

## **Лабораторна робота 2**

### **Оцінювання чутливості розв'язку на основі ієрархічної моделі підтримки прийняття рішень**

#### Мета роботи:

*- Дослідити різні методи оцінювання чутливості розв'язку багатокритеріальної та однокритеріальної задач підтримки прийняття рішень до збурень в оцінках експертів:*

- графічні методи: аналіз чутливості виконання, градієнтний аналіз чутливості, різницевий аналіз чутливості,
- розрахувати діапазони змін ваг елементів ієрархії, які призводять до змін рангів альтернатив при використанні дистрибутивного і мультиплікативного синтезів.
- розрахувати інтервали та індекси стійкості за узгодженістю для всіх елементів МПП.
- розрахувати інтервали стійкості щодо збереження ранжування альтернатив для всіх елементів МПП.
- *Знайти критичні та стійкі елементи ієрархії.*

## **1 Теоретичні відомості**

### *Постановка задачі*

Експертні оцінки піддаються впливу невизначеності і, як наслідок, можуть бути суперечливими. Причинами протиріч, зокрема, можуть бути:

- неповнота знань у експертів щодо питання, яке розглядається,
- втома або незацікавленість експертів у рішенні,
- існування неузгодженостей реального світу,
- неадекватність ієрархічної структури моделі,
- скалярна шкала для вираження суджень експертів.

Сімейство методів аналізу ієрархій (МАІ) є одним з найбільш широко використовуваних методів багатокритеріального прийняття рішень на базі експертних оцінок. Для дослідження достовірності отриманого рішення доцільно визначити залежність між результатами МАІ та ступенем неточності початкових даних — експертних оцінок. Ця задача відноситься до більш узагальненого класу задач аналізу чутливості (АЧ) розв'язку до зміни початкових даних.

Розглянемо математичну постановку задачі аналізу чутливості розв'язку, отриманого МАІ, для ієрархії прийняття рішень, яка складається з двох рівнів: критерії та альтернативи.

Дано:

- $A = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$  - множина альтернативних варіантів рішень;
- $C = \{C_j \mid j = 1, \dots, m\}$  - множина критеріїв (цілей);
- $W^C = \{w_j^C\}$ ,  $w_j^C$  - вага критерію  $C_j$ ,  $\sum_{j=1}^m w_j^C = 1$ .
- $W = \{w_{ij}\}$ ,  $w_{ij}$  - вага  $a_i$  відносно  $C_j$ ;
- $W^{\text{глоб}} = \{w_i^{\text{глоб}}\}$ ,  $w_i^{\text{глоб}}$  - глобальна вага альтернативи  $a_i$ ;

Потрібно:

- оцінити чутливість глобальних ваг альтернатив  $W^{\text{глоб}}$  до змін у вагах критеріїв  $W^C$ .

*Приклад. Оцінювання чутливості розв'язку задачі визначення відносної привабливості альтернативних варіантів інвестицій (розподіл ресурсів)*

### **Варіанти інвестицій**

- відкритий пайовий інвестиційний фонд (ПІФ) ( $a_1$ );
- депозит ( $a_2$ );
- готівка ( $a_3$ ).

### Цілі інвестора (табл. 1.1):

- збереження принципів ( $c_1$ );
- зростання (приріст прибутку) ( $c_2$ );
- мінімізація ризику ( $c_3$ );
- зусилля на управління ( $c_4$ ).

*Зауваження.* Поняття «ціль» і «критерій» хоча й мають різні означення, зазвичай використовуються паралельно при аналізі рішення.

Локальні і глобальні ваги альтернатив наведені в табл. 1.2 і 1.3.

Таблиця 1.1 - Оцінювання цілей інвестора

	Збереження принципів	Зростання (приріст прибутку)	Мінімізація ризику	Зусилля на управління	Вага
Збереження принципів	1	1/5	1/5	1	0.094
Зростання (приріст прибутку)	5	1	3	3	0.509
Мінімізація ризику	5	1/3	1	1	0.243
Зусилля на управління	1	1/3	1	1	0.154
	$\lambda_{\max}=4.264$ , CR=0.1				

Таблиця 1.2 - Оцінювання варіантів відносно цілей

$c_1$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	Вага
$a_1$	1	1/5	1/5	0.090
$a_2$	5	1	1	0.455
$a_3$	5	1	1	0.455
				CR=0

$c_2$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	вага
$a_1$	1	3	7	0.649
$a_2$	1/3	1	5	0.279
$a_3$	1/7	1/5	1	0.072
				CR=0.062

$c_3$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	вага
$a_1$	1	1/7	1/7	0.065
$a_2$	7	1	1/2	0.361
$a_3$	7	2	1	0.574
				CR=0.052

$c_4$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	вага
$a_1$	1	1/3	1/5	0.114
$a_2$	3	1	1	0.405
$a_3$	5	1	1	0.481
				CR=0.028

Таблиця 1.3 – Ваги альтернатив інвестицій відносно часткових цілей і головної цілі прийняття рішення

	Збереження принципів (0.094)	Зростання (приріст прибутку) (0.509)	Мінімізація ризику (0.243)	Зусилля на управління (0.154)	Ваги відносно головної цілі	
					Дистрибутивний синтез	Мультиплікативний синтез
Відкритий ПФФ	0.090	0.649	0.065	0.114	0.372	0.312
Депозит	0.455	0.279	0.361	0.405	0.335	0.436
Готівка	0.455	0.072	0.574	0.481	0.293	0.252

Перейдемо до розгляду графічних методів АЧ.

