Лабораторна робота 1

Дослідження методів аналітичних ієрархій для багатокритеріальної підтримки прийняття рішень

Мета роботи:

- *Вивчити методи парних порівнянь розрахунку ваг альтернатив рішень відносно спільного критерію.*
- *Вивчити етапи базового методу аналізу ієрархій розрахунку ваг альтернатив рішень за множиною незалежних критеріїв.*
- *Обчислити глобальні ваги альтернатив рішень для задачі підтримки прийняття рішень, використовуючи різні методи ієрархічного синтезу (агрегування).*
- *Порівняти отримані результати.*

1 Порядок виконання роботи

1.1 Вивчити теоретичні основи методу аналізу ієрархій.

1.2 Розрахувати глобальні ваги елементів ієрархії для повної ієрархії з p рівнями, $p \geq 2$, яка задається вектором $m = \{(m_k) \mid k = 1,..., p\}$, де $m_k \in N$ - кількість елементів на k-му рівні ієрархії. Для цього:

1.2.1 зчитати з файлу кількість рівнів ієрархії та кількість елементів на кожному рівні, файл з вхідними даними створити самостійно або ввести дані з інтерфейсу користувача,

1.2.2 зчитати з файлу матриці парних порівнянь елементів ієрархії,

1.2.3 розрахувати один з показників узгодженості матриць парних порівнянь (згідно з варіантом) та зробити висновки щодо рівня неузгодженості,

1.2.4 розрахувати локальні ваги елементів ієрархії одним з методів парних порівнянь (згідно з варіантом), 1.2.5 розрахувати глобальні ваги елементів ієрархії одним з методів синтезу (згідно з варіантом),

1.3 Зробити висновки по роботі

1.4 Дати відповіді на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

Звіт має містити:

1 Завдання: метод розрахунку локальних ваг, метод синтезу.

2 Текст програми, яка реалізує описані вище кроки 1.2.1 – 1.2.5.

3 Вікна програми при її тестуванні на контрольному прикладі: навести кількість рівнів ієрархії, кількість елементів на кожному рівні, МПП елементів ієрархії, результати (значення показника узгодженості, висновок щодо рівня неузгодженості, локальні, глобальні ваги елементів, ранжування альтернатив рішень).

4 Висновки по роботі.

Варіанти

№	**Ієрархія**	**Метод розрахунку локальних ваг і показник узгодженості**	**Метод розрахунку глобальних ваг**
1	p=3, повна m=(4, 3, 3)	головного власного вектору, CR	дистрибутивний
2	p=3, повна m=(3, 3, 4)	геометричної середньої, GCI	“ідеальний”
3	p=3, повна m=(2, 3, 4)	головного власного вектору, CR	мультиплікативний
4	p=3, повна m=(2, 4, 3)	арифметичної нормалізації, HCR	ГВБВПА
5	p=3, повна m=(2, 4, 4)	геометричної середньої, GCI	дистрибутивний
6	p=3, повна m=(3, 4, 2)	геометричної середньої, GCI	мультиплікативний

7	p=3, повна m=(4, 4, 3)	головного власного вектору, CR	ідеальний
8	p=3, повна m=(3, 3, 2)	арифметичної нормалізації, HCR	мультиплікативний

2 Теоретичні відомості

Методи аналізу ієрархій (МАІ, analytic hierarchy process, AHP) багатокритеріального прийняття рішень

МАІ складаються з наступних етапів:

1. Побудова ієрархічної структури факторів, які впливають на головну ціль прийняття рішення; побудова множини альтернативних варіантів рішень – це останній рівень ієрархії.

2. Отримання суджень експертів щодо парних порівнянь елементів кожного рівня ієрархії відносно спільного елементу вищого рівня. Парні порівняння проводяться в фундаментальній шкалі відносної важливості, за результатами будуються мультиплікативні матриці парних порівнянь (МПП), які є додатними і обернено симетричними.

3. Математична обробка суджень експертів:

- розрахунок локальних ваг елементів кожного рівня ієрархії відповідно до батьківських елементів вищого рівня;
- аналіз узгодженості експертних оцінок;
- розрахунок глобальних ваг елементів ієрархії відносно головної цілі прийняття рішення.

Локальною вагою елемента ієрархії називається вага елемента відносно елементу батьківського вищого рівня ієрархії, розрахована з МПП.

