МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Н.І. Недашківська

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМАХ

ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для студентів,
які навчаються за спеціальністю 124 «Системний аналіз»,
освітніх програм «Системний аналіз і управління», «Системний аналіз фінансового ринку»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2019

Рецензент *Каденко, С.В.*, канд. техн. наук, ст. наук. співр., Інститут проблем реєстрації інформації НАН України

Відповідальний редактор *Панкратова, Н.Д.*, чл.-кор. НАН України, д-р техн. наук

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 8 від 25.04.2019 р.)
за поданням Вченої ради Інституту прикладного системного аналізу
(протокол № 4 від 22.04.2019 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Недашківська Надія Іванівна, канд. техн. наук, доц.

ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМАХ
ПРАКТИКУМ

Прийняття рішень в ієрархічних системах: Практикум [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 124 «Системний аналіз», освітніх програм «Системний аналіз і управління», «Системний аналіз фінансового ринку» / Н. І. Недашківська ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 3,4 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 202 с.

Задачі практикуму – аналіз і порівняння різних методів підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних моделей, дослідження з метою практичного підтвердження окремих властивостей цих методів, формування умінь та навичок практичного використання та створення програмних модулів для систем підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних моделей. Тематика практикуму включає дослідження методів розрахунку пріоритетів альтернатив рішень за множиною критеріїв рішень на основі чітких і нечітких оцінок експерта, методів оцінювання і підвищення узгодженості оцінок експерта, методів аналізу чутливості результатів.

Видання може бути корисним для студентів спеціальностей «Системний аналіз» і «Комп'ютерні науки», аспірантів та науковців.

Зміст

стор

Вступ

Задачі прийняття рішень зустрічаються в усіх сферах людської діяльності і характеризуються великою різноманітністю. Фахівець, який за родом своєї роботи пов'язаний з управлінням, обов’язково повинен бути ознайомлений з методами і системами підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних моделей, їх використанням. На відміну від більшості існуючих методів і засобів теорії дослідження операцій, економетрики та інших, що розв’язують задачі прийняття рішень з кількісними значеннями змінних і відношень між ними [1], методи і системи підтримки прийняття рішень спрямовані на розв’язання слабко-структурованих і важко формалізованих задач, які потребують використання суб’єктивних експертних оцінок.

На сьогоднішній день метод аналізу ієрархій (МАІ) розглядається високо потенційним інструментом підтримки прийняття фінансових рішень на підприємствах та у банківському секторі [2]. МАІ використовувався для розв’язання таких задач як встановлення процентних ставок за банківськими депозитами, цінова оцінка банківських вкладів, визначення ставки кредиту, вибору інвестиційних проектів, рішення щодо маркетингових стратегій банку, рішення про злиття та про призначення офісів банку, оцінювання банківських відділень, вибір інформаційних систем у банку, рішення в галузі кадрових ресурсів банку та інших.

Розглянемо декілька задач у фінансовій сфері, які було розв’язано на практиці, використовуючи методи аналізу ієрархій та їх узагальнення [2]. Задачу вибору оптимальних моделей альянсів між банками і страховими компаніями було розв’язано в два етапи. Спочатку було визначено вісім критеріїв, такі як розробка продукції, логіка прибутку, управління зв’язками з клієнтом, співвідношення доходи-витрати, джерела конфліктів, необхідний кредитний капітал, інвестиційні можливості та управління продажами. Потім три критерії з найменшими вагами виключено з розгляду і додано наступні критерії: 1) економії, обґрунтовані зростаннями масштабів виробництва і портфеля послуг, та 2) ризик. До оцінювання залучалася панель експертів – представників топ-менеджменту банків і страхових компаній. Оцінювання проводилося згідно з консенсусним принципом – інтенсивність того чи іншого парного порівняння визначалася в результаті обговорюваннями всіма учасниками панелі. В результаті кожній альтернативі поставлено у відповідність два числа: вага цієї альтернативи за фінансовими критеріями і вага за критерієм «ризик». Остаточне рішення покладалося на особу, яка приймає рішення (ОПР) відповідно до встановлених ОПР ваг цих двох критеріїв.

Метод аналізу мереж використовувався для дослідження проблеми фінансової кризи. Ставилася задача знаходження заходів, які мають запровадити уряди, щоб уникнути рецесії, безробіття та інших наслідків кризи. Метою було оцінити як знайдені заходи будуть впливати на такі головні економічні індикатори, як капітальні інвестиції, зайнятість, інфляція, долі ринків і рівень виробництва, і який із заходів має найбільший ефект на вказані макропоказники. Розглядалися економічні аспекти і відношення, універсальні для кожної держави. Пріоритети заходів розраховувалися на основі розробленої мережевої моделі, яка показує як заходи урядів впливають на головні економічні індикатори. Модель включала множину атрибутів, об’єднаних в наступні кластери: уряд, банки, виробники, наука і технології, населення та макропоказники. МАІ використовувався для оцінювання Програми стабілізації економіки Латвії.

МАІ, як доповнення до інших статистичних методів, використовувався в процесі багатокритеріального аналізу кредитоспроможності підприємств. Ієрархічна система показників та МАІ пропонуються для підвищення ефективності управління капіталом на підприємстві. Нечіткий варіант МАІ було впроваджено під час оцінювання критичних факторів вибору облігацій з високим виходом. В останній час МАІ та МАМ об’єднуються з традиційними системами CAMEL для рейтингової оцінки банків та Basel II для управління кредитним ризиком і таке об'єднання дає більше інформації для якісного прийняття рішень. Зокрема, гібридний метод CCAF/MAI для оцінювання кредитного ризику має кращі прогнозні властивості ніж традиційний метод дерев рішень.

МАІ було використано для прогнозування цін акцій та опціонів, де альтернативами розглядалися величини зростання та спадання цін акцій/опціонів у процентах. Ваги цих альтернатив інтерпретувалися як значення щільності розподілу у відповідних точках. Для оцінювання інтелектуальних активів фірми використовувався інтегрований метод МАІ з теорією збалансованої системи показників (balance score card). Було побудовано дві ієрархії: одна містила критерії унікальності компанії на ринку, друга – критерії колективності компанії.

МАІ застосовувався для аналізу інвестиційних проектів. Інвестиційні проекти оцінювалися за двома класами критеріїв: прямі доходи (чиста приведена вартість, норма прибутку всередині країни, інвестиційна норма прибутку, період відновлення, загальна сума інвестицій та інші) та потенціал для реалізації майбутнього доходу. В іншій задачі для оцінювання альтернативних варіантів інвестицій в ієрархію включено рівень сценаріїв станів економіки країни. За допомогою МАІ розв'язувалась задача вибору варіантів розміщення фінансових ресурсів в банківському секторі.

Оцінка кредитного ризику здійснювалася на основі побудованої 4-х рівневої ієрархії факторів ризику; МАІ використовувався для оцінювання ризикованості кредитної угоди комерційного банку на основі методики використання експертних оцінок для кількісної оцінки ступеня впливу факторів кредитного ризику. Ця методика, яка включає комп'ютерну обробку інформації, дозволила врахувати всі основні фактори ризику та взаємозв'язки між ними. В результаті застосування цієї методики скорочувалися витрати часу кредитних працівників за рахунок уніфікації оцінки, автоматизації обробки інформації, а також використання наявних у банку даних пов'язаних з минулими операціями у вигляді вагових і нормуючих коефіцієнтів.

МАІ застосовувався в практичній діяльності банків при виборі оптимального виду акредитива; виділено і охарактеризовано критерії, за якими проводиться порівняння видів акредитива; побудовано математичну модель для оптимізації вибору ефективного виду акредитива за МАІ. Показано, що автоматизація побудованої моделі у вигляді внутрішньобанківського програмного продукту дозволяє скоротити час на ПР, зменшити міру відповідальності співробітника, який приймає рішення, та підвищити ефективність прийнятого рішення і ступінь довіри до нього. МАІ було використано для вибору варіантів формування ресурсного забезпечення банку, виходячи з потреб конкретних інвестиційних рішень.

МАІ пропонувався як ефективний спосіб прийняття рішення щодо реструктуризації та інвестування неплатоспроможних підприємств в умовах невизначеності. На практиці застосовано адаптований МАІ для прийняття рішень щодо вибору неплатоспроможного підприємства з метою реструктуризації та інвестування, що підвищує ефективність проведення санації і ризикових операцій. МАІ – це метод, який найбільш широко використовується у всьому світі при виборі стратегії фірми, оцінюванні ризику капіталовкладень, кредитоспроможності клієнтів і кандидатів у партнери. МАІ видається більш обгрунтованим шляхом вирішення багатокритеріальних задач у складній обстановці масового банкрутства підприємств і необхідності усвідомленого інвестування в умовах нестабільного економічного середовища. Розроблено метод побудови стратегічної карти розвитку підприємства.

Із застосуванням МАІ запропоновано методику оцінювання банкрутства на основі розгляду різних видів банкрутства підприємства: банкрутство бізнесу, банкрутство власника і банкрутство виробництва. Ця методика дозволила визначити інтегрований показник потенційного банкрутства в цілому і за видами. Розроблено методику визначення підсумкового рейтингу за рівнями економічної безпеки підприємства. Встановлено, що завдяки застосуванню МАІ для вирішення даної проблеми стає можливим охопити і оцінити ступінь впливу як чинників, за якими можливе проведення певних вимірювань, так і «невловимих факторів», які оцінюються з використанням суджень експертів.

З використанням МАІ запропоновано алгоритм вибору економічної стратегії розвитку корпоративних структур в чорній металургії. На основі цього алгоритму здійснюється аналіз та оцінювання варіантів залежно від зміни дивідендної стратегії, зміни стратегії управління капіталом та підвищення оборотності активів підприємства.

МАІ, як доповнення до інших методів, використовується в діяльності інвестиційних та консалтингових компаній, а також команд з антикризового управління підприємствами, при розв’язанні задач багатокритеріального аналізу кредитоспроможності підприємств, оцінювання банкрутства підприємства, підвищення ефективності управління капіталом на підприємстві, пошуку ефективних шляхів реструктуризації та інвестування неплатоспроможних підприємств в умовах невизначеності, оцінюванні інвестиційних проектів, при виборі стратегії фірми [1, 2]. Традиційні системи рейтингової оцінки банків CAMEL та управління кредитним ризиком Basel II в останній час об’єднуються з МАІ та МАМ і вважається, що таке об’єднання дає більше інформації для якісного прийняття рішень [1, 2]. МАІ застосовується при проведенні бенчмаркінгу. Використовуються поєднання МАІ з методами розгортання функції якості QFD, balanced scorecard та комплексного аналізу даних DEA.