*Графічні методи АЧ розв'язку МАІ до змін ваг критеріїв*

1) АЧ виконання. В даному прикладі альтернатива  $a_1$  краща за інші альтернативи лише за одним критерієм з чотирьох, але отримала найбільшу глобальну вагу. Оптимальність альтернативи залежить від ваг критеріїв. При поточних оцінках переваг оптимальною є альтернатива  $a_1$ , тобто інвестору слід вкладати кошти у відкритий ПФФ. Однак, якщо, збільшиться вага цілі «мінімізація ризику», то оптимальною може стати альтернатива  $a_2$ .

Ваги критеріїв позначаються діаграмою (вертикальними стовпчиками) у лівій шкалі (рис.1.1). Локальні ваги альтернатив за кожним з критеріїв позначені відмітками на вертикальних лініях критеріїв в правій шкалі. Також на правій шкалі позначені глобальні ваги альтернатив.

Локальні і глобальні ваги виміряні у шкалі відношень. Це означає, що крім ранжування альтернатив за кожним з критеріїв та загального ранжування альтернатив, нам відомі також інтервали і відношення між оцінками альтернатив.

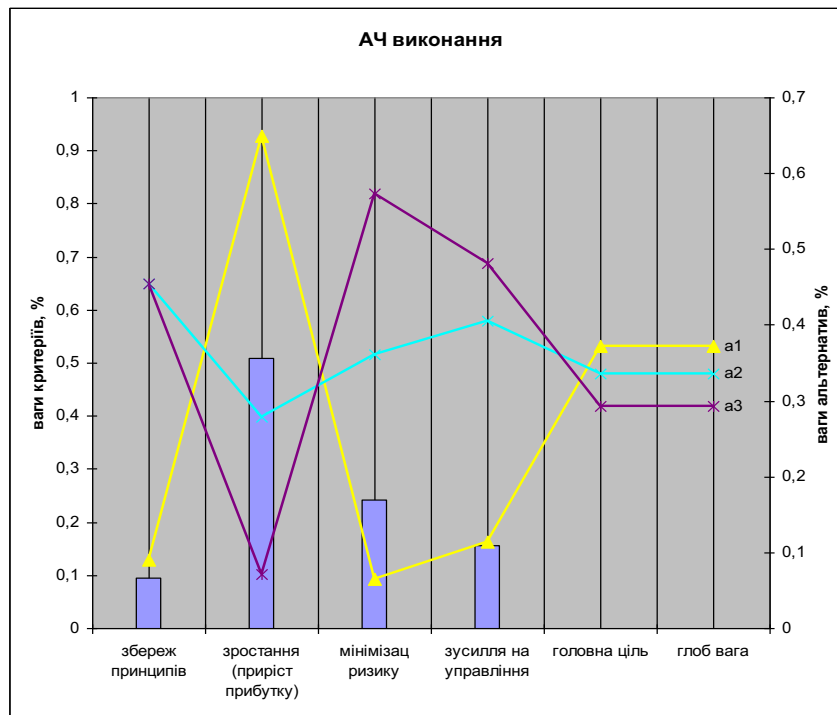


Рис.1.1 - АЧ виконання

Розглянемо, наприклад, критерій «збереження принципів». Альтернативи  $a_2$  і  $a_3$  мають однакове виконання за цим критерієм, в той час як інтервал між альтернативами  $a_1$  і  $a_2$  є великим.

Інтервали між оптимальною альтернативою  $a_1$  і наступною оптимальною альтернативою  $a_2$  є великими за кожним з критеріїв. Це є важливою інформацією.

## 2) Градієнтний АЧ результатів до важливості одного з критеріїв

Наприклад, розглянемо критерій  $c_1$  «збереження принципів». Поточна важливість цього критерію дорівнює 0.09, про що свідчить вертикальна червона лінія на рис.1.2.

Градiєнт лінії альтернативи у точці показує процентне відношення зміни глобальної ваги альтернативи при зміні ваги даного критерію. Лінії альтернатив перетинаються з вертикальною прямою критерію в точках, що відповідають глобальним вагам альтернатив.

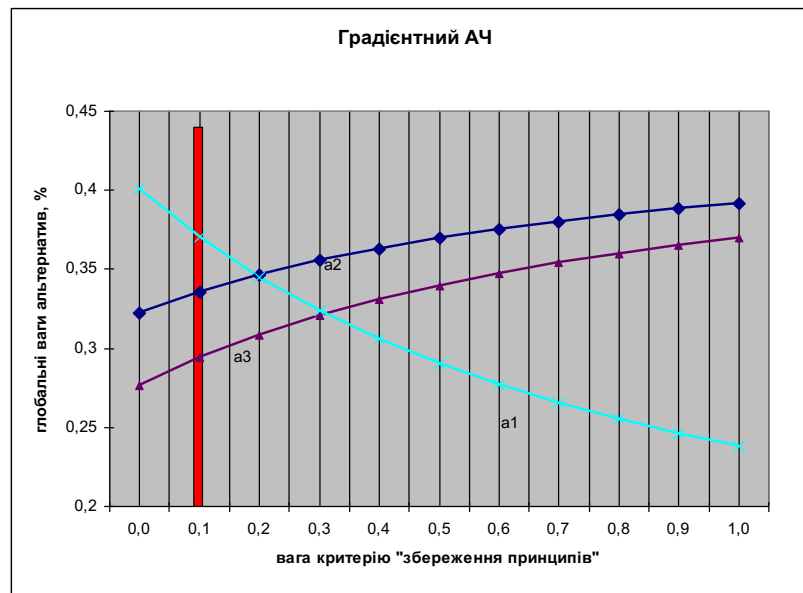


Рис.1.2. Градієнтний АЧ

При вазі критерію «збереження принципів» рівній  $w_1^C = 0.09$ , оптимальною є альтернатива  $a_1$ . При зменшенні ваги  $w_1^C$  глобальна важливість  $a_1$  зменшується, а глобальна важливість  $a_2$ , навпаки, збільшується. Якщо вага критерію «збереження принципів» стає меншою за 0.2, то  $a_2$  стає оптимальною. Для такої зміни оптимальної альтернативи вага критерію має змінитися на 100% ( $0.09 + 1 \cdot 0.09 = 0.2$ ), тобто для зміни оптимальної альтернативи потрібно суттєво змінити вагу критерію.

