ANALYSIS OF ALGORITHMS AND DATA STRUCTURES

1. Il termine *Analisi degli Algoritmi* è stato coniato da D. Knuth a metà degli anni Sessanta con la sua opera, *The Art of Computer Programming*.
2. L'analisi degli algoritmi ha come obiettivo principale quello di ottenere previsioni precise e matematicamente rigorose circa le prestazioni degli algoritmi.
   1. Per molti algoritmi importanti, lo studio delle prestazioni nel caso peggiore ha scarsa rilevanza pratica in quanto generalmente tale situazione è altamente improbabile.
   2. Al contrario, la comprensione del comportamento di algoritmi in situazioni tipiche, ovvero nel caso medio, è di grande valore pratico, e interessante dal punto di vista scientifico.

Che cos'è l'analisi degli algoritmi? Questo è un corso a cavallo tra la matematica e l'informatica perché si vuol fornire degli strumenti matematici per studiare le caratteristiche e fare delle valutazioni precise/esatto sia di algoritmi che di strutture dati. È importante sapere quale sarà la prestazione di un certo algoritmo nel caso peggiore, però potrebbe essere un'informazione di scarsa rilevanza pratica perché quel caso si verifica poche volte, quindi più interessante è capire come si comporta mediamente, quindi studiare un algoritmo nel caso medio. Questo è un processo non è banale perché per poterlo fare è necessario fare delle ipotesi precise su quali sono i dati in input e considerarli tutti per fare la media, ovvero se si hanno tanti possibili dati in input, lo studio del caso medio significa che devo contemplare tutti questi casi. È chiaro che il problema è più difficile rispetto a quello di trovare il caso peggiore, difatti tale studio dà origine a dei problemi matematici molto interessanti che permettono di avere un'informazione molto precisa sul comportamento sia degli algoritmi sia anche di strutture dati, cioè vedere come crescono certe strutture all'aumentare della loro dimensione.

Un esempio: analisi del Quicksort -1-

1. Numero medio di confronti:
$$C_n = n + 1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(C_{j-1} + C_{n-j}), \quad C_0 = 0,$$
2. Numero medio di scambi:
$$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(S_{j-1} + S_{n-j}), \quad S_0 = S_1 = 0.$$
3. Perno scelto come mediano fra tre:
$$C_n = n + 1 + \sum_{1\le j\le n}\frac{(n-j)(j-1)}{\binom{n}{3}}(C_{j-1} + C_{n-j})$$
4. File di piccole dimensioni ordinati con `Insertionsort`:
$$C_n = \begin{cases} n + 1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(C_{j-1} + C_{n-j}) & n > m \\ \frac{1}{4}n(n-1) & n \le m \end{cases}$$

Esempi di problemi matematici che impareremo a trattare in questo corso: sono tutte ricorrenze che definiscono una caratteristica del problema che stiamo studiando, in particolare queste sono tutte ricorrenze che fanno riferimento all'analisi dell'algoritmo QuickSort. Ad esempio quello che dimostreremo è che se C_n rappresenta il numero medio di confronti che si fanno per ordinare un vettore di dimensione n: l'indice j varia da 1 a n, quindi questi indici all'interno della sommatoria variano da 0 fino ad n -1, questo tipo di ricorrenza è chiamata a storia infinita, perché per conoscere C_n devo sapere tutti i termini precedenti della ricorrenza.

Ci occuperemo degli algoritmi di ordinamento e quali sono le tecniche matematiche che si usano per studiare i problemi di questo tipo e per fare ciò introdurremo i numeri speciali e lo strumento principale del corso, ovvero le funzioni generatrici, funzioni che sono in pratica delle serie formali di potenze che ci permetteranno di trasformare il problema da una ricorrenza a una funzione e poi anche ritornare indietro.

Un esempio: analisi del Quicksort -2-

1. La funzione generatrice del numero medio di confronti nel Quicksort:
$$C(t) = \frac{2}{(1-t)^2}\ln\frac{1}{1-t} =$$
$$= 2\,t + 5\,t^2 + \frac{26}{3}t^3 + \frac{77}{6}t^4 + \frac{87}{5}t^5 + \frac{223}{10}t^6 + O\left(t^7\right)$$
$$C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1), \quad H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \approx \ln n + \gamma,$$
2. Perno scelto come mediano fra tre:
$$C(t) = \frac{12}{7}\frac{1}{(1-t)^2}\ln\frac{1}{1-t} - \frac{54}{49}\frac{1}{(1-t)^2} + \frac{6}{5} - \frac{24}{245}(1-t)^5.$$
$$C_n = \frac{12}{7}(n+1)(H_{n+1} - \frac{23}{14}), \quad n \ge 6$$

Quicksort con riferimento al numero medio di confronti: non ho più una ricorrenza ma ho una funzione e questa è la funzione generatrice che conta il numero medio di confronti dell'algoritmo quicksort. Cosa significa? Questa funzione è una funzione particolare, cioè se effettuo uno sviluppo in serie di questa funzione ottengo questi coefficienti, che compaiono in corrispondenza di una certa potenza, che sono proprio quei valori C_n che rappresentano il numero medio di confronti. Ad esempio: se ho a che fare con vettori di lunghezza 6 e eseguo l'algoritmo quicksort su tutti i possibili vettori di lunghezza 6, il numero medio di confronti è dato esattamente da questo valore $\frac{223}{10}$, oppure se prendo vettori di lunghezza 4 il numero di confronti medio è pari a $\frac{77}{6}$. Questa funzione contiene al suo interno un'infinità di valori, ognuno dei quali rappresenta il numero medio di confronti al variare della dimensione del vettore. Quindi dalla ricorrenza impareremo a trovare la funzione generatrice e da quest'ultima faremo il passo indietro, cioè saremo in grado di dire quanto vale C_n in funzione di n, che è ciò che ci interessa. Nel caso del numero medio dei confronti $C_n = 2(n+1)(H_n + 1 - 1)$ dove h_n rappresenta un numero armonico (un numero armonico è dato dalla sommatoria per k che va da 1 a n di $\frac{1}{k}$ e per questa somma non esiste un'espressione esatta che la rappresenta, però si dimostra che quando n è abbastanza grande e questi numeri si comportano come il logaritmo di n). Tutto torna perchè il quicksort ha una complessità dell'ordine del $n \ln n$.

Se il perno viene scelto come mediano fra tre la forma delle ricorrenze è più complessa dell'altra, si ottiene una funzione che ha determini in più e tali termini non sono influenti ai fini della valutazione della complessità, però quello che possiamo osservare è che si ritrova esattamente la stessa funzione$\frac{1}{(1-t)^2} \mathrm{Ln} \frac{1}{1-t}$che si era trovata prima ma con una costante $\frac{12}{7} \le 2$, infatti quando n ≥ 6, in modo da escludere la parte meno influente, e in questo caso in C_n ho questo fattore $\frac{12}{7}$che è quello che rende più bassa la complessità. Tipicamente le costanti non contano, però nella pratica avere una costante 2 invece che una costante$\frac{12}{7}$può fare la differenza.

Data una funzione $f(n)$:

- $O(f(n))$ denota l'insieme di tutte le funzioni $g(n)$ tali che $|g(n)/f(n)|$ è limitata superiormente per $n \to \infty$
- $\Omega(f(n))$ denota l'insieme di tutte le funzioni $g(n)$ tali che $|g(n)/f(n)|$ è limitata inferiormente da un numero strettamente positivo per $n \to \infty$
- $\Theta(f(n))$ denota l'insieme di tutte le funzioni $g(n)$ tali che $|g(n)/f(n)|$ è limitata inferiormente e superiormente per $n \to \infty$

Queste notazioni nascondono i dettagli implementativi di un algoritmo ignorando i fattori costanti e sono perciò molto utilizzate in studi di complessità computazionale.

Ci sono questi tre notazioni: O (o grande), Ω (omega) e θ (theta) che vengono utilizzate quando si studia la complessità di un algoritmo. Queste notazioni ignorano i fattori costanti perché quando n è molto grande la costante tende ad essere meno significativa, però in situazioni reali di media dimensione sono dettagli implementativi importanti, ad esempio ci permette di poter scegliere in maniera più precisa tra due algoritmi diversi che risolvono lo stesso problema.

Una prima domanda

Qual è la complessità dell'ordinamento basato sul confronto fra chiavi?

Input: a[1..n] contente numeri distinti in ordine qualsiasi
Output: a[1..n] in ordine crescente

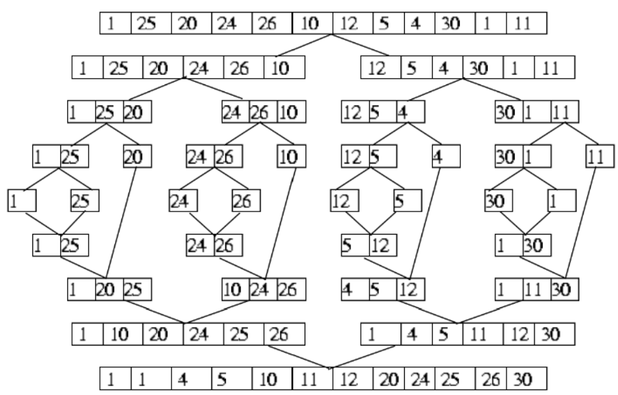
Abbiamo in input un vettore di lunghezza n e immaginiamo che contenga i valori da 1 a n e in output vogliamo il vettore con gli elementi ordinati. Quanto mi costa fare questo ordinamento? Per poter rispondere a questa domanda rispolveriamo l'algoritmo mergesort, questa è una versione dell'algoritmo pseudo-Maple ma si capisce bene qual è il significato dell'algoritmo, quindi come input abbiamo due indici che rappresentano l'indice sinistro left e destro right del vettore che vogliamo ordinare. Se l-r < 0 (ovvero finché abbiamo un vettore da ordinare) prendiamo l'elemento del vettore che si trovain posizione (l + r) ÷ 2 (cioè l'elemento centrale del vettore). L'idea è dividere il vettore a metà e ordinare separatamente le due parti e infine fare una fusione. Una volta ordinati i due sottovettori, i cicli for sono quelli che permettono di effettuare la fusione e ottenere quindi l'ordinamento finale. In questi passi ci si appoggia a due vettori b e c in cui si va a copiare la parte sinistra e la parte destra del vettore che vogliamo ordinare e poi si confrontano gli elementi del vettore b e quelli del vettore c andando a prendere via via quello più piccolo in modo da ottenere il vettore ordinato.

Mergesort

```
procedure mergesort(l, r: integer);
var i, j, k, m: integer;
begin
if l − r > 0 then
    begin
        m := (l + r) ÷ 2;
        mergesort(l, m); mergesort(m + 1, r);
        for i := 1 to m − l + 1 do b[i] := a[l + i − 1];
        for j := m + 1 to r do c[j − m] := a[j];
        i := 1; j := 1; b[m − l + 2] := max; c[r − m + 1] := max;
        for k := l to r do
            if b[i] < c[j]
                then begin a[k] := b[i]; i := i + 1; end
                else begin a[k] := c[j]; j := j + 1; end;
    end;
end;
```

Un esempio che mostra quello che succede nella versione ricorsiva, quindi si parte dal vettore con gli elementi disordinati, e ad ogni passo il vettore viene diviso a metà e si va avanti con la ricorsione, finché ovviamente non ci si trova ad avere vettori

Mergesort: un esempio



di dimensione uno o due che devo iniziare a fondere. L'ordinamento con questa versione divide a metà finché può, quando vengono individuati i vettori di lunghezza unitaria inizia la fusione e si ottiene alla fine l'ordinamento finale. Evidenzio un aspetto importante dell'algoritmo ovvero, indipendentemente da cosa c'è dentro il vettore, l'algoritmo fa sempre gli stessi passi, perché fissata la dimensione del vettore l'algoritmo fa sempre lo stesso numero di istruzioni. Quindi questo algoritmo è importante quando si studia la complessità dell'ordinamento perché è un algoritmo che qualsiasi sia la distribuzione data in input esegue sempre lo stesso numero di istruzioni, per cui sapere quanto costa il mergesort mi dà un'indicazione importante per l'ordinamento di un vettore se mi baso sul confronto tra chiavi, allora come faccio a capire quanti confronti esegue l'algoritmo mergesort? In questo caso sicuramente non sarà un numero medio, infatti non è necessario fare nessuna media perché fissato n il costo è sempre lo stesso.

Mergesort

Questo algoritmo di ordinamento divide a metà il vettore $a[1..n]$ da ordinare, ordina le due parti ricorsivamente ed esegue una fusione dei sottovettori ordinati. Si ha il seguente risultato:
Per ordinare un vettore di n elementi Mergesort esegue $n \lg n + O(n)$ confronti, qualsiasi sia la distribuzione dei dati in ingresso.
Infatti il numero di confronti è descritto dalla relazione di ricorrenza:

$$C_n = C_{\lfloor n/2 \rfloor} + C_{\lceil n/2 \rceil} + n, \quad C_1 = 0$$

Se $n = 2^m$ si ha:

$$C_{2^m} = 2C_{2^{m-1}} + 2^m$$

$$\frac{C_{2^m}}{2^m} = \frac{C_{2^{m-1}}}{2^{m-1}} + 1 = \frac{C_{2^{m-2}}}{2^{m-2}} + 2 = \cdots = \frac{C_{2^0}}{2^0} + m = m$$

Quindi $C_n = n \lg n$ se $n = 2^m$. Vedremo poi la soluzione esatta.

Come faccio a descrivere il numero di confronti dell'algoritmo margesort? Allora immaginiamo di avere un vettore di lunghezza n, chiamo C_n il numero di confronti che faccio per ordinarlo e quindi per esprimere questo numero devo pensare a cosa fa l'algoritmo, ovvero divido il vettore a metà e ordino separatamente le due parti e infine eseguo la fusione. Per tradurre queste operazioni in una ricorrenza che cosa dovrò fare? È chiaro che quando divido a metà il vettore, a seconda del fatto che n sia pari o dispari, otterrò due sottovettori che potranno differire al più di uno come dimensione, quindi in generale sicuramente ce ne sarà uno che ha come dimensione la parte intera inferiore di $\frac{n}{2}$ E l'altro la parte intera superiore di $\frac{n}{2}$. Questo mi dice esattamente quanto mi costa la ricorsione, dopodiché devo capire quanti confronti faccio per fare la fusione di due vettori. Nell'algoritmo c'è il ciclo finale in cui si va ad esaminare da L a R e confronto gli elementi, quindi è chiaro che se il vettore ha dimensione n faccio n confronti. Quindi ho tradotto l'algoritmo in questa ricorrenza. La condizione iniziale è importante quando si fanno questi ragionamenti, in questo caso devo capire cosa succede se ho un vettore di lunghezza uno. Chiaramente il vettore con n=1 è già ordinato e quindi faro zero confronti, quindi questa è la condizione iniziale. Ciò che possiamo fare con gli strumenti di adesso è un'approssimazione. In questo caso il problema è dato dalla presenza di queste due parti intere superiori e inferiori, facciamo un'ipotesi: che n, la lunghezza del vettore, sia una potenza del 2. È un'ipotesi non realistica perché nella pratica il vettore potrà avere una qualsiasi lunghezza, però per avere un'idea del costo dell'algoritmo. Risolvere la ricorrenza quando n=2^m (potenza del due) è abbastanza semplice e si vede facilmente che risolvendo questa ricorrenza si ha una complessità $n \operatorname{Log} n$. Quello che abbiamo dimostrato utilizzando questa ricorrenza è che dal punto di vista della complessità computazionale $n \operatorname{Log} n$ È un limite superiore al problema dell'ordinamento basato su confronti, perché analizzato un algoritmo che ci garantisce che qualsiasi sia il vettore da ordinare lo posso fare con questa complessità e ci permette di dire che la complessità dell'ordinamento è O($n \operatorname{Log} n$).

Ordinamento basato sul confronto di chiavi

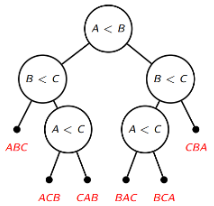
- Dal punto di vista della complessità computazionale, il risultato precedente dimostra che $n \lg n$ è un limite superiore alla difficoltà intrinseca dell' ordinamento: la complessità dell'ordinamento è $O(n \lg n)$.
- Una domanda che sorge spontanea è: esiste un algoritmo di ordinamento basato sul confronto fra chiavi che abbia, asintoticamente, prestazioni migliori del Mergesort?
Ogni metodo di ordinamento basato su confronti utilizza almeno $\lceil \log_2 n! \rceil > n \log_2 n - n/(\ln 2)$ confronti.

Esiste un algoritmo di ordinamento basato sul confronto tra chiavi che mi permetta di fare meglio? La risposta è no perché ogni metodo di ordinamento basato su confronti utilizza almeno [log2 n!] confronti e questa quantità è maggiore di $n \operatorname{Log}_2 n$. Per dimostrare questa affermazione si utilizza l'albero dei confronti. Esempio slide: in ogni nodo abbiamo un confronto fra due elementi del vettore e a seconda dell'esito del confronto ci si sposta a sinistra o a destra, in particolare ci si sposta a sinistra se il confronto è vero altrimenti ci si sposta a destra. Nelle foglie abbiamo n fattoriale nodi esterni che corrispondono al numero di modi in cui posso mescolare gli elementi del vettore. Per ordinare un vettore utilizzando soltanto confronti

Albero dei confronti

- Un albero binario è un nodo esterno oppure un nodo interno connesso a due alberi binari. Se h è l'altezza dell'albero si hanno al più 2^h nodi esterni.
- L'albero dei confronti è un albero binario in cui ogni nodo corrisponde ad un confronto: si prosegue lungo il ramo sinistro se il confronto ha successo e lungo il ramo destro se il confronto fallisce.

L'albero dei confronti con n= 3 corrisponde a un vettore di lunghezza 3



devo per forza fare uno di questi attraversamenti nell'albero. Tutte le volte che faccio un ordinamento è come se dovessi fare un attraversamento dell'albero dei confronti e quindi vuol dire che l'altezza dell'albero dei confronti ci dà una limitazione sul numero di confronti che si devono fare.

Altezza dell'albero dei confronti

L'albero dei confronti ha $n!$ nodi esterni, pertanto:

$$n! \leq 2^h, \quad h \geq \log_2 n! = \frac{\ln n!}{\ln 2}$$

e l'altezza dell'albero dei confronti corrisponde al numero di confronti necessari ad ordinare l'insieme. D'altra parte l'approssimazione di Stirling ci dice che: $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ e quindi:

$$\ln n! \sim \ln \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = \ln \sqrt{n} + \ln \sqrt{2\pi} + n \ln(n/e) \sim \left(\frac{1}{2} + n\right) \ln n - n$$

$$\log_2 n! \sim \boxed{\left(\frac{1}{2} + n\right) \log_2 n - n/\ln 2}$$

L'albero dei confronti ha sicuramente n! Nodi esterni, che sono tutte le possibili permutazioni di n valori, e le foglie dell'albero sono al più 2^h, quindi sicuramente n! ≤ 2^h. Dopo si svolgono dei semplici passaggi matematici: risolvo la disuguaglianza rispetto ad h e trovo che h deve essere maggiore uguale del $\log_2$ n!, poi ho scritto il logaritmo come rapporto di due logaritmi in base naturale perché nell'approssimazione di Stirling conviene convertire il logaritmo dalla base 2 alla base naturale, in quanto è presente e. Nei passaggi successivi si utilizzano le proprietà del logaritmo, ($ln\sqrt{2\pi}$ non è influente perché è una costante). Trovo che $\log_2 n!$ Si comporta circa come l'espressione che vedete nel riquadro blu. Quindi l'altezza dell'albero dei confronti è maggiore uguale a quest'espressione. Dal punto di vista della complessità computazionale questo ci dimostra che $nlogn$ è un limite inferiore per l'ordinamento, cioè non posso fare meglio, perché qualunque sia l'algoritmo che si basa sui confronti deve fare una attraversamento dell'albero. L'ordinamento basato sui confronti ha una complessità $\Theta(\mathrm{n} \lg \mathrm{n})$, cioè limitato sia superiormente che inferiormente da $nlogn$. Ricordare: un aspetto fondamentale quell'algoritmo Mergesort è il fatto che il suo costo non dipende da come sono mescolati i dati di ingresso.

Complessità dell'ordinamento basato su confronti

- Il risultato precedente, dal punto di vista della complessità computazionale dimostra che $n \lg n$ è un limite inferiore alla difficoltà intrinseca dell'ordinamento ovvero la complessità dell'ordinamento è $\Omega(n \lg n)$ e quindi $\Theta(n \lg n)$.

Algoritmo Quicksort: ricorrenze

Per spiegare cos'è l'analisi degli algoritmi e che cosa quali sono poi gli strumenti che vengono utilizzati ci siamo occupati del problema della complessità dell'ordinamento basato sul confronto tra chiavi. se io ho un vettore con numeri distinti e voglio ordinare questo vettore indipendentemente dall'ordine in cui questi valori si trovano nel vettore io ho la garanzia di riuscire ad ordinare gli elementi con un algoritmo che ha complessità $nlogn$ con l'algoritmo Mergesort indipendentemente da come sono disposti i dati in input, perché nel Mergesort quello che si fa è dividere il vettore a metà, ordinare le due parti a metà e poi fonderle, in maniera ricorsiva, quindi questa operazione di taglio a metà è indipendente dal contenuto. L'ordinamento basato sul confronto è $O(nlogn)$ perché abbiamo trovato un limite superiore alle difficoltà intrinseche del problema e questo lo abbiamo fatto utilizzando il concetto di alberi dei confronti (per fare un ordinamento si deve seguire uno dei percorsi possibili che vengono individuati nell'albero dei confronti in cui si tiene conto di tutti i possibili ordinamenti).

L'obiettivo dell'analisi degli algoritmi è proprio quella di fare delle valutazioni molto precise degli algoritmi, soprattutto nel caso medio, perché quello che è importante sapere è cosa succede nella generalità dei casi.

Quicksort

```
procedure quicksort(l, r: integer);
var v, t, i, j: integer;
begin
if r >= l then
    begin
        v := a[r]; i := l − 1; j := r;
        repeat
            repeat i := i + 1 until a[i] >= v;
            repeat j := j − 1 until a[j] <= v;
            t := a[i]; a[i] := a[j]; a[j] := t;
        until j <= i;
        a[j] := a[i]; a[i] := a[r]; a[r] := t;
        quicksort(l, i − 1);
        quicksort(i + 1, r);
    end;
end;
```

Quicksort: abbiamo in input due interi, che rappresentano gli indici sinistro e destro del vettore, quindi l sta per left e r per right. La condizione iniziale va a controllare che r sia maggiore uguale di l, cioè la procedura funziona finché ci sono vettori in cui appunto l'indice destro è maggiore uguale all'indice sinistro. le istruzioni che sono all'interno della condizione vengono fatte anche nel caso di vettori unitari, perché il caso in cui r uguale l, (come elemento perno si considera l'elemento più a destra nel vettore). Gli indici permettono di scorrere il vettore, i da sinistra verso destra e j da destra verso sinistra. Alla fine di una fase che si chiama di partizionamento l'elemento perno dovrà trovare la sua posizione definitiva nel vettore e contemporaneamente tutti gli elementi più piccoli del perno trovarsi alla sua sinistra e tutti gli elementi maggiori del perno dovranno trovarsi alla destra. L'idea è che intanto scambio i due elementi trovati (un elemento maggiore del perno a sinistra e l'altro elemento minore del perno a destra) e vado avanti a fare questa operazione finché i due puntatori non si incrociano, perché mi garantisce che ho esaminato tutto il vettore. Poi devo fare lo spostamento che fa sì che l'elemento perno vada nella sua posizione definitiva che è indicata dall'indice i (in questa versione dell'algoritmo bisogna fare attenzione se uno volesse implementarla esattamente in questo modo e bisognerebbe immaginare di avere una posizione zero del vettore con un valore che è sicuramente più piccolo di tutti gli altri perché questo mi garantisce che a un certo punto io mi fermo).

Nel Quicksort, 3 quantità sono naturalmente coinvolte:

- P - il numero di partizionamenti
- S - il numero di scambi
- C - il numero di confronti

Su un tipico computer, il tempo totale di esecuzione sarà circa:

$$\alpha C + \beta S + \gamma P + \delta$$

dove le costanti α, β, γ e δ dipendono dal linguaggio assembler prodotto dal compilatore così come dalle caratteristiche hardware della macchina utilizzata.

Durante la fase di partizionamento si eseguono $n-1+2$ confronti perché il perno viene confrontato con tutti i rimanenti elementi del vettore ma ce ne sono due, gli elementi che creano la partizione, che io confronto due volte perché li confronto sia con un indice e con l'altro, quindi questo vuol dire che complessivamente durante la fase di partizionamento io faccio sempre $n+1$ confronti (in questa versione dell'algoritmo). Per studiare l'algoritmo bisogna chiedersi quanti sono i partizionamento necessari, quanti sono gli scambi effettuati e quanti sono i confronti (in genere quando si fa l'analisi di questi algoritmi si considerano soltanto i confronti perché sono quelli di costo predominante). Il tempo di esecuzione in qualche modo sarà una funzione di questi tre parametri. Ciò che rende l'algoritmo interessante da un punto di vista dell'analisi è che il numero di confronti nell'algoritmo dipende fortemente da come sono distribuiti i dati. Analizzare un algoritmo vuol dire innanzitutto riuscire a individuare una relazione matematica che descriva la quantità di interesse in maniera precisa, in questo caso ci occupiamo dei confronti. Il caso ottimo nel quicksort si ha quando le partizioni che trovo sono perfettamente bilanciate (se pensate alle partizioni come alla costruzione di un albero quelle danno origine un albero bilanciato e quindi con l'altezza minima).

Confronti nel Quicksort

- A differenza del Mergesort, il numero di confronti effettuati dall'algoritmo Quicksort dipende dalla distribuzione dei dati in ingresso.
- Caso ottimo (partizioni bilanciate):

$$C_n = C_{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} + C_{\lceil (n-1)/2 \rceil} + \boxed{n+1} \Rightarrow C_n = O(nlgn)$$

- Caso pessimo (le partizioni degenerano, una è vuota e l'altra contiene $n-1$ elementi):

costo partizionamento

$$C_n = C_{n-1} + \boxed{n+1} \Rightarrow C_n = O(n^2)$$

La ricorrenza: si rappresenta il numero di confronti nel caso ottimo (partizione bilanciate), $n+1$ è il costo del partizionamento, poi devo tener conto del fatto che ho le chiamate ricorsive ma se stiamo parlando di un bilanciamento perfetto vuol dire che il vettore in questo caso viene diviso a metà (simile alla situazione del mergesort), quindi nel caso ottimo dovrebbero essere distribuiti nello stesso numero a sinistra e a destra, a seconda che n sia pari o dispari questi vettori avranno la differenza di un elemento. da un punto di vista matematico questo lo rappresento con le parti intere inferiori e superiori. ottengo una ricorrenza molto simile a quella del Mergesort, se non fosse per il fatto che in quella c'è un n invece con $n-1$ perché lì non avevo il perno, e perché nella ricorrenza avevamo un n (il costo della fusione) invece di $n+1$. il caso pessimo è quando una partizione vuota e l'altra invece contiene tutti i rimanenti elementi (si ha un albero che degenera in una lista praticamente).

Analisi del Quicksort nel caso medio

Per ordinare un vettore di n elementi distinti, **ordinati in modo casuale**, il Quicksort usa in media

H numero armonico

n partizionamenti

$2(n+1)(H_{n+1}-1) \approx 2n\ln n - .846n$ confronti

$(n+1)(H_{n+1}-7/3)/3 + 1/2 \approx .333n\ln n - .586n$ scambi

Infatti, ad ogni partizionamento esattamente un elemento trova la sua posizione definitiva, e quindi si hanno n partizionamenti.

L'aspetto più interessante di tutta la questione è capire quanto costa in media ordinare il vettore. L'ipotesi importante che si fa è quella di avere un vettore che contiene n elementi distinti. L'algoritmo può avere una qualsiasi delle $n!$ Permutazioni dei numeri. Nel caso degli scambi troveremo un'espressione simile in cui cambiano le costanti che moltiplicano la parte $nlogn$. nel caso dei confronti si troverà un'espressione che si comporta come $2nlogn$ e nel caso degli scambi invece troveremo un'espressione che in cui la costante che moltiplica $nlogn$

Analisi del Quicksort nel caso medio

Il numero medio di confronti C_n e il numero medio di scambi S_n soddisfano invece le seguenti ricorrenze:

$$C_n = n + 1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(C_{j-1} + C_{n-j}), \quad C_0 = 0$$

Numero medio di scambi durante il partizionamento

$$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(S_{j-1} + S_{n-j}), \quad S_0 = 0, \quad S_1 = 0$$

Se il perno è j, i due sottovettori dopo il partizionamento avranno dimensione $j-1$ e $n-j$:

$j-1$	$n-j$	**j**

è 0.33, questo è il motivo per cui quando si studiano questi algoritmi generalmente si studia soltanto i confronti. I partizionamenti sono n, perché durante ogni partizionamento c'è soltanto il perno che trova la sua posizione definitiva.

Che cosa vuol dire caso medio: immaginiamo di avere l'algoritmo visto e di eseguirlo su tutte le n! Permutazioni e poi vedere qual è il risultato ogni volta sia in termini di confronti che di scambi e fare la media, questo è quello che queste formule riassumono. Le due ricorrenze sono simili, la prima parte è relativa a cosa succede nel partizionamento, la seconda ha un'espressione comune ed è quella che tiene conto della ricorsione. Immaginiamo di avere un vettore contenente i valori da 1 ad n, e che il perno sia j, dopo la fase di partizionamento io mi troverò in una situazione in cui ho nei primi $j-1$ elementi tutti i valori che sono più piccoli di j e nei rimanenti $n-j$ tutti i valori che sono più grandi di j e poi ricorsivamente dovrò ordinare questi due sottovettori, quindi queste ricorrenze traducono proprio quello che ho appena detto. $j-1$ e $n-j$ rappresentano il costo per ordinare i due sotto vettori che ottengo durante la partizione. $\frac{1}{n}$ È la probabilità che l'elemento j si trovi in fondo nel vettore. L'altro aspetto importante è la condizione iniziale $C_0 = 0$ per i confronti, quindi se ho un vettore con n=0 ovviamente non faccio nessun confronto invece se n=1 faccio due confronti (per colpa di questo maggiore o uguale che ho inserito in questa versione dell'algoritmo). Con dimensione nulla e uguale a 1 non faccio nessuno scambio.

Ricorrenza per il numero medio di confronti -1-

$$C_n = n + 1 + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(C_{j-1} + C_{n-j}), \quad C_0 = 0.$$

Osserviamo che le sequenze C_{j-1} e C_{n-j} assumono gli stessi valori quando j varia da 1 a $n-1$:

$$C_n = n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} C_{j-1} = n + 1 + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} C_j$$

Si moltiplica per n e si sottra la stessa formula calcolata per $n-1$:

$$\underline{1}\quad nC_n = n(n+1) + 2\sum_{j=0}^{n-1} C_j, \qquad \underline{2}\quad (n-1)C_{n-1} = (n-1)n + 2\sum_{j=0}^{n-2} C_j$$

$$nC_n - (n-1)C_{n-1} = 2n + 2C_{n-1}, \quad nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n$$

Una volta descritto il problema tramite questa espressione dobbiamo risolverla: Un'osservazione.. In questa somma compare un termine C_{J-1} Che quando j varia da 1 a $n-1$ assumerà valori da 0 fino a $n-1$, poi abbiamo un $n-j$ che varierà da $n-1$ fino a 0, quindi gli indici di questi due termini variano tutti e due da 0 a $n-1$, questo vuol dire che questa espressione la posso riscrivere come se avessi due volte la somma per j che va da 1 a n, metto in evidenza un 2 e la posso riscrivere facendo variare j da 0 a $n-1$. Per risolvere la ricorrenza moltiplico tutto quanto per n, per togliere n al denominatore. La prima intuizione: siccome questa ricorrenza vale per ogni n varrà anche se al posto di n ci metto $n-1$. Cos'è che la rende non semplice? La presenza della sommatoria, l'idea è che se faccio la differenza fra l'espressione 1 e la 2 la riesco ad eliminare, ma che cosa succede quando si fa questa operazione? Mi rimane soltanto il termine della somma di indice $n-1$ perché tutti gli altri se ne vanno. Ottengo una nuova espressione che posso ulteriormente semplificare portando il termine C_{n-1} a destra. Divido tutto per $n(n+1)$. Ho trasformato la mia ricorrenza in una forma che so come risolvere, questo tipo di ricorrenze si risolvono per iterazione. I numeri armonici sono importanti in questo contesto perché quando è n grande si comportano come il $\ln n$ più una costante gamma, nota come costante di Eulero-Mascheroni. L'obiettivo è quello di esprimere questa espressione come un numero armonico e per farlo devo solo aggiustare gli indici. Si ottiene una espressione che corrisponde al numero medio di confronti che l'algoritmo esegue. Se gli do in input una qualsiasi permutazione dei numeri da 1 a n, sommiamo i confronti eseguiti e poi li dividiamo per $n!$ troveremo un numero è esattamente questo.

Ricorrenza per il numero medio di confronti -2-

Dividendo per $n(n+1)$ si ottiene:

$$nC_n = (n+1)C_{n-1} + 2n, \quad \frac{C_n}{n+1} = \frac{C_{n-1}}{n} + \frac{2}{n+1}.$$

A questo punto possiamo iterare la ricorrenza, come segue:

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2}{n+1} + \frac{C_{n-1}}{n} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \frac{C_{n-2}}{n-1} =$$

$$= \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \frac{C_{n-3}}{n-2} = \cdots =$$

$$= \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \cdots + \frac{2}{n-j} + \frac{C_{n-j-2}}{n-j-1}$$

Ci si ferma quando $n-j-2=0$

$$\frac{C_n}{n+1} = \frac{2}{n+1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n-1} + \cdots + \frac{2}{2} + \frac{C_0}{1} = \boxed{2\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}}.$$

Ricorrenza per il numero medio di confronti -3-

La sommatoria nell'espressione $\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}$ è legata al concetto di *numero armonico* H_n:

$$H_n = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \sim \ln n + \gamma$$

dove $\gamma = 0.57721\cdots$ è la ben nota costante di Eulero-Mascheroni.

$$\frac{C_n}{n+1} = 2\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} = 2\left(\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{j} - 1\right) = 2(H_{n+1} - 1).$$

$$C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$$

→

Ricorrenza per il numero medio di scambi -1-

Il numero medio di scambi S_n soddisfa una ricorrenza simile a quella dei confronti:

$$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(S_{j-1} + S_{n-j}), \quad n \geq 2, \quad S_0 = S_1 = 0.$$

si tratta di dimostrare che se j è il perno, durante il partizionamento si fanno in media $\frac{n-j}{n-1}(j-1)$ scambi e che:

$$\frac{n-2}{6} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{n-1}(j-1).$$

Ricorrenza per il numero medio di scambi -2-

Sia p_k^j la probabilità di fare k scambi durante il partizionamento quando il perno è j.

$j-1$	$n-j$	**j**

Il numero di permutazioni che hanno j nella posizione finale, k elementi maggiori di j nelle prime $j-1$ posizioni e altrettanti nelle rimanenti $n-j$ posizioni è:

Rappresentano la scelta dei k elementi fuori posto da una parte e dall'altra del vettore

$$\underbrace{\binom{n-j}{k}\binom{j-1}{k}}\underbrace{(j-1)!(n-j)!}$$

Rappresentano il fatto che le due parti del vettore sono mescolate a piacere

Per la probabilità di fare k scambi devo dividere per quante sono le permutazioni che hanno come elemento finale j, cioè $(n-1)!$

$$p_k^j = \frac{\binom{n-j}{k}\binom{j-1}{k}(j-1)!(n-j)!}{(n-1)!} =$$

$$= \binom{n-j}{k}\binom{j-1}{k}\frac{(j-1)!(n-j)!}{(n-1)!} = \frac{\binom{n-j}{k}\binom{j-1}{k}}{\binom{n-1}{j-1}}.$$

Come mai il numero medio di scambi durante il partizionamento è dato da $\frac{n-2}{6}$? Questa ricorrenza vale $n \geq 2$, perché le condizioni iniziali sono uguali a zero, quindi questa espressione mi vale per dimensioni del vettore ≥ 2. L'idea è che devo cercare di capire quanti sono gli scambi che io faccio quando il perno è j, quindi se il perno è j, con j che può assumere un qualsiasi valore da 1 a n, tenendo conto della probabilità che il perno sia j, è quello che si dimostrerà è che si fanno $\frac{n-j}{n-1}(j-1)$ scambi, quindi a seconda del valore del perno il numero di scambi cambia, ed è dalla sommatoria di j che va da 1 a n, moltiplicata per $1/n$, che si trova proprio $\frac{n-2}{6}$. Dobbiamo capire come mai quando il perno è j si fa questo numero di scambi? È importante avere chiaro quello che succede durante il partizionamento, immaginiamo che in posizione finale ci sia j, e dopo il partizionamento avrò a sinistra $j-1$ elementi più piccoli di j e a destra avrò $n-j$ elementi che sono più grandi di j, quanti scambi faccio quando il perno è j? Devo considerare è la probabilità di fare K scambi quando il perno è j, cioè quando sono in questa configurazione. faccio k scambi quando nelle prime $j-1$ posizioni ci sono k elementi che sono più grandi di j e contemporaneamente nelle rimanenti $n-j$ posizioni ce ne sono altrettanti K che sono più piccoli. Stiamo valutando gli scambi che si fanno prima che il perno vada nella sua posizione definitiva. Quante sono le permutazioni che hanno j in fondo, K elementi maggiori di J nelle prime posizioni e altrettanti nelle posizioni rimanenti, allora i k elementi che si trovano tra le prime $j-1$ posizioni fuori posto li devo andare a pescare tra gli $n-j$ elementi che sono sicuramente maggiori di J, cioè gli elementi maggiori d j sono $n-j$, di questi ne pesco k e questo lo posso fare con utilizzando i coefficienti binomiali e analogamente avrò nelle posizioni della parte destra del vettore gli altri k elementi fuori posto, ma siccome questi sono elementi che sono più piccoli di j, tali elementi li posso scegliere in $j-1$ su k modi. L'espressione finale rappresenta la probabilità di fare K scambi quando il perno è j.

Ricorrenza per il numero medio di scambi -3-

Il numero medio di scambi se il perno è j è $\sum_{k\geq 0} kp_k^j$:

$$\sum_{k\geq 0} k\frac{\binom{n-j}{k}\binom{j-1}{k}}{\binom{n-1}{j-1}} = \frac{1}{\binom{n-1}{j-1}}\sum_{k\geq 0}\boxed{k}\binom{n-j}{k}\binom{j-1}{k}$$

quindi sviluppando il secondo coefficiente binomiale e semplificando con k avremo:

$$\frac{1}{\binom{n-1}{j-1}}\sum_{k\geq 0}\binom{n-j}{k}\frac{(j-1)(j-2)!}{(k-1)!(j-1-k)!} = \frac{(j-1)}{\binom{n-1}{j-1}}\sum_{k\geq 0}\binom{n-j}{k}\binom{j-2}{k-1}$$

Dato che $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$\frac{(j-1)}{\binom{n-1}{j-1}}\sum_{k\geq 0}\binom{n-j}{k}\binom{j-2}{k-1} = \frac{(j-1)}{\binom{n-1}{j-1}}\sum_{k\geq 0}\binom{n-j}{k}\binom{j-2}{j-1-k}.$$

Quicksort: numero medio di scambi

Osserviamo che al denominatore ho un coefficiente che non dipende da k, quindi questa espressione la posso sicuramente portare fuori dalla somma. Cos'è che rende insidioso il calcolo di questa somma? La presenza di questo k (esiste una formula che ci permette di calcolare il prodotto di due coefficienti binomiali), quindi l'idea è quella di trasformare i coefficienti binomiali in modo da inglobare k in uno dei due coefficienti, in particolare se andiamo a sviluppare il secondo coefficiente binomiale come rapporto dei fattoriali $(j-1)!$, scritto come prodotto di $(j-1)(j-2)!$, e $k!\,(j-1-k)!$, con il $k!$ Semplificato con il k, ottenendo quindi $(k-1)!$. Sviluppando il secondo coefficiente binomiale riesco ad eliminare k, e porto fuori $(j-1)$. Ciò che rimane lo scrivo di nuovo

Ricorrenza per il numero medio di scambi -4-

Possiamo utilizzare la seguente formula di **convoluzione di Vandermonde**:

$$\sum_{k\geq 0}\binom{r}{k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{n}.$$

Si ha:

$$\frac{(j-1)}{\binom{n-1}{j-1}}\sum_{k\geq 0}\binom{n-j}{k}\binom{j-2}{j-1-k} = \frac{(j-1)}{\binom{n-1}{j-1}}\binom{n-2}{j-1} =$$

$$= (j-1)\frac{(j-1)!(n-j)!}{(n-1)!}\frac{(n-2)!}{(j-1)!(n-j-1)!} = \frac{(n-j)(j-1)}{(n-1)}.$$

Il numero medio di scambi durante la fase di partizionamento è dato da:

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n-j}{n-1}(j-1) = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(nj - j^2 - n + j).$$

come coefficiente binomiale, e utilizzo le proprietà dei coefficienti binomiali. Si fa tutto ciò perché (come anticipato) esiste la formula di convoluzione che dice che se si ha una sommatoria in cui mi compaiono due coefficienti binomiali, in cui il primo è del tipo $\binom{r}{k}$ E il secondo è del tipo $\binom{s}{n-k}$ E k è l'indice della somma, essa equivale $\binom{r+s}{n}$, cioè il cui coefficiente binomiale che ottengo facendo le somme dei numeratori e denominatori. Alla fine ho trovato questa quantità che rappresenta il numero medio di scambi della versione dell'algoritmo Quicksort che abbiamo fatto, eseguiti durante la fase di partizionamento, prima che i puntatori si incrocino, quindi non si conta lo scambio finale che porta il perno nella sua posizione definitiva. Non abbiamo ancora finito perché ci interessa il numero medio di scambi in generale indipendentemente dal fatto che il perno sia J, quindi devo fare di nuovo una somma, quindi farò variare J da 1 a n, poi moltiplico per $\frac{1}{n}$ (probabilità che il perno sia j).

Ricorrenza per il numero medio di scambi -5-

La somma si esegue facilmente spezzandola e ricordando che:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \quad e \quad \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Quindi:

$$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(nj-j^2-n+j) = \frac{1}{n(n-1)}\left[(n+1)\sum_{j=1}^{n} j - n\sum_{j=1}^{n} 1 - \sum_{j=1}^{n} j^2\right] =$$

$$\frac{1}{n(n-1)}\left((n+1)\frac{n(n+1)}{2} - n^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) =$$

$$\frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{n^3-3n^2+2n}{6}\right) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6n(n-1)} = \frac{n-2}{6}.$$

Ricorrenza per il numero medio di scambi -7-

Iterando la ricorrenza, con $S_2 = 0$, si ha:

$$\frac{S_n}{n+1} = \cdots = \frac{S_2}{3} + \sum_{k=3}^{n}\frac{2k-3}{6k(k+1)} = \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{5}{6(k+1)} - \frac{1}{2k}\right) =$$

$$= \frac{5}{6}\sum_{k=4}^{n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k} == \frac{5}{6}\left(H_{n+1} - \frac{11}{6}\right) - \frac{1}{2}\left(H_n - \frac{3}{2}\right).$$

Dato che $H_{n+1} = H_n + \frac{1}{n+1}$:

$$\frac{S_n}{n+1} = \frac{1}{3}H_{n+1} + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{7}{9}$$

e quindi:

$$\boxed{S_n = \frac{1}{3}(n+1)\left(H_{n+1} - \frac{7}{3}\right) + \frac{1}{2}}$$

Quando e perché simulare un algoritmo?

- Abbiamo una formula che descrive il comportamento del nostro algoritmo e vogliamo verificare sperimentalmente se è corretta.
- Non siamo riusciti a trovare una formula e vorremmo avere indicazioni empiriche sul comportamento dell'algoritmo, ovvero abbiamo in proposito una qualche ipotesi e vorremmo verificarla.
- La simulazione nel caso medio non è banale.

Ricorrenza per il numero medio di scambi -6-

La ricorrenza per S_n si risolve in modo analogo a quello utilizzato per risolvere la ricorrenza per il numero medio di confronti C_n.

$$S_n = \frac{n-2}{6} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(S_{j-1} + S_{n-j}), \quad S_0 = 0, \quad S_1 = 0$$

$$nS_n - (n-1)S_{n-1} = \frac{2n-3}{6} + 2S_{n-1}$$

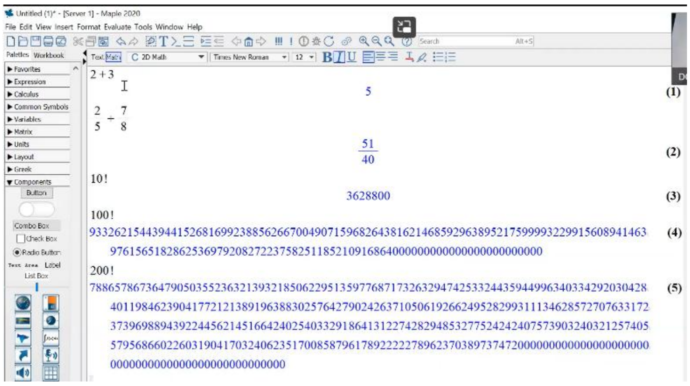
$$\frac{S_n}{n+1} = \frac{S_{n-1}}{n} + \frac{2n-3}{6n(n+1)}$$

Tale somma la calcolo ricordando queste espressioni, la prima è la somma dei primi n numeri interi, e la seconda è la somma dei quadrati, quindi è un passaggio puramente algebrico. Alla fine trovo $\frac{n-2}{6}$, e per ora abbiamo semplicemente dimostrato che nella ricorrenza ci dobbiamo mettere questo fattore, perché rappresenta il numero medio di scambi che si fanno durante il partizionamento. Come si risolve la ricorrenza? Si risolve con le funzioni generatrici, però per ora accontentiamoci di questo modo di risoluzione come nel caso dei confronti. Come avevamo fatto nel caso dei confronti i primi passaggi sono identici.

Iterando la ricorrenza si vede che è collegata ai numeri armonici. L'idea è che tutte le volte decremento l'indice e sommo un termine di questo tipo alla ricorrenza.

L'idea per calcolare questa somma conviene scrivere questo rapporto di polinomi in modo da scomporlo in frazioni più semplici. Per fare una cosa del genere devo imporre due costanti A e B in modo tale che questo rapporto sia della forma $\frac{A}{K+1} + \frac{B}{K}$, facendo questa assunzione si possono determinare i coefficienti A e B. Faccio questa trasformazione perché mi voglio ricondurre ai numeri armonici.

Maple:



$\text{sqrt}(3) + 4 + \frac{3}{5}$

$$\sqrt{3} + \frac{23}{5}$$

$evalf(\%)$

$$6.332050808$$

Forzare il calcolo → funzione chiamata $evalf(\%)$, il percentuale si riferisce all'ultima istruzione che ho eseguito. (attenzione non fa riferimento all'espressione che si trova prima ma all'ultima che ho eseguito).

$sum(j, j = 1..n)$

$$\frac{(n+1)^2}{2} - \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$$

$simplify(\%)$

$$\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$factor(\%)$

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

$sum(j^2, j = 1..n)$

$$\frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n}{6} + \frac{1}{6}$$

$factor(\%)$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$\frac{1}{n} \cdot sum\left(\frac{(n-j)\cdot(j-1)}{n-1}, j = 1..n\right)$

$$\frac{-\frac{3n(n+1)}{2(n-1)} + \frac{n(n+1)^2}{2(n-1)} + \frac{(n+1)^2}{n-1} - \frac{2(n+1)}{3(n-1)} - \frac{(n+1)^3}{3(n-1)} + \frac{n}{n-1}}{n}$$

$factor(\%)$

$$\frac{n}{6} - \frac{1}{3}$$

Esempio somme dei quadrati e somma dei primi n numeri: esiste la funzione sum che mi permette di calcolare la somma degli interi dei primi n numeri

$f := k \rightarrow \frac{(2\cdot k - 3)}{6\cdot k\cdot(k+1)}$

$$f := k \mapsto \frac{2\cdot k - 3}{6\cdot k\cdot(k+1)}$$

$seq(f(k), k = 1..10)$

$$-\frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{24}, \frac{1}{24}, \frac{7}{180}, \frac{1}{28}, \frac{11}{336}, \frac{13}{432}, \frac{1}{36}, \frac{17}{660}$$

$convert(f(k), parfrac, k)$

$$-\frac{1}{2k} + \frac{5}{6(k+1)}$$

?convert

:= significa assegnazione

Seq(f(k), k= 1..10) calcolare sequenze al variare di k nell'intervallo 1-10

Convert utilizzo per vedere rapporto come una somma di termini più semplici, convert è una funzione che mi permette di convertire un'espressione da una forma all'altra

Parfrac converte una certa espressione razionale Fratta in somma di frazioni parziali

$espr := \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$

$$espr := \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

$normal(espr)$

$$\frac{Ak + Bk + A}{k(k+1)}$$

Funzione normale è un'altra funzione di semplificazione che mi rimette, se ho delle frazioni, me le mette tutte a denominatore

$eq1 := A + B = \frac{1}{3}$

$$eq1 := A + B = \frac{1}{3}$$

$eq2 := A = -\frac{1}{2}$

$$eq2 := A = -\frac{1}{2}$$

$solve(\{eq1, eq2\}, \{A, B\})$

$$\left\{A = -\frac{1}{2}, B = \frac{5}{6}\right\}$$

$H := n \rightarrow add\left(\frac{1}{k}, k = 1..n\right)$

$$H := n \mapsto add\left(\frac{1}{k}, k = 1..n\right)$$

Sum è una funzione che trasforma una somma in un'espressione chiusa

Add è una funzione che somma dei termini numerici

$seq(H(i), i = 1..10)$

$$1, \frac{3}{2}, \frac{11}{6}, \frac{25}{12}, \frac{137}{60}, \frac{49}{20}, \frac{363}{140}, \frac{761}{280}, \frac{7129}{2520}, \frac{7381}{2520}$$

$C := n \rightarrow 2\cdot(n+1)\cdot(H(n+1) - 1)$

$$C := n \mapsto (2\cdot n + 2)\cdot(H(n+1) - 1)$$

$S := n \rightarrow \frac{1}{3}\cdot(n+1)\cdot\left(H(n+1) - \frac{7}{3}\right) + \frac{1}{2}$

$$S := n \mapsto \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{3}\right)\cdot\left(H(n+1) - \frac{7}{3}\right) + \frac{1}{2}$$

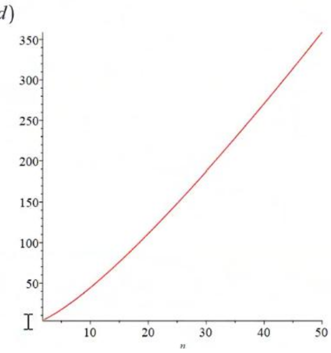
$seq(C(i), i = 2..10)$

$$5, \frac{26}{3}, \frac{77}{6}, \frac{87}{5}, \frac{223}{10}, \frac{962}{35}, \frac{4609}{140}, \frac{4861}{126}, \frac{55991}{1260}$$

$seq(S(i), i = 2..10)$

$$0, \frac{1}{6}, \frac{5}{12}, \frac{11}{15}, \frac{199}{180}, \frac{961}{630}, \frac{1669}{840}, \frac{1879}{756}, \frac{22811}{7560}$$

$plot(C(n), n = 2..50, color = red)$



Numeri speciali

Permutazioni -1-

Una permutazione di un insieme di oggetti è una disposizione di questi oggetti in qualsiasi ordine. Se $n \in \mathbb{N}$, sia P_n l'insieme di tutte le permutazioni di n oggetti. (conta anche l'ordine)

$n=0$	() Permutazione vuota → insieme vuoto di oggetti
$n=1$	(1)
$n=2$	(1, 2),(2, 1)
$n=3$	(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1),(3,2,1),(3,1,2)

I primi valori della sequenza $|P_n|$ sono $\{1, 1, 2, 6, \cdots\}$
Quanto vale $|P_n|$ in generale?

Cos'è una permutazione? Una permutazione è costituita da un'insieme di oggetti disposti in un qualsiasi ordine e tanto per fissare le idee possiamo immaginare che ad ogni oggetto sia associato un numero, quindi possiamo immaginare di avere ogni oggetto con un'etichetta da 1 a n. Come faccio a dimostrare che le permutazioni sono $n!$? Nel caso n=0 e n=1 ho soltanto una permutazione, quando n=2 ho due permutazioni, quando n=3 ne ho sei, quindi ho una sequenza di valori che comincia con questi numeri 1,1,2,6…

Permutazioni -2-

Sia $\pi \in P_n$ una permutazione: $\pi = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$. Possiamo ottenere una permutazione in P_{n+1} aggiungendo $n+1$ in una qualsiasi posizione di π:

$$(n{+}1, a_1, a_2, \cdots, a_n), (a_1, n{+}1, a_2, \cdots, a_n), \cdots (a_1, a_2, \cdots, a_n, n{+}1)$$

Da ogni permutazione in P_n, otteniamo $n+1$ permutazioni in P_{n+1} e se partiamo con una permutazione in P_{n+1} ed eliminiamo l'elemento $n+1$ abbiamo una e una sola permutazione in P_n.
Quindi si ha la ricorrenza: $|P_{n+1}| = (n+1)|P_n|$

$$|P_{n+1}| = (n{+}1)|P_n| = (n{+}1)n|P_{n-1}| = \cdots = (n{+}1)n(n{-}1)\cdots 1|P_0|$$

Dato che $|P_0| = 1$ si ha:

$$|P_{n+1}| = (n+1)! \quad \text{o} \quad |P_n| = n!$$

Impariamo a ragionare sulle sequenze: come si fa quindi a dimostrare che le permutazioni di n oggetti è $n!$? Come faccio a costruire oggetti di una certa dimensione a partire da oggetti che hanno una dimensione più piccola? Consideriamo l'insieme $n+1$, cioè le permutazioni che stanno fatte su $n+1$ oggetti, come faccio a ottenere una permutazione di $n+1$ oggetti a partire da quelle che sono costituite da n oggetti? Ogni oggetto lo posso etichettare con un numero da 1 a n, quindi possiamo immaginarci che questi valori $a_1 \ldots a_n$ siano numeri da 1 a n mescolati a piacere, quindi quello che devo fare è aggiungere l'oggetto $n+1$ e aggiungerlo in tutti i modi possibili nella mia permutazione di lunghezza n.

Il numero di permutazioni di lunghezza $n+1$ è uguale $n+1\,|P_n|$, questo mi traduce esattamente l'operazione di costruzione che ho fatto. È una ricorrenza che risolvo per iterazione. Tutte le volte che faccio questa operazione aggiungo un fattore che rappresenta un intero decrementato di uno rispetto a quello precedente e mi fermo quando arrivo p_0, che rappresenta la permutazione vuota, quindi conta soltanto per un oggetto, in questo modo si ottiene la definizione del fattoriale.

Disposizioni

Se abbiamo n elementi, possiamo chiederci quanti diversi raggruppamenti ordinati di k elementi esistono di tra gli n oggetti. Ad esempio, se abbiamo 4 oggetti a, b, c, d si hanno i seguenti 12 raggruppamenti:

$$(a,b),\ (a,c),\ (a,d),\ (b,a),\ (b,c),\ (b,d),$$

$$(c,a),\ (c,b),\ (c,d),\ (d,a),\ (d,b),\ (d,c).$$

Se $D_{n,k}$ denota il numero di possibili disposizioni di n elementi in raggruppamenti di k elementi, si ha:

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$

Considero sequenze di oggetti ordinate, però non si prendano tutti, se ne prende soltanto un certo numero. Il ragionamento corrisponde esattamente al modo in cui ho costruito tali sequenze: il primo elemento lo scelgo fra tutti quelli che ho a disposizione, quindi ho n possibilità di scelta, il secondo valore lo scelgo fra tutti quelli che sono rimasti, quindi fra n-1, ecc.. Questo ragionamento lo posso portare avanti fino ad arrivare a k elementi, quindi quando arrivo al termine n-k+1, ho scelto tutti i k elementi e quindi il prodotto di questi fattori mi dà esattamente il numero delle disposizioni di n oggetti in gruppi di k.

Combinazioni -1-

Se non si considera l'ordine degli elementi nei raggruppamenti si ottengono quelle che si chiamano *k-combinazioni*. Ad esempio, le 2-combinazioni di 4 oggetti sono:

$$\mathcal{C}_{4,2} = \{\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\}\}.$$

Se gli oggetti sono 3, le possibili combinazioni sono:

$$\mathcal{C}_{3,0} = \emptyset, \quad \mathcal{C}_{3,1} = \{\{a\},\{b\},\{c\}\},$$

$$\mathcal{C}_{3,2} = \{\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}, \quad \mathcal{C}_{3,3} = \{\{a,b,c\}\}.$$

Il numero di k-combinazioni di n oggetti è rappresentato dal *coefficiente binomiale* $\binom{n}{k}$, con $\binom{n}{0} = 1$ e $\binom{n}{n} = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Il nome "coefficienti binomiali" è dovuto alla ben nota *Formula binomiale*: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Voglio raggruppare n oggetti in gruppi di k, però questa volta non mi interessa mantenere l'ordinamento. Le configurazioni ovviamente diminuiscono, perché la coppia a-b mi vale soltanto una volta, mentre prima avevo sia a-b che b-a, ecc.

Coefficienti binomiali: $\binom{n}{0} = 1$ perchè ho soltanto l'insieme vuoto e $\binom{n}{n} = 1$ perché prendo tutti gli oggetti e quindi ho soltanto un insieme. Si chiamano coefficienti binomiali perché sono legati alla formula binomiale.

Combinazioni -2-

Esiste una semplice formula per calcolare i coefficienti binomiali;

$$\binom{n}{k} = \frac{D_{n,k}}{k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$$

Questa formula fornisce un modo semplice per calcolare i coefficienti binomiali in modo ricorsivo. In effetti abbiamo:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} =$$

$$= \frac{n}{k}\frac{(n-1)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

con l'espressione a destra che successivamente si riduce a $\binom{r}{0}$, che è 1 come abbiamo già visto. Ad esempio:

$$\binom{7}{3} = \frac{7}{3}\binom{6}{2} = \frac{7\,6}{3\,2}\binom{5}{1} = \frac{7\,6\,5}{3\,2\,1}\binom{4}{0} = 35$$

Combinazioni -4-

In particolare:

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k\frac{(n+k-1)\cdots(n+1)n}{k!} =$$

$$= (-1)^k\frac{(n+k-1)\cdots(n+1)n}{k!}\frac{(n-1)!}{(n-1)!} =$$

$$= (-1)^k\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k\binom{n+k-1}{k}$$

Triangolo di Pascal -1-

I coefficienti $\binom{n}{k}$ contano il numero dei sottoinsiemi con k elementi di un insieme con n elementi e soddisfano la seguente ricorrenza:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Infatti, siano $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ gli elementi dell'insieme e fissiamone uno, ad esempio a_n. Siano S^+ e S^- i sottoinsiemi di k elementi contenenti a_n e non contenenti a_n, rispettivamente: il numero di elementi in S^+ è $\binom{n-1}{k-1}$ e quello in S^- è $\binom{n-1}{k}$.