В допомогу ОПР для збору і аналізу великого об'єму як кількісних так і якісних даних створено комп'ютерні системи підтримки прийняття рішень (СППР). До сучасних програмних засобів, які повністю або частково реалізують методи аналізу ієрархій або мереж, є найбільш розповсюдженими і універсальними, відносяться Decision Lens, СОЛОН (SOLON), Logical Decisions, Make It Rational, СВИРЬ (SVIR), Mpriority, Super Decisions і СППР "Вибір". Загальні риси цих СППР в основному включають наявність моделі предметної області у вигляді ієрархії критеріїв, підкритеріїв і альтернатив рішень, графічний інтерфейс користувача, графічні засоби аналізу чутливості, а також можливість обробки оцінок групи експертів (табл. 1 і 2).

Особливість СППР Super Decisions полягає у обробці мережевих моделей ППР, що містять критерії доходів, витрат, можливостей і ризиків.

Таблиця 1. Функціональні характеристики сучасних СППР, які реалізують методи аналізу ієрархій або мереж [2]

Назва СППР	Парні порівняння	Підвищення узгодженості	Нечіткі ЕО	Неповні ЕО	Аналіз чутливості	Оцінювання ризиків	Групові ЕО	Мережеві моделі
Super Decisions	Так	-	-	-	Так	Так	Так	Так
Decision Lens	Так	-	-	-	Так	Так	Так	-
Logical Decisions	Так	-	-	-	Так	-	Так	-
Make It Rational	Так	Так	-	-	Так	-	Так	-
СОЛОН	Так	-	-	-	Так	Так	Так	Так
Mpriority	Так	Так	-	-	Так			-
ВЫБОР	Так	Так	-	-	Так	-		-
СВИРЬ	Так	-	-	-	Так	-	Так	-

Таблиця 2. Технічні характеристики сучасних СППР, які реалізують методи аналізу ієрархій або мереж [2]

Назва СППР	Крос-плат-форменість	Програмне забезпечення з відкритим кодом	Візуалізація моделі в графічному режимі	Редагування моделі у графічному режимі	Шаблони моделей	Веб-інтерфейс
SuperDecisions	Так	-	Так	-	Так	Так
Decision Lens	Так	-	Так	-	Так	Так
Logical Decisions	-	-	Так	-		-
Make It Rational		-		-	Так	Так
СОЛОН	-	-	Так		Так	
Mpriority	-	-	-	-	Так	-
ВЫБОР	-	-	Так	-	Так	-
СВИРЬ	-	-	Так	-		-

Розглянуті СППР, які повністю або частково реалізують методи аналізу ієрархій або мереж, мають ряд обмежень, які впливають на ефективність їх використання. Так, в цих СППР експерт має обмежені можливості змінювати свої чіткі і нечіткі оцінки, підвищувати рівень їх узгодженості в процесі розв’язання задачі. Обмежено застосовуються в розглянутих СППР нечіткі методи обчислення локальних і глобальних ваг елементів ієрархії або мережі, а також методи на основі неповної множини експертних суджень. Практично не враховуються в таких СППР при обчисленні ваг особисті якості експерта типу песимізм і оптимізм, а також невизначеність шкали, що використовується експертом при виконанні оцінювання. При проведенні аналізу чутливості в розглянутих СППР не досліджується стійкість локального ранжування альтернатив рішень до змін в експертних оцінках, не обчислюються інтервали стійкості результуючого агрегованого ранжування альтернатив до змін у вагах критеріїв.

Метою практичних робіт з дисципліни «Прийняття рішень в ієрархічних системах» є аналіз і порівняння методів підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних моделей, дослідження з метою практичного підтвердження окремих властивостей цих методів, формування умінь та навичок практичного використання та створення програмних модулів для систем підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних моделей. В результаті виконання практичних робіт студенти повинні вміти застосовувати сучасні методи збору і обробки знань експертів, застосовувати методи і моделі аналізу ієрархій для розрахунку пріоритетів альтернатив рішень за багатьма критеріями рішень, методи оцінювання і підвищення узгодженості експертних оцінок, підходи до аналізу чутливості отриманих результатів до збурень в експертних оцінках, а також набути практичних навичок у використанні і реалізації вказаних методів при вирішенні практичних задач підтримки прийняття рішень.

Практикум 1

Методи розрахунку ваг альтернатив рішень на основі експертних оцінок парних порівнянь

Мета роботи:

- *Обчислити оцінки коефіцієнтів відносної важливості (ваг) альтернатив для задач прийняття рішень з одиничним критерієм на основі експертних оцінок парних порівнянь цих альтернатив. Порівняти результати, отримані наступними методами*:
  - головного власного вектору;
  - оптимізаційними;
  - арифметичної нормалізації;
  - «лінія».
- *Оцінити узгодженість експертних оцінок з використанням наступних показників:*
  - відношення узгодженості CR;
  - геометричний індекс узгодженості GCI;
  - гармонічне відношення узгодженості HCR;
  - спектральний коефіцієнт узгодженості k_y.
- *Розв'язати модельну задачу ППР на основі експертних оцінок парних порівнянь в шкалі.*

1. Теоретичні відомості

Загальна характеристика методів парних порівнянь. Матриці парних порівнянь (МПП)

Нехай задана множина альтернатив $A = \{a_i\}$, $i = 1,...,n$. В методах парних порівнянь кожна альтернатива порівнюється в загальному випадку з усіма іншим альтернативами відносно заданого критерію і за результатами порівнянь формується матриця парних порівнянь (табл. 1.1) [3].

Означення. Матрицею парних порівнянь називається квадратна матриця $D=\{d_{ij}\,|\,i,j=1,...,n\}$, де елемент $d_{ij}\in R$ в кількісній формі виражає силу переваги альтернативи a_i над альтернативою a_j, і виконується властивість оберненої симетричності [3]:

$d_{ji}=1/d_{ij}$, $d_{ij}>0$ (мультиплікативні парні порівняння),

$d_{ji}=-d_{ij}$ (адитивні парні порівняння).

Для надання елементам МПП конкретних числових значень перед початком процедури порівняння розробляються шкали вербальних експертних суджень з градаціями s_k і відповідних кількісних виражень цих градацій x_k, де $x_k\in R$, $k=0,...,K$.

Таблиця 1.1. Матриця парних порівнянь

	a_1	a_2	a_3	...	a_n
a_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	...	d_{1n}
a_2		d_{22}	d_{23}	...	d_{2n}
a_3			d_{33}	...	d_{2n}
$\vdots$				...	$\vdots$
a_n					d_{nn}

Однією з широко розповсюджених вербальних шкал є фундаментальна шкала відносної важливості (табл. 1.2). Експериментально доведена ефективність цієї шкали над іншими шкалами [4, 5].

Важливим моментом для подальшої обробки МПП є апріорний вибір інтерпретації елементів МПП в термінах ваг об’єктів. В загальному випадку

$$d_{ij}=f(w_i,w_j), \tag{1.1}$$

де f - монотонна функція.

Достатньо часто на практиці використовуються представлення:

$f(w_i,w_j)=\frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}$ (мультиплікативні парні порівняння),

$f(w_i,w_j)=(w_i-w_j)+\varepsilon_{ij}$ (адитивні парні порівняння).

Таблиця 1.2. Фундаментальна шкала експертних суджень [4, 5]

Інтенсивність важливості x_k	Якісна оцінка (судження s_k)	Пояснення
1	Однаково важливі	Елементи рівні за своїм значенням
3	Ненабагато важливіші	Існують вербальні висловлювання щодо пріоритету одного елементу над іншим, але ці висловлювання досить непереконливі
5	Суттєво важливіші	Існують добрі докази та логічні критерії, які можуть показати, що один з елементів є більш важливий
7	Значно важливіші	Існує переконливий доказ великої значущості одного елемента в порівнянні з іншим
9	Абсолютно важливіші	Усвідомлення пріоритету одного елементу над іншим максимально підтверджується
2,4,6,8	Проміжні оцінки	Потрібен певний компроміс

Якщо існує вектор ваг *w*, такий що $\varepsilon_{ij} = 1$ або $\varepsilon_{ij} = 0$ для всіх $i, j = 1,...,n$, то така МПП називається <u>теоретичною</u>,.

МПП $D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ називається <u>*узгодженою*</u>, якщо для всіх її елементів виконується властивість транзитивності [3 – 5]:

$d_{ij} = d_{ik} d_{kj}$ для $\forall i, j, k$ (мультиплікативна МПП),

$d_{ij} = d_{ik} + d_{kj}$ для $\forall i, j, k$ (адитивна МПП).

Теоретична МПП завжди є узгодженою, оскільки

$$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_k}\frac{w_k}{w_j} = d_{ik}d_{kj} \text{ (мультиплікативна МПП)},$$

$$d_{ij} = w_i - w_j = (w_i - w_k) + (w_k - w_j) = d_{ik} + d_{kj} \text{ (адитивна МПП)}.$$

При мультиплікативних парних порівняннях експерту ставиться питання «у скільки разів альтернатива a_i переважає альтернативу a_j відносно критерію», при адитивних порівняннях – «на скільки».

В загальному випадку заповнена експертом МПП відрізняється від теоретичної. Основними причинами цього є як неузгодженість оцінок експерта при виборі вербальних суджень, так і апріорна фіксація кількісних виражень градацій шкали [6].

Методи парних порівнянь – одні з найбільш теоретично обґрунтовані методи знаходження ваг альтернатив відносно певного критерію прийняття рішень. Результати багаточисленних досліджень показують, що парні порівняння найкращим чином враховують психофізіологічні особливості людини і тому призводять до більш точних оцінок експертів [2, 4 – 6].

Постановка задачі

<u>Дано:</u>

- множина альтернатив $A = \{a_i\}$, $i = 1,...,n$,
- якісний критерій C.

<u>Знайти:</u>

- ваги альтернатив $W = \{w_i\}$, $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Метод головного власного вектору (eigenvector method, EM)

<u>Ідея методу.</u> Метод EM є методом мультиплікативних парних порівнянь. Експерт попарно порівнює альтернативи у фундаментальній шкалі і за результатами порівнянь заповнюється $n(n-1)/2$ елементів верхньої трикутної частини МПП D. Елементи нижньої трикутної частини розраховуються за правилом оберненої симетричності $d_{ji} = 1/d_{ij}$.