Глобальною вагою елемента ієрархії називається вага відносно вершини ієрархії (в більшості випадків – це головна ціль прийняття рішення), розрахована за локальними вагами одним з методів ієрархічного синтезу (агрегування).

Залежно від використання тих чи інших методів розрахунку локальних та глобальних ваг маємо різні модифікації методів аналізу ієрархій.

Загальна характеристика методів парних порівнянь. Матриці парних порівнянь (МПП)

Нехай задана множина альтернатив $A=\{a_i\}$, $i=1,...,n$. В методах парних порівнянь кожна альтернатива порівнюється в загальному випадку з усіма іншим альтернативами відносно заданого критерію і за результатами порівнянь формується матриця парних порівнянь (табл. 1.1):

$$D=\{d_{ij} \mid i,j=1,...,n\},$$

де елемент $d_{ij}\in R$ в кількісній формі виражає силу переваги альтернативи a_i над альтернативою a_j.

Для надання елементам МПП конкретних числових значень перед початком процедури порівняння розробляються шкали вербальних експертних суджень з градаціями s_k і відповідних кількісних виражень цих градацій x_k, де $x_k\in R$, $k=0,...,K$.

Таблиця 1.1. Матриця парних порівнянь

	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n
a_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	$\cdots$	d_{1n}
a_2		d_{22}	d_{23}	$\cdots$	d_{2n}
a_3			d_{33}	$\cdots$	d_{2n}
$\vdots$				$\cdots$	$\vdots$
a_n					d_{nn}

Однією з широко розповсюджених вербальних шкал є фундаментальна шкала відносної важливості (табл. 1.2). Експериментально доведена ефективність цієї шкали над іншими шкалами.

Важливим моментом для подальшої обробки МПП є апріорний вибір інтерпретації елементів МПП в термінах ваг об’єктів. В загальному випадку

$$d_{ij} \approx f(w_i, w_j), \tag{1.1}$$

де f - деяка функція, а "$\approx$" означає відповідність, оскільки для заданих експертами МПП не обов’язково має місце точна рівність.

МПП, елементи якої при деяких вагах w_i, описуються рівністю $d_{ij} = f(w_i, w_j)$, називається <u>теоретичною МПП</u>, $i, j = 1,...,n$.

Таблиця 1.2. Фундаментальна шкала експертних суджень

Інтенсивність важливості x_k	Якісна оцінка (судження s_k)	Пояснення
1	Однаково важливі	Елементи рівні за своїм значенням
3	Ненабагато важливіші (слабка перевага)	Існують вербальні висловлювання щодо пріоритету одного елементу над іншим, але ці висловлювання досить непереконливі
5	Суттєво важливіші (сильна перевага)	Існують добрі докази та логічні критерії, які можуть показати, що один з елементів є більш важливий
7	Значно важливіші (дуже сильна перевага)	Існує переконливий доказ великої значущості одного елемента в порівнянні з іншим
9	Абсолютно важливіші (абсолютна перевага)	Усвідомлення пріоритету одного елементу над іншим максимально підтверджується
2,4,6,8	Проміжні оцінки	Потрібен певний компроміс

МПП $D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ називається <u>узгодженою</u>, якщо для всіх її елементів виконується властивість <u>транзитивності</u>: $d_{ij} = d_{ik} d_{kj}$ (мультиплікативна МПП), $d_{ij} = d_{ik} + d_{kj}$ (адитивна МПП) $\forall i, j, k$.

Достатньо часто на практиці використовуються представлення:

$f(w_i, w_j) = w_i / w_j$ (<u>мультиплікативні</u> парні порівняння),

$f(w_i, w_j) = w_i - w_j$ (<u>адитивні</u> парні порівняння).

Теоретична МПП завжди є узгодженою, оскільки

$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_k}\frac{w_k}{w_j} = d_{ik}d_{kj}$ (мультиплікативна МПП),

$d_{ij} = w_i - w_j = (w_i - w_k) + (w_k - w_j) = d_{ik} + d_{kj}$ (адитивна МПП).

При мультиплікативних парних порівняннях експерту ставиться питання «у скільки разів альтернатива a_i переважає альтернативу a_j відносно критерію», при адитивних порівняннях – «на скільки».