Triangolo di Pascal -2-

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	**10**	**10**	5	1	
6	1	6	15	**20**	15	6	1

La regola di simmetria è abbastanza evidente e una semplice osservazione è che la somma degli elementi nella riga n è 2^n, pari al numero dei sottoinsiemi in un insieme con n elementi.

Calcolare il coefficiente binomiale: Il numero delle disposizioni di n oggetti presi in gruppi di k diviso il numero delle permutazioni di questi oggetti mi dice in quanti modi posso scegliere k oggetti avendone n a disposizione.

Combinazioni -3-

Una importante formula di simmetria è:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{k};$$

La definizione di coefficiente binomiale può essere generalizzata a numeratori reali:

$$\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

Questa formula di simmetria l'avevamo già incontrata quando abbiamo fatto i conti sul numero medio di scambi nel quicksort. L'interpretazione è piuttosto semplice perché è chiaro che se gli oggetti gli scelgo su k su n oppure li scelgo nei rimanenti n-k ottengo lo stesso numero di modi. Osservo che siccome ho un k! è naturale che k sia un intero perché il fattoriale è definito su gli interi però a numeratore ho un prodotto quindi questa formula la potrei calcolare anche con un n di tipo reale.

Un caso particolare è quando al numeratore ho un numero negativo. Questa è una formula che ci servirà molto perché permette di passare da coefficienti binomiali in cui compare un numeratore negativo a coefficienti binomiali con numeratore positivo oppure viceversa. Ha un ruolo piuttosto importante quando si farà l'estrazione di coefficienti dalle funzioni generatrici (quando devo fare il passaggio all'indietro quindi ricavare il coefficiente, questa è una trasformazione che ci sarà spesso utile).

Volevo evidenziare questa relazione di ricorrenza: come mai vale questa relazione? Lucido,(questa relazione è importante perché ci dà un modo semplice e veloce di costruire il triangolo di pascal). Perché questa relazione mi interessa? Perché a partire da questa relazione riesco a costruirmi in maniera veloce il triangolo di pascal, che contiene questi valori $\binom{n}{k}$. La relazione ci dice che se in una tabella n rappresenta l'indice della riga e k rappresenta l'indice della colonna posso ricavare un generico elemento in posizione n,k andando a vedere che cosa ho riga n-1 e nella colonna k-1 sommandolo a cosa ho sempre nella riga n-1 e nella colonna k. Nella prima colonna ho valori del tipo $\binom{n}{0} = 1$ e nella diagonale ho valori del tipo $\binom{n}{n} = 1$,una volta fatta questa inizializzazione ogni altro elemento lo posso costruire guardando che cosa c'è in (n-1, k-1)+(n-1,k), perché questo è quello che mi dice la ricorrenza. Una caratteristica del triangolo è che le somme degli elementi che si trovano sulla stessa riga sono una potenza del 2. Un'altra osservazione su questo triangolo è che ci sono delle righe di indice dispari che sono perfettamente simmetriche, perché hanno un numero pari di elementi, e delle righe di indice pari

Coefficienti binomiali centrali

I numeri $c_n = \binom{2n}{n}$ sono chiamati *coefficienti binomiali centrali*. Sono importanti perché ci permettono di esprimere i coefficienti binomiali $\binom{-1/2}{n}$ con una forma che li richiama:

1-Si parte dalla

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1/2)(-3/2)\cdots(-(2n-1)/2)}{n!} =$$

2-Si evidenziano i segni negativi:

$$= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2^n n!} =$$

3-Si moltiplica per qualcosa sopra e sotto in modo tale da avere il fattoriale di un numero intero

$$= (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdots(2n)}{2^n n! 2\cdot 4\cdots(2n)} =$$

$$(-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! 2^n (1\cdot 2\cdots n)} == \frac{(-1)^n}{4^n}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$$

Ricorrono spesso quando si vanno a estrarre i coefficienti di funzioni generatrici e dal punto di vista algebrico sono interessanti perché ci permettono di esprimere altri coefficienti binomiali.

in cui c'è un elemento centrale rispetto agli altri. Questi numeri si chiamano coefficienti binomiali centrali e sono quelli del tipo $\binom{2n}{n}$.

Coefficienti binomiali speciali

Le seguenti relazioni saranno utilizzate per trasformare le funzioni generatrici nei corrispondenti coefficienti.

$$\binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$$

$$\binom{1/2}{n} = \frac{(-1)^{n-1}}{4^n(2n-1)}\binom{2n}{n}$$

$$\binom{-3/2}{n} = \frac{(-1)^n(2n+1)}{4^n}\binom{2n}{n}$$

$$\binom{3/2}{n} = \frac{3\cdot(-1)^n}{4^n(2n-1)(2n-3)}\binom{2n}{n}$$

Funzioni generatrici

L'operatore funzione generatrice

La *funzione generatrice* per la sequenza $A = (a_0, a_1, a_2, \cdots) = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è definita come

$$a(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots = \sum_{k>=0} a_k t^k$$

dove $a(t)$ è una *serie formale di potenze* nell'indeterminata t.

Data la sequenza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'*operatore funzione generatrice* $\mathcal{G}$ restituisce la funzione generatrice per la sequenza:

$$\mathcal{G}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a(t).$$

In questa espressione t è un *segna posti* e una notazione più accurata sarebbe $\mathcal{G}_t(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a(t)$.

Esempi di funzioni generatrici

Le sequenze che da un certo punto in poi hanno tutti 0 si riconducono a polinomi

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,2,3,0,0,0,\cdots), \quad \mathcal{G}(a_n) = t + 2t^2 + 3t^3$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,0,3,0,5,0,0,\cdots), \quad \mathcal{G}(a_n) = 1 + 3t^2 + 5t^4$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots), \quad \mathcal{G}(a_n) = \frac{t}{1-t-t^2}$$

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,2,5,\frac{26}{3},\frac{77}{6},\frac{87}{5},\frac{223}{10},\cdots), \quad \mathcal{G}(a_n) = \frac{2}{(1-t)^2}\ln\frac{1}{1-t}$$

Abbiamo una sequenza infinita di numeri che dipende da un certo indice n che varia nei numeri naturali. Per studiare queste sequenze introduciamo il concetto di funzione generatrice. Che cos'è una funzione generatrice? Si tratta di una serie formale di potenze in cui i coefficienti sono proprio quelli della mia sequenza, quindi per definizione la funzione generatrice di una sequenza è data dalla sommatoria $\sum_{k\geq 0} a_k t^k$. La t nel contesto delle serie formali di potenze non dovete vederla come una variabile, cioè come un qualcosa che poi può assumere dei valori, ma più come un segnaposto. In generale la potenza t^n è un segnaposti per indicare il termine ennesimo generico della nostra sequenza. L'obiettivo è riuscire a scrivere questa somma infinita come una funzione finita espressa dalle funzioni matematiche classiche. Si va da una sequenza che può assumere un'infinita di valori a una funzione che riesco ad esprimere in maniera finita (quindi non come una somma) ma che ovviamente contiene al suo interno questa sequenza di valori infinita. Cos'è l'operatore funzione generatrice? È un operatore che si applica ad una sequenza e restituisce la sua funzione generatrice, quindi parto da una sequenza applico l'operatore e mi restituisce la serie formale di potenze che corrisponde alla nostra sequenza. osserviamo che c'è una corrispondenza tra la semplicità o la complessità della sequenza e la funzione generatrice, quindi per una sequenza semplice si ha funzione generatrice semplice. Maggiore è la complessità della sequenza maggiore sarà la complessità anche da un punto di vista matematico del problema che dovremo andare a risolvere.

Le proprietà dell'operatore $\mathcal{G}$

Linearità: $\mathcal{G}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\mathcal{G}(a_n) + \beta\mathcal{G}(b_n)$

$$\mathcal{G}(\alpha a_n + \beta b_n) = \sum_{k\geq 0}(\alpha a_k + \beta b_k)t^k = \alpha\sum_{k\geq 0} a_k t^k + \beta\sum_{k\geq 0} b_k t^k$$

Spostamento: $\mathcal{G}(a_{n+1}) = \frac{\mathcal{G}(a_n)-a_0}{t}$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots - a_0 = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

Derivazione: $\mathcal{G}(na_n) = tD\mathcal{G}(a_n), \quad \mathcal{G}((n+1)a_{n+1}) = D\mathcal{G}(a_n)$

$$D\mathcal{G}(a_n) = D(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots) = a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + \cdots$$

Proprietà di linearità: trovare la funzione generatrice di una sequenza di questo tipo equivale a trovare separatamente le funzioni generatrici della sequenza a_n e della sequenza b_n, e poi sommarle dopo averle moltiplicate per i fattori α e β. La dimostrazione è piuttosto semplice perché la funzione generatrice di una sequenza non è altro che la serie formale che corrisponda ai coefficienti quindi avrò una somma infinita di coefficienti che posso spezzare e portando fuori le costanti, che non dipendono da k, e infine queste due somme per definizione corrispondono proprio alle due funzioni generatrici delle sequenze a_n e b_n. Proprietà di spostamento: mi dice che se ho la funzione generatrice, non della sequenza a_n, ma di una sequenza a_{n+1} (che è spostata in avanti di una posizione) e mi posso ricondurre alla funzione generatrice della sequenza a_n tramite questa trasformazione, cioè alla funzione generatrice della sequenza a_n tolgo il termine a_0 e divido per t (il simbolo che sto utilizzando nella mia notazione). Proprietà di derivazione: mi dice che se ho una sequenza a_n e ogni termine della sequenza lo moltiplico per n, posso calcolare la funzione generatrice facendo un'operazione di derivazione della $G(a_n)$, derivando t. Proprietà di convoluzione: ci permette di capire cosa succede quando moltiplichiamo due funzioni generatrici. Il prodotto è una nuova funzione generatrice di una sequenza che rappresenta la convoluzione delle due sequenze. Se ho il prodotto di due funzioni io so che il coefficiente della funzione risultante è dato da questa somma però posso anche partire da una sequenza che è definita come una somma e andare ad esplicitarla con questa proprietà. Proprietà di composizione: vado a comporre la funzione generatrice con un'altra funzione, cioè proprio come la composizione classica che si fa tra funzioni, quindi invece di avere t nella mia serie infinita ho una nuova funzione. Le proprietà dell'operatore sono queste 5: linearità, spostamento, derivazione, convoluzione e composizione. Applicando queste proprietà in maniera ripetuta si riescono a determinare le funzioni generatrici di tante sequenze.

Le proprietà dell'operatore $\mathcal{G}$

Convoluzione: $\mathcal{G}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = \mathcal{G}(a_n) \cdot \mathcal{G}(b_n)$

$$\mathcal{G}(a_n) \cdot \mathcal{G}(b_n) = (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots)(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots) =$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) t + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) t^2 + \cdots$$
$$+ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) t^n = \mathcal{G}(c_n) = \mathcal{G}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)$$

Composizione: $\sum_{k \geq 0} a_k (\mathcal{G}(b_n))^k = \mathcal{G}(a_n) \circ \mathcal{G}(b_n)$

Ancora sulla proprietà di spostamento

Si può trovare la funzione generatrice di una sequenza che è spostata in avanti di s posizioni:

Spostamento generalizzato

$$G(a_{n+s}) = \frac{\mathcal{G}(a_n) - (a_0 + a_1 t + \cdots + a_{s-1} t^{s-1})}{t^s}$$

Spostamento all'indietro: $\mathcal{G}(a_{n-j}) = t^j \mathcal{G}(a_n)$

Nel caso $j = 1$ si ha $\mathcal{G}(a_n) = \mathcal{G}(a_{(n-1)+1})$ e per la proprietà di spostamento $\mathcal{G}(a_{(n-1)+1}) = t^{-1}(\mathcal{G}(a_{n-1}) - a_{-1})$ dove a_{-1} è il coefficiente di t^{-1} in $a(t)$, che vale 0. In modo del tutto equivalente si dimostra il caso generale.

Il principio d'identità

Date due sequenze $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora $\mathcal{G}(a_n) = \mathcal{G}(b_n)$ se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ $a_n = b_n$.

Il principio ci permette di passare da un'identità tra sequenza a un'identità tra funzioni generatrici. È sufficiente che le due sequenze non concordino su un singolo elemento perché il principio non sia valido.

Questo principio mi dice che se ho due sequenze e conosco una relazione di uguaglianza tra queste due sequenze allora la posso trasformare in un'uguaglianza tra funzioni generatrici. Se ho un'uguaglianza che coinvolge due sequenze e che vale per qualsiasi n, quindi in particolare anche nelle condizioni iniziali, posso trasformare l'uguaglianza in un'uguaglianza tra funzioni generatrici (un esempio interessante di applicazione di ha nel caso del quicksort).

$\mathcal{G}(1) = \frac{1}{1-t}$

Data $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 1, 1, \cdots\}$ si ha $a_{n+1} = a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Applicando il principio di identità troviamo:

$$\mathcal{G}(a_{n+1}) = \mathcal{G}(a_n)$$

e applicando la proprietà di spostamento:

$$\frac{\mathcal{G}(a_n) - a_0}{t} = \mathcal{G}(a_n), \quad \mathcal{G}(a_n) - 1 = t\mathcal{G}(a_n),$$

$$\mathcal{G}(a_n) - t\mathcal{G}(a_n) = 1, \quad \mathcal{G}(a_n) = \frac{1}{1-t}.$$

Consideriamo la sequenza che vale sempre 1, come faccio a trovare la funzione generatrice di questa sequenza utilizzando tutte le proprietà che abbiamo introdotto? in generale per poter applicare le proprietà degli operatore funzioni generatrici ho bisogno di una ricorrenza che definisce la mia sequenza, quindi se non ce l'ho perché la sequenza la conosco addirittura in maniera esplicita, quello che posso fare è cercarne una che la definisce. Ci siamo applicando semplicemente identità e spostamento sono riuscita ad esprimere è una sequenza infinita come quella in questo esempio con una funzione finita.

Maple:

Series: funzione che permette di trovare lo sviluppo in serie delle funzioni.

$f := \frac{1}{1-t}$

I coefficienti sono tutti 1

$$f := \frac{1}{1-t}$$

series(f, t, 10)

$$1+t+t^2+t^3+t^4+t^5+t^6+t^7+t^8+t^9+O(t^{10})$$

$f1 := \frac{t}{(1-t)^2}$

I coefficienti corrispondono a n

$$f1 := \frac{t}{(1-t)^2}$$

series(f1, t, 10)

$$t+2t^2+3t^3+4t^4+5t^5+6t^6+7t^7+8t^8+9t^9+O(t^{10})$$

$f2 := \frac{(t+t^2)}{(1-t)^3}$

$$f2 := \frac{t^2+t}{(1-t)^3}$$

series(f2, t, 10)

$$t+4t^2+9t^3+16t^4+25t^5+36t^6+49t^7+64t^8+81t^9+O(t^{10})$$

Sequenze areate o a segni alterni

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,0,1,0,1,\cdots)$; per trovare la funzione generatrice si procede come segue:

$$\mathcal{G}(a_n) = t+t^3+t^5+\cdots = t\cdot(1+t^2+t^4+\cdots) = t\cdot\sum_{k\geq 0} t^{2k} = t\cdot\sum_{k\geq 0}(t^2)^k$$

Composizione: $\sum_{k\geq 0} a_k(\mathcal{G}(b_n))^k = \mathcal{G}(a_n)\circ\mathcal{G}(b_n)$

e applicando la proprietà di composizione:

$$t\cdot\sum_{k\geq 0}^{a_k=1}(t^2)^k = t\cdot(\mathcal{G}(1)\circ t^2) = t\cdot\frac{1}{1-t^2} = \frac{t}{1-t^2}.$$

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,-1,1,-1,1,-1,\cdots)$; per trovare la funzione generatrice si procede in modo simile:

$$\mathcal{G}(a_n) = 1-t+t^2-t^3+\cdots = \sum_{n\geq 0}(-1)^n t^n =$$

$$= \sum_{n\geq 0} 1\cdot(-t)^n = \mathcal{G}(1)\circ(-t) = \frac{1}{1+t}$$

Sequenza di Fibonacci -1-

Consideriamo la sequenza di *Fibonacci*, definita dalla seguente relazione di ricorrenza del secondo ordine, **lineare e a coefficienti costanti**, con condizioni iniziali $F_0 = 0, F_1 = 1$:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad (F_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,1,2,3,5,8,13,\cdots).$$

Prima effettuiamo uno spostamento di indici $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, per applicare il principio d'identità e poi la proprietà di spostamento:

$$\mathcal{G}(F_{n+2}) = \mathcal{G}(F_{n+1}) + \mathcal{G}(F_n)$$

$$\mathcal{G}(F_{n+2}) = \frac{\mathcal{G}(F_n) - F_0 - F_1 t}{t^2} = \frac{\mathcal{G}(F_n) - t}{t^2},$$

$$\mathcal{G}(F_{n+1}) = \frac{\mathcal{G}(F_n) - F_0}{t} = \frac{\mathcal{G}(F_n)}{t}.$$

Coefficienti costanti perché i coefficienti che moltiplicano ogni termine della sequenza sono tutti 1. Principio di identità: attenzione quando faccio la trasformazione perché ho bisogno di una relazione che valga per ogni n. In questa forma il principio non vale perché ha senso soltanto quando è $n \geq 2$.

$$G(a_{n+s}) = \frac{\mathcal{G}(a_n) - (a_0 + a_1 t + \cdots + a_{s-1}t^{s-1})}{t^s}$$

Quindi considero la

$\mathcal{G}(n^k)$

Data $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,2,3,4,5,\cdots)$ vogliamo trovare $\mathcal{G}(n)$. Da $a_n = n$ si ha:

$$\mathcal{G}(a_n) = \mathcal{G}(n\cdot 1)$$

1 è la sequenza di tutti 1 vista prima

e applicando la proprietà di derivazione

$$\mathcal{G}(n\cdot 1) = tD(\mathcal{G}(1)) = tD\frac{1}{1-t} = t\frac{1}{(1-t)^2}, \quad \mathcal{G}(n) = \frac{t}{(1-t)^2}.$$

In modo analogo possiamo trovare $\mathcal{G}(n^2)$:

$$\mathcal{G}(n^2) = \mathcal{G}(n\cdot n) = tD(\mathcal{G}(n)) = tD\frac{t}{(1-t)^2} = \frac{t+t^2}{(1-t)^3}.$$

Procedendo in modo analogo si può trovare la funzione generatrice di una qualsiasi potenza n^k.

Sequenza in cui gli 0 si alternano con gli 1: è chiaro che questa sequenza è parente stretta della sequenza con tutti 1, qui parte da 0. esprimo la funzione generatrice a partire dalla sua definizione, quindi avrò semplicemente una somma di potenze dispari perché ho soltanto i termini di indice dispari, perché gli altri sono tutti zero. metto in

$f(t^2)$

$$\frac{1}{-t^2+1}$$

series(%, t, 10)

$$1+t^2+t^4+t^6+t^8+O(t^{10})$$

$f(t^3)$

$$\frac{1}{-t^3+1}$$

series(%, t, 20)

$$1+t^3+t^6+t^9+t^{12}+t^{15}+t^{18}+O(t^{21})$$

evidenza un t, ottengo una somma che parte con un termine noto e ha le potenze pari. Compongo la funzione generatrice della sequenza 1 con t^2. Quindi per aggiungere degli zeri in una sequenza è sufficiente andare a comporre la funzione con la potenza del t opportuna oppure se voglio una sequenza con segni alterni devo fare la composizione con $-t$.

Sequenza di Fibonacci: ogni elemento della sequenza è dato dalla somma dei due elementi precedenti e la le condizioni iniziali sono zero e uno. Un'osservazione importante: è una ricorrenza lineare a coefficienti costanti. Lineare perché ogni termine compare soltanto al primo grado.

Sequenza di Fibonacci -2-

Quindi si ha:

$$\frac{\mathcal{G}(F_n) - t}{t^2} = \frac{\mathcal{G}(F_n)}{t} + \mathcal{G}(F_n),$$

$$\mathcal{G}(F_n) - t = t\mathcal{G}(F_n) + t^2\mathcal{G}(F_n),$$

$$\mathcal{G}(F_n) = \frac{t}{1-t-t^2}.$$

La funzione generatrice della sequenza di Fibonacci è **razionale fratta**, ovvero, è il rapporto di due polinomi: questo è sempre vero se si parte da una ricorrenza lineare a coefficienti costanti.

stessa ricorrenza però in cui sposto gli indici di due posizioni in avanti. Applico la proprietà di spostamento in avanti generalizzata. Se vedo una funzione generatrice che è razionale fratta quella probabilmente corrisponde a una sequenza che dietro ha una relazione di ricorrenza di questo tipo.

$f4 := t \to \frac{t}{1-t-t^2}$

$$f4 := t \mapsto \frac{t}{1-t-t^2}$$

Abbiamo esattamente i numeri di Fibonacci

$series(f4(t), t, 20)$

$t+t^2+2t^3+3t^4+5t^5+8t^6+13t^7+21t^8+34t^9+55t^{10}+89t^{11}+144t^{12}+233t^{13}+377t^{14}+610t^{15}+987t^{16}+1597t^{17}+2584t^{18}+4181t^{19}+O(t^{20})$

$f4(-t)$

$$-\frac{t}{-t^2+t+1}$$

Se la compongo con $-t$ ottengo la sequenza a segna alterni di Fibonacci

$series(\%, t, 20)$

$-t+t^2-2t^3+3t^4-5t^5+8t^6-13t^7+21t^8-34t^9+55t^{10}-89t^{11}+144t^{12}-233t^{13}+377t^{14}-610t^{15}+987t^{16}-1597t^{17}+2584t^{18}-4181t^{19}+O(t^{20})$

$f4(t^2)$

$$\frac{t^2}{-t^4-t^2+1}$$

$series(\%, t, 20)$

$t^2+t^4+2t^6+3t^8+5t^{10}+8t^{12}+13t^{14}+21t^{16}+34t^{18}+O(t^{20})$

Se la compongo con t^2 ottengo la sequenza di Fibonacci con degli 0, infatti ho solo le potenze di indice pari.

Sequenza di Tribonacci, condizioni iniziali 0, 1, 1

$$T_n = T_{n-1}+T_{n-2}+T_{n-3}, \quad (T_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0,1,1,2,4,7,13,24,\cdots)$$

$$T_{n+3} = T_{n+2}+T_{n+1}+T_n, \quad \mathcal{G}(T_{n+3}) = \mathcal{G}(T_{n+2})+\mathcal{G}(T_{n+1})+\mathcal{G}(T_n)$$

$$\frac{\mathcal{G}(T_n)-T_0-T_1t-T_2t^2}{t^3} = \frac{\mathcal{G}(T_n)-T_0-T_1t}{t^2}+\frac{\mathcal{G}(T_n)-T_0}{t}+\mathcal{G}(T_n)$$

Si sostituiscono le condizioni iniziali coi loro valori

$$\frac{\mathcal{G}(T_n)-t-t^2}{t^3} = \frac{\mathcal{G}(T_n)-t}{t^2}+\frac{\mathcal{G}(T_n)}{t}+\mathcal{G}(T_n)$$

$$\mathcal{G}(T_n) = \frac{t}{1-t-t^2-t^3}$$

Funzioni generatrici di ricorrenze lineari a coefficienti costanti

- Sia nel caso di Fibonacci sia nel precedente di Tribonacci, abbiamo trovato: $p_1(t)a(t) = p_2(t)$ dove $p_1(t)$ e $p_2(t)$ sono polinomi in t; questo è vero in generale, cioè la funzione generatrice di una ricorrenza lineare a coefficienti costanti è sempre una funzione razionale fratta.
- Data la funzione $a(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$, possiamo sicuramente dire che non è la funzione generatrice di una ricorrenza lineare a coefficienti costanti.

Se c'è la radice sotto è impossibile che provenga da una ricorrenza lineare a coeff costanti.

Sequenza di Tribonacci: ogni valore è dato dalla somma dei tre valori precedenti e ho bisogno di tre condizioni iniziali. Per trovare la funzione generatrice devo incrementare di tre l'indice di ogni termine della ricorrenza e poi applico il principio di identità passando da una relazione tra i termini della sequenza a una relazione tra le corrispondenti funzioni generatrici, e poi applico la proprietà di spostamento.

$\mathcal{G}(\frac{1}{n!}) = e^t$

Avrò un'equazione differenziale

Sia $a_n = \frac{1}{n!}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \frac{1}{720}, \cdots)$.
Applicando il **metodo del rapporto** si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1}, \quad (n+1)a_{n+1} = a_n.$$

Per il principio d'identità si ha $\mathcal{G}((n+1)a_{n+1}) = \mathcal{G}(a_n)$ e posto $b_{n+1} = (n+1)a_{n+1}$ con $b_1 = 1$ e $b_0 = 0$

$$\mathcal{G}(b_{n+1}) = \mathcal{G}(a_n), \quad \frac{\mathcal{G}(b_n)-b_0}{t} = \mathcal{G}(a_n), \quad \frac{\mathcal{G}(na_n)-0}{t} = \mathcal{G}(a_n).$$

Per la proprietà di derivazione:

$$\frac{\mathcal{G}(na_n)}{t} = \frac{tD\mathcal{G}(a_n)}{t} = D\mathcal{G}(a_n), \quad \boxed{D\mathcal{G}(a_n) = \mathcal{G}(a_n)}$$

$$\boxed{\frac{\mathcal{G}'(a_n)}{\mathcal{G}(a_n)} = 1}, \quad \int\frac{\mathcal{G}'(a_n)}{\mathcal{G}(a_n)}dt = \int 1dt, \quad \ln\mathcal{G}(a_n) = t+c \quad \mathcal{G}(a_n) = e^{t+c}.$$

Dato che $a_0 = 1$, si ha $c = 0$ e quindi: $\mathcal{G}(\frac{1}{n!}) = e^t$

Derivazione: $\mathcal{G}(na_n) = tD\mathcal{G}(a_n), \quad \mathcal{G}((n+1)a_{n+1}) = D\mathcal{G}(a_n)$

Trovare la funzione generatrice di questa sequenza: sono in una situazione in cui conosco la sequenza in maniera esplicita e in questo caso applico quello che si chiama il metodo del rapporto, ovvero quando non conosco in maniera esplicita una ricorrenza che definisce la mia sequenza, perchè la conosco in maniera esplicita, quello che posso provare a fare è vedere cosa succede quando calcolo il rapporto tra due termini successivi della sequenza. Facendo i prodotti in croce trovo la ricorrenza e questa è una ricorrenza lineare perché i termini compaiono al primo grado (ma non è a coefficienti costanti perché il termine a_{n+1} È moltiplicato per $n+1$, quindi al variare di n cambia il coefficiente, quindi si parla di ricorrenza lineare a coefficienti non costanti). Alla fine ho trasformato il mio problema in un'equazione differenziale, cioè la derivata della funzione generatrice della sequenza è uguale alla funzione generatrice. Per poterle risolvere devo fare degli integrali, quindi integro questa espressione a destra e a sinistra, e da una parte questo integrale si traduce nel logaritmo della funzione generatrice invece dall'altra ho l'integrale di 1 che è t. Finalmente posso trovare la soluzione: devo eliminare questo logaritmo e quindi elevo la e per questi due oggetti, e devo determinare quanto vale la costante c sfruttando la condizione iniziale, dato che $a_0=1$ e quindi voglio che $e^{t+c}=1$ e (con t=0) l'unica possibilità è che c=0 perché $e^0 = 1$.

t è un segnaposto, di cui non ci preoccupiamo di sostituire con determinati valori, ma fa eccezione il caso di $t = 0$ perché il termine noto della sequenza che rappresenta la mia funzione generatrice lo trovo andando a valutare la funzione generatrice in zero.

Sequenza $n!$

La funzione generatrice di $n!$ è $\mathcal{G}(n!) = 1 + t + 2t^2 + 6t^3 + \cdots$ ma non possiamo scriverla come funzione finita perché il raggio di convergenza della serie è 0; non è quindi possibile esprimere questa serie in modo diverso.

$\mathcal{G}(\frac{1}{n}) = \ln(\frac{1}{1-t})$

Sia $a_n = \frac{1}{n}$ e applichiamo il metodo del rapporto ponendo $a_0 = 0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}, \quad (n+1)a_{n+1} = na_n$$

Si aggiusta l'espressione modificandola in $n = 0$ tramite l'introduzione della funzione δ di *Kronecker*:

Indici della funzione uguali

$$\delta_{n,k} = \begin{cases} 1, & \text{se } n = k \\ 0, & \text{se } n \neq k \end{cases} \Rightarrow \mathcal{G}_n(\delta_{n,k}) = t^k.$$

Vale 1 quando n=0, in tutte le altre situazioni vale 0

$$(n+1)a_{n+1} = na_n + \boxed{\delta_{n,0}} \quad \mathcal{G}((n+1)a_{n+1}) = \mathcal{G}(na_n) + 1$$

$$D\mathcal{G}(a_n) = tD\mathcal{G}(a_n) + 1, \quad (1-t)D\mathcal{G}(a_n) = 1, \quad D\mathcal{G}(a_n) = \frac{1}{1-t}$$

$$\mathcal{G}(a_n) = \int \frac{1}{1-t}dt = -\ln(1-t) + c = \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) + c$$

Dato che in $t = 0$ la funzione deve valere 0, si trova $c = 0$ e quindi

$$\mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\frac{1}{1-t}\right)$$

Funzione generatrice dei numeri armonici H_n

Determiniamo adesso la funzione generatrice per i numeri armonici

$$\mathcal{G}(H_n) = \mathcal{G}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right).$$

Possiamo applicare la proprietà di convoluzione con $a_k = \frac{1}{k}$, $a_0 = 0$, e $b_k = 1$ **Convoluzione**: $\mathcal{G}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = \mathcal{G}(a_n) \cdot \mathcal{G}(b_n)$

$$\mathcal{G}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) = \mathcal{G}(1) \cdot \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right),$$

dato che conosciamo le funzioni di entrambe le sequenze si ha:

$$\mathcal{G}(H_n) = \frac{1}{1-t} \ln \frac{1}{1-t}$$

Composizione: $\sum_{k\geq 0} a_k \left(\mathcal{G}(b_n)\right)^k = \mathcal{G}(a_n) \circ \mathcal{G}(b_n)$

Un raggio di convergenza rappresenta un intorno del piano in corrispondenza del quale la serie che corrisponde alle somme parziali che sto considerando converge. Una serie si dice convergente in un punto se esiste finito il limite delle somme parziali.

Un esempio che ci servirà anche nell'analisi dell'algoritmo quicksort. Siccome questa sequenza in $n = 0$ non è definita, perché è nel denominatore, io definisco $a_0=0$ (si fa tipicamente quando ho una sequenza che in certi punti non è definita è chiaro che in quei punti la devo definire uguale a zero). Applico il metodo del rapporto e ottengo questa ricorrenza lineare a coefficienti non costanti in cui però devo fare un aggiustamento perché questa ricorrenza in 0 non vale. L'idea è che devo modificare la ricorrenza in modo tale che questa valga sempre, anche in $n = 0$. Se n è l'indice della sequenza δ è chiaro che questa definizione mi introduce una sequenza infinita con tutti zeri tranne che in $n = k$. La funzione che abbiamo appena trovato mi interessa perché a partire da quella possiamo trovare la funzione generatrice dei numeri armonici.

I numeri armonici si trovano risolvendo le ricorrenze che contano il numero medio di scambi e di confronti nel quicksort. In generale questi numeri sono importanti perché rappresentano il logaritmo nel discreto. Come calcolo la funzione generatrice? Con la proprietà di convoluzione. Posso sempre immaginare questa sequenza moltiplicata per 1, che mi rappresenta la sequenza b_k, quindi posso trasformare questa espressione nel prodotto di due funzioni generatrici. Questo è proprio un pezzetto della funzione generatrice che troveremo facendo l'analisi del quicksort.

Funzioni generatrici di sequenze di indice pari o dispari

Sia $a(t) = \mathcal{G}(a_n)$ la funzione generatrice della sequenza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\sqrt{t}$ tale che $(\sqrt{t})^2 = t$; allora:

$$\mathcal{G}(a_{2n}) = \frac{a(\sqrt{t}) + a(-\sqrt{t})}{2}, \quad \mathcal{G}(a_{2n+1}) = \frac{a(\sqrt{t}) - a(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}}$$

Per la proprietà di composizione, nel primo caso si ha:

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} a_n(\sqrt{t})^n + \sum_{n\geq 0} a_n(-\sqrt{t})^n\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 0} a_n\left((\sqrt{t})^n + (-\sqrt{t})^n\right)\right)$$

Per n dispari $(\sqrt{t})^n + (-\sqrt{t})^n$ è 0 e possiamo considerare $n = 2k$:

$$\sum_{k\geq 0} a_{2k}\frac{t^k + t^k}{2} = \sum_{k\geq 0} a_{2k}t^k = \mathcal{G}(a_{2n})$$

La prova della seconda formula è analoga.

Funzione generatrice dei coefficienti binomiali centrali $\binom{2n}{n}$

Applicando il metodo del rapporto si ha, con $a_0 = 1$ e $a_1 = 2$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\cdot\frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$(n+1)a_{n+1} = a_n 2(2n+1)$$

Utilizzando il principio di identità e la proprietà di derivazione:

$$\mathcal{G}((n+1)a_{n+1}) = 2\mathcal{G}((2n+1)a_n), \quad D(\mathcal{G}(a_n)) = 2\mathcal{G}(2na_n) + 2\mathcal{G}(a_n)$$

$$D\mathcal{G}(a_n) = 4tD\mathcal{G}(a_n) + 2\mathcal{G}(a_n), \quad (1-4t)a'(t) = 2a(t)$$

$$\int \frac{a'(t)}{a(t)}dt = \int \frac{2}{1-4t}dt, \quad \ln(a(t)) = -\frac{1}{2}\ln(1-4t)$$

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}, \quad \mathcal{G}\left(\binom{2n}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-4t}}$$

Funzione generatrice dei numeri di Fibonacci di indice pari e dispari

Siano F_{2n} e F_{2n+1} le sequenze dei numeri di *Fibonacci* di posto pari e dispari. Ricordandoci che $\mathcal{G}(F_n) = \frac{t}{1-t-t^2}$ si ha:

$$\mathcal{G}(F_{2n}) = \frac{F(\sqrt{t}) + F(-\sqrt{t})}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}-t} + \frac{-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}-t}\right) =$$

$$= \frac{t}{1-3t+t^2} = t+3t^2+8t^3+21t^4+55t^5+144t^6+377t^7+O(t^8)$$

$$\mathcal{G}(F_{2n+1}) = \frac{F(\sqrt{t}) - F(-\sqrt{t})}{2\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{1-t}{1-3t+t^2} = 1+2t+5t^2+13t^3+34t^4+89t^5+233t^6+610t^7+O(t^8)$$

La prima corrisponde alla sequenza dei numeri di Fibonacci di posizione pari e la seconda corrisponde alla sequenza dei numeri di Fibonacci di posizione dispari.

$$\binom{m}{1} = m \qquad \binom{m}{0} = \binom{m}{m} = 1 \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$$

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$$

$$\binom{m}{n} + \binom{m}{n+1} = \binom{m+1}{n+1}$$

Manca un passaggio nel lucido: avrei dovuto aggiungere anche una costante quando si integra, siccome noi sappiamo che $a_0=1$ e quando io sostituisco t=0 in questa espressione ottengo proprio 1, quindi la costante è 0.

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \ldots + \binom{m}{m} = 2^m$$

Composizione: $\sum_{k\geq 0} a_k(\mathcal{G}(b_n))^k = \mathcal{G}(a_n)\circ\mathcal{G}(b_n)$

Convoluzione: $\mathcal{G}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = \mathcal{G}(a_n)\cdot\mathcal{G}(b_n)$

Derivazione: $\mathcal{G}(na_n) = tD\mathcal{G}(a_n), \quad \mathcal{G}((n+1)a_{n+1}) = D\mathcal{G}(a_n)$

Linearità: $\mathcal{G}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\mathcal{G}(a_n) + \beta\mathcal{G}(b_n)$

Funzione generatrice dei numeri di Catalan $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ -1-

Applicando il metodo del rapporto si ha:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+2}\binom{2n+2}{n+1}\bigg/\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n+2}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\frac{(n+1)(n)!(n)!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{4n+2}{n+2}$$

$$(a_{n+1})(n+2) = (4n+2)a_n$$

e per il principio di identità $\mathcal{G}((n+2)a_{n+1}) = \mathcal{G}((4n+2)a_n)$

$$\mathcal{G}((n+1)a_{n+1}) + \mathcal{G}(a_{n+1}) = 4\mathcal{G}(na_n) + 2\mathcal{G}(a_n)$$

$$a'(t) + \frac{a(t)-a_0}{t} = 4ta'(t) + 2a(t), \quad (t-4t^2)a'(t) + (1-2t)a(t) = 1$$

$$a'(t) + \frac{1-2t}{t-4t^2}a(t) = \frac{1}{t-4t^2}$$

Funzione generatrice dei numeri di Catalan $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ -2-

Si trova l'equazione differenziale omogenea associata:

$$\rho'(t) + \frac{1-2t}{t-4t^2}\rho(t) = 0, \quad \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = -\frac{(1-2t)}{t(1-4t)}, \quad \int\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}dt = \int -\frac{(1-2t)}{t(1-4t)}dt$$

$$\ln(\rho(t)) = -\int\left(\frac{2}{1-4t} + \frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{2}\ln(1-4t) - \ln(t) = \ln\frac{\sqrt{1-4t}}{t}$$

soluzione della equazione omogenea associata $\quad \rho(t) = \frac{\sqrt{1-4t}}{t}.$

Cambio variabile perché ho una equazione diversa da quella iniziale

Si procede derivando il rapporto $\frac{a(t)}{\rho(t)}$:

$$\left(\frac{a(t)}{\rho(t)}\right)' = \frac{a'(t)\rho(t) - a(t)\rho'(t)}{\rho(t)^2} = \frac{a'(t)}{\rho(t)} - \frac{a(t)}{\rho(t)}\cdot\frac{\rho'(t)}{\rho(t)}$$

dato che $\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = -\frac{(1-2t)}{t(1-4t)}$ l'espressione precedente diventa:

$$\frac{a'(t)}{\rho(t)} - \frac{a(t)}{\rho(t)}\cdot\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \frac{1}{\rho(t)}\left(a'(t) + a(t)\frac{(1-2t)}{t(1-4t)}\right).$$

Molto importante è la funzione generatrice dei numeri di catalan che sono legati ai nostri coefficienti binomiali centrali. I numeri di catalan contano il numero degli alberi binari con n nodi interni. Come si fa a risolvere questa equazione? L'idea è che prima di tutto si risolve l'equazione differenziale omogenea associata, cioè senza considerare il termine noto. Adesso è dello stesso tipo di quella che abbiamo usato per i coefficienti binomiali centrali normali e queste equazioni differenziali le risolvo tutte nello stesso modo. La soluzione di quest'ultima mi permette di trovare quella generale. Quando si ha l'integrale di una funzione razionale fratta, quindi che è costituita da un rapporto di polinomi, conviene fare la scomposizione in frazioni parziali, cioè conviene scrivere questa funzione come somma di funzioni più semplici. Valuto la derivata del rapporto tra la funzione a(t), che è la mia incognita, e la funzione $\rho(t)$ che è quella che ho appena trovato. quanto vale la costante? quando metto $t = 0$ ho un problema perché t è al denominatore, quindi è chiaro che non posso sostituire direttamente zero, ma quello posso vedere che cosa succede quando mi avvicino a zero, quindi faccio un limite. l'unico caso in cui questo limite può tendere a una costante è quando anche il numeratore tende a zero, perché $\frac{0}{0}$ è un rapporto che può tendere anche a una costante. Quindi bisogna che $1 + 2k$ sia 0, il limite che ottengo esiste ed è proprio 1.

Funzione generatrice dei numeri di Catalan $\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ -3-

Sostituendo in $\frac{a'(t)}{\rho(t)}$ il valore trovato per $\rho(t)$: $\boxed{a'(t) + \frac{1-2t}{t-4t^2}a(t) = \frac{1}{t-4t^2}}$

$$\frac{1}{\rho(t)}\left(a'(t) + a(t)\frac{(1-2t)}{t(1-4t)}\right) = \frac{1}{t-4t^2}\cdot\frac{t}{\sqrt{1-4t}} = \frac{1}{1-4t}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-4t}}.$$

Integrando ambo i membri si ha:

$$\int\left(\frac{a(t)}{\rho(t)}\right)' dt = \int \frac{1}{(1-4t)^{\frac{3}{2}}}dt, \quad \frac{a(t)}{\rho(t)} = \frac{1}{2}(1-4t)^{-\frac{1}{2}} + k$$

$$a(t) = \left(\frac{1}{2}(1-4t)^{-\frac{1}{2}} + k\right)\cdot\frac{\sqrt{1-4t}}{t} = \frac{1}{2t} + \frac{k\sqrt{1-4t}}{t} = \frac{1+2k\sqrt{1-4t}}{2t}$$

dato che vogliamo che $a(0) = a_0 = 1$ si deve avere $1 + 2k = 0$, ovvero $k = -1/2$, in modo che $\lim_{t\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = 1$ e quindi

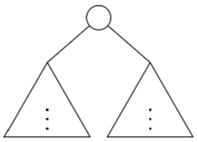
$$a(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

Cosa c'entrano questi numeri con gli alberi binari? L'interpretazione che questi numeri possono avere sono molteplici, tant'è che è stato scritto anche un libro da Richard Stanley, un matematico, in cui si è messo a elencare tutti i problemi che possono essere studiati da questa sequenza. Quanti sono gli alberi binari con n nodi interni? Il numero di tali configurazioni corrispondono a come inizia la nostra sequenza di numeri di catalan. La dimostrazione si basa su questa osservazione: immaginiamo di avere un albero binario con $n + 1$ nodi interni, allora un nodo è la radice e distribuisco gli altri n nodi un po' a destra e un po' a sinistra nei sottoalberi.

Interpretazione dei numeri di Catalan -1-

Un albero binario è:

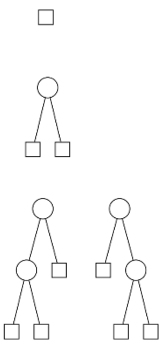
- un nodo esterno □
- un nodo interno a cui sono collegati due alberi binari



Sia B_n il numero di alberi binari con n nodi interni.

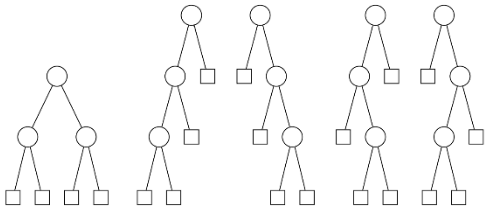
Alberi binari con 0, 1 e 2 nodi interni

- $n = 0$, $B_0 = 1$
- $n = 1$, $B_1 = 1$
- $n = 2$, $B_2 = 2$



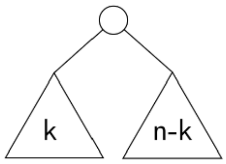
Alberi binari con 3 nodi interni

- $n = 3$, $B_3 = 5$



Enumerazione degli alberi binari

In generale si ha:



$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} B_k B_{n-k}.$$

Applicando il principio di identità e le proprietà dell'operatore $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G}(B_{n+1}) = \mathcal{G}\left(\sum_{k=0}^{n} B_k B_{n-k}\right)$$

Il secondo grado viene dal fatto che ho una convoluzione che coinvolge la sequenza con se stessa

perché voglio avere informazioni sulle numerazione di queste strutture.

Ci potrebbero essere situazioni limiti in cui k=0 e tutti i nodi sono a destra oppure delle situazioni più bilanciate oppure sono delle situazioni estreme all'opposto in cui tutti i nodi sono a sinistra. Considerando sia il sottoalbero sinistro che sotto l'albero destro è chiaro che devo fare un prodotto per valutare tutte le possibili situazioni che si possono verificare. Ho trasformato la struttura in una ricorrenza

Alberi binari e numeri di Catalan

$$\frac{\mathcal{G}(B_n) - B_0}{t} = \mathcal{G}(B_n)\mathcal{G}(B_n), \quad \frac{\mathcal{G}(B_n) - B_0}{t} = \mathcal{G}(B_n)^2.$$

Posto $B(t) = \mathcal{G}(B_n)$ e tenendo conto della condizione iniziale $B_0 = 1$ si ha:

$$\frac{B(t) - 1}{t} = B(t)^2, \quad tB(t)^2 - B(t) = 1$$

$$B(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$$

Abbiamo ritrovato la funzione generatrice dei numeri di *Catalan*, quindi $B_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Vediamo come si risolve con le funzioni generatrici:

Numero medio di confronti nel Quicksort -1-

$$nC_n = n(n+1) + 2\sum_{k=0}^{n-1} C_k, \quad C_0 = 0.$$

Applicando il principio di identità e la proprietà di derivazione si ha:

Per applicare la regola di convoluzione devo fare in modo che l'indice della somma invece di essere $n-1$ sia n: lo faccio tramite lo spostamento all'indietro

$$\mathcal{G}(nC_n) = \mathcal{G}(n(n+1)) + 2\mathcal{G}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k\right)$$

$$tC'(t) = \mathcal{G}(n^2) + \mathcal{G}(n) + \mathcal{G}\left(2\sum_{k=0}^{n-1} C_k\right)$$

$$tC'(t) = \mathcal{G}(n^2) + \mathcal{G}(n) + 2t\left(\frac{1}{1-t}C(t)\right)$$

$$tC'(t) = \frac{t+t^2}{(1-t)^3} + \frac{t}{(1-t)^2} + \frac{2t}{1-t}C(t)$$

$$tC'(t) = \frac{2t}{(1-t)^3} + \frac{2t}{1-t}C(t), \quad C'(t) = \frac{2}{1-t}C(t) + \frac{2}{(1-t)^3}.$$

È l'equazione differenziale che devo risolvere

Composizione: $\sum_{k\geq 0} a_k (\mathcal{G}(b_n))^k = \mathcal{G}(a_n) \circ \mathcal{G}(b_n)$

Convoluzione: $\mathcal{G}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = \mathcal{G}(a_n) \cdot \mathcal{G}(b_n)$

Derivazione: $\mathcal{G}(na_n) = tD\mathcal{G}(a_n), \quad \mathcal{G}((n+1)a_{n+1}) = D\mathcal{G}(a_n)$

Linearità: $\mathcal{G}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\mathcal{G}(a_n) + \beta\mathcal{G}(b_n)$

Spostamento all'indietro: $\mathcal{G}(a_{n-j}) = t^j\mathcal{G}(a_n)$

Spostamento: $\mathcal{G}(a_{n+1}) = \frac{\mathcal{G}(a_n) - a_0}{t}$

Numero medio di confronti nel Quicksort -2-

Troviamo l'equazione differenziale omogenea associata:

$$\rho'(t) = \frac{2}{1-t}\rho(t), \quad \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \frac{2}{1-t},$$

$$\ln\rho(t) = -2\ln(1-t), \quad \rho(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Si procede derivando il rapporto $\frac{C(t)}{\rho(t)}$:

$$\left(\frac{C(t)}{\rho(t)}\right)' = \frac{C'(t)\rho(t) - C(t)\rho'(t)}{\rho(t)^2} = \frac{C'(t)}{\rho(t)} - \frac{C(t)}{\rho(t)} \cdot \frac{\rho'(t)}{\rho(t)}$$

e dato che $\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} = \frac{2}{1-t}$ si ha

Equazione differenziale

Numero medio di confronti nel Quicksort -3-

Da $C'(t) - \frac{2}{1-t}C(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$, sostituendo $\rho(t)$, si ha:

$$\frac{1}{\rho(t)}\left(C'(t) - C(t)\frac{2}{1-t}\right) = (1-t)^2\frac{2}{(1-t)^3} = \frac{2}{1-t}.$$

e integrando ambo i membri si ha, con $k = 0$ dato che $C(0) = C_0 = 0$:

$$\int \left(\frac{C(t)}{\rho(t)}\right)' dt = \int \frac{2}{1-t}dt, \quad \frac{C(t)}{\rho(t)} = -2\ln(1-t) + k,$$

$$C(t)(1-t)^2 = 2\ln\left(\frac{1}{1-t}\right) + k$$

Funzione generatrice che conta il numero medio di confronti nell'algoritmo Quicksort

$$C(t) = \frac{2}{(1-t)^2} \cdot \ln\frac{1}{1-t}$$

Questi numeri rappresentano esattamente il numero medio di confronti che l'algoritmo esegue il variare della dimensione del vettore.

Numero medio di scambi nel Quicksort -1-

Per quanto riguarda gli scambi abbiamo:

Rappresenta il numero medio di scambi che l'algoritmo è quella versione particolare esegue durante la fase di partizionamento prima che il puntatore si incrocino

$$S_n = \boxed{\frac{n-2}{6}} + \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} S_j, \quad S_0 = S_1 = 0$$

e moltiplicando per $6n$ si ha:

$$6nS_n = n(n-2) + 12\sum_{j=0}^{n-1} S_j.$$

Vediamo che per $n = 1$ l'identità non è verificata quindi introduciamo un aggiustamento tramite la funzione $\delta_{n,k}$, ottenendo:

Aggiustamento che mi valga soltanto quando è $n = 1$

$$6nS_n = n(n-2) + 12\sum_{j=0}^{n-1} S_j + \delta_{n,1}.$$

Numero medio di scambi nel Quicksort -2-

Composizione: $\sum_{k\geq 0} a_k (\mathcal{G}(b_n))^k = \mathcal{G}(a_n) \circ \mathcal{G}(b_n)$

Convoluzione: $\mathcal{G}(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}) = \mathcal{G}(a_n) \cdot \mathcal{G}(b_n)$

Derivazione: $\mathcal{G}(na_n) = tD\mathcal{G}(a_n)$, $\quad \mathcal{G}((n+1)a_{n+1}) = D\mathcal{G}(a_n)$

Linearità: $\mathcal{G}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha\mathcal{G}(a_n) + \beta\mathcal{G}(b_n)$

Spostamento all'indietro: $\mathcal{G}(a_{n-j}) = t^j\mathcal{G}(a_n)$

Spostamento: $\mathcal{G}(a_{n+1}) = \frac{\mathcal{G}(a_n) - a_0}{t}$

Applichiamo il principiò di identità e le proprietà dell'operatore funzione generatrice:

$$6\mathcal{G}(nS_n) = \mathcal{G}(n^2) - 2\mathcal{G}(n) + 12t\mathcal{G}(S_n)\mathcal{G}(1) + t$$

$$6tS'(t) = \frac{t+t^2}{(1-t)^3} - 2\frac{t}{(1-t)^2} + t + \frac{12t}{1-t}S(t)$$

$$6tS'(t) = \frac{t^3(3-t)}{(1-t)^3} + \frac{12t}{1-t}S(t)$$

questa è la equazione differenziale che rappresenta il numero medio di scambi nell'algoritmo quicksort

$$S'(t) = \frac{2}{1-t}S(t) + \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)^3}$$

Numero medio di scambi nel Quicksort -3-

Si trova la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata:

$$\rho'(t) = \frac{2}{1-t}\rho(t), \quad \rho(t) = \frac{1}{(1-t)^2}$$

Si deriva il rapporto $\frac{S(t)}{\rho(t)}$:

$$\left(\frac{S(t)}{\rho(t)}\right)' = \frac{S'(t)\rho(t) - S(t)\rho'(t)}{\rho(t)^2} = \frac{S'(t)}{\rho(t)} - \frac{S(t)}{\rho(t)} \cdot \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} =$$

$$= \frac{1}{\rho(t)}\left(S'(t) - S(t)\frac{2}{1-t}\right).$$

Dall'equazione differenziale possiamo ricavare che $S'(t) - \frac{2}{1-t}S(t) = \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)^3}$ e sostituendo $\rho(t)$ si ha:

$$\frac{1}{\rho(t)}\left(S'(t) - S(t)\frac{2}{1-t}\right) = \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)}.$$

Numero medio di scambi nel Quicksort -4-

Integrando e tenendo conto che $S(0) = S_0 = 0$ si ha:

$$\int \left(\frac{S(t)}{\rho(t)}\right)' dt = \int \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)} dt,$$

$$(1-t)^2 S(t) = \int \frac{t^2(3-t)}{6(1-t)} dt = \frac{1}{6}\int \left(t^2 - 2t - 2 + \frac{2}{1-t}\right) dt$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{t^3}{3} - t^2 - 2t - 2\ln(1-t)\right).$$

La funzione generatrice del numero medio di scambi nel Quicksort è pertanto

$$S(t) = \frac{1}{3}\frac{1}{(1-t)^2} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-t}\right) + \frac{t^3 - 3t^2 - 6t}{18(1-t)^2}$$

L'operatore funzione generatrice

Sia $\mathbb{A}$ una classe di oggetti combinatori, cioè un insieme finito e numerabile di oggetti per i quali è definita una misura; se $\alpha \in \mathbb{A}$ possiamo indicare la misura di α come $|\alpha|$. Per esempio, se prendiamo l'insieme degli alberi binari possiamo definire come misura il numero di nodi interni. La funzione generatrice di $\mathbb{A}$ è data da:

$$a(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} t^{|\alpha|} = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

dove a_n è il numero di oggetti $\alpha \in \mathbb{A}$ tale che $|\alpha| = n$, ovvero che hanno misura n.

Metodo simbolico: non c'entra niente con i sistemi di calcolo simbolico. L'idea è che le funzioni generatrici che finora abbiamo utilizzato per studiare sequenze sono utili anche per numerare delle particolari strutture dati o comunque classi di oggetti. A partire dal concetto di funzione generatrice si riescono a contare delle cose di interesse. Tutte le volte che io ho una classe di oggetti finita o numerabile e una misura che possa associare a quegli oggetti io posso sempre definire la funzione generatrice di quella classe. Formulazione della funzione generatrice: l'idea è che prendo ogni elemento della classe e introduco nella mia funzione un termine di t con un'esponente pari alla misura di quell'oggetto, quindi se ho un oggetto di misura 3 introduco nella mia funzione t^3, se di oggetti di misura 3 ne ho tanti questa operazione la farò per ognuno degli oggetti che sono presenti, quindi in generale quando faccio questa operazione per tutti gli oggetti di una classe ottengo una funzione generatrice classica che in corrispondenza della potenza di t^n mi dice quanti sono gli oggetti che hanno quella misura. La cosa interessante è che a partire da classi di oggetti semplici io posso costruire classi di oggetti più complesse e enumerarle con lo stesso principio.

Un semplice esempio

Classe costituita da quattro parole

Sia $\mathbb{A} = \{aa, aba, bb, aaba\}$ dove $\forall \alpha \in \mathbb{A}$, $|\alpha|$ rappresenta la lunghezza della parola. Possiamo trovare la funzione generatrice della classe di oggetti $\mathbb{A}$, come segue:

$$a(t) = \sum_{\alpha \in \mathbb{A}} t^{|\alpha|} = t^2 + t^3 + t^2 + t^4 = 2t^2 + t^3 + t^4,$$

infatti nell'insieme ci sono 2 parole che hanno lunghezza 2, una parola che ha lunghezza 3 e una parola con lunghezza 4.

Unione di due classi

Due classi che non hanno oggetti in comune

Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ due classi di oggetti combinatori t.c. $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \varnothing$, e consideriamo $\mathbb{C} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$; passando alle funzioni generatrici si ha: $c(t) = a(t) + b(t)$. Ad esempio, siano $\mathbb{B} = \{ab, bab, bbb, bbaa, aaa\}$ e $\mathbb{A} = \{aa, aba, bb, aaba\}$ come prima, allora

$$b(t) = t^2 + t^3 + t^3 + t^4 + t^3 = t^2 + 3t^3 + t^4$$

e dato che $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \varnothing$ possiamo considerare l'unione $\mathbb{C} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$ che si traduce nella funzione generatrice $c(t) = a(t) + b(t)$:

$$c(t) = 3t^2 + 4t^3 + 2t^4$$

Unione e prodotto cartesiano

Siano $\mathbb{A}$ e $\mathbb{B}$ due classi di oggetti combinatori con $\mathbb{A} \cap \mathbb{B} = \varnothing$ allora:

- **Unione**: $\mathbb{C} = \mathbb{A} \cup \mathbb{B} \Rightarrow c(t) = \sum_{c \in \mathbb{C}} t^{|c|} = \sum_{c \in \mathbb{A} \cup \mathbb{B}} t^{|c|} = \sum_{c \in \mathbb{A}} t^{|c|} + \sum_{c \in \mathbb{B}} t^{|c|} = a(t) + b(t)$ cioè $c(t) = a(t) + b(t)$
- **Prodotto cartesiano**: $\mathbb{C} = \mathbb{A} \times \mathbb{B} \Rightarrow c(t) = \sum_{c \in \mathbb{C}} t^{|c|} = \sum_{\alpha \in \mathbb{A},\, \beta \in \mathbb{B}} t^{|\alpha| + |\beta|}$
  La misura di un oggetto $c = (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}$ è data da $|c| = |\alpha| + |\beta|$. Se $|c| = n$ significa che $|\alpha| = k$ e $|\beta| = n - k$, con k che può variare da 0 ad n. Pertanto si ha:
  $c(t) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) t^n = a(t) \cdot b(t).$

Sequenza

Sequenza: $S(\mathbb{A}) = \varepsilon \cup \mathbb{A} \cup \mathbb{A} \times \mathbb{A} \cup \mathbb{A} \times \mathbb{A} \times \mathbb{A} \cup \cdots = \bigcup_{k \geq 0} \mathbb{A}^k \Rightarrow S(t) = t^0 + a(t) + a(t)^2 + a(t)^3 + \cdots = \sum_{k \geq 0} (a(t))^k = \mathcal{G}(1) \circ a(t) = \frac{1}{1-a(t)}$.

S(A) rappresenta tutte le possibili parole di tutte le lunghezze definite su A, se A è un alfabeto

Possiamo anche considerare:
$S^{>0}(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \cup \mathbb{A} \times \mathbb{A} \cup \mathbb{A} \times \mathbb{A} \times \mathbb{A} \cup \cdots \Rightarrow S^{>0}(t) = \sum_{k \geq 1} (a(t))^k = a(t) \sum_{k \geq 0} (a(t))^k = \frac{a(t)}{1-a(t)}$

Stringhe binarie

Consideriamo l'equazione simbolica che definisce la classe:

$$B = \varepsilon \cup \{0, 1\} \times B.$$

Infatti una stringa binaria è una stringa vuota oppure inizia con 0 o 1 e poi è seguita da un'altra stringa binaria. La funzione generatrice che conta le stringhe binarie di lunghezza n è data dalla seguente equazione:

$$b(t) = t^0 + 2t \cdot b(t) \Rightarrow b(t) = \frac{1}{1-2t},$$

dove t^0 è la funzione generatrice della stringa vuota e $2t$ è la funzione generatrice delle stringhe $\{0, 1\}$. Come ci si apsettava, si hanno 2^k stringhe binarie di lunghezza k :

$$b(t) = \frac{1}{1-2t} = \sum_{k \geq 0} (2t)^k = \sum_{k \geq 0} 2^k t^k.$$

Stringhe binarie che non contengono due bit 0 consecutivi

Consideriamo l'equazione simbolica che definisce la classe:

$$B = \varepsilon \cup \{0\} \cup \{1, 01\} \times B,$$

Si ha:

$$b(t) = 1 + t + (t + t^2) b(t) \Rightarrow b(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}.$$

e ricordandoci la funzione generatrice dei numeri di Fibonacci $F(t) = \frac{t}{1-t-t^2}$ possiamo dire che:

$$b(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2} = \frac{F(t)}{t} + F(t)$$

con

$$F(t) = 0 + t + t^2 + 2t^3 + 3t^4 + 5t^5 + \cdots$$
$$\frac{F(t)}{t} = 1 + t + 2t^2 + 3t^3 + 5t^4 + 8t^5 + \cdots$$

Alberi s-ari: nodi interni

Sia $B = \{\text{alberi s-ari}\}$ e contiamo gli oggetti della classe rispetto ai nodi interni. Si ha:

$$B = \{\square\} \cup \{\bigcirc\} \times \underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{s}$$

$$b(t) = t^0 + t b^s(t)$$

Per $s = 2$ abbiamo già trovato il risultato dell'equazione, purtroppo non riusciamo a trovare la funzione generatrice esplicita per $s > 2$. Vedremo un risultato che ci permetterà di dimostrare che

$$b_n = \frac{1}{(s-1)n+1} \binom{sn}{n}$$

In generale tutte queste operazioni considerano sempre classi di oggetti disgiunti perché altrimenti ci potrebbe essere dell'ambiguità.