3) Динамічний АЧ. Ваги критеріїв та глобальні ваги альтернатив відображаються на двох лінійчатих діаграмах. Користувач може змінювати вагу одного з критеріїв, рухаючи відповідний елемент діаграми (ваги інших критеріїв при цьому змінюються пропорційно до своїх початкових значень) та спостерігати як на другій діаграмі змінюються глобальні ваги альтернатив.

4) Різницевий АЧ. Лінійна діаграма різниць між двома оптимальними альтернативами показана на рис.1.3. ПФ сильно перевищує депозит за критерієм «зростання». За іншими трьома критеріями депозит сильно перевищує ПФ.

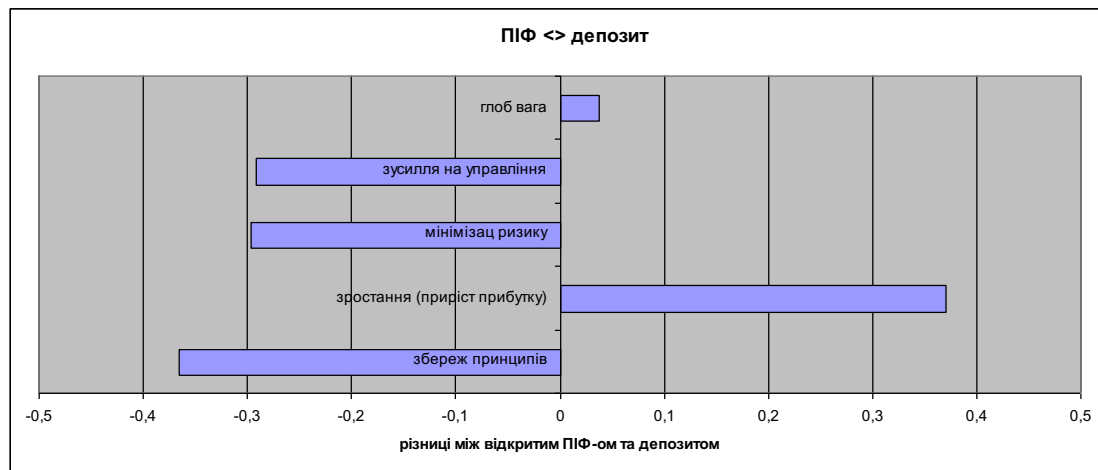


Рис.1.3. Різницевий АЧ

*Визначення діапазонів змін ваг критеріїв, які призводять до змін ранжувань альтернатив*

Нехай альтернативи перенумеровані таким чином, що  $a_1$  - оптимальна альтернатива:

$$w_1^{glob} \geq w_2^{glob} \geq \dots \geq w_n^{glob}.$$

Позначимо  $\Delta_{i,j,l}$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $l = 1, \dots, m$  величину абсолютної зміни ваги  $w_l^C$  критерію  $C_l$ , що призводить до зміни ранжування між альтернативами  $a_i$  та  $a_j$ . Тобто, нехай нова вага критерію  $C_l$  дорівнює

$$(w_l^C)' = w_l^C - \Delta_{i,j,l},$$

Вага – величина невід'ємна  $(w_l^C)' > 0$ . Для  $i < j$  виконується умова  $(w_i^{glob})' < (w_j^{glob})'$  зміни ранжування між  $a_i$  та  $a_j$ , де  $(w_i^{glob})'$ ,  $(w_j^{glob})'$  - нові глобальні ваги цих альтернатив.

Величину відповідної відносної зміни ваги  $w_l^C$  критерію  $C_l$  позначимо

$$\delta_{i,j,l} = \frac{\Delta_{i,j,l}}{w_l^C}.$$

$(w_l^C)' > 0$ , тому величини  $\Delta_{i,j,l}$  і  $\delta_{i,j,l}$  мають задовольняти нерівностям

$$(\Delta_{i,j,l} < w_l^C) \Leftrightarrow (\delta_{i,j,l} < 1).$$

Додатне значення  $\delta_{i,j,l}$  свідчить про те, що вага критерію  $C_l$  має бути зменшена для зміни ранжування між альтернативами  $a_i$  та  $a_j$ . При від'ємному значенні  $\delta_{i,j,l}$  вага  $C_l$  має бути збільшена.

В залежності від досліджуваного виду зміни ранжування дається означення критичного та стійкого критерію.

Будемо досліджувати зміну ранжування двох видів:

- 1) зміна ранжування між будь-якою парою альтернатив;
- 2) зміна оптимальної альтернативи.

Критичним (для першого виду зміни ранжування) називається критерій  $C_{l_{crit}1}$ , який має найменше значення  $|\delta_{i,j,l}|$ :

$$|\delta_{i,j,l_{crit}1}| = \min_{l=1,\dots,m} \{ |\delta_{i,j,l}| \}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Критичним (для другого виду зміни ранжування) називається критерій  $C_{l_{crit}2}$ , який має найменше значення  $|\delta_{1,j,l}|$ :

$$|\delta_{1,j,l_{crit}2}| = \min_{l=1,\dots,m} \{ |\delta_{1,j,l}| \}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Критерій називається стійким (для першого виду зміни ранжування), якщо ніякі припустимі зміни його ваги не призводять до зміни рангу ні однієї альтернативи. Критерій називається стійким (для другого виду зміни ранжування), якщо ніякі припустимі зміни його ваги не призводять до зміни оптимальної альтернативи.