Оскільки спостерігається симетрія відносно перестановок двох порівнюваних альтернатив, то для елементів МПП має місце залежність (властивість оберненої симетричності*)*:

$d_{ji} = 1/d_{ij}$, $d_{ij} > 0$ (мультиплікативні парні порівняння),

$d_{ji} = -d_{ij}$ (адитивні парні порівняння).

В загальному випадку заповнена експертом МПП відрізняється від теоретичної в тому сенсі, що існують i, j, при яких $d_{ij} \neq f(w_i, w_j)$. Основними причинами цього є як неузгодженість оцінок експерта при виборі вербальних суджень, так і апріорна фіксація кількісних виражень градацій шкали.

Методи парних порівнянь – одні з найбільш теоретично обґрунтовані методи знаходження ваг альтернатив відносно певного критерію прийняття рішень. Результати багаточисленних досліджень показують, що парні порівняння дозволяють оптимальним чином врахувати психофізіологічні особливості людини і тому призводять до більш точних оцінок експертів.

Постановка задачі

Дано:

- множина альтернатив $A = \{a_i\}$, $i = 1,...,n$,
- якісний критерій C.

Знайти:

- ваги альтернатив $W = \{w_i\}$, $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Метод головного власного вектору (eigenvector method, EM) розрахунку локальних ваг

Ідея методу. Метод EM є методом мультиплікативних парних порівнянь. Експерт попарно порівнює альтернативи у фундаментальній шкалі і за результатами порівнянь заповнюється $n(n-1)/2$ елементів верхньої трикутної частини МПП D. Елементи нижньої трикутної частини розраховуються за правилом оберненої симетричності $d_{ji} = 1/d_{ij}$.

Метод EM. Вектором ваг є власний вектор МПП D, що відповідає її найбільшому власному числу.

Індексом узгодженості (consistency index) МПП D називається величина

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}.$$

Відношенням узгодженості (consistency ratio) МПП називається

$$CR = \frac{CI}{MRCI},$$

де $MRCI$ - середнє значення індексів узгодженості для заповнених випадковим чином МПП (табл. 1.3).

Таблиця 1.3. Значення $MRCI$ в залежності від розмірності n МПП

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$MRCI$	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45	1,49	1,52	1,54	1,56	1,58	1,59

Таким чином, для узгодженої МПП $CR = 0$. Якщо значення CR перевищує встановлений поріг (табл. 1.4), то МПП має неприпустимо високий рівень неузгодженості і не може використовуватися для розрахунку ваг.

Таблиця 1.4. Порогові значення CR залежно від розмірності n МПП

n	Порогове значення CR
3	0.05
4	0.08
≥5	0.1

Існує два чисельних методи знаходження головного власного вектора МПП D: граничний і степеневий методи.

Граничний метод

1. задати довільний вектор $x_0 > 0$;
2. розрахувати $D^k x_0,\ k \geq 1$;
3. визначити норму вектора $\|y\| \equiv \sum |y_i|$, тоді $\frac{D^k x_0}{\|D^k x_0\|}$ збігається до головного власного вектора матриці D при $k \to \infty$, а $\frac{\|D^k x_0\|}{\|D^{k-1} x_0\|}$ - до її максимального власного числа.

Степеневий метод

1. визначити норму вектора $\|y\| \equiv \sum |y_i|$; задати довільний вектор $x_0 > 0$, $\| x_0 \| = 1$;
2. розрахувати послідовність скалярних значень $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ і векторів $x_1, x_2, \ldots$, які задовольняють умовам $\|x_1\| = \|x_2\| = \ldots = 1$ і $Dx_{k-1} = \lambda_k x_k$. Ці значення розраховуються за формулами: $x_k = \frac{Dx_{k-1}}{\|Dx_{k-1}\|}$, $\lambda_k = \|Dx_{k-1}\|$.

   Тоді x_k збігається до головного власного вектора матриці D при $k \to \infty$, а λ_k - до її максимального власного числа.

Обидва наведені методи залежать від співвідношення між максимальним і наступним найбільшим власними числами і мають порядок збіжності $O\left(1/\lambda_{max}^2\right)$. Відмінність між ними полягає в тому, що в степеневому методі нормалізація стовпчиків степені МПП відбувається після кожної ітерації, а в граничному методі проводиться нормалізація граничної МПП (МПП у великій степені).