Definire questa classe di oggetti rispetto alle operazioni di Unione e prodotto cartesiano e sono interessata a contare queste parole rispetto alla loro lunghezza, quindi la misura di una parola è il numero di lettere (di 0 o 1) che la costituisce. Il caso più semplice è la parola vuota e quindi lunghezza zero, poi posso avere una parola che ha questa caratteristica o inizia per zero o inizia per uno, dopodiché dopo il primo 0 o 1, ho il prodotto cartesiano B, cioè praticamente ogni stringa la posso vedere come uno 0 o un 1 seguito da una stringa ottenuta da una definizione ricorsiva. Funziona perché ho questa stringa vuota iniziale che mi permette ad esempio di generare anche le stringhe di lunghezza uno, perché basta concatenare 0 o 1 con la stringa vuota. questa è la funzione generatrice che conta le stringhe binarie rispetto alla loro lunghezza. A cosa serve questo metodo? si parte dalla definizione di un'equazione simbolica, questa equazione simbolica la traduco nella corrispondente funzione generatrice e quindi questa trasformazione mi permette di enumerare alberi/parole ecc.

Alberi binari: nodi interni

Sia $B = \{\text{alberi binari}\}$. Proviamo a contare gli alberi binari rispetto ai nodi interni, utilizzando il metodo simbolico:

$$B = \{\square\} \cup \{\bigcirc\} \times B \times B,$$

Nodo esterno Nodo interno

$$b(t) = t^0 + t \cdot b^2(t) \Rightarrow t b^2(t) - b(t) + 1 = 0 \Rightarrow b(t) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4t}}{2t}.$$

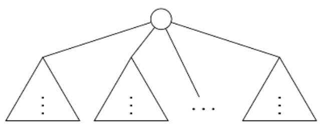
Si osserva che la soluzione con il segno $+$ non va bene, poichè in base all'equazione simbolica si ha $B(0) = 1$, quindi:

$$b(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4t}}{2t}$$

Abbiamo trovato ritrovato la funzione generatrice dei numeri di Catalan $\mathcal{G}(\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n})$.

Alberi ordinati -1-

Un albero (ordinato) è un nodo (radice) connesso ad una sequenza di alberi disgiunti. La sequenza di alberi è chiamata foresta.



Sia G la classe degli alberi e F la classe delle foreste; si ha:

$$F = \varepsilon \cup G \cup G \times G \cup G \times G \times G \cdots$$

$$F(z) = 1 + G(z) + G(z)^2 + \cdots = \sum_{k \geq 0} G(z)^k = \frac{1}{1-z} \circ G(z) = \frac{1}{1-G(z)}.$$

Alberi ordinati -2-

D'altra parte si ha:

$$G = \{\bigcirc\} \times F$$

$$G(z) = zF(z)$$

Si ha quindi un sistema di equazioni:

$$\begin{cases} G(z) = zF(z) \\ F(z) = \frac{1}{1-G(z)} \end{cases}$$

$$G(z) = \frac{z}{1-G(z)} \Rightarrow G(z) - G^2(z) = z$$

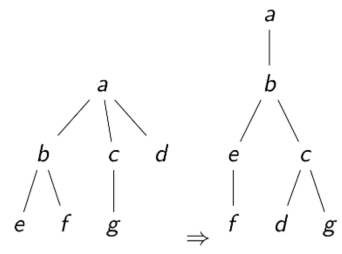
$$\Rightarrow G^2(z) - G(z) + z = 0 \Rightarrow G(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2}$$

$$G(z) = zB(z) \Rightarrow G_n = B_{n-1}$$

Alberi ordinati -3-

Si può arrivare al risultato $G_n = B_{n-1}$ anche considerando che esiste una relazione fra alberi ordinati e alberi binari, che permette di trasformare un albero ordinato in un albero binario in cui il nodo radice ha un sottoalbero vuoto:

Il numero di alberi ordinati con n nodi interni corrisponde al numero di alberi binari con n-1 nodi interni



Enumerazione di linguaggi definiti da grammatiche

Grammatica delle parole di Dyck

Si consideri la sequente grammatica context-free, che definisce quelle che sono conosciute come *parole di Dyck*:

$$D ::= \varepsilon | aDbD.$$

Applichiamo il metodo simbolico per trovare la funzione generatrice che conta le parole rispetto alla loro lunghezza, che ovviamente dovrà essere sempre pari:

$$D(t) = t^0 + t^2 D(t)^2 \Rightarrow t^2 D(t)^2 - D(t) + 1 = 0, \quad D(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t^2}}{2t^2}$$

Ricordando che la funzione generatrice dei numeri di Catalan C_n è $C(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = \sum_{n\geq 0} C_n t^n$ si vede che il numero di parole di lunghezza $2n$ è pari a C_n, infatti:

$$D(t) = \sum_{n\geq 0} C_n (t^2)^n = \sum_{n\geq 0} C_n t^{2n}.$$

Le parole definite dalla grammatica hanno lunghezza pari e ho trovato una funzione generatrice che contiene soltanto potenze pari. Quindi i numeri di Catalan oltre a contare gli alberi binari rispetto al numero dei nodi contano anche le parole di Dyck di lunghezza 2n.

Questa grammatica produce la stringa vuota oppure produce una lettera di una parola di Dyck. Queste parole hanno un'interpretazione tramite cammini nel piano. Se considerate un piano cartesiano e vediamo a come un passo nella direzione nord-est, quindi un passo obliquo nella direzione nord-est, e b invece lo vedete come un passo nella direzione sud-est, con una grammatica di questo tipo creiamo dei cammini che partono dall'origine e non oltrepassano mai l'asse delle x, perché tutte le volte che facciamo un passo di tipo a ne facciamo anche uno di tipo b, per cui non si può mai andare al di sotto dell'asse delle X. Questi cammini hanno la caratteristica di terminare proprio sull'asse, quindi partono dall'origine e terminano sull'asse delle x. Questi cammini hanno un numero di passi pari. L'idea è che ogni simbolo non terminale diventerà una funzione, l'alternativa che abbiamo tra regole diverse corrisponde all'unione, quindi ridurremo in una somma, dopodiché si tratta di andare ad applicare il metodo che abbiamo già visto alle singole parti, quindi la parola vuota rappresenta un oggetto di misura zero (se l'obiettivo è andare a contare questi oggetti rispetto alla lunghezza) e invece quest'altra parte della produzione è come se avessi un prodotto cartesiano che si traduce in un prodotto delle funzioni generatrici.

Grammatica delle espressioni aritmetiche -1-

$$\begin{cases} E ::= T | AT \\ T ::= F | TAF \\ F ::= P | FMP \\ P ::= a | (E) \\ M ::= * | / \\ A ::= + | - \end{cases}$$

Quello che ci interessa studiare è la funzione $E = E(t, z, w)$ dove t indica la lunghezza dell'espressione, z il numero di a e w il numero di parentesi: si tratta di una funzione generatrice in *più variabili*.

Grammatica delle espressioni aritmetiche -2-

Utilizzando il metodo simbolico si ha:

$$\begin{cases} E = T + AT \\ T = F + TAF \\ F = P + FMP \\ P = tz + t^2 w^2 E \\ M = t + t \\ A = t + t \end{cases}$$

$$E(t,z,w) = \underbrace{tz}_{a} + \underbrace{2zt^2}_{\substack{+a,\\ -a}} + \underbrace{z(w^2+4z)t^3}_{\substack{(a),\ a+a,\\ a*a,\ a-a,\\ a/a}} + (\underbrace{4zw^2}_{\substack{+(a),\ -(a),\\ (+a),\ (-a)}} + \underbrace{8z^2}_{\substack{a+a,\ +a-a,\\ -a+a,\ -a-a\\ +a*a,\ -a*a\\ +a/a,\ -a/a}})t^4 + \cdots$$

Quando si fanno queste operazioni con delle grammatiche che hanno più di una produzione ottengo un'equazione per ogni produzione e quindi un sistema di equazioni. Questa grammatica si è trasformata in un sistema lineare di sei equazioni. La caratteristica interessante delle funzioni multivariate è che per far sparire una variabile è sufficiente metterla uguale a 1. Tutto questo purché la grammatica non sia ambigua perché se la grammatica è ambigua vuol dire che esiste almeno una parola del linguaggio che la grammatica genera in due modi diversi e quindi si ottengono delle funzioni generatrici che danno un'informazione errata.

Espressioni regolari

Analizziamo ora un linguaggio regolare definito dall'espressione regolare:

$$S = (1 + 01 + 001 + 0001)^*(\varepsilon + 0 + 00 + 000),$$

che rappresenta le stringhe binarie che non contengono 4 bit 0 consecutivi e applichiamo il metodo simbolico per contare le parole rispetto alla loro lunghezza.

$$e_1 = 1 + 01 + 001 + 0001 \to t + t^2 + t^3 + t^4$$

$$e_2 = \varepsilon + 0 + 00 + 000 \to 1 + t + t^2 + t^3$$

$$e_1^* \to \frac{1}{1 - (t + t^2 + t^3 + t^4)}$$

$$S = e_1^* e_2 \to \frac{1 + t + t^2 + t^3}{1 - (t + t^2 + t^3 + t^4)} = \frac{1 + t + t^2 + t^3}{1 - t(1 + t + t^2 + t^3)}.$$

Funzione generatrice Sequenza: $\frac{1}{1-a(t)}$

Dall'espressione regolare come faccio a trasformarla in funzione generatrice? Lo * corrisponde a una sequenza perché è esattamente la stessa operazione. Dopodiché ho una concatenazione che è un prodotto cartesiano, quindi devo fare il prodotto delle due funzioni generatrici.

$$1 + t + t^2 + t^3 = \frac{1-t}{1-t}(1 + t + t^2 + t^3) = \frac{1-t^4}{1-t}$$

$$\frac{1 + t + t^2 + t^3}{1 - t(1 + t + t^2 + t^3)} = \frac{\frac{1-t^4}{1-t}}{1 - t\left(\frac{1-t^4}{1-t}\right)} =$$

$$= \frac{1-t^4}{1-t} \cdot \frac{1-t}{1-2t+t^5} = \frac{1-t^4}{1-2t+t^5}$$

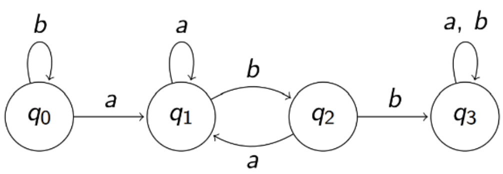
Linguaggi accettati da automi a stati finiti

Dato un automa a stati finiti con $Q = \{q_0, q_1, \cdots, q_s\}$ l'insieme degli stati e $\bar{Q}$ l'insieme degli stati finali, sia $\mathcal{L}$ il linguaggio accettato dall'automa e $L(t)$ la funzione generatrice che conta le parole di $\mathcal{L}$ rispetto alla lunghezza. Posto $\mathbf{L}(t) = (L_0(t), L_1(t), \cdots, L_s(t))$, dove $L_j(t)$ è la funzione generatrice associata al linguaggio $\mathcal{L}_j$ accettato dall'automa a partire dallo stato q_j, $L(t) = L_0(t)$, si ha $\mathbf{L}(t) = \mathbf{w}(\mathbf{I} - t\mathbf{T})^{-1}v$, dove $\mathbf{T}$ è la matrice di transizione di stato in cui $t_{i,j}$ indica il numero di simboli dell'alfabeto che permettono di andare dallo stato i allo stato j; $\mathbf{w} = (1, 0, \cdots, 0), \mathbf{v} = (v_0, v_1, \cdots, v_s)^T$ dove $v_i = 1$ se $q_i \in \bar{Q}$, $v_i = 0$ altrimenti.

Esempio: è un automa stati finiti che riconosce le parole, fatte su un alfabeto di due lettere a e b, che contengono il pattern p=abb. come traduco questo automa in funzioni generatrici? c'è un'equivalenza tra grammatiche regolari, espressioni regolari e linguaggi definiti da automi a stati finiti, quindi posso esprimere anche il linguaggio definito da un automa stati finiti tramite una grammatica regolare. In q3 devo tener conto anche della stringa vuota perché quello rappresenta lo stato finale.

Parole su $A = \{a, b\}$ che contengono il pattern $p = abb$

Si costruisce l'automa a stati finiti che riconosce le parole del linguaggio:



$$\begin{cases} \mathcal{L}_0 = a\mathcal{L}_1 + b\mathcal{L}_0 & \text{stato } 0 \\ \mathcal{L}_1 = a\mathcal{L}_1 + b\mathcal{L}_2 & \text{stato } 1 \\ \mathcal{L}_2 = a\mathcal{L}_1 + b\mathcal{L}_3 & \text{stato } 2 \\ \mathcal{L}_3 = a\mathcal{L}_3 + b\mathcal{L}_3 + \varepsilon & \text{stato } 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_0(t) = tL_1(t) + tL_0(t) \\ L_1(t) = tL_1(t) + tL_2(t) \\ L_2(t) = tL_1(t) + tL_3(t) \\ L_3(t) = tL_3(t) + tL_3(t) + 1 \end{cases}$$

Voglio contare le parole soltanto rispetto alla lunghezza, quindi quello che ho fatto è associare una lettera t ogni volta che ho un simbolo. È un sistema lineare di quattro equazioni in quattro incognite che posso anche scrivere in forma matriciale. In generale tutte le volte che avete un sistema lineare potete sempre rappresentarlo come un vettore, che è il vettore delle incognite.

Riscrivendo il sistema sotto forma matriciale si ha:

$$\begin{bmatrix} L_0(t) \\ L_1(t) \\ L_2(t) \\ L_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & t & 0 & 0 \\ 0 & t & t & 0 \\ 0 & t & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_0(t) \\ L_1(t) \\ L_2(t) \\ L_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

dove:

vettore delle incognite

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v, \quad \begin{bmatrix} L_0(t) \\ L_1(t) \\ L_2(t) \\ L_3(t) \end{bmatrix} = \mathbf{L}(t), \quad \begin{bmatrix} t & t & 0 & 0 \\ 0 & t & t & 0 \\ 0 & t & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 2t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = t\mathbf{T}.$$

Quindi otteniamo:

$$\mathbf{L}(t) = t\mathbf{T}\mathbf{L}(t) + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{L}(t) - t\mathbf{T}\mathbf{L}(t) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{L}(t)(\mathbb{I} - t\mathbf{T}) = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Per trovare L(t) devo moltiplicare per la matrice inversa:

$$\mathbf{L}(t) = (\mathbb{I} - t\mathbf{T})^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

e dato che ci interessa $L_0(t)$ si prende la prima componente:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{w}(\mathbf{I} - t\mathbf{T})^{-1}v$$

$$L_0(t) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}(\mathbb{I} - t\mathbf{T})^{-1}\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

In generale se ho un automa a stati finiti con cui riconosco un certo linguaggio, la funzione generatrice che conta le parole del linguaggio rispetto alla lunghezza la trovo sempre in questo modo: dove T è la matrice di transizioni di stato, v è il vettore che ha tutti 0 e un 1 in corrispondenza della posizione che corrisponde agli stati finali (potrebbe essercene anche più di uno) e w mi permette di prendere la componente che mi interessa.

Parole che non contengono il pattern $p = p_1, \cdots, p_k$ -1-

Introduciamo il concetto di *vettore di correlazione* **C** con un esempio relativo all'alfabeto $\mathcal{A} = \{a, b\}$ e al pattern $p = aabbaa$:

pattern a a b b a a	tail	C_i
a a b b a a		1
a a b b a	a	0
a a b b	a a	0
a a b	b a a	0
a a	b b a a	1
a	a b b a a	1

C_0 è sempre 1 perchè corrisponde al confronto del pattern con se stesso. Il polinomio di autocorrelazione associato al pattern è $C(t) = 1 + t^4 + t^5$.

Parole che non contengono il pattern $p = p_1, \cdots, p_k$ -2-

Polinomio di autocorrelazione associato al pattern:

$$C(t) = \sum_{i=0}^{k-1} C_i t^i, \quad C_i = [[p_1 \cdots p_{k-i} = p_{i+1} \cdots p_k]]$$

dove C_i vale 1 se l'uguaglianza è vera, 0 altrimenti.

Sia $\mathcal{A}$ un alfabeto di cardinalità m, $p = p_1 \cdots p_k$ un pattern e $C(t)$ il polinomio di autocorrelazione di p; allora le funzioni generatrici $L(t)$ e $S(t)$ delle parole dell'alfabeto che **non contengono** p e che **contengono** p, con $L(t) = \frac{1}{1-mt} - S(t)$, sono:

$$S(t) = \frac{C(t)}{t^k + (1-mt)C(t)}, \quad L(t) = \frac{t^k}{(1-mt)(t^k + (1-mt)C(t))}$$

Parole che non contengono il pattern $p = p_1, \cdots, p_k$

Sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle parole che non contengono p e sia $\mathcal{T}$ l'insieme delle parole che contengono p solo alla fine. L'equazione simbolica $\mathcal{S} \times \mathcal{A}$ definisce l'insieme delle parole che non contengono p, concatenate con una lettera dell'alfabeto; da tale equazione si hanno due possibili risultati:

1. una parola in $\mathcal{S}$ (la concatenazione non ha aggiunto p)
2. una parola in $\mathcal{T}$ (la concatenazione ha aggiunto p in coda alla parola in $\mathcal{S}$)

$$\mathcal{S} \times \mathcal{A} + \{\varepsilon\} = \mathcal{S} \cup \mathcal{T}$$

In S è presente la parola vuota, ma con l'operazione di concatenazione non la si ottiene, quindi affinché l'uguaglianza sia vera aggiungo anche la stringa vuota ε

Si ha quindi

$$L(t) = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^2)}$$

ed ffettuando una scomposizione in frazioni parziali della funzione si ottiene:

$$L(t) = \frac{t^3}{(1-t)(1-2t)(1-t-t^2)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1-2t} + \frac{C+Dt}{1-t-t^2},$$

dove $A = 1$, $B = 1$, $C = -2$ e $D = -1$.
Per enumerare le parole che **non** contengono il pattern $p = abb$ è sufficiente calcolare la seguente funzione generatrice:

$$\frac{1}{1-2t} - L(t).$$

Enumerazione di linguaggi che evitano pattern

Trovare il linguaggio la funzione generatrice del linguaggio delle parole che invece quel pattern non lo contengono è facile perché è sufficiente togliere da tutte le parole quelle che hanno quella caratteristica. In termini di funzioni generatrici vuol dire che devo fare la differenza tra la funzione generatrice che conta tutte le parole del linguaggio e la funzione l(t). Per risolvere facilmente i calcoli usiamo un'applicazione del metodo simbolico: definiamo il concetto di vettore di correlazione associato a un certo alfabeto e a un certo pattern, l'idea è quella di andare a confrontare il pattern con se stesso o con il pattern che vado a shiftare a destra di una posizione e di vedere se ho un match tra il pattern originario e quello che mi rimane dopo aver fatto lo spostamento. Associo a questa sequenza di 0 e 1 un polinomio che si chiama il polinomio di autocorrelazione del pattern. I coefficienti C_i corrispondono a situazioni in cui la porzione iniziale del pattern corrisponde alla porzione finale del pattern e ottengo 1 o 0 a seconda che quell'espressione logica sia vera oppure falsa. L'indice i corrisponde proprio alla lunghezza della coda che sto considerando. Esprimibile come il rapporto tra il polinomio di autocorrelazione del pattern diviso t^k Dove k è la dimensione del pattern, dove m è la cardinalità dell'alfabeto. L'unica cosa che devo fare dato un pattern è trovare il suo polinomio di autocorrelazione perché le funzioni si calcolano sulla base di questo polinomio. Dimostrare il risultato per S: la dimostrazione si basa su un'applicazione del metodo simbolico. L'idea è quella di andare a definire due equazioni simboliche una per S e una per T, che sono in relazione, e questo ci permette di individuare un sistema di due equazioni in due incognite e che corrisponde alle funzioni generatrici dell'enunciato appena visto. Come si fa a costruire un'equazione simbolica per S? Concateniamo ad S un qualsiasi simbolo dell'alfabeto, quindi prendo una parola del linguaggio che non contiene il pattern e ci metto in fondo a questa uno dei simboli dell'alfabeto, così facendo possono succedere due situazioni: la nuova parola che trovo continua a non contenere il pattern, quindi appartiene in S, oppure se lo contiene lo contiene soltanto alla fine, perché è grazie alla aggiunta dell'ultimo simbolo che ho ottenuto il partner. Per T entra in gioco il polinomio di correlazione: concateno in fondo alle parole di S il pattern e ottengo una parola che contiene il pattern. Attenzione perché grazie all'aggiunta del pattern in situazioni particolari potrebbe essere trovo prima il pattern all'interno della parola. Lo trovo prima quando si verificano delle situazioni di questo tipo: quando faccio un'aggiunta in fondo del pattern ma i simboli precedenti che si trovano alla fine della parola corrispondono alla parte finale del pattern. Quando concateno il pattern con una parola in S in pratica posso trovare questo pattern prima in corrispondenza dei coefficiente del polinomio di correlazione (dipende dal valore della coda). Ottengo una parola in T che è concatenata con l'unione di tutte le code di lunghezza i.

Parole che non contengono il pattern $p = p_1, \cdots, p_k$ -4-

Si consideri adesso $\mathcal{S} \times \{p\}$, ovvero si concateni p ad una parola in $\mathcal{S}$: in questo modo si ottiene una parola che contiene il pattern p alla fine. Se però $p_1 p_2 \cdots p_{k-i} = p_{i+1} \cdots p_k$ la parola potrebbe contenere il pattern prima, sempre che la parola in $\mathcal{S}$ termini con $p_1 \cdots p_i$.

$$\mathcal{S} \times \{p\} = \mathcal{T} \times \bigcup_{c_i \neq 0} < tail >_i$$

dove $\bigcup_{c_i \neq 0} < tail >_i$ sono le code ottenute dal calcolo del vettore di correlazione.

Trasformando le equazioni simboliche in funzioni generatrici si ha:

$$\mathcal{S} \times \mathcal{A} + \{\varepsilon\} = \mathcal{S} \cup \mathcal{T} \rightarrow S(t) \cdot mt + 1 = S(t) + T(t);$$

$$\mathcal{S} \times \{p\} = \mathcal{T} \times \bigcup_{c_i \neq 0} < tail >_i \rightarrow S(t)t^k = T(t)C(t).$$

Le due equazioni costituiscono un sistema in due incognite che può essere facilmente risolto:

$$\begin{cases} S(t) \cdot mt + 1 = S(t) + T(t) \\ T(t) = \frac{S(t)t^k}{C(t)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(t) \cdot mt + 1 = S(t) + \frac{S(t)t^k}{C(t)} \\ T(t) = \frac{S(t)t^k}{C(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(t)S(t)mt + C(t) = C(t)S(t) + S(t)t^k \\ T(t) = \frac{S(t)t^k}{C(t)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C(t) = S(t)(C(t) + t^k - C(t)mt) \\ T(t) = \frac{S(t)t^k}{C(t)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S(t) = \frac{C(t)}{t^k + (1-mt)C(t)} \\ T(t) = \frac{S(t)t^k}{C(t)} \end{cases}$$

Esempi

Ad esempio, la funzione generatrice delle parole su $\mathcal{A} = \{a, b\}$ che non contengono $p = aabbaa$ è data dalla seguente espressione:

$$S(t) = \frac{1 + t^4 + t^5}{t^6 + (1 - 2t)(1 + t^4 + t^5)}.$$

Riprendiamo infine l'esempio $p = abb$ già visto in precedenza, si ha:

pattern a b b	tail	C_i
a b b		1
a b	b	0
a	b b	0

e visto che $|p| = 3$, $|\mathcal{A}| = 2$ e $C(t) = 1$ si ottiene la funzione generatrice:

$$L(t) = \frac{t^3}{(1 - 2t)(t^3 + 1 - 2t)},$$

che abbiamo determinato a partire dall'automa a stati finiti che riconosce il linguaggio delle parole che contengono $p = abb$.

Estrazione del coefficiente di una funzione generatrice

L'operatore *coefficiente di*

Data la funzione genratrice $\mathcal{G}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a(t)$, l'*operatore funzione generatrice* $[t^n]$ restituisce il suo coefficiente:

$$[t^n]\mathcal{G}(a_n) = [t^n]a(t) = a_n.$$

L'operatore $[t^n]$ soddisfa alcune proprietà analoghe a quelle dell'operatore $\mathcal{G}$.

Data la funzione generatrice come posso trovare il coefficiente? Introduciamo un altro operatore, che è simmetrico a quello delle funzione generatrice. Si applica a una funzione generatrice e restituisce il suo coefficiente a_n. Valgono delle proprietà simili a quelle dell'operatore G.

La proprietà di derivazione permette di trovare il coefficiente da una funzione se riconosco che questa è la derivata di un'altra, quindi se ho una funzione generatrice e riconosco che questa funzione è la derivata di una funzione generatrice. Questa regola a volte è utile anche applicata nell'altra direzione.

Le proprietà dell'operatore $[t^n]$

Linearità: $[t^n](\alpha a(t) + \beta b(t)) = \alpha[t^n]a(t) + \beta[t^n]b(t)$

Spostamento: $[t^n]ta(t) = [t^{n-1}]a(t)$

questa proprietà può essere facilmente generalizzata:
$[t^n]t^s a(t) = [t^{n-s}]a(t)$ e vale per s intero qualsiasi

Negativo o positivo

Derivazione: $[t^n]D(a(t)) = (n+1)[t^{n+1}]a(t) = (n+1)a_{n+1}$

questa relazione, letta da destra verso sinistra, diventa:
$\boxed{[t^n]a(t) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]D(a(t)).}$

Convoluzione: $[t^n]a(t)\cdot b(t) = \sum_{k=0}^{n}[t^k]a(t)[t^{n-k}]b(t)$

Composizione:
$[t^n]a(t)\circ b(t) = [t^n]\sum_{k\geq 0} a_k(b(t))^k = \sum_{k\geq 0} a_k[t^n]b(t)^k$

Oltre alle proprietà elencate vale anche il seguente

Principio di identità: $[t^n]a(t) = [t^n]b(t) \Leftrightarrow \mathcal{G}(a_n) = \mathcal{G}(b_n)$

Regola di Newton

Applicazione delle proprietà che origina un risultato che viene poi utilizzato come fosse una regola aggiuntiva: sfrutto la caratteristica della proprietà di derivazione e derivando questo binomio riesco ad abbassare l'esponente. Mi fermo quando mi ritrovo a dover estrarre il coefficiente zero.

$$[t^n](1+\alpha t)^r = \frac{r\alpha}{n}[t^{n-1}](1+\alpha t)^{r-1} = \frac{r\alpha}{n}\frac{(r-1)\alpha}{n-1}[t^{n-2}](1+\alpha t)^{r-2} = \cdots$$

$$= \frac{r\alpha}{n}\frac{(r-1)\alpha}{n-1}\cdots\frac{r-n+1}{1}[t^0](1+\alpha t)^{r-n} = \alpha^n\binom{r}{n}[t^0](1+\alpha t)^{r-n}.$$

Osserviamo che $[t^0](1+\alpha t)^{r-n} = 1$, infatti se poniamo $t=0$ nella funzione $(1+\alpha t)^{r-n}$ si vede facilmente che il coefficiente è uguale a 1.

$$[t^n](1+\alpha t)^r = \binom{r}{n}\alpha^n$$

Coefficienti di funzioni generatrici razionali fratte

Tutte le volte che abbiamo delle radici quadrate, delle radici cubiche di binomi, queste situazioni le riesco a trattare con la regola di Newton.

Sia $a(t) = \frac{1}{(1+\alpha t)^2}$, allora:

$$[t^n]\frac{1}{(1+\alpha t)^2} = [t^n](1+\alpha t)^{-2};$$

applicando la regola di Newton e la *negation rule* dei coefficienti binomiali

Cambio segno al numeratore, lo sommo al denominatore e tolgo 1

$$[t^n](1+\alpha t)^{-2} = \alpha^n\binom{-2}{n} = \binom{2+n-1}{n}(-1)^n\alpha^n = (-\alpha)^n\binom{n+1}{n} =$$

$$= \frac{(n+1)!}{n!}(-\alpha)^n = (n+1)(-\alpha)^n.$$

Coefficienti di funzioni generatrici razionali fratte

Sia $a(t) = \frac{1}{(1+\alpha t)(1+\beta t)}$, con $\alpha \neq \beta$. Cerchiamo due costanti A e B tali che:

$$\frac{1}{(1+\alpha t)(1+\beta t)} = \frac{A}{1+\alpha t} + \frac{B}{1+\beta t} =$$

$$= \frac{A + A\beta t + B + B\alpha t}{(1+\alpha t)(1+\beta t)} = \frac{A + B + (A\beta + B\alpha)t}{(1+\alpha t)(1+\beta t)}.$$

I valori di A e B corrispondono alla soluzione del sistema lineare:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A\beta + B\alpha = 0 \end{cases}$$

Il sistema ha una sola soluzione, che è:

$$\begin{cases} A = \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \\ B = \frac{-\beta}{\alpha-\beta} \end{cases}$$

$$[t^n]\frac{1}{(1+\alpha t)(1+\beta t)} = [t^n]\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha t} + \frac{-\beta}{1+\beta t}\right)$$

Per la proprietà di linearità abbiamo: **Linearità**: $[t^n](\alpha a(t) + \beta b(t)) = \alpha[t^n]a(t) + \beta[t^n]b(t)$

$$[t^n]\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha t} + \frac{-\beta}{1+\beta t}\right) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left([t^n]\frac{\alpha}{1+\alpha t} + [t^n]\frac{-\beta}{1+\beta t}\right) =$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha[t^n](1+\alpha t)^{-1} - \beta[t^n](1+\beta t)^{-1}).$$

A questo punto possiamo applicare la regola di Newton ottenendo: $[t^n](1+\alpha t)^r = \binom{r}{n}\alpha^n$

$$\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha[t^n](1+\alpha t)^{-1} - \beta[t^n](1+\beta t)^{-1}) = \frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha(-\alpha)^n - \beta(-\beta)^n).$$

$$[t^n]\frac{1}{(1+\alpha t)(1+\beta t)} = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha-\beta}(-1)^n.$$

Coefficiente della funzione generatrice dei coefficienti binomiali centrali

$$[t^n]\frac{1}{\sqrt{1-4t}} = [t^n](1-4t)^{-\frac{1}{2}}$$

Possiamo applicare la regola di Newton ed esprimere i coefficienti binomiali con numeratore negativo fratto in funzione di coefficienti binomiali centrali:

$$[t^n](1-4t)^{-\frac{1}{2}} = (-4)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n} = (-4)^n\frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n},$$

come ci si aspettava.

Coefficiente della funzione generatrice dei numeri di Fibonacci

Se cerchiamo di scomporre il denominatore per ricondurci al caso generale visto negli esempi precedenti vediamo che:

$$1 - t - t^2 = (1 - \phi t)(1 - \hat{\phi} t) \; \textit{dove} \; \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Quindi adesso possiamo determinare il coefficiente:

$$[t^n]\frac{t}{1-t-t^2} = [t^n]\frac{t}{(1-\phi t)(1-\hat{\phi} t)}.$$

Applicando la tecnica di espansione in frazioni parziali si trova:

$$[t^n]\frac{t}{(1-\phi t)(1-\hat{\phi} t)} = [t^n]\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\phi t} + \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{1-\hat{\phi} t}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}[t^n]\left(\frac{1}{1-\phi t} - \frac{1}{1-\hat{\phi} t}\right).$$

Applicando la proprietà di linearità e successivamente la regola di Newton otteniamo:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}[t^n]\left(\frac{1}{1-\phi t} - \frac{1}{1-\hat{\phi} t}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}([t^n](1-\phi t)^{-1} - [t^n](1-\hat{\phi} t)^{-1})$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{5}}\phi^n$$

Dalla funzione alla ricorrenza

Vediamo adesso come sia possibile ritrovare la ricorrenza dei numeri di Fibonacci a partire dalla funzione generatrice: Si ha:

$$F(t) = \sum_{k \geq 0} F_k t^k = \frac{t}{1-t-t^2}, \quad (1-t-t^2)F(t) = t$$

Applicando l'operatore funzione generatrice si ha:

$$[t^n](1-t-t^2)F(t) = [t^n]t, \quad [t^n]F(t) - [t^{n-1}]F(t) - [t^{n-2}]F(t) = [t^n]t$$

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = \delta_{n,1}, \quad F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = \delta_{n+2,1} = 0, \quad n \geq 0$$

Il denominatore della funzione è quello che permette di caratterizzare la ricorrenza, il numeratore invece serve per definire le condizioni iniziali. L'ordine della ricorrenza corrisponde al grado del polinomio che si trova denominatore

Coefficienti delle funzioni generatrici del Quicksort

La funzione generatrice del numero medio di confronti nel Quicksort è:

$$C(t) = \frac{2}{(1-t)^2} \cdot \ln\frac{1}{1-t}$$

Si ha:

$$[t^n]\frac{2}{(1-t)^2} \cdot \ln\frac{1}{1-t} = 2[t^n]\underbrace{\frac{1}{1-t}}_{\mathcal{G}(1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{1-t} \cdot \ln\frac{1}{1-t}}_{\mathcal{G}(H_n)}$$

e applicando la proprietà di convoluzione si ha:

$$2[t^n]\frac{1}{1-t} \cdot \frac{1}{1-t} \cdot \ln\frac{1}{1-t} = 2\sum_{k=0}^{n} H_k, \quad H_0 = 0.$$

Questa soluzione è però diversa da quella trovata in precedenza.

Ricordiamo che applicando la proprietà di derivazione delle funzioni generatrici si ha:

$$D(\mathcal{G}(a_n)) = \frac{1}{t}\mathcal{G}(na_n),$$

quindi estraendo il coefficiente si ottiene:

$$[t^n]D(\mathcal{G}(a_n)) = [t^n]\frac{1}{t}\mathcal{G}(na_n) = [t^{n+1}]\mathcal{G}(na_n),$$

e applicando la proprietà di spostamento:

$$[t^{n+1}]\mathcal{G}(na_n) = (n+1)a_{n+1}.$$

Possiamo applicare questa proprietà ai numeri armonici:

$$D(\mathcal{G}(H_n)) = \frac{1}{t}\mathcal{G}(nH_n).$$

$$\frac{1}{t}\mathcal{G}(nH_n) = D(\mathcal{G}(H_n)) = \frac{1}{(1-t)^2}\ln\frac{1}{1-t} + \frac{1}{(1-t)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{G}(C_n) + \frac{1}{(1-t)^2} \Rightarrow \mathcal{G}(C_n) = \frac{2}{t}\mathcal{G}(nH_n) - \frac{2}{(1-t)^2}.$$

Adesso possiamo finalmente estrarre il coefficiente

$$C_n = 2[t^n]\frac{1}{t}\mathcal{G}(nH_n) - 2[t^n]\frac{1}{(1-t)^2}$$

$$C_n = 2((n+1)H_{n+1} - (n+1))$$

$$C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1).$$

Abbiamo quindi trovato il coefficiente nella forma desiderata e contemporaneamente abbiamo dimostrato anche la seguente identità:

$$[t^n]C_n = 2(n+1)(H_{n+1} - 1) \Rightarrow 2\sum_{k=0}^{n} H_k = 2(n+1)(H_{n+1} - 1)$$

$$\sum_{k=0}^{n} H_k = (n+1)(H_{n+1} - 1)$$

La caratteristica importante dell'algoritmo Mergesort è che siccome si basa su un processo di divisione, e non è importante il contenuto del vettore, cioè qualsiasi sia il contenuto del vettore che voglio ordinare il costo dell'ordinamento in termini di confronti è sempre lo stesso, e questo ci ha permesso di dire che l'ordinamento basato sul confronto di chiavi è $\Theta n \ln n$ e che non si può fare meglio di così. L'idea è risolvere la ricorrenza in D_n e poi torno indietro C_n. Questa ricorrenza è una di quelle ricorrenze che si riescono a risolvere facilmente perché ho un termine espresso in funzione di un altro più piccolo e posso iterare la ricorrenza e mi fermo quando arrivo ad una condizione iniziale. Per eliminare la sommatoria: esaminiamo il coefficiente $\log_2 n$, cioè l'argomento della sommatoria. siccome c'è una parte intera inferiore è una sequenza che si ripete per un certo numero di volte (finché non vado all'intero successivo rimango su quel valore). come faccio a studiarla con le funzioni generatrici? l'idea è che posso vedere questa sequenza infinita come una somma di tante sequenze più semplici, e anche la funzione generatrice la posso vedere come una somma di tante funzioni generatrici.

La funzione generatrice di $f_n = \lfloor \log_2 n \rfloor$ è esprimibile come:

$$\mathcal{G}(f_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2^k}}{1-t}.$$

Applicando la proprietà di convoluzione si ha:

$$\sum_{k=1}^{n} \lfloor \log_2 n \rfloor = [t^n]\frac{1}{1-t} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2^k}}{1-t} = \sum_{k=1}^{\infty} [t^n]\frac{t^{2^k}}{(1-t)^2};$$

e applicando la proprietà di spostamento e la regola di Newton:

$$\sum_{k=1}^{\infty} [t^n]\frac{t^{2^k}}{(1-t)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} [t^{n-2^k}](1-t)^{-2} = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-2}{n-2^k}(-1)^{n-2^k}.$$

Deve risultare $n - 2^k \geq 0$ e quindi $k \leq \log_2 n$ o meglio $k \leq \lfloor \log_2 n \rfloor$ perché k è un intero.

Analisi esatta del Mergesort

Adesso cerchiamo di trovare la soluzione esatta per la ricorrenza che conta il numero di confronti dell'algoritmo di Mergesort, visto nei primi capitoli. La ricorrenza del Mergesort è:

$$C_n = C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + C_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + n \quad \text{con} \quad C_1 = 0,\ C_2 = 2$$

n è il costo della fusione

Prima di proseguire osserviamo che valgono le seguenti uguaglianze:

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil; \quad \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor; \quad \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1.$$

Ponendo: $D_n = C_{n+1} - C_n$ si ha

$$D_n = C_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + C_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} + n + 1 - C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - C_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - n$$

Usando la prima uguaglianza si ottiene

$$C_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + C_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} + n + 1 - C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - C_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - n = C_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} - C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1 =$$

$$= C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} - C_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1 = D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1$$

Introducendo D_n ci siamo ricondotti ad una ricorrenza più semplice:

$$D_n = D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1, \quad \text{con} \quad D_1 = C_2 - C_1 = 2.$$

$$D_n = D_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 1 = D_{\lfloor \frac{n}{2^2} \rfloor} + 1 + 1 = \cdots = D_{\lfloor \frac{n}{2^k} \rfloor} + k;$$

$$\left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor = 1 \Rightarrow 2^k \leq n < 2^{k+1} \Rightarrow \log_2 n - 1 < k \leq \log_2 n$$

e si deve avere $k = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

$$D_n = D_1 + \lfloor \log_2 n \rfloor = 2 + \lfloor \log_2 n \rfloor$$

$$C_{n+1} - C_n = 2 + \lfloor \log_2 n \rfloor$$

$$C_{n+1} = C_n + 2 + \lfloor \log_2 n \rfloor = C_{n-1} + 2 + \lfloor \log_2 (n-1) \rfloor + 2 + \lfloor \log_2 n \rfloor = \cdots =$$

$$= C_1 + 2n + \sum_{k=1}^{n} \lfloor \log_2 k \rfloor = 2n + \sum_{k=1}^{n} \lfloor \log_2 k \rfloor.$$

Finalmente:

$$C_{n+1} = 2n + \sum_{k=1}^{n} \lfloor \log_2 k \rfloor \Rightarrow C_n = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \lfloor \log_2 k \rfloor.$$

Per trovare un'espressione ancora più esplicita, studiamo la funzione generatrice di $\lfloor \log_2 n \rfloor$. Sia:

$$f_n = \lfloor \log_2 n \rfloor, \quad f_0 = 0$$

e proviamo a scrivere in maniera esplicita i primi termini di f_n

$$[0, 0, \underbrace{1, 1}_{2}, \underbrace{2, 2, 2, 2}_{4=2^2}, \underbrace{3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3}_{8=2^3}, \cdots]$$

Tale sequenza infinita può essere ottenuta dalla somma di tante sequenze infinite più semplici, di ognuna delle quali si conosce la funzione generatrice:

$$\begin{cases} 0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1\cdots \rightarrow \frac{t^2}{1-t} \\ 0,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1\cdots \rightarrow \frac{t^4}{1-t} \\ 0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1\cdots \rightarrow \frac{t^8}{1-t} \\ \vdots \\ 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\cdots \rightarrow \frac{t^{2^k}}{1-t} \end{cases}$$

Allora si ha:

Uso la regola della negazione

$$\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-2}{n-2^k}(-1)^{n-2^k} = \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n\rfloor}\binom{2+n-2^k-1}{n-2^k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n\rfloor}\binom{n-2^k+1}{n-2^k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n\rfloor}(n-2^k+1) = (n+1)\lfloor \log_2 n\rfloor - \sum_{k=1}^{\lfloor \log_2 n\rfloor} 2^k.$$

In questa espressione mi dà un po' fastidio il fatto che questa somma vada all'infinito, ma in realtà è per finta perché i coefficienti binomiali da un certo punto in poi sono tutti zero. In realtà questa somma non arriva fino ad infinito ma arriva fino al $\mathrm{Log}_2\, n$ Perché i coefficienti che corrispondono a dei k diversi non ci sono.

Per calcolare la sommatoria ricordiamo che:

$$\sum_{k=0}^{m} 2^k = \frac{2^{m+1}-1}{2-1} = 2^{m+1}-1, \quad \sum_{k=1}^{m} 2^k = (2^{m+1}-1)-1 = 2^{m+1}-2.$$

Applicando questa uguaglianza all'equazione precedente si ottiene:

$$\sum_{k=1}^{n}\lfloor \log_2 n\rfloor = (n+1)\lfloor \log_2 n\rfloor - 2^{\lfloor \log_2 n\rfloor+1} + 2.$$

Possiamo concludere quindi che:

$$C_n = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}\lfloor \log_2 k\rfloor = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n}\lfloor \log_2 k\rfloor - \lfloor \log_2 n\rfloor =$$

$$= 2(n-1) + (n+1)\lfloor \log_2 n\rfloor - 2^{\lfloor \log_2 n\rfloor+1} + 2 - \lfloor \log_2 n\rfloor$$

Questa è la soluzione esatta nella ricorrenza che conta il numero di confronti del Mergesort

$$C_n = n\lfloor \log_2 n\rfloor + 2n - 2^{\lfloor \log_2 n\rfloor+1}$$

C_n può anche essere scritto come segue:

$$C_n = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}\lfloor \log_2 k\rfloor = (n-1) + \sum_{k=1}^{n-1}(\lfloor \log_2 k\rfloor + 1)$$

L'espressione $\sum_{k=1}^{n-1}(\lfloor \log_2 k\rfloor + 1)$ indica il numero di bit nella rappresentazione binaria di tutti i numeri $\leq n$.

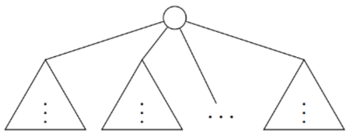
n	$(n)_2$	$\lfloor \log_2 n\rfloor + 1$
1	1	1
2	10	2
3	11	2
4	100	3
5	101	3
6	110	3
7	111	3

Osserviamo infine che $B_n = 1 + \lfloor \log_2 n\rfloor$ è la soluzione della ricorrenza $B_n = B_{\lceil \frac{n-1}{2}\rceil} + 1 = B_{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} + 1$, con $B_1 = 1$ che descrive i confronti di una ricerca senza successo con l'algoritmo di ricerca binaria nel caso peggiore.

Ancora sull'enumerazione di alberi

Riprendiamo il problema dell'enumerazione degli albero s-ari, che avevamo affrontato con il metodo simbolico:

$$B = \{\square\} \cup \{\bigcirc\} \times \underbrace{B \times B \times \cdots \times B}_{s}$$



La funzione generatrice $B(t)$ che conta gli alberi rispetto ai nodi interni soddisfa l'equazione:

Nodo esterno

$$B(t) = t^0 + tB(t)^s = 1 + tB(t)^s$$

Se $s = 2$ abbiamo già trovato una forma esplicita per $B(t)$ da cui ricavare il coefficiente, $B(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t}$:

$$B_n = [t^n]\frac{1-\sqrt{1-4t}}{2t} = \frac{1}{2}[t^n]t^{-1}(1-\sqrt{1-4t}) =$$

proprietà di spostamento — proprietà di linearità

$$= \frac{1}{2}[t^{n+1}](1-\sqrt{1-4t}) = \underbrace{\frac{1}{2}[t^{n+1}]1}_{0} - \frac{1}{2}[t^{n+1}]\sqrt{1-4t} =$$

$$= \frac{1}{2}[t^{n+1}]\sqrt{1-4t} = -\frac{1}{2}[t^{n+1}](1-4t)^{\frac{1}{2}} =$$

la regola di Newton

$$= -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1} = \frac{1}{2}\binom{2(n+1)}{n+1}\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}(2(n+1)-1)}(-4)^{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{2(n+1)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2 n!n!(2n+1)} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Se il numeratore è una frazione li posso sempre esprimere come dei coefficienti binomiali che hanno a che fare con i coefficienti binomiali centrali

Inversione di Lagrange

L'estrazione del coefficiente da una funzione generatrice ci può dare sia il coefficiente esplicito sia una ricorrenza (come nel caso di funzioni generatrici razionali fratte). Quindi se si conosce la funzione posso riuscire ad ottenere informazioni su coefficienti sia esplicitamente che anche attraverso delle ricorrenze. Ci sono altre situazioni che però non rientrano in nessuna di queste due tipologie e quindi abbiamo bisogno di nuovi strumenti per poter affrontare anche questi problemi. Per il problema sull'enumerazioni degli alberi avevamo visto come applicazione del metodo simbolico permette di trovare la funzione generatrice che conta gli alberi s-ari rispetto al numero dei nodi interni.

Teorema di inversione di Lagrange

Data $A(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ funzione generatrice che soddisfa l'equazione funzionale $A(t) = t\Phi(A(t))$ con $\Phi(0) \neq 0$, si ha

1. $[t^n]A(t) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\Phi(t)^n$
2. $[t^n]A(t)^m = \frac{m}{n}[t^{n-m}]\Phi(t)^n$
3. $[t^n]\Psi(A(t)) = \frac{1}{n}[t^{n-1}]\Psi'(t)\Phi(t)^n$

Tornando all'esempio degli alberi s-ari si può procedere come segue:

$$B(t) = 1 + tB(t)^s \Rightarrow \underbrace{B(t) - 1}_{A(t)} = tB(t)^s$$

$$B(t) - 1 = A(t) \Rightarrow B(t) = A(t) + 1$$

$$A(t) = t(A(t) + 1)^s = t\Phi(A(t))$$

la posso vedere come la composizione della funzione ϕ

con $\Phi(t) = (t+1)^s$.

Il termine noto è 1, e corrisponde all'albero vuoto

Applicando il Teorema di Lagrange si ha:

$$[t^n]A(t) = \frac{1}{n}[t^{n-1}](1+t)^{sn} = \frac{1}{n}\binom{sn}{n-1}$$

Il risultato sembra una generalizzazione dei numeri di Catalan, cosa che risulta evidente con la seguente semplificazione:

$$\frac{1}{n}\binom{sn}{n-1} = \frac{1}{n}\frac{(sn)!}{(n-1)!(sn-n+1)!} = \frac{(sn)!}{n!((s-1)n+1)(sn-n)!} =$$

$$= \frac{1}{(s-1)n+1}\binom{sn}{n}.$$

Generalizzazione dei numeri di catalan

che coincide esattamente, per $s = 2$, con i numeri di Catalan.

Inversa di una funzione generatrice

Le funzioni $a(t) = \sum_{k\geq 0} a_k t^k$ e $b(t) = \sum_{k\geq 0} b_k t^k$ sono una l'inversa dell'altra se:

$$a(t)b(t) = \boxed{1}$$

funzione generatrice di una sequenza di un singolo 1 seguito da un'infinita di 0

Perché valga questa relazione ↑ deve valere anche per i coefficienti ↓

Si ha:

$$[t^n]a(t)b(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k},$$

Il coefficiente di un prodotto è la convoluzione delle due sequenze

e deve risultare:

$$\begin{cases} a_0 b_0 = 1 \\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0 \quad n > 0 \end{cases}$$

perché valga questa relazione è necessario che il termine noto di questo prodotto sia uguale a 1 e che tutti gli altri coefficienti siano 0

Quindi l'inversa $\exists$ sempre purché $a_0 \neq 0$, dato che $b_0 = \frac{1}{a_0}$.

L'unica condizione che basta per assicurarsi che esista l'inversa di una funzione generatrice è che il termine noto di quella funzione sia diverso da zero

sarebbe quello di cercare di capire come mai vale questo questo questo teorema intanto di cosa si tratta quindi abbiamo una funzione generatrice additivi uguale a somme perenne maggiore uguale di zero di anni e lei NE in generale non conosciamo questa funzione generatrice in maniera esplicita ma conosciamo una funzione un'equazione che la definisce quindi un'equazione del tipo add t uguale.at per fidi ad t dove fi e una seconda funzione con la caratteristica che fi di zero è diverso da zero quindi se siamo in

Interessante è che per estrarre il coefficiente della funzione posso estrarre un altro coefficiente che ha a che fare con la funzione ϕ, per il teorema di inversione di Lagrange. se io ho una funzione che soddisfa un'equazione di questo tipo e ϕ è abbastanza semplice da estrarre il coefficiente. La terza formulazione del teorema deriva anch'essa dalla seconda, quindi dimostrare la due mi permette di dimostrare tutte le altre.

