$$= \left|\left(\frac{x}{k}\right) = t\right| = \int_0^\infty \frac{t\sin(kat)}{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(kat)\, d(t^2+1)}{(t^2+1)} =$$

$\sin(kat) = \mathrm{Im}\left[e^{i(kat)}\right]$;

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\left[e^{i(kat)}\right]\cdot t\, dt}{(t^2+1)};$$

$t = \pm i$; $t = i$ – полюс первого порядка

$$\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\cdot \frac{e^{-|k||a|}}{2i} = \frac{\pi}{2}\cdot e^{-|k||a|}$$

~~что~~ Что?: $\frac{1^4}{(1-2)(1-3)\ldots} + \frac{2^4}{(2-1)(2-3)\ldots} +$

$+ \frac{3^4}{(3-1)(3-2)(3-4)\ldots}$

№7.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x\, dx}{x^2(x^2+1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1} =$$

$$= \underbrace{I_D^{\,2}}_{\pi} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2+1}\, dx ;$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)\,dx}{x^2+1} =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{-\frac{\pi}{2}} +$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2x)\,dx}{x^2+1}}_{I_2}$$

$$\cos 2x = \operatorname{Re}\{e^{2ix}\}$$

тогда полюс 1-го порядка им

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(2x)\,dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2e^2}$$

$x = h + ?$

$1 - 2\sin^2(i)$

$= \dfrac{\cos(2i)}{2i\,(x-i)}$

$$\cos(2i) = \frac{e^{2i^2} + e^{-2i^2}}{\cancel{2i}}$$

$$I_2 = \frac{\cancel{2}\pi \cancel{i}}{\cancel{2}} \cdot \frac{e^{2i^2} + e^{-2i^2}}{2\cancel{i}} =$$

$$= \frac{\cancel{2}\pi \cancel{i}}{\cancel{4}\cancel{i}_{2}} \cdot \left(e^{2} + e^{-2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(e^{2} + e^{-2}\right)$$

$\cancel{\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\left(e^{2} + e^{-2}\right)}$

$$\boxed{\frac{\pi}{2}\left(1 + \cancel{e^{2}} + e^{-2}\right)} \;? \leftarrow \text{потому что } \mathrm{Re}\{e^{2ix}\}.$$

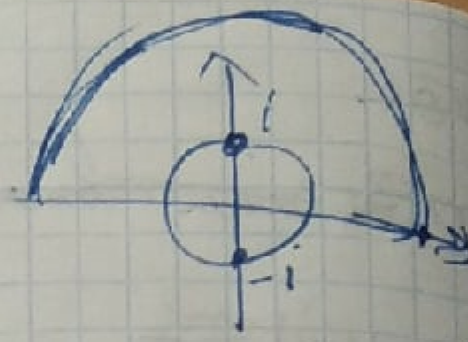
$\sin(\kappa a t) =$

$z + \frac{1}{\cancel{2}}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{I}{}$

$t = \pm i$

№9.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(x - \frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\, dx =$$



$$= \oint \frac{\cancel{\cos x \cos\frac{1}{x}}\ \mathrm{Re}\left(e^{-i\{x-\frac{1}{x}\}}\right)}{1+x^2}$$

отв

$$\frac{e^{-i\{i+i\}}}{2i}\cdot 2\pi i$$

$x = \pm i$

просто полюс 1-го порядка

~~2-го устранимая особая~~ $\cancel{e^{\frac{1}{x}}}$

$\frac{\pi}{e^2}$

~~$x = 0$ — 2-го~~

$$g(\omega) = -f\left(\frac{1}{\omega}\right)\cdot\frac{1}{\omega^2} = -\frac{\cos\left(\frac{1}{\omega}-\omega\right)}{\left(1+\frac{1}{\omega^2}\right)\omega^2} =$$

???

$$= -\frac{\cos\left(\frac{1}{\omega}-\omega\right)}{\omega^2+1} = -\frac{\cos\left(\omega-\frac{1}{\omega}\right)}{\omega^2+1}$$

$$\mathrm{Res}_\infty f(z) = -\{R(x=0) + R(x=i)\}, \Rightarrow$$

$\mathrm{Res}_0\, g(\omega)$

$(\omega \to 0)$

$$\boxed{g(\omega) \equiv -f(z)}$$

связка зн

то есть

$$\Rightarrow \boxed{R_0\, g(\omega) + R_0(f(z)) + R_i(f(z)) = 0}$$

~~$R_0\, g(\omega) = -R_0 f(z)$, а тогда~~ $\boxed{R_i(f(z)) \equiv 0}$

$$\begin{cases} R_0\, g(\omega) = -R_0(f) + R_i(f) \\ R_0\, g(\omega) = -R_0(f) \end{cases}$$

№ 10

а) $\int_0^{\infty}$

=

б)

$\oint = 2\pi i$

№ 10.

неч. ф-я

а. $\int_0^{\infty} \frac{x - \sin x}{x^3} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{|x|^3} dx + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}\{e^{-i|x|}\}}{|x^3|} dx$

$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Im}\{e^{-i|x|}\} dx}{x^3}$

$e^{-i|x|} = 1 - i|x| - \frac{x^2}{2}$ $x=0$

$\underbrace{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi i}$

$\cancel{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$ ~~возвышает б...~~

$\cancel{2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{2\pi i}{2}$

б. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iz} dz}{z^2+9}$; $z = \pm 3i$ $\oint$

$\oint = 2\pi i \cdot \mathrm{Res}\, f(z=-3i) = \frac{e^{-i(-3i)}}{2\cdot 3i}\cdot 2\pi i = -\frac{\pi}{3}\cdot e^{-3}$