Метод ЕМ. Вектором ваг є власний вектор МПП D, що відповідає її найбільшому власному числу.

Індексом узгодженості (consistency index) МПП D називається величина

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1}.$$

Відношенням узгодженості (consistency ratio) МПП називається

$$CR = \frac{CI}{MRCI},$$

де $MRCI$ - середнє значення індексів узгодженості для заповнених випадковим чином МПП (табл. 1.3).

Критерій допустимої неузгодженості. МПП узгоджена т.т.т.к. $CR = 0$. МПП допустимо неузгоджена і може використовуватися для розрахунку ваг, якщо значення CR не перевищує встановлений поріг (табл. 1.4).

Якщо МПП узгоджена, то всі її рядка лінійно залежні між собою.

Ранг узгодженої МПП дорівнює одиниці.

Спектр узгодженої МПП складається з двох власних чисел: $\lambda_1 = n$ кратності 1 і $\lambda_2 = 0$ кратності n-1.

Таблиця 1.3. Значення $MRCI$ залежно від розмірності n МПП [3 – 5]

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$MRCI$	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45	1,49	1,52	1,54	1,56	1,58	1,59

Таблиця 1.4. Порогові значення CR залежно від розмірності МПП [3 – 5]

n	Порогове значення CR
3	0.05
4	0.08
≥5	0.1

Існує два чисельних методи знаходження головного власного вектору МПП D: граничний і степеневий методи.

Граничний метод

1. задати довільний вектор $x_0 > 0$;
2. розрахувати $D^k x_0$, $k \geq 1$;
3. визначити норму вектору $\|y\| \equiv \sum |y_i|$, тоді $\dfrac{D^k x_0}{\|D^k x_0\|}$ збігається до головного власного вектору матриці D при $k \to \infty$, а $\dfrac{\|D^k x_0\|}{\|D^{k-1} x_0\|}$ - до її максимального власного числа.

Степеневий метод

1. визначити норму вектору $\|y\| \equiv \sum |y_i|$; задати довільний вектор $x_0 > 0$, $\| x_0 \| = 1$;
2. розрахувати послідовність скалярних значень $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ і векторів $x_1, x_2, \ldots$, які задовольняють умовам $\|x_1\| = \|x_2\| = \ldots = 1$ і $Dx_{k-1} = \lambda_k x_k$. Ці значення розраховуються за формулами: $x_k = \dfrac{Dx_{k-1}}{\|Dx_{k-1}\|}$, $\lambda_k = \|Dx_{k-1}\|$.

   Тоді x_k збігається до головного власного вектору матриці D при $k \to \infty$, а λ_k - до її максимального власного числа.

Обидва наведені методи залежать від співвідношення між максимальним і наступним найбільшим власними числами і мають порядок збіжності $O\left(1/\lambda_{max}^2\right)$. Відмінність між ними полягає в тому, що в степеневому методі нормалізація стовпчиків степені МПП відбувається після кожної ітерації, а в граничному методі проводиться нормалізація граничної МПП (МПП у великій степені).

Метод геометричної середньої (row geometric mean method, RGMM)

Крім методу ЕМ для знаходження ваг використовують й інші методи, які в основному базуються на мінімізації відхилення елементів заданої експертом МПП від невідомої узгодженої МПП [2 – 6].

Нехай маємо мультиплікативну модель парних порівнянь $d_{ij} \approx w_i / w_j$, що еквівалентно $d_{ij} w_j \approx w_i$, $w_j \neq 0$, де "$\approx$" означає наближену рівність. Ваги w можуть бути знайдені з однієї з наступних задач математичного програмування:

<u>Задача 1</u>

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} - w_i / w_j)^2$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i > 0,\ i = 1,...,n.$$

<u>Задача 2</u>

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} w_j - w_i)^2$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i > 0, i = 1,...,n.$$

Задачі 1 і 2 є не випуклими задачами нелінійного програмування, тому є практично неефективними. Тому на практиці для знаходження ваг формулюють і розв’язують наступну задачу лінійного програмування:

<u>Задача 3</u>

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\ln d_{ij} - \ln w_i + \ln w_j)^2 \text{ при обмеженнях } \prod_{i=1}^{n} w_i = 1,\ \ w_i > 0, i = 1,...,n.$$

За умови мультиплікативної нормалізації $\prod_{i=1}^{n} w_i = 1$ розв’язком задачі 3 є ваги, розраховані за методом *RGMM* [3, 6]:

$$v_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}\ .$$

Нормовані до одиниці ваги альтернатив розраховуються за формулою

$$w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}} \ .$$

Метод геометричної середньої дуже широко використовується на практиці як наближення до методу ЕМ. Однак, лише при гарній узгодженості МПП ваги, знайдені за цими двома методами, є близькими. Якщо ж заповнена експертом МПП має високий рівень неузгодженості, то ці ваги будуть значно відрізнятися між собою.

При використанні методу RGMM мірою неузгодженості МПП слугує незміщена оцінка дисперсії збурень [3]:

$$s^2 = \frac{S}{d.f} = \frac{2\sum_{i<j}\left(\ln d_{ij} - \ln \frac{v_i}{v_j}\right)^2}{(n-1)(n-2)},$$

де S - квадрат відстані між $\ln d_{ij}$ і $\ln \frac{v_i}{v_j}$, $d.f$ - (скорочено від degree of freedom) - кількість ступенів свободи, яка дорівнює різниці між кількістю оцінок $n(n-1)/2$ і кількістю оцінюваних параметрів $n-1$.

З точки зору детермінованого методу, менше значення s^2 свідчить про коротшу відстань між d_{ij} і $\frac{v_i}{v_j}$, тому кращою є відповідність між оцінками експертів і вектором ваг v, і, як наслідок, більш узгодженою є МПП D.

<u>Геометричним індексом узгодженості</u> (geometric consistency index, GCI) МПП D при використанні методу RGMM знаходження ваг називається:

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} \log^2 e_{ij} \quad ,$$

де $e_{ij} = d_{ij} v_j / v_i$ - помилка апроксимації відношення ваг v_i / v_j за допомогою елемента МПП d_{ij}.

Математичне сподівання GCI для заповненої випадковим чином МПП D при умові, що елементи МПП є незалежними у сукупності, обернено симетричними і мають однаковий розподіл, є постійною величиною, рівною $E(GCI) = Var(\ln d_{ij})$.

Для малих помилок e_{ij} геометричний індекс узгодженості GCI пропорційний відношенню узгодженості CR. Використовуючи імітаційне моделювання, оцінено регресію GCI від CR для різних інтервалів CR в межах $CR \le 0.1$. Отримані порогові значення для GCI наведені в табл. 1.5.

Таблиця 1.5. Порогові значення GCI, n - розмірність МПП [3]

Порогове значення GCI		
$n=3$	$n=4$	$n\ge 5$
0.1573	0.3526	0.370

Якщо значення GCI, розраховані для заданих експертами МПП, перевищують вказані в табл. 1.5 пороги, то це свідчить про високу неузгодженість оцінок експертів.

Критерій допустимої неузгодженості. МПП узгоджена т.т.т.к. GCI=0. МПП допустимо неузгоджена і може використовуватися для розрахунку ваг, якщо значення GCI не перевищує встановлений поріг (табл. 1.5).

Метод адитивної нормалізації (additive normalization, AN)

Метод AN розглядається як апроксимація методу EM, що не потребує розрахунку власних векторів. При гарній узгодженості МПП в межах інтервалів для CR ваги, отримані методом AN, є близькими до ваг, отриманих методом EM.

Нехай $s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ - сума j-го стовпчика заданої експертом МПП A.

Метод AN. Вагами є величини $(s_1^{-1},...,s_n^{-1})$, обернені до сум стовпчиків МПП.

Для будь-якої обернено симетричної матриці B розмірності $n\times n$ виконується $\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1} \le 1$, де s_j - сума j-го стовпчика B. Рівність має місце тоді і тільки тоді коли B є узгодженою.

Гармонічним індексом узгодженості (harmonic consistency index, HCI) заповненої експертом МПП називається [3]

$$HCI(n) = \frac{\left(HM(s) - n\right)(n+1)}{n(n-1)},$$

де $HM(s) = n\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1}\right)^{-1}$ - гармонічна середня для $s = \left\{s_j \,\middle|\, j \in [1;n]\right\}$.

Гармонічним відношенням узгодженості називається [3]

$$HCR(n) = \frac{HCI(n)}{HRCI(n)},$$

де $HRCI(n)$ - середнє значення *HCI(n)* для випадкових МПП.

Значення HCI близькі до CI, тому порогові значення для HCR встановлені такі ж, як і для CR (див. табл.1.4).

Критерій допустимої неузгодженості. МПП узгоджена т.т.т.к. HCR=0. МПП допустимо неузгоджена і може використовуватися для розрахунку ваг, якщо значення HCR не перевищує встановлений поріг (табл. 1.4).

Метод «лінія» парних порівнянь

Ідея методу. Метод «лінія» є методом парних порівнянь за припущення, що оцінки експерта узгоджені. Вибирається адитивна чи мультиплікативна модель залежності ваг від величин переваг і розраховуються ваги альтернатив.

Метод «лінія» складається з наступних етапів [6]:

1. Експерт вибирає a_e - еталонну альтернативу і порівнює з нею всі інші альтернативи a_i, $i \neq e$. При мультиплікативних порівняннях експерту ставиться питання «у скільки разів a_i переважає над a_e відносно критерію C », при адитивних порівняннях – «на скільки».

За результатами формується матриця $D_e = \{d_{ie} \mid i = 1,...,n\}$ ступенів переваг a_i над a_e.

2. Еталону a_e присвоюється вага v_e, під якою розуміється кількісна міра ступеня вираженості у альтернативи a_e властивості, що описується критерієм C.

3. Вага кожної альтернативи виражається через вагу еталона. Обчислюються ненормовані ваги $v_i = \varphi(v_e, d_{ie})$, $\forall\ i \neq e$, де φ - монотонна функція. При мультиплікативних порівняннях $v_i = v_e \varphi_{mult}(d_{ie})$, $\varphi_{mult}(1) = 1$, при адитивних порівняннях $v_i = v_e + \varphi_{ad}(d_{ie})$, $\varphi_{ad}(0) = 0$.