Inversa composizionale

Le funzioni $a(t) = \sum_{k\geq 0} a_k t^k$ e $b(t) = \sum_{k\geq 0} b_k t^k$ sono una l'inversa composizionale dell'altra se:

$$a(b(t)) = t = b(a(t))$$

Si ha:

$$a(b(t)) = a_0 + a_1 b(t) + a_2 b(t)^2 + a_3 b(t)^3 + \cdots =$$

$$= a_0 + a_1(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots) + a_2(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots)^2 + a_3(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \cdots)^3$$

$$= \underbrace{a_0 + a_1 b_0 + a_2 b_0^2 + a_3 b_0^3}_{\text{termine noto}} + \cdots +$$

$$+ \underbrace{(a_1 b_1 + 2a_2 b_0 b_1 + 3a_3 b_0 b_1 + \cdots)}_{\text{termine in } t}\, t + \cdots$$

Quindi il termine noto sarà uguale a 0 se e solo se $a_0 = b_0 = 0$, se questo è vero allora si deve avere: $a_1 b_1 = 1 \Rightarrow b_1 = \frac{1}{a_1} \Rightarrow a_1 \neq 0$. L'inversa composizionale si può sempre ricavare se $a_0 = b_0 = 0$ e $a_1 \neq 0$.

queste condizioni e se la nostra funzione generatrice che si inita dall’equazione in cui appunto riusciamo a identificare a chi a sinistra uguale a un TE poi la composizione della funzione ficona a allora siamo nelle ipotesi del teorema e per estrarre il coefficiente ennesimo della funzione generatrice additi possiamo e estrarre al suo posto il coefficiente un coefficiente che ha a che fare con la funzione free quindi in particolare il coefficiente di additivi è semplicemente uno su n efficiente n -1 esimo di subiti alla n se consideriamo la situazione un pochino più generale in cui dice di avere abbiamo a di chi ha la m questo coefficiente lo devo calcolare in modo leggermente diverso quindi dovrò fare una m su n per il coefficiente n meno m di Filippi alla NE poi la situazione più in generale di tutte è quella in cui invece di avere a di POO addirittura 1 1 terza funzione si che vado a comporre con additivi e in questo caso in questo caso quello che appunto devo fare è una trasforma 1 1 calcolo un pochino più complesso rispetto ai precedenti perché devo andare a calcolarmi il coefficiente n -1 esimo di questa terza funzione psichica vado a derivare per finiti alla NE poi sempre moltiplico per uno su n intanto un’osservazione che volevo fare prima di passare AA la dimostrazione che vedete qui ho a sinistra ho l’estrazione di un coefficiente 1 1 funzione più o meno semplice qui a destra vedete che all'interno che l'estrazione del coefficiente che io faccio in realtà è un po particolare perché vedete che n che è l'indice del coefficiente che voglio e ha a che fare con l'indice per coscienti che voglio andare ad estrarre compare anche nella funzione quindi capite bene che al variare di n che cambia anche la funzione che vada a considerare quindi ho e come se avessi risolvessi il problema facendo un’estrazione da una famiglia di funzioni generatrici no perché il valore di n che a destra la la funzione cambia quindi questa è una prima osservazione che volevo usare l’altra cosa che è appunto l’altra l’ultima lezione avevamo visto erano eh beh il concetto di inverno in realtà ora in questo in questo contesto non non dovrebbe entrarci tanto però insomma per completezza avevamo visto quand’è che si può fare l’inversa di una funzione generatrice e in questo caso la condizione è piuttosto semplice basta qui il termine no troppo zero sia diverso da zero e poi invece avevamo introdotto un altro concetto che è quello che inversa composizionale ed è un concetto che invece useremo e che useremo in questa e in questa dimostrazione e quand’è che hai bisono una l’inversa composizionale dell’altra quando facendo la composizione di acqua B ottengo TOEE analogamente facendo la composizione di B con a ottengo sempre lo stesso risultato ehm in questo caso abbiamo visto che questa composizione è possibile se solo se e innanzitutto il termine noto a zero EB zero sono uguali a zero quindi queste due funzioni devono avere non devono avere il termine noto e poi l’altra condizione che invece ha con uno il termine successivo sia diverso da zero quindi se siamo in queste ipotesi si può trovare l’inversa posizionale benissimo allora a questo punto e vediamo di dimostrare questo teorema ora visto la forma in cui lo andiamo a dimostrare in realtà è un pochino diversa da quelle che vi ho fatto vedere nel teorema un attimo sa e il teorema a me piace presentarlo in quel modo perché mi sembra una formulazione abbastanza semplice da capire la dimostrazione ora di dimostrazione del teorema ce ne sono tante e ne ho scelta una che mi sembra possa essere la vostra portata che è uno non non richiede cose molto e strumenti molto diversi da quelli che abbiamo già eh già utilizzato finora però la formulazione di di questo teorema è un pochino diversa rispetto alla alla alla a quella che che vi ho detto in questo momento però insomma ora vi dico qual è la la nuova formulazione e cosa c'entra la nuova formulazione con quella va bene allora intanto quindi la forma generale che andiamo a considerare per il per il teorema è la seguente quindi ho è una funzione F grande e con coefficienti essere uno di p quadro più eccetera eccetera EE poi esce a -1 di chi indicata in questo caso vedete con questo -1 tra parentesi angolari che è la è l’inversa composizionale di F va bene quindi cioè meno l’inversa composizionale di F con coefficienti con uno con due eccetera eccetera vedete tutti e due hanno il termine noto uguale a zero e l’ipotesi ovviamente che F uno EQ uno siano diversi da zero va bene allora è quello che ora dimostreremo è la seguente cosa ovvero Ops scusate ovvero dimostreremo che il coefficiente ennesimo della inversa composizionale elevato alla m è uguale ad m su n per il coefficiente meno m di F di chi alla meno n va bene questa è la è la cosa che noi andremo a dimostrare cioè io ho due funzioni F è FA -1 che sono una l’inversa composizionale dell’altra in pratica la formulazione che andiamo a dimostrare ci fa vedere qual è la relazione tra i coefficienti dell’università composizionale e della funzione di partenza no quindi il coefficiente ennesimo della della dell’aversa composizionale elevato alla ME questo coefficiente che dipende invece soltanto da Este e cosa c'entra questa formulazione con quella che vi ho dato fino a questo momento eh cerchiamo di capire questo o allora abbiamo detto noi siamo partiti da una soluzione generatrice AB che soddisfa e la relazione.at uguale.at per figlia di con fidi zero universo da zero no e quello che abbiamo detto allora prendiamo in particolare come F grande di t prendiamo t diviso sì di ok confine che è quella che abbiamo definito fino adesso ovviamente se io prendo F di x uguale.at diviso F di PF di zero è uguale a zero non solo è F zero è uguale a zero EFF di uno è diverso da F di uno qui sarebbe la derivata e quindi non bene sarebbe il termine ehm se vado a valutare il il termine in eh la la faccio se vado a fare la derivata prima di questa di questa funzione è diversa da zero il che equivale a dire che il primo coefficiente è diverso da zero allora cosa c’entra questa epoca ora se vado a fare la composizione di F grande di piccola di chi eh quindi F grande di chi lo compongo con a di chi quindi è che cos’è per definizione terzo di Fiat sussidi t quindi devo sostituire al posto di chi ha di chi quindi OADT diviso fi di a di chi ma ADT per ipotesi soddisfa l’equazione t per figlia di B quindi vedete al numeratore ho sostituito al posto di a chicchi per figlia di chi quindi cosa succede che questi figli di chi si semplificano e mi rimane tim cioè cosa vuol dire che se io prendo se additi è definita da un’equazione di questo tipo F di t uguale.at su see è l’inversa composizionale di a va bene mi torna perché vedete se vado a fare la composizione di questa funzione F con a ottengo TE questa è proprio la definizione di inversa composizionale quindi e quindi che cosa vuol dire allora che che questa che questa formulazione qui che io vi ho fatto vedere in realtà è esattamente la stessa che vi ho dato che vi ho dato 10 minuti fa perché se Addis sì se se come FA -1 di p prendiamo.at quindi se se sostituiamo in questa espressione al posto diversi a -1 di quei sfumiamo ad p eh che cosa succede eh TN gli abiti alla m uguale AM su NT alla meno ME poi qui al posto di se ci rimetto di suffi elevato alla meno n ovviamente qui essendo essendoci dei segni meno posso innanzitutto portare questo qui alla meno enne dentro l'operatore distrazione quindi mi diventa vi ricordo no quando si porta dentro si cambia il segno quindi diventa un tizio alla n meno ME poi c'ho questo fedy alla meno NA denominatore che quindi diventa un seguiti alla n quindi vedete che in realtà questa formulazione che adesso andiamo a dimostrare è equivalente a quella che vi ho dato alla seconda formulazione del teorema che vi ho dando no perché perché perché se prendo F di p uguale.at su freddi PATTE l'inversa composizionale di questa funzione va bene e quindi le due dimostrare l'una o l'altra equivalente come vi avevo già detto la dimostrazione appunto parte di questa è la la la la versione due del teorema quindi questa la uno ovviamente segue banalmente perché appunto quando è la uno la due coincide con uno e poi vedremo che anche la tre una volta dimostrata la due si dimostra in modo abbastanza semp quindi però ecco in questo per la dimostrazione preferisco ragionare in termini di inversa composizionale perché e ehm il concetto entra in gioco in maniera abbastanza importan quindi questo è quello che dimostreremo quindi la relazione che esiste tra i coefficienti delle inversa composizionale e della funzione di partenza benissimo allora la dimostrazione insomma non è difficile ma insomma richiede un pochino di di tempo eh allora quindi facciamo innanzitutto eh dunque quindi vogliamo dimostrare che il coefficiente dobbiamo andare a calcolarci entrare il coefficiente ennesimo degli inversa composizionale elevata elevata la m allora intanto e se andiamo a prendere facciamo un primo un primo caso cioè il caso m minore di zero va bene quindi l'ipotesi il primo caso andiamo a considerare e quando qui il valore EME è negativo allora in questo caso allora che cosa succede eh se è negativo lo posso scrivere in particolare come meno m grande con m positivo va bene allora quindi se io vado a prendere c'è almeno uno di chi alla m quindi lo posso scrivere come esce a meno di chi e esce a -1 di chi alla meno m grande e siccome c'è un meno lo posso portare a denominatore e poi qui cosa sta tutto scritto al l'avevamo scritto no che F -1 immaginiamo che abbia deficienti q uno o due eccetera eccetera mentre Este a coefficienti F uno F due quindi qui ho sostituito al posto della F suo sviluppo in serie rilevato alla m ora è chiaro che siccome vi è denominatore io ho 1 1 sviluppo in serie in cui tutti i termini hanno un chi questo ti lo posso mettere in evidenza da da ognuno dei termini sotto e quindi qui posso anche scrivere chi alla m le posso portar fuori dalla parentesi e poi dentro mi rimarrà un q uno più q due t più eccetera eccetera è arrivato alla allora quindi che cosa che cos'ho a questo punto vedete che ho uno diviso 1 1 funzione una funzione generatrice EE questa la potete vedere come l'inversa è in realtà l'inversa di una della funzione generatrice q uno più q due elevata m non mi interessa sapere che cos'è ma sicuramente esiste abbiamo detto no purché q il termine noto sia diverso da zero cose che in questo caso zero per cui qui lo scritta avrà dei coefficienti corrono quindi è esiste una inversa quindi ecco che vedete quando m è minore di zero posso scrivere e le cose in questo modo eh quindi e vedete che se ad esempio che cosa vuol dire che c'è un chi alla alla m che moltiplica beh vuol dire ad esempio che perdiamo il caso un caso facile grande uguale a due vuol dire che io ero partita da emme uguale a -2 eh vuol dire che qui avrò un qualcosa del tipo unisco zero diviso di quadro tu unisco ½ più con due più iscom tretti eccetera eccetera cioè vedete che rispetto a quello che abbiamo fatto finora mi compaiono delle potenze negative del chi va bene cosa che finora non non era venuto fuori quindi questa la prima osservazione è che quando si va a fare eh la una potenza di l'inversa composizionale beh quell'oggetto nuovo che ottengo può avere anche delle non è più una serie di quelle che abbiamo studiato finora perché appunto nel caso in cui l'esponente sia negativo io posso avere anche dei coefficienti e degli efficienti di PIL negativi allora le serie che hanno questa caratteristica ovvero in cui i compaiono anche un certo numero di di potenze del ti negative si chiamano serie formali di lorans eh quindi sono delle serie in cui praticamente ho una somma di termini del tipo.pt LI in cui no non è detto che m deve essere zero deve essere anche un valore un valore negativo per cui vi posso avere in generale anche dei termini delle delle potenze negative quindi questa è la prima osservazione quando faccio la la la potenza di una di una serie che corrisponde all'inverso composizionale questa può avere in realtà non se non è detto più che sia una serie una sanzione generatrice nel senso che abbiamo trattato sinora allora questa è la prima osservazione allora eh consideriamo a questo punto il caso è il caso n minore BM allora qui quando vado a fare questa estrazione ovviamente ON minore di MOM oppure viceversa no queste sono le due le due cose che possono verificarsi ehm allora d'altra parte eh allora quindi cosa succede se voglio estrarre adesso il coefficiente ennesimo dalla dalla da questa funzione elevata alla n eh allora ci sono due dunque spettate eh ho fammi vedere questa cosa qua Ah sì sì sì certo no ora non mi allora si io devo dimostrare questo questa uguaglianza va bene devo dimostrare questa uguaglianza e nel primo caso quello che dimostra e che sia la parte sinistra sia la parte destra sono tutte e due e zero per cui l'uguaglianza per cui l'uguaglianza è verificata quindi stiamo considerando il caso n minore di n allora se è nel minore di n mhm quando io vado a stare questo questo questo sviluppo ora qui che cosa succede e indipendentemente da quello sia che che m fosse positivo o negativo se n è più piccolo eh se n è più piccolo di Emma e il coefficiente eh nel nello sviluppo di questa funzione non non non c'è proprio zero va bene perché OO sono in questa situazione in cui il termine appunto vedete il lo sviluppo è sempre fatto e OA tutti i termini positivi nel caso in cui nel caso in cui appunto io m sia positivo ma se ne e in quel caso però se m positivo se m positivo questo ragionamento che abbiamo fatto ovviamente vale lo stesso però il di alla m sara a numeratore invece che al denominatore ritorna questo era per per evidenziare appunto la il fatto che quando faccio questa operazione ci può essere una potenza negativa però se questo e me grande fosse cioè se l'm piccolo da cui parto è positivo è chiaro che che la stessa che lo stesso ragionamento lo posso fare ci avrei tutti alla m che moltiplica quindi quando vado a estrarre ennesimo EN più piccolo non non lo trovo in questi 100 0 perché io il coefficiente più piccolo è quello che alla m ma questo vale in generale insomma anche cioè sia che m sia positivo sia che m sia negativo quindi quando vado ad estrarre il coefficiente tiene da questa espressione è n minore di MO sicuramente quel 100 e zero non c'è il coefficiente di alla m d'altra parte se invece vado a considerare la parte destra questo qui quindi questi 100 e meno m di F di p alla meno e che cosa succede e dato che NO minore BNE ovviamente è vero è anche vero che meno m minore di meno va bene perché questo che il proprietà delle disuguaglianze no per cui sono un praticamente nella stessa situazione di prima cioè vado a estrarre un coefficiente da una soluzione che va da elevare ad una potenza che è più piccola del conducente che va ad estrarre di nuovo questo coefficiente non c'è zero quindi il caso n minore di m è facile perché ho un'uguaglianza che verificata in modo banale perché ho zero sia a destra che a sinistra va bene ci siamo mentre la la la parte più più interessante è quella in cui n è maggiore o uguale di n va bene perché qui la cosa o -1 po meno banale allora intanto un'osservazione importante allora consideriamo una funzione gi t una serie di lorano cioè 111 serie che può avere anche delle potenze negative va bene quindi qui lo script nel del tipo.cn PN con n che appartiene AZ quindi possono esserci anche delle potenze negative di è un vediamo un'osservazione facciamo l'osservazione che vale in generale per qualsiasi sede cioè vado a fare vado a estrarre dato dal punto di una serie sui mari di loran potrà avere anche il termine che a -1 abbiamo detto no ecco però vado a fare questa estrazione dalla derivata della funzione eh quindi non non prendo la funzione Gil ma prendo la sua derivata ed estraggo il coefficiente qui a -1 beh la cosa la la proprietà è che questo efficiente e sempre zero cioè se io vado a fare le la derivata di una serie formale di dorante vado a estrarre il cosciente qui a -1 questo non non lo trovo mai cerchiamo di capire come mai eh cerchiamo di capire come mai vale questa caratteristica la immaginiamo facciamo un caso semplice va bene facciamo il caso in cui abbia questi due termini negativi questi due potenze negative quindi c -1 su t quadro piu.ca -1 t più c zero più c uno più eccetera eccetera vabbè e ovviamente in generale potrebbero esserci dei termini relativi diversi faccio la derivata spaccio la derivata di questa di questa funzione e cosa succede e succede che quando vado a derivare è come se avessi un t alla -2 quindi avrò un sarebbe 1-2 per c alla -2 per chi alla -3 quindi vedete vi non mi interessa tanto il valore dei coefficienti mi voglio vedere che tipo di sviluppo in serie o tengo quindi semplicemente avrò con coefficiente diverso rispetto a prima è un chi alla -3 quando derivo questo pezzettino qua quando derivo ci -1 t avrò eh il chi è la -1 mi diventa un termine chi alla -2 quando derivo zero mi sparisce quel termine poi c uno diventa c'è uno che diventa un c uno e i termini successivi abbassano di grado va bene quindi cosa vedete che quando cioè che se io parto da una serie di lurani in cui ho delle potenze negative quando la vela derivare la caratteristica che la la funzione che ottengo alla caratteristica di non avere mai il termine uno su chi perché perché se ci pensate bene per sé per avere uno su t facendo la derivata dovrei avere un logaritmo e io qui ho soltanto delle potenze del team cioè per per poter arrivare a al GT primo che contiene uno su t io dovrei averle derivato un termine che contiene un logaritmo di che cosa che che non ho quindi tutte le volte che io derivo una potenza di alla per me ottengo un'altra potenza ma sicuramente non ottengo la potenza uno si ottiene siete d'accordo questo è la caratteristica queste le serie formali di morana hanno questa caratteristica cioè se io parto da una serie che amo dei termini negativi quindi in particolare anche il termine uno su t quando poi la vado a derivare è il termine uno su te sicuramente non ci sarà più va bene quindi la derivata di questi centri a -1 della derivata prima di una serie formale di uranio uguale a zero ecco su questo concetto poi si basa la dimostrazione va bene che ora saremo un po di manipolazioni a partire dalla nostra funzione e sfrutteremo a un certo punto questa caratteristica ok allora a questo punto cosa faccio allora abbiamo detto noi ora torniamo di vista il nostro problema noi vogliamo trovare il coefficiente di FA -1 di chi ha la m ok allora benissimo ora però che cosa so so che la funzione c'è almeno uno di chi è l'inversa composizionale di F allora io cosa faccio vado a fare la composizione della mia funzione esce a -1 con F di qui va bene siccome sono una l'inversa composizionale dell'altra qui sicuramente ottengo un TLM perché quando faccio la composizione di almeno uno con per definizione questo vale p poi mi sto facendo tutto quanto è arrivato alla m quindi chi alla m uguale a questa espressione e d'altra parte e la nostra FA -1 eh ora esiste almeno uno potrei aver sbagliato ah vabbè qui vedete l'avevo chiamata vabbè qui poi vedo correggero qui esce -1 l'ho avevo invitato con QI coefficienti di FE adesso invece li ho chiamati li ho chiamati p vedete qui ho sono andata a sostituire sto sfruttando lo sviluppo in serie di almeno uno e scritto ho questa composizione sostituendo al posto di di chi F di p la funzione FI di quindi la poi nelle luci di rimetterò di coefficienti coerenti con la con la versione precedente benissimo allora quindi quando vado a fare la composizione della -1 con F no scusate no no ho detto 1 1 no no va bene perché qui sto facendo scusate non non sono coefficienti è giusto che siano diversi perché perché vedete i coefficienti q sono due efficienti dell'aversa composizionale cioè a -1 va bene io adesso sto facendo però una cosa un po diversa sto facendo SA -1 composte afferri p elevato alla m ok quindi è giusto che abbia messo le coefficienti diverse per sempre fosse uno allora avrei esattamente con con i ma siccome può essere qualsiasi valore in generale avrò 111 funzione con dei coefficienti diversi da quelli della F uno va bene ok eh come faccio a far sparire questo qui vabbè allora quindi ecco qua quindi siamo a questa relazione siamo a questa relazione cosa faccio derivò ambo i membri di quella relazione quindi derivando il chi alla m ottengo m per chi alla m -1 e facendo la derivata invece quella di questa di questa espressione dì a destra di derivo rispetto a te quindi avrò IPF di t per F primo di p ritorna parlo di rigorispetto.at avrò il l'esponente che va a moltiplicare la costante e fede di chi elevato alla -1 e poi la derivata di F di chi prendete e quello che ho scritto in questo lucido successivo e cosa faccio adesso derivò e scusate divido tutto quanto per F di t elevato alla n va bene quindi ho questa uguaglianza divido tutto quanto per FT alla n quindi qui a sinistra mi rimane EM sia alla m -1 diviso FG alla NE qui a destra vedete il dividendo per n ho semplicemente portato come c'era già un est di qui alla in -1 ho portato un meno n all'interno alle sponde dentro l'esponente della S e ok quindi e andiamo avanti adesso che cosa faccio adesso questo è il punto un punto importante io c'ho questa somma che va che va Alcuni maggiore uguale di emme benissimo cosa faccio siccome stiamo facendo l'ipotesi l'ipotesi che stiamo considerando è che n sia maggiore uguale di emme ok n maggiore uguale di m che cosa vuol di Vuol dire che questa somma c'è anche un termine n va bene perché stiamo considerando n è maggiore uguale di m quindi che cosa faccio e posso portare fuori il termine che corrisponde agli uguali a denti quindi porto fuori il termine che corrisponde a è uguale AN ed e ci corrisponde quindi ad ANPN e quando io guardo a annie una differenza in meno n se ha si annulla quindi e feriti alla -1 per f primo di chi e poi rimane la stessa somma con i diverso da n

Benissimo aver portato fuori il terminelli mi permette di vedere la la la l'espressione dentro la somma come una derivata perché vedete io posso vedere questa espressione come che cosa la derivata di F di alla i meno n moltiplicato per questo fattore di picconi diviso in meno n vedete intanto che è necessario che issia diverso da n perché possa definire questa espressione perché altrimenti farei una divisione per zero e se andiamo a dividere se scusate se andiamo a fare questa derivata quindi facciamo la riprova se faccio la derivata di essere di alla i meno n otterrò i meno n che quindi mi si semplifica con quello sotto poi F di t alla i meno n -1 e quindi ritrovo quello che avevo prima e poi dovremo moltiplicare per la derivata di Este no quindi questa è un'uguaglianza abbastanza eh semplice va bene quindi che cosa abbiamo fatto ricapitolato quindi abbiamo calcolato la ha fatto la composizione di ex a -1 con F elevato alla m abbiamo diviso per essere di più alla NE quindi siamo riusciti a ad ottenere questa uguaglianza cioè questo MT alla m -1 diviso esperiti alla n uguale a questa espressione a questo punto che cosa facciamo beh abbiamo due espressioni uguali possiamo estrarre da queste espressioni è il coefficiente che almeno uno va bene quindi ho due funzioni 2 2 serie di loran in generale perché abbiamo detto che quando si fa quando si lavora con con con inverse con posizionali si possono ottenere anche termini negativi però noi andiamo ad estrarre adesso a destra e a sinistra di questa uguaglianza e coefficiente di a -1 quindi chi è a -1 di MT alla m -1 diviso F di chi alla n sarà uguale a che cosa al TA -1 di questo pezzo quindi viene più NF di p -1 per F primo più il t -1 di quest'altro pezzo ecco che qui entra in gioco l'osservazione che abbiamo fatto un attimo fa perché qui in questa somma abbiamo che cosa abbiamo delle derivate di serie formali di doran cioè qui abbiamo una somma che coinvolge in cui ogni termine rappresenta la derivata della una serie di formale di lorant che e feriti alla in meno n in generale è una serie formale e quindi quando nel per per combinazioni particolari di questi centri quando il meno enne è positivo beh il chi ha -1 non ci sarà perché ho tutti tutti i termini positivi e sicuramente non c'è quello negativo se invece questo immenso NE negativo e quindi posso avere nelle potenze del team negativo comunque non non posso avere la potenza di -1 perché questa rappresenta la derivata di una funzione abbiamo detto che la derivata di una il coefficiente -1 della derivata di una serie di grande è sicuramente uguale a zero va bene quindi questo ci permette di buttar via tutto questo primo terzo perché vale zero quindi mi rimane soltanto K l'uguaglianza si semplifica molto quindi abbiamo abbiamo allora il coefficiente K -1 EM chi alla m -1/16 alla n uguale quindi a efficiente -1 di NPNF alla -1 per hf primo di benissimo a questo punto che cosa faccio a questo punto ho di nuovo tirato in ballo la forma lo sviluppo in serie F no avevamo detto che F la posso vedere come F uno t più F due t quadro eccetera eccetera quindi è quello che ho fatto nel passaggio successivo vedete siccome FP è a -1 denominatore ho scritto lo sviluppo in serie di ets è uno di verso due di quadri eccetera eccetera sopra siccome vi compare F primo ho fatto la derivata di questa espressione quindi F 1+2 F due t più eccetera eccetera benissimo qual è l'idea l'idea è che voglio in qualche modo evidenziare in questi ciente di chi ha -1 qua dentro in modo poi da da risolvere estrazione no e che cosa si può fare e beh quello che si può fare è in pratica mettere in evidenza sopra mette in evidenza un F uno sotto metto in evidenza un F uno per t in modo tale che complessivamente ho messo in evidenza 1 1 su t perché la F uno EF uno sopra e sotto si semplificano però poi cosa succederà sopra tutti i termini devo li devo dividere per F uno per cui io avrò 1 1 poi avrò due F due diviso S uno di eccetera eccetera e sotto tutti fermi li dovrò dividere invece per F uno t quindi avrò uno F due diviso F due qui non è un t quadro ma è un tigre errore va bene perché devo dividere devo dividere per chi quindi anche questo poi ve lo correggo e però scritte in questo modo ogni cosa osservo in questi scritti in questo modo osservo vedo subito qual è il coefficiente di di a -1 perché questa espressione questa espressione qui che vedete ehm tra questo rapporto che cos'è è il rapporto tra due serie formali di quelle che abbiamo trattato finora quindi questo rapporto è la funzione generatrice standard che ha come questi ciente uno perché il coefficiente uno si attorno il socio e quindi quando voi andate a fare poi e se ci siete andate a moltiplicare per uno su t otterrete sicuramente un coefficiente uno qua dentro in corrispondenza in corrispondenza di di uno di uno su t se volete questo si può anche per essere più convincenti possiamo anche verificare allora arriviamo in fondo e poi lo lo lo verifichiamo quindi questo coefficiente in pratica è uno e quindi alla fine mi rimane un cliente semplicemente perché questo qui è uno e quindi qui è un NPN quindi che cosa ho dimostrato ho dimostrato che ENPN eh è un si scusate ENENE quindi ho dimostrato che NPN uguale ATM uno di MT alla m -1 di aste diviso F di Allen d'altra parte che cos'è NPNPN e abbiamo detto l'avevamo introdotte i coefficienti piccone n sono II coefficienti pick n sono i coefficienti di eh IF -1 quando vado a farlo quando vado a fare l'elevamento e alla alla m per cui ehm ENPN in realta e cuffie niente di NF -1 di chi alla m per per per come l'ho introdotto e il nome che ho assegnato a questi a questi coefficienti e quindi che cosa abbiamo dimostrato già abbiamo dimostrato che NPN è uguale a questo ma d'altra parte NPN per costruzione è uguale al coefficiente ennesimo della dell'aversa composizionale elevato alla m perenne e quindi cosa posso dire posso dire che e questi espressione è uguale a questa eh quindi t -1 di MT alla m -1 diviso FP alla RN quindi attenti alla meno NE uguale ad NF -1 di t alla m va bene quindi cioè ho dimostrato che è questa espressione uguale n niente NPN uguale a questa espressione quindi questa espressione uguale a questa ok e poi l'ultimo passaggio è semplicemente un passaggio insomma abbastanza semplice perché n che vedete qui a destra è stato portato a sinistra qui ci avevo un ty alla m -1 che ho portato dentro l'operatore di quindi di sarebbe -1 cambio di segno quando poi li porto dentro la potenza quindi meno m più uno mi rimane con chi alla meno m EE qui mi rimane esattamente la stessa cosa quindi vedete ho dimostrato che il coefficiente ennesimo dell'università composizionale di F elevata alla ME m su NF 10 alla meno n il coefficiente scusate meno m di m su NF di fila meno va bene quindi la dimostrazione non è e non è complicatissima però insomma richiede un pochino di attenzione e quindi abbiamo in pratica dimostrato che vale questo risultato ehm quindi sfruttando in pratica i la la proprietà fondamentale delle serie di loran che quando le vado a derivare questo è sicuramente non hanno il termine e chi ha -1 va bene questo è è quello che ho sfruttato e poi beh ho fatto dei passaggi abbastanza dei passaggi puramente algebrica tranne forse questo passaggio che ora magari vi faccio rivedere anche con me per convincervi e quando vado a fare questo passaggio da qui a qui in effetti il coefficiente di questa funzione uno e questo non vi fosse non fosse abbastanza convincente previdenza succede il termine nostro sì perché facendo questa operazione qui ho uno su TE poi qui ho un rapporto di due serie classiche va bene in cui non ho soltanto delle potenze positive per cui questo rapporto è a sua volta una funzione generatrice 1 1 serie di quelle standard ma siccome i coefficienti si il termine noto sia sopra che sotto e uno e cioè quando io vado a valutare questa il termine noto di questa funzione qui lo tengo mettendoti uguale a zero come in tutte le serie formali no eh quindi quando sei uguale a zero qui sparisce tutto tranne che questo 1/1 che fa uno quindi il termine noto di questa funzione di questo rapporto è è uno EE quindi e quindi quando vado a fare lo sviluppo in serie eh cioè l'uno su TEE lo ce l'avrò soltanto in corrispondenza di quel termine lì perché poi si semplifica con le potenze dopo però facciamo facciamo ve lo faccio vedere così così se c'ha sì c'ha prima quindi devo fare F primo su F di più e allora prendiamo un attimo eh people così lo vediamo subito insieme allora prendiamo la sessione dell'altra volta che ancora non vi ho messo a disposizione ma aspettavo di fare magari qualche altra verifica oggi ho dovunque Si esce mai da qui da in questo caso da me poi non si riesce facciamo così tanto ce l'ho già estratto prima fare questo allora allora quindi quello che voglio fare è quindi prendiamo una generica funz F va bene: uguale e abbiamo detto eh faccio dunque prendiamo m che va in ad FK per i elevato alla cappa per cappa che va da uno a dente grande no va bene mini questa è la nostra F mi se faccio F di 10 ad esempio ottengo i primi i primi termini allora che cosa abbiamo noi noi abbiamo eh in pratica eh facciamo così ho bisogno anche di di senno non posso poi fare la la derivata allora quindi faccio abbiamo detto e la F si trova denominatore quindi faccia la la la derivata degli F ti boh mettiamo in questo mettere anche tutti e 10 ma insomma non non cambia perché tanto il problema lo lo vedo subito diviso S di 10 quindi faccio lo sviluppo in serie eh della nostra F denominatore sopra faccio la derivata quindi per quello disse sfidarci manca la variabile quindi è quello ora qui me la fa vedere nell'ordine inverso noi l'abbiamo scritta in modo diverso no quindi quando io ho fatto questa operazione a un certo punto mi sono ritrovata ad avere questo rapporto vedete sotto ho la FE sopra ho la derivata va bene e con F uno che sicuramente diverso da zero ora quando io vado a fare lo sviluppo in serie di questa funzione in Series del precedenterispetto.at e questo vedete che ora indipendentemente ma up implicitly indipendentemente poi vedete in questi 100 ovviamente sono complicati via via però vedete che compare il termine chi ha -1 perché compare questo termine perché c'ho un F uno sopra è un F uno t sotto per cui quando io appunto è esattamente quello che ho fatto nel lucido no cosa ho fatto ho evidenziato messo in evidenza un F uno sopra ho messo in evidenza un F uno t sotto per cui poi qui ho messo in evidenza il termine uno su TE poi quello che mi rimane è lo sviluppo e il rapporto di 2 6 di due funzioni di due serie che hanno tutti e due coefficienti eh termine note uguale a uno EE quello e quello mi viene sempre EE un coefficiente sempre uno no quindi se voi fate e che ne so ad a di carta per chi elevare la cappa eh facciamo con cappa che va da due fino a 10 la poi se no ci metto 1 no qui ci possono partire da da con il termine ho ho messo in evidenza il termine noto di questa espressione è uno ok e poi c'ho messo due coefficienti generici e ora faccio la stessa cosa con un'altra funzione generica eh facciamo io amo di B eh quindi sto facendo il rapporto tra due serie che hanno tutti e due il termine il termine noto uguale a uno no quando io vado a fare lo sviluppo in serie di quest'espressionerispetto.at oppure anche qui questi centri saranno ovviamente eh probabilmente mi mi viene fare un Mac simplify e però vedete che è il coefficiente noto il termine noto vale uno ma è lo vedo facilmente perché appunto il termine noto di una serie con potenze positive del TE lo ottengo andando a sostituire al posto di t zero quello che abbiamo sempre detto no F zero delle nostre sequenze corrisponde a calcolare la funzione generatrice inti uguale a zero va bene quindi eh questa era giusto per per insomma se se se se questo passaggio di di lasciava un attimino perplessi questo è la la la verifica l'altra l'altra cosa da da l'altro. da da capire questo ma anche questo insomma cioè se voi fate la il il coefficiente della derivata prima di una di una serie formale è sempre zero perché quello il termine uno su t il il termine uno su t non non lo troverete mai facendo la derivata di una serie che ha delle potenze eventualmente anche negative va bene quindi e quindi vabbè insomma la il i passaggi in realtà vedete non è che abbiamo utilizzato concetti complicati l'unica cosa nuova è la presenza di queste serie formali cioè delle serie che hanno anche delle potenze negative perché quando appunto si va a fare una ehm una eh se si ha appunto una funzione generatrice che senza termine noto quindi andiamo facciamo un esempio no se io prendo eh F prendiamo sempre fibonacci tanto per fissare idee però prendo fibonacci si vabbè fibonacci Wonder benissimo fibonacci mi va bene perché perché perché se io vado a fare lo sviluppo in serie di F è questa qui è appunto non ha sono delle ipotesi cioè posso calcolare inversa con posizionali di questa funzione perché il termine noto è zero e la derivata prima e uno quindi il termine viti EE uno ora se andiamo a fare se prendiamo F se vai a fare lo sviluppo in serie di F elevato dalla terza ad esempio eh beh in questo caso ovviamente se faccio l'elevamento di F alla terza ottengo ovviamente potenze positive va bene su quello non ci sono dubbi no perché potenze positive non solo quella maggiore è quella è quella tre Se però invece di fare una potenza positiva io faccio una potenza negativa prendiamo due come nell'esempio che vi ho riportato nel lucido eh quando io vado a fare questa potenza negativa vedete che che ottengo possono venire fuori delle delle delle delle delle potenze e delle delle dei termini in chi alla meno n perché perché son partita da una funzione che non ha il termine noto va bene EE quando io vado a fare la derivata di questa espressione eh sicuramente vedi che non non otterrò mai il termine di a -1 questi sono i concetti che poi sono stati utilizzati per la dimostrazione no quindi eh questi sono sono i concetti e il teorema di inversione di lagrange ci permette in pratica di eh in realtà la la formulazione quella quella classica ci dice che relazione esiste in pratica tra il coefficiente dell'aversa composizionale e quello della della della della funzione di partenza ok allora dimostrato questo teorema allora che cosa intanto non abbiamo ancora non abbiamo ancora finito perché questo dimostra il con questa dimostrazione abbiamo visto il punto due del teorema della nella formulazione quella che vi avevo presentato il punto uno se avevo detto è banale perché basta mettere m uguale a uno rimane da vedere il punto tre il punto tre quello che ci dice punto che se io vado a fare l'estrazione del coefficiente di una terza funzione si composta un radio t ottengo questa relazione quindi quello che adesso andiamo a fare e vedere come questo secondo questo terzo risultato può essere dimostrato a partire dal secondo allora come si fa a dimostrare quindi il terzo risultato a partire dal secondo allora intanto che cos'è che significato e che cosa vuol dire fare in strade in questi 100 ennesimo di sì di arditi allora sedia di sì e la composizione di una funzione un sì che avrà certi coefficienti che con cappa con additivi e quindi posso scriverla come una serie come una somma shippati alla cap e poi vedete al posto di chi ho messo a di chi perché sto facendo una composizione e poi per la linearità dell'operatore di n questo l'operatore l'ho portato dentro la somma quindi estrarre le coefficiente da questa composizione vuol dire fare questa somma in cui io vado ad estrarre il coefficiente di abiti alla cappa vedete che in pratica cioè mi sono già ricondotta al caso precedente no perché beh qui si vede chiaramente che per trovare questo coefficiente io devo fare e devo estrarre tanti coefficienti del tipo che sono individuati dal dalla formulazione due del teorema no perché qui vado a estrarre questi 100 ennesimo di di di alla cappa cioè una potenza di addii Guidi a questo termine TNA di chi alla K io posso applicare il teorema di lagrange nella formulazione che abbiamo appena visto quindi tiene di abiti alla cappa come lo posso scrivere beh K su ENTN meno K per finiti alla n cioè esattamente la nella formulazione che abbiamo visto invece che con m ci ho messo K ma poi non cambia il risultato quindi a questo punto eh a questo punto che cosa facciamo e allora in in pratica eh questo questo coefficiente eh siccome la somma e su cap però qui c'ho 1 1 coefficiente che dipende anche da n questa volta porto fuori è un qualcosa dice porto fuori una potenza del team in particolare scrivo t alla n meno K come TN -1 più K -1 in modo tale che il TN -1 non non difendendo più da capo lo posso più di nuovo portare fuori dalla somma e il K meno uno che invece è rimasto dentro però è rimasto dentro come come una potenza del normale e poi ho portato fuori anche l'hennè quindi in pratica sono riuscita a scrivere questa espressione scrivendo quindi n meno K come n -1 più K -1 in modo tale da portar fuori l'operatore rispetto alla parte che non dipende da da Kappa e poi qui mi rimane un cap si K sì alla K -1 perfidia lei ovviamente questo fidi di Alain non dipende non dipende da Camp quindi eh non è coinvolto nella somma e qui vedete che dentro questa somma che cos'ho e non ho non ho altro che la derivata prima di Psi di chi no perché quando Psi di eh se si vi appunto la scrivo come somme si cap via la cappa la derivata è proprio K sedi capper sia alla K -1 quindi vedete che in realtà la formulazione tre del teorema e banale perché si tratta di applicare la versione due ai singoli ai singoli termini della eh del della somma va bene quindi la dimostrazione quindi e a questo punto completa ehm quindi poi ovviamente la parte che a noi interessa di più e applicare il teorema no quindi a noi poi nella pratica ci interessa poter applicare il teorema però insomma mi sembrava importante anche capire come mai farvi capire come mai vale questo teorema insomma non è così scontato allora vediamo qualche qualche applicazione allora come come prima applicazione consideriamo eh additiuguale.at per e alla di chi eh quindi vedete una un'equazione molto particolare no quindi ho una funzione generatrice che è uguale.at per la funzione esponenziale ed è calcolata in ambiti quindi è chiaro che questa funzione si riesce insomma non è un'equazione che si riesce a risolvere facilmente no è però ecco che siamo siamo in questo caso siamo esattamente nelle condizioni di un teorema di inversione dila garage con fill di chi uguale alla te perché siamo abbiamo 111 funzione a che è data da t per feed quando vado a prendere il nome fi e alla quindi io questa equazione non la so risolvere ma posso estrarre il coefficiente di additivi usando il teorema di inversione di lagrange no allora vediamo come intanto vi ricordo che la funzione esponenziale e una funzione di quelle che noi abbiamo visto inizialmente uno dei primi esempi che abbiamo fatto ed è la funzione generatrice di uno su n fattoriale no quindi la la funzione esponenziale anche qui scusate qui non c'è un n eh ovviamente questo va fino a infinito poi dopo mi metto il i lucidi correnti quindi questa somma ovviamente va a fino infinito e qui c'ho quindi una somma infinita di uno su K fattoriale che alla cappa benissimo allora applicando il teorema di lagrange cosa posso dire che il coefficiente ennesimo di additivi e uno su n qui siamo nella versione uno quindi ben con m qui è 1 1 su NTN -1 di che cosa sarebbe diffidi t alla n ma fidi TE alla p quindi devo estrarre questi centri di entity alla n quindi vedete che mi sono ricondotta a un problema molto più semplice rispetto a quello di prima ma d'altra parte è di chi ha la n che cos'è è di chi ha la n non è altro che è diffi composto TN vado a sostituire al posto di t nello sviluppo in serie qui di nuovo c'è l'errore che viene portato dietro quindi questa non è un ente ma la somma qui ovviamente fino a infinito e quindi uno su K fattoriale chi ha la n alla K e qui è stato spezzato in due termini quindi un n alla K per un t alla K sul K fattoriale e in questo modo adesso siccome io voglio estrarre in questi centri voglio estrarre questi Centre RN -1 da questa espressione avendola scritta come una serie infinita questo coefficiente lo riesco estrarre bene perché cosa devo fare devo devo andare a prendere il coefficiente in questa somma insufficiente che corrisponde AK uguale AN -1 perché voglio cosciente n -1 di queste funzione no quindi avrò uno su NE poi vedete che quello che qui ho scritto è coefficiente di questa espressione quando K è uguale AN -1 perché voglio il coefficiente del termine fiala n -1 quindi avrò n alla n -1 su n -1 fattoriale va bene quindi attenzione che appunto qui scusate ma questi questi n il la somma ovviamente è una somma infinita va bene una serie e lo sviluppo in serie della della funzione però vedete quello che vi dicevo prima no è una funzione un po particolare perché Al variare di n vedete che la funzione cambia no perché è non è alla tim ma e alla TN quindi ecco che abbiamo trovato che i coefficienti della funzione.at EN per n -1 diviso n fattoria va bene quindi questa è una è una nuova applicazione del teorema di di inversione di lagrange Un altro un altro esempio che possiamo vedere è sempre con la stessa funzione la stessa funzione definita da additiuguale.at per e alla a di chi però questa volta voglio trovare il coefficiente di 1/1 meno abiti va bene con add che è definita da quell'equazione ecco che siamo anche qui nell'ipotesi del teorema di lagrange ma questa volta siamo nella terza formulazione perché ho da estrarre in questi centri ETN da che cosa beh posso prendere come si additi 1/1 meno TE questa è sto sto ho un posto applicare appunto la terza formulazione prendendo come 1/1 meno va bene qui ho proprio 1/1-1 di PE la composizione di sì con Andy t e quindi che cosa mi dice il teorema il teorema mi dice che per estrarre questo coefficiente io devo fare uno su n il coefficiente n -1 di che cosa della derivata prima gip c map sia 1/9 1 si e poi fidi di chi alla n ah facciamo questi conti allora quando vado a fare questi conti cosa succede la derivata di 1/1-10 è semplice e quindi è è appunto la derivata al denominatore quindi 1-6^2 poi avrò il numeratore e la lottery Ivo de ottenendo 1 0 poi devo sottrarre la derivata del denominatore quindi ottengo 1/1-3^2 come derivata per eviti alla n e quindi facciamo qualche altro qualche altro passaggio e beh qui che cosa che cosa è stato fatto qui l'idea è eh beh qui vedete è stato moltiplicato e diviso per chi perché qui si vuole utilizzare e la proprietà di convoluzione in pratica vabbè però per per applicarla ci si può riportare al caso in cui l'esponente il coefficiente da estrarre un TN invece che un t alla n -1 per cui vedete il t ha denominatore lo porto su diventa un t -1 e quindi mi cancella il -1 e il t invece che che rimane sopra rimane il da nella nella nel come argomento della funzione di cui voglio fare estrazione quindi in pratico uno su RNTNE poi devo fare l'estrazione dal prodotto di due funzioni eh chi diviso non meno di al quadrato e poi e elevato alla n che la prima la camomilla e la seconda l'abbiamo quindi ehm e questo coefficiente ovviamente corrisponde ormai lo conosciamo bene eh corrisponde alla convoluzione delle due sequenze B ed app quindi se io so quali sono le due sequenze be da ho trovato un'espressione per il mio coefficiente allora eh quindi che cosa posso cosa posso scrivere editi alla n l'abbiamo visto prima no che cos'è editi alla n è una funzione generatrice dei coefficienti n alla K su K fattoriale eh e questo ha con cappa e quello che ho chiamato a con cappa a di tia come questi centri quindi è nella cappa sul K fattoriale quest'altra funzione chi diviso 1-6^2 se vi ricordate è la funzione generatrice dei degli interi perché infatti viene fuori dalla dalla derivata di 1/1 meno si quando la derivo la funzione uno diviso meno si ottengo proprio la funzione la sequenza degli interi no e quindi siccome qui sto facendo la convoluzione devo prendere il termine BN meno K cioè n meno K a questo punto cosa posso fare a questo punto posso spezzare questa somma eh in due e quindi avrò da una parte la somma dunque lenne i l' che dovrei moltiplicare lo semplifico con l'henné fuori quindi mi rimane semplicemente la somma del Grappa che va da zero AN viene dalla cappa su K fattoriale meno e poi vi ho la somma per cappa che va da zero a De n di quando vado a moltiplicare per K il K fattoriale a denominatore si semplifica per cui mi rimane un K -1 fattoriale e l'hennè alla cappa sopra si semplifica di nuovo con n mi rimane quindi un enne alla Kappa meno loro va bene quindi ho semplicemente fatto il prodotto spezzando la somma in due benissimo a questo punto che cosa serve osservo che in pratica ho due somme uguali ehm vedete che nel primo la prima eh la in in questa in questa seconda sommatoria ehm e siccome c'ho un K -1 invece di un K questo è equivalente a far partire a fare arrivare la somma di n -1 perché qui quando campo qual è n ottengo una n -1 e quando cappe zero quando campo e zero ottengo un valore che in realtà neanche avrei dovuto considerare quell'espressione va bene perché perché ho 1 0 e quindi quando vado a fare questa differenza quando vado a fare questa differenza mi rimane soltanto che cosa è il termine di grado di di di indice maggiore nella prima somma e rimane EN alla n diviso n fattoriale va bene quindi vedi che con un po di manipolazioni si riesce anche in questo caso a trovare un'espressione anche piuttosto semplice di del del coefficienti di una funzione insomma non non banale no perché abbiamo 1 1 funzione 1/1 di t dove a di chi addirittura è definita dall'equazione funzionale io so comunque devono mhm ho questa no le forme che posso applicare sono le cose sono queste tre se io conosco un'equazione funzionale per additivi ok eh il il caso più semplice che io voglia estrarre il coefficiente di additivi oppure addetti alla emo oppure il caso più generale ho la composizione di una di una terza funzione con antichi ovviamente cioè il teorema vale se sono in questi posti poi bisogna vedere se sono in grado di estrarlo questo questi chantè va bene perché non è detto che sia sempre possibile mi ricordo che qui ti conduco da un problema di un altro era questo che voleva sapere non ho no no se no mi rifaccio la domanda forse non ho capito io allora anche da magari ho visto prima scendono alla fine sì abbiamo utilizzato la prima forma e abbiamo utilizzato la prima forma esatto poi abbiamo ti serve mhm di 1/1 meno additivo però io questo lo posso fare solo se conosco acquisire il libro posso fare una seduta no in in nessuno delle case a di chi la conosco di adi ti conosco cioè l'ipotesi è sempre che che additi soddisfi l'equazione funziona equazione funzionale cioè non la non la conosco esplicitamente oppure la posso anche conoscere ma preferisco lavorare direttamente con l'equazione anche nel secondo caso additivi ovviamente soddisfa la stessa adi è sempre la stessa funzione a di chi è uguale.at per e eh alla di tutti e due gli esempi che abbiamo visto nel primo caso ho ho cercato di trovare quanto vale il coefficiente di Harry nel secondo caso ho cercato di trovare quanto vale il coefficiente di una nuova funzione che è 1/1-20 t va bene quindi è chiaro che qui la la funzione a cui U della quale vado a fare l'estrazione cambia va bene però in tutti i casi l'ipotesi è che additi soddisfi questa equazione va bene se sono in queste ipotesi e io posso applicare il teorema e se sono abbastanza fortunata la funzione fi è semplice perché è chiaro che bisogna che quella sia semplice e nell'ultimo caso la il prodotto di il primo per fini di Alain è trattabile e io ce la faccio in particolare l'ultimo l'ultimo esempio siccome c'è c'è di mezzo un prodotto un prodotto di funzione chiaro che come nell'esempio che abbiamo appena visto l'abbiamo risolta facendo una convoluzione no quindi se io conosco sia se riesco a riconoscere sia la funzione ene che la funzione si almeno il coefficiente espresso e siccome una somma come una convoluzione io riesco a determinarlo no mentre magari in quest'altra formulazione originale io questo lo riuscivo AAA vederla questa caratteristica va bene e ovviamente come al solito ricordatevi che tutte le volte che ci sono uguaglianze uguaglianza vale da sinistra a destra ma vale anche da destra verso sinistra per cui se io mi ritrovo ad avere tre nessuno si devo estrarre il coefficiente di un film di chi alla n bene EEEE comunque conosco un'equazione funzionale di questo tipo beh allora invece di estrarre coefficiente di fidia ne posso fare l'estrazione di di additivi no cioè la differenza di questo fattore n ma insomma quella che è facile da da gestire va bene quindi il teorema è molto potente riesce insomma si riesce AA si riescono ad estrarre tanti deficiente in tante funzioni e insomma è la l'applicazione è un pochino delicata e a volte richiede un pochino di di di qualche qualche passaggio e in più eh come nel caso appunto degli alberi risari ora io avevo aggiunto eh che vi avevo aggiunto anche un'altro esempio però questa mattina eh sì si è una serie lì c'è proprio un errore proprio un errore qui è la funzione generatrice della sequenza quindi questa è 1 1 infinita no qui allora ora la la ci sono somme che hanno significati diversi era qui è una somma che corrisponde alla funzione generatrice di una sequenza quindi quando faccio una somma la funzione generatrice è una somma infinita perché vado a considerare tutte le potenze qui c'è proprio qui è stato fatto un copia incolla sbagliato quindi sia questo è un infinito questo è un infinito e questo è un infinito poi però quando vado a fare quando qui vado estrarre il coefficiente ennesimo da questo prodotto quella è una convoluzione li applico la proprietà di convoluzione quindi qui è giusto che ci sia l'hennè perché sto applicando la proprietà di convoluzione della dell'operatore di estrazione o dell'operatore funzione generatrice di altre sono simmetrici cioè il coefficiente ennesimo del prodotto di due funzioni generatrici vi ricordo è una delle prime proprietà dell'operatore che abbiamo visto è dato dalla somma che cap che va da zero AN di AK viene meno capo cioè si va a fare proprio la convoluzione delle due sequenze va bene ok allora e fatemi vedere se nel frattempo vi siete aggiornati ho fatto una modifica al ai lucidi proprio oh proprio oggi stamattina e per quale motivo non me lo fai vedere non mi ha aggiornato proviamo a stare dunque qui segna coefficiente non me lo fa vedere un scusate facciamo una prova una non ha non ha sincronizzato il file però io non vado a prendere allora andiamo a prenderlo unicamente da drive ci dovrebbe essere il file aggiornato eccolo qua dovrebbe essere visto infatti ok scarico no ok Miriam lo stesso fai ti appoggio li rimettero aggiornato e però c'è un esempio in più che in quei lucidi che avevo non avevo eccolo qua è un esempio che appunto o volevo most anni che riguarda sempre gli alberi e sani dunque intanto scusate ora io una cosa che avevo ehm avevate visto odio avevo segnato due ore di lezione cioè due alle dalle 10:20 a 12:20 per non non mi ero però dimenticato di di di dirvi insomma se chiedervi se andava bene quindi se siete d'accordo o vi farei vedere anche questo esempio e l'altra domanda scusi scusa prima di andare avanti volevo chiederti domani cosa volete fare siccome domattina abbiamo la prova intermedia e si fa delle lezioni regolarmente nel pomeriggio va bene no no no me lo gusto il problema è insomma magari fosse stanchi no insomma ora non come fa tanto stare stanchi sempre anche la mattina alle 09:30 va bene allora vabbè ok allora va bene no no come non detto ehm allora quindi l'altro l'ultimo esempio quindi domani lezione regolare va bene quindi oggi facciamo un pochino in più perché vi volevo fare anche questo questo esempio allora eh quindi riprendiamo l'esempio da cui siamo partiti no l'esempio sugli alberi e sari e l'esempio che ci ha permesso di introdurre l'inversione villagrande perché qui che il primo ostacolo che si trova no allora però questa volta voglio introdurre una difficoltà in più perché insomma il caso le numerazioni dei nodi rispetto ai nodi interni l'abbiamo già fatta questa volta qui introduco 111 ostacolo in più e tanto insomma un po di funzioni generatrici a più variabili insomma ne parleremo presto quindi quello che voglio andare a fare adesso andare a studiare gli alberi sia rispetto al numero dei nodi interni ma anche rispetto al numero dei nodi esterni va bene quindi l'equazione simbolica che definisce le strutture ovviamente è sempre la stessa quindi un albero è un nodo esterno oppure un nodo interno connessoad.se alberi introduco quindi questa volta una funzione che dipende da due variabili da TE da V doppio t è la variabile che mi tiene conto dei nodi interni come si è fatto finora e vudoppio è invece la variabile che tiene conto dei nodi esterni quindi come traduco la la relazione simbolica in questo utilizzando quei queste due questi tenendo conto di questi due parametri ma la BTV doppio è uguale a che cosa allora il nodo il nodo esterno mi conta con il nodo esterno quindi lo lo peso con vudoppio con la variabile V doppio ci sarà e come se fosse un perti alla zero poi c'ho il nodo interno che invece peso con t e poi c'ho la funzione B di V doppio alla S quindi è è la stessa equazione che avevamo trovato prima in cui al posto di V c'era 1 1 in pratica va bene allora quindi riapriamo il teorema di inversione di lagrange però questa volta utilizzando la funzione eh Appunto due variabili quindi il trucchetto è sempre lo stesso no perché per potere applicare la funzione è la formula di inversione miraggio e quello che conviene fare è chiamare porre asi doppio uguale AB di vudoppio -9 meno non -1 scusate qui c'è un meno V doppio va bene questo è un meno V doppio quindi pratica porto questo W doppio a sinistra in modo tale che poi io possa scrivere possa scrivere add it doppio uguale a checosa.at TE poi al posto di B di tv doppio scriverò a di TV doppio V doppio quindi vedete ho trasformato praticamente questa equazione in a di TV doppio uguale.at per abiti W alla S perché ho fatto qui c'è un errore questo è un doppio ok è lo stesso passaggio che avevo fatto nel caso uno invariato se adit doppio uguale AB di tv doppio meno V doppio questo W lo porto di là ddg se questo leggetelo W se uguale AB di vudoppio -1 che ossia aditivo doppio più W questo video porto di la e qui vedete e per per passare da questa equazione a queste che cosa ho fatto questo punto io l'ho portata a sinistra per cui ho adi doppio B di vudoppio diventato a di TV doppia più doppio quindi esattamente lo stesso passaggio che abbiamo fatto nel caso in italiano e con la con la differenza però che questa volta c'ho due variabili c'ho la variability e c'ho la variabile doppio benissimo allora io continuo però a voler estrarre questi centesimo da questa funzione ovviamente questa volta la la funzione feed U che cos'è la mia U più W alla SW vedetelo per il momento come fosse un parametro no 1 1 siccome la composizione io la faccio rispetto alla variabile U no quindi se io vado a fare a ste prendo U uguale ad occhio W alla.se al posto di ci metto ad it doppio tengo proprio la la la la l'espressione che ho appena trovato quindi in pratica devo trovare devo estrarre il coefficiente di uno su n di oh n -1 di V doppia SN ho chiamato il parametro eh non cambia niente se d'accordo tanto avrei potuto chiamarlo ti ma va bene anche lo chiami ogni tanto è 1 1 qui sto semplicemente dicendo ne voglio più efficiente NN -1 da questa da questa funzione benissimo uno su n rimane così com'è ecco qui cosa faccio adesso metto in evidenza un WW da questo binomio quindi se metto in evidenza un doppio posso portare fuori il doppio alla SN e poi qui mi rimarrà uno più su doppio se se se qui dentro mette in evidenza V doppio che è questo diventa 1 1 questo mi diventa uno su doppio e poi il doppio siccome tutto quanto elevato alla n l'ho portato fuori con sua potenza di V doppio alla SN che moltiplica uno più su vudoppio alla SN perché ho fatto questa operazione perché adesso questo vudoppio la SN lo posso portare fuori perché non dipende più da e mi sono praticamente ricondotta e mi sono ricondotta alla regola di Newton va bene perché c'ho l'estrazione più efficiente n -1 e qui c'ho un binomio e benissimo la variabile U questo V doppio come al solito lo continua a vedere come parametro non non mi preoccupo del fatto che sia la seconda variabile quindi applico la regola di Newton e quindi avrò SN su n -1 poi devo prendere questi Centre di U che e uno su V doppio alla n -1 questo mi dice la regola di Newton no devo prendere coefficiente il coefficiente binomiale SN quindi da quello che corrisponde all'esponente del binomio diviso il grado l'indice del consulente che voglio andare a trovare e poi devo moltiplicare per il coefficiente della variabile in questo caso è appunto uno q 2 1 su doppio e ne vado alla n -1 a questo punto faccio qualche altro passaggio in particolare questo doppio eleva uno su vudoppio elevato alla n -1 lo metto insieme a quest'altro vudoppio alla SN quindi avrò un vudoppio SN qui avevo un a denominatore quindi mi diventerà un meno n più uno e questo coefficiente binomiale SN su n -1 poi ho fatto la solita trasformazione che avevamo fatto anche l'altra volta no quindi se se si scrive SN su n -1 fattoriale su EN -1 come rapporto di fattoriali e cosa si può fare questo n con n -1 si porta dentro al n -1 fattoriale e in pratica si porta fuori invece è un altro termine no sono gli stessi passaggi avevamo fatto l'altra volta se volete si si rivedono vediamo già riportati nel lucido precedente quindi non vi ho non ve li ho riportati adesso sono esattamente i passaggi avevamo fatto quando abbiamo applicato la prima volta il teorema no uno su NN su n -1 qui scrivo il questi centri binomiale come un rapporto di e fattoriali e Lynn fa l'hennè l'ho portato dentro la n -1 fattoriale che quindi è diventato un n fattoriale e poi invece da questo secondo fattoriale ho portato fuori il termine più grande e mi rimane quindi un SN meno n per cui descrivere questo coefficiente binomiale come uno diviso S -1 perenne più uno per SN su n l'abbiamo scritto così perché così è più evidente che si tratta di una generalizzazione dei numeri di cacata quando S è uguale a 2 1 tempo esattamente i numeri integrata che contano gli alberi minari ora però a parte questo questo passaggio è sempre lo stesso la cosa che a me interessa lasciamo quindi la differenza rispetto all'esempio abbiamo fatto l'altra volta è la presenza di questo dubbio va e avete fate attenzione perché il passaggio più delicato di tutta la faccenda più delicata e semplice beh a volte non si fa fatica a capirlo quindi cosa abbiamo trovato noi abbiamo provato che quando si va a estrarre il coefficiente ennesimo da questa funzione add tv compio viene fuori questo oggetto qui in cui compare avuto un doppio quindi però vedete che compare V doppio in modo in modo particolare cioè mi mi mi compare un doppio elevato alla S -1 per n più 1*1 certa costante dipende appunto da da enne e beh questo che cosa vuol dire questo vuol dire cioè adesso per sapere qual è il coefficiente della funzione add it doppio io cosa dovrei fare da da questi espressione dovrei poi andare a estrarre questi 100 WK cioè devo fare un’altra estrazione va bene perché questa volta eh ora funzione generatrice di variata quindi devo fare È una funzione generatrice in cui quando vada che vada quando vado a svilupparla ho dei termini in cui non parlo io contemporaneamente sia potenze utili che di vudoppio quindi fatta l’estrazione per n io devo fare un’estrazione anche rispetto AW però pensateci bene se io da questa espressione vado a fare l’estrazione rispetto AWORK dice quindi beh questa estrazione è particolarmente semplice se ci pensate bene perché vedete che ho un monomio in pratica o un monomio cioè ho una funzione generatrice che che che è corrisponde praticamente a una potenza di vudoppio a un termine W doppio elevato a questa espressione per una costante quindi è una serie se volete una funzione generatrice in cui ho tutti i coefficienti sono zero tranne che quando K uguale AS -1 per n più uno questa è cosa vuol dire questo vuol dire siccome vudoppio conta eh i nodi esterni degli alberi che cosa vuol dire vuol dire che se i nodi interni sono ente perché sto II nodi esterni possono sono sempre e soli e se -1 perenne più uno non ci sono altre possibilità se ci pensate il caso il caso fa il caso il caso è uguale a due facile no quando S due se vi ricordate bene gli alberi se prendete gli alberi binari con nodi interni i nodi esterni sono sempre n più uno Ebbene qui e qui abbiamo dimostrato con il teorema di inversione di lagrange le funzioni generatrici invariate che quando e si tratta invece di alberi e sari se questi hanno n nodi interni nodi esterni sono S -1 per n più uno perché questo è l’unico coefficiente della funzione che esiste cioè se fosse stata una funzione con con in cui il vudoppio compare più di una volta J avrebbe voluto dire che alcuni alberi hanno cioè un certo numero di nodi esterni altri alberi ne hanno altri il fatto che invece che compaia soltanto una potenza del vudoppio vuol dire che la struttura che che la struttura è simile in tutti i casi cioè che tutti questi alberi se hanno NI nodi interni hanno esattamente lo stesso numero di 9 esterni va bene quindi questa è un’applicazione bellina perché appunto mette un'applicazione appunto che riguarda gli alberi che coinvolge l'inversione di lagrande le funzioni generatrici viviate fa vedere appunto come facendo tutti questi queste tutte queste trasformazioni si riescono a trovare proprio risultati relativi a all'operazione alla struttura mi permette di capire come sono fatti davvero queste strutture che poi magari si usano così non so che capita spesso di di utilizzare va bene quindi ehm questo è una prima e anche un primo esempio di utilizzo appunto di funzioni generatrici in più variabili no quindi il metodo simbolico continua ovviamente a valere e EE quando si va a fare l'estrazione ovviamente si deve estrarre rispetto a più a più variabili non soltanto la non non abbiamo cioè se si o se ha una funzione che ha che che è che dipende da due variabili e quando vado a fare l’estrazione poi dovrò tenere conto di tutte e due le variabili così come se avesse una funzione che ha tre variabili dovrei tener conto di tutti e tre e così via va bene ehm vabbè questo era l’esempio e volevo che ci tenevo a raccontarvi EE poi vabbè quindi niente quindi chiuderei qui con il teorema di lagrange poi magari mi può dartene ci capiterà di di riapplicarlo in qualche altro in qualche altro esempio è va bene ci sono domande