Метод геометричної середньої (row geometric mean method, RGMM)

Крім методу ЕМ для знаходження ваг використовують й інші методи, які в основному базуються на мінімізації відхилення елементів заданої експертом МПП від невідомої узгодженої МПП.

Нехай маємо мультиплікативну модель парних порівнянь $d_{ij} \approx w_i / w_j$, що еквівалентно $d_{ij} w_j \approx w_i$, $w_j \neq 0$, де "$\approx$" означає наближену рівність. Ваги w можуть бути знайдені з однієї з наступних задач математичного програмування:

Задача 1

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} - w_i / w_j)^2$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i > 0,\ i = 1,...,n.$$

Задача 2

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} w_j - w_i)^2$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i > 0, i = 1,...,n.$$

Задачі 1 і 2 є не випуклими задачами нелінійного програмування, тому є практично неефективними. Тому на практиці для знаходження ваг формулюють і розв’язують наступну задачу лінійного програмування:

Задача 3

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\ln d_{ij} - \ln w_i + \ln w_j)^2$$

при обмеженнях

$$\prod_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i > 0, i = 1,...,n.$$

За умови мультиплікативної нормалізації $\prod_{i=1}^{n} w_i = 1$ розв’язком задачі 3 є ваги, розраховані за методом *RGMM:*

$$v_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}\ .$$

Тоді нормовані до одиниці ваги альтернатив розраховуються за формулою

$$w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}.$$

Метод геометричної середньої дуже широко використовується на практиці як наближення до методу ЕМ. Однак, лише при гарній узгодженості МПП ваги, знайдені за цими двома методами, є близькими. Якщо ж заповнена експертом МПП має високий рівень неузгодженості, то ці ваги будуть значно відрізнятися між собою.

При використанні методу RGMM мірою неузгодженості МПП слугує незміщена оцінка дисперсії збурень:

$$s^2 = \frac{S}{d.f} = \frac{2\sum_{i<j}\left(\ln d_{ij} - \ln\frac{v_i}{v_j}\right)^2}{(n-1)(n-2)},$$

де S - квадрат відстані між $\ln d_{ij}$ і $\ln\frac{v_i}{v_j}$, $d.f$ - (скороч. від degree of freedom) - кількість ступенів свободи, яка дорівнює різниці між кількістю оцінок $n(n-1)/2$ і кількістю оцінюваних параметрів $n-1$.

З точки зору детермінованого методу, менше значення s^2 свідчить про коротшу відстань між d_{ij} і $\frac{v_i}{v_j}$, тому кращою є відповідність між оцінками експертів і вектором ваг v, і, як наслідок, більш узгодженою є МПП D.

Геометричним індексом узгодженості (geometric consistency index, GCI) МПП D при використанні методу RGMM знаходження ваг називається:

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}\log^2 e_{ij} \quad ,$$

де $e_{ij} = d_{ij}v_j / v_i$ - помилка апроксимації відношення ваг v_i / v_j за допомогою елемента МПП d_{ij}.

Твердження. Математичне сподівання GCI для заповненої випадковим чином МПП D при умові, що елементи МПП є незалежними у сукупності, обернено симетричними і мають однаковий розподіл, є постійною величиною, рівною $E(GCI) = Var(\ln d_{ij})$.

Для малих помилок e_{ij} геометричний індекс узгодженості GCI пропорційний відношенню узгодженості CR. Використовуючи імітаційне моделювання, оцінено регресію GCI від CR для різних інтервалів CR в межах $CR \le 0.1$. Отримані порогові значення для GCI наведені в табл. 1.5.

Таблиця 1.5. Порогові значення GCI, n - розмірність МПП

Порогове значення GCI		
$n = 3$	$n = 4$	$n \ge 5$
0.1573	0.3526	0.370

Якщо значення GCI, розраховані для заданих експертами МПП, перевищують вказані в табл. 1.5 пороги, то це свідчить про високу неузгодженість оцінок експертів.

Метод адитивної нормалізації (additive normalization, AN)

Метод AN розглядається як апроксимація методу EM, що не потребує розрахунку власних векторів. При гарній узгодженості МПП в межах інтервалів для CR ваги, отримані за методом AN, є близькими до ваг, отриманих за методом EM.

Нехай $s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ - сума j-го стовпчика заданої експертами МПП $A = \left\{ \left(a_{ij} \right) \middle| \, i \in [1;n], j \in [1;n] \right\}$.