Ступенем критичності критерію  $C_l$  для першого виду зміни ранжування називається величина найменшої відносної зміни його ваги  $w_l^C$ , яка призводить до зміни ранжування між будь-якою парою альтернатив:

$$CritVal_1(C_l) = \min_{\substack{i,j=1,\dots,n \\ i < j}} \{ |\delta_{i,j,l}| \}, \quad l = 1, \dots, m.$$



Ступенем критичності критерію  $C_l$  для другого виду зміни ранжування називається величина найменшої відносної зміни його ваги  $w_l^C$ , яка призводить до зміни оптимальної альтернативи:

$$CritVal_2(C_l) = \min_{j=1, \dots, n} \{|\delta_{i,j,l}|\}, \quad l = 1, \dots, m.$$

Чим меншим є ступінь критичності критерію  $C_l$ , тим «легше» змінити ранжування альтернатив, тобто менше значення ступеня критичності свідчить про меншу зміну ваги  $w_l^C$ , яку достатньо здійснити для зміни ранжування альтернатив.

Чутливістю критерію  $C_l$  називається величина, обернена до ступеня його критичності:

$$SensVal(C_l) = 1 / CritVal(C_l),$$

причому якщо  $C_l$  - стійкий, то покладемо значення чутливості  $SensVal(C_l) = 0$ . Оскільки  $\delta_{i,j,l} < 1$ , то  $CritVal(C_l) < 1 \Rightarrow SensVal(C_l) > 1$ .

*Випадок використання дистрибутивного методу синтезу*

Твердження 1. Величина  $\delta_{i,j,l}$  відносної зміни ваги  $w_l^C$  критерію  $C_l$ , що призводить до зміни ранжування між альтернативами  $a_i$  та  $a_j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $l = 1, \dots, m$ , задовольняє нерівності:

$$\delta_{i,j,l} < \delta_{i,j,l}^{порог}, \quad \text{якщо} \quad w_{jl} - w_{il} > 0;$$

$$\delta_{i,j,l} > \delta_{i,j,l}^{порог}, \quad \text{якщо} \quad w_{jl} - w_{il} < 0,$$

де порогове значення  $\delta_{i,j,l}^{порог}$  величини  $\delta_{i,j,l}$  обчислюється за формулою

$$\delta_{i,j,l}^{порог} = \frac{w_j^{глоб} - w_i^{глоб}}{w_{jl} - w_{il}} \cdot \frac{1}{w_l^C} \quad (1.1)$$

за умов:

$$1) \quad w_i^{глоб} \geq w_j^{глоб} \quad \text{для} \quad i < j;$$

$$2) \quad \delta_{i,j,l}^{порог} < 1.$$

### Зауваження.

1) Якщо  $w_{jl} > w_{il}$ , то  $\delta_{i,j,l}^{порог} < 0$ , оскільки чисельник в (1.1)  $w_j^{глоб} - w_i^{глоб} \leq 0$ . Тому вага  $w_l^C$  критерію  $C_l$  має збільшуватися для зміни ранжування між  $a_i$  та  $a_j$  і діапазон відносного збільшення ваги  $w_l^C$  складає  $\delta_{i,j,l} < \delta_{i,j,l}^{порог}$ .

2) Якщо  $w_{jl} < w_{il}$ , то  $\delta_{i,j,l}^{порог} > 0$ , і вага  $w_l^C$  критерію  $C_l$  має зменшуватися для зміни ранжування між  $a_i$  та  $a_j$ . Діапазон відносного зменшення ваги  $w_l^C$  в цьому випадку дорівнює  $\delta_{i,j,l}^{порог} < \delta_{i,j,l} < 1$ .

Наслідок 1. Критерій  $C_l$  стійкий, якщо умова  $\delta_{i,j,l}^{порог} \geq 1$  виконується при  $\forall 1 \leq i < j \leq n$ , де порогове значення  $\delta_{i,j,l}^{порог}$  обчислюється згідно з (1.1).

Наслідок 2. Якщо  $w_{jl} \leq w_{il}$  для  $\forall l = 1, \dots, m$ ,  $i < j$ , тобто  $a_i$  не гірша за  $a_j$  за кожним з критеріїв, то ніякі припустимі зміни ваг критеріїв не призведуть до зміни ранжування між  $a_i$  та  $a_j$ .

### *Випадок використання мультиплікативного методу синтезу*

Твердження 2. Величина  $\delta_{i,j,l}$  відносної зміни ваги  $w_l^C$ , що призводить до зміни ранжування між  $a_i$  та  $a_j$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $l = 1, \dots, m$ , при використанні мультиплікативного синтезу задовольняє нерівності:

$$\delta_{i,j,l} < \delta_{i,j,l}^{порог}, \text{ якщо } \delta_{i,j,l}^{порог} < 0;$$

$$\delta_{i,j,l} > \delta_{i,j,l}^{порог}, \text{ якщо } \delta_{i,j,l}^{порог} \geq 0,$$

де порогове значення  $\delta_{i,j,l}^{порог}$  величини  $\delta_{i,j,l}$  обчислюється за формулою

$$\delta_{i,j,l}^{порог} = \frac{\ln(w_i^{глоб}) - \ln(w_j^{глоб})}{\ln(w_{il}) - \ln(w_{jl})} \frac{1}{w_l^C}$$

за умов:

$$1) w_i^{глоб} \geq w_j^{глоб} \text{ для } i < j; \quad 2) \delta_{i,j,l}^{порог} < 1.$$

Проілюструємо твердження 1 і 2 на нашому прикладі.