Si è dunque oggi continuiamo a parlare ovviamente di funzioni generatrici fatemi condividere lo schermo no eh ho in particolare oggi parliamo di funzioni generatrici bivariata in realtà ne abbiamo già parlato perché abbiamo già fatto qualche esempio in cui questo concetto è venuto fuori però lo vediamo adesso in maniera un pochino più rigorosa e formale eh allora quindi quindi la maggior parte degli esempi che abbiamo visto finora non hanno riguardato sequenze che di candon da un indice quindi abbiamo visto sequenze infinite di tanti tipi però poi sporadicamente abbiamo visto anche qualche esempio invece di sequenze che dipendono da due indici ovviamente il numero di indici da cui può riprendere una sequenza ovviamente potrebbe essere anche maggiore di due però insomma ora limitiamoci intanto a questa situazione quindi avviamo una sequenza ANK in cui è NK appunto variano tre numeri naturali quindi praticamente ANK definisce una matrice invece che una sequenza no quindi 111 matrice infinita in generale una matrice infinita delle due direzioni sia del numero delle righe che nel numero dei documenti EE possiamo indicare quindi con adi tv doppio la funzione generatrice bivariata definita come la somma variare sia di n che di K di che cosa dia NKNWK quindi in questo caso abbiamo bisogno di due variabili di due indeterminate una t che tiene conto il parametro n è uno che qui ho chiamato doppio che tiene conto invece del parametro K qui vedete in questa definizione ho scritto un’unica somma facendo indica variare NK si sia il capo ovviamente posso scrivere questa espressione anche con una doppia sommatoria in cui faccio prima variare NE poi capo oppure viceversa ovviamente queste due sommatorie sono ovviamente interscambiare che dal punto di vista dell’estrazione del coefficiente ovviamente vedete che il termine generico della sequenza è il coefficiente questa volta di un di un monomio in cui compare sia una potenza del ticchio una potenza di vudoppio quindi l'operatore che abbiamo utilizzato fino adesso lo possiamo ehm usare in modo divaricato EE quindi possiamo indicare il coefficiente a Nick della funzione anche con con questo simbolo no quindi tra parentesi quadre noi abbiamo fatto finora e andiamo a estrarre il coefficiente tiene WK prova ad intendere quello di posizione NKE nella pratica poi per fare questa estrazione che cosa conviene fare quello che conviene fare è estrarre il coefficiente prima rispetto ad una variabile e poi rispetto all'altra no quindi estrarre il coefficiente TNWK equivale parte estrarre il voodoo il coefficiente cartesio rispetto AW di aditi W poi estrarre quello rispetto ATN oppure viceversa va bene quindi non c'è un ordine nell'applicare questi questi questo operatore ovviamente poi insomma a seconda della dell'estrazione che che si deve fare può convenire fare prima l'estrazione rispetto ad una variabile piuttosto che l'altra se poi questo questo può semplificare le cose no quindi insomma vedremo insomma a seconda della della funzione doppio che si vuole andare a studiare appunto può essere conveniente fare prima un'estrazione con un'altra e allora la cosa interessante delle funzioni generatrici di variate e che permettono di ottenere delle un delle caratteristiche della sequenza se volete in esame quindi della matrice in esame facendo delle trasformazioni particolari della funzione generatrice e ora immaginiamo appunto NK in generale appunto che cosa può rappresentare ora può rappresentare tante cose però in generale immaginiamoci che che ANK rappresenti ad esempio una qualche quantità che dipende n potrebbe essere una la dimensione del nostro problema potrebbe essere la dimensione di un vettore ad esempio se stiamo studiando è un problema un metodo un algoritmo su che che che che si applica a dei lettori oppure potrebbe essere la la dimensione di una struttura dati K invece immaginiamoci come una un'altra caratteristica quindi una caratteristica del del vettore oppure nella struttura dati quindi un altro parametro che che vogliamo andare a studiare quindi in generale quello che possiamo immaginare e che n rappresenta la dimensione del problema e cappa una caratteristico il costo che corrisponde a quel problema in corrispondenza della diminuzione e allora eh avendo conoscendo la la sequenza ANK è possibile andare a determinare ad esempio il costo il il costo medio in che modo il costo medio lo possiamo definire come questo rapporto fra queste due somme allora nell'età numeratore ho una somma al variare di cappa di cappa ANK cioè ho fissato in pratica è come se avessi fissato la dimensione del problema eh e faccio variare cap in tutti i modi possibili quindi dato che poi moltiplico ANK per K che cosa faccio vado a vedere quanto costa ogni ogni oggetto ogni ogni ogni ogni oggetto che sto esaminando e di quella di una certa dimensione al variare del costo corrispondente no quindi sopra facendo questa somma io EE scusate qui ovviamente ho invertito ho invertito queste due diciture quindi il costo totale di tutte le configurazioni di dimensione NE quello che si trova il numeratore sopra o un costo totale mentre facendo la somma al variare di carta di AMK che cosa sto facendo vabbè ho la la dimensione è fissata e faccio la somma rispetto a tutte le possibili eh caratteristiche e quindi o che cosa il numero di possibili configurazioni di dimensione n no quindi quindi questo poi di nuovo vi metterò il i lucidi poi corretti questa quello che ho scritto qui deve essere invertito quindi facendo questo porto si trova ovviamente un costo medio no perché vada a dividere un costo totale per il numero di configurazioni di una certa misura e ecco questa quantità e quindi che può essere quindi immaginiamo che ne so potrebbe essere anche se insomma il problema specifico che di cui adesso vi faccio l'esempio poi non è banale quindi non non lo saremo però immaginate di avere sempre l'algoritmo quicksort no potrei avere NK ehm e nella dimensione e ehm EEANK potrebbe rappresentare il numero di eh di ehm configurazioni di lunghezza n che fanno sì che il mio algoritmo abbia eh l'effetto di K confronti cioè praticamente su tutte le possibili permutazioni dei dei dei di n di n chiavi se io vado ad applicare a questa riunione di esse il quicksort ce ne saranno alcune che fanno un certo numero di confronti e certe a cui competono o un altro un numero di confronti quindi immaginate appunto NK potrebbe essere il numero delle configurazioni che fanno sì che l'algoritmo faccio esattamente fatto confronti no quindi moltiplicando per cap è chiaro che se questa è l'esempio al numeratore avrei il numero totale di confronti e dividendo poi per la somma che si trova sotto troverei il numero medio di confronti che vado a fare su tutte le le op considerando tutte le possibili permutazioni in input quindi è un modo diverso per ottenere quello che noi abbiamo ottenuto a partire dalla ricorrenza che abbiamo studiato all'inizio no vi ricordate noi abbiamo studiato in ma soprattutto nel caso del quiz su una ricorrenza che già ci dava un valore medio cioè il chicco.no NS con n che noi abbiamo rappresentato con le ricorrenze del quicksort andavano già a studiare un caso medio cioè la era la ricorrenza era strutturata in modo tale appunto da da rappresentare da questo questa casistica però 1 1 caso medio può essere calcolato anche in maniera diversa cioè facendo un rapporto tra un costo totale e il numero delle delle possibili configurazioni no e un approccio di questo tipo può essere ehm eh considerato appunto se si lavora con le funzioni generatrici bivariata perché perché se si conosce la funzione generatrice bivariata di una sequenza ANK calcolare queste due quantità questo queste due somme è piuttosto semplice vediamo perché allora la prima somma in particolare e la prima somma in realtà sarebbe È quella che corrisponde AA AA denominatore di questa di questa ehm di questa frazione quella somma lì quindi la somma per cappa che l'apparire di cappa di ANK che cos'è beh questa somma io la posso trovare in modo facile andando a valutare la funzione generatrice bivariata in W uguale a uno ed estraendone il coefficiente beh se torniamo un attimo indietro alla definizione è abbastanza chiaro questo no vedete che se io qua dentro metto uguale a uno e poi estraggo il coefficiente tick n da queste espressioni che cosa trovo troverò la somma degli n al variare di KE per per costruzione va bene quindi se io conosco la mia funzione had it doppio e sostituisco al posto di Wood doppio il valore uno estraendo dalla nuova funzione che a quel punto diventa una funzione monocoriali ata il coefficiente di tipo n io ho direttamente la somma degli handicap quindi questa è una prima osservazione ma l'osservazione forse più interessante è quella che adesso vediamo adesso che e la successiva ovvero eh come faccio a calcolare la somma di K per NK eh quindi al variare di K eh anche quella è una quantità che calcolo facilmente a partire dalla funzione generatrice bivariata perché cosa osservo che se vado a fare la derivata della funzione generatrice più variata rispetto AWE derivando rispetto AWO io proprio l'effetto di moltiplicare la mia sequenza ANK per K perché W EE la la variabile che indica che che che il segnaposti per per per la variabile K no quindi quando io derivo questa espressione rispetto a occhio qui avrò l'effetto che appunto K va a moltiplicare la sequenza NK quindi la derivata è data da questa da questa doppia sommatoria no quindi la somma magari enne e poi fare di K di KANKN per V doppio la K -1 a questo punto che cosa osservo beh osservo quello che ho già detto prima ovvero se metto questo punto W uguale a uno in questa espressione eh e poi vado ad estrarre di nuovo il coefficiente rispetto a tick n ecco che ho la possibilità di trovare direttamente la somma pesata KNK quindi la somma pesata quindi la somma dei costi totali eh la posso individuare andando a fare la derivata della funzione generatrice bivariata rispetto alla variabile V doppio andando a mettere uguale a uno nella funzione generatrice e quindi poi facendo un'estrazione di coefficiente va bene quindi se io riesco a trovare la funzione generatrice di una sequenza bivariata e poi con queste trasformazioni quindi calcolando questo questo facendo questa estrazione e facendo questa successiva estrazione io riesco AA calcolarmi queste due somme e quindi anche a trovare la media dei della dei dei valori della della mia sequenza bivariata va bene eh e quindi è uno la la conoscenza della della funzione generatrice bivariata insomma mi mi permette di trovare anche risultati relativi AAA medie dei valori insomma che che la sequenza di variata rappresenta e quindi beh niente o quello che resta andiamo a fare e a vedere un qualche esempio alcuni esempi in cui andiamo ad applicare queste quello che abbiamo appena visto allora eh consideriamo di nuovo le stringhe le stringhe binarie eh e l'esempio è banale il primo esempio che vediamo è il giusto per far vedere che insomma le cose funzionano e come applicare il questo risultato quindi vogliamo trovare quante sono eh quante sono le stringhe scusate che non vedo però questo qui come si fa a farlo sparire io ancora non l'ho capito ah ecco dopo un po dopo si va via però non ho mai non ho capito come come si fa a farlo scomparire quindi voglio trovare un'informazione banale va bene quindi voglio trovare il numero di bit uno nelle stringhe binarie di una certa lunghezza numero di bit uno nelle stringhe binarie di lunghezza n ehm quindi ovviamente il numero medio d'accordo quindi il numero medio di bit uno nelle stringhe binarie di lunghezza enne quindi considero tutte le stringhe binarie lunghezza enne eh mediamente quanti bit uno ci saranno facendo veramente la media su tutte quelle possibili e la metà cioè uno e zero sono perfettamente simmetrici quindi quando vado a definire le stringhe binarie ce ne ho cioè è una media ovviamente poi ce ne sarà quella che non ce n'è nessuno è quella che ce n'era esattamente n però off e faccio la Mediaset tutti è abbastanza facile immaginarsi che sia esattamente la metà no perché le le stringhe binarie sono ce ne sono tante ce ne ce n'è una che ci attende degli uni e zeri c'è anche la simmetria che già zeri e uni per cui che il numero di bit uno e zeri insomma è per forza e se vado a far la somma il totale di tutti i bit uno e zeri deve essere lo stesso cioè sia per il per il bit uno e per il bit zero io quando poi divido mi aspetto che siano la metà però ora se se se a questo risultato ci si può arrivare in maniera rigorosa lavorando appunto in termini di funzioni di variate quindi sia BNK il numero di stringhe binarie di lunghezza n con K bit uguale a uno va bene quindi vado a considerare proprio la distribuzione delle stringhe binarie di lunghezza n che hanno la caratteristica di avere K bit uno quindi voglio trovare il numero medio di bit uno tra tutte le stringhe di lunghezza enne eh cosa posso fare beh posso definire intanto queste queste stringhe tramite il metodo simbolico comunicazione che tra l'altro abbiamo già visto mi pare no una stringa binaria la posso vedere come o una stringa vuota oppure un bit zero o uno seguito da una stringa binaria questa è la definizione che abbiamo visto già a sua volta già che abbiamo già visto e cosa e quindi qual è l'obiettivo l'obiettivo è trovare la funzione generatrice bivariata della sequenza BNK ok e calcolare poi questo rapporto quindi andare a calcolare il rapporto tra la somma di KBNK al barriere di Kappa quindi prendo le stringhe binarie di lunghezza n con K bit uno e moltiplico per K quindi sommando trovo sopra che cosa trovo trovo il numero totale di bitte uno nelle stringhe binarie di lunghezza NE poi cosa faccio divido divido per la somma al variare di K viene K quindi la la lunghezza è fissata faccio variare K in tutti i modi possibili trovo quante sono le stringhe binarie quindi quello che vogliamo fare è risolvere questo problema utilizzando le le le funzioni generatrici bivariata quello appunto che ci aspettiamo ragionando un po su sulla forma di queste di queste stringhe che Bitcoin sienna utili vogliamo ritrovare ci aspettiamo di trovare questo risultato allora come si fa con le funzioni generatrici di variate allora ovviamente devo trasformare questa funzione simbolica in funzione in un'equazione nella corrispondente funzione generatrice però tenendo conto sia del della lunghezza della stringa che del numero di bit uno quindi che cosa succederà che vabbè quando vado a trasformare questa equazione è chiaro che quando quando trasformerò questo pezzettino 0 1 è chiaro che tutti e due i simboli mi fanno aumentare e la lunghezza però soltanto uno dei due mi fa aumentare il numero di bit di bitte uno ehm e quindi vedete che cosa come è stata trasformata quell'equazione l'equazione è stata trasformata nell'equazione quindi vidi tv doppio uguale uno che rappresenta la parola vuota poi qui c'ho ti per vivi tv doppio perché lo zero e lo zero che il primo zero mi mi mi fa aumentare soltanto la lunghezza quindi mi pesa per t luna invece mi pesa sia per per fare aumentare la lunghezza ma anche per il fatto di essere 1 1 eh quindi questa è la trasformazione EE che mi permette appunto di definire un'emozione per la funzione generatrice bivariata breve in questo caso la trama si tratta di un'equazione di primo grado che risolvo in modo estremamente semplice e quindi vedete posso portare tutti i termini bit doppio a sinistra e quindi avrò come coefficienti uno meno TE meno tv doppio e quindi poi alla fine risolvendo le equazioni avrò 1/1-10 meno tv doppio va bene quindi ho risolto l'equazione di primo grado questa è una funzione generatrice bivariata eh quindi perché compare nella funzione sia t che V doppio posso scriverla anche mettendo in evidenza il t a denominatore quindi la possa scrivere come 1/1-1 più doppio per t bene quindi questa è la funzione generative se con me allora poi magari ci copriamo andiamo a fare uno sviluppo un serio di questa funzione vedremo che ci sono non soltanto delle potenze del team ma che ci sono delle dei monomi in cui compaiono sia potenza del ticket che potenza del vudoppio allora da quello che abbiamo detto per calcolare la il questo questo rapporto ho ho la necessità di andare a valutare queste due somme no quindi la somma al denominatore si è detto che è facile basta che io vada a mettere V doppio uguale a uno nella funzione generatrice bivariata e poi estraggo il coefficiente e in questo caso se metto uguale a uno beh la la funzione si semplifica assai EE diventa 1/1-2 t ma questa funziona insomma noi la ormai la conosciamo bene e la funzione generatrice di due alla n se volete potete applicare la regola di Newton ma insomma arrivate a questo punto del corso forse non ce n’è neanche più bisogno perché ricordatevi che 1/1-2 chi lo potete vedere anche come la composizione e di che cosa della funzione generatrice di 1/1 meno t con due TE quindi è chiaro che quando mettete al posto di t due tipi quello che introduce cosciente due alla n no quindi poi se uno ancora non è in grado di vedere queste queste cose si fa il passaggio algebrico con la regola di Newton ecco eh questo è facile quindi abbiamo scoperto l’acqua calda insomma che il numero delle stringhe binarie sono due però l’abbiamo fatto con le funzioni generatrici più variate per trovare il numeratore quindi per trovare la somma il numero totale di bit uno eh cosa devo fare abbiamo detto che posso andare a fare la derivata della funzione generatrice bivariata rispetto a vudoppio valutare questa derivata in WW uno e poi estrarre questi 100 ed è quello che ho fatto e nel passaggio successivo quindi qui la somma di NK come la faccio a trovare questa è la derivata la derivata della funzione di questa funzione qui quanto è devo fare il quadrato del denominatore quindi avrò 1-1 più doppio p al quadrato poi ho la derivata del numeratore che è zero quindi quindi zero meno e il numeratore uno per la derivata del del denominatore che quindi diventa rispetto AV doppio diventa un t eh quindi infatti vedete la derivata che è che ho determinato t diviso 1-1 più doppio t al quadrato questa espressione la devo valutare in Wood uguale a uno quando vedete appunto questo simbolo questa barra verticale si intende appunto che si vuol valutare la funzione in un doppio uguale a uno e poi estrarre il coefficiente se metto doppio uguale a uno qua dentro ovviamente ritrovo 1-2 p che però questa volta devo elevare al quadrato eh il t come vedete lo posso portare dentro l'operatore tick n quindi si tratta di estrarre il coefficiente n -1 di 1-2 2-2 questa volta posso poi ho applicare l’operatore scusate il la regola di Newton e quindi avrò -2 suen -1 per -2 alla n -1 vi ho applicato la regola di dito no quindi vi ricordate no le devo prendere come numeratore del coefficiente binomiale l’esponente come nominatore del conducente binomiale la il termine il coefficiente che vuole estrarre e poi quindi devo metterci appunto la costante che moltiplica tisse e prelevato per l'indice del coefficiente che voglio estrarre qui come al solito ho fatto ho applicato la proprietà di negazione no la regola di negazione per la efficienti binomiali per cui un coefficiente con un segno negativo al numeratore lo posso trasformare cambiando il segno quindi due sommando il denominatore n -1 e poi sottraendo 1 1 e poi devo dovrei moltiplicare sempre per -1 alla n -1 ma questo fa sì che il -1 che già c’era si semplifichi quindi in definitiva mi rimane e mi rimane n su n -1 per due alla n -1 ma n su n -1 NE quindi alla fine ho n per due alla n -1 questo è il numero totale di pit uno delle stringhe binarie di lunghezza n quindi se voglio trovare il numero medio di bit uno tra tutte le stringhe mirare di lunghezza enne dovrò dividere per il valore che avevamo trovato al passo precedente e quindi ecco che ho il risultato che mi aspettavo n mezzi va bene quindi il risultato non è niente di eccezionale però era giusto per farvi vedere come applicando la appunto il metodo delle delle funzioni generatrici dell’estrazione delle loro coefficiente si riesce a risolvere anche questo problema ecco però ecco in ve lo ripeto perché questo forse è il punto più interessante se volete è un modo diverso che stiamo utilizzando per calcolare un valore medio cioè finora abbiamo fatto tutti i tempi in cui abbiamo lavorato direttamente su una ricorrenza che rappresentava già un'espressione nel caso medio qui andiamo a valutare un valore medio come un rapporto di un totale diviso il numero delle configurazioni va bene questa è la differenza ecco ora vediamo qualche esempio un pochino più interessante eh un pochino meno meno meno ovvio e si parla sempre di alberi alberi binari in particolare però ecco questo esempio ora qui in faccia fate attenzione perché in genere questo è un esempio che che insomma non non risulta sempre di facile comprensione allora qual è l'obiettivo l'obiettivo è andare a studiare sempre gli alberi liminari con ai neon interni ma questa volta vogliamo trovare il numero medio di foglie negli alberi minari le foglie sono i nodi interni che hanno tutti e due i figli che sono noti esterni quindi sono tutte le configurazioni in cui ho un nodo un nodo tondo che è connesso a due nodi quadrati va bene e voglio sapere in media quante ce ne sono di queste configurazioni su tutti gli alberi binari che hanno nodi è detto in altri termini voglio sapere quanti sono i nodi dell'albero che hanno tutti e due puntatori nulli va bene se se se così vi piace di più eh ma questo è un po più difficile come problema il punto di partenza è sempre quello di definire l’equazione simbolica e definisce gli alberi binari no sempre dalisi parte quindi un albero binario è 1 1 nodo esterno oppure un nodo interno connesso a due alberi binari e vabbè fin qui è facile il problema qual è che io Voglio appunto contare dei nodi particolari cioè quelli che hanno appunto la caratteristica di avere tutti e due figli eh che sono noti esterni allora qual è l’idea l’idea è che insomma io in qualche modo devo trasformare questa equazione simbolica in modo da evidenziare i il nodo esterno già nell'equazione simbolica entrati a quello che che quello che vado a fare è la seguente cosa ora dal punto di vista dell'equazione simbolica forse non è neanche così difficile però ecco in questo in questo prodotto cartesiano che che avete qui qui abbiamo un nodo interno connesso ha due alberi va bene siccome a quanto poi la definizione ricorsiva di ogni albero può essere anche un nodo esterno è chiaro che qua dentro in questa parte della dell’equazione simbolica ci sta anche la foglia cioè la foglia è un nodo interno connessa a due alberi che sono tutti e due vuoti definizione un nodo interno una foglia è un nodo interno connesso a due nodi esterni cioè connessi a due alberi fuochi vabbè siccome io quella configurazione la voglio trattare in maniera diversa perché poi voglio trovare quant'è quant'è il numero medio di queste di queste foglie qual è l'idea l'idea è che in questa equazione simbolica io faccio un'operazione eh che che che però finora non abbiamo mai fatto ovvero e in pratica la la tolgo tolgo la configurazione della foglia da questo prodotto cartesiano perché la tiro fuori cioè immaginate di avere una scatola in cui sono contenuti tutti gli alberi con con radice va bene perché qui a parte l'albero vuoto poi dopo questo prodotto cartesiano indica un qualsiasi albero per cui ho la radice poi i due sotto alberi son fatti con tra tutti quegli alberi c'è anche una volta sola o la configurazione che rappresenta la soglia cioè c'è l'albero in cui ho un nodo gradisce e poi due sotto alberi vuoti ecco io quell'albero lì lo tolgo dalla scatola lo tiro fuori va bene quindi che cosa ho fatto vedete qui ho e per far capire appunto che l'idea che c'è dietro vedete qui ho tolto questa configurazione da questo prodotto cartesiano e l'ho e l'ho evidenziata l'ho messa fuori tolgo da una parte e rimetto da un'altra quindi ti tiro fuori dalla scatola questa configurazione perché la voglio poi marcare in maniera diversa nel passaggio vuoi dire qualcosa costruire con no la costruisco tramite questo questo qui termine che poi il successivo ci mette meno di foglia no qui l'idea è appunto l'idea è che io voglio eh qui da questa qui ho qui questo e rappresenta tutte le possibili configurazioni che hanno un nodo interno come radice ok l'immaginate evi per un momento io in realtà non la la tolgo per modo di dire la tolgo perché poi ce la rimetto va bene però qui faccio questa operazione che non è del tutto ortodossa però insomma la faccio per cantarvi capire che cosa che cosa ho in mente e quindi immaginate qui qua dentro siete d’accordo che c’ho la configurazione che rappresenta la foglia ce l’ho una volta sola Ebbene ora immaginate che io sappia tutte queste configurazioni in una scatola ok quella la tiro fuori dalla scatola in questo senso la la tolgo la tolgo nel senso che la tiro fuori ma non è non è cambiato nulla l’unione questo Unione questo mi dà esattamente la stessa espressione di prima non è cambiato niente eh beh qui quello che che voglio evidenziare semplicemente il fatto che io voglio ehm trattare poi in maniera diversa quella configurazione va bene quindi EE come se la tirassi fuori dalla scatola va bene la la tiro fuori perché quella la voglio poi evidenziare con un simbolo diverso qual è l'idea l'idea è di utilizzare appunto la funzione generatrice bivariata in modo tale da marcare i nodi interni come prima con t quindi TE la il simbolo che mi serve per marcare in i nodi interni d'occhio che stavolta invece mi serve per capire per marcare 1 1 foglia quindi tutte le volte che c’è una foglia io voglio identificarla da la variabile V doppio allora qui bisogna capire questa emozione simbolica non non è niente di particolare semplicemente ho ho utilizzato un formalismo per indicare il fatto che la la la la struttura foglia io la la voglio evidenziare in maniera diversa dalle altre ora il punto forse un pochino piu delicato e il successivo cioè il modo in cui io trasformo l’equazione perché allora è chiaro che una volta che io questa foglia l'ho portata fuori l'ho portata fuori perché la voglio contare con vudoppio va bene quindi vedete B è diventato B di tv doppio il nodo esterno è diventato 1 1 questa foglia mi conta sia perché fa aumentare il numero di non interni sia perché mi so aumentare il numero delle foglie quindi ci ho messo un occhio per il punto un po più delicato se volete e quello dopo perché vedete qui io poi normalmente avrei dovuto mettere un tip per un bid tv doppio al quadrato però se qui non facessi nessuna correzione che cosa succederebbe succederebbe che io quella foglia la conto due volte perché la conterei sia fuori che dentro la scatola quindi che cosa faccio io qui ho bisogno la necessità di di togliere cioè siccome questo tip per bid tv doppio al quadrato mi mi conta tutte le configurazioni di alberi che hanno un nodo interno come radice io da quelle configurazioni ho bisogno di togliere quella che corrisponde alla foglia perché quella l’ho già contata fuori va bene quindi però questa volta tolgo ti tolgo sì perché in questa scatola nella scatola che io avevo io contavo soltanto nodi interni immaginate che nella che la scatola contenga non solo la struttura l'alberino ma che contenga anche quanto pesa quell'albero in termini di di funzione generatrice no qual è la la la la il termine della funzione che gli compete e quando io faccio quell'operazione lo faccio soltanto contando i nodi interni quindi quando poi quella configurazione la voglio togliere la devo togliere semplicemente come noto interno quindi e quindi vedete quello che ho fatto ed è il passaggio un pochino più delicato e evidenzio tolgo estraggo la configurazione foglia da tutte le altre e quindi la tolgo meno team perché il t è il simbolo che rappresenta la foglia no se non vado a contare se la conto soltanto come nodi interno la foglia mi vale come t è un nodo interno mi aumenta il numero quindi lo lo tolgo da da dalla configurazione da da dal dal totale ma però ce lo rimetto contando quella configurazione anche per il fatto che è una foglia quindi tolgo ti ma poi ci rimetto ti marcandolo anche con vudoppio va bene è chiaro qual è la cosa qual è l’operazione quindi se è un’applicazione del metodo simbolico un pochino diversa rispetto a quelle che abbiamo fatto finora perché e appunto si va a non marcare una configurazione particolare in maniera diversa facendo però attenzione a non contarla troppe volte per la cultura cioè se non facessi questo meno tiri e poi vado a farlo sviluppo in serie quello che vedremo e ora si può anche provare a vedere che cosa succede no vedrei che in corrispondenza della variabile t cioè della della potenza t avrei non soltanto ohm cioè avrei un numero di alberi maggiori di quello che uno va bene quindi è a parte la la l'aspetto algebrico cioè proprio un aspetto di di di conteggio di strutture che insomma che è importante capire no qui appunto ho tolto una struttura che poi ho evidenziato in maniera diversa va bene quindi vedete questa questa equazione mi definisce la funzione generatrice più variata di che cosa quindi del numero di alberi con n nodi EK foglie quindi BNK in questo caso BNK mi rappresenta il numero di alberi binari che annodi EK fogli perché il K qui mi rappresenta è rappresentato dalla variabile W e quindi cosa devo fare per trovare a questo punto quante sono quante sono le foglie e devo fare come ho fatto prima quindi devo fare e se vado a calcolare B di uno intanto se vado a calcolare uno chiaramente che cosa che cosa trovo trovo un risultato che già conosciamo conosciamo bene mettere W uguale a uno vuol dire che non mi preoccupo più delle foglie praticamente Conte soltanto i nodi interni EE quello già sappiamo che che che che la funzione generatrice in caso e la funzione generatrice dei numeri di catan quello è un risultato che ormai abbiamo visto e rivisto più volte e però insomma lo si può ritrovare ovviamente anche così no se vado a mettere W alla uno in quell'espressione eh mi viene fuori eh punto B di uno uguale a uno più t ecco sì volevo farvi notare che vedete non ho risolto non ho risolto l'equazione potrei già quando uno ha un'azione simbolica ovviamente la potrei risolvere in tv doppio visto che è un'equazione di secondo grado sono capace però qui ho fatto una cosa diversa ho sostituito direttamente W uguale a uno dell'equazione e poi ho trovato quanto vale B di uno perché è più semplice in questo caso no in realtà insomma una che cambia molto quindi vi ho sostituito al posto di W uno e quindi mi viene uno più t più t per B di piu 1^2 meno t vedete in questo caso il TE il tipo si semplificano e quindi ecco che ritrovo la la l'equazione che abbiamo visto più volte B uguale a uno più TB al quadrato che ormai sappiamo bene che ha come soluzione la funzione generatrice dei numeri di catalan eh e siamo cosi come sappiamo bene che l'estrazione del coefficiente di questa funzione è appunto il ennesimo numero di Catania quindi non stiamo a rifare i passaggi che abbiamo visto tante volte quindi il numero di alberi binari è dato dall'ennesimo numero di capra per quanto riguarda invece la derivata di della funzione generatrice rispetto AW anche qui le le strade che posso seguire sono due è chiaro che o vado a risolvere questa equazione di secondo grado e poi la la delego va bene però è chiaro che siccome qui c'è un'equazione di secondo grado e che la la soluzione ora qualsiasi sia ci avrà una radice quadrata no per forza una squadra di secondo grado e quindi poi una derivata di sicuro non non proprio banale da da trattare no quindi anche qui ho preferito cacciare subito la derivata a livello di equazione senza risolvere le esplicitamente al primo passo la l'elevazione quindi vedete qui ho fatto la derivata rispetto AW quindi la derivata rispetto AW della funzione generatrice più variata è uguale a che cosa ah t perché quando derivo uno mi viene zero quando derivo questo termine ovviamente rimane tie e poi devo fare la derivata rispetto a un doppio di quest'altro pezzo qua e quando vado a fare la derivata di quest'altro pezzo ovviamente derivò soltanto il primo termine perché li doppio nel secondo non mi dà nessun contributo però quindi avrò 1 2 per chi BTV doppio e poi devo fare derivata di nuovo dividi tv doppio rispetto AW quindi quando faccio la derivata di quell'equazione simbolico ottengo vedete questa nuova equazione siccome a me interessa la derivata rispetto AV doppio e vedete io qui ho trovato una un'equazione che mi definisce la derivata rispetto AW doppio come un'equazione di primo grado vedete la derivata rispetto purtroppo a qui a sinistra o la derivata a destra e quindi la derivata rispetto AW la posso scrivere come ti diviso 1-2 Kid tv doppio cioè l'ho anche qui ora lo ve lo faccio vedere in me poi insomma è chiaro che si poteva fare anche mi in maniera in diretta risolvendo l'equazione però ho evitato di di trattare con equazioni che contengono radici cose complicate ho cercato ho lasciato le cose simboliche finché il il più possibile e quindi mi viene questa derivata la posso scrivere come t appunto diviso 1-2 t per BTV doppio sostituisco poi al posto di V doppio uno quindi ho chi diviso 1-2 fi per B di chi uno ora siccome B di più uno è la funzione che abbiamo già trovato nella funzione generatrice dei numeri di casa che cosa succede vedete quando la vado a sostituire due TE due tizi se ne vanno e quindi ho 1-1 più la radice prima le tilizzo la radice quadrata di 1-4 questa è la derivata eh eh e la derivata qui manca un doppio uguale a uno eh qui manca un doppio 1 1 barra verticale questa è la derivata della funzione calcolata in uguale a uno a questo punto cosa devo fare devo estrarre coefficiente da questa funzione questo coefficiente lo sappiamo estrarre per fortuna perché applico la regola di Newton quindi il tiro corto dentro tiene -1 e poi avrò 1-4 t alla -1 mezzo e anche questa è un'estrazione di quelle che abbiamo già visto quindi applicando la regola di Newton mi viene -1 mezzo su n -1 per -4 alla n -1 questo vi ricordo che uno di questi centri binomiali che abbiamo studiato all'inizio del corso quelli che hanno un numero amore che è una frazione e abbiamo visto qual è la la regolina che ci permette di trasformarlo in funzione di questi centri binomiali centrali ora qui non vi storiche ed erano non a riprendere il passaggio che avevamo già visto quindi questo questo coefficiente binomiale si può trasformare in questo nuovo questi centennial moltiplicato per questi due fattori e quindi facendo poi tutte le semplificazioni rimane due n -2 su n -2 e quindi che cosa rappresenta questo coefficiente binomiale e questo è il numeratore del nostro del del rapporto che vogliamo calcolare no quindi quello mi dice quante sono in totale le il numero di foglie in tutti gli alberi binari con n nodi cioè se noi andiamo a prendere tutti gli alberi binari con nodi e contiamo quante sono le foglie in tutto eh questo valore è dato da questo coefficiente binomiale quindi siccome noi siamo interessati a sapere qual è il numero medio eh io devo dividere questo questa quantità per il numero numerical cioè il numero di alberi binari quindi quante quante sono le foglie in media le foglie in medie sono il numero totale delle foglie tra tutti gli alberi diviso il numero di alberi quindi devo fare il rapporto fra due n -2 su n -2 e questa è questo coefficiente che ormai è uno sciamo bene quindi quello che è stato fatto è convertire i coefficienti binomiali come rapporto di fattoriali quindi duenne -2 fattoriale poi abbiamo diviso quindi quando vado a fare la differenza eh tra due enne ehm -2 ehm due n -2 EN -2 che cos'ho 2-2 meno n che fa n n dunque vi ho fatto è stato fatto già qualche passaggio in più allora allora qui due n su n due n su n ah no ecco perché sono state un po mescolati ecco perché allora c'è un duenne -2 due n fattoriale su n fattoriale e poi n fattoriale dunque la n più uno che mi torna che sia ora non vorrei che fosse che abbia scritto qualcosa di sbagliato eh poi allora quindi lei n più uno che questo qui mi torna è quello che succede denominatore poi qui ci avrei un duenne fattoriale diviso n fattoriale e poi di nuovo n fattoriale che però siccome sono denominatore si invertono Quindi dovrei avere un n eccolo qua questo sopra è e come sopra è come avessi e recettoriale per n fattoriale che corrisponde alla n fattoriale perenne fattoriali che avevo sotto e poi il due n fattoriale qui è stato scritto come due n per due n -1 per due n -2 fattoriale che quindi c'è un passaggio c'è un passaggio che è stato saltato un passaggio va bene questo rappresenta questo denominatore a meno dell'o n più uno cioè è la è la trasformazione del coefficiente binomiale due enne su n in cui al posto di due n fattoriale è stato scritto appunto due n coi due n -1 per 2-2 fattoriale al posto degli altri due n fattoriali è stato portato fuori LN va bene ok poi la n più uno e questo e poi e poi cosa rimane poi ho due n -2 fattoriale qui c'è qualcosa invece che non mi torna perché quando si fa la differenza tra due n meno e -2 meno n più due che mi dovrebbe rimanere semplicemente n un n sarebbe un n per un n -2 ah vabbè sì che in realtà va bene perché un n perenne anche qui manca un passaggio ma va bene sarebbe un n per un n -2 fattoriale quindi dalla NN lo scrivo come n per n -1 fattoriale e lenn -2 J EN -2 no c'è qualcosa che non va in questo passaggio e ora senza farla lavagna infatti è quello che che che ora insomma questo poi ve lo riguardo perché qui sarebbe la sarebbe un n fattoriale la differenza è n fattoriale ci avrei un n fattoriale per un n -2 fattoriale va bene quindi la n per n -1 ok mi torna che qui ci sono n -1 dopodiché però avrei un n un n per un n -2 che invece non non vedo qui quindi c'è un n per n quindi qui mi tornerebbe di più che che ci fosse un n per un n -2 fattoriale mi torna quando io sviluppo questo coefficiente binomiale qui ho due n -2 ehm fattoriale poi n -2 fattoriale a denominatore che non c'è e poi ci avrei la differenza ma la differenza fra i due è n due enne -2 meno n più due fa n e bene quindi quando io trasformo questo binomiale mi dovrei trovare in due enne -2 fattoriale diviso e nfatti reale per n -2 fattoriale ora qui invece c'ho un n -1 fattoriale per n -1 fattoriale e quindi può darsi che la cosa più probabile è che ci sia un errore vabbè che che vediamo che cosa succede quando si va a semplificare il resto quando si semplifica il resto in realtà che era stato fatto le allora duenne -2 settoriali 2-2 settoriali si semplificano si semplificano in realtà appunto poi ci avrò questo n questo n che si semplificano ok e poi s'è detto un n -1 fattoriale no ma qui non ce l'avrei qui ci avrei un n per n -2 il risultato è quella con semplificazione e corretta questa con la semplificazione di sopra sembra di si sotto ok questo e questo questo e questo poi questo se ne va poi ci rimarrebbe un n per n più uno e poi quindi però questa qui non mi vabbè facciamo abbiamo andiamo a farlo con Meo va bene ora chiaramente alla lavagna e questo diventa una cosa che si fa in un attimo però ormai facciamolo così allora oh allora quindi cioè il risultato il risultato sono sono sicura che vada bene e probabilmente c'è cioè mi manca qualche passaggio oppure è stato fatto qualcosa di sbagliato allora quindi io devo valutare intanto abbiamo detto eh binomial d se dentro di due n e due n -2 su n -2 due che rende -2 i miso no n -2 e poi tutto questo diviso i numeri di catalan più uno per i nomia di due anni, n che questa è la quantità che voglio valutare a meno che non ci fosse un errore prima ma mi pareva a meno che non ci sia un errore qua due n -2 no però 2-2 su n ah qui intanto n -1 forse eh allora ci sta che sia qui da qui mi viene un duenne -2 cioè se questo passaggio è corretto qui ho 1 2 n -2 su n -1 ecco ecco probabilmente l'errore è questo allora semplicemente qui e non è stato fatto è stato scritto due invece di uno ritorna che qui e se se la trasformazione che ora non me la ricordo ma possiamo andare a vederla dei dei coefficienti binomiali con numeratore è frazione è corretta e qui questo è 1 1 Quindi se question uno allora poi quando si fa questo questo questo e quando si trasforma questo binomiale ho due n -2 fattoriale e poi n -1 fattoriale per n -1 fattoriale quindi è l'errore è semplicemente questo comunque verifichiamo a questo punto si verifica eh quindi facciamo con non so se gli basta questo è quello sbagliato quindi con la n -2 no tempo chiamiamolo eh ah sì ok ok allora forse c'è la pasta semplice ok qui qui non ho fatto nessuna ehm qui ho messo la n -2 va bene quindi EN quadro -1/4 n -2 nel lucido scritto n quadro e fatti non è lo stesso risultato no perché è chiaro che il risultato giusto è quello che provo con uno va quindi se qui ci metto 1 1 e rifaccio tutti questi passaggi infatti mi viene per n più uno per quattro n -2 va bene quindi l'errore è un passaggio qui che ovviamente sbagliato perché questo era 1 1 e poi invece improvvisamente che è diventato 1 2 va bene il resto invece è corretto e quindi l'ho scritto giusto quindi viene uguale no n per n +1 4 n -2 ok che ovviamente qua si può scrivere si può fattorizzare ancora di più eh ok mi viene perenne più 1/2 per due n -2 sì Eh sì anche questo è un più ovviamente sì sì sì questa questo e corrette qui c'è un passaggio in più quello è un più EE tornavano con quello che abbiamo appena fatto anche lì c'è un più sì sì quindi c'è un paio di cose da correggere quindi questo che cosa rappresenta questa quantità quindi è n per n più ½ per 2-1 rappresenta il numero medio di foglie e negli alberi che hanno n 9 negli alberi binari che hanno nei nodi interni va bene che è un è un risultato così scontato insomma da da da determinare forse ecco una cosa che possiamo forse verificare fatemi pensare e ora però non mi ricordo quand'è in qualche lucido avevamo fatto avevamo fatto no forse ce l'ho anche nella luce di dopo no no volevo ritrovare volevo ritrovare qualcosa del cioè da da da un esempio verificare che effettivamente le cose tornano no ora questo è un'altra cosa però questi sono eh i 5 alberi la forma di 5 alberi binari con tre nodi va bene allora se io voglio contare quante sono le foglie in totale quindi intanto possiamo verificare il totale no allora qui in questo albero qui ho una foglia qui ne ho un'altra due qui invece ne ho due quindi vado a quattro qui poi invece ne ho uno e qui ne ho un’altra quindi sono sei quindi ho sei soglie in totale fra tutti gli alberi con tre nodi quindi quello che mi aspetta è che il numeratore della mia della della di quello che ho fatto quindi che che questa espressione quindi corretta che due n -2 diviso n -1 quando n tre faccia 6 ok quindi se io faccio vino quindi si è detto di due n -2 quindi sarebbe eh 6-2 quindi 4/2 e infatti fa sei va bene quindi questo ci dice insomma ovviamente 1 1 dimostrazione di niente però semplicemente una verifica che due n -2 su n -1 che è questo vedete 1-1 rappresenta il numero totale di e di foglie fra tutti gli alberi binari con enormi nel caso del numero a tre quella infatti quell’espressione vale vale sei ovviamente che cosa ci dobbiamo aspettare ci dobbiamo aspettare che il numero medio sia eh 6/5 sono 5 gli alberi quindi sei quindi ok quindi che questa espressione quando NE sei valga seguenti giusto gli anni sei qua io scusate quando ENE tre e nel tre quindi viene tre per 4/2 e poi qui ho 6-1 che fa 5 infatti il 5 torna qui abbiamo detto che è tre per quattro ma poi il quattro lo divido per due quindi il sei quindi va bene questa è una verifica che eh quando n tre effettivamente Eh sì hanno un sì ha un numero di foglie pari a quello che ci dobbiamo asp cagare va bene ecco un'altra cosa che volevo verificare già che abbiamo aperto maple e quello che vi dicevo rispetto alla a questa funzione no quindi se io vado via considerare l’eh B la posso chiamare semplicemente.be quindi l’equazione B uguale ad uno a uno più te chi per vudoppio più abbiamo detto eh ti per B elevato al quadrato e poi ci tolgo t giusto questa è l’equazione che ho considerato no benissimo intanto questa è un’equazione che posso risolvere quindi se io faccio un assegno a qualcosa diamo il q quindi se io faccio un souls cuore rispetto AB vedete come vedete come vi dicevo ovviamente la soluzione si trova eh quindi la soluzione si trova ma è espressa come delle con delle radici e qui ora poi si tratta di andare a vedere qual è per la soluzione giusta trovo la prima eh vedete la prima non va bene di sicuro perché c’ha un chi alla -1 quindi non è l’oggetto che fa per noi se invece vado a fare lo sviluppo della seconda vedete che c’ha tutti i termini eh con potenze del tip positive qui ovviamente posso fare un map ehm mi farai non mi ricordo mai ok quindi questo e lo sviluppo in serie di della seconda di questa seconda espressione va bene che ci fa vedere appunto e che che effettivamente appunto e siamo siamo di fronte ad una funzione generatrice bivariata vedete no variare di chi EW può assumere più valori quindi qui stiamo dicendo eh qui stiamo dicendo che ad esempio nel caso nel caso dunque questa è la funzione generatrice che mi dice quanti sono gli alberi eh dunque aspettate eh non mi torna non mi torna però foglia sì sì sì qui mi dice allora il coefficiente della della funzione mi dice quanti sono quanti sono gli alberi che hanno una certa un certo numero di nodi interni e un certo numero di foglie quindi se ci concentriamo sul termine ti alla terza in effetti ritroviamo quello che abbiamo visto nell'esempio perché qui abbiamo quattro W vuol dire che ci sono quattro alberi che hanno una soglia e ce n'è uno invece che ha due foglie quindi quando andiamo a mettere un doppio uguale a uno qua dentro infatti troviamo 5 no cioè quando qui iniziamo W uguale a uno in sol due se vado a mettere subs eh doppio uguale a uno in sol due cioè io trovo la funzione generatrice dei numeri di cacata perché qui ottengo tutti gli alberi no e chiaramente trovo gli alberi però appunto volevo farvi vedere ovviamente per per trovare il numero medio uno poteva anche lavorare direttamente con la funzione generatrice esplicita in questo caso quindi avrei dovuto vabbè nel primo caso è facile ci metto uguale a uno poi estraggo il coefficiente e trovo quindi il denominatore per trovare il numeratore cosa dovrei fare dovrei fare 1 1 derivata della funzione che in questo caso è la sol due rispetto a vudoppio abbiamo detto e questa è la funzione poi appunto devo metterci al posto di vudoppio 1 e qui infatti ritroviamo la funzione che poi abbiamo trovato anche noi facendo senza lavorare con la funzione esplicita non è che non è non è complicato neanche procedere così insomma come uno preferisce un modo alternativo insomma a volte piuttosto che andare a risolvere l'equazione si può anche farla derivata direttamente sull'evoluzione no è questa quindi è la funzione generatrice e che conta il numero totale delle foglie fra tutti gli alberi e che hanno un certo numero di nodi quindi ritroviamo questo sei che corrisponde alle dimensioni quindi già se si passa vedete a quattro ce ne sono 20 insomma l'andamento è quello che abbiamo e che abbiamo studiato e quindi ora qui a parte il segno qui cosa cosa si vede si vede che quando è n è grande eh questo rapporto come c’ho sopra numeratore c’ho n quadro il termine dominante e un quadro a denominatore il termine dominante 1 4 enne quindi questo questo questo rapporto quando e ne è grande si comporta come n quarti quindi vuol dire che mediamente quando la dimensione degli alberi è è abbastanza grande un quarto dei nodi sono foglie va bene quindi se pesco a caso un albero quello che mi devo aspettare e che un quarto dei nodi abbiano tutte due puntatori di nulli non è questo è quello che che posso immaginare e ok dunque oggi abbiamo iniziato alle 02:30 quindi devo finire e ora fra 10 insomma ora vabbè quindi vabbè non non sto quindi allora iniziare un nuovo un nuovo esempio ve lo introduco e basta qui l'esempio successivo apparentemente parla di alberi ma in realtà questa volta sono l'interesse sugli alberi binari di ricerca va bene gli alberi binari di ricerca che hanno ovviamente la stessa forma la la la forma è la stessa degli alberi minari perché insomma appunto sempre gli alberi minari si parla cambia però la in non il numero di possibili alberi binari di ricerca quanto quant'è ditemelo voi quanti sono gli alberi binari di ricerca intanto vi ricordate come si costruiscono altro pennello di ricerca come si fa si prende una permutazione che e dei numeri da uno ANE si inseriscono in un albero no quindi ad esempio 123 no come a quale albero lo faccio corrispondere parto dalla radice e quindi primo il primo elemento è la radice poi mi sposto a destra a sinistra a seconda che quel valore sia maggiore o minore quindi siccome due è maggiore lo inserisco a destra e siccome tre maggiore inserisco a destra poi come maggiore di due lo inserisco ancora a destra io ottengo questa prima configurazione quando vado ad inserire 132 invece inserisco 1 3 maggiori si riesco a destra quando vado a inserire due lo dovrò prima confrontare con uno poi con tre e quindi poi lo inserisco a sinistra no quindi la costruzione si fa a partire dalle permutazioni qual è l'idea qual è che cosa succede quello che succede è che ci possono essere delle permutazioni che vanno a finire nello stesso albero cioè se io inserisco 213 inserisco due poi uno è più piccolo ma se riesco quindi a destra a sinistra tre è più grande lo inserisco a destra Se però io ho la permutazione 231 ottengo esattamente la stessa configurazione va bene perché il primo inserirò a destra e poi a sinistra quindi gli alberi binari di ricerca sono questi sono sono quelli che ottengo a partire dalle permutazioni quindi la domanda è quanti sono gli alberi minari di ricerca fissato eh fissata la dimensione ovviamente perché son meno

Sol due eh io trovo la funzione generatrice dei numeri di cacata perché qui ottengo tutti gli alberi no e chiaramente trovo gli alberi però appunto volevo farvi vedere ovviamente K per per trovare il numero medio uno poteva anche lavorare direttamente con la funzione generatrice esplicita in questo caso quindi avrei dovuto vabbè nel primo caso è facile ci metto col doppio uguale a uno poi estraggo il coefficiente e trovo quindi il denominatore per trovare il numeratore cosa dovrei fare dovrei fare 1 1 derivata della funzione che in questo caso è la soul due rispetto a vudoppio abbiamo detto e questa è la funzione poi appunto devo metterci al posto di un doppio 1 e qui infatti ritroviamo la funzione che poi abbiamo trovato anche noi facendo senza lavorare con la funzione esplicita non è che non è non è complicato ed è anche procedere così insomma come uno preferisce un modo alternativo insomma a volte piuttosto che andare a risolvere l'equazione si può anche farla derivata direttamente sull'evoluzione no è questa quindi è la funzione generatrice e che conta il numero totale delle foglie fra tutti gli alberi e che hanno un certo numero di nodi quindi ritroviamo questo sei che corrisponde alle dimensioni quindi già se si passa vedete a quattro ce ne sono 20 insomma l'andamento è quello che abbiamo e che abbiamo studiato e quindi ora qui a parte il segno qui cosa cosa si vede si vede che quando è n è grande eh questo rapporto siccome c'ho sopra numeratore c'ho n quadro dominante un quadro denominatore il termine dominante 1 4 n quindi questo questo questo rapporto quando è né grande si comporta come quarti quindi vuol dire che mediamente quando la dimensione degli alberi EE abbastanza grande un quarto dei nodi sono foglie va bene quindi se pesco a caso un albero quello che mi devo aspettare e che un quarto di nodi abbiano tutti e due puntatori di nulli vabbè questo è quello che che posso immaginare e ok dunque oggi abbiamo iniziato alle 02:30 quindi devo finire e ora fra 200 ma ora va bene quindi vabbè non non sto quindi allora a iniziare un nuovo un nuovo esempio ve lo introduco e basta qui l'esempio successivo apparentemente parla di alberi ma in realtà questa volta sono gli interessi sugli alberi binari di ricerca va bene gli alberi binari ricerca che hanno ovviamente la stessa forma la stella la forma è la stessa degli alberi minari perché insomma appunto sempre gli alberi minari si parla cambia però la in non il numero di possibili albe di binari di ricerca quant'è ditemelo voi quanti sono gli alberi binari di ricerca certo vi ricordate come si costruiscono l'altro binario di ricerca come si fa si prende una permutazione che è dei numeri da uno ANE si inseriscono in un albero no quindi ad esempio 123 come a quale albero lo faccio corrispondere parto dalla radice e quindi il primo il primo elemento è la radice poi mi sposto a destra a sinistra a seconda che quel valore sia maggiore o minore quindi siccome due è maggiore lo inserisco a destra siccome tre maggiore lo inserisco a destra poi siccome maggiore di due non inserisco ancora a destra ottengo questa prima configurazione quando vado ad inserire 132 invece inserisco 1 3 maggiori inserisco a destra quando vado a inserire due lo dovrò prima confrontare con uno poi con tre e quindi poi lo inserisco a sinistra no quindi la costruzione si fa a partire dalle permutazioni qual è l'idea qual è che cosa succede quello che succede è che ci possono essere delle permutazioni che vanno a finire nello stesso albero cioè se io inserisco 213 inserisco due poi uno è più piccolo lisco quindi a destra a sinistra tre è più grande lo inserisco a destra Se però io ho la permutazione 231 ottengo esattamente la stessa configurazione va bene perché il primo inserirò a destra e poi a sinistra quindi gli alberi binari di ricerca sono questi sono sono quelli che ottengo a partire dalle permutazioni quindi la domanda è quanti sono gli alberi miliari di ricerca fissato fissata la dimensione ovviamente perché son meno eh però questo qui eh conta il doppio appunto non non è a cioè le le i quanti sono è chiaro le forme possibili cioè le forme possibili sono esattamente quelle che corrispondere ai numeri di casa perché le forme degli alberi se se si usano soltanto alberi binari e sono quelle però qui il problema è complicato un pochino più quando si fanno conteggi relativi agli alberi binari di ricerca il campione quello con cui abbiamo a che fare EN fattoriale perché questo albero qui ora io l'ho scritto una volta ma è e lo lo devo contare due volte perché lo ottengo sia con questa configurazione che conquista quindi la risposta a quanti sono gli alberi binari di ricerca EN fattoriale perché parto ricostruisco a partire dalle permutazioni e non dagli alberi va bene anche questo è un passaggio che a volte che non sempre è così chiaro no perché le forme in effetti sono le stesse però ce ne sono alcune che contano di più perché hanno una frequenza una frequenza maggiore e questo ovviamente quando poi io vado a fare appunto il passaggio successivo e l'esercizio successivo ma lo vedremo ormai la prossima volta e trovare il numero medio di soglie negli alberi minari di ricerca ok però tenendo conto del fatto che certe forme io lo devo considerare più di una volta perché vengono fuori da pubblicazioni d'altra parte è quello il modello che devo venire un conto se voglio fare una media che poi sia una media che tiene conto di tutte le possibili e di tutte le possibilità va bene e vabbè questo esempio quello vediamo la prossima volta ecco tenete conto però che tutti questi esempi etti che ora stiamo vedendo eh si prestano bene anche a eventuali progetti se uno insomma se insomma non non è la prima volta che vengono fatti ma insomma tutte le volte poi tanto qualcuno ci mette sempre qualcosa di di nuovo no perché insomma così come abbiamo fatto simulazioni relative AA l'algoritmo sort per vedere che i confronti avevano certe caratteristiche niente vieta di fare delle simulazioni per verificare che il numero di media degli alberi sia quello che abbiamo visto che il numero medio degli alberi binari di ricerca sia un altro quindi sono tutti problemi che si prestano poi essere simulati abbastanza abbastanza bene ovviamente ora poi insomma se qualcuno di voi volesse dovesse essere interessato ne parliamo però ecco il problema nel caso finché si parte dalle permutazioni è facile perché generare tutte le se finché si generano tutte vabbè è facile perché il problema è quando se se ne vogliono bene se ne vuole generare un campione sei sempre dimensioni grandi vogliamo generare un campione delle permutazioni gli algoritmi sono facili abbastanza semplici cioè trovare un algoritmo che generi in maniera casuale una permutazione è facile non solo un ecolo ma in qualsiasi linguaggio di programmazione si trova abbastanza facilmente più difficile e generare un albero binario in modo uniforme perché voglio dire a quel punto mentre qui posso partire dalle permutazioni nel caso degli alberi binari devo partire da dalle configurazioni cioè devo generare un albero con la probabilità che è uno pare a al numero all’ennesimo numero di Atalanta che quelle sono le possibili configurazioni che ho a disposizione no quindi gli algoritmi che lo fanno lo sono così banati insomma sono un pochino meno semplici vabbè questo è e questo esempio comunque lo vedremo la prossima volta un'altra cosa che volevo dirvi ho messo nella cartella del corso alcuni articoli cui non non c’è da fare simulazione ma più verifiche di tipo ehm algebrico su su alcuni aspetti che però insomma riguardano i commenti del corso quindi insomma intanto se