4. Здійснюється нормування ваг і знаходяться відносні ваги $w_i = v_i / \sum_{i=1}^{n} v_i$

.

Трудомісткість: $n-1$ порівнянь.

В методі «лінія» експерт визначає лише один рядок МПП, тобто порівнює всі альтернативи з однією вибраною, еталонною альтернативою. У методі «трикутник» (до якого відносяться, зокрема, методи EM, RGMM та AN) треба виконати порівняння кожного об’єкту з кожним, тобто всього $\frac{n(n-1)}{2}$ порівнянь, інші елементи МПП обчислюються за допомогою певних розрахунків. В методі «трикутник» експертна інформація надлишкова і використовується для оцінювання її узгодженості, суперечливості.

В i-му рядку МПП альтернатива a_i виступає еталоном. Тому МПП – це результат порівнянь всіх альтернатив з різними еталонними альтернативами. Відносні ваги визначаються як результати обробки МПП.

Порівняння методів парних порівнянь «лінія» і EM, RGMM, AN

Для методів EM, RGMM і AN необхідно виконати достатньо велику кількість парних порівнянь $n(n-1)/2$, де n - кількість порівнюваних елементів. Отримана в результаті експертна інформація є надлишковою і використовується для підвищення достовірності оцінювання ваг. В умовах обмеженості часових і фінансових ресурсів використовують метод «лінія», який потребує лише $n-1$ порівнянь.

Приклади розв'язання типових задач

Приклад 1. Необхідно вибрати оптимальний канал для розміщення реклами на телебаченні. Експерт виконав порівняння каналів у фундаментальній шкалі. В результаті отримано наступні оцінки: перший канал однаковий з другим і четвертим каналами і ненабагато кращий за третій; другий канал слабо переважає третій і однаковий з четвертим каналом. Третій ненабагато гірший за четвертий.

Побудувати мультиплікативну матрицю парних порівнянь. Встановити, чи мають експертні оцінки допустимий рівень неузгодженості за означенням.

Розв'язання

Згідно з фундаментальною шкалою відносної важливості МПП дорівнює: $D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Перевіримо узгодженість МПП за означенням. Оскільки $n=4$, то кількість транзитивностей, які потрібно перевірити, дорівнює $n!/(3!(n-3)!)=4$:

i	j	k	$d_{ij}=d_{ik}d_{kj}$
1	2	3	виконується
1	2	4	виконується
1	3	4	виконується
2	3	4	виконується

Таким чином, МПП за означенням є узгодженою.

Приклад 2. Чи є наступна матриця парних порівнянь слабко узгодженою:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{6} \\ 1 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}?$$

Розв'язання. Відношення узгодженості цієї МПП дорівнює $CR=0.344$, воно значно перевищує порогове значення 0.08 для $n=4$ і тому МПП D недопустимо неузгоджена.

Для перевірки слабкої узгодженості МПП треба шукати в ній нетранзитивні ранжування (цикл). Дійсно, нетранзитивне ранжування існує: $a_1 \succ a_2$ (оскільки $d_{12}>1$), $a_2 \succ a_3$ ($d_{23}>1$), але $a_1 \prec a_3$ ($d_{13}<1$). Тому *задана МПП є слабко неузгодженою*.

Приклад 3. Чи є наступна матриця парних порівнянь слабко узгодженою:

$$D1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ 1 & \frac{1}{2} & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так, матриця парних порівнянь D1 слабко узгоджена.

Приклад 4. Вибрати одного з трьох кандидатів на деяку посаду за критерієм «досвід». В результаті порівняння у фундаментальній шкалі першого кандидата з усіма іншими виявилося, що його досвід не набагато кращий за досвід другого, але сильно переважає досвід третього. Досвід другого кандидата практично такий же як і у третього, тільки трохи кращий.

Для розрахунку коефіцієнтів відносних важливостей альтернатив рішень використати методи головного власного вектору (EM) і геометричної середньої (RGMM) парних порівнянь. Розрахувати індекси узгодженості CI і GCI оцінок особи, що приймає рішення. Чи є оцінки допустимо неузгодженими?

Розв'язання

Побудуємо матрицю парних порівнянь (МПП) за заданими оцінками, використовуючи фундаментальну шкалу відносної важливості:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

За означенням ця МПП неузгоджена.

Згідно з методом головного власного вектору, коефіцієнти відносних важливостей альтернатив рішень – це елементи головного власного вектору матриці парних порівнянь. Розрахуємо найбільше власне число та відповідний йому власний вектор МПП.

$$\det(D-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}1-\lambda & 3 & 5\\ 1/3 & 1-\lambda & 2\\ 1/5 & 1/2 & 1-\lambda\end{pmatrix}=(1-\lambda)^3-3(1-\lambda)+\tfrac{61}{30}$$

Значення $\lambda_{\max}$ розраховується як найбільший дійсний корінь рівняння $(1-\lambda)^3-3(1-\lambda)+\frac{61}{30}=0$. Єдиний дійсний корінь дорівнює $\lambda=3.004$, це і є максимальне власне число МПП.

Тоді індекс узгодженості CI дорівнює

$$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}=\frac{3.004-3}{3-1}=0.002.$$

Відношення узгодженості $CR=\dfrac{CI}{MRCI}=\dfrac{0.002}{0.51}=0.004$ не перевищує порогове значення 0.05 (для $n=3$). Тому *МПП* D *допустимо неузгоджена* (для повністю узгодженої МПП $CR=0$) і, як наслідок, може використовуватися для знаходження ваг.

Ваги v розраховуються на основі системи лінійних рівнянь $\boldsymbol{Dv}=\boldsymbol{\lambda_{\max}}\mathbf{v}$, в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases}1\cdot v_1+3\cdot v_2+5\cdot v_3=3.004\cdot v_1\\ \frac{1}{3}\cdot v_1+1\cdot v_2+2\cdot v_3=3.004\cdot v_2\\ \frac{1}{5}\cdot v_1+\frac{1}{2}\cdot v_2+1\cdot v_3=3.004\cdot v_3\end{cases}.$$

Система має безліч розв'язків, оскільки її детермінант дорівнює нулю. Один з ненульових розв'язків: $v_1=5.2891$, $v_2=1.8815$, $v_3=1$.

Нормовані ваги: $w_1=0.648$, $w_2=0.230$, $w_3=0.122$.

Наближеним до методу головного власного вектора є метод геометричної середньої. Згідно з цим методом ненормовані ваги дорівнюють

$$v_1=\sqrt[3]{1\cdot 3\cdot 5}=2.4662,\ v_2=\sqrt[3]{\tfrac{1}{3}\cdot 1\cdot 2}=0.8736,\ v_3=\sqrt[3]{\tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{2}\cdot 1}=0.4642.$$

Після нормування отримаємо ваги $w_1=0.648$, $w_2=0.230$, $w_3=0.122$.

Геометричний індекс узгодженості дорівнює

$$\boldsymbol{GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} (ln d_{ij} - ln \frac{v_i}{v_j})^2 = 0.011}.$$

Цей індекс не перевищує порогового значення 0.1573 (для $n = 3$ і $CR^{порог} = 0.05$), тому *МПП* D *має допустиму неузгодженість* (для повністю узгодженої МПП $GCI = 0$).

Результати показують, що ваги, отримані точним та наближеним методами, співпадають з точністю $\mathbf{10^{-3}}$. Це є результатом гарної узгодженості МПП D. В загальному випадку, при більшому рівні неузгодженості МПП ці ваги відрізняються в більшій мірі.

Приклад 5. Розрахувати ваги альтернатив рішень, якщо матриця парних порівнянь альтернатив наступна:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки задана матриця парних порівнянь (МПП) є узгодженою (перевірити за означенням!), то *вектором ваг є будь-який вектор-стовпчик МПП.*

Нормовані ваги – це нормований будь-який стовпчик МПП.

Знайдемо ваги w1, w2, w3, w4, пронормувавши, наприклад, останній вектор-стовпчик МПП шляхом ділення на суму елементів стовпчика, отримаємо: w1=6/15=0.4, w2=w1=0.4, w3=2/15=0.13, w4=1/15=0.07.

Приклад 6. Розрахувати коефіцієнти відносної важливості альтернатив рішень, використовуючи методи геометричної середньої (RGMM) та головного власного вектору (EM), якщо матриця парних порівнянь альтернатив дорівнює:

$$D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 1/2 & 1 & 4\\ 1/7 & 1/4 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Згідно з методом геометричної середньої:

ненормовані ваги

$$v=\left(\sqrt[3]{1\cdot 2\cdot 7},\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 4},\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot 1}\right)=(2.4101,\ 1.2599,\ 0.3293),$$

нормовані ваги

$$w=\left(\tfrac{2.4101}{2.4101+1.2599+0.3293},\ \tfrac{1.2599}{2.4101+1.2599+0.3293},\ \tfrac{0.3293}{2.4101+1.2599+0.3293}\right)=(0.6026,\ 0.3150,\ 0.0823).$$

Розрахуємо геометричний індекс узгодженості

$$GCI=\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}\ln^2 e_{ij}\text{, де } e_{ij}=d_{ij}v_j/v_i.$$

$$E=(e_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 1.0455 & 0.9560\\ \frac{1}{1.0455} & 1 & 1.0451\\ \frac{1}{0.9560} & \frac{1}{1.0451} & 1\end{pmatrix}\text{, тоді}$$

$$GCI=\frac{2}{(3-1)(3-2)}\left(\ln^2(1.0455)+\ln^2(0.9560)+\ln^2(1.0451)\right)=\frac{2\cdot 0.006}{2}=0.006$$

Отримане GCI менше за порогове значення 0.1573 (для $n=3$, $CR^{порог}=0.05$). Тому МПП D має допустимий рівень неузгодженості.

Згідно з методом головного власного вектору, коефіцієнти відносних важливостей альтернатив рішень – це елементи головного власного вектору матриці парних порівнянь (МПП).

Розрахуємо найбільше власне число та відповідний йому власний вектор МПП одним з чисельних методів, а саме степеневим методом.

Визначимо норму вектора $\|y\|\equiv\sum|y_i|$.