*Приклад. Знаходження діапазонів змін ваг критеріїв, які призводять до змін рангів альтернатив в задачі оцінювання привабливості інвестицій*

#### Дистрибутивний синтез

Згідно з розв'язком, отриманим МАІ (останній стовпчик в табл. 1.3), отримали ранжування альтернатив інвестицій:

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3.$$

Найважливішим серед чотирьох критеріїв є критерій  $C_2$  «зростання», його вага дорівнює 0.509. Знайдемо порогове значення відносної зміни ваги цього критерію, що призводить до зміни ранжування між, наприклад, альтернативами  $a_1$  і  $a_2$ . Ця величина обчислюється за формулою

$$\delta_{1,2,2}^{порог} = \frac{0.335 - 0.372}{0.279 - 0.649} \cdot \frac{1}{0.509} = 0.198.$$

Додатне значення величини  $\delta_{1,2,2}^{порог}$  свідчить про те, що вага критерію «зростання» має бути зменшена для зміни ранжування між альтернативами  $a_1$  і  $a_2$ . Відносна величина цього зменшення дорівнює 19.8%.

Так як  $w_{22} < w_{12}$ , то  $\delta_{1,2,2} > \delta_{1,2,2}^{порог} = 0.198$  (див. умову 2 твердження 1). Таким чином, діапазон відносних значень змін ваг  $C_2$ , що призводить до зміни ранжування між  $a_1$  і  $a_2$ , дорівнює

$$\delta_{1,2,2} \in (0.198; 1.000).$$

Наприклад, нехай переваги інвестора змінилися і важливість критерію  $C_2$  для нього зменшилася до 0.407 (тобто, на 20%). Після перенормування ваги критеріїв будуть дорівнювати  $w_1^C = 0.105$ ,  $w_2^C = 0.453$ ,  $w_3^C = 0.271$ ,  $w_4^C = 0.171$ . Тоді глобальні ваги альтернатив:  $w_1^{глоб} = 0.341$ ,  $w_2^{глоб} = 0.341$ ,  $w_3^{глоб} = 0.318$ .

Відносні значення змін ваг усіх досліджуваних критеріїв, що призводять до змін ранжувань між різними парами альтернатив, наведені в табл. 1.5.

Згідно з означенням, критичний критерій для зміни оптимальної альтернативи визначається як мінімальне значення відносних змін ваг в рядках табл. 1.5, що відповідають оптимальній альтернативі  $a_1$ . Це мінімальне значення (рівне 19.8%) відповідає критерію  $C_2$  при розгляді альтернатив  $a_1$  і  $a_2$ . Зменшення ваги критерію  $C_2$  на 19.8% призводить до зміни оптимальної альтернативи, нею стає  $a_2$ .

Критерій  $C_2$  - найбільш чутливий до зміни ваги, за ним іде критерій  $C_3$ , потім  $C_4$  і останній -  $C_1$  (табл. 1.6).

Таблиця 1.5 – Порогові значення  $\delta_{i,j,l}^{nporog}$  (дистрибутивний синтез)

Пара альтернатив $(i, j)$	$\delta_{i,j,l}^{nporog}, \%$			
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
(1,2)	-108.7*	<b>19.8</b>	-51.8	-83.2
(1,3)	-230.8	27.0	-64.0	-140.1
(2,3)	-	39.8	-81.0	-358.0

\* Від’ємне значення величини  $\delta_{i,j,l}^{nporog}$  свідчить про те, що вага критерію  $C_l$  має бути збільшена для зміни ранжування між альтернативами  $a_i$  та  $a_j$ .

Таблиця 1.6 – Ступені критичності  $CritVal$  та чутливості  $SensVal$  критеріїв (дистрибутивний синтез)

Критерій	$CritVal, \%$	$SensVal$
$C_1$	108.7	0.009
$C_2$	<b>19.8</b>	0.051
$C_3$	51.8	0.019
$C_4$	83.2	0.012

### Мультиплікативний синтез

Використовуючи дані табл. 1.3, глобальні ваги альтернатив за методом мультиплікативного синтезу дорівнюють  $w_1^{glob} = 0.312$ ,  $w_2^{glob} = 0.436$ ,  $w_3^{glob} = 0.252$ . Таким чином, оптимальною є альтернатива  $a_2$ :

$$a_2 \succ a_1 \succ a_3.$$

Відносні значення змін ваг критеріїв, що призводять до зміни отриманого ранжування при використанні мультиплікативного синтезу наведені в табл. 1.7.

Наприклад, величина  $\delta_{1,3,2}^{порог}$  відносної зміни ваги критерію  $C_2$ , що призводить до зміни ранжування між  $a_1$  і  $a_3$  обчислюється за формулою:

$$\delta_{1,3,2}^{порог} = \frac{\ln(0.312) - \ln(0.252)}{\ln(0.649) - \ln(0.072)} \cdot \frac{1}{0.509} = 0.193,$$

$$\Rightarrow \delta_{1,3,2} \in (19.3\%; 100\%).$$

Дійсно, при відносному зменшенні ваги  $C_2$ , наприклад, на 20%, нова вага буде дорівнювати  $(w_2^C)' = 0.509 - 0.2 \cdot 0.509 = 0.407$ . Тоді глобальні ваги альтернатив:  $w_1^{glob} = 0.277$ ,  $w_2^{glob} = 0.443$ ,  $w_3^{glob} = 0.280$ .