Condividono schermo allora Buongiorno a tutti e continuiamo oggi a parlare di funzioni generatrici viviate abbiamo visto che a partire dalle funzioni generatrici e divagate ed è possibile calcolare delle caratteristiche della della sequenza che queste rappresentano facendo delle trasformazioni direttamente sulla sulla funzione generatrice in particolare se una quantità che è di interesse spesso nel contesto dell'analisi e organismi o di caratteristiche di strutture date è quella di valutare appunto costi medi e questo costo medio e si può anche ricavare facendo 1 1 rapporto fra il costo totale di tutte le configurazioni che hanno una certa dimensione n diviso il numero delle configurazioni che hanno quella dimensione e quindi se ANK rappresenta la la la sequenza di variata che appunto conta il numero di ehm configurazioni che hanno lunghezza NE costo K è chiaro che il costo totale lo trovo facendo 1 1 media e una somma pesata di Kappa per NK perche al variare di Kappa che ho il costo di tutte le le configurazioni di una certa lunghezza e poi dividendo per per la somma di tutti gli enpap divido all’area di Kappa per il numero di pasturazioni di quella dimensione quello che abbiamo visto e che appunto avendo se si conosce la soluzione generatrice di variata della sequenza ANK allora la somma e per K che va per la maggiore uguale di zero di anni K la trovo in che modo andando a prendere la mia funzione generatrice pagata valutano la invoco uguale a uno se V doppio è la variabile che conta il costo quindi quella che rappresenta nappa e poi estraggo il coefficiente ennesimo per quanto riguarda e per quanto riguarda invece la somma pesata KANKE in questo caso quello che devo fare è derivare la funzione generatrice bivariata rispetto al doppio e calcolarla anche in questo caso in più doppio uguale a uno e quindi poi estrarne il coefficiente quindi se conosco la funzione generatrice equiparata poi queste quantità e quindi il loro rapporto che rappresenta un costo medio le riesco a valutare senza dover fare grandi altre operazioni allora abbiamo iniziato a vedere diversi esempi l'altra volta in particolare avevamo visto il numero di foglie negli alberi binari e abbiamo trovato in particolare che negli alberi binari quindi con renne nodi questo numero di foglie quindi corretto ricordate c’era qualche imperfezione in questo lucido poi l’ho corretto EE vi ho mi sembra già messo a disposizione i lucidi e di con la versione corretta quindi questa quantità e tende a corrispondere in modo preciso a questo rapporto n per n più ½ per due n -1 che quando n è grande si comporta come n quarti no quindi sederti in un albero binario quello che ci aspettiamo è che insomma quando venne abbastanza grande un quarto di nodi siano delle foglie e questo appunto l’abbiamo dimostrato a partire dalla funzione generatrice equiparata ecco allora avevamo già anche iniziato a introdurre un altro problema che ora abbiamo approfondire e ovvero vogliamo fare la stessa cosa quindi trovare sempre le foglie però questa volta degli alberi minari di ricerca quindi se si tratta di una struttura diversa anche se anche se le forme di alberi che si vanno a considerare sono le stesse però cerchiamo di chiarire bene la differenza con l'esempio precedente e per far questo consideriamo tutti gli alberi binari di ricerca che si possono costruire a partire dalla dalle premute azioni di briggs quindi si parte appunto dalle permutazioni in questo caso abbiamo sei permutazioni di tre chiavi quindi 123132213231312 e 321 e come vado a costruire gli alberi beh inserisco ogni valore della permutazione in un nodo dell'albero quindi inizio a inserire uno e poi mi sposto nell'albero a destra OA sinistra a seconda del valore successivo quindi il valore due è maggiore di uno quindi lo inserisco a destra il valore tre e maggiore sia di uno che di due lo inserisco a destra in questa posizione e così via e quando vado ad inserire le due permutazioni 213 e poi 231 e cosa succede mi succede che queste danno luogo allo stesso albero perché prima inserisco la radice due poi se inserisco uno mi sposto a sinistra e poi quando inserisco tre mi sposto a destra quando in quando vado a costruire l'albero che corrisponde a 231 lo costruirò in maniera diversa perché prima inserisco il tre e poi l'uno però la la forma dell'albero che ottengo è la stessa quindi che cosa vuol dire questo e quando e vado a costruire gli alberi binari di ricerca anche se le forme essendo alberi binari ovviamente le forme non possono che essere quelle che che sono rappresentate dai numeri di casa però ce ne sono alcune che hanno una frequenza maggiore di altre perché corrispondono a un numero maggiore di permutazioni quindi è come se quell'albero io lo dovessi contare non una volta ma tante volte quante sono le permutazioni corrispondenti quindi questo vuol dire che quando devo fare il la media siccome l'obiettivo è trovare il numero eh le foglie il numero medio di foglie degli alberi binari 2 dicembre è chiaro che per trovare il numero medio di foglie io devo considerare tutte le configurazioni cioè quelle che pesano di più le devo considerare il numero di volte corretto cioè io quello che devo fare è partire da dalle n fattoriali per un sensazioni quindi il mio il mio insieme di alberi eh sui quali vado a calcolare una media non è più l'insieme degli alberi di catalan ma è l'insieme delle permutazioni che ne è nei fattoriale è maggiore del per dell'ennesimo numero di camera allora come si fa ah come si fa a calcolare le foglie allora in questo caso si ritorna a una si ritorna a una rappresentazione e in cui e l'uso delle funzioni generatrici impariate non è in questo caso la la strada più conveniente proprio perché appunto si parte dalle dalle permutazioni quindi abbiamo messo questo esempio proprio per confrontarlo con quello che abbiamo fatto con gli altri binari normali allora quando costruisco un albero binario di ricerca che cosa succede vabbè se a un certo punto ho inserito cap nella nella radice allora destra andrò ad inserire tutti gli elementi che sono maggiori di quel valore KEA sinistra andrò a inserire tutti i valori che sono più piccoli va bene questo che costruzione in particolare se io sto inserendo i valori 1 2 n quindi sto considerando la permutazione di di n valori di valori maggiori di Kappa quanti ce ne sono beh ce ne sono n meno K in una se ho n valori quanti sono quelli che sono maggiori di chiappa n meno K quanti sono quelli che sono minori sono K -1 quindi cosa vuol dire che posso per per studiare questo problema posso considerare una ricorrenza che è molto simile a quelle che abbiamo già studiato per il Quick storte EE perché appunto la la la la struttura è esattamente la stessa quindi il numero medio di foglie in un albero binario di ricerca che cosa sarà uguale beh ovviamente eh per capire quante foglie ha un albero fatto così devo capire quante foglie può avere un albero e che ha a sinistra ehm K -1 elementi e a destra m meno K quindi qui vedete in queste in questa ricorrenza io vado a considerare gli il numero di foglie negli alberi che hanno K -1 nodi e il numero di foglie negli alberi che hanno nemmeno Campagnoli e a come come abbiamo già visto bene faccio variare K da uno a denne mi vido per un uso enne che tengo conto della probabilità che nella radice ci sia cappa e la parte più delicata e capire che cosa devo mettere in corrispondenza di questo termine no che vi ricordate no nel caso del quicksort avevamo una ricorrenza era del tutto simile e avevamo inserito a questo livello il numero di confronti che si fanno quella frase di partizionamento perché poi dopo l'espressione analoga a questa rappresentava la fase ricorsiva dell'algoritmo va bene qui è un po la stessa cosa noi abbiamo l'aspetto ricorsivo del problema eh qui però devo capire questa volta non sono confronti devo devo andare a valutare il numero delle soglie allora e cosa cosa vado quindi in pratica siccome con questa con questa sommatoria io vado già a considerare i due sotto alberi destra e sinistro cioè quello che qui devo contare è la radice in qualche modo cioè la domanda è quand'è che la radice mi conta come una foglia va bene perché io sono le foglie quelle che voglio contare e la radice mi conta come una foglia quando c'è soltanto lei come come nodo dell'albero no perché cioè quando è uguale a uno in pratica se n è uguale a uno va bene la radice dell'albero e anche 111 foglia dell'albero sterzo quindi la ricorrenza che rappresenta questo questo costo la posso rappresentare in questo modo vedete qui ho al posto dei punti interrogativi ho messo Delta n uno cioè una quantità chiamiamo più volte utilizzato che vale uno solo quando n è uno cioè la la la radice dell'albero e da un contributo al numero delle foglie soltanto quando è n uguale a uno perché tutti gli altri casi la radice non potrà essere una foglia basta che ne sia due vuol dire che la destra a sinistra c'è un altro nodo è che la la radice sicuramente non è una soglia va bene quindi la la radice diventa una soglia soltanto quando n uno quindi questa è una ricorrenza che rappresenta il costo costo medio in termini di foglie e questa ricorrenza è del tutto simile a quella che qui insomma perché abbiamo visto che ho spiegato più volte e per studiare questa ricorrenza come al solito si deve trasformarla utilizzando l'operatore funzione generatrice no quindi qui dovrò trasformare per linea per linearità ognuno di questi pezzettini in una funzione generatrice dopo vi conviene fare prima moltiplicare tutto perenne no come abbiamo fatto anche noi nel caso del quiz con questo n che si trova di nominatore conviene moltiplicarlo in modo da rifarsi a una ricorrenza NFN uguale addendi il penne 1+2 volte questa sommatoria osservate che quando io faccio n per Delta n uno siccome Delta n uno vale uno solo quando n uno n perché il n uno è come dire del n uno perché tanto quando n è diverso da uno Delta n uno vale zero e quindi il fatto che ci sia un n che moltiplica non mi non mi cambia niente no quindi quindi quando moltiplico perenne il Delta n uno in realtà non cambia tant'è che infatti vedete qui nella trasformazione in funzioni generatrici ora qui non ho riportato tutti i passaggi perché insomma sono gli stessi che abbiamo visto e rivisto nel caso del del quiz però il primo termine NFN si trasforma per la proprietà di derivazione in t per la derivata prima di F di quei dei ten uno corrisponde.at no quella è una Delta n uno è una sequenza che vale uno soltanto in corrispondenza di n uguale a uno e poi tutti zeri quindi la funzione generatrice EPE poi abbiamo la somma due volte la somma per cappa per va da zero a -1 di KE qui vi ricordo che conviene prima fare uno spostamento in modo da ricondurci ad alla somma fino ad Annie di portar fuori un team in pratica e poi questa somma la possiamo vedere come la convoluzione della sequenza ecap con la sequenza 1 quindi alla fine abbiamo questa questa equazione differenziale eh quindi eh quindi la somma si traduce in due tipi di suono meno che per F di più e vabbè qui il tipo essere eliminato perché i punti compare in tutti i termini è qui come al solito ora dovete provare a farla amicizia insomma quindi non vi ho riportato tutti i passaggi qui come al solito per trovare la soluzione dell'elezione vincenziane prima si deve trovare la la soluzione della dell'equazione omogenea eh e poi è come si è visto diversi esempi si deve andare a calcolare la derivata del rapporto tra l'incognita e feriti e la soluzione appena trovata dell'equazione omogenea ecco facendo e facendo questo questo questo passaggio si trova questa funzione questa funzione FT uguale a 1/3 per 1/9^2+1/3 per 3-1 e quindi a questo punto quindi ripeto insomma provate a fare voi i passaggi così ripassate anche è il metodo che abbiamo visto e da qui da questo punto si tratta di estrarre questo coefficiente per vedere quanti sono gli alberi e le foglie negli alberi di navi di ricerca allora quindi questo coefficiente K per estrarlo quindi uso l'operatore chicco n quindi avrò 1/3 pie n di uno minuti alla -2 quindi questo primo termine e poi 1/3 di pien di questo secondo termine film -1 in questo primo caso ovviamente questa applicare la regola di Newton e quindi avrò 1-2 su n per -1 alla n poi vedete in questo secondo caso qui ho 1/3 qui ottiene di chi -1 beh chi -1 ovviamente è un polinomio di primo grado quindi influisce poco su coefficiente perché influisce con un Delta n uno quindi questo qui contribuisce quando n uno e questo uno contribuisce 1 2 n zero perché in quel caso che ho 1 1 dirtene zero va bene perché in tutti gli altri casi di questi 106 enne maggiori di uno questo questo questo qui si certo ovviamente zero e quindi il passaggio successivo ho fatto la solida trasformazione che si fa per i coefficienti binomiali quindi qui ci aveva un segno negativo quindi ho cambiato disegno sommato il denominatore sottraggo uno e poi moltiplicando per -1 alla NE elimino quello che già c'era EE quindi niente questo è un n più uno su n che corrisponde a appunto n più uno questa semplicemente quindi il coefficiente in generale dato da 1/3 perenne più 1+1/3 per questa per questa correzione appunto che e aiuta a trovare coefficiente corretto non è uguale a zero è uguale a uno però ecco in generale ovviamente a parte il rasio il caso 0 1 poi è chiaro che il coefficiente della parte che interessa è questo n più 1/3 no quindi vedete il numero medio di foglie negli albi eliminari di di ricerca EN più 1/3 quindi rispetto agli alberi binari abbiamo 1 1 costante moltiplicativa diversa in quel caso avevamo un quarto un quarto del del Un quarto di nodi che sono poi in questo caso abbiamo 1/3 dei nodi che sono fogli perché ovviamente ci sono ci sono più qui come mai di Renzo questo è diverso proprio perché appunto ci sono più la stessa configurazione alcune delle considerazioni contano di più perché corrispondono a più permutazioni e quindi poi i conti si cambiano allora sempre foglie quindi vogliamo trattare ancora una un'altra classe di alberi EE anche in questo caso vogliamo trovare il numero medio di foglio questa volta negli alberi planari con radice migli alberi in cui i nodi possono avere una qualsiasi parietà esse con tutti per tutti gli esseri maggiori di zero e una foglia che cosa sarà una foglia in questo in questo contesto è è un nodo senza discendenti quindi suino un nodo di aree da zero ma e quindi questa volta è per risolvere appunto questo esercizio invece introduciamo ahm una sequenza di variate e quindi una funzione generatrice di variata quindi consideriamo il numero GNK di alberi che hanno m nodi K foglie e la funzione generatrice che ho chiamato GZU usato questi due riapri di ZU quindi la funzione è appunto svariare di NK la somma di GNKZ è la variabile che uso per per indugiare la la la il numero di Novi è Ue la variabile invece ne tiene conto del numero delle foglie ah per risolvere questo esercizio come al solito dobbiamo andare a rappresentare questa classe di alberi con il con il metodo simbolico allora la la classe di questi alberi può essere vista come l'unione è disgiunta degli insiemi a esse con S maggiore uguale di zero costituiti dagli alberi che hanno un nodo di arieta S come radice cioè questi tipi di alberi come sono fatti eh sono fatti o c'ho semplicemente un nodo interno oppure ho un nodo interno connesso ad un albero quindi visto esaminando gli alberi che hanno in cui la radice areca uno oppure possa avere un nodo connesso a due alberi quindi alberi in cui la radice la riga due cioè qui sto indicando il fatto che quando vado a considerare delle strutture così generali la radice dell'albero può avere una qualsiasi arieta fino a infinito quindi la l'equazione simbolica che rappresenta questo insieme di altri è quella che vedete e a partire da questa emozione poi si può facilmente e tradurla in equazione in un'equazione nella corrispondente funzione generatrice quindi ehm cosa faremo qui io voglio contare appunto associare a questa classe la funzione ZU quindi alla classe ovviamente assocerò oggi ZUA questo nodo singoletto associo sia Zeta lui mi conta sia per il fatto come il numero di e di nodi cioè interni ma anche per il fatto di essere una foglia abbiamo detto no che la foglia rappresenta l'unica configurazione in cui ho la radice con un che è un nodo interno e poi nessuna nessun figlio mentre in tutte le configurazioni successive la radice dell'albero mi conta soltanto per il fatto di essere un nodo e non come foglia quindi vedete ho tradotto ho tradotto la mia equazione simbolica nella seguente equazione nella corrispondente funzione generatrice quindi al primo al nodo al primo nodo radice associato Zeta Perù e poi vedete che a tutti gli altri ho associato uno Zeta per GZU oppure GZ al quadrato a seconda della varietà della della radice e quindi questa e questa equazione la posso scrivere anche in che modo quindi ZU lo lascio da solo poi in tutto il resto però posso mettere in evidenza uno Zeta EE poi quello che ho è la somma per cappa maggiore o uguale di uno di GZUO alla K vabbè perché ho tutti cioè ho tutte le potenze di a variare di Kappa ora però questa espressione qui questa somma sto con K maggiore uguale di uno beh a questo punto dovreste avere imparato AA trattarla e qui è come se avessimo una convoluzione è come se avessimo una composizione se invece di invece di esserci g di ZU ci fosse un di alla KE qui avrei appunto più attenzione la la la la somma non parte da zero ma parte da uno quindi la funzione sarebbe ti diviso uno meno t la funzione generatrice se fosse semplicemente un tip perché parte da uno e non da zero e quindi poi qui non ho fatto altro questo sostituire custodi Tiger e quindi vedete abbiamo trovato che la funzione generatrice bivariata soddisfa l'equazione GZU uguale a qui commesso in evidenza ZZ che moltiplica U più GZU diviso 1-1 Zeta più perché ho fatto questo allora ovviamente qui potrei anche risolverla queste equazioni no perché se vado a fare i conti a portare questa questo denominatore mettere tutto allenatore comune trovo un’equazione di secondo grado va bene il problema qual è è che come abbiamo già anche visto in qualche altro esercizio la soluzione di un’equazione di secondo grado quando ci sono comunque anche due variabili mi dar luogo a delle delle radici quadrate ovviamente perché è un’equazione di secondo grado e l’estrazione poiché il coefficiente non è detto che sia semplice allora però qui ho preferito lasciamo la guardi le cose così perché questo è 1 1 altro esempio che si presta ad essere risolto con la formula di inversione villagrande e però è un'applicazione anche questa non non proprio banale e allora ehm allora qui vedete ho per poter applicare la forma di inversione di lagrange vi ricordo che abbiamo biso di una funzione a AA di t uguale.at per fidia di chi no qui ovviamente siccome la variabile che è in evidenza nel secondo nella seconda parte dell’espressione Zeta qui la variabile rispetto alla quale la lettera di lagrange e la ZU vediamo la non immaginare che sia un parametro non non non non è la variabile che mi interessa quindi vado a estrarre il coefficiente ZN da da dalla dalla funzione generatrice e osservando che cosa osservando in pratica se io considero ci y uguale AU più y diviso uno meno y io ho da quello che ho trovato che GZ è uguale AZ persi dici di ZY bene uh l’ho lasciata stare così com’è e qui ho la composizione della funzione y diviso uno meno y con la funzione GZ di va bene quindi qui ho una funzione fi un pochino più complessa rispetto a quelle che abbiamo visto negli esempi precedenti però appunto se io riconosco ci y in questo modo allora vedo chiaramente che GZUE data da Z per figlia per lui no perché devo semplicemente sostituire poi e i è un parametro la variabile è è soltanto y quindi queste osservazioni mi permette di estrarre il coefficiente dalla funzione generatrice ripagata rispetto AZ e quindi vado a estrarre questi 100 zenica gizeh più eh questo per il teorema di inversione di lagrange qui ho cambiato variabile ma al solito avrei potuto continuare a usare Zeta senza problemi ma insomma 1 1 vale l’altra vi ho preferito siccome già ce ne erano due nella funzione g insomma per per per evitare confusione o preferite usarne una quindi uno su NE poi devo estrarre il coefficiente n -1 da fi di y alla n quindi la funzione che ho riconosciuto e bene il passaggio successivo semplicemente ho sostituito al posto di fi la sua espressione EE cosa te la devo fare quindi la il coefficiente ennesimo e dato da da questa coefficiente d'altra parte io ho bisogno però di trovare io voglio trovare questi agente EZNUK cioè io voglio trovare GNK quindi il coefficiente della funzione generatrice di variata eh per trovarlo quello bisogno di fare un'estrazione sia rispetto ad enne che rispetto ad si torna qui la funzione in generale quando io ho una funzione generatrice briata se voglio estrarre il coefficiente GN GNK lo posso fare o facendo questa eh questa doppia estrazione EE quindi ha per per trovare il coefficiente gnk devo estrarre il coefficiente K dalle espressioni che ho già scritto eh dunque a questo punto quindi vedete qui sto facendo 1 1 bel ragionamento ancora diverso da quelli che abbiamo fatto finora perché qui sto l’obiettivo è proprio quello di andare a cercare l’elemento in modo esplicito va bene eh allora quindi andiamo AA vedere cosa posso fare da da da questa espressione U più y diviso uno meno y alla n allora se ed è questo se questo lo chiamo Ue questo lo chiamo.be qui è chiaramente è come se avessi un binomio no o lo OOO il binomio a più B alla e e l’abbiamo già visto più volte che EE questo equivale a fare questa è la somma al variare di un certo indice J di che cosa di n su JE poi chi sarebbe una alla J per B alla n meno J no questa è la classica della è la è la classica regola il binomio del binomio ha chiuso e qui vi ho scritto in termini appunto di appio B che forse ci sono più più familiari no e quindi il coefficiente ennesimo di questa espressione io so sicuramente esprimerlo come questa scome in in funzione di questa somma un po particolare in realtà poi vedete noi dobbiamo estrarre il coefficiente cioè da da questa espressione da questa espressione noi dobbiamo estrarre il coefficiente YN -1 EUK va bene un doppio un doppio efficiente e abbiamo sempre detto quando si fanno le estrazioni dalle funzioni generatrici copiate quello che conviene fare è estrarre prima il coefficiente e mi permette di semplificare meglio in modo più semplice ed espressione quindi eh quindi quindi io vi ri riportato di nuovo quello che dobbiamo fare quindi dobbiamo estrarre questo coefficiente e quindi vedete che cosa ho fatto devo prendere questi estraggo prima e coefficiente YN -1 ma il coefficiente YN -1 e corrisponde a che cosa e corrisponde a oh scusate eh no qui c'è un errore no eccolo qua questo YN -1 la tolto eh perché no scusate non e non va tolto va va tolto l'ok up fuori qual è l'idea l'idea e chi devo estrarre da questa espressione devo estrarre eh il coefficiente rispetto ad y il coefficiente n -1 e rispetto ad un coefficiente K ora è chiaro che la prima cosa che conviene fare qui e fare l’estrazione rispetto ad uno perché mentre y mi compare sia sopra che sotto e quindi l’estrazione qui cioè l’ y non è semplicemente prendere questo con n -1 e c'ho anche y di sotto quindi conviene prima estrarre il coefficiente di YKI coefficienti di YK che cos’è non è altro che n su KYN meno K diviso uno meno y alla n meno K va bene quindi e qui c’è questo qui va tolto va bene questo termine un cappello va tolto perché qui ho proprio con l'estrazione ah no no ok no no va bene in realtà no vedete quello che è stato fatto e è un passaggio in più ma va bene anche così in realtà non è un errore vedete che è stato riportato di nuovo in pratica li ho scritto invece siccome appunto eh rispetto ad un qui ho un polinomio no quindi l’unico termine un K è quello quando J è uguale AKE estrarre il coefficiente K da questa somma eh equivale ad estrarre il coefficiente K da dal termine della somma con uguale con uguale AK quindi qui c’è un passaggio in più che non è sbagliato scusate non avevo visto look up quindi estrarre questo coefficiente che equivale appunto a ad una somma equivale ad estrarre semplicemente il coefficiente da dal termine EO alla cappa e questo ovviamente oh facile semplicemente enne su KYN meno K diviso uno meno y alla n meno K è fatta questa operazione quindi ho eliminato la variabile Ue quindi posso occupa quindi la variabile y quindi vedete qui ho portato quei binomiale sul campo l’ho portato fuori quando quello non dipende da YEA questo punto queste estrazione la la tratto sempre con la regola di

Newton quindi avrò YN -1 meno n più K porto dentro YE poi da quest'area si sentì di uno meno y alla mamma disegno K meno quindi qui n se ne vanno quindi il prete devo estrarre coefficiente K -1 di uno meno y alla meno n più K e quindi è di nuovo per la regola di newson avrò meno n più K su K -1 per -1 alla eh termine uno alla K -1 in realtà sarebbe vabbè EE quindi però quando poi vado a fare quando vado a fare la l'applicare la proprietà di negazione dei gusti cerimoniali che cosa mi diventa cambio il segno e il numeratore è meno K più K -1-1 su K -1 e il -1 alla K -1 se ne va perche quando faccio la regola di negazione quello si introduce una seconda volta e quindi alla fine vi rimane uno su n su KE poi vi ho un n -2 su K -1 quindi vedete in questo caso abbiamo utilizzato il teorema di inversione di lagrange per trovare proprio la sequenza gne K in modo esplicito quindi abbiamo trovato quanti sono gli alberi planari con n nodi K foglie ora siccome noi eravamo interessati al numero medio eh per trovare il numero medio eh dobbiamo calcolare di rapporto che abbiamo quel famoso rapporto che abbiamo già eh già visto più volte quindi di nuovo quindi ci evidenzio appunto che in questo esercizio abbiamo fatto una cosa ancora diversa da quelle precedenti quindi stiamo calcolando il numero medio andando a trovare direttamente il termine K della della sequenza quindi a questo punto andiamo prima a valutare e la somma ehm al variare di cappa di GNK Eh quindi al posto di NK ho messo l'espressione che abbiamo appena trovato uno su n si può portare fuori perché non dipende da cappa e e poi del passaggio successivo è stata applicata la proprietà quella che ci dice che il coefficiente binomiale n su K è uguale a coefficiente binomiale n su n meno K vedete il secondo coefficiente binomiale l'ho trasformato in n -2 e poi qui e meno K -1 non è altro che la differenza tra n -2 e K -1 va bene perché scegliere capo oggetti tre n equivale a sceglierne n meno appa un sempre tra tra m perché ho fatto questa operazione e perché adesso ho posto vi ricordate abbiamo a un certo punto una delle prime lezioni avevamo fatto una formula la formula di Van der Monde per il calcolo delle somme in pratica abbiamo una somma in cui ho il prodotto di due coefficienti binomiali e questa somma l'apostolo scrive e come un coefficiente minale in cui ha al numeratore o la somma dei numeratori e a denominatore la somma dei denominatori vedete io scritto uno su NE poi ho due n -2 e qui K più n meno K -1 quindi n -1 ovviamente lo posso fare se facendo le somme limino l'indice della somma perché se rimanesse in campo ovviamente non potrei portarlo cioè è chiaro che al variare quando K area cioè che il risultato di questa somma non non dipende da n perché cap e l'indice della somma va bene quindi cioè ho dovuto fare questo passaggio di prima perché altrimenti eh eh sarebbe rimasto il Camp se l'avessi fatto al passaggio precedente no qui avevo cap più o -1 e non non avrei potuto ri fare fare niente perché il cap e l'indice invece facendo questa operazione e ho fatto diventare il Kappa negativo per cui quando vado a sommare i due denominatori mi viene n -1 questo questa matita qui se vedete bene che cos'è questo ormai è un numero che ormai conosciamo bene che cos'è è il numero di catalan n -1 esimo va bene perché è uno su n vedete per due n -1 su n -1 e questo si invece se ci pensate bene è una cosa che avevamo già trovato avevamo già trovato che gli alberi planari con nodi sono uguali al numero di alberi binari con n -1 Prodi avevamo fatto anche una trasformazione EE del di un albero in un albero binario per dimostrare questa caratteristica no avevamo trasformato un albero in un albero binario in cui uno dei due nodi se la radice è sempre vuoto per cui se ha la corrispondenza diretta col numero di albi eliminari con n -1 però il video che qui abbiamo trovato l'acqua calda abbiamo trovato una cosa che già sappiamo ma l'abbiamo trovata però in maniera diversa eh il l'altra cosa più interessante invece è trovare le somme pesate quindi qua come faccio a trovare la somma di K per Jenny K di nuovo quindi al posto di Jenny K scrivo l'espressione che abbiamo appena trovato uno su n posso portarla fuori e qui l'obiettivo anche qui è quello siccome ho due coefficienti binomiali quindi l'obiettivo è è ancora una volta quello di fare delle trasformazioni su queste coefficienti binomiali in modo poi da poter per applicare la la regolina di wandern mondo veda ci permette di calcolare la somma facilmente e chiaro che qui c'è un cap che vi dà fastidio no quindi di cosa faccio intanto eh le devo togliere questo capo e come faccio a toglierlo beh qui c'ho un binomiale n su KE questo lo posso vedere come hanno fattoriale diviso K fattoriale perenne meno K fattoriale è chiaro che il K è che quel campo lo posso eliminare col K fattoriale che diventa un K -1 fattoriale a quel punto cosa mi conviene fare posso portare fuori renne e dall'ente fattoriale al numeratore in modo tale che poi elimino il KE riscrivo il coefficiente di Noale come n -1 su K -1 quindi ho fatto questa trasformazione in modo da eliminare il capo K portare fuori renne ma quello mi va bene non dipende da K ovviamen bene semplificano e quindi la la somma si semplifica ancora di più quindi e ne -1 su K su n -2 per KE poi qui ho fatto la stessa ragionamento è sempre lo stesso quindi non non posso applicare ancora la regola di del mode perché il se sommi due denominatori elimino l'indice della somma quindi anche in questo caso ho applicato la proprietà che n -1 su K è uguale AN -1 su n -1 meno K eh in questo modo il K cambia di segno e quando vado a fare la somma dei due denominatori il cap si semplifica e quindi la formula di wanderwall che c'è il coefficiente e su Carmen uno va bene e a questo punto e qui c'è c'è qualche passaggio in più eh per riportarsi ad una forma che poi mi l'obiettivo nostro ricordiamoci è quello di trovare il numero medio di foglie quindi questa quantità la devo dividere per quella che ho trovato nell'umido precedente quindi che cosa ho fatto al solito scritto il binomiale come rapporto di fattoriali e ho portato fuori questo o no scusate qui non ho portato fuori un bel niente ma ho semplicemente moltiplicato e diviso sia sopra che sotto per due n -2 va bene in modo tale che sopra ho il duenne -2 fattoriale i sotto vedete siccome ho questo due n -2 che non è altro che due perenne -1 beh in pratica facendo questa moltiplicando per questo fattore sotto ho due e poi n -1 fattoriale per due perenne -1 fattoriale va bene quindi ho ho fatto questa trasformazione perché perché poi questo rapporto lo posso scrivere come un mezzo 2-2 su n -1 va bene perché ho fatto questo ho fatto questo perché poi è facile calcolare il rapporto no perché a numeratore quindi ho un mezzo questo che cosa rappresenta intanto questo valore che ho trovato rappresenta il numero totale di foglie in tutti gli alberi con n nodi quindi se io considero tutti gli alberi con n nodi gli alberi planari quindi con nodi con qualsiasi arieta questi hanno in totale un mezzo due anni -2 su n -1 foglie se voglio trovare il numero medio devo dividere per il numero di alberi che abbiamo detto ECN -1 quindi uno su n due n -2 su n -1 quindi vedete vi si capisce perché ho fatto questa trasformazione perché adesso è facile ficcarla commercianti denominati che sono identici e quindi vedete mezzi eh quindi vedete che abbiamo trovato appunto 1 1 risultato sul numero delle foglie abbastanza interessante no perché tutti gli alberi binari e abbiamo visto che questo numero medio è un n quarti per il numero di alberi binari di ricerca abbiamo trovato n terzi per gli alberi generici abbiamo trovato m mezzi va bene quindi è di nuovo questi sono valori esatti a parte quello sugli alberi binari li hanno parte è una abbiamo trovato anche rinnovare un riscatto magari nei quarti è un comportamento che si ha quando n è grande in tutti i casi lo abbiamo fatto tutti queste cose in maniera esatta per cui appunto se uno rigenerasse queste scritture poi andasse a contare esattamente quanti quante sono i nodi che hanno la caratteristica di essere fogne ritroverebbe esattamente questi risultati va bene quindi la deve con le funzioni generatrici Pirate si possono si possono trovare i risultati relativi al caso al caso medio sia direttamente a partire dalla funzione generatrice deplorata oppure anche appunto come in questo esempio andando a trovare direttamente la sequenza dipende un po quello che può essere più conveniente non è un non c’è una soluzione che è migliore dell’altra no ci può essere appunto la la la situazione in cui è più conveniente usare una strategia piuttosto che un'altra EE poi appunto ricordiamoci appunto l'esempio negli alberi binari di ricerca e che che poi appunto è uguale a quello del del wickford in cui addirittura li appunto partendo dalle permutazioni si può ragionare direttamente sul numero medio e quindi trovare una ricorrenza che già eh racchiude nel quale il suo interno il rapporto che poi abbiamo trovato in questi altri esempi va bene quindi e e quindi con le funzioni generatrici bivariata si possono fare eh diversi si si possono risolvere i problemi eh i resti problemi di numerazione e basta un pochino più di attenzione però insomma ecco le cose che sono poi molto diverse da dal caso mono variato se uno l’ha capito e assimilato bene i concetti sulle funzioni generatrici a una variabile poi sono tassare a più variabili non è così complicato dunque noi oggi abbiamo iniziato alle 10 quindi ancora abbiamo abbiamo tempo quindi 10:30 quindi sì più o meno verso le 11:50 quindi andrò a finire quindi abbiamo ancora un po di tempo allora dunque tra le funzioni ora questi lucidi sono in inglese però insomma sono tutti abbastanza eh abbastanza insomma semplici e dunque tra le funzioni generatrici più variate ce ne sono alcune che insomma di cui vorrei parlarvi e sono delle delle funzioni generatrici che viviate che in realtà sono definite da una coppia di funzioni mono variate allora in pratica una funzione generatrice bivariata abbiamo detto definisce una sequenza che vi tende da due indici no quindi Nek quindi immaginiamo di avere invece di una sequenza infinita una matrice abbiamo una matrice di valori no perché al variare di NE di KE abbiamo non più una riga ma abbiamo tante righe di di valori che rappresentano la mia la mia sequenza e allora sì nei esiste c'è un concetto in letteratura eh che definisce che ci che permette di definire e sequenze eh che dipendono da due indici che hanno una caratteristica particolare ora andiamo a vederla allora intanto queste queste strutture queste si si chiamano riordan array eh e sono definite da una coppia di funzioni generatrici quindi un recorder a range generale definito da una coppia di funzioni generatrici di Evan e generi insomma si indica con un aer R per indicare appunto che si sta che l’oggetto con cui si ha a che fare con ricordano a re ma a volte si trova anche semplicemente la una coppia di parentesi separate appunto con due con due funzioni di h separate da una virgola quindi abbiamo detto di h sono serie formati di potenza quindi sono funzioni generatrici con queste caratteristiche allora di zero è diverso da zero quindi il primo il termine noto della funzione di è diverso da zero mentre quello che si vuole che h zero sia uguale a zero quindi la la la seconda funzione ha la caratteristica di avere h 0 0 e nel caso in cui a caprie modi zero si è diverso da zero ovvero questo vuol dire h 0 0 vuol dire che il primo termine della sequenza è zero imporre che h primo di zero sia diverso da zero equivale ad imporre che invece il termine successivo della sequenza l’acca uno invece sia diverso da zero ecco questo è il caso più comune quello che noi affronteremo in questo caso il ricordo è una si chiama proprio eh si quando quando h uno è diverso da zero allora che cosa come è definito questo eh questa sequenza questa sequenza di due variabili allora quindi questa coppia di funzioni di h definisce una sequenza di NK perché si trova in che modo andate a estrarre coefficienti ennesimo di t per h di più alla K quindi questa è la definizione di partenza va bene quindi in cui appunto di chi ha la caratteristica di essere diversa da zero in zero EH invece alla caratteristica di valere e zero in zero allora questa definizione e permette di definire delle sequenze di NK che corrispondono a dei triangoli infiniti ma che sono delle matrici triangolari inferiori cioè la parte superiore sopra regonale di queste di queste sequenze e tutta fatta di zeri questo dipende dal fatto che questa funzione h in zero vale zero per cui all’aumentare di K praticamente la i coefficienti si spostano ora vanno bagniamo subito degli esempi allora intanto l’esempio che già conoscete K il triangolo di Pascale il triangolo di Pascale rientra in questa in questa tipologia no e il triangolo di Frasca l’abbiamo già visto quindi è un triangolo in cui appunto all’interno abbiamo coefficienti binomiali che ne so K quindi abbiamo tutti i valori uno sulla regionale principale abbiamo uno sulla prima colonna e poi qui abbiamo i valori i corrispondono all'elemento NKE ecco questo noi l'abbiamo costruito a partire da da sufficienti comuniali no abbiamo per riparare vi ricordate avevamo trovato una ricorrenza la ricorrenza che ci permette una volta costruito appurato che si leva monale principale ci sono tutti i valori uno perché n su n è uno è appurato che sulla prima colonna c'è uno perché n su zero fa uno gli altri valori vi ricordo che si erano calcolati facilmente in che modo eh o se va dove ogni elemento ogni coefficiente binomiale può essere fatto può essere dato dalla somma dei primi degli efficienti criminali che si trovano al di sopra e sia nella stessa colonna che nella colonna precedente no quindi questo due è dato dalla somma di 1+1 questo tre qui è dato dalla somma di 2+1 così come questo tre è dato dalla somma di 1+2 6 è dato dalla somma di 3+3 avevamo trovato una ricorrenza infatti particolare che soddisfano i coefficienti binomiali che ci aveva permesso di calcolare questo triangolo però quello che invece adesso vediamo le cose da un punto di vista diverso allora questo triangolo lo possiamo vedere anche come il ricordo array fatto da questa coppia di funzioni allora la funzione di è 1/1-3 e la funzione anche in questo caso è t diviso uno meno qui vediamo se è vero eh vediamo ora applichiamo la definizione che abbiamo appena dato per vedere appunto che in effetti le cose stanno così allora se io vado a estrarre il coefficiente abbiamo detto di di TE poi devo prendere HE elevarla alla K quindi devo fare estrarre il coefficiente ennesimo dal prodotto uno diviso numero per t alla K di uh diviso uno meno alla K questo per definizione ma questo io questo oggetto di ormai che sapete trattare bene questo non è altro che il TN meno K di uno meno t spalla meno K -1 ora qui vi ho riportato semplicemente il risultato e nessun cap da qui si tratta di di applicare la regola di Newton quindi vi verrebbe dal primo passaggio n meno K su meno K -1 per -1 alla n meno KE poi dovreste applicare la La la solita regolina le solite trasformazioni dei coefficienti binomiali ora probabilmente ce n'è anche più di una da applicare allora fatemi pensare qui forse era meglio se ve lo riportavo passaggi allora riavremo abbiamo messaggio abbiamo detto ON meno K su meno K -1 ok allora posso applica fare intanto la negazione OK la negazione vuol dire che il numeratore lo cambio disegno quindi mi diventa meno n più K poi ci sommo gli denominatori che è meno K -1 quindi è meno n più K meno più K più uno quindi mi rimane un n più 1-1 mi ritorna e mi ritorna n su n meno canta mi torna quando io faccio EN su K anche un po me lo facevo venire estemporanea n su K su meno K -1 questo sarebbe il primo passaggio che trovo e poi ci avrei 1-1 alla n meno campo però quello lasciamo fare cosa faccio primo passaggio è quello di applicare la la quella che abbiamo chiamato la negazione no cambio il segno al numeratore e sommandoli il denominatore e poi e sottraendo uno quindi a numeratore avevo n meno K quindi mi diventa meno n più K ci sommo il numeratore ehm che è eh quindi abbiamo detto meno n più K meno K -1 quindi scappa K se ne vanno quindi n e meno enne -1 ok e no via però senza senza farlo così non si non si riesce non si riesce a farlo facciamo allora fatemi prendere faccio con Napoli sto un passaggio mamma vabbè gradisco quindi abbiamo detto guarda io devo stare coefficiente n meno K poi c'ho 1 1 meno K -1 quindi avrei prima istanza avrei un binomial di n meno K su meno K -1 va bene questo per poi avrei per 1-1 alla n meno cappa questo il punto di partenza va bene cosa faccio allora ehm allora vediamo se la strada è più semplice è quella che dicevo oppure faccio subito la differenza forse faccio subito la differenza n meno K poi faccio n meno K eh potrei fare anche così facciamo n meno no vediamo qual è la strada più giusta pronto troppa più uno quindi ho semplicemente applicato la la la proprietà che è n coefficiente binomiale uguale allo stesso che ha lo stesso numeratore ma è la differenza dei due e dei due qui viene meno K uno in una Lenin K però non ho figli non ho cosi non risolvo niente allora facciamo invece la negazione no vediamo la negazione cosi mando via mando via il primo mando via questo menu a lei meno K quindi cosa faccio faccio meno enne Luca poi ci sono il termine così com'è meno capta Nino 1+1 e poi però devo moltiplicare è questo ho dunque minore n meno K -1 no però neanche così vediamo come ci sia proprio questo va bene ok questo va intanto io faccio un'altra volta lo faccio un'altra volta sì eh no perché la la relazione quella che stiamo considerando è questa andiamola a riprendere ora vorrei facessimo confusione ma una relazione che stiamo considerando dunque quindi si parla di numeri speciali abbiamo già visto e è questo ok quindi meno n su KM -1 ah ecco dove -1 alla K n più K quindi cambio in cambio il segno al numeratore ma aggiungo il denominatore e sottraggo uno e poi devo fare per -1 alla cappa quindi e in questo caso vediamo un po che cosa ho fatto e la io avevo in questi centri binomiale eh quindi ho cambiato il segno meno n più K -1 però questo non mi aiuta nemmeno questo non mi aiuta perché eh perché e non mi sa comunque andar via il come diventa un meno enne -2 no quindi allora c'è qualcosa cioè sono tutte trasformazioni corrette quelle che stiamo facendo però nessuna mi porta direttamente ad avere n su K dunque fatemi rivedere n sul campo che cosa posso fare e sennò facciamo al contrario allora facciamo così binomial abbiamo vediamo di ragionare al contrario binomiali di n su K e sicuramente è uguale al binomiale di n su n meno K va bene questo è un primo passaggio e quindi è anche uguale questo è anche uguale a che cosa al binomiale di meno n più n meno K -1 su n meno K per -1 alla n meno K va bene false binomia non volevo che tu mi dicessi falso o truck mettiamoci delle virgole sennò ok ho fatto ho cambiato il segno prima ho fatto questa trasformazione poi ho applicato la negazione quindi al posto di end ho scritto meno and cioe n meno K -1 su n meno K per -1 alla n meno K quindi ho meno K -1 su n meno K per -1 alla n meno K è questo esattamente il punto da cui siamo partiti mi torna si siamo siamo siamo andati noi siamo andati adesso da noi e avevamo il coefficiente noi dovevamo trovare coefficiente ETN meno K di 1-10 alla meno K -1 questo è e meno K -1 su n meno K meno K -1 sei meno K per -1 alla meno allora prima avevo sbagliato ah ecco ho scritto male avevo fatto sì sì sì sì ho sbagliato ho scritto male coefficiente iniziale quindi questo se avessi se fosse partita da questo poi qui semplicemente dovrei avrei dovuto fare la negazione quindi cappa più uno più n meno K su n meno KE questo fa sparire questo termine qui e poi però eh non mi torna ah -1 sopra certo grazie -1 e che poi visto ovviamente nemmeno tanto si si scusate eh si ho fatto confusione io col coefficiente binomiale iniziale va bene e per quello non tornava eh va bene quindi questo si può togliere non c'entra niente e quindi vabbè niente quindi questo è il il un modo diverso di vedere il triangolo di Pascal quindi lo possiamo vedere come il coefficiente di questa di questo prodotto ovvero come il come un elemento di questa di questo riordinarle va bene Un altro esempio un altro esempio che è però questo è un pochino più complesso però di questo ve l'avevo vi ho riportato anche tutti i passaggi quindi non si sbaglia un altro esempio di triangolo eh che ha a che fare con funzioni che abbiamo visto e rivisto diverse volte in questo corso è quello che si chiama il triangolo di catara cioè un triangolo in cui ho la di che è la funzione generatrice di catara EH è la stessa funzione però vedete siccome voglio voglio che h di zero sia zero moltiplicato per chi in modo che che questa funzione e che la funzione la di in zero valga zero perché invece la funzione generatrice di catalan in zero vale uno gli alberi e gli alberi con gli alberi con zero nodi ce ne ce n'è uno che è da albero vuoto no quindi qual è il triangolo che definisce questa coppia di funzioni allora predefinizione devo estrarre coefficiente da punto di PHP alla KE qui cosa succede ora qui e stato riportato qui c'è già un passaggio fatto quando vado a fare questo prodotto al questore DT metterò questa funzione al posto di h metterò questa funzione quindi le cosa faccio il t che si trova denominatore del del t l'ho l'ho portato dentro è diventato un TN più uno a quel punto vedete la la diela sono praticamente uguali differiscono soltanto per questo Tier denominatore per cui alla fine mi rimane semplicemente uno meno la radice di 1-4 t diviso due alla K più uno va bene questa è l'estrazione che devo fare e ora ora il risultato è questo quello che è questo è questa espressione che vedrete ma non è un risultato a cui si arriva in in maniera banale anche se abbiamo sbagliato al passaggio di prima che passava applicare la regola di Lucio qui che è necessario fare qualche passaggio in più però ecco intanto se è chiaro che io questi triangoli riesco a costruire facilmente no se ho anche un sistema di calcolo simbolico vedete TNDTH di chi è la K chi ha chi ha la K che cosa fa entrati e la funzione generatrice della colonna campesina quindi quando cappa e zero qui ho di t quando KE uno qui ho la funzione di t per h di t quando K due ho la funzione di t per HT al quadrato vedete è il fatto che che qui non ci sia nulla cioè che ci siano degli zeri dipende dal fatto appunto che la funzione h invero ehm in zero vale zero per cui quando vado ad allevarla AA alla campesina e questo ha l'effetto rifarmi tutte le volte

Empoli sto un passaggio mamma vabbè non gradisco quindi abbiamo detto allora io devo estrarre il coefficiente n meno K poi c'ho 1 1 meno K -1 quindi avrei prima istanza avrei un binomial di n meno K su meno K -1 va bene questo per poi avrei per 1-1 alla n meno K questo è il punto di partenza va bene cosa faccio allora ehm allora vediamo se la strada è più semplice è quella che dicevo oppure faccio subito la differenza forse faccio subito la differenza eh meno K poi faccio n meno K eh potrei fare anche così facciamo n meno mappa vediamo qual è la strada più giusta K quindi ho semplicemente applicato la proprietà che è n coefficiente binomiale uguale allo stesso che ha lo stesso numeratore ma è la differenza di due e dei due quindi meno K sei n più 1-1 n meno K però non ho così non ho cosi non risolvo niente allora facciamo invece la negazione no vediamo la negazione cosi mando via mando via il primo mando via questo menu a lei nemmeno K quindi cosa faccio faccio meno enne giuncata poi ci sono il termine così com'è meno capt -1+1 e poi però devo moltiplicare per questo ho dunque minore n meno K -1 no però neanche così vediamo come ci sia proprio questo va bene questo va intanto io faccio un'altra volta lo faccio un'altra volta sì ehm no perché la la relazione quella che stiamo considerando è questa andiamola a riprendere ora vorrei facessimo confusione ma una relazione che stiamo considerando dunque quindi si parla di numeri speciali abbiamo già visto e è questa ok quindi meno n su K -1 ah ecco dove -1 alla K n più K quindi cambio il cambio il segno al numeratore ma aggiungo il denominatore e sottraggo uno e poi devo fare per -1 alla cappa quindi e in questo caso vediamo un po che cosa ho fatto allora io avevo in questi ciente binomiale ehm quindi ho cambiato il segno meno n più K -1 però questo non mi aiuta nemmeno questo non mi aiuta perché eh perché e non mi sa comunque andar via il come diventa un meno enne -2 no quindi allora c'è qualcosa cioè sono tutte trasformazioni corrette quelle che stiamo facendo però nessuna mi porta direttamente ad avere n su K dunque fatemi rivedere e nel suo campo che cosa posso fare e sennò facciamo al contrario allora facciamo così binomial parliamo vediamo di ragionare al contrario binomiali di n su K e sicuramente è uguale al binomiale di n su n meno K va bene questo è un primo passaggio e quindi è anche uguale questo è anche uguale a che cosa al bambino miale di meno n più n meno K -1 su n meno K per -1 alla n meno K va bene binomio non volevo che tu mi dicessi falso o trucco diamoci delle virgole sennò ok ho fatto ho cambiato il segno prima ho fatto questa trasformazione poi ho applicato la negazioni quindi al posto di hand ho scritto meno n cioè meno K -1 cioè n meno K per -1 alla NK quindi ho meno K -1 su n meno K per -1 alla n meno KE questo è esattamente il punto da cui siamo partiti mi torna sì siamo siamo siamo andati noi o siamo andati adesso da noi avevamo i coefficienti noi dovevamo trovare il coefficiente ETN meno K di 1-10 alla meno K -1 questo è e meno K -1 su n meno K meno K -1 sei meno K per -1 leno allora prima avevo sbagliato questi ecco che cosa avevo fatto eccolo sì sì sì sì ho sbagliato ho scritto male coefficiente iniziale quindi questo se avessi se fossi partita da questo poi qui semplicemente dovrei avere avuto fare la negazione quindi cappa più uno più n meno K su n meno KE questo fa sparire questo termine qui e poi però non mi torna ah -1 sopra certo grazie -1 e c'è poi visto ovviamente nemmeno tanto si si scusate eh si ho fatto confusione io col coefficiente binomiale iniziale va bene e per quello non tornava va bene quindi questo si può togliere non c'entra niente e quindi vabbè niente quindi questo è il il un modo diverso di vedere il triangolo di toscano quindi lo possiamo vedere come il coefficiente K di questa di questo prodotto ovvero come il come un elemento di questa di questo ricordano di va bene Un altro esempio un altro esempio che però questo è un pochino più complesso però di questo ve l'avevo riportato anche tutti i passaggi non si sbaglia un altro esempio di triangolo eh che ha a che fare con funzioni che abbiamo visto e rivisto diverse volte in questo corso è quello che si chiama il triangolo di catalan cioè un triangolo in cui ho la di che è la funzione generatrice di cata EH è la stessa funzione però vedete siccome voglio voglio che h di zero sia zero moltiplicato per chi in modo che che questa funzione e che la funzione la d in zero valga zero perché invece la funzione generatrice di catalan in zero vale uno gli alberi e gli alberi con gli alberi con zero nodi ce ne ce n'è e uno che è da albero mozzo no quindi qual è il triangolo che definisce questa coppia di funzioni allora predefinizione devo estrarre il coefficiente da PHP alla KE qui cosa succede ora qui è stato riportato qui c'è già un passaggio fatto quando vado a fare questo prodotto al questore di t metterò questa funzione al posto di h metterò questa funzione quindi che cosa faccio il t che si trova denominatore del del t lo l'ho portato dentro è diventato un TN più uno a quel punto vedete la la diela sono praticamente uguali differiscono soltanto per questo Tier denominatore per cui alla fine mi rimane semplicemente uno meno la radice di 1-4 t diviso due alla K più uno va bene questo è l'estrazione che devo fare e ora ora il risultato è questo quello che è questo e queste espressioni che vedete ma non è un risultato a cui si arriva in siamo in maniera banale anche se abbiamo sbagliato al passaggio di prima e bastava applicare la regola è tenuto qui è necessario fare qualche passaggio in più però ecco intanto se è chiaro che io questi triangoli li riesco a costruire facilmente no se ho anche un sistema di calcolo simbolico vedete TNDTH alla KDTH di alla K che cosa fa in pratica è la funzione generatrice della colonna campesina quindi quando cappa e zero qui ODT quando cappa e uno qui ho la funzione di t per h di quando cappe due ho la funzione di t per HT al quadrato vedete è il fatto che che qui non ci sia nulla cioè che ci siano degli zeri dipende dal fatto appunto che la funzione h invero ehm invero vale zero per cui quando vado a trovarla AA alla campesina e questo ha l'effetto di farmi tutte le volte scendere di una posizione la i coefficienti diversi da zero della funzione va bene e ecco vi volevo farvi osservare ora poi dimostriamo come mai vale questa vale questa relazione è che così come nel triangolo di Pascal ogni elemento è dato dalla somma dei primi due nella riga precedente anche in questo triangolo di catalan esiste 1 1 cosa succede qualcosa di simile anche se la la la regola di costruzione è un pochino diversa vedete questo 5 ad esempio è dato da 2+2 1 oppure questo 9 dato da 5+3+1 oppure 14 è dato da 5+5+3 +1 42 e dato da 14+14 fa 28 28+9+1 fa 10 i 38 42 cioè quello che si dimostra e che in questo triangolo ogni elemento è dato dalla somma di tutti gli elementi che si trovano nella riga precedente a partire da quello dalla colonna precedente no quindi vedete 14 e 9 quattro +1 28 e 14+9+4+1 cioè ora ora oggi è giusto un'introduzione ma quello che si vede è che questi triangoli di riordan queste sequenze particolari hanno delle caratteristiche sono simili a quelli di Pascal quindi si costruiscono via per colonna a partire appunto da da questa funzione generatrice di per HP alla cappa ma anche per rivia perché esiste sempre la la possibilità di costruirli in questo modo in questo modo particolare e per quanto riguarda il coefficiente si può come si fa a trovarlo allora il coefficiente si trova con si può applicare il teorema di inversione di lagrange anche in questo caso no come si fa vi ricordo che la funzione generatrice dei numeri di cacata soddisfa questa equazione che abbiamo visto e rivisto non so quante volte che si riduce direttamente dal metodo simbolico vedendo pensando agli alberi no quindi un albero e un albero vuoto oppure un nodo interno connesso ha due alberi binari quindi questa è l'equazione che si trova subito questa vi ricordo è la trasformazione che abbiamo fatto nel caso degli alberi e sari ma in particolare anche per essere uguale a due va bene per poter applicare il teorema di inversione di lagrange no vi ricordate noi abbiamo portato l'uno a sinistra e appunto trasformando appunto il chiamando appunto additivo uguale ACP -1 abbiamo trasformato queste equazioni in questa in modo tale che pi insomma fossimo nelle condizioni di applicare la regola di Newton ora in questo caso in particolare e quindi fa fatta questa osservazione è è chiaro che io posso applicare la regola di Newton non tanto per estrarre il coefficiente di città ormai lo conosciamo bene ma vado ad estrarre il coefficiente di additivi elevato alla m no perché la la regola di Newton mi permette anche di estrarre coefficienti non semplicemente dalla funzione a che è coinvolta ma da una sua potenza qualsiasi e quindi vedete in questo caso la la regola di Newton mi dice che siccome qui la la funzione si è in gioco è uno tutti al quadrato no ABTET per e fi Bird t dove fi e uno tutti al quadrato questo è l'esempio che abbiamo fatto già più di una volta con con lagrange e quindi applicando il teorema mi viene ms Ue n TN meno m uno più t alla due n questo abbiamo applicato abbiamo applicato la proprietà mi ricordo della eccolo qua se andiamo a riprendere no non è questo ma estrazione dei coefficienti allora andiamo a vedere eccolo qua no vi vi ricordate abbiamo visto il teorema tre formulazioni questa è quella base e ora sto applicando la seconda formulazione cioè sto estraendo il coefficiente di abiti alla m dove ha ha è praticamente la funzione generatrice dei numeri di catrame almeno del primo elemento e quindi ho applicato il teorema e in questo caso poi la l'estrazione è molto semplice perché vedete ho il binomio uno più t alla due NE quindi qui ho semplicemente due n su n meno m che moltiplico per m su n questo è è il coefficiente tiene dici DT e scusate via di chi alla alla m eh ora siccome nelle nell'esempio che stiamo considerando io non ho esattamente di chi ma ho vedete il Chia di nominatore non ce l'ho quindi ho una qualcosa di leggermente diverso però mi mi posso ricondurre facilmente a quelle estrazione perché se io voglio estrarre questi centenni più uno da questa espressione eh io questa espressione qui la posso scrivere come t per CT no perché semplicemente differisce da c per il fatto appunto che non c'è il TA denominatore quindi applicando le proprietà dell'operatore ti posso portare qui dentro e quindi portare

Dentro vuol dire portare dentro un t alla meno K un t alla K più uno che quindi diventa n più uno meno K -1 quindi vari semplicemente un n meno K per ci dici alla K più uno dopodiché l'esempio il passo successivo è semplicemente quello di applicare la la l'estrazione che ho fatto al passo precedente no quindi è in cui appunto m questa volta K più uno ENEE ENE dunque perché due anni meno K no anche qui c'ho un qualcosa che non va questo sarebbe animatore ci avrei un n semplicemente un n meno K qui c'è un n meno No anche qui c'ho un qualcosa che non va questo sarebbe animatore ci avrei un n semplicemente un n meno K qui c'è un n meno K è sopra e sopra è giusto che mi venga dunque devo fare due due e quindi sarebbe due n meno K e poi a denominatore invece ho la differenza la differenza tra NE EM che è n meno K no qui allora scusate questo passaggio qui non c'entra niente quindi questo passaggio qui è da rivedere va bene anche questo ora poi vi metto il lucido corretto però l'idea qual è l'idea è che io devo per estrarre questo coefficiente ok io devo usare questa non posso usare questa e questa formula qua vediamo un po se si fa in cui al posto di m devo mettere K più uno e al posto di n devo mettere n meno K va bene quindi ehm vediamo se la scrivo giusta questa volta quindi abbiamo detto se non vedo quindi devo scrivere m abbiamo detto che K tappa più uno poi i vido per enne che in questo caso è n meno KE poi devo moltiplicare per il binomiale ti e due enne che sarebbe due perenne -2 per K e poi ci devo mettere la differenza tra n EM che e quindi è n meno K meno cappa -1 vediamo un po se ho scritto bene ok eh -2 tappa n ok questo e questi ciente che dovrei considerare è che devo poi ora trasformare in modo da dimostrare che è un cappa più uno su n più uno per due n meno K su n meno K allora qui probabilmente cosa conviene fare eh divenne -2 K ti amo così se faccio la differenza se faccio la differenza perché app quindi chi dovrei fare due penne -2 per K meno tutta questa roba qua vediamo un po due n meno K su n più uno dunque intanto devo trovare dunque devo trovare come espressione eh K +1 2 n meno K su n meno K più non so n più uno Ciao più uno viso inizio n più uno e poi se detto per il binomial di di due n meno K su n meno K quindi o da una parte pesa quindi devo fare una qualche trasformazione che mi permetta di di fare la vabbè qui qui si tratta insomma come al solito magari le trasformazioni tra coefficienti puniamoli che conosciamo bene eh vabbè facciamo così tanto da qui è inutile farlo fare i conti senza rischiando rischiando di confondersi allora l'idea è comunque che applicando il teorema di inversione di di lagrange alla a partire dalla funzione ECT che è la funzione generatrice dei numeri di catalan sia questo risultato dopodiché questo risultato lo devo appunto applicare a questo caso particolare qui sono esattamente nella stessa situazione con degli indici diversi quindi è chiaro che si tratta di manipolare di coefficienti binomiali per far tornare in risultato no quindi ora poi quest'ora quello ve lo correggo detto il risultato devi passaggio corretto e però ecco intanto volevo appunto introdurvi questo questo concetto cioè queste sequenze che ritengono dipendono da due variabili e che sono definite da coppie di funzioni generatrici va bene coppie funzioni generatrici e in questi triangoli hanno delle caratteristiche che sono molto simili a quelle del triangolo di di Pascal per cui un po insomma si riescono a studiare tre e va bene quindi poi insomma domani continuiamo a parlarne in maniera un pochino più approfondita e insomma ci sono tante applicazioni di queste di queste di queste sequenze si trovano poi in tanti in tanti contesti va bene allora intanto per oggi mi fermo qui ok quindi poi mi metterò a disposizione questi e anche questi lucidi che ancora non non ci sono EE questa però ecco l'ultima parte del corso quindi insomma vorrei approfondire questi questi questi tipi di di sequenze quindi insomma ora non so quante lezioni ancora ci vorranno ora domani non basta insomma tra l'altro eh no vabbè no la la lezione di mercoledì non riguarda non riguarda Asl ma riguarda soltanto di MO che si perde perché è festa va bene quindi ehm quindi insomma anche di m ora non avevo calcolato questa questa cosa quindi sicuramente la settimana dopo abbiamo le