Метод AN. Вагами є величини $(s_1^{-1}, ..., s_n^{-1})$, обернені до сум стовпчиків МПП.

Твердження. Для будь-якої обернено симетричної матриці B розмірності $n \times n$ виконується $\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1} \le 1$, де s_j - сума j-го стовпчика B. Рівність має місце тоді і тільки тоді коли B є узгодженою.

Гармонічним індексом узгодженості (harmonic consistency index, HCI) заповненої експертом МПП називається

$$HCI(n) = \frac{\left(HM(s) - n\right)(n+1)}{n(n-1)},$$

де $HM(s) = n\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1}\right)^{-1}$ - гармонічна середня для $s = \left\{ s_j \,\middle|\, j \in [1;n] \right\}$.

Гармонічним відношенням узгодженості називається

$$HCR(n) = \frac{HCI(n)}{HRCI(n)},$$

де $HRCI(n)$ - середнє значення *HCI(n)* для випадкових МПП, значення співпадають з $MRCI$ (див. табл.1.3).

Значення HCI близькі до CI, тому порогові значення для HCR встановлені такі ж, як і для CR (див. табл.1.4). Величина HCR дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли МПП узгоджена.

Метод «лінія»

Ідея методу. Метод «лінія» є методом парних порівнянь у довільній шкалі. Експерт вибирає еталонну альтернативу з усієї множини альтернатив і попарно порівнює з нею всі інші альтернативи. Далі вибирається адитивна чи мультиплікативна модель залежності ваг від величин переваг і розраховуються ваги альтернатив.

Метод «лінія» складається з наступних етапів:

1. Експерт вибирає a_e - еталонну альтернативу і порівнює з нею всі інші альтернативи a_i, $i \ne e$. При мультиплікативних порівняннях експерту

ставиться питання «у скільки разів a_i переважає над a_e відносно критерію C», при адитивних порівняннях – «на скільки».

За результатами формується матриця $D_e = \{d_{ie} \mid i = 1,...,n\}$ ступенів переваг a_i над a_e.

2. Еталону a_e присвоюється вага v_e, під якою розуміємо кількісну міру ступеня вираженості у альтернативи a_e властивості, що описується критерієм C.

3. Обчислюються ненормовані ваги $v_i = \varphi(v_e, d_{ie}),\ \forall\ i \neq e$, де φ - монотонна функція. При мультиплікативних порівняннях $v_i = v_e \varphi_{mult}(d_{ie})$, $\varphi_{mult}(1) = 1$, при адитивних порівняннях $v_i = v_e + \varphi_{ad}(d_{ie})$, $\varphi_{ad}(0) = 0$.

Тобто, вага кожної альтернативи виражається через вагу еталона.

4. Здійснюється нормування ваг і знаходяться відносні ваги $w_i = v_i / \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Трудомісткість: $n-1$ порівнянь.

Порівняння методів парних порівнянь «лінія» і EM, RGMM, AN

В методі «лінія» експерт визначає лише один рядок МПП, тобто порівнює всі альтернативи з однією вибраною, так званою еталонною альтернативою. У методах типу «трикутник» (EM, RGMM, AN) треба виконати порівняння кожного об’єкту з кожним, тобто всього $\frac{n(n-1)}{2}$ порівнянь; після цього інші елементи МПП обчислюються за допомогою певних розрахунків. Тому в методах типу «трикутник» експертна інформація є надлишковою і використовується для оцінювання її узгодженості з метою організації, якщо це необхідно, зворотного зв’язку з експертом. В умовах обмеженості часових і фінансових ресурсів використовують метод «лінія», який потребує лише $n-1$ порівнянь.

Розрахунок глобальних ваг елементів ієрархії. Методи ієрархічного синтезу

Детальніше розглянемо етап розрахунку глобальних ваг елементів ієрархії для ієрархій, що складаються лише з двох рівнів: критерії та альтернативи.

Постановка задачі

Дано:

- головна ціль прийняття рішень (перший рівень ієрархії);
- $C = \{C_j \mid j = \overline{1, M}\}$ - множина критеріїв оцінювання альтернатив (другий рівень ієрархії);
- $A = \left\{ A_i \middle| i = \overline{1, N} \right\}$ - множина альтернативних варіантів рішень (третій рівень ієрархії);
- a_{ij} - ненормована локальна вага альтернативи A_i за критерієм C_j;
- w_j^C - локальна вага критерію C_j, $\sum_{j=1}^{M} w_j^C = 1$.

Потрібно: знайти глобальні ваги $w_i^{глоб}$ альтернатив A_i, $i = \overline{1, N}$.

Існує декілька методів ієрархічного синтезу (агрегування).

Дистрибутивний синтез

Глобальна вага альтернативи A_i розраховується за формулою

$$w_i^{глоб} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij},$$

де $r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} a_{kj}}$ - нормовані значення ваг a_{ij}, $\sum_{i=1}^{N} r_{ij} = 1$ $\forall j = \overline{1, M}$.

“Ідеальний” синтез

Глобальна вага альтернативи A_i розраховується так само, як і в методі дистрибутивного синтезу, за допомогою адитивної функції згортки:

$$w_i^{глоб} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij},$$

де $r_{ij} = \frac{a_{ij}}{\max\limits_{k=1,\dots,N} a_{kj}}$ - нормовані значення ваг a_{ij}.

Мультиплікативний синтез

При порівнянні альтернатив A_i та A_k за методом мультиплікативного синтезу розраховується наступний добуток:

$$P\left(\frac{A_i}{A_k}\right) = \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{a_{ij}}{a_{kj}}\right)^{w_j^C}, \quad i,k = \overline{1,N}.$$

Якщо $P\left(\frac{A_i}{A_j}\right) \geq 1$, тоді альтернатива A_i є важливішою за альтернативу A_j
.

Глобальна вага w_i альтернативи A_i розраховується за формулою

$$w_i = \prod_{j=1}^{M} (a_{ij})^{w_j^C}, \ i = \overline{1,N}.$$

Групове врахування бінарних відношень переваг альтернатив (ГВББПА)

Проводиться декомпозиція множини альтернатив і задача розв’язується окремо для кожної пари альтернатив. Розглядаються $N(N-1)/2$ підзадач і визначаються $N(N-1)/2$ пар глобальних ваг альтернатив (w_i^{ik}, w_k^{ik}), де w_i^{ik} - глобальна вага альтернативи A_i при одночасному розгляді тільки пари A_i та A_k, $i = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,(N-1)/2}$. При використанні дистрибутивного методу значення w_i^{ik} розраховується за формулою:

$$w_i^{ik} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij},$$

де $r_{lj} = \frac{a_{lj}}{a_{ij} + a_{kj}}$, $l \in \{i,k\}$, $r_{ij} + r_{kj} = 1$.

Для об’єднання часткових розв’язків будується матриця $P=\left(w_i^{ik} / w_k^{ik}\right)$, $i,k=\overline{1,N}$, яка задовольняє всім властивостям традиційної матриці парних порівнянь: альтернативи попарно порівнюються відносно всіх критеріїв, матриця P є обернено симетричною. Ваги, отримані з P - шукані глобальні ваги альтернатив.

В загальному випадку ієрархія складається з p рівнів, $p \geq 2$ (рис. 3.1).

Розглянемо <u>повні</u> ієрархії, які описуються числом $p \in N$ і вектором $m=\{(m_k) \mid k=1,\ldots,p\}$, де $m_k \in N$ - кількість елементів на k-му рівні ієрархії.

Тоді для розрахунку глобальних ваг елементів розглянуті вище методи ієрархічного синтезу (агрегування) використовуються рекурсивно на кожному рівні ієрархії.

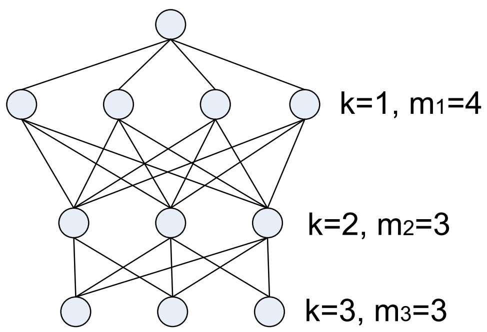

Рис.3.1 Повна ієрархія з $p=3$ рівнями

Приклади

Нехай планується придбання чотирьохкімнатної квартири в новому будинку за житловою програмою банку Аркада (станом на 2005 рік). При оцінці альтернативних варіантів будемо використовувати два <u>критерії</u>: ціна квартири та умови проживання (які включають місце розташування квартири, її площу, додаткові зручності та екологічну обстановку в районі). Будемо вважати, що ці два критерії є однаково важливими при виборі квартири.

Розглянемо наступні варіанти квартир:

1. Смт.Буча, б-р. Б.Хмельницького. Загальна вартість квартири складає 264 782,23 грн, а її площа – 132,59/66,40/22,64. Біля будинку чудовий парк, недалеко знаходиться автостоянка.

2. Дніпровський район, Лівобережний центр, вул. Нікольсько-слобідська. Загальна вартість квартири складає 1044742,73 грн. Площа 130,65/78,74/14,37 (загальна/ жила/ кухня). Будинок знаходиться поруч з метро Лівобережна, супермаркетом Фуршет. З вікон будинку відкриваються чудові види на Дніпро, поруч зона відпочинку, де влітку можна загорати й купатися. Але недалеко знаходиться міжнародний виставковий центр і там завжди дуже багато машин.

3. Дарницький район, Позняки-8, вул. Княжий затон. Загальна вартість квартири складає 330 199,38 грн. Площа 130,68/81,07/15,68. Будинок знаходиться недалеко від метро Позняки, поруч автостоянка, однак в цьому районі совсім немає зелених насаджень.

Таким чином, маємо три альтернативи: A_1 - смт.Буча, A_2 - м.Лівобережна, A_3 - Позняки. Нехай особа, що приймає рішення, оцінила ці три альтернативи відносно двох критеріїв наступним чином:

$$M_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1/7 & 1 & 3/7 \\ 1/3 & 7/3 & 1 \end{pmatrix}, \; M_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

МПП M_{C_1} і M_{C_2} - узгоджені, оскільки для $\forall i, j, k = 1,...,n$ виконується $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$, де $n = 3$, a_{ij} - елемент МПП. Тому для кожної з цих МПП $\lambda_{\max} = n = 3$ та індекси узгодженості CI дорівнюють нулю.

Таблиця 3.1 - Глобальні ваги альтернатив за різними методами синтезу

Альтернат-тива	Вага			
	дистрибутив. синтез	ідеальний синтез	метод ГВББПА	мультиплікатив. синтез

A_1	$w_1^{глоб} = 0,3887$	$w_1^{глоб} = 0,3712$	$w_1^{глоб} = 0,3372$	$w_1^{глоб} = 0,34180$
A_2	$w_2^{глоб} = 0,3484$	$w_2^{глоб} = 0,3636$	$w_2^{глоб} = 0,3219$	$w_2^{глоб} = 0,31640$
A_3	$w_3^{глоб} = 0,2629$	$w_3^{глоб} = 0,2652$	$w_3^{глоб} = 0,3409$	$w_3^{глоб} = 0,34177$

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1 Сформулюйте етапи методу аналізу ієрархій.

2 Дайте означення матриці парних порівнянь (МПП). Як інтерпретуються елементи МПП?

3 Сформулюйте метод EM розрахунку ваг з МПП.

4 Наведіть обґрунтування методу RGMM (на основі задачі мат.програмування).

5 Сформулюйте метод AN розрахунку ваг з МПП.

6 Сформулюйте метод «лінія» парних порівнянь.

7 Дайте означення і опишіть властивості узгодженої МПП.

8 Які показники використовуються для оцінювання узгодженості експертних оцінок парних порівнянь?

9 Опишіть степеневий метод розрахунку найбільшого власного числа і відповідного йому власного вектора МПП.

10 Опишіть граничний метод розрахунку найбільшого власного числа і відповідного йому власного вектора МПП.

11 Сформулюйте відомі вам задачі математичного програмування розрахунку ваг з МПП.

12 Дати означення ієрархії як частково впорядкованої множини.

13 Дати означення і навести приклади повної ієрархії.

14 Сформулювати метод ієрархічної композиції.

15 Описати дистрибутивний метод розрахунку глобальних ваг альтернатив.

16 Описати метод ідеального синтезу розрахунку глобальних ваг альтернатив.

17 Описати мультиплікативний метод розрахунку глобальних ваг альтернатив.

18 В чому полягає метод групового врахування бінарних відношень переваг альтернатив?

19 Що таке явище реверсу рангів? Навести види реверсу рангів з прикладами.

20 Як здійснюється моделювання реверсу рангів?