Таблиця 1.7 – Порогові значення  $\delta_{i,j,l}^{порог}$  (мультиплікативний синтез)

Пара альтернатив $(i, j)$	$\delta_{i,j,l}^{порог}, \%$			
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
(1,2)	-	-77.8	80.3	-
(1,3)	-141.7	<b>19.3</b>	-40.8	-97.3
(2,3)	-	79.8	-488.3	-

Критичний критерій для зміни оптимальної альтернативи визначається як мінімальне за модулем значення відносних змін ваг в рядках табл. 1.7, що відповідають оптимальній альтернативі  $a_2$ . Це

мінімальне значення (рівне 77.8%) відповідає критерію  $C_2$  при розгляді альтернатив  $a_1$  і  $a_2$ . Збільшення ваги критерію  $C_2$  більш ніж на 77.8% призводить до зміни оптимальної альтернативи, нею стає  $a_1$ .

Критичним при зміні ранжування між будь-якими двома досліджуваними альтернативами також є критерій  $C_2$ : відносної зміни його ваги, рівної 19.3%, достатньо для зміни ранжування між неоптимальними альтернативами  $a_1$  і  $a_3$ .

Критерій  $C_2$  - найбільш чутливий до зміни ваги, за ним іде критерій  $C_3$ , потім  $C_4$  і останній -  $C_1$  (табл. 1.8).

Таблиця 1.8 – Ступені критичності  $CritVal$  та чутливості  $SensVal$  критеріїв (мультиплікативний синтез)

Критерій	$CritVal$ , %	$SensVal$
$C_1$	141.7	0.007
$C_2$	<b>19.3</b>	0.052
$C_3$	40.8	0.025
$C_4$	97.3	0.010

#### Визначення найбільш критичної локальної ваги альтернативи

Нехай, як і раніше, альтернативи перенумеровані таким чином, що  $a_1$  - оптимальна альтернатива (має перший ранг):

$$w_1^{glob} \geq w_2^{glob} \geq \dots \geq w_n^{glob}.$$

Нас цікавить величина зміни локальної ваги альтернативи, в результаті якої змінюється ранг цієї альтернативи.

Позначимо  $\Delta_{i,j,r}^a$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ ,  $1 \leq r \leq m$  величину абсолютної зміни локальної ваги  $w_{ir}$  альтернативи  $a_i$  відносно критерію  $C_r$ , що призводить

до зміни ранжування між альтернативами  $a_i$  та  $a_j$ . Тобто, нехай нова локальна вага  $a_i$  відносно  $C_r$  дорівнює

$$w'_{ir} = w_{ir} - \Delta_{i,j,r}^a,$$

Має виконуватися умова  $(w'_{ir} > 0)$  і умова  $(w_i^{\text{глоб}})' < (w_j^{\text{глоб}})'$  зміни ранжування між  $a_i$  та  $a_j$  для  $i < j$ , де  $(w_i^{\text{глоб}})'$ ,  $(w_j^{\text{глоб}})'$  - нові глобальні ваги цих альтернатив.

Величину відповідної відносної зміни ваги  $w_{ir}$  позначимо

$$\delta_{i,j,r}^a = \frac{\Delta_{i,j,r}^a}{w_{ir}},$$

$$(w'_{ir} > 0) \Rightarrow (\Delta_{i,j,l}^a < w_{ir}) \Leftrightarrow (\delta_{i,j,l}^a < 1).$$

З кожною локальною вагою  $w_{ir}$  пов'язується  $n-1$  значення  $\Delta_{i,j,r}^a$ ,  $i \neq j$ , де  $n$  - кількість альтернатив.

Аналогічно вводяться означення ступеня критичності та чутливості альтернативи  $a_i$  відносно критерію  $C_r$  та означення найбільш критичної альтернативи. Розглянемо ці означення при дослідженні зміни ранжування між будь-якою парою альтернатив.

### *Мультиплікативний синтез*

Твердження 3. Величина  $\delta_{i,j,r}^a$  відносної зміни локальної ваги  $w_{ir}$  альтернативи  $a_i$  відносно критерію  $C_r$ , що призводить до зміни ранжування між  $a_i$  та  $a_j$  при використанні мультиплікативного синтезу задовольняє нерівності:

$$\delta_{i,j,r}^a > \delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}}, \text{ якщо } i < j;$$

$$\delta_{i,j,r}^a < \delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}}, \text{ якщо } i > j,$$

де порогове значення  $\delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}}$  величини  $\delta_{i,j,r}^a$  обчислюється за формулою

$$\delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}} = 1 - \left( \frac{w_j^{\text{глоб}}}{w_i^{\text{глоб}}} \right)^{1/w_r^C}$$

за умов:

- 1)  $w_i^{\text{глоб}} \geq w_j^{\text{глоб}}$  для  $i < j$ ;
- 2)  $\delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}} < 1$ .

*Приклад. Знаходження діапазонів змін локальних ваг альтернатив, які призводять до змін їх рангів в задачі оцінювання інвестицій*

Повернемося до нашого прикладу з визначенням відносної привабливості альтернативних варіантів інвестицій.

Згідно з твердженням 3, розрахуємо порогові значення  $\delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}}$  для всіх критеріїв та всіх пар альтернатив, коли для розрахунку глобальних ваг альтернатив використовується мультиплікативний синтез (табл. 1.9).