Ciao a tutti e iniziamo a parlare eh di e di riordinare dove eravamo dove eravamo rimasti quindi condivido schermo e riprendiamo i lucidi allora e quindi è dunque 8 oggi è anche la prossima volta di sicuro parleremo di ehm una tipologia di funzioni generatrici viviate sono state molto loro studiate in letteratura e chi di cui abbiamo già iniziato ieri a dire qualcosa e oggi però insomma riprendiamo un po il discorso allora quindi si tratta di eyes eh appunto sequenze che sono definite da due indici che poi appunto danno origine a delle funzioni poi bivariata e che sono definite da una coppia di funzioni di EH e abbiamo detto che la funzione di e alla caratteristica di essere diversa da zero in zero mentre quello che si richiede e che scusate la funzione h in 0 6 a zero generalmente le altre ipotesi che si fa su app e che h primo di zero se è diverso da zero questo vuol dire che nella la sequenza che rappresenta la funzione h ah h zero il primo termine zero mette h uno è diverso da zero in realtà queste questi questi oggetti possono essere definiti anche se a primo di zero è uguale a zero però in quel caso la sequenza perde questa forma caratteristica che ora andiamo AA vedere e quindi questa coppia di funzioni definisce 1 1 in effetti una matrice infinita una matrice infinita quindi lo dipende da due indici NKE questo è l'elemento generico della di questa matrice lo si trova andando ad estrarre il coefficiente ennesimo della funzione di t per HT alla K quindi al variare di K ovviame pensi a una funzione diversa e quello che si va a fare in pratica e prendere il coefficiente ennesimo quindi in pratica fissato K rappresenta l'indice della colonna no della matrice quando andiamo a rappresentare questi valori quindi fissato capo in pratica di t per accaduti alla cappa presenta la funzione generatrice della cappa esima colonna di questa matrice infinita e quindi quello che si fa di andare a prendere i gonfienti di questa di questa di questa funzione generatrice al variare di n per popolare poi la matrice e abbiamo detto appunto che l'esempio più noto di matrice di questo tipo appunto matrice di riordan ore appunto non della persona che le ha definite perché non è stato riordan a introdurre questo concetto ma altri ricercatori è appunto shapiro anche sprugnoli che è stato anche docente presso il corso di laurea di informatica insomma fino a qualche anno fa e si si chiamano ricordano perché John riordan è stato un personaggio che è un ricercatore che si è occupato a lungo di problemi di combinatoria in particolare di somme del calcolo di somme come vedremo poi gli strumenti queste matrici infinite se permettono anche di calcolare delle somme combinatorie in modo in modo agevole per cui insomma in onore di questo di questo di questo ricercatore il nome ricorda narry allora quindi la la il più famoso è il triangolo di Pascal quindi l'abbiamo già visto ieri quindi la funzione di TE 1/1 meno TE la funzione HTE diviso uno meno ti va bene e abbiamo già visto ieri qui ho riportato corretto comunque aggiunto qualche passaggio così insomma non non si si rischia di sbagliare e per per dimostrare che in effetti se si va ad estrarre il coefficiente di chi h di chi alla tappa con queste con questa coppia di funzioni si trovo esattamente il coefficiente binomiale n su K quindi come vedete mettendo questi elementi in una in una in una matrice difatti si si ottiene una matrice triangolare inferiore perché il triangolare inferiore perché vedete in questo caso no quando e è chiaro che che che che a parte vabbè a parte il valore che conosciamo bene messo K sappiamo che ha questa caratteristica di valere zero per per valori superiori nel triangolo però in generale dato che h di p vale 0 0 eh questo ci garantisce questo è è come se della funzione h ci fosse un t che moltiplica no per cui quando cappa risulta maggiore di n questo coefficiente è sicuramente uguale a zero va bene che questo ci dà la garanzia Che la la la la gli questa matrice si è triangolare inferiore è data proprio dalla struttura stessa eh dalla definizione di che abbiamo dato allora poi ieri avevamo iniziato a vedere anche un altro esempio il triangolo di catalan che è costruito a partire da un'altra coppia di funzioni e chi corrispondono appunto alla alla alla funzione generatrice dei numeri Licata che abbiamo visto in tanti contesti dunque un'osservazione importante ora vedete sia in questo esempio che nel precedente AA parte il fattore tipi di differenza poi abbiamo la stessa funzione va bene qui sia in questo esempio che in quello successivo questo ovviamente è un caso particolare perché la definizione che abbiamo dato vale per servizi che pagano queste condizioni però poi spesso capita di avere a che fare con delle matrici che hanno la caratteristica appunto di avere le due funzioni uguali almeno di questo fattore di essa sono spesso quelle più studiate perché poi appunto rappresentano delle quantità che sono che hanno che che sono note in letteratura e che insomma sono state studiate eh perché contano perché rappresentano di fatto dei valori reali allora ieri eravamo ci eravamo fermati su queste estrazione sull'estrazione di questo coefficiente che non è proprio banale eh cioè se si se si prende come se si prendono come DH queste due funzioni per definizione il DNK è dato dal coefficiente RN più uno della funzione uno meno la radice di 1-4 kg mezzo due la cappa più uno no perché sostituendo al posto di EH queste due espressioni il chip che si trova sotto lo porterò dentro l'operatore e poi quindi avrò una potenza K più uno della funzione che rimane ora trovare e questo è il risultato di questa estrazione ma trovare questa estrazione non è proprio banale EE ieri nel luci dove avevo fatto vedere ieri in realtà non era una questione di coefficienti mini in realtà c'era proprio il avevo semplificato un po troppo le la la l'esercizio in realtà è un pochino più complesso ora ve lo faccio vedere allora questo intanto è il triangolo che viene fuori va bene il triangolo che viene fuori vedete che ha nella prima colonna che efficienti coefficienti i numeri di catalan quindi 112514 anche nella seconda colonna ci sono gli stessi elementi perché quando si fa questo prodotto. Magicamente si ritrova la stessa funzione poi via via però che le cose vanno avanti ovviamente i numeri i numeri cambiano come vi facevo osservare già ieri questi questi array hanno una caratteristica abbastanza particolare cioè assomiglia hanno delle caratteristiche molto simili a quelle del triangolo di Pascal quindi così come nel triangolo di Pascal ogni elemento è dato dalla somma di al di due elementi nella riga precedente quindi 10 è dato dalla somma di 4+6 una relazione di questo tipo era poi vedremo quindi decido qual è la relazione vale per tutti questi queste matrici e nel caso del del triangolo e di catalan e quello che si vede è che ogni elemento lo si può trovare facendo la somma di tutti quelli che si trovano nella riga precedente a partire dalla colonna precedente no quindi 28 è dato dalla somma di 14+9+4+1 vedremo che questo non è casuale è una caratteristica di queste di queste matrici allora come si fa a trovare questo coefficiente e allora c'entra la formula di inversione di lagrange però come vi avevo presentato ieri il problema c'era c'era 1 1 in precisione quello che vi ho detto allora intanto eh beh sicuramente è un problema e non è difficile capire che c'è di mezzo un'inversione di lagrange perché qui ci abbiamo una un'estrazione di un coefficiente elevato alla cappa più uno e così insomma senza l'unica cosa insomma che viene in mente di fare ecco non ci sono grandi altre alternative ora d'altra parte la la funzione generatrice dei numeri di Licata la è un caso particolare della funzione che abbiamo trovato nel caso degli alberi e sari e in quel caso lo abbiamo risolto proprio con la grande quindi insomma qualche e che questa sia la strada da percorrere abbastanza evidente allora per la funzione CT avevamo già visto ieri vale sappiamo bene che vale questa relazione ci dice è uguale a uno su chi al quadrato e vabbè in questo caso sappiamo anche qual è la la soluzione vi ricordo che nel caso quello che abbiamo fatto per studiare il problema con con S invece che con due di di ricavare diritto di fare riferimento alla funzione AD che si ottiene facendo la differenza tra CTE uno eh quindi abbiamo invece di studiare questa funzione quella funzione di così scritta l'equazione prescritta così l'abbiamo trasformata in funzione di una vena della funzione che non che non è altro che CP -1 va bene x scrivendole in questa forma e praticamente su si considera fidi p uguale a uno più t al quadrato chi si riconosce che siamo proprio nelle ipotesi del teorema di lagrange ora ieri quello che vi avevo mostrato in realtà era l'applicazione del teorema di lagrange per trovare il coefficiente TN di AT alla m che è in realtà e così è un po troppo la avevo un po semplificato il problema perché in realtà mentre mentre la differenza tra c di TE additi è minima perché differiscono soltanto in uno per cui studiare come si è fatto nel caso degli alberi studiare AO studiare ci non fa differenza e siccome la funzione di lui io voglio estrarre coefficiente e ci DTE le è una potenza di di di di come ora poi vedremo beh non è la stessa cosa estrarre il coefficiente da qui alla EAAA sarà una potenza di AO da una potenza di c non so se la differenza se se è chiara quello la la differenza che voglio evidenziare e per cui in realtà il risultato che poi di cui abbiamo bisogno per risolvere questo problema è quello più generale possibile che abbiamo visto ovvero per per risolvere queste situazioni useremo la forma di inversione di lagrange quella più generale cioè l'estrazione in cui si ha una la composizioni di una funzione psico nadh che soddisfa un’equazione del tipo precedente allora vediamo cosa c’entra tutto questo col problema che vogliamo affrontare noi allora quindi noi dobbiamo dobbiamo trovare il coefficiente di questa funzione allora eh cosa ho fatto in questo passaggio che avevo fatto anche ieri quello era era corretto e questo lo posso scrivere la funzione che si trova dentro la e non è altro che chi percepiti per per predefinizione quindi t che si trova questo ti elevato alla cappa più lo posso portare dentro l'operatore e quindi si tratta di estrarre coefficienti n meno K di cibi chi ha la cappa più uno EE questo lo avevamo detto anche ieri però questa estrazione non è equivalente all’estrazione del coefficiente n meno K di abiti alla K più uno perché tra CEA una differenza minima c'è e quando faccio l'elevamento a potenza questa questa differenza si si amplifica e quindi l’estrazione che io devo fare in realtà e l'ho riportata con il passaggio successivo vedete invece di scrivere CT su come CTE uno più a di chi e ho riscritto esattamente questa e questa è un'uguaglianza su questo non c'è non ci sono dubbi ecco a questo punto vedete che ho sta estrarre un coefficiente e non da una potenza di a ma da una funzione in cui compare ah cioè sono esattamente in questa situazione in cui la funzione Psi la funzione Psi ve l’ho riportata qua sotto non è altro che uno più t elevato alla K più uno quando faccio la composizione della funzione si con additivo tengo proprio questo questo binomio uno più arditi alla carta più uno va bene quindi si tratta di applicare il teorema di inversione di lagrange con questa scelta di Psi e di e quindi applicando il teorema eh che cosa succede ovviamente qui devo fare attenzione che il i la potenza non ho un tiene Monti EN meno KE poi appunto la funzione si è quella che ho quindi cosa devo fare devo fare intanto appunto vivido perenne meno K poi vado a estrarre insufficienti n meno K -1 poi devo fare la derivata della funzione Psi e quindi vedete quando faccio la derivata questo mi introduce un tappo a più uno che ho portato fuori poi ho 1 1 tutti alla tappa il quale cosa mi rimane e applicando questo ma mi rimane un film di chi alla n ma n in questo caso è il nostro caso n meno K quindi ho 1 1 più t elevato alla due perenni meno tappa bene e quindi questo è il passaggio questo se volete il passaggio più più delicato se si parte direttamente da abiti alla K più uno eh si ottiene un risultato che non è quello che che che corretto perché si fa manca questa correzione qui che fa la differenza EE quindi quando quando si fa questa questa operazione per per fortuna vedete questa è una situazione in cui la derivata prima della Psi e sono praticamente la stessa funzione almeno del hanno la stessa base per cui poi avresti le le metto insieme facilmente quindi bene si tratta di strada il coefficiente da uno più t alla due enne meno alta eh questo è facile perché a questo punto parte applicare la regola di Newton quindi avrò due anni meno K su Andy meno Kappa -1 e poi c’ho un ultimo passaggio eh che vabbè qui non ho riportato come al solito qui cosa si farà se si scrive questo questi centri binomiale come un rapporto di fattoriali è praticamente la n meno K -1 che si trova sotto lo metto insieme con n meno K che quindi mi diventerà un n meno K fattoriale quando si fa la differenza fra questi due cosa ottengo tengo due n meno K meno n più K più uno quindi mi rimane un n più uno quindi cosa faccio un n più uno lo porto fuori l’altro n e quello che mi serve per poter scrivere poi questo che ficiente menomale no se vi faccio adesso la differenza di due n meno K su n meno K la differenza è proprio è proprio n no quindi n fattoriale ha denominatore cioè mi serve aver portato fuori n più uno per poter scrivere poi il minerale in questa forma va bene quindi questo rappresenta il generico elemento del del triangolo che ottengo appunto a partire da questa da questa coppia di funzioni è bellissimo e vedete insomma l’applicazione della dell’inversione di lagrange non proprio non proprio banale allora per quanto riguarda la funzione generatrice bivariata allora questa ha un di di una di una della sequenza di NK questa può essere espressa in modo piuttosto semplice perché la funzione bivariata è data appunto dalla somma dei coefficienti di NK che vada a pesare con chi alla n un vudoppio alla K e faccio variare poi NK in tutti i modi possibili va bene e come abbiamo detto quando abbiamo appunto introdotto le funzioni generatrici variate questa somma la posso anche scrivere come una doppia sommatoria no una volta sommo rispetto AKE sommo rispetto ad n e quindi io ho messo cap fuori n dentro perché e se considero la somma rispetto ad n questa somma di enpap di Allen che cosa mi rappresenta e ho fissato mi rappresenta la colonna e della della matrice per cui per definizione io so che che la colonna del del riordan array corrisponde AB chi per di qui alla cappa cioè quando vado a fare questa non è altro che la funzione generatrice della colonna cappe esima del denaro ovvero di tutto EHP alla tappa a questo punto è fatta perché il chi lo porto fuori HEW le posso mettere insieme e questa somma poi è la la la la per calcolare facilmente perché è una composizione no la composizione di ohm della funzione generatrice della sicurezza uno appunto micro che vada a comporre in un doppio HD quindi vedete che e questi e queste matrici hanno una funzione generatrice più variata particolare che è data appunto da DT diviso uno meno col doppio per HB quindi tutto quello che abbiamo detto sulle funzioni generatrici qui variate anche la possibilità di appunto di calcolare R costi legati a alla sequenza più variata a partire dalla funzione generatrice variata si può fare in generale per tutte queste funzioni allora la cosa interessante di queste e di queste matrici e che formano un gruppo ora ora un insomma quando avete fatto l'esame di algebra o matematica discreta non so bene in quale questi corsi forse i patinati rispetta e dovresti aver fatto queste cose che cosa vuol dire che formano un gruppo un gruppo intanto rispetto a quale operazione l'operazione che si considera è quella usuale di prodotto tra matrici va bene quindi se io considero due matrici che rappresentano queste due funzioni generatrici che variate e le vado a moltiplicare con con come si fa normalmente per da per matrici beh quello che si dimostra ora le dimostrazioni insomma non le non le vediamo insomma prendiamo a parte qualcuna quello che si dimostra che il risultato cioè la matrice che si ottiene è sempre una matrice di riosa va bene cioè e quindi questa è la prima caratteristica quindi se io uso faccio il prodotto fra matrici ottengo una matrice che è ancora una matrice di violenza esiste una matrice che rappresenta la matrice identità ovvero e esiste la coppia di funzioni che sono la funzione uno e la funzione t che corrispondono alla matrice identità quella che ha uno sulla diagonale e poi tutti zeri altrove e ed è possibile calcolare l’inverno la matrice inversa e questa matrice inversa continua ad essere un ricordati va bene e ora poi magari con me poi facciamo qualche prova così vi vi rendete vi rendete conto meglio ovviamente non solo si dimostra che il prodotto è un ricordo e che l’inverno riordinare ma si riesce anche a dimostrare a cosa a quale ricorda l’arrivo risponde questo questo prodotto vedete quando si fa il prodotto di due di queste due matrici si ottiene vedete se ho due riordinare il primo o la coppia di funzioni di EH nel secondo le ho chiamate AEB eh quando vado a fare il prodotto di queste delle sequenze ehm utilizzando il prodotto classico drammatici ottengo una matrice in cui la funzione e la prima funzione non è altro che il prodotto di di spera composto con archi con acque con h scusate è la seconda funzione non è altro che B composta con HP per quanto riguarda l’inversa quindi l’inversa l’inverso di un ricordo e un altro ricordano a Ray e vedete in questo caso è coinvolta quella che abbiamo studiato qualche lezione fa libertà composizionale eh entra in gioco l'inversa composizionale della funzione h cioè se h segnato rappresenta l'inversa composizionale di h che ricordo è quella serie per cui h composto a castegnato è uguale a pini in modo equivalente assegnato con questo h uguale.at ecco la la e la la funzione generatrice ee la la coppia di funzioni che generano questa sequenza bivariata è uno diviso di composto h segnato di chi e poi h segnato di Va bene ora non non non pretendo che insomma che che insomma che che non non voglio farvi anche tutte le dimostrazioni di queste di queste cose perché insomma va al di là degli scopi del corso però invece utilizzare questi strumenti che poi vedremo insomma che ci possono essere delle delle acquisizioni interessanti invece quello è è utile tra l’altro nella cartella che ho messo a disposizione sul sito del corso per i progetti ci sono anche alcuni articoli che fanno riferimento a queste a questa struttura quindi insomma eh al di là insomma il fatto che sono degli oggetti che si studiano bene con le funzioni generatrici potrebbe esserci anche qualcuno che magari gli li approfondisce nel progetto allora quindi ora qui ora vi faccio prima vedere vi faccio prima vedere le cose su lucido poi però vediamo anche con me perché magari con quello poi vi aiuterà anche a capire meglio di cosa si tratta allora in pratica qual è l’idea l’idea è che ad esempio prendiamo il triangolo di Pascal no quindi prendo il triangolo di Pascal che è definito da questa coppia di funzioni e proviamo ad esempio a fare il prodotto di piccolo se stesso quindi moltiplico per pi eh moltiplicare p per p abbiamo detto che equivale AA considerare un nuovo ricordano avrei in cui devo prendere il t del primo della prima matrice e poi fare la composizione della di a con HE poi la composizione di BE con h quindi è quello che è stato fatto in questo passaggio in cui pratica eh e ora ora qui magari ora con me poi poi lo vediamo lo vediamo meglio quindi vedete di è 1/1 meno t e poi che cosa state fatto quest’altro pezzo non è altro che la funzione eh 1/1 meno t e che vado a comporre con la funzione h e la stessa cosa poi ho fatto nella nella seconda funzione quando si va a fare queste semplificazioni e si ottiene vedete di nuovo una nuova coppia di funzioni che è uno diviso in questo caso uno meno obiettivi ET diviso 1-2 t questo rappresenta un nuovo ricordo che corrisponde proprio al prodotto delle due precedenti e per quanto riguarda l'inverso l'inverso invece quello appunto si trova Apri andando AAO per trovare il verso ho bisogno di trovare l’inversa composizionale va bene ora EE poi di sostituirla in uno su di e poi prendere l’inerzia composizione del stessa come come seconda funzione è quello che si trova e ora poi lo andiamo a verificare e che e questa coppia di funzioni e 1/1 più TET diviso uno più TEE quando si va a estrarre il coefficiente o che corrisponde a questa coppia di di funzioni in effetti trovi ma proprio è un risultato che forse è beh per qualcuno insomma il risultato abbastanza noto non so se e conoscete però insomma che l’inverso la matrice inversa del del triangolo di Pascal è praticamente EN su K per 1-1 alla n meno K moltiplicando ogni termine per questo -1 lei nemmeno K si ottiene proprio l’inversa di triangolo di Pascal e questo a partire da questa coppia di funzioni si trova in modo facile con la regola di news che qui basta estrarre appunto il coefficiente ti EN meno K scusate qui c’ho un tic che è che si è perso questo è un tiki per cui il passaggio dopo è un TN meno K è quello va bene di uno che t alla meno K -1 e poi qui c’è la solita estrazione quindi meno K -1 su n meno K e poi la solita regolina quella che cambia il segno quindi ho cambiato il segno al numeratore ho aggiunto il denominatore sottraggo uno e quindi però facendo questa operazione si introduce il -1 elevato alla va bene ora per rendere un pochino per per per aiutarvi a capire questi passaggi però forse la cosa più semplice è è vedere qualcosa con Nepal allora io qui ora poi magari questa ve la cioè vabbè questa di sicuro ve la ve la poi ve la passo aspettanto questo ci metto 1 2 conti così allora eh dunque io vi ho due due procedure che e di cui ho bisogno una in pratica che mi calcola e che mi calcola ehm date R due che questa è una procedura ina di di supporto che calcola in pratica il prodotto il prodotto di Foschi quindi il prodotto ohm la convoluzione praticamente di due di due sequenze ma la procedura poi più interessante forse è quella successiva che appunto se poi magari qualcuno dunque intanto fate eseguire questo pensato di eseguire questo la procedura forse più interessante e la successiva che ho chiamato Emmy odda che è la funzione la procedura che date cosa fa prende in input le due funzioni di h la variabile rispetto alla quale di due funzioni sono finite e poi le dimensioni della matrice il numero delle righe e il numero delle colonne e restituisce un triangolo di quella dimensione costruito a partire da dalla coppia di funzioni ora c'è da dire in questa versione in questa versione della che sto considerando ehm in realtà ho usato una vecchia una vecchia definizione di queste matrici che prevedeva eh in pratica ehm dunque torniamo un attimo indietro io ve lo spiego meglio qui in questa definizione abbiamo detto che h di zero uguale a zero ecco in una nelle prime nei primi lavori in cui si si parla di riordan array in realtà si utilizzava la funzione HD era in zero valeva era diversa da zero perché poi qui nella definizione di dna ci si metteva in evidenza un cioè nella definizione originale di queste matrici non si aveva h ma si aveva un tip per h con h che era con h di zero che era diverso da zero e ovviamente le due cose sono equivalenti adesso il t che è stato inglobato all'interno di h prima esplicito e questa procedura che vi faccio vedere utilizza questa vecchia nitrazione per cui qui quello che si aspetta in input che sia di che h in zero siano diverse da zero quindi il capo devo togliere il kit va bene però la modificarla e renderla poi eh coerente con quello che si sta dicendo ci vuole un attimo eh per ora non vorrei farlo adesso e poi magari c'è qualcosa che non torna lasciamo fare quindi questa è una procedura semplice e semplice che non sta altro in pratica e andare a fare degli sviluppi in serie della della funzione d poi ve la funzione di la moltiplica pirap fanno sviluppo in serie e trova la seconda colonna e così via facendo lo sviluppo in serie di t per HD alla K va a determinare le le colonne non è difficile va bene e poi ci sono anche altre funzioni che per questo per ora lasciamo fare questi lasciamoli stare per ora mi basta anche se forse posso farle eseguire così poi ok allora quindi facciamo subito un esempio vedete capirlo già fatto per dire no il caso di dei dei triangolo di Pascal infatti un po ingrandire questa finestra quindi allora emery Jordan è la il nome della procedura quindi devo passargli in input vedete le due funzioni di h in cui ad h ho tolto il t eh ti poi 10 e 10 quindi quando richiamo laci 12 così cambia l'esecuzione no 101 purtroppo quindi viene viene restituita questa matrice e che corrisponde appunto al più angolo di Pascal eh ora anche questa lasciamola fare per ora allora se io faccio a questo punto eh vedete all'inizio avevo richiamato il pacchetto with linear algebra nel pacchetto lineare poi ci sono delle funzioni che permettono appunto di fare moltiplicazioni tra matrici calcolare di inversa di una matrice quindi ad esempio posso usare questa funzione ma anche matix diplay che è la la la la funzione che che permette di seguire il prodotto tra due matrici ora questa funzione richiede che il risultato della che lavatrice a cui la applico sia di tipo Matrix ora qui ovviamente si può si può anzi non si può stare meglio ma insomma lasciamo fare non vorrei poi poi magari mi metto la funzione corretta si richiede richiede che che l'oggetto che è cioè che che che di cui si fa il prodotto siete tipo Matrix invece la procedura Mary arden restituisce un oggetto di tipo diverso per cui c'era una forzatura a renderlo di tipo martyrs quindi vedete se io faccio questo prodotto matrice per matrice ora qui è addirittura è un po troppo grande 246810 vedete che non me li fa vedere tutti e però insomma li ha calcolati non li mostra ma li ha calcolati è così come posso e posso andare a fare la matrice in testa eh tramite la funzione Matrix e inverse va bene quindi di nuovo questi vedete sono qui si vede chiaramente vedete che ottengo gli stessi valori questo si vede a occhio no che sono gli stessi numeri che sono presenti che il triangolo di Pascal però consegno con un segno che si alterna va bene è quello che abbiamo visto ora quello che volevo di cui volevo convincervi è che facendo quelle operazioni tra funzioni generatrici che abbiamo visto si ottiene esattamente la stessa cosa quindi e cosa voglio fare quello che voglio fare appunto e verificare che in effetti calcolare il prodotto di due matrici di ricorda corrisponde a considerare un nuovo ricordo array che è fatto così di PAVHBHD quindi e quindi cosa possiamo fare beh possiamo vabbè possiamo farlo in un caso particolare eh beh chiamiamolo facciamolo in generale vediamo se ci riesce di p: uguale quindi io mi definisco la la la d che del del prodotto in Coin modo e lo chiamo di uno h uno i due h due e mettiamoci anche il t la variabile e quello che e questa funzione mi restituisce abbiamo detto che è semplicemente di di uno per di due calcolato in h uno sta bene vi torna di uno per di due calcolata in h uno quindi e di 1 eh chi per di due calcolata in h uno di chi quindi in realtà in questo caso l'acca due potrei anche se non passarla perché tanto non viene non viene utilizzata e invece mi definisco una funzione atm p una funzione HP in generale che invece mi dà abbiamo detto ve lo ricordo mai quindi EB semplicemente quindi sarebbe la h due di h uno eh quindi h 2 accaduti account di tipo va bene allora vediamo se così gli basta allora a questo punto eh no facciamo così perché se gliela do così mi tocca definire delle funzioni semplicemente gli do di uno e di due calcolato in h ah no no no no no facciamo così subito è più semplice subs e ti guale vado h uno in di due così poi mi faccio meno problemi per per il calcolo per la per passare i parametri va bene è lo stesso qui posso fare un subs chi è uguale a te lo in h due quindi vabbè anche qui e che le quattro funzioni sono di troppo vabbè però così non ci si sbaglia eh quindi ad esempio vediamo se se funziona quindi se io passo e uno diviso 1-1 poi sì qui che come arriviamo insieme non ho sbagliato questa ho invio di nuovo 1/1 minuti e poi i dimme uno meno si qui in questa definizione sto usando la e poi ah magari ci mettiamo anche un simplify così glielo facciamo fare a lui facciamo anche qui bene ho trovato 1/1-2 di no quindi la funzione che avevamo che vi avevo fatto vedere su lucido se faccio la stessa cosa con h quindi luce metto HP ehm ah ecco eh si subs ok grazie quindi riceviamo vedete la stessa funzione col meno detti a questo punto cosa cosa possiamo fare naturalmente eh possiamo andare a mettere a costruirci la la matrice di riordan a partire da queste funzioni quello che ci aspettiamo di ritrovare lo stesso prodotto che avevamo trovato quindi se io adesso faccio m riordan di quindi 1/1-2 ti poi qui mettiamo 1/1-2 t poi abbiamo ti boh siamo 10 perché tanto un body nome di far vedere e quindi questa è la funzione e se andiamo a rivedere il prodotto come no questa funzione qui appunto questa funzione mi ricorda vi dicevo che è stato utilizzato la notazione la notazione ti inizia quella il t viene considerato dentro va bene quindi questa buone in input la funzione però insomma son d'accordo che forse andrebbe modificata quindi allora scusate tanto per la rimetto qua da 10 quindi tanto non me li fa vedere e questo mi fa solo confusione quindi questa era la matrice la matrice di yordan e questo era il prodotto e vedete ora vabbe 44181261 questi sono i valori e quello che abbiamo trovato adesso vedete 44181261 cioè la stessa è la stessa matrice a questo punto andiamo anche beh qui ricalcolo l'inversa e rifacciamo anche il calcolo della degli inversa questa volta tramite funzioni generatrici e vediamo che cosa viene fuori allora per calcolare l’inversa abbiamo detto ho bisogno di trovare l’inversa composizionale va bene questo è interessante forse perché è una cosa che non abbiamo neanche mai mai visto come faccio a trovarli in borsa composizionale allora e io HE la funzione Eh ti diviso uno meno t va bene quindi che cosa devo fare io devo eh qual è l'idea l'idea è che io per trovare se conosco h come faccio a trovare h segnato eh in pratica quello che si può fare in questi casi e di sostituire in h il posto di ci metto una variabile y e poi risolvere rispetto ad y che corrisponde alla h segnato allora vi faccio vedere l’esempio e cerco di chiarirebbero allora quindi se io ho e dunque h vorrei ora assegnarlo no ma ho dato nomi diversi quindi non ci dovrebbero essere problemi allora h nel nostro caso è la funzione ti diviso 1-3 va bene io voglio trovare l'inversa composizionale di h utilizzando maple e cosa so io so che ha già composto con ha segnato mi deve dare clip allora che cosa faccio io uso una variabile y perché ha segnato non so come invece di chiamarla a castegnato la chiamo y uguale.at cioè la funzione h segnato che io devo trovare e quella che trovo risolvendo questa equazione rispetto ad y quindi se io faccio solf di questa equazione rispetto ad y trovo vedete di diviso uno più t che è l'inversa composizionale di h sarà vero eh proviamo quello che devo fare e se faccio la composizione di h conti t diviso uno più t e vado a fare la composizione ovviamente devo semplificare vedete che ho team ma anche se faccio il contrario anche se trovo a questo.se definisco a castegnato chiamiamolo HS due punto uguale quindi a ti associo i diviso uno più t e quindi se faccio HS di EH di chi e semplifico perché tanto dovevo fare di sicuro vedete di nuovo sì quindi questa e questo è il modo ovviamente non è detto ci si riesca sempre eh perché dipende dal tipo di equazione che viene fuori però in questo caso è facile quindi l'inversa composizionale e ti dividono più t quindi da quel risultato che vi ho mostrato questo risultato cosa mi dice per trovare il riordan a Ray interesso io devo fare uno su di calcolato in h segnato e poi la seconda funzione EH segnato stesso ora se io prendo la funzione di t che non ho ma posso o facilmente eh definire di è la funzione eh che ti associa 1/1 meno utili quindi abbiamo detto che se io faccio di di HS di chi e poi questo qui lo faccio uno condiviso diviso non ti pratico no o anche qui facciamo una semplificazione quindi questa è la funzione beta di l’avevamo già trovata una divisione più te la funzione di del riordan array inverso per trovare la la seconda funzione è semplicemente l'inversa composizionale quindi chi diviso uno più team a questo punto cosa facciamo a questo punto facciamo andiamo a trovare il ricordano il re che corrisponde a questa coppia di funzioni quindi uno diviso uno più t, uno perché appunto qui ilti e non ci vuole poi abbiamo il, ti, 10,10 e qui vedete ora vera questo è un caso facile però qui ritroviamo esattamente la l'inversa va bene ovviamente se si fa questa operazione con delle coppe di funzioni meno ovvie se tengono dei risultati più più inaspettati tutti questi sono tutte cose abbastanza note però ecco la cosa la caratteristica bellina e che molto quando si moltiplicano matrici di questo tipo si ottiene sempre una matrice di questo tipo se la si inverte si ottiene una matrice di questo tipo e scusate l'ultima cosa che non vi ho fatto vedere ma vediamo dovrebbe funzionare lo stesso se io applico la ma questa funzione m yordan alla coppia 1 1 i 10 10 che quindi corrisponde al caso a quello che ho chiamato la matrice di identità e vedete viene fuori la matrice di identità va bene quindi la caratteristica di questi di questi oggetti appunto formano un gruppo formano un gruppo rispetto al prodotto e manipolando le funzioni generatrici con queste con queste regoline che vi ho dato appunto si riescono a costruire prodotti versi eccetera ok per quanto riguarda il triangolo di catalan qui la cosa è un pochino più è un pochino più delicata eh eh che i conti si fanno magari rifacciamo con me poi perché sennò farli a mano questi diventa un po insomma ci vuole un po più di di tempo è però ecco appunto facendo esattamente gli stessi passaggi si trova facendo il prodotto di questi dei del dedicata ad amgas all'anno ad esempio si trova questo riordinare strano vedete in cui vengono fuori queste queste funzioni generatrici con una doppia radice l'inversa invece è una funzione semplice l'inversa vedete questa è una caratteristica che poi a volte si può anche sfruttare cioè vere si parte da una coppia di funzioni no note ma comunque che contengono una radice quadrata e poi vi si arriva ad un inversa che invece è definita da delle da di una coppia di funzioni estremamente semplice allora forse anche in questo caso vale la pena di vederlo un pochino nel dettaglio quindi tanto abbiamo gli strumenti insomma si fa tutto in modo semplice quindi a questo punto io faccio darei una cosa chiamerei ci e anzi vi c è la funzione di catalan la di della funzione di catalan quindi è uno meno la radice quadrata di 1-4 t e diviso due chi e poi HC invece è la stessa cosa però senza il TA denominatore che ci metto un dire benissimo a questo punto intanto è per fare il prodotto uso quelle due funzioni vicine che avevo definito che avevo definito come lo chiamate non me lo ricordo più ah di PEHP allora quindi se io faccio eh Qui c’è stato un collega e un problema di collegamento di rete ora speriamo che si risolva quindi se faccio questa operazione vedete vabbè in realtà è andata meglio del previsto vedete viene fuori la funzione questa funzione che vi avevo indicato anche nei lucidi vedete che se vado a fare lo sviluppo in serie di questa funzione e nonostante le apparenze è comunque una funzione che ha coefficienti interi va bene e se faccio la stessa cosa con h e quindi h HP si trova la stessa funzione in questo caso con senza di te eh eh Eee quindi anche qui se è questo lo si verifica poi facilmente appunto se si va a costruire il riordan Ray e che corrisponde eh qui io proprio questa funzione copio due volte poi ci metto i 10 e 10 vedete questa è la matrice che corrisponde al prodotto ed è la stessa matrice che ottengo se faccio il prodotto della matrice di catalan che se stessa ecco la cosa magari che forse è più bellina vedere è l'inversa perché quella viene stranamente molto semplice no l'inversa della matrice eh abbiamo detto che coinvolge il calcolo dell’università composizionale questo è un altro esempio interessante allora qui abbiamo la h la h in questione quella che abbiamo chiamato HC quindi come faccio a trovare l'inversa composizionale eh devo fare K faccio una sostituzione in questo caso subs ti uguale ad y in HC e questo io voglio che sia uguale eh che sia uguale a te va bene quindi ho ho calcolato la funzione h in y e devo risolvere in pratica questa equazione rispetto ad y e vedete che non tante la la l’apparenza iniziale complicata poi invece qui la la le cose si semplificano molto quindi l’inversa composizionale della funzione h del dei di catalan ET -6 quadro va bene questo si può poi prendere facilmente che si vada a fare subs ti uguale.at meno di quadro in HT no cascini e poi semplifico perché difficilmente vede che qua dentro c'è un quadrato e quello fa sì che poi e tutto si semplifichi ah vabbè qui ovviamente quando faccio questa operazione ovviamente essendo un sistema di calcolo simbolico eh quando c’è la radice quadrata c’è una radice quadrata di un quadrato e lì ci può essere un segno più o meno no quindi lì bisogna intervenire e in questo caso il segno dovrebbe essere ehm che noi in tutto questo lavoro che si fa ricordiamo ricordiamoci sempre che lavoriamo in un intorno dell’origine comunque per cui il segno qui è e -1 cioè a me interessa che che la radice quadrata restituisca 1-2 t va bene e facendo questa operazione infatti viene un mezzo si semplifica con questo menu mezzo e poi vi mi rimane esattamente il termine fifa e ecco per quanto riguarda invece la funzione la funzione video inversa e che cosa devo prendere abbiamo detto che devo prendere devo fare R uno diviso vado a sostituire nella funzione sostituisco ti uguale a ti meno di elevato al quadrato dove in di c ok e qui di nuovo ci avrò anche qui probabilmente un doppio risultato perché questa radice quadrata lui ovviamente il sistema deve non sa se è uno o -2 o 2-1 e quando vado a fare questa semplificazione e ottengo sempre questa cosa del segno però in quel segno qui deve essere un meno questo è un meno EE quindi vedete mi viene 1-1+1 -2 pil il due il due fi se ne vanno e quindi mi rimane è 1 1 meno t come dovrebbe essere il risultato giusto uno meno TET meno t quadro quindi ecco però qui forse la cosa più interessante è se andiamo a trovare allora se facciamo Matrix com'è che si chiama quella è il prodotto l’abbiamo Matrix inverse allora Matrix invertirà copio allora questo Matrix inverse chiamiamola i il c inversa l’inversa di catalan quindi eh non so l’avevo assegnata qualcosa no forse no non l’avevo assegnata ah no non l’ho non l’ho addirittura non l’ho addirittura trovata ancora non l’ho trovata quindi andiamo subito a sparla allora quindi e quindi prima trovo ci CE Matrix e emme riordan scusate quindi la matrice di catan abbiamo di c beh in realtà ci metto di c perché per come vuole per come è fatta la procedura devo mettere due volte la stessa la funzione senza il t quindi qui mi calcolo il triangolo di catalan poi a questo punto posso andare ha direttamente a trovare l’inversa eh utilizzando le funzioni che abbiamo appena trovato quindi Emmy Jordan abbiamo detto uno meno si e poi di nuovo 1-3 perché il tiro tolgo ti 10 e 10 questa è l'inversa vedete questa inversa che ha questa forma strana a questo punto vediamo verifichiamo che facendo l'inversa utilizzando la funzione dell'algebra lineare ottengo esattamente la stessa funzione quindi abbiamo detto Matrix inverse di Matrix eh dici e qui vedete che si ritrova la stessa funzione vedete quindi eh non non non non non cioè a fare queste cose non tanto perché uno chiaro insomma e vi faccio vedere i risultati sono veri no facendo queste cose uno prende anche confidenza con e capisce meglio esattamente di cosa di cosa si tratta va bene quindi ecco l'altra cosa poi interessante di queste di queste matrici e il fatto appunto quello che abbiamo già osservato ovvero appunto il DTHD abbiamo visto che appunto definisce le colonne di questo di questo triangolo infinito e quindi a partire dalla funzione dalla dalla coppia di funzioni di h noi abbiamo il modo di costruire questo triangolo beh colonna eh però l'appunto la cosa interessante è che si riescono appunto a costruire anche per riga e non soltanto il triangolo di Pascal e di catal ma in generale e vabbè qui qui ho riportato la relazione che abbiamo visto in rivisto su sufficienti binomiali no questo questo grafico che rappresenta il fatto che ogni elemento che si trova in posizione n più uno K più uno nel triangolo lo posso trovare a partire dagli elementi che si trovano nella riga n quindi nella riga precedente nella colonna cappa e nella colonna K più uno bene e questa corrisponde alla ben nota relazione che abbiamo visto quando abbiamo studiato i coefficienti binomiali in generale ecco la cosa interessante è che si dimostra che se si ha un riordan array quindi qualsiasi sia la la matrice qualsiasi sia la coppia di h con le caratteristiche che abbiamo detto allora esiste sempre una sequenza una che si chiama a sequenza non ha niente a che vedere con la funzione anche abbiamo usato con le l del tema di lagrange per essere chiari però ecco esiste sempre una sequenza appunto che si chiama la sequenza per cui ogni elemento del triangolo si trova in posizione n più 1+1 io lo posso trovare sempre come la somma degli elementi che si trovano nella riga precedente a partire dalla colonna K moltiplicati però per questi coefficienti a zero a uno a due eccetera va bene e come si è e esiste anche una relazione simile però insomma meno meno interessante poi vi dico anche perché anche per gli elementi in particolare che si trovano nella prima colonna per questi elementi si parla di sequenza Z è chiaro che è una sequenza un po di vetra che ci pensate bene perché se mi trovo nella prima colonna non ho una colonna precedente quindi il comportamento degli elementi sulla prima colonna è un po diverso da quelli che si trovano nelle altre posizioni quindi esiste un'asta sequenza che definisce tutti gli elementi interni e una Zeta seguente che definisce quelli che si trovano invece nella prima colonna ecco la cosa interessante è che la funzione generatrice della sequenza a quella più interessante se volete soddisfa questa relazione che vedete in prima nel come prima formula cioè h di t uguale.at per a di HT cioè e la funzione generatrice della seguente è strettamente legata alla funzione h del riordinare e viceversa quindi se conosco h posso conoscere a risolvendo questa equazione e viceversa se conosco a riesco a trovare h la funzione invece generatrice della sequenza Z soddisfa una relazione un po più complessa che apparentemente più complessa in realtà ora poi appunto la sequenza veramente importante è la è la sequenza e comunque la sequenza soddisfa questa relazione che coinvolge sia la di nell'arca eh allora che cos'è la sequenza nel caso del triangolo di Pascal allora nel caso di triangolo di Pascal sappiamo benissimo che la sequenza è 1 1 cioè un elemento abbiamo detto è dato nel caso di Pascal no dalla somma dei due precedenti e quindi da quelli che si trovano in posizione di K di NK più uno con coefficienti uno i primi due e poi son tutti zero va bene mi torna qui io vado a prendere un elemento del triangolo e questo elemento è dato dalla somma di quelli che si trovano nella riga precedente però questi due li teso uno tutti gli altri è come se li pesasse zero questo mi mi dà origine questo rientra perfettamente in questa in questa definizione in questa definizione che stiamo vedendo ecco però e quindi nel caso di Pascal sappiamo già che la sequenza è 1 1 e poi tutti zeri però ecco di quello che di cui voglio convincervi è che se io non lo sapessi utilizzando questa relazione potrei comunque trovare quanto vale questa questa sequenza e vediamo eh cosa devo fare devo imporre che HD sia uguale.at per a di HD ok questa è la relazione che vale tra EH quindi si si risolve in modo simile a come si risolve a come si a quello che ho utilizzato per trovare l'inversa composizionale cioè cosa faccio chiamo y eh ti diviso uno meno si risolvo questa equazione rispetto a te quindi per esempio ho voglio ho scritto ho di moltiplicando tutto quanto per 1-10 e ho raccolto ok e quindi ho messo ho fatto il prodotto quindi portando poi a destra i termini in TE poi ho risolto rispetto a te quindi ti UY diviso uno più YA questo punto come faccio che cos'è ad YAY non è altro che eh praticamente qui vedete ho un key qui un key qui che si semplificano quindi come faccio a trovare ad y devo sostituire in 1/1 meno di il valore che ho trovato per te ritorna quindi il trucco per risolvere questi queste equazioni e questo lo chiamo y trovo ti in funzione di YE poi nel tic si trova da quell'altra parte sostituisco il DY che ho trovato facendo questa operazione quindi vedete qui sostituisco in 1/1 meno t al posto di tivo ad ammettere proprio il valore che ho trovato e qui si trova uno più y questo ci dimostra che la funzione generatrice della sequenza è uno più più più va bene e e se si fa la stessa cosa nel caso del triangolo di catalan qui conservando il triangolo abbiamo già visto che appunto ogni elemento è dato dalla somma di tutti i precedenti quindi in questo caso quella la sequenza è una sequenza di tutti uno che parto dalla colonna precedente e poi li sono momenti come faccio a dimostrarlo e lo dimostro e lo dimostro sempre utilizzando la stessa la stessa procedura quindi ho HD questa è la funzione HDT uguale.at terra di HTE quindi riportato tutti i passaggi che abbiamo parte fatto in modo simile per trovare l'inversa vedete qui a segno a questa questa quantità y risolvo quest'equazione cercando di in funzione di e di y qui vi ho riportato tutti i passaggi e si trova vedete y meno y quadro qui corrisponde a uno esattamente all'operazione che abbiamo fatto che abbiamo già fatto per il calcolo dell'indennità composizionale a questo punto come faccio a trovare ad y qui vedete non posso fare come prima e dividere per te deve mandar via il perché ce l'ho da una parte non ce l'ho dall'altra quindi AY che cos'è è uno meno la radice di 1-4 tipi diviso due t questo filo portò allo lo divido in cui vado a sostituire al posto di questa funzione che ho trovato EE questo è quello che ho fatto vedete al denominatore chiaramente compare di che ho sostituito con y meno y quadro e al numeratore è la radice di 1-4 t quindi ho sfruttato questo passaggio intermedio la radice di un altro tipo avevo trovato che è 1-2 YE ho usato quello per non stare a rifare i conti un'altra volta e vedete che si trova 1/1 meno y va bene va bene quindi questa è la caratteristica è la caratteristica importante di queste di queste matrici ed è importante perché perché quello che si può dimostrare che la sequenza è unica e dipende eh su tanto da h grazie a questa relazione quindi in pratica l'esistenza se voi avete una matrice di riordan e EE si è riuscita a dimostrare che esiste una relazione al sequenza quindi che ogni elemento è dato dalla somma da una combinazione lineare di quelli della riga precedente questo qui basta per dire che si tratta di una matrice di di riordan ok quindi questa e queste sono le caratteristiche principali di queste matrici quindi il fatto che formano un gruppo e che ogni elemento lo possa definire a partire da quelli che si trovano nella riga precedente e ecco in questa in questa sessione maper che vi ho che quasi metterò a disposizione in realtà ci sono anche altre due

Per andare ad esempio si trova questo riordina registrano vedete in cui vengono fuori queste queste funzioni generatrici con una doppia radice l'inversa invece è una funzione semplice l'inversa vedete questa è una caratteristica che poi a volte si può anche sfruttare cioè vere si parte da una coppia di funzioni no sì ma comunque che contengono una radice quadrata e poi qui si arriva ad un inversa che invece è definita da delle da di una coppia di funzioni estremamente semplice allora forse anche in questo caso vale la pena di vederlo un pochino nel dettaglio quindi tanto abbiamo gli strumenti insomma si fa tutto in modo semplice quindi a questo punto e io faccio darei una cosa chiamerei ci e anzi vi c è la funzione di catalan la di dell'assunzione di catalan quindi è uno meno la radice quadrata di 1-4 t e diviso due chi e poi HC invece è la stessa cosa però senza il TA denominatore quindi ci metto 1 2 benissimo a questo punto intanto è per fare il prodotto uso quelle due funzioni vicine che avevo definito che avevo definito come lo chiamate non me lo ricordo più ah di PEHP allora quindi se io faccio eh Qui c'è stato un collega e un problema di collegamento di rete ora speriamo che si risolva quindi se faccio questa operazione vedete vabbè in realtà è andata meglio del previsto vedete viene fuori la funzione questa funzione che vi avevo indicato anche nei lucidi vedete che se vado a fare lo sviluppo in serie di questa funzione e nonostante le apparenze è comunque una funzione che ha coefficienti interi va bene e se faccio la stessa cosa con una h e quindi h HP e si trova la stessa funzione in questo caso con senza di te eh eh Eee quindi anche qui se è questo lo si verifica poi facilmente appunto se si va a costruire il riordan Rain e che corrisponde eh qui io mi proprio questa funzione copio due volte poi smetto i 10 e 10 vedete questa è la matrice che corrisponde al prodotto ed è la stessa matrice che ottengo se faccio il prodotto della matrice di catalan per se stessa ecco la cosa magari che forse è più bellina vedere e l'intersa perché quella viene stranamente molto semplice no l'inversa della matrice ehm abbiamo detto che coinvolge il calcolo dell'università composizionale questo è un altro esempio interessante allora qui abbiamo la h la h in questione quella che abbiamo chiamato HC quindi come faccio a trovare l'inversa composizionale ed è usare K faccio una sostituzione in questo caso subs ti uguale ad y in HC e questo io voglio che sia uguale eh che sia uguale a chi va bene quindi io ho calcolato la funzione HY e devo risolvere in pratica questa equazione rispetto ad y e vedete che e nonostante la la l'apparenza iniziale complicata poi invece qui la la le cose si semplificano molto quindi l'inversa composizionale della funzione h del dedicata Lane ET -6 quadro va bene questo si può puoi venire facilmente in se vado a fare subs ti uguale.at meno di quadro in HC no in accini e poi semplifico perché difficilmente vede che qua dentro c'è un quadrato e quello fa sì che poi e tutto si semplifichi ah vabbè qui ovviamente quando faccio questa operazione ovviamente essendo un sistema di calcolo simbolico eh quando c'è la radice quadrata c'è una radice quadrata di un quadrato e lì ci può essere un segno più o meno no quindi lì bisogna intervenire e in questo caso il segno dovrebbe essere ehm che noi in tutto questo lavoro che si fa ricordiamo ricordiamoci sempre che lavoriamo in un intorno dell'origine comunque per cui il segno qui è e -1 cioè a me interessa che che la radice quadrata restituisca 1-2 t va bene e facendo questa operazione infatti viene un mezzo si semplifica con questo menu mezzo e poi qui mi rimane esattamente il termine fick e ecco per quanto riguarda invece la funzione la funzione e video inversa e che cosa devo prendere abbiamo detto che devo prendere devo fare R uno diviso vado a sostituire nella funzione sostituisco ti uguale a ti meno ti elevato al quadrato dove in di c ok e qui di nuovo ci avrò anche qui probabilmente un doppio risultato perché questa radice quadrata lui ovviamente sistema deve non sa se è uno o -2 o due t -1 e quando vado a fare questa semplificazione e ottengo sempre questa cosa del segno però in quel segno qui deve essere un meno questo è un meno EE quindi vedete mi viene 1-1+1-2 chi il due il due se ne vanno e quindi mi rimane è 1 1 meno t come dovrebbe essere il risultato giusto uno meno TET meno t quadro quindi ecco però qui forse la cosa più interessante è se andiamo a trovare allora se facciamo Matrix com'è che si chiama e quella è il prodotto l'abbiamo in Matrix inverse allora Matrix inverter abbiamo la copio allora questo Matrix inverse chiamiamola i inci inversa l'inversa di catalan quindi eh non so l'avevo assegnata qualcosa no forse no non l'avevo assegnato ah no non l'ho non l'ho addirittura non l'ho addirittura cromata ancora non l'ho trovata quindi andiamo subito a farla allora quindi e quindi prima trovo c CE Matrix e emme riordan scusate e quindi la matrice di carta la ne abbiamo di c beh in realtà ci metto di c perché per come vuole per come è fatta la procedura devo mettere due volte ed è la stessa la funzione senza il t quindi qui mi calcolo il triangolo di catalan poi a questo punto posso andare a direttamente a trovare l'inversa eh utilizzando le funzioni che abbiamo appena trovato quindi emery Jordan abbiamo detto uno meno chi e poi di nuovo uno meno sì perché il tiro tolgo ti 10 e 10 questa è l'inversa vedete questa inversa che ha questa forma strana a questo punto vediamo verifichiamo che facendo l'inversa utilizzando la funzione dell'algebra lineare ottengo esattamente la stessa funzione quindi abbiamo detto Matrix inverse di Matrix eh di si e qui vedete che si ritrova la stessa funzione vedete quindi ehm Ciao amore no no cioè fare queste cose non tanto perché uno è chiaro insomma e vi faccio vedere i risultati sono veri no sto facendo queste cose uno prende anche confidenza con e capisce meglio esattamente di cosa di cosa si tratta va bene quindi ecco l'altra cosa poi interessante di queste di queste matrici e il fatto appunto quello che abbiamo già osservato ovvero appunto il il TH di chi abbiamo visto che appunto definisce le colonne di questo di questo triangolo infinito e quindi a partire dalla funzione dalla dalla coppia di funzioni di acqua noi abbiamo il modo di costruire queste triangolo per colonna eh però appunto la cosa interessante è che si riescono appunto a costruire anche per riga EE non soltanto il triangolo di Pascal e di catha ma in generale e vabbè qui qui ho riportato la relazione che abbiamo visto e rivisto su sufficienti binomiali no questo questo grafico rappresenta il fatto che ogni elemento che si trova in posizione n più uno K più uno nel triangolo lo posso trovare a partire dagli elementi che si trovano nella riga n quindi nella riga precedente nella colonna cappa e nella colonna K più uno bene e questa corrisponde alla ben nota relazione che abbiamo visto quando abbiamo studiato i coefficienti binomiali in generale ecco la cosa interessante è che si dimostra che se si ha un ricordano array quindi qualsiasi sia la la matrice qualsiasi sia la coppia di h con le caratteristiche che abbiamo detto allora esiste sempre una sequenza una che si chiama a sequenza non ha niente a che vedere con la funzione a che abbiamo usato del del teorema di lagrange tanto per essere chiari però ecco esiste sempre una sequenza appunto che si chiama la sequenza per cui ogni elemento del triangolo che si trova in posizione n più uno K più uno io lo posso trovare sempre come la somma degli elementi che si trovano nella riga precedente a partire dalla colonna cappa moltiplicati però per questi coefficienti a zero a uno a due eccetera va bene e come si è esiste alcuna relazione simile però insomma meno meno interessante poi vi dico anche perché anche per gli elementi in particolare che si trovano nella prima colonna per questi elementi si parla di sequenza Z è chiaro che è una sequenza un po diretta se ci pensate bene perché se mi trovo nella prima colonna non ho una colonna precedente quindi il comportamento degli elementi sulla prima colonna è un po diverso da quelli che si trovano nelle altre posizioni quindi esiste una sequenza che definisce tutti gli elementi interni e un'azzurra seguente che definisce quelli che si trovano invece nella prima colonna ecco la cosa interessante è che la funzione generatrice della sequenza a quella più più interessante se volete soddisfa questa relazione che vedete in prima nel come prima formula cioè HT uguale.at per a di http cioè e la funzione generatrice della seguente è strettamente legata alla funzione h del riordinati e viceversa quindi se conosco h posso conoscere a risolvendo questa equazione e viceversa se conosco a riesco a trovare h la funzione invece generatrice della sequenza Z soddisfa una relazione un po più complessa che apparentemente più complessa in realtà ora poi appunto è la sequenza veramente importante è la è la sequenza e comunque la sequenza suddiviso a questa relazione che coinvolge sia la d che la h eh allora che cos'è la sequenza nel caso del triangolo di Pascal allora il caso di triangolo di Pascal sappiamo benissimo che la sequenza è 1 1 cioè un elemento abbiamo detto e dato nel caso di Pascal dalla somma dei due precedenti e quindi da quelli che si trovano posizione di K di NK più uno con coefficienti uno i primi due e poi sono tutti zero va bene mi torna qui io vado a prendere un elemento del triangolo e questo elemento è dato dalla somma di quelli che si trovano nella riga precedente però questi due li peso uno tutti gli altri è come se li pesa pesassi zero questo mi mi dà origine questo rientra perfettamente in questa in questa definizione in questa definizione che stiamo vedendo ecco però e quindi nel caso di Pascal sappiamo già che la sequenza è 1 1 e poi tutti zeri però ecco quello che di cui voglio convincervi è che se io non lo sapessi utilizzando questa relazione potrei comunque trovare quanto vale questa questa sequenza e vediamo eh cosa devo fare devo imporre che HD sia uguale.at per ADHD ok questa è la relazione che vale tra EH quindi sì si risolve in modo simile a come si risolve a come si a quello che ho utilizzato per trovare l'inversa composizionale cioè cosa faccio chiamo y eh ti diviso uno meno si risolvo questa equazione rispetto a te quindi per esempio ho un buono di propo scritto può di moltiplicando tutto quanto per 1-10 e ho raccolto quindi ho messo e ho fatto il prodotto quindi portando poi a destra i termini in TE poi ho risolto rispetto a te quindi TUY diviso uno più YA questo punto come faccio che cos'è ad YADY non è altro che e praticamente qui vedete ho un key qui un key qui che si semplificano quindi come faccio a trovare AD se non devo sostituire in 1/1 meno di il valore che ho trovato per te ritorna quindi il trucco per risolvere questi queste equazioni e questo lo chiamo y trovo ti in funzione di YE poi nel tic si trova da quell'altra parte sostituisco il TY che ho trovato facendo questa operazione quindi vedete qui sostituisco in 1/1 meno t al positiva da mettere proprio il valore che ho trovato e qui si trova uno più y questo ci dimostra che la funzione generatrice della sequenza è uno più più più d va bene e e se si fa la stessa cosa nel caso del triangolo e di catalan qui che osservando il triangolo abbiamo già visto che appunto ogni elemento è dato dalla somma di tutti i precedenti quindi in questo caso quella la sequenza è una sequenza di tutti i che parto dalla colonna precedente e quali sono tutti come faccio a dimostrarlo eh lo dimostro e lo dimostro sempre utilizzando la stessa la stessa procedura quindi ho HDT questa è la funzione HT uguale.at terra di HPE quindi riportato tutti i passaggi che abbiamo parte fatto in modo simile per trovare l'inversa vedete qui al segno a questa chiamo questa quantità y risolvo quest'equazione cercando di in funzione di K di y qui vi ho riportato tutti i passaggi e si trova vedete y meno y quadro qui corrisponde a uno esattamente all'operazione che abbiamo fatto che abbiamo già fatto per il calcolo dell'indennità composizionale a questo punto come faccio a trovare ad y qui vedete non posso fare come prima e dividere per chi deve mandar via il perché ce l'ho da una parte non ce l'ho dall'altra quindi ha di y che cos'è è uno meno la radice di 1-4 t diviso due i questo tiro porto a Dio lo divido in cui vado a sostituire al posto di chi questa funzione che ho trovato EE questo è quello che ho fatto vedete al denominatore chiaramente compare gi che ho sostituito con y meno y quadro e al numeratore è la radice di 1-4 t qui ho sfruttato questo passaggio intermedio la radice di un altro team avevo provato che è 1-2 y ne ho usato quello per non stare a rifare i conti un'altra volta e vedete che si trova 1/1 meno y va bene va bene quindi questa è la caratteristica è la caratteristica importante di queste di queste matrici ed è importante perché perché quello che si può dimostrare che la sequenza è unica e dipende tanto da acca grazie a questa relazione quindi in pratica l'esistenza se voi avete una matrice di riordan e EE si è riuscita a dimostrare che esiste una relazione al sequenza quindi che ogni elemento è dato dalla somma da una combinazione lineare di quelli della riga precedente questo qui basta per dire che si tratta di una matrice di di riordan ok quindi questa e queste sono le caratteristiche principali di queste matrici quindi il fatto che formano un gruppo e che ogni elemento lo possa definire a partire da quelli che si trovano nella riga precedente e ecco in questa in questa sessione mepal che vi ho Che quasi metterò a disposizione in realtà ci sono anche altre due procedure line una l'ho chiamata esigenze e una l'ho chiamata Zeta sequence che vi faccio prima a far vedere cosa fanno eh che a spiegarvi allora allora vedete la se è un la la funzione sequence applicata ad una matrice e in particolare alla matrice appunto il caso di di Pascal vedete che restituisce a sua volta una matrice in cui dipende un po da da da da da da come sono dalle caratteristiche di queste si ottiene una matrice in cui le righe tendono alla sequenza ovviamente se questa esiste cioè se applico questa funzione si questa ad una matrice che è un ricordo array quello che si vede è che le righe della matrice che che ottengono che ottengo tendono tutte alla sequenza quindi questa è una procedura che può servire per capire qual è la la la la sequenza senza dover andare a fare i conti per avere un'idea così tanto per per per lavorarci un po se faccio la stessa cosa con con barasso oddio 10 sotto eh c'è qualche problema si vabbè glielo facciamo in fondo però metterlo qua gli farò qua allora Z Z si ques di Matrix di terre l'avevo chiamata così eh dunque il chenny mi piace Zeta pensai si pence nel sequel Kevin la va bene dolci quanto è un gioco no ma questa finora quindi vi può darsi che ci sia ora vabbè questo è da rivedere probabilmente c'è un problema dovuto a cambi di versione di se cambia la funzione a volte eh che in qualche versione gpl fa la procedura funzionava bene son sicura quindi evidentemente c'è qualche OO forse gli dà fastidio vediamo senza Marquez questo forse non ha bisogno dei Matrix no no no quello ci vuole vabbè questa da che cosa fa questa fa la stessa cosa dovrebbe fare la stessa cosa però evidenziando la Z sequenza ecco se questa procedura avesse funzionato ora poi cerco di capire qual è il problema in questo caso viene verrebbe restituito 1111 perché vedete nel caso di catalan si può vedere anche da lucidi nel caso di catalan quello che si vede EE no non di caplan scusate di Pascal nel caso di Pascale ovviamente che ogni elemento guarda a quello precedente va bene quindi la la la Zeta sequenza è semplicemente uno con la funzione generatrice uno e quella procedura Rina ora riguardo qual è il problema ma insomma deve esserci un dettaglio di tipo diversione eh come eh allora nel caso di catalan se si fa tanto ci sta la procedura già stata fatta quindi ci vuol poco invece di lasciare Z che faccio esigue se l'ho chiamata cintare no se faccio la stessa cosa con c vedete che ho una sequenza di delle righe tendono tutte a ad assumere il valore uno per la caratteristica di di questa di questa procedura non fa altro in pratica andare a fare il rapporto tra due righe successive del triangolo perché appunto il fruttando che esiste questa cioè se esiste la sequenza deve succedere ci deve essere questa si deve verificare questa eh questa convergenza alla sequenza che poi rappresenta la l'assenza del triangolo va bene e è un modo così un po artigianale per verificare se una certa matrice è un ricordarvi oppure no no perché se io applico la procedura sequenza una matrice non vedo un andamento di questo tipo quello mi basta ed escludere che la matrice sia se invece avete un comportamento di questo tipo allora uno può essere invogliato andare a dimostrare poiché in effetti le cose sono di questo tipo va bene ok mi fermo qui e ho detto anche troppo quindi questo lo salvo e poi ve lo metterò a disposizione ripeto non tanto tanto mi sta sul pdf F al di là delle funzioni poi penso insomma che questo aiuti può capire il i concetti che ci sono dietro vabbè insomma queste madri c'hanno tutta una serie di caratteristiche insomma alcune ve le faccio vedere in particolare ritorneremo anche sul sui linguaggi che evitano partner perché vedremo insomma che hanno a che fare anche con con queste strutture che abbiamo prodotto va bene allora io spero che la registrazione poi sia andata a buon fine boh sembra di sì quindi interrompo e

Buongiorno a tutti e continuiamo quindi a parlare di matrice di riorda quindi fatemi condividere lo schermo ok quindi e quindi abbiamo ho iniziato a parlare di matrice di riorda quindi matrice che è quindi fun sequenze di variate particolari che definiscono che definiscono 1 1 triangolo infinito triangolare inferiore quello il triangolo di riordan più famoso è sicuramente il triangolo di Pascal EE questi queste sequenze particolari sono definite a partire da una coppia di di funzioni di EH con la caratteristica che ogni colonna della del triangolo EE ha come funzione generatrice il prodotto di tip per HP alla K con K che varia da zero all'infinito in modo tale che quando tappe e zero nel caso di Pascal sia direttamente 1/9 di quando K uno nel caso di Pascal che ha come h vi ricordo t diviso uno meno t sia come funzione generatrice t diviso 1-6^2 vi ricordate questa è la funzione generatrice dei numeri interi che infatti compaiono nella colonna uno del del triangolo e poi via via quando si vanno a considerare le colonne successive appunto sia in generale è un team alla cappa diviso uno meno ti alla cappa più uno questa è la funzione generatrice della che genera in particolare il triangolo di Pascal e abbiamo detto appunto che avevamo già iniziato a introdurre il concetto di assenza e ovvero queste questi queste sequenze infinite hanno un sacco di caratteristiche particolari e tra queste c'è quella che ogni elemento del triangolo può essere definito come una combinazione lineare degli elementi che si trovano nella riga precedente quindi ad esempio questo è il caso più più semplice e banale che abbiamo visto e rivisto nel caso di Pascal abbiamo che ogni elemento è dato dalla somma dei due elementi nella riga precedente a partire dalla colonna precedente e questo appunto vabbè corrispondere alla ricorrenza ben nota che abbiamo già discusso ecco però in generale in generale appunto se DNK rappresenta il generico elemento di una del di questa sequenza di che dipende da due libici ci quindi definita da una coppia di funzioni di h quello che si dimostra e che ogni elemento in posizione n più 1+1 è dato dalla può essere trovato a partire dagli elementi che si trovano nella riga n quindi nella riga precedente a partire dalla colonna cappa quindi vedete il dna KNK più uno di n più due sono tutti gli elementi che si trovano nella riga precedente del triangolo a partire dalla colonna campo e come si fa a trovare gli elementi di anni più uno K uno beh si deve moltiplicare ognuno di questi elementi per una sequenza particolare dna K si moltiplica con 0+1 che era con uno e così via questa sequenza particolare si chiama sequenza e ed è la caratteristica importante di queste eh di questi triangoli esiste una relazione tra la funzione h che definisce il il triangolo è la funzione generatrice che definisce questa sequenza è questa relazione data da HBT uguale.at per a di h di questo si può dimostrare che vale per ogni triangolo di riordan gli elementi che si trovano nella prima colonna quindi quelle di tipo di n 1 0 anche loro si possono determinare partire dagli elementi della riga precedente ovviamente non essendoci una colonna precedente si parte appunto si si deve fare una combinazione lineare degli elementi a partire da da da dalla stessa colonna in cui si trova l'elemento stesso moltiplicando questa volta per una sequenza Z EE c'è una relazione che Lega le funzioni di h con la funzione generatrice che che determina questa questa sequenza Zeta vedete questa è la relazione che può essere dimostrata spesso in tanti esempi come ad esempio nel caso di Pascal questa azienda sequenze e questa sequenza in realtà sono simili sono un po la stessa cosa si assomigliano eh però in generale possono essere anche anche molto diverse e quindi avevamo forse qualche esempio le avevamo già già visto quindi come faccio ad esempio la la la sequenza nel caso di Pascal e ovviamente 1 1 eh e poi tutti zeri perché per doveva trovare un elemento devo appunto fare una combinazione lineare prendendo di fatto soltanto i primi due no e per dimostrare formalmente questo risultato appunto si deve si deve risolvere questa equazione in funzione di a eh quindi conosciamo HE devo risolvere in modo da trovare ah e questo avevamo già iniziato con con me poi insomma sono tutte cose si fanno piuttosto bene quindi il trucco qual è il trucco è quello di introdurre una variabile y che è sostituisco ad HP