Нехай $x_0=\left(\tfrac{1}{3}\quad\tfrac{1}{3}\quad\tfrac{1}{3}\right)^T$, $\|x_0\|=1$.

$$Dx_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{38}{84} \end{pmatrix}, \ \|Dx_0\| = \frac{10}{3} + \frac{11}{6} + \frac{38}{84} = \frac{472}{84} = \frac{118}{21},$$

тому $x_1 = \dfrac{Dx_0}{\|Dx_0\|} = \begin{pmatrix} \frac{140}{236} & \frac{77}{236} & \frac{19}{236} \end{pmatrix}^T$, $\lambda_1 = \|Dx_0\| = \frac{118}{21} = 5.6190$.

$$Dx_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{140}{236} \\ \frac{77}{236} \\ \frac{19}{236} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{427}{236} \\ \frac{223}{236} \\ \frac{233}{4 \cdot 236} \end{pmatrix}, \ \|Dx_1\| = \frac{2833}{944},$$

тому $x_2 = \dfrac{Dx_1}{\|Dx_1\|} = \begin{pmatrix} 0.6029 & 0.3149 & 0.0822 \end{pmatrix}^T$, $\lambda_2 = \|Dx_1\| = \frac{2833}{944} = 3.0011$.

$$Dx_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6029 \\ 0.3149 \\ 0.0822 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.8081 \\ 0.9452 \\ 0.2471 \end{pmatrix}, \ \|Dx_2\| = 3.0004,$$

тому $x_3 = \dfrac{Dx_2}{\|Dx_2\|} = \begin{pmatrix} 0.6026 & 0.3150 & 0.0824 \end{pmatrix}^T$, $\lambda_3 = \|Dx_2\| = 3.0004$.

Задамо практичну точність обчислень 10^{-3}.

$\| x_3 - x_2 \| < \varepsilon = 10^{-3}$, тому x_3 - шуканий вектор ваг, λ_3 - максимальне власне число МПП D.

$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{3.0004-3}{2} = 0.0002$, $CR = \frac{CI}{MRCI} = \frac{0.0002}{0.52} = 0.0004$

Отримане CR практично дорівнює нулю, тому МПП D близька до узгодженої.

Результуючий вектор ваг $x_3 = \begin{pmatrix} 0.6026 & 0.3150 & 0.0824 \end{pmatrix}^T$.

Приклад 7. Використовуючи метод “лінія”, розрахувати коефіцієнти відносної важливості альтернатив рішень $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$, якщо еталоном є $\mathbf{a_1}$, залежність між вагами має вигляд $v_i = v_j d_{ij}$, де d_{ij} - величина переваги альтернативи a_i над альтернативою a_j, $\mathbf{d_{21} = 1/3}$, $\mathbf{d_{31} = 1/5}$.

Розв’язання

Виразимо ненормовані ваги альтернатив через вагу еталону: $v_2 = v_1/3$, $v_3 = v_1/5$. Пронормуємо ваги альтернатив $w_1 = \frac{v_1}{v_1+v_1/3+v_1/5} = \frac{15}{23} = 0.652$, $w_2 = \frac{v_1/3}{v_1+v_1/3+v_1/5} = \frac{5}{23} = 0.217$, $w_3 = \frac{v_1/5}{v_1+v_1/3+v_1/5} = \frac{3}{23} = 0.131$. Це і є результуючі ваги.

Приклад 8. Побудувати спектри для наступної множини ваг $E = \{e_{ij}\}$, де e_{ij} - вага альтернативи $\mathbf{a}_i$, надана j-м експертом. Використати шкалу $[0,1]$ з кількістю позначок $n = 11$:

$$E = \begin{pmatrix} 0.207 & 0.182 & 0.400 & 0.182 \\ 0.621 & 0.545 & 0.400 & 0.545 \\ 0.069 & 0.182 & 0.133 & 0.182 \\ 0.103 & 0.091 & 0.067 & 0.091 \end{pmatrix}$$

Розрахувати спектральні коефіцієнти узгодженості ваг альтернатив. Для яких альтернатив спектри ваг є повністю узгодженими, повністю неузгодженими, допустимо неузгодженими, потребують повернення експерту?

Розв’язання

Спектри $\mathbf{R_i}$ альтернатив $\mathbf{a}_i$, i=1,…,4, дорівнюють

$$\mathbf{R_1} = (\mathbf{0 \quad 0 \quad 3 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}),$$
$$\mathbf{R_2} = (\mathbf{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}),$$
$$\mathbf{R_3} = (\mathbf{0 \quad 2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}),$$
$$\mathbf{R_4} = (\mathbf{0 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}).$$

Спектральні коефіцієнти узгодженості ваг альтернатив

$$\boldsymbol{Ky}(\mathbf{R_1}) = \mathbf{1} - \frac{\frac{1}{4}(3|3-a|+1|5-a|)-(\frac{3}{4}\ln\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\ln\frac{1}{4})}{\mathrm{G}(\sum_{k=1}^{11}|k-6|)+\ln 11} = \mathbf{1} - \frac{0{,}75-(-0{,}5623)}{\mathrm{G}(\sum_{k=1}^{11}|k-6|)+\ln 11} = \mathbf{0.769},$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{1}{4}(3\cdot 3 + 5\cdot 1) = 3{,}5, \quad \boldsymbol{G} = \frac{4}{11\cdot \ln 4\cdot \ln 11} = 0{,}1094,$$

$$\boldsymbol{Ky}(\mathbf{R_2}) = \mathbf{0.729},$$
$$\boldsymbol{Ky}(\mathbf{R_3}) = \mathbf{0.790},$$
$$\boldsymbol{Ky}(\mathbf{R_4}) = \mathbf{1.000}.$$

Згідно з критерієм узгодженості в спектральному методі, спектр ваг $\mathbf{Ky(R)}$ є допустимо неузгодженим, якщо $\mathbf{Ky(R)} \geq \mathbf{T_u}$. Поріг застосування $\mathbf{T_u}$ для заданої шкали $[0,1]$ з кількістю поділок $n = 11$ дорівнює 0.790. Тому допустимо неузгодженими є спектри ваг для третьої і четвертої альтернатив.

Оцінки з множини E щодо першої та другої альтернатив мають бути повернені експертам для перегляду, оскільки $\boldsymbol{T_0} \leq \boldsymbol{Ky}(\mathbf{R_1}) \leq \mathbf{T_u}$ і $\boldsymbol{T_0} \leq \boldsymbol{Ky}(\mathbf{R_2}) \leq \mathbf{T_u}$, де $\boldsymbol{T_0} = \mathbf{0.398}$ – поріг виявлення.

Повністю узгодженим є спектр ваг четвертої альтернативи.

Повністю неузгодженого спектру немає.

Приклад 9. Побудувати породжені матриці для наступної матриці парних порівнянь:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання. Матриці, породжені першим, другим, третім і четвертим рядками, відповідно дорівнюють

$$D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{9}{2} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 & \frac{9}{5} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & 1 \end{pmatrix}, \; D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 10 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 5 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 1 \end{pmatrix}, \; D^3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 5 & 15 \\ \frac{3}{5} & 1 & 3 & 9 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 & 3 \\ \frac{1}{15} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}, \; D^4 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{9}{5} & 3 & 9 \\ \frac{5}{9} & 1 & \frac{5}{3} & 5 \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{5} & 1 & 3 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 10. Оцінити узгодженість і розрахувати ваги альтернатив рішень, використовуючи спектральний підхід, для матриці парних порівнянь задачі 9.

Розв'язання

Розглянемо шкалу [0,1] з кроком 0.1, тобто, шкала має $n=11$ поділок.

Нормовані ваги альтернатив, отримані на основі матриць D^1, D^2, D^3 і D^4 (див.приклад 9) методом головного власного вектору або методом "лінія", коли еталоном вибрано першу, другу, третю і четверту альтернативи, дорівнюють відповідно

$(0.552, 0.276, 0.110, 0.061)$,

$(0.566, 0.283, 0.094, 0.057)$,

$(0.536, 0.321, 0.107, 0.036)$ і

$(0.5, 0.278, 0.167, 0.056)$.

Тому ваги першої альтернативи, знайдені за усіма породженими матрицями дорівнюють $v_1=\left(0.552, 0.566, 0.536, 0.5\right)$.

Аналогічно, ваги інших альтернатив на основі породжених матриць дорівнюють

$v_2=\left(0.276, 0.283, 0.321, 0.278\right)$,

$v_3=\left(0.110, 0.094, 0.107, 0.167\right)$,

$v_4=\left(0.061, 0.057, 0.036, 0.056\right)$.

Спектральні коефіцієнти узгодженості для спектрів ваг, побудованих для множин ваг v_1-v_4, рівні

$k_y(R_1)=0.790$, $k_y(R_2)=1$, $k_y(R_3)=0.835$, $k_y(R_4)=0.835$.

Тому спектральний коефіцієнт узгодженості МПП D $k_y(D)=\min\limits_{i=1,\ldots,4} k_y(R_i)=0.790$.

Поріг виявлення для шкали [0,1] з $n=11$ позначками дорівнює T_0=0.398, поріг застосування T_u=0.790.

Отримали, що $k_y(D) \geq T_u$ для всіх альтернатив рішень, тому можемо розрахувати агреговані узгоджені ваги альтернатив як середнє арифметичне ваг на основі породжених матриць.

Отримаємо $v_1^* = 0.539$, $v_2^* = 0.290$, $v_3^* = 0.120$, $v_4^* = 0.053$.

Пронормуємо знайдені ваги.

Результуючі ваги альтернатив рішень:

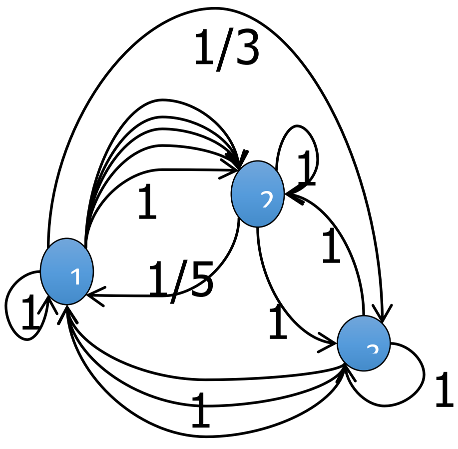
$v_1^{norm} = 0.538$, $v_2^{norm} = 0.290$, $v_3^{norm} = 0.120$, $v_4^{norm} = 0.052$.

Приклад 11. Побудувати граф, який відповідає наступній матриці парних порівнянь альтернатив рішень:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Заданій МПП відповідає орієнтовний граф, наведений нижче:



Приклад 12. Знайти загальні інтенсивності k-маршрутів між вузлами графу із задачі 11 та індекс переваги об'єкту i=1 над усіма об'єктами за k кроків, якщо k=2.

Розв'язання

Нехай G – граф, який відповідає наступній МПП:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1/3 \\ 1/5 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Загальні інтенсивності k-маршрутів між вузлами графу G – це елементи матриці $D^k = \{(d_{ij}(k)) \mid i, j = 1, ..., n\}$.

Тому загальні інтенсивності 2-маршрутів між вузлами графу G:

$$D^2 = D \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 10\frac{1}{3} & 5\frac{2}{3} \\ 3\frac{2}{5} & 3 & 2\frac{1}{15} \\ 6\frac{1}{5} & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Індекс переваги об’єкту $i=1$ над усіма об’єктами за 2 кроки розраховується за формулою

$$w_i(k) = \frac{\sum_{j=1}^{n} d_{ij}(k)}{\sum_{p=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{pj}(k)}$$ і дорівнює $$w_1(k)\Big|_{k=2} = \frac{19}{53.667} = 0.354.$$

2. Порядок виконання роботи

2.1. Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2. Розрахувати коефіцієнти відносної важливості (ваги) альтернатив для задач прийняття рішень (варіанти 1 –27). Для цього:

2.2.1 Побудувати мультиплікативну матрицю парних порівнянь (МПП) за умови, що експерт дає оцінки у фундаментальній шкалі.

2.2.2 Знайти ваги альтернатив рішень методами парних порівнянь згідно з варіантом: ЕМ, RGMM, AN, «лінія» (розглянути всі еталони, використати гіперболічну залежність між вагами $v_i = v_e d_{ie}$).

2.2.3 Розрахувати відношення узгодженості CR, геометричний індекс узгодженості GCI чи гармонічне відношення узгодженості HCR. Чи допустима неузгодженість оцінок експертів?

2.2.4 Згідно з варіантом, оцінити узгодженість МПП за спектральним коефіцієнтом узгодженості k_y:

- Побудувати множину породжених МПП.
- Знайти спектральний коефіцієнт узгодженості ваг, розрахованих на основі породжених МПП методом «лінія».
- Знайти пороги виявлення і застосування.

2.3. Порівняти ваги, знайдені різними методами. Зробити висновки.

2.4. Відповісти на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

Варіанти

№ варіанту	**Метод розрахунку ваг**	**№ задачі ППР**
1	EM, CR	1
2	RGMM, GCI	2
3	AN, HCR	3
4	«лінія», Ку	4
5	SVD	5
6	EM, CR	6
7	RGMM, GCI	7
8	AN, HCR	8
9	«лінія», Ку	9
10	SVD	10
11	EM, CR	11
12	RGMM, GCI	12
13	AN, HCR	13
14	«лінія», Ку	14

15	SVD	15
16	EM, CR	16
17	RGMM, GCI	17
18	AN, HCR	18
19	«лінія», Ку	19
20	SVD	20
21	EM, CR	21
22	RGMM, GCI	22
23	AN, HCR	23
24	«лінія», Ку	24
25	SVD	25
26	EM, CR	26

Задача 1

Задача прийняття рішення полягає в оцінюванні чотирьох варіантів деякого інноваційного товару за критерієм «перспективність попиту». Результати парних порівнянь варіантів товару наступні: другий варіант ненабагато кращий за перший і третій варіанти і суттєво кращий за четвертий, перший варіант ненабагато кращий за третій і практично такий самий як і четвертий варіант, третій варіант переважає четвертий і ступінь переваги між рівною важливістю і несуттєвою перевагою.

Задача 2

Нехай задача полягає в оцінюванні наступних чотирьох варіантів вкладення коштів: придбання акцій, оформлення депозиту, придбання облігацій, придбання дорогоцінних металів за критерієм «надійність вкладення коштів». За результатами парних порівнянь цих варіантів встановлено, що другий варіант ненабагато кращий за перший і третій варіанти і суттєво кращий за четвертий, перший варіант має однакову надійність, що і третій, і ненабагато кращий за четвертий варіант, перевага третього варіанту над четвертим – між слабкою і суттєвою.

Задача 3

Нехай інвестор оцінює акції деякої компаній і хоче спрогнозувати, яким буде розподіл ймовірностей зміни ціни на них. Він розглядає наступні можливі варіанти зміни ціни: впаде на 20%, впаде на 10%, залишиться незмінною, зросте на 10%. Використовуючи результати фундаментального аналізу, парні порівняння варіантів зміни ціни наступні:

- імовірність події, що ціна акцій зросте на 10% ненабагато перевищує імовірність події, що ціна акцій залишиться незмінною на протязі визначеного періоду часу і суттєво перевищує імовірності того, що ціна акцій впаде як на 10%, так і на 20%;
- імовірність події, що ціна акцій залишиться незмінною ненабагато перевищує імовірності подій, що ціна акцій впаде як на 10%, так і на 20%;
- імовірність події, що ціна акцій впаде на 10% ненабагато перевищує імовірність події, що ціна акцій впаде на 20%.

Задача 4

Нехай потрібно порівняти чотирьох кандидатів на посаду за критерієм «освіта» і знайти коефіцієнти відносної важливості кожного кандидата. В результаті порівняння першого кандидата з усіма іншими виявилося, що його освіта практично така ж як і у другого, суттєво краща за освіту третього і суттєво гірша за четвертого. Освіта другого кандидата краща за освіту третього, ступінь переваги – між слабкою і суттєвою перевагою і сильно гірша за четвертого. Третій кандидат значно гірший за четвертий.

Задача 5

Задача полягає у виборі оптимального каналу для розміщення реклами на телебаченні за критерієм «популярність каналу». Результати парних порівнянь чотирьох каналів наступні: перший канал не набагато гірший за другий, слабо переважає третій канал і має однакову популярність з четвертим каналом. Другий канал суттєво переважає третій і має однакову популярність з четвертим каналом. Популярність третього каналу суттєво гірша за четвертого.

Задача 6

Необхідно прийняти рішення щодо придбання деякого обладнання за критерієм «надійність». Результати парних порівнянь трьох варіантів обладнання наступні: перший варіант кращий за другий і третій варіант, інтенсивність переваги в обох випадках – слабка, другий варіант також ненабагато кращий за третій.

Задача 7

Необхідно вибрати один з чотирьох методів діагностування за критерієм «ступінь інтегрованості методу». Відомо, що перший метод має однакову ступінь інтегрованості з другим і четвертим методами, перший метод ненабагато кращий за третій. Другий метод суттєво важливіший за третій і ненабагато кращий за четвертий. Третій метод суттєво гірший за четвертий.

Задача 8

Задача прийняття рішення полягає в оцінюванні чотирьох варіантів деякого інноваційного товару за критерієм «ризик». Результати парних порівнянь варіантів товару наступні: другий варіант суттєво кращий за перший і третій варіанти і слабко переважає четвертий, перший варіант однаковий з третім і практично такий самий як і четвертий варіант, третій варіант несуттєво гірший за четвертий варіант.

Задача 9

Задача полягає у виборі мультимедійної інформаційної системи за критерієм «задоволення очікувань керівництва: підтримка постачальників». Експерти попарно порівняли чотири альтернативні варіанти інформаційних систем і встановили, що за вказаним критерієм друга система практично така сама як і перша, третя система ненабагато гірша за першу і суттєво гірша за другу, четверта система така ж як і перша, ненабагато гірша за другу і суттєво краща за третю.

Задача 10

Задача полягає у виборі постачальника системи телекомунікацій за критерієм «операційна якість». Експерти попарно порівняли чотири альтернативні варіанти постачальників і встановили, що за вказаним критерієм перший постачальник абсолютно гірший за другого, третій і четвертий постачальники рівно важливі з першим; другий постачальник суттєво важливіший за третій і ненабагато кращий за четвертий; третій постачальник суттєво кращий за четвертий.

Задача 11

Задача полягає у розрахунку рейтингів журналів за критерієм «вплив». Експерти попарно порівняли п'ять журналів і встановили, що за вказаним критерієм перший журнал має практично такий же вплив на аудиторію, як і другий, суттєво більший вплив в порівнянні з третім, суттєво менший за вплив четвертого і однаковий вплив з п'ятим журналом; другий журнал кращий за третій, ступінь переваги між слабкою і суттєвою, суттєво гірший за четвертий журнал і ненабагато гірший за п'ятий; вплив третього значно менший за вплив четвертого і однаковий з п'ятим; вплив четвертого ненабагато менший за п'ятого.

Задача 12

Задача прийняття рішення полягає в оцінюванні чотирьох варіантів деякого інноваційного товару за критерієм «технологічна складність». Результати парних порівнянь варіантів товару наступні: перший варіант має ненабагато більшу технологічну складність в порівнянні з другим варіантом і менш технологічно складний за третій варіант (ненабагато), складність першого і четвертого варіантів однакова; другий варіант суттєво кращий за третій і практично такий самий як і четвертий варіант; третій варіант суттєво гірший за четвертий.

Задача 13

Нехай задача полягає в оцінюванні наступних чотирьох варіантів вкладення коштів: придбання акцій, придбання облігацій, придбання дорогоцінних металів, оформлення депозиту за критерієм «ризик». За результатами проведених експертом парних порівнянь цих варіантів встановлено, що придбання акцій принесе практично такий самий дохід, що і облігації та суттєво більший дохід ніж метали, депозит є суттєво дохіднішим за акції та облігації та значно дохіднішим за метали; облігації суттєво більш доходні за метали.

Задача 14

Нехай потрібно порівняти начальників чотирьох відділів деякої фірми за узагальненим критерієм «якість роботи» з метою розподілу премії між ними. В результаті порівняння першого з усіма іншими виявилося, що якість його роботи значно краща за якість другого і третього і однакова з четвертим. Другий ненабагато кращий за третього і четвертого; третій ненабагато кращий за четвертого.

Задача 15

Задача полягає у виборі оптимальної моделі альянсу між банком і страховими компаніями за критерієм «майбутні економії у зв’язку із зростанням портфеля послуг». Результати парних порівнянь трьох моделей наступні: перша ненабагато краща за другу і така ж як і третя, друга модель значно гірша за третю.

Задача 16

Необхідно прийняти рішення щодо придбання деякого обладнання за критерієм «продуктивність». Результати парних порівнянь трьох варіантів обладнання наступні: перший варіант однаковий з другим, третій варіант суттєво гірший за перший і третій.

Задача 17

Задача полягає у виборі оптимального каналу для розміщення реклами на телебаченні за критерієм «відповідність аудиторії рекламованому товару». Результати парних порівнянь чотирьох каналів наступні: перший канал однаковий з другим і ненабагато кращий за третій і четвертий канали; другий канал суттєво гірший за третій і однаковий з четвертим каналом. Третій суттєво кращий за четвертий.

Задача 18

Задача полягає у розрахунку рейтингів журналів за критерієм «фокус». Експерти попарно порівняли п'ять журналів і встановили, що за вказаним критерієм перший журнал значно гірший за другий, ненабагато гірший з третій і п'ятий і суттєво кращий за четвертий журнал; другий журнал суттєво кращий за третій і четвертий і однаковий з п'ятим; третій журнал суттєво кращий за четвертий і однаковий з п'ятим; четвертий журнал ненабагато гірший за п'ятий.

Задача 19

Задача полягає у виборі оптимальної моделі альянсу між банком і страховими компаніями за критерієм «джерела конфліктів». Результати парних порівнянь трьох моделей наступні: перша суттєво гірша за другу і така ж як і третя, друга модель ненабагато важливіша за третю.

Варіант 20

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2 & 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 21

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 1/7 & 1/9 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 6 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 22

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2 & 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 23

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 1/7 & 1/9 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 6 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 24

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1 & 2 & 1/3 & 1 \\ 1/6 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 & 1/6 \\ 1 & 1/4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/5 & 1 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 25

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1 & 2 & 1/3 & 1 \\ 1/6 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 & 1/6 \\ 1 & 1/4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/5 & 1 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 26

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1 & 3 & 1/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 2 & 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 27

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Звіт має містити:

1. Завдання і формулювання задачі прийняття рішення.
2. Результати виконання роботи згідно з варіантом і п. 2.2 порядку виконання роботи:
   - для EM – 1) всі ітерації степеневого методу, результуючі значення головного власного числа і відповідного йому власного вектору; значення індексу та відношення узгодженості; 2)висновок щодо узгодженості МПП;
   - для RGMM – 1) значення ваг і геометричного індексу узгодженості; 2) висновок щодо узгодженості МПП;
   - для AN – 1) значення ваг і гармонічного відношення узгодженості; 2) висновок щодо узгодженості МПП;
   - для «лінії» – 1) значення ваг при кожному з еталонів; 2)множина породжених матриць, спектральний коефіцієнт узгодженості ваг, розрахованих з кожної породженої матриці, значення порогів виявлення і застосування; 3) висновок щодо узгодженості МПП; порівняння ваг, отриманих при кожному з еталонів, чи задають ці ваги однакові ранжування альтернатив.
3. Текст програми, яка реалізує заданий метод парних порівнянь і розрахунок показника узгодженості. Вікна програми.
4. Висновки по роботі.

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1. Дайте означення матриці парних порівнянь (МПП). Як інтерпретуються елементи МПП?
2. Наведіть приклади мультиплікативних та адитивних МПП.
3. Сформулюйте метод головного власного вектору розрахунку ваг. Наведіть властивості узгодженої матриці парних порівнянь.
4. Дайте означення неприводимої матриці та сформулюйте теорему Перрона-Фробеніуса.
5. Наведіть обґрунтування методу RGMM на основі розв’язання задачі математичного програмування.
6. Сформулювати і обгрунтувати метод арифметичної нормалізації AN розрахунку ваг. Як розраховується показник узгодженості HCR?
7. Сформулюйте метод «лінія» парних порівнянь.
8. Означення і властивості узгодженої та слабко узгодженої МПП.
9. Які показники використовуються для оцінювання узгодженості експертних оцінок парних порівнянь? Наведіть розрахункові формули.
10. Опишіть степеневий метод розрахунку найбільшого власного числа і відповідного йому власного вектору МПП.
11. Опишіть граничний метод розрахунку найбільшого власного числа і відповідного йому власного вектору МПП.
12. Сформулюйте відомі вам задачі математичного програмування розрахунку ваг на основі МПП.
13. Як розраховується спектральний коефіцієнт узгодженості МПП?
14. Що таке спектр ваг і як він будується? Як будуються пороги виявлення і застосування?
15. МПП як матриця інтенсивності-інцидентності графу певної структури.
16. Як інтерпретуються ваги на основі МПП, використовуючи теорію графів?

Практикум 2
Дослідження методів аналізу і підвищення узгодженості експертних оцінок елементів ієрархічної моделі підтримки прийняття рішень

Мета роботи:

- *Порівняти результати, отримані різними методами пошуку найбільш неузгодженого елементу (ННЕ) матриці парних порівнянь.*
- *Дослідити різні алгоритми підвищення узгодженості матриці парних порівнянь з і без участі експерта:*
  - алгоритм на основі правил коригування WGMM і WAMM для слабко узгодженої МПП,
  - алгоритм на основі коригування ННЕ МПП,
  - «трикутник» із зворотнім зв'язком з експертом.
- *Дослідити методи розрахунку коефіцієнтів відносних важливостей (ваг), які стійкі до викидів в експертних оцінках парних порівнянь.*
- *Оцінити і підвищити узгодженість матриці парних порівнянь в модельній практичній задачі ППР.*

1 Теоретичні відомості

Основні означення

Мультиплікативною матрицею парних порівнянь (в подальшому – МПП) називається додатна, обернено симетрична матриця $D_{n\times n}=\{d_{ij}\,|\,i,j=1,...,n\}$, $d_{ij}>0$, $d_{ji}=1/d_{ij}$, $i,j=1,...,n$ [2 – 7].

МПП $D_{n\times n}=\{d_{ij}\,|\,i,j=1,...,n\}$ називається *сильно узгодженою* (в подальшому – *узгодженою)*, якщо $d_{ij}=d_{ik}d_{kj}$ для $\forall i,\,j,k=1,...,n$. Якщо $\exists\, i,\,j,k$, такі що $d_{ij}\neq d_{ik}d_{kj}$, то МПП називається *сильно неузгодженою*.

МПП D узгоджена тоді і тільки тоді, коли її ранг $rang(D)=1$ і $d_{ii}=1$. Отже, узгоджена МПП визначається одним своїм стовбцем або рядком.

Неузгодженість є проявом суперечності в оцінках експерта і з'являється при необхідності порівняння більш ніж трьох об'єктів. Для оцінювання рівня неузгодженості мультиплікативної МПП в практичних задачах використовуються показники *CR, GCI, HCR,* CI^{tr}, спектральний коефіцієнт узгодженості k_y та критерії, які використовуючи ці показники, оцінюють допустимість неузгодженості МПП для її використання в процесі прийняття рішень. Показник узгодженості пов'язаний з методом розрахунку ваг. Так, показник *CR* використовується з методом головного власного вектору EM розрахунку ваг, показник *GCI* – з методом геометричної середньої RGMM розрахунку ваг, показник *HCR* – з методом арифметичної нормалізації AN. Експертні оцінки без допустимої неузгодженості не можуть бути використані при прийнятті рішення. Причини неузгодженості суджень пов'язані з психологією людини, випадковими помилками та неповною структурою моделі.

Для оцінювання допустимої неузгодженості МПП з метою її використання в процесі прийняття рішень розроблено два критерії.

Критерій узгодженості 1 [7]:

- МПП $D_{n\times n}$ сильно узгоджена тоді і тільки тоді коли $CR(D_{n\times n})=0$, $GCI(D_{n\times n})=0$, $HCR(D_{n\times n})=0$, $CI^{tr}(D_{n\times n})=0$,

- МПП $D_{n\times n}$ допустимо неузгоджена та коригування МПП не потрібне, якщо $CR(D_{n\times n})\le CR^{porog}$ або $GCI(D_{n\times n})\le GCI^{porog}$, або $HCR(D_{n\times n})\le HCR^{porog}$, або $CI^{tr}(D_{n\times n})\le CI^{tr\ porog}$, де $CR^{porog}, GCI^{porog}, HCR^{porog}, CI^{tr\ porog}$ – порогові значення відповідних показників,

- МПП $D_{n\times n}$ містить інформацію, але є недопустимо неузгодженою та потрібно коригувати МПП, якщо показник узгодженості перевищує своє порогове значення,

- МПП $D_{n\times n}$ – це інформаційний шум та потрібно коригувати МПП, якщо нормовані показники $CR(D_{n\times n})\geq 1$ або $HCR(D_{n\times n})\geq 1$.

Критерій узгодженості 2:

- МПП $D_{n\times n}$ сильно узгоджена (узгоджена), т.т.т.к. $k_y(D_{n\times n})=1$,

- МПП $D_{n\times n}$ допустимо неузгоджена та коригування МПП не потрібне, якщо $k_y(D_{n\times n})\geq T_u$,

- МПП $D_{n\times n}$ містить інформацію, але є недопустимо неузгодженою та потрібно коригувати МПП, якщо $(k_y(D_{n\times n})\geq T_0)\wedge(k_y(D_{n\times n})<T_u)$,

- МПП $D_{n\times n}$ – це інформаційний шум та потрібно коригувати МПП, якщо $k_y(D_{n\times n})<T_0$,

де T_0, T_u – пороги для k_y, які визначаються на основі спектру мінімальної кількості інформації та спектру допустимої точності, відповідно. Для шкали [0,1] з поділками $s_j=\{0, 0.1, 0.2, ..., 1\}$ ці пороги дорівнюють $T_0=0.40$, $T_u=0.79$.

Слабко або порядково узгодженою називається МПП $D_{n\times n}$, для якої виконуються порядкові транзитивності [7 – 9]:

$$(d_{ij}>1)\wedge(d_{jk}>1)\Rightarrow(d_{ik}>1),\ (d_{ij}=1)\wedge(d_{jk}>1)\Rightarrow(d_{ik}>1),$$

$$(d_{ki}>1)\wedge(d_{ij}=1)\Rightarrow(d_{kj}>1),\ (d_{ij}=1)\wedge(d_{jk}=1)\Rightarrow(d_{ik}=1).$$

МПП $D_{n\times n}$ називається *нетранзитивною, слабко* або *ординально неузгодженою*, якщо існує трійка індексів (i,j,k), на якій порушується порядкова транзитивність на множині порівнюваних альтернатив рішень [7]:

$$(d_{ij} > 1) \wedge (d_{jk} > 1) \wedge (d_{ik} < 1) \text{ або } (d_{ij} = 1) \wedge (d_{jk} > 1) \wedge (d_{ik} \le 1), \text{ або}$$
$$(d_{ki} > 1) \wedge (d_{ij} = 1) \wedge (d_{kj} \le 1), \text{ або } (d_{ij} = 1) \wedge (d_{jk} = 1) \wedge (d_{ik} \ne 1).$$

Трійка індексів (i, j, k) називається *циклом* в МПП.

Сильно узгоджена МПП також є слабко узгодженою. Якщо $D_{n\times n}$ – слабко неузгоджена МПП, то $D_{n\times n}$ – сильно неузгоджена.

Проблема слабко неузгодженої МПП полягає в тому, що не існує ранжування альтернатив рішень, яке задовольняє *усім* елементам цієї МПП в тому розумінні, що $a_i \succ a_j$ якщо $d_{ij} > 1$, $a_i \prec a_j$ якщо $d_{ij} < 1$ і $a_i \sim a_j$ якщо $d_{ij} = 1$. Тому цикл має бути знайдено і вилучено з МПП.

Один з підходів до покращення рівня узгодженості МПП та вилучення циклу – це знайти найбільш неузгоджений елемент МПП і змінити його з участю або без участі експерта. Під *найбільш неузгодженим* будемо розуміти елемент МПП, зміна якого призводить до максимального покращення рівня узгодженості МПП в термінах показника *CR*.

<u>Приклад.</u> Розглянемо наступну МПП:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{6} \\ 1 & 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відношення узгодженості цієї МПП дорівнює $CR = 0.344$, воно перевищує порогове значення 0.08 для $n = 4$ і тому МПП D сильно неузгоджена. Задана МПП нетранзитивна, оскільки $a_1 \succ a_2$ (d_{12}>1), $a_2 \succ a_3$ (d_{23}>1), але $a_1 \prec a_3$ (d_{13}<1). Як буде показано нижче, найбільш неузгоджений в цій МПП елемент $d_{13} = \frac{1}{2}$, Після коригування d_{13} (нове значення, наприклад, дорівнює $d_{13} = 5$) D стає допустимо неузгодженою ($CR = 0.024$).

Методи знаходження найбільш неузгодженого елементу МПП

Метод 1 (розрахунок CI для укороченої МПП) базується на обчисленні індексу узгодженості CI для укороченої МПП, отриманої з початкової МПП послідовним виключенням з розгляду одного з рядків (стовпчиків) МПП D.

Метод 2 (розрахунок кореляції між рядками і стовпчиками МПП).

Базується на тому, що зі збільшенням рівня узгодженості МПП кореляція між її рядками (і стовпчиками) прямує до одиниці. Метод складається з етапів [2, 10 – 12]:

1. Розраховуються математичні сподівання $M\left(R_i^r\right)$ коефіцієнтів кореляції між i-м та всіма іншими рядками МПП D, а також математичні сподівання $M\left(R_j^c\right)$ коефіцієнтів кореляції між j-м та всіма іншими стовпчиками D.

Нагадаємо, що коефіцієнт кореляції для двох векторів x і y розраховується за формулою

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y}$$, де $\bar{x}, \bar{y}$ - вибіркові середні, $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$,

σ_x, σ_y - стандартні відхилення, $\sigma_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

2. Знаходяться $\min_i \left\{M\left(R_i^r\right)\right\}$ і $\min_j \left\{M\left(R_j^c\right)\right\}$. Нехай ці мінімуми досягаються на рядку з номером $i = i^*$ і стовпчику з номером $j = j^*$.

3. Тоді елемент $d_{i^* j^*}$ МПП – найбільш неузгоджений.

Метод 3 (використовує критерій згоди Хі-квадрат).

Метод складається з наступних кроків [2, 10]:

1. Для кожного елементу заповненої експертом (емпіричної) МПП D обчислюються значення $\Delta_{ij} = \frac{\left(d_{ij} - t_{ij}\right)^2}{t_{ij}}$, де $t_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{n} d_{ik}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} d_{lj}\right) / \left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} d_{kl}\right)$.

2. Розраховується математичне сподівання і дисперсія Δ_{ij}. Визначається довірчий інтервал для Δ_{ij}.

3. Визначаються ті значення $\Delta_{i^* j^*}$, які лежать за межами довірчого інтервалу. Тоді відповідні елементи $d_{i^* j^*}$ – найбільш неузгоджені.

Метод 4 (Transitiv) полягає у розрахунку значень показника узгодженості окремих транзитивностей МПП і складається з етапів [2]:

1. Будується множина транзитивностей $\Gamma = \{\Gamma_u\}$ МПП, де

$$\Gamma_u = \{d_{ij},\, d_{jk}, d_{ik}\},\ u = 1,...,NT,\ \ i < j < k,\ NT = \frac{n!}{(n-3)!\,3!},\ n \geq 3,$$

2. На основі $\Gamma_u = \{d_{ij},\, d_{jk}, d_{ik}\}$, $u = 1,...,NT$ будуються матриці виду

$$\begin{pmatrix} 1 & d_{ij} & d_{ik} \\ 1/d_{ij} & 1 & d_{jk} \\ 1/d_{ik} & 1/d_{jk} & 1 \end{pmatrix},$$

обчислюються значення визначників цих матриць:

$$Det = \{\det(\Gamma_u)\},\ \det(\Gamma_u) = \frac{d_{ij}d_{jk}}{d_{ik}} + \frac{d_{ik}}{d_{ij}d_{jk}} - 2.$$

3. Для кожної пари (i, j) знаходяться значення $S_{i,j} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{d_{ij}d_{jk}}{d_{ik}} + \frac{d_{ik}}{d_{ij}d_{jk}} - 2\right)$.

4. Найбільш неузгодженим є елемент $d_{i^* j^*}$, індекси якого

$$(i^*, j^*):\ \max_{i,j} S_{i,j}.$$

Якщо останній умові задовольняють декілька елементів $d_{i^* j^*}$, серед них шукається той, що приводить до більшої неузгодженості – елемент, на якому досягається максимальне значення виразу:

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{n-2}\sum_{k=1}^{n}(\ln d_{i,j} - \ln(d_{i,k}d_{k,j})),\ \text{де}\ k \neq i \neq j. \tag{2.2}$$

Метод 5 потоків MOutflow складається з етапів [2, 13]:

1. Обчислити значення вхідного Φ_i^- і вихідного Φ_i^+ потоків для альтернативи a_i, $i=1,2,...,n$:

Φ_i^- – це кількість альтернатив a_j, таких що a_j переважає a_i, а саме, $d_{ji} > e$; Φ_i^+ – це кількість альтернатив a_j, таких що a_i переважає a_j, а саме $d_{ij} > e$.

2. Найбільш неузгодженим є елемент $d_{i^* j^*}$ МПП:

$$d_{i^* j^*} : \max_{i,j}(\max(\Phi_j^+ - \Phi_i^+,\ \Phi_i^- - \Phi_j^-)),\ \text{якщо}\ i \neq j, d_{ij} > e.$$

Якщо останній умові задовольняють декілька елементів $d_{i^* j^*}$, то серед них шукається елемент, який приводить до більшої неузгодженості – на якому досягається максимальне значення виразу (2.2).

Приклад

Знайти найбільш неузгоджений елемент в наступній МПП

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & \frac{1}{7} & 6 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 3 & 1 & 6 & 3 \\ 7 & 1 & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & 3 & \frac{1}{3} & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв’язання. Для цієї МПП CI=0.936, CR=0.843. Значення CR перевищує порогове значення, яке для МПП розмірності 5×5 дорівнює 0.1, тому МПП D неузгоджена.

Метод 1. При виключенні альтернатив: першої CI=0.039, другої CI=1.320, третьої CI=1.043, четвертої CI=0.072, п’ятої CI=1.026.

Значення CI є найменшими, коли виключаємо першу або четверту альтернативи, тому найбільш неузгодженим є елемент $d_{1,4}$.

Метод 2. Математичні сподівання $M\left(R_i^r\right)$ коефіцієнтів кореляції між i-м та всіма іншими рядками МПП D:

$$M\left(R_i^r\right) = (-0.182 \quad 0.319 \quad 0.245 \quad -0.456 \quad 0.350).$$

Математичні сподівання $M\left(R_j^c\right)$ коефіцієнтів кореляції між j-м та всіма іншими стовпчиками D:

$$M\left(R_j^c\right) = (-0.344 \quad 0.349 \quad 0.332 \quad -0.151 \quad 0.383).$$

Найменше значення серед $M\left(R_i^r\right)$ відповідає кореляції між четвертим і усіма іншими рядками МПП (значення -0.456). Найменше значення серед $M\left(R_j^c\right)$ відповідає кореляції між першим і усіма іншими стовпчиками МПП (значення -0.344). Елемент d_{41} (і d_{14}) МПП D – найбільш неузгоджений.

Метод 3. Емпірична матриця $T = \{t_{ij}\}$ для даної МПП D дорівнює

$$T = \begin{pmatrix} 2.725 & 4.072 & 1.514 & 3.490 & 3.341 \\ 0.516 & 0.771 & 0.287 & 0.661 & 0.633 \\ 2.400 & 3.586 & 1.333 & 3.073 & 2.942 \\ 1.710 & 2.555 & 0.950 & 2.190 & 2.096 \\ 1.350 & 2.017 & 0.750 & 1.729 & 1.655 \end{pmatrix},$$

Матриця відхилень теоретичної МПП від емпіричної МПП дорівнює

$$\Delta = \begin{pmatrix} 1.092 & 0.211 & 1.459 & 3.211 & 2.116 \\ 0.193 & 0.068 & 0.008 & 0.174 & 0.142 \\ 1.779 & 0.096 & 0.083 & 2.787 & 0.001 \\ 16.370 & 0.946 & 0.646 & 0.646 & 1.482 \\ 1.037 & 0.479 & 0.231 & 0.935 & 0.259 \end{pmatrix}.$$

Математичне сподівання і дисперсія:

$$M(\Delta) = \tfrac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Delta_{ij} = 1.458,\ Var(\Delta) = \tfrac{1}{n^2-1}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\Delta_{ij} - M(\Delta))^2 = 10.426.$$

Найбільш неузгоджений елемент d_{41} (і, відповідно d_{14}).

Приклад (ілюстрація методів Transitiv та MOutflow)