Таблиця 1.9 – Порогові значення  $\delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}}$  (мультиплікативний синтез)

Пара альтернатив $(i, j)$	$\delta_{i,j,r}^{a \text{ порог}}, \%$			
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
(1,2)	-	-	-	-
(1,3)	<b>89.9</b>	<b>34.6</b>	<b>58.9</b>	<b>75.4</b>
(2,1)	-	-	-	-
(2,3)	-	<b>66.1</b>	<b>89.6</b>	-
(3,1)	-893.4	<b>-52.8</b>	-143.1	-306.1
(3,2)	-34766.8	-194.8	-862.7	-3463.4



Наприклад, ранжування між  $a_1$  та  $a_3$  ( $i < j$ ) зміниться при відносній зміні локальної ваги  $w_{12}$  альтернативи  $a_1$  відносно критерію  $C_2$  на величину, що більша за наступне порогове значення:

$$\delta_{1,3,2}^{a_{порог}} = 1 - \left( \frac{0.252}{0.312} \right)^{1/0.509} = 0.34,$$

оскільки глобальні ваги альтернатив за мультиплікативним синтезом дорівнюють (0.312, 0.436, 0.252).

З таблиці 1.10 видно, що критичною альтернативою є  $a_1$ , оскільки їй відповідає найменша відносна зміна ваги, рівна 34.6%. Чутливості альтернатив відносно критеріїв наведені в таблиці 1.11.

Таблиця 1.10 – Ступені критичності  $CritVal_{ir}^a$  альтернатив відносно критеріїв (мультиплікативний синтез)

Альтернатива	$CritVal_{ir}^a, \%$			
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$a_1$	89.9 ( $a_3$ )	<b>34.6</b> ( $a_3$ )	58.9 ( $a_3$ )	75.4 ( $a_3$ )
$a_2$	-	66.1 ( $a_3$ )	89.6 ( $a_3$ )	-
$a_3$	-	52.8 ( $a_1$ )	-	-

Таблиця 1.11 – Чутливості  $SensVal_{ir}^a$  альтернатив відносно критеріїв (мультиплікативний синтез)

Альтернатива	$SensVal_{ir}^a$			
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$
$a_1$	0.0111 ( $a_3$ )	0.0289 ( $a_3$ )	0.0170 ( $a_3$ )	0.0133 ( $a_3$ )
$a_2$	0	0.0151 ( $a_3$ )	0.0112 ( $a_3$ )	0
$a_3$	0	0.0189 ( $a_1$ )	0	0

Дійсно, нехай локальна вага  $a_1$  відносно критерію  $C_2$  зменшилася на 35%, тобто нова вага дорівнює  $w'_{12} = 0.649 - 0.35 * 0.649 = 0.422$ . Тоді, застосувавши мультиплікативний синтез при умові незмінності всіх інших ваг, отримаємо наступні глобальні ваги альтернатив: (0.267, 0.465, 0.268). Таким чином, ранжування між  $a_1$  та  $a_3$  змінилося.

Деякі елементи таблиці 1.9 є дуже великими за модулем від'ємними числами. Наприклад, число -3463.4 означає, що для того, щоб змінилося ранжування між  $a_3$  та  $a_2$ , локальна вага  $a_3$  відносно  $C_4$  має бути збільшена на 3463.4% (!) Такі значення є практично нереалістичними і тому відповідну локальну вагу можна вважати стійкою. Жирним шрифтом в табл. 1.9 позначені ступені критичності альтернатив  $CritVal_{ir}^a$  (табл. 1.10).

## 2 Порядок виконання роботи

2.1 Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2 Згідно з варіантом виконати аналіз чутливості однокритеріальної або багатокритеріальної задачі.

2.2.1 Для багатокритеріальної задачі прийняття рішення виконати наступні завдання:

- Розрахувати глобальні ваги альтернатив методами дистрибутивного або мультиплікативного синтезу (згідно з варіантом).
- Дослідити чутливість глобальних ваг альтернатив до змін ваг критеріїв графічними методами (згідно з варіантом):
  - АЧ виконання,
  - градієнтним АЧ,
  - різницеvim АЧ.
- Визначити діапазони змін ваг критеріїв, які призводять до змін рангів альтернатив. Для цього скористатися твердженням 1 при

використанні дистрибутивного синтезу і твердженням 2 – для мультиплікативного синтезу.

- Розрахувати ступені критичності і чутливості.
- Знайти критичні та стійкі критерії.

2.2.2 Для однокритеріальної задачі виконати одне з наступних завдань (згідно з варіантом):

- Розрахувати інтервали та індекси стійкості за узгодженістю для всіх елементів МПП.

- Розрахувати інтервали стійкості щодо збереження ранжування альтернатив для всіх елементів МПП.

2.3 Зробити висновки по роботі.

2.4 Дати відповіді на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

#### **Звіт має містити:**

- Для багатокритеріальної задачі ППР:

- 1 Локальні ваги альтернатив, ваги критеріїв, метод синтезу, який використовувався.
- 2 Розраховані глобальні ваги альтернатив рішень.
- 3 Графіки згідно з методами АЧ виконання, градієнтного АЧ, різницевого АЧ (згідно з варіантом).
- 4 Діапазони відносних змін ваг елементів ієрархії, при яких змінюється ранжування альтернатив; ступені критичності і чутливості; критичні і стійкі елементи ієрархії.
- 5 Текст програми, яка реалізує етапи 2.2.1 порядку виконання роботи.
- 6 Висновки по роботі.

- Для однокритеріальної задачі: МПП, інтервали та індекси стійкості для всіх елементів МПП, текст програми, яка реалізує етап 2.2.2, висновки по роботі.

## Варіанти завдань

№	Графічний АЧ	Метод синтезу	Зміна ваг	Задача прийняття рішень (див.нижче)
1	Виконання	Мультиплікативний	Критеріїв	1
2	Градiєнтний	Дистрибутивний	Критеріїв	2
3	Різницевий	Мультиплікативний	Критеріїв	3
4	-	Інтервали та індекси стійкості елементів МПП за узгодженістю	-	4
5	-	Інтервали та індекси стійкості щодо збереження ранжування альтернатив (випадок незмінної найкращої альтернативи)	-	4
6	-	Інтервали та індекси стійкості щодо збереження ранжування альтернатив (випадок незмінного всього ранжування)	-	4
7	Виконання	Мультиплікативний	Критеріїв	5
8	Градiєнтний	Дистрибутивний	Критеріїв	5
9	-	Інтервали та індекси стійкості елементів МПП за узгодженістю	-	6
10	-	Інтервали та індекси стійкості щодо збереження ранжування альтернатив (випадок незмінної найкращої альтернативи)	-	6
11	-	Інтервали та індекси стійкості щодо збереження ранжування альтернатив (випадок незмінного всього ранжування)	-	6

### Варіант 1

Нехай інвестор оцінює акції деякої компанії і хоче спрогнозувати яким буде розподіл ймовірностей зміни ціни на них. Він розглядає наступні можливі варіанти зміни ціни: впаде на 20%, впаде на 10%, залишиться незмінною, зросте на 10%. Оцінки кожного варіанту за результатами проведених фундаментального та технічного аналізу, а також аналізу циклів наведені в таблиці. Результати, отримані різними методами, є для інвестора однаково важливими.

Варіанти зміни ціни	Критерії		
	Фундаментальний аналіз	Технічний аналіз	Аналіз циклів
Впаде на 20%	0.1	0.1	0.15
Впаде на 10%	0.2	0.2	0.25
Залишиться незмінною	0.3	0.3	0.35
Зросте на 10%	0.4	0.4	0.25

### Варіант 2

Необхідно вибрати оптимальний канал для розміщення реклами на телебаченні. Ваги каналів за критеріями «ціна розміщення», «популярність каналу», «відповідність аудиторії рекламованому товару» наведені в таблиці. Ваги критеріїв дорівнюють 0.5, 0.3 і 0.2.

Канали	Критерії		
	Ціна розміщення*	Популярність каналу	Відповідність аудиторії
Канал 1	0.25	0.22	0.36
Канал 2	0.25	0.32	0.26
Канал 3	0.40	0.09	0.10
Канал 4	0.10	0.37	0.28

\* Критерій «Ціна» потребує мінімізації в тому розумінні, що вибирати слід канал з найменшою ціною, на відміну від критеріїв «популярність» та «відповідність аудиторії», які необхідно максимізувати. У зв'язку з цим, ваги каналів за критерієм «ціна» інтерпретуються наступним чином: ціна четвертого каналу є найбільшою (тому його вага – найменша за цим критерієм), ціна третього каналу є найменшою (тому його вага – найбільша). Ціни розміщення реклами на першому і другому каналах знаходяться десь посередині між цінами попередніх двох каналів.

### Варіант 3

Необхідно розподілити фінансування між трьома варіантами деякого інноваційного товару. Оцінювання товарів здійснюється за критеріями «економічна ефективність», «конкурентоспроможність», «перспективність попиту» і «технологічна складність». Ваги критеріїв: 0.35, 0.25, 0.25 і 0.15. Ваги варіантів товарів за критеріями наведені в таблиці.

Інноваційний товар	Критерії			
	Економічна ефективність	Конкурентоспроможність	Перспективність попиту	Технологічна складність
Товар 1	0.5	0.25	0.4	0.25
Товар 2	0.3	0.50	0.4	0.25
Товар 3	0.2	0.25	0.2	0.50

#### Варіант 4

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ 1/2 & 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 & 1 & 9 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}$$

#### Варіант 5

Необхідно вибрати одного з трьох кандидатів на вакантну посаду. Ненормовані ваги кожного кандидата за критеріями «освіта» і «досвід роботи» наведені в таблиці. Відомо, що досвід роботи є більш вагомим за освіту, ступінь переваги – помірний. Оцінювання ваг критеріїв виконано у фундаментальній шкалі.

Кандидати	Критерії	
	Освіта	Досвід роботи
Кандидат 1	5	3
Кандидат 2	4	5
Кандидат 3	2	2

#### Варіант 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 & 5 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1/9 & 2 & 1/3 \\ 3 & 9 & 1 & 9 & 3 \\ 1/5 & 1/2 & 1/9 & 1 & 1/5 \\ 1 & 3 & 1/3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

#### Контрольні запитання для підготовки до роботи:

- 1 Назвіть причини протиріч і неузгодженостей в оцінках експертів.
- 2 Описати графічні методи аналізу чутливості ваг, отриманих МАІ.
- 3 Навести постановку задачі розрахунку діапазонів змін ваг критеріїв, які призводять до змін ранжувань альтернатив.
- 4 Як розраховуються діапазони відносних змін ваг критеріїв, що призводять до зміни ранжування альтернатив у випадку використання дистрибутивного методу?

- 5 Як розраховуються діапазони відносних змін ваг критеріїв, що призводять до зміни ранжування альтернатив у випадку використання мультиплікативного методу?
- 6 Дати означення ступеня критичності, чутливості елемента ієрархії. Дати означення стійкого критерію. Як встановити стійкість критерію?
- 7 Як розрахувати інтервали та індекси стійкості елементів МПП за узгодженістю?
- 8 Як розрахувати інтервали та індекси стійкості щодо збереження ранжування альтернатив?