A quel punto siccome HT uguale AY non si tratta di andare a ricavare t in funzione di y da questa emozione che ho definito EE sostituirla poi nel resto dell'equazione in modo da trovare AY ed è quello che abbiamo fatto la volta scorsa quindi vedete qui se io faccio questa nel caso della del di Pascal qui ho esattamente applicato la regolina che abbiamo appena visto qui vedete faccio la la sostituzione e yuguale.at divisono meno t quindi l'argomento assunzione AA questo punto risolvo questo ovviamente è un caso semplice risolvo questa equazione trovando chi in funzione di y quindi vi faccio un po i conti classici e poi ricavo di in funzioni di YEA quel punto e sostituisco IY da tutte le parti nelle emozioni incidenti per cui hai provato y uguale a uno più y no quindi è esattamente la funzione generatrice che ci aspettiamo quella che ha due valori due coefficienti uno e poi tutti questi scendi zero avevamo fatto mi pare anche i conti nel caso della del triangolo di jalan in questo caso la sequenza e la la sequenza è un pochino più eh intanto è una sequenza infinita nel senso che son tutti insomma contiene tutti i valori uno e quindi ogni elemento è dato dalla somma di tutti i precedenti in pratica e anche qui avevamo fatto i conti con maple e per dimostrare in maniera in maniera formale che in effetti la la la funzione generatrice della sequenza è proprio 1/1 meno y va bene tra l'altro non so se avete visto che ho ora poi magari se facciamo qualche altro esempio lo possiamo rivedere però c'erano state un paio di cose che non funzionavano nel nei quelle procedure che vi avevo fatto vedere la volta scorsa Eh sì come sospettavo era una questione di di funzioni che quando cambia le versioni poi insomma hanno comportamenti un po diversi quindi le avevo poi aggiustate è a disposizione poi c'è la versione è quella che che funziona con le con le versioni per 100 va bene allora ora vabbè questo ve lo dico così il più a titolo di di esempio che ehm poi per per così per interesse poi specifico allora appunto la la la l'aspetto importante della della sequenza è che tutte le volte che voi avete è 1 1 triangolo triangolare inferiore se riuscite a dimostrare che gli elementi di questo triangolo eh hanno la una caratteristica legata a una sequenza cioè un elemento può essere dato dalla somma da una combinazione di gare degli elementi precedenti sempre ovviamente con la stessa sequenza di riferimento è quello vi garantisce che quel triangolo sia un ricordati per cui poi tutte le le proprietà che questi piangoli hanno possono essere facilmente eh utilizzate quindi vi ricordo no che che questi tra tra le varie caratteristiche che questi triangoli hanno è quella forse più importante è che formano un gruppo un formano un gruppo rispetto al prodotto no per cui se andiamo a fare il prodotto questi due matrici di Giordano teniamo quello ricordano a Ray se facciamo l'inversa di una matrice di risorgano teniamo ancora un riordan array e esiste la la matrice che rappresenta l'identità EE però ecco la sequenza è importante in tutta questa in questa in questa questione perché appunto se se se si dimostra che esiste una sequenza allora questo ci basta per poter concludere che questo triangolo sia un rivolgano a Rai tant'è che sono stati fatti anche dei degli sforzi nella direzione di definire K il prodotto è l'inverso in funzioni direttamente della sequenza va bene quindi la sequenza ehm vedete qui ci sono queste formoline che appunto ripeto sono più così delle vere faccio vedere più per per completezza che ci dicono qual è la relazione che esiste tra la sequenza che corrisponde al prodotto di due matrici di Jordan e le due assenze di caratterizzano i due quindi vedete se a uno e a due sono le a sequenze delle matrici che vada moltiplicare la matrice prodotto ha una sequenza che è definita da questa da questa composizione particolare e così l'inversa è l'inversa la matrice inversa ha una sequenza che è data da uno su AY dove esiste questa relazione al solito questo vedete qui questa annotazione che vedete qui l'inversa e vedete una funzione t e che significato ha questa cosa tra parentesi che vedete vedete come faccio a trovare la la la sequenza delle inversa devo fare uno su AY dove però y che cos'è y è definito da queste equazioni yuguale.at per ADY quindi vuol dire anche qui quello che devo fare è trovare y in funzione di da questa equazione e poi sostituirla qua dentro cioè alla fine io voglio una un'espressione in tim perché la la funzione è in tilt no qui vi ho riportato qualche esempio giusto per vedere che cosa vuol dire no se si fa il prodotto di dunque il prodotto di ecco questa e Pascal Pascal per catalan vediamo vediamo perché è poi magari lo possiamo verificare quindi se si va a fare il prodotto di Pascal per catalan la sequenza secondo questa formula qui che cos’è allora devo prendere la sequenza della seconda matrice che nel caso di catalan e 1/1-3 poi devo andare a prendere la sequenza della prima Pascal che appunto è uno più y e poi però vedi che devo andare a sostituire devo calcolare questa funzione in che cosa in eh in t diviso a due a due viti EE qui c'è esattamente questa e questa eh caratterizzazione e se si fa se si fa la stessa cosa per il prodotto inverso quindi datang e Pascal ovviamente si ottiene 1 1 funzione è una funzione diversa e ok allora questo forse e possiamo fare qualche prima di andare avanti e introdurre dei concetti nuovi possiamo un attimo riprendere la sessione mapel che vi avevo che vi avevo mostrato allora andiamo a prendere un essere l'ultima c’è un sai un recente eccoli qua li cioè eccolo qua dovrebbe essere questa la versione eh vediamo se è questa cioè dovrebbe essere lei allora vediamo se la funzione è corretta so che mi vedere non mi ricordo se era se gli avevo cambiato nome ora si vede subito tanto OK sì sì funziona quindi quella giusta allora quindi sì vi ricordate qui avevo vi avevo messo a disposizione alcune e 223 funzioni tre procedure in particolare allora una che appunto prende in input le funzioni di HE la variabile la dimensione della matrice è un produce il la matrice di riordino a partire dalle due funzioni bianca qui vi ricordo di fare attenzione in questa in questa in questa versione la funzione h non ha il tic che moltiplica eh nella definizione h di zero uguale a zero quindi questa in questa versione qui si richiede che ha tra invece che il termine t sia sia sia tolto EE poi ci sono altri due altri due procedure che sono la la procedura a sequenza e la procedura Zeta sequenza che applicate ad una matrice ad una matrice eh restituiscono una sequenza di righe che tende a la sequenza se questa esiste quindi ad esempio no vedete qui avevamo trovato avevamo trovato ad esempio il record man Ray corrisponde qui si può anche ingrandire un po vedrete meglio dire corrisponde alla coppia 1/1-1/1 meno si quindi alla matrice di Pascal EE dopodiché avevamo trovato appunto la sequenza vedete questa questa procedura la sequenza no restituisce una matrice della stessa dimensione di p le cui righe tendono alla sequenza quindi ovviamente eh come si era già detto l'altra volta è uno strumento che può servire a capire se quello che che se se la matrice con cui stiamo lavorando ha le caratteristiche e per essere 1 1 record in array dopodiché chiaramente uno deve dimostrarlo in maniera diversa che effettivamente si tratta di una matrice di questo tipo mentre invece la Zeta seguenza scusate qui non viene costituita nessuna nessuna matrice viene restituita semplicemente qual è la sequenza che definisce ogni ogni elemento della prima colonna in funzione di quelli della di tutta la della riga della riga precedente no ecco volevo farvi vedere volevo farvi vedere questi risultati che abbiamo visto per la per la sequenza dunque intanto qui possiamo sfruttare possiamo sfruttare eh avevamo fatto eccola qua DC di CHC uno storiche un'altra volta e sì abbiamo fatto dei dei conti per controllare appunto la la la sequenza e la Zeta sequenza della matrice di cata quello però che invece voglio fare adesso è fare conto la moltiplicazione ecco dolci quindi cosa voglio fare voglio usare il prodotto di p con EC ora però fatemi controllare forse c non l’ho ancora assegnata eccola qua quindi la ricalcolo 15 e la matrice di catalan PE la matrice è la matrice di rascal quindi se io vado a fare il prodotto di queste due matrici e mi viene fuori questo triangolo e quindi se ora potrei fare il prodotto regolare tra tra le due tra i due ricordano sfruttando le le formule che abbiamo visto ma cosi forse si fa ancora prima quindi se questo prodotto è un ricordo a quello che vi devo aspettare e che quando vedo quando vado a fare questa questa a richiamare questa funzione le le righe tendano ad avere un comportamento un comportamento che tende ad una stessa sequenza quindi qui vedete eh sembra che la sequenza sia 1/1 meno t più più t perché il termine uno in posizione uno vale due invece di eh invece di di uno quindi quello che deduco è che la la la sequenza è data non non vengono più da questa funzione va bene eh facciamo normal eh vedete che uno cambiando il segno è uno meno t meno t quadro e poi 1-3 ed esattamente il valore che è individuato da questa da questa da questa espressione no quindi uno più t meno t quadro diviso 1-3 e oppure opp pure se facciamo il prodotto inverso quindi si vada a fare il prodotto di di shipper p quindi vado a fare il prodotto di c si i ottengo un'altra matrice e anche in questo caso se io vado a a vedere cosa mi dà la sequenza vedete in questo caso 121 quindi ho una sequenza finita eh che corrisponde infatti a che cosa uno meno di eh no uno più t uno più t al quadrato no perché quando vado a fare una fettina al quadrato qui sai eh stand e quindi bisogna indovinare la funzione di semplificazione giusta semplicità expand 1+2+2 più di qua dove viene quindi questa dovrebbe coincidere con la funzione che vi avevo dato va bene questa l’avevamo già già verificata quindi vedrà che qui abbiamo delle delle formoline che ci permettano di dire qual è la sequenza del del prodotto a partire dalla sequenza delle due gli sci di partenza allora in realtà poi questo questo concetto di assenza negli anni poi è stato per generalizzato e in realtà quello che si può dimostrare che la dipendenza può essere resa molto più generale rispetto AA quello che la la sequenza definisce allora pensiamo di nuovo al triangolo di Pascal no nel triangolo di Pascal abbiamo che l’elemento 10 è dato da 4+6 d’altra parte sei è dato da 3+3 quindi è anche vero che l’elemento 10 è dato da 4+3+3 bene quindi in generale eh quello che può capitare appunto cioè quello che si può dimostrare è che ogni elemento e in un in una matrice di riordan in realtà può essere definito come una combinazione lineare anche considerando le righe non soltanto la riga precedente ma più righe precedenti secondo uno schema abbastanza particolare ora andiamo a vedere e in e la cosa interessante appunto è che si riescono a definire le le si riesce a definire la la sequenza a partire da questa dipendenza un pochino più complessa allora così la sequenza è la è quella più è quella più importante per definire un errore perché è unica va bene perché definisce EE unica insomma è l’unica sequenza e mi permette di definire un elemento a partire da quelli delle dei della riga precedente essi possono esistere però altre dipendenze anche dalle righe da da altre righe che ovviamente poi però sì sì ok coincidono in qualche modo con la sequenza cioè da queste sequenze dalle righe delle che che delle righe da da tante righe possono comunque determinare e la la la sequenza ecco considerate appunto questo esempio qui il caso semplice di Pascal no quindi questo se io vedo la la la dipendenza in questo modo cosa posso dire in ogni elemento è dato dalla somma Dell'elemento che si trova nella nella riga precedente colonna precedente poi mi devo spostare ancora in alto di una posizione e andare a prendere l'elemento nella riga precedente e nella stessa scusate nella colonna precedente nella stessa colonna allora se io chiamo se io definisco delle sequenze particolari per queste dipendenze quindi nel caso di questa riga vedete ho soltanto la dipendenza da un elemento quindi considero la funzione generatrice B zero di più uguale a uno che mi identifica il fatto che sto considerando appunto una sequenza dalla riga precedente e poi considero invece un'altra funzione generatrice più uno di chi che è quella che definisce invece i coefficienti della seconda riga precedente quindi uno e uno ecco quello che si può e dimostrare appunto che l'a sequenza quella che esiste ed è unica io la posso definire anche a partire da queste eh sequenze particolari quindi nel caso eh se si ha una dipendenza dalle due righe precedenti ad esempio si dimostra che ADT è uguale AP zero più la radice quadrata di piu zero di chi al quadrato più quattro t più uno di diviso due infatti vedete se vedete se mettiamo in questa formula i valori di fissare più uno quindi più zero uguale a uno e più uno uguale a uno più TE viene fuori dentro la radice mi mi rimane proprio 1+4+4 più quadro che è un quadrato perfetto e si ritorna alla sequenza 1+1 si potrebbe chiedere ma che mi serve tutto questo cioè perché devi complicare le cose quando la sequenza è e quando poi alla fine vai a trovare la sequenza beh beh perché ora poi vedremo degli esempi perché ci possono essere delle situazioni in cui la sequenza è estremamente complicata e non ha nessuna EE non non è difficile trovare un'interpretazione cioè capire nel caso di

E non ha nessuna EE non non è difficile trovare un'interpretazione cioè capire nel caso di Pascale è chiara l'interpretazione no l'elemento NK un elemento la la la la sequenza corrisponde esattamente a questa a questa ricorrenza che abbiamo dimostrato proprio andando a vedere come sono fatte le combinazioni no in generale la sequenza può dare origine a delle a delle ricorrenze che non si spiegano bene perché sono molto complicate e allora ehm può essere conveniente invece passare da una dipendenza da tante righe che invece si spiega meglio che però poi da un punto di vista algebrico può essere comunque ricondotta a alla sequenza ora poi facciamo un esempio che insomma spero chiarisca quello che voglio dirvi quindi che in generale che sei la sequenza è esiste ed è unica e definisce in maniera eh univoca una matrice di riordan in alcune situazioni può essere conveniente andare a ricercare delle delle delle dipendenze da più righe precedenti va bene in generale appunto anche qui vi ho riportato e ho riportato il il risultato generale si parsa praticamente dal concetto di assenza al concetto di amatrice cioè ogni matrice di riordan può essere anche associata a ad una o più a matrici perché la matrice non è in realtà non è unica in modo tale vi faccio vedere grafico è più chiaro la in modo tale che ogni elemento del triangolo può essere definito da tante righe precedenti che che corrispondono però a questa zona grigia chiara che vedete nel triangolo quindi posso andare a considerare che delle dipendenze da le righe precedenti con coefficienti appunto Alfa igj e addirittura anche dipendenze dalla stessa riga va bene quindi se se se questo questa vedete la al contrario cioè a volte può capitare di riconosce che di avere di sapere che un certo elemento è dato da una combinazione lineare degli elementi che si trovano in queste due zone grigie e grigie scure e questo ci basta ci garantisce che e che quel triangolo sia comunque un ricordo nel Ray e esistono poi tutta una serie di formoline che ci permettono di trovare qual è la sequenza che definisce quel riordan arrivi allora qui vedete avete queste ci sono queste due queste due relazioni eh in cui vediamo la seconda vedete.at e definita a partire da che cosa a partire dalle funzioni di di t EQ allora p no scusate p le p sono le funzioni generatrici dei coefficienti nella zona grigio chiara quindi P Zero come nel caso del del che abbiamo visto di catalan no P Zero definisce coefficienti in questa riga più uno definisce coefficiente in questa riga e poi così via mentre q è la funzione che definisce coefficienti che si trovano e in corrispondenza di questi elementi nella stessa riga dell'elemento che stiamo considerando ecco vedete la la la DT la posso provare e se conosco queste funzioni PEQ se finisco se conosco PEQ utilizzando questa equazione posso andare a ricavare quanto è alto e lo stesso esistono anche delle relazioni analoghe per trovare h invece che a ehm ok allora perché vi ho fatto vi ho Detto questo perché tutto questo ha a che fare eh un esempio interessante in cui viene fuori la matrice proprio un esempio che abbiamo in qualche modo già visto eh ovvero quello delle numerazione e dei linguaggi che evitano pattern vi ricordate no quando abbiamo fatto il metodo simbolico abbiamo visto come si fa a trovare la funzione generatrice di un linguaggio definito su un certo alfabeto con il vincolo che le parole non devono contenere un certo pattern allora quindi riprendiamo riprendiamo quel questo questo problema ehm ora non lo dimostriamo da capo perché insomma l'abbiamo già fatto vi ricordo semplicemente alcune cose che avevamo già introdotto allora avevamo intanto in questo esempio andiamo a considerare linguaggi di tipo binario quindi è l'alfabeto è costituito da 00:01 e quindi vogliamo trovare appunto J studiare le le parole del linguaggio che non contengono un certo pattern P Zero PH -1 ehm vi ricordo che avevamo già studiato questo problema e avevamo visto che la la la la nozione fondamentale per dimostrare eh risultati principali era quella di vettori di auto correlazione eh ora qui vi ho riportato un esempio detto così vi rinfrescate le idee no quindi immaginiamo di avere il pattern 00011 ok cosa si deve fare quindi al primo step lo si confronta col pattern stesso siccome in questo caso match perfetto il pattern iniziale quello corrente scrivo uno poi via via si fa uno spostamento si sposta si ci si si fa uno shift a destra e si controlla se la parte che rimane del pattern match con quella iniziale qui in questo in questo esempio non ho nessun match quindi scrivo zero faccio ancora uno shift a destra ed ho zero ancora zero è chiaro che in questo caso ho un match soltanto alla alla al primo confronto e poi tutte le altre volte no quindi in questo caso il vettore di autocorrelazione è semplicemente dato dalla sequenza 100000 no quindi il vettore di automazione e questo e questo è la sequenza di zeri e uni che ho sulla base del match che vado a considerare e benissimo dunque vi ricordo che avevamo introdotto delle equazioni simboliche per per studiare i linguaggi definiti da da questa eh con i linguaggi che evitano il pattern l'avevamo fatto in generale per un alfabeto qualsiasi a me adesso interessa invece farlo nel caso di un linguaggio di tipo binario no quindi vi ricordo avevamo utilizzato due insiemi esse è l'insieme sono le parole evitano il pattern eh chi invece sono quelle che hanno il pattern soltanto alla fine va bene e l'idea qui appunto è che se concateno una parola che ha che non ha che evita il pattern con 0 1 o la parola che ottengo continua a non contenere il pattern oppure se ce l'ha non ce l'ha soltanto alla fine no quindi questa era la prima equazione simbolica si spiega si spiega facilmente poi invece ce n'era un'altra che era un pochino più delicata perché lì si trattava di andare a fare la concatenazione di una parola che evita il pattern col pattern stesso e lì si era visto che a seconda ci possono essere appunto delle combinazioni particolari di sequenze di di dell'alfabeto il carattere dell'alfabeto per cui che si può ottenere sicuramente si ottiene una parola che ha il pattern alla fine però questo pattern si potrebbe trovare anche un pochino prima se la la la parola che si stava considerando aveva una caratteristica come conteneva una parte già una parte del pack in pratica alla fine e quindi se avevamo trovato quest’altra equazione simbolica ecco nel quando abbiamo usato questo esercizio però avevamo semplicemente tradotto le equazioni in utilizzo delle funzioni generatrici mono variate va bene adesso che cosa facciamo invece adesso andiamo a considerarle in due variabili quindi questa volta sono interessata a studiare la funzione generatrice che conta eh che conta il numero di parole che non contengono il pattern e che hanno n bit uno K bit zero quindi invece di tener conto della lunghezza della parola vado a vedere quanti ci sono i bit zero e quanti bit uno che poi equivalenti ovviamente no però quando vado a fare la traduzione ovviamente cambiano un po di cose perché al posto di S vi scriverò SXYXY sono le due variabili di che uso e quando qui c’ho 0 1 vabbè dovrò tradurre in maniera diversa queste due simboli se x lo indico per contare gli zeri questo mi conta per x uno mi conta per y se appunto faccio questa distinzione poi vabbè la parola vota mi continuerà a valere uno come sempre qui semplicemente avrò sempre le due funzioni nelle due variabili e qui quando vado a fare la traduzione di questa seconda equazione simbolica avrò un SXYE poi qui invece di avere un t alla p come avevo fatto nel caso eh a una variabile io avrò un x elevato a che cosa e al numero di zeri che sono in p per y elevata che cosa il numero degli uni che sono in p va bene quindi e poi il resto è un XY per CXY di XY che cosa indico indico il polinomio di il polinomio di auto correlazione vi ricordo che il polinomio praticamente si andavano a contare e si andava a contare si monta la lunghezza della coda no quindi nel caso mono variato qui avremmo avuto vabbè a parte ciò soltanto 1 1 quindi eh qui c’è poco da fare ma se avessi avuto qualche altro uno dopo quello lo pesavo per la lunghezza della coda OK in questo caso invece di pesarlo per la lunghezza della coda dovrò per dire il la coda 011 mi peserà come un x per y quadro perché mi vado a contare quanti sono i bit e zero quanti sono quelli uno va bene però poi a parte questa accortezza la traduzione è esattamente la stessa che avevamo fatto l’altra volta ecco risolvendo questo sistema quindi di due equazioni in due incognite quindi noi siamo interessati a ovviamente a esse e si trova questa funzione qui io l’ho chiamata F però da cambia quella che qui vedete FE la funzione S del del dell’esempio precedente no quindi che cosa come definita vedete ho il polinomio di autocorrelazione a numeratore questa volta però nelle due variabili XEYEA denominatore ho uno meno x meno y per sempre il polinomio di autocorrelazione e poi x alla n uno per y alla n zero ehm si si trova facilmente se se ci se se x se y sono se se se andiamo a contare e se ti sei torniamo indietro alla lunghezza quindi se mettete x uguale a yuguale.at tanto per fare l’esempio qui avremo tutti i tutte un polinomio in in una variabile quindi qui verrà 1-2 p eh e qui ci compare il TE elevato alla p che avevamo trovato nel caso precedente allora cosa c’entra questa questa funzione vi variata con il riordan alla ovviamente in questo caso gli FNK questi elementi FNK costituiscono una matrice no quindi vado se io vado a vedere se prendete ad esempio ho dunque però non vedo vedere eccolo qua un esempio dunque questo è l’esempio e 110011 va bene il pattern fatto così e in questo caso ovviamente è chiaro che ciò avrò un match all’inizio ehm ma poi ce ne ho ce ne ho anche altri come ce ne ho uno all'ultimo e uno al penultimo certo e quindi infatti vedete il polinomio di autocorrelazione e uno più x quadro y quadro perché vi ricordo si va a contare si pesa la coda quindi quello che rimane e poi x alla terza y quadro che corrisponde invece all'ultimo match quello tra uno e uno va bene quindi il polinomio di auto correlazione è questo quindi la funzione generatrice bivariata applicando quel risultato che abbiamo appena visto è data da questo rapporto quindi vedete qui c'è il polinomio uno meno x meno y sempre per il polinomio e poi qui c'è x alla parte per y due perché il pattern ne ha quattro bit uno e due bit zero va bene allora se si va AA rappresentare questa e questa funzione generatrice bivariata cioè se si va a vedere come sono fatti i coefficienti va bene qui qui abbiamo appunto una funzione di due variabili quindi posso sviluppare sia rispetto ad una che rispetto all'altra vedo che in questo caso si ottiene una matrice infinita che le due direzioni non triangolari questa e questa è quello che si ottiene andando a fare i conti fino con NK minore uguale di 7 ecco quello che si può vedere che se in pratica si considerano ah se questa matrice infinita si taglia si taglia in due triangoli eh quindi si fa una trasformazione particolare quindi invece di considerare questa matrice per intero si va a considerare vedete che cosa è stato fatto sono stati considerati due triangoli in cui la diagonale del della matrice precedente diventata in ogni caso la colonna la prima colonna del nuovo triangolo ovviamente c'è stata 1 1 trasformazione è una trasformazione cioè questa diventa la prima colonna e questa è la diagonale nel primo triangolo e questa invece è la prima colonna e questa diventa la la diagonale del del secondo no vedete se andiamo a vedere gli elementi no qui c'era gli elementi 136 ad esempio 136 che fine ha fatto 136 vedete 136 compare però sono scritti in maniera diversa così come qui avevamo che ne so 15153567 e eccoli qua 6735155 quindi sono gli stessi elementi ma scritti in maniera diversa perché eh si fa questa cosa perché facendo questa separazione questi due triangoli possono essere studiati come matrici di riorda eh come matrici di riordan è però ora appunto andiamo a vedere un particolare che cosa rappresentano intanto la trasformazione è e che è stata fatta per arrivare a quei triangoli equivale a considerare e questi elementi cioè nel nei due triangoli RNK rappresenta che cosa rappresenta FNN meno K cioè la riga è la stessa ma vedete si è cambiato si sono invertiti gli ordini del della colonna no invece di andare da destra verso sinistra in pratica si va a sinistra verso destra e questo si ottiene semplicemente considerando gli elementi n meno K quindi in pratica cosa facendo quella trasformazione RNK che cosa conta conta le parole che evitano il pattern che hanno n bit uno EN meno K bit zero quindi sono parole con una caratteristica particolare perché se cioè se n sono i bit uno sicuramente bit zero sono inferiori sono meno il numero dei bit zero e inferiore minore uguale al numero dei bit e uno perché vedete se n è il numero di ditte uno n meno K è il numero di bit zero siccome K in questi triangoli e sempre inferiori ad n è chiaro che il numero di bit zero in questi in questa in questa rappresentazione sempre inferiore al numero dei beat 1 quindi abbiamo dei linguaggi con un vincolo un pochino diverso rispetto al primo mentre prima avevamo Beh linguaggi che evitano i pattern senza nessun altro tipo di vincolo in questo caso qui stiamo chiedendo anche un vincolo tra il numero di bit di un tipo e dell'altro ecco questi ora anche qui non sto AAA eh ah non vi farò tutte le dimostrazioni perché insomma era così mi sembrava bellino insomma farvi vedere questa questa applicazione perché è una cosa che abbiamo visto però ecco la cosa interessante è la seguente intanto siccome RNKEFN n meno K eh in pratica quello che si ottiene facendo questa trasformazione che vi ho fatto vedere sull'esempio EE può essere visto anche da in maniera diversa cioè se questa matrice appunto corrisponde al pattern p eh e questa matrice qua invece sulla destra e in pratica la posso vedere anche come ehm la matrice che corrisponde al pattern complementare di quello di quello di partenza cioè in cui vado a cambiare in pratica ogni 0111 e viceversa quindi in pratica in questo dipende dal fatto che ehm se io considero se io considero ehm il eh il il pattern complementare quindi se vado a studiare la matrice che corrisponde al pattern complementare questa per definizione è data da lavatrice appunto FN meno K con il pattern complementare ma considerare il pattern complementare equivale in pratica a scambiare gli zeri con gli uni per cui insomma c'è una relazione che è abbastanza semplice da da capire per cui in pratica quando io vado a fare questa trasformazione e io è come se avesse a che fare da una parte col triangolo con un vincolo appunto sul fra il numero di zero e di uni che corrisponde al pattern pil e qui l'altro triangolo invece corrisponde al pattern complementare ok allora ecco una cosa che sta che è stata dimostrata qualche anno fa qualche anno fa e ci siamo chiesti ma quand'è che queste matrici RPRP segnato questa sensazione quando sono tutti e due ricordano a re perché finora non abbiamo abbiamo semplicemente fatto la trasformazione senza senza del del fatto che siano matrici di riordan e ancora non è venuto fuori ecco ci sono invece delle situazioni particolari che garantiscono che quando io faccio quella trasformazione a partire dalla funzione bivariata F di XYI due triangoli che ottengo sono tutti e due riordan Ray va bene EE questo succede e quando siamo in questa situazione allora quando in pratica il il polinomio di correlazione è di tipo particolare vedete come è fatto qui ho una somma di c due XY con i cioè in pratica i match ce le ho soltanto in corridoio cioè devo dove devo avere dei dei valori uno nel nel nel nel match soltanto quando nella coda ho esattamente lo stesso numero di bit uno e lo stesso numero di bit zero vedete il polinomio e del tipo x alla IY alla i una somma di questi elementi in più c'è un'altra condizione l'altra condizione è che se io vado a considerare il pattern il pattern così sto studiando la differenza tra il numero di vite uno e il numero di bit zero nel pattern o è zero o è uno praticamente questi due pattern la la differenza tra il bit zero e uno nel nel nel pattern o OO è lo stesso numero oppure ha più differiscono di un beat va bene ecco in questa situazione quei due triangoli sono due riordina array quindi nell'esempio precedente quello vedete qui questo non è un in questo caso non ho tutti e due ricordano array perché vedete il polinomio di autocorrelazione in questo caso e contiene 1 1 termine x alla terza y quadro quindi questo ci garantisce che le questo fa sì che tutte e due triangoli non siano riordan a day in realtà poi insomma ci possono essere ci sono dei risultati anche ci dicono quando soltanto uno dei due lo è però insomma era quello lasciamo fare ecco questo è un esempio in cui i due i due triangoli non sono tutti e due nel e ora qui vi vi sorvolo vi lascio vi lascio lascio vi faccio vedere soltanto velocemente i risultati senza poi insistere troppo però ecco a partire da questa da questo risultato in pratica si riescono a trovare in maniera esplicita le funzioni di EH che corrispondono a quelle situazioni particolari quindi vedete qui le cose sono abbastanza complesse però poi si possa si semplificano un pochino vabbè qui ci sono tutti i passaggi che vi evito eh però ecco queste sono vedete qui la la funzione di la funzione di la si trova facendo una trasformazione particolare della della funzione generatrice bivariata e la funzione h vedete che è abbastanza complicata e la funzione h però la posso trovare direttamente a partire e a partire da dal polinomio di autocorrelazione eh eh però appunto da questi passaggi lascerei fare ecco però perché ve l'ho fatto vedere questa cosa perché e tutti gli esempi di reorder che vengono fuori facendo questo questa trasformazione hanno tutti una caratteristica interessante cioè hanno una sequenza molto complicata mentre la Cia esiste una matrice che insomma dire che è semplice è una parola grossa che però è una struttura invece abbastanza regolare eh infatti quello che si dimostra e che se ho un un pattern ovvero un pattern che soddisfa le caratteristiche che abbiamo visto allora in pratica gli elementi della matrice soddisfano questa relazione di ricorrenza ora questa di relazione di correnza apparentemente può sembrare eh complessa però vedete qui si sta definendo un elemento del triangolo in funzione di altri elementi del triangolo no che si trovano nelle righe ehm precedenti o nella stessa riga allora qui la cosa migliore è vederlo graficamente quella ricorrenza che vi ho fatto vedere corrisponde di fatto a questa situazione cioè nei record un array di che corrispondono a l'enumerazione di linguaggi eccetera eccetera ogni elemento è dato da una combinazione lineare degli elementi che si trovano nelle righe precedenti in cui entrano in gioco i coefficienti del polinomio di autocorrelazione quindi in particolare vedete in questi elementi c due c quattro c sei sono soltanto pari perché appunto si sta parlando di e pattern di riordan quindi il polinomio autonomo relazione alla caratteristica di avere diversi da da zero soltanto quelli di posizione spari e ogni elemento del triangolo lo posso trovare facendo una combinazione lineare degli elementi che si trovano nelle righe precedenti andando AA moltiplicarli per i coefficienti che vedete allora uno e uno qui che sono i valori che ci sono sempre dopo il c due è il coefficiente due del polinomio di correlazione c quattro e coefficiente quattro ovviamente ci si ferma quando a un certo punto questi sufficienti diventeranno zero eh perché quelli centrali tinti li ho disegnati in grigio perché quelli devono essere presi col segno negativo va bene e oltre a questi a questa questa dipendenza poi c’è da tener conto anche del contributo di un altro elemento che è quello che si trova in questa posizione che dipende da dalla caratteristica del pattern però vedete che la cosa interessante è che ogni elemento lo posso determinare da da una combinazione lineare che c'ha una struttura ben abbastanza semplice per cui vedete no perché c'ho una dipendenza da tutte le righe da tutte da alcune righe precedenti in cui vado a prendere sempre i tre elementi tre elementi e coefficienti che vado a considerare sono sempre sono dei coefficienti che hanno a che fare con col polinomio di autocorrelazione e quindi che abbiamo una matrice tutto sommato abbastanza semplice va bene anche se se no queste righe possono essere tante ecco io vi ho riportato un esempio per chiarire un po eh la differenza tra e la amatrice che in questa casa tutto sommato è abbastanza semplice e quella che invece sarebbe la A la sequenza del triangolo allora qui sto considerando il pattern 10101 va bene questo chiaramente dà origine a dei a dei match perché insomma c’ho un match in più di un punto e infatti il il il polinomio di autocorrelazione e uno più XY più x quadro y quadro va bene allora utilizzando questo risultato e io in pratica posso concludere che ehm se sono interessata appunto a studiare eh il numero di parole che evitano il Pat che hanno n bit n bit abbiamo detto oh uno che è n meno K bit zero questo è il significato allora e qui vedete cosa ha in questo caso io c'ho qui c'ho l'elemento quindi uno e uno quello che che è richiesto e poi qui ho c due EC quattro in pratica di come elementi diversi da zero quindi questa è la la la dipendenza che ottengo da da da da questo grafico che vi ho fatto vedere prima e più in più c’è da tener conto perché c’è anche questo c quattro perché devo tenere conto eh appunto di questo elemento che vi dicevo oltre a questi alla dipendenza che che ha efficienti in così particolare devo tener conto anche di questo dell’elemento che si trova in posizione n più 1-2 il numero degli uni in PE poi K più uno per la differenza tra il numero degli zeri e il numero di comuni in piedi e quindi alla fine la la la la la la la amatrice che viene fuori è quella che caratterizzata da da questo da questa da questo grafico che vedete ecco questo che cosa vuol dire allora vuol dire allora se io vado a questo punto eh a partire da questa da questo schema a vada a trovare la sequenza la sequenza vi ricordo che ha la posso trovare a partire da questa formula qui che avevamo visto no qualche lucido faccio devo dire additi e la somma con i maggiori uguale di zero di chi alla IA di chi alla meno IE poi devo considerare le varie picconi cioè le le funzioni generatrici dei coefficienti che si trovano nelle righe precedenti più c'è anche il contributo e dei coefficienti q che sono quelli degli elementi che si trovano nella stessa riga ecco no volevo farvi giusto vedere questo questo passaggio allora quando vedete quando i è uguale a zero quando è uguale a zero qui ho un t alla zero quindi uno spera di chi alla zero quindi di nuovo uno quindi P Zero di chi ecco P Zero di chi che cos’è per i tipi zero di TE la funzione generatrice che corrisponde alla riga precedente no quindi uno abbiamo detto tenete conto che c due che i vari c due c quattro sono tutti valori uno vanno valgono uno perché nel polinomio di correlazione o degli zeri o uno quindi c due e uno quindi ho uno meno t più t quadro perché abbiamo detto quello in grigio lo prendo col segno meno quindi vedete 1-2 meno ti quadro corrisponde alla funzione generatrice di questi ultimi questi scienti poi quando io uguale a uno ho t per a di chi alla -1 e poi di nuovo la funzione generatrice di questo secondo e di questo secondo eh eh di questa seconda colonna di questa seconda riga è sempre uno meno t più t quadro e poi devo andare a considerare ti per addetti per q di tim accuditi in questo caso è semplicemente uno ecco facendo questi questi conti quindi ricavando quanto vale additivi vedete che viene fuori questa funzione generatrice che è abbastanza complessa no vedete c'è una radice quadrata all'interno della quale compare un polinomio di quarto grado eh e se vado in particolare a fare la la lo sviluppo in serie di questa di questa funzione vedete che ho la sequenza 1 1 3-3 12-30+93-3 282 cioè questo ha per dimostrare che gli esempi che vengono fuori in questo contesto hanno tutti la caratteristica di avere una sequenza molto complicata come questa no cioè qui quello che sto dicendo è che ogni elemento di ogni del triangolo lo posso trovare come combinazione lineare di elementi precedenti ma con questi coefficienti vedete un conto è avere 1111 conto avere 1 1 3-3 poi dopo chissà come diventano no mentre la matrice la matrice ha una forma e non non direi semplice ma però regolare che riesco a trattare a trattare ed è facilmente quindi volevo eh appunto visto che abbiamo parlato e vi ho fatto vedere riordinare e abbiamo parlato di linguaggi e questo insomma mi sembra l’esempio più eh un esempio che mostra bene che evidenzia bene come in tante situazioni possa avere eh delle sequenze che sono molto complicate mentre la matrice mi può permettere di di di di studiare il problema in maniera in maniera più più semplice va bene e ecco quello che poi si può dimostrare EE che andando poi a fare a specializzando i casi e abbiamo detto no che per essere 1 1 recordman pattern quindi affinché tutti e due triangoli siano dei riordan a ridisegna non solo che il polinomio di auto correlazione abbia quella forma particolare ma che il numero di bit uno e zero nel pattern differisca al più di uno no come né come il numero ecco se e se si va a studiare eh se si vanno a studiare questi questi questi casi quindi che cosa quali sono i casi possibili il che numero è che ho un bit che il numero di bit e uno è maggiore del numero di vite zero di uno oppure posso avere la situazione inversa cioè il numero di ditte zero è maggiore di uno rispetto al numero di bit uno oppure l'altra situazione è che quando ho lo stesso numero di bit uno e di bit zero ecco se si fa questa specializzazione allora si riescono proprio a trovare anche le funzioni di h del del in funzione in funzione di che cosa in funzione non è esattamente il polinomio di auto correlazione ma è il polinomio di autocorrelazione e i cui in pratica siccome siamo partiti da quello più variato no con XYE in pratica lì si tratta di andare a mettere al posto di XY radice di tip radice di in modo da e alla fine di da ricondurci di nuovo al caso continua quindi brache come se avessimo il polinomio del del tipo c due i quindi poi soltanto quelli di tipo cari e poi t alla i che è la lunghezza del del pattern ecco se si fa se si fa se si specializza Eh se si specializzano il numero di bit uno e zero ecco che si trovano si possono trovare risultati espliciti su PH e quindi ad esempio quando il numero 3 quando la differenza tra il numero di vite uno e il numero di vite zero è uno quindi ho più bit uno di bit e zero le funzioni di h sono date esplicitamente da queste formoline ritengono anche in questo caso soltanto dal polinomio di auto correlazioni quindi c'è una volta provato quello qui c'è mustacchio perché giocare il polinomio è questione di un attimo e poi ho gratis subito vedete anche le funzioni di h che definiscono il triangolo se invece di di avere n uno meno n zero uguale a uno o n uno meno n zero uguale a zero vedete che cambiano un pochino le formule amore ma però non cambia la logica cioè le posso sempre costruire a partire dal polinomio di ehm di correlazione e poi c'è l'ultimo caso quello in cui appunto il numero di zeri è superiore di uno rispetto al numero di di uno quindi qui ecco se eh se qualcuno avesse voglia di questo potrebbe anche dare origine a un a un progetto se volete perché qui insomma basta inventarsi partire da dei pattern che soddisfano e quella eh la caratteristica che abbiamo detto vero che che hanno un polinomio di correlazione in cui compaiono soltanto i termini e i cicconi di di indice pari e poi la differenza tra gli zeri e uni e al più uno e vi avete direttamente tutte le matrici e la possibilità di costruire le matrici di EH la cioè scusate il ricostruire e ricordare a partire dalla matrice di EH e a verificare eventualmente qual è la sequenza che la matrice di un cibo particolare quindi insomma si possono fare un po di considerazioni su quello che abbiamo detto ecco questo è un esempio questo è un esempio che corrisponde al pattern eh 00011 qui cosa succede qui ovviamente quando si va a trovare il polinomio di autocorrelazione e il match si ha soltanto all'inizio direi vabbè perché oltre quando mi sposto non ho più un match però e il uno è un polinomio che soddisfa che soddisfa le ee è un un polinomio di uso correlazione che corrisponde a un a un a un pattern di riordan perché la la cosa importante è che la differenza tra il numero degli zeri uni vedete in questo caso EE uno no c'ho tre zeri e 2 1 quindi li sono nella possibilità di applicare quei risultati quindi se andate a prendere la formoline le formule questa qui l'ultima no perché qui sono nel caso in cui il numero degli zeri sia maggiore del numero degli uni e andate a sostituire al posto di x in questo caso uno perché il polinomio di un'operazione in questo caso è particolarmente semplice ecco che trovate queste due funzioni di h che corrispondono a questo a questo mhm eh a questo a questa matrice e che conta quindi che cosa conta il numero le parole K che evitano questo pattern eh che hanno enne NN bit no e nemmeno K bit zero va bene e quindi niente vi ho anche evidenziato qual è la ricorrenza l' il pattern che viene fuori nella costruzione di questo triangolo no vedete qui 106 106 ad esempio lo trovo facendo la somma di 58+52 poi togliendo quattro eh se andassimo a trovare la sequenza di questo triangolo lo si può provare a fare verrebbe fuori invece una sequenza molto molto complessa ah eccolo qua quindi infatti mi sembrava strano di non averlo fatto quindi se fate questa operazione e se con queste due funzioni andate a trovare la funzione generativa la funzione generatrice della sequenza vedete viene fuori questa cosa complicatissima in cui addirittura RD qui rappresenta questa radice quadrata no quindi vedete 111112 fu 1-1 cioè una sequenza che insomma respiri difficile che non non dà nessun aiuto senso che la sequenza è interessante serve quando è semplice cioè quando e cosi complicata non non difficilmente ci porta da quel da qualche da qualche parte quindi niente questo era quello che volevo dirvi su su queste su questi triangoli e qui vi ho riportato anche alcuni casi particolari formule che si possono trovare per intere classi di pattern eh quindi se sono tutti pattern questi che cadono nella nella nella classificazione che abbiamo detto no quindi vedete p uguale AI alla J +1 0 alla J quindi un pattern in cui ho immune poi tanti zeri ma uno in meno quindi insomma sempre nella stessa nipote nello stesso caso di prima e vedete le due funzioni di EP che vengono fuori che ovviamente dipendono da Jay no quindi chiaramente se se Jay e grande vedete c'ho sotto la radice 1 1 termine che dipende da un via alla J più uno qui c'ho il pattern complementare in pratica quindi c'è 1 0 alla J 1 1 alla J il funzione sono simili ma non non esattamente uguali nel caso invece questa è un'altra parte in particolare in cui ho lo stesso numero di vite uno e di zeri e qui nel nel caso in questo in questi in questo caso ho sia che consideri uno alla J zero alla J oppure zero alla J alla Jo sempre le stesse le stesse funzioni e poi questo è l'ultimo un altro un altro esempio in cui invece ho il pattern quello a zig zag no 1 0 alla J uno eh anche questo in questo caso è sono sempre nel caso eh mentre qui avevo tutte situazioni in cui il polinomio di relazione uno perché c'ho il match soltanto no dunque no sì sì certo perché quando mi sposto uno sì c’ho tutti uni all’inizio ho tutti zeri quando mi sposto non posso avere dei match quando invece parto da un pattern 1 0 alla J uno qui ti match ne ho più di uno e infatti vedete che le funzioni di h che vengono fuori infatti sono un pochino più complesse nel senso che entra in gioco delle somme che tengono proprio conto della della della lunghezza del pattern e va bene quindi queste sono tutte tu di risultati in tutti ricordano appunto che contano ehm che ho a che fare con le numerazioni di di di linguaggi e ecco questo invece è un'altra cosa che che volevo che ha sempre a che fare con quello che si stava dicendo e ora qui lo lo gli ho ricambiato nome abbiate pazienza perché io ho preso un materiale un po dalla parte un po dall’altra per cui vi quella che prima voi chiamato FXY qui è diventata RTYW insomma è la stessa cosa ecco una caratteristica interessante delle funzioni generatrici viviate come abbiamo già visto che ovviamente poi se vado AA sostituire nel posto di del delle variabili dei valori particolari posso ottenere delle funzioni particolari ad esempio se eh se io voglio trovare e la funzione generatrice che conta le stringhe binarie quindi le parole che appartengono quindi a alle parole binarie con il vincolo che si diceva quindi che il numero degli zeri sia minore o uguale del numero degli uni dire appunto è quello che abbiamo detto finora no è n il l’elemento della matrice conta appunto gli elementi che hanno NB uno EN meno K bit zero per cui sano siamo sempre in questa situazione e che appunto evitano il pattern ecco se voglio trovare la funzione generatrice non rispetto AXEY ma rispetto eh cioè voglio voglio contare le parole semplicemente rispetto al numero di bitte uno ok e come faccio e basta che nella mia funzione generatrice vi variata io metta W uguale a uno se V doppio me lo metto uguale a uno praticamente mi mi mi sparisce l’informazione relativa al numero di bit zero mi rimane soltanto quella relativa al numero di bit uno e ottengo quindi una funzione generatrice che che conta queste parole però da un punto di vista diverso le le le conta eh tenendo conto del numero di bit uno di questi contengono quindi il coefficiente tienne di questa funzione mi dirà quante sono le parole che hanno n bit uno quindi cambia vengono distribuite in maniera diversa queste parole rispetto alla distribuzione precedente più interessante ancora forse è il caso successivo eh cioè se se ed è forse anche quello più insomma che non è non sarebbe banale trovare in maniera diversa cioè se io voglio trovare le parole e quante sono le parole che binari con un numero di vite zero minore uguale al numero di vite uno che che evitano il pattern il PIL le voglio contare rispetto alla lunghezza eh rispetto alla lunghezza allora quello che devo fare e questa trasformazione particolare cioè se ehm proprio perché la RNK ne nella nella nella nel triangolo conta il numero le parole che hanno n bit eh uno EN meno K bit zero se io voglio contare ehm se voglio contare la lunghezza eh quello che devo fare è una trasformazione particolare cioè devo mettere al posto di ehm della prima della prima variabile devo mettere un quadro e al posto della seconda devo mettere 1 1 su tim perché se ci pensate bene per questo perché perché le parole se RNK punta le parole che hanno n bit uno che è n meno K bit zero che lunghezza ha la parola corrispondente n più n meno K perché quella parola che sto considerando ha n bit uno EN meno K bit zero quindi complessivamente a lunghezza due n meno K siccome io voglio farla diventare la voglio contare le parole rispetto alla lunghezza qui vedete cosa ho fatto al posto di hicks ci ho messo quadro e al posto di WO messo 1/1 1 1 su t eh quando andate nella soluzione generatrice l'ics alla n praticamente diventa un t alla due n perché c'ho messo un tip quadro il doppio alla K in pratica diventa è un V doppio VUT scusate alla meno cappa perché l’ho sostituito con uno su team IE in questo modo esattamente e riesco a contare le parole esattamente anche rispetto alla a alla loro lunghezza questo per dire che il risultato che vi ho fatto vedere in realtà è più generale ancora perché partendo facendo queste queste eh scusate vi ho detto una cosa sbagliata all'inizio una cosa imprecisa all’inizio perché si certo perché sennò non torna la la qui è giusto che sia un R ok qui non devo ovviamente fare questo ragionamento con la funzione F da cui siamo partiti quella che dà origine al triangolo pieno ma qui R indica la funzione generatrice più variata del riordan array quindi abbiamo già dimostrato che i due triangoli sono due ricordano a re quindi abbiamo la funzione generatrice bivariata del riordan array e per per trovare queste due funzioni particolari semplicemente devo fare queste sostituzioni e facendo questa operazione vedete che qui si possono trovare un sacco di funzioni generatrici e particolari no vedete ad esempio e se ho qui vi ho riportato appunto come nel caso precedente invece dei riordan a Ray qui c’è la le le funzioni eccetera atrici che ottengo contando le parole o rispetto al numero di bit e uno oppure rispetto alla lunghezza dopo avere fatto quelle quella trasformazione questo è stato fatto per questi pattern particolare uno alla J +1 0 alla J per il pattern quello zig zag e poi insomma si possono fare in tanti anche per gli altri partner qui non sono riportati ecco un’ultima cosa che volevo osservare eh ecco noi finora quando vi abbiamo parlato di di queste di delle delle delle parole che abitano pattern l'abbiamo sempre parlavo in questi termini ecco però nel caso binario cioè quello che stiamo considerando adesso tenete conto che una possibile rappresentazione che può essere fatta di queste parole anche tramite e dei cammini nel piano no cioè immaginiamo di avere e il bit zero che con che corrisponde a un passo ehm Student un bit e uno che invece che corrisponde a un passo nordest quindi quando io vado a considerare gli elementi RNK del di queste di questi particolari ricordano array cioè in pratica è come se avesse a che fare con dei cammini nel piano nel piano cartesiano che partono dall’origine che sono costituiti da eu n step del tipo nordest quindi tutte le volte che appunto il bit uno corrisponde a un passo nordest EAN meno K step invece sud-est con il vincolo che questi cammini non non hanno mai il il sotto cammino che corrisponde al pattern quindi praticamente se io parto dall'origine e ho come la possibilità di spostarmi nel piano utilizzando questi questi due tipi di step quindi e ne step di tipo nordest EN meno K step di tipo eh sud est e faccio attenzione a non a non costruire mai la la la sequenza che corrisponde al al pattern o tengo esattamente ho una rappresentazione grafica delle parole che evitano che evitano il pattern eh eh quindi queste queste questi cammini in pratica terminano e nel punto di coordinate due n meno K questo per per costruzione e e quindi niente questa era una rappresentazione è interessante in particolare la funzione di di la funzione della prima colonna siccome li c'ho quelli che corrispondono vedete AK uguale a zero eh quindi quella quella funzione lì mi dà i cammini che arrivano nel punto di coordinate due n zero cioè sono i cammini che poi ritornano sull'asse delle x no quindi ho una rappresentazione ehm di queste di questi fimmini piuttosto particolare ok va bene questo era questo appunto era eh un esempio è che mette insieme sia delle cose che avevamo detto sui linguaggi che appunto sui e sui riordan ora qui appunto non le dimostrazioni non E ne ho fatti vedere però insomma di quello che mi interessa è che sia chiaro il concetto va bene qual è qual è quali sono le caratteristiche di questo tipo di di matrice allora un'altra cosa che voglio di cui voglio parlare è riguarda questo risultato generale riguarda appunto un'altra caratteristica interessante delle matrici di riorda eh ovvero eh il fatto che permettono o di calcolare in modo estremamente semplice somme combinatorie eh allora se avete una somma il cap che va da zero a entri in cui compare l'elemento generico di NK di un ricordano array e poi abbiamo abbiamo FK che invece è 1 1 qualsiasi altra sequenza allora anche qui quello che si dimostra e che questa somma io la posso trovare in che modo e come andando a fare l'estrazione del coefficiente ennesimo di che cosa di di TF di h di ciò ho bisogno di sapere qual è la funzione generatrice della sequenza FK di sapere qual è la coppia di a che definisce quindi organ array dopodiché questa somma combinatorie la vostra la posso trovare facendo l'estrazione di questo di questa funzione generatrice e EE questo questo risultato e permette di trovare tante tante davvero tante somme in modo abbastanza in modo abbastanza semplice ecco tenete conto che tutti tutti ricordano il re che abbiamo considerato finora insomma da quelli semplici a quelli più complessi che abbiamo visto oggi che hanno a che fare con con i cammini no cioè se voi li mettete qua dentro e poi ci mettete un FK qualsiasi voi avete uno strumento per calcolare la somma corrispondente basta ovviamente estrarre il coefficiente non sempre ci si riesce e allora come casi particolari va bene questa è la trasformazione di eulero è quella più più famosa no se vi NK eh in particolare il triangolo di Pascal quindi l'organo arredo più semplice eh cosa succede quando si fa eh quando al posto di di EH sostituiamo le due funzioni di Pascal vedete al posto di Dio ho messo 1/1 meno t al posto di a ho messo t diviso uno meno t quindi per trovare una qualsiasi somma ok in cui compare un coefficiente binomiale né sul cappa io basta che estragga basta poi bisogna che se è facile insomma però insomma lo lo faccio facendo l'estrazione di questo coefficiente e questo vabbè è un caso ancora più più semplice nel caso nel caso in cui dnk uguale a uno eh corrisponde praticamente e ad avere di t uguale a uno essenzialmente vabbè la soluzione quindi questo è il caso il caso banale ecco quindi vi ho riportato qualche esempio qualche esempio detto per vedere e cosa cosa si può fare con questo con questo teorema no supponiamo ad esempio di voler calcolare la somma per cappa che va da uno Ande ne su cap -1 la K -1 su K va bene quindi se io qui qui riconosco e c'è un array quindi cosa devo fare qui il trucco e devo riuscire a trovare la funzione generatrice della sequenza efficace che si trova qui a moltiplicare ora questa sono tutte cose che in parte abbiamo già fatto no perché vi ricordo abbiamo dimostrato che la funzione generatrice di uno su n è il logaritmo di 1/1 meno si l'avevamo visto è uno dei primi esempi che avevamo fatto avevamo anche visto che la funzione generatrice di di uno su della somma per cap che va da una n di uno sul campo cioè la funzione generatrice dei numeri armonici e 1/1 meno si per il logaritmo di 1/1 meno si anche questo l'avevamo trovato che relazione c'è d'altra parte e perché vi ho Detto questo perché ehm noi avevamo studiato la funzione generatrice di uno su n qui in pratica ho uno su n che però è cambiata a segni alterni perché c'è questo -1 alla K -1 ma abbiamo visto mi ricordo che passare da una sequenza alla sequenza segni alterni equivale a cambiare il segno nella variabile che definisce la funzione generatrice no se io ho la funzione generatrice eh di ehm della sequenza uno su enne a segno al termine come faccio a trovarla eh basta che sostituisca eh al posto di film noti va bene quindi vedete come faccio a calcolare questa somma questa somma la calcolo facendo di t del riordino array che è 1/9 meno t poi devo prendere la funzione generatrice della sequenza FK che è appunto il logaritmo di 1/1 più V doppio che devo calcolare in h al posto di W ci devo mettere ti diviso 1-3 qui faccio la sostituzione e se faccio questa sostituzione mi viene proprio 1/1 meno tip per il logaritmo di 1/1 meno t questa funzione noi la conosciamo bene perché l'abbiamo trovata nel caso del quiz oltre proprio l'ennesimo numero armonico no quindi abbiamo dimostrato che questa somma corrisponde all'ennesimo numero armonico oppure qui ci sono due regole due situazioni e due situazioni e eh simili alla precedente che generalizzano un po la regola eh la trasformazione di olena no la trasformazione di olero sia in corrispondenza di anni su K in realtà il coefficiente binomiale che si può andare a considerare

In corrispondenza di n su K in realtà il coefficiente binomiale che si può andare a considerare può essere molto più generale perché le in entrambi queste due situazioni ho sempre un riordino a lei va bene quindi coefficiente binomiale n più KM più BK quando B è maggiore di a corrisponde a un riordino array che ha come di ti alla m diviso uno meno t alla m più uno e come HT alla B meno a diviso 1-3 alla B questo se trovate AA a ragionare un po in quella quella regola di Newton ce la dovreste ce la dovreste fare abbastanza facilmente quando invece vi è minore di zero si ottiene quest'altra relazione perché dicevo in quel caso il il coefficiente binomiale corrisponde a un ricordo array un pochino diverso che è appunto o uno più TN poi come.de chi ha meno B per uno più t alla a come come h va bene quindi la la questa ora questi sono casi particolari che però insomma sì sì capitano di frequenze i il il risultato vale qualsiasi sia il recorder array qui vi sto semplicemente mostrando dei casi particolari che però sono frequenti perché insomma somme che coinvolgono coefficienti binomiali si trovano si trovano abbastanza abbastanza spesso e in tutti e due casi le posso trovare le posso risolvere utilizzando questa questa questo risultato e ecco questo questo è un esempio e questo è un esempio ehm vedete qui sono proprio nel primo nel primo caso eh nel primo caso vedete ho il una somma la somma che voglio trovare è questa vedete è una somma piuttosto complessa no eh allora il primo coefficiente binomiale EN più KE poi m più due K quindi sono in questa in questo caso perche.be due EKE uno quindi sono del caso B maggiore di a e in questo caso la trasformazione che devo fare è questa con F che devo trovare ovviamente quindi e chi alla m diviso uno meno t alla m più uno la funzione di t mentre la funzione HET alla B meno a ma vi avevo detto che e due quindi EEAE uno quindi questa differenza e uno e poi uno meno t al quadrato questa è la funzione h questa che cos'è questa ormai la dovreste conoscere bene questa e la sequenza e sono i numeri di catara assegno alterni va bene perché c'è 1-1 alla K quindi è uno su K più uno di un K su K quindi vedete qui semplicemente vado a prendere la funzione generatrice dei numeri di catalano in cui però è un posto di y non ho messo meno y quindi poi si tratta semplicemente di andare a sostituire qua dentro al posto di y la funzione h del riordinate e qui vabbè se se si fanno queste se si fa questa sostituzione e magicamente si semplifica tutto e si ottiene proprio 1/1-3 alla m cioè una funzione molto semplice no nonostante siamo partiti da da una somma piuttosto piuttosto complessa e quindi niente questa questo è la per per estrarre questo coefficiente semplicemente applico applico con la regola la regola di Newton qui al solito c'è il solito passaggio che si fa sempre con la negazione che qui non è stato scritto in maniera esplicita però vedete che praticamente mi mi sono ricondotta per il calcolo di questa somma a fare dei passaggi di tipo puramente algebrico va bene ed esempi come questi se ne possono fare quanti quanti ne volete eh beh ecco un'altra cosa che volevo evidenziare è che ora non sempre non sempre e siamo si è così fortunati cioè era qui abbiamo fatto la trasformazione e si trova una funzione generatrice che poi della quale poi ho il coefficienti lo so estrarre no non è detto che c'è sempre possibile cioè per per dire no se si prende questo esempio qui qui abbiamo anche qui 2 2 cose due quantità che conosciamo bene a questo punto è nessun Kappa e il triangolo di Pascal dove rappa su Kappa sono coefficienti binomiali centrali e la funzione generatrice l'abbiamo trovata e uno di Vito la radice di 1-4 kit eh qui ho messo un perché poi devo fare la sostituzione con la funzione h e quindi viene fuori questa funzione facendo tutti i passaggi viene uno diviso la radice quadrata di 1-3 per 1-5 di ora in questo caso vedete la funzione che ho trovato non è semplice come la precedente qui non si riesce questo è un esempio che non abbiamo non in questa situazione non si è in grado di trovare il coefficiente esatto va bene eh quello che si può fare in questi casi è trovare un'approssimazione però ecco e tenete conto che che ora noi queste cose non le abbiamo fatte cioè non abbiamo ci siamo preoccupati soltanto della dell'estrazione esatta di coefficiente data la funzione generatrice trovare qual è il coefficiente esatto del termine enne ci possono essere delle situazioni e questa è una di quelle in cui io non riesco a fare queste estrazioni esatta però e tenete conto la anche se non non è una cosa che che non non non si è fatta che però la conoscenza della funzione generatrice permette anche permette di fare delle approssimazioni di coefficienti va bene quindi anche in situazioni in cui io e coefficiente non riesco ad estrarlo in maniera in maniera esatta o comunque la possibilità a partire dalla funzione di trovare 1 1 un'approssimazione vabbè non vi sto neanche a dire in che modo perché insomma sulla da dagli scopi del corso però per dire ecco che questo che in generale sia nel caso del calcolo delle somme ma in generale qualsiasi sia il problema che andate a studiare eh ci possono essere delle situazioni in cui i coefficienti o li so trovare perché la funzione magari è complessa ma comunque la conoscenza della funzione generatrice al suo interno coefficienti ce l'ha quindi insomma esistono poi delle tecniche permettono di approssimarsi coefficienti a partire dalla funzione generatrice va bene vabbè ora questo poi lasciamo fare non non ve lo faccio vedere questo è un altro esempio e vabbè quindi niente non vi direi altro va bene non direi non vi direi altro e e niente quindi io a questo punto non non se avete domande sugli aspetti e su questi su questa applicazione un po particolare un po avanzato ovviamente rispetto non è applicazioni beh non sono applicazioni banali rispetto a quelle cose che abbiamo fatto durante il corso però insomma mi sembrava un'applicazione comunque di rilievo considerato anche la l'applicazione ai linguaggi che evitano fatto e che abbiamo fatto va bene quindi ee e comunque si presta da origine a diversi approfondimenti insomma se qualcuno fosse interessato non lo so appunto se avete tra l'altro già io a questo punto se a meno che non vogliate fare una lezione dedicata proprio ai progetti e possiamo dedicare questi ultimi 10 minuti a discutere un attimo di quelli se volete oppure poi ci risentiamo se qualcuno mi vuol chiedere qualcosa io avevo messo a disposizione diversi diversi elaborati sul sito del corso ho quindi se dunque avevo messo diversi elaborati no l'ho messi in fon articoli per progetti articoli per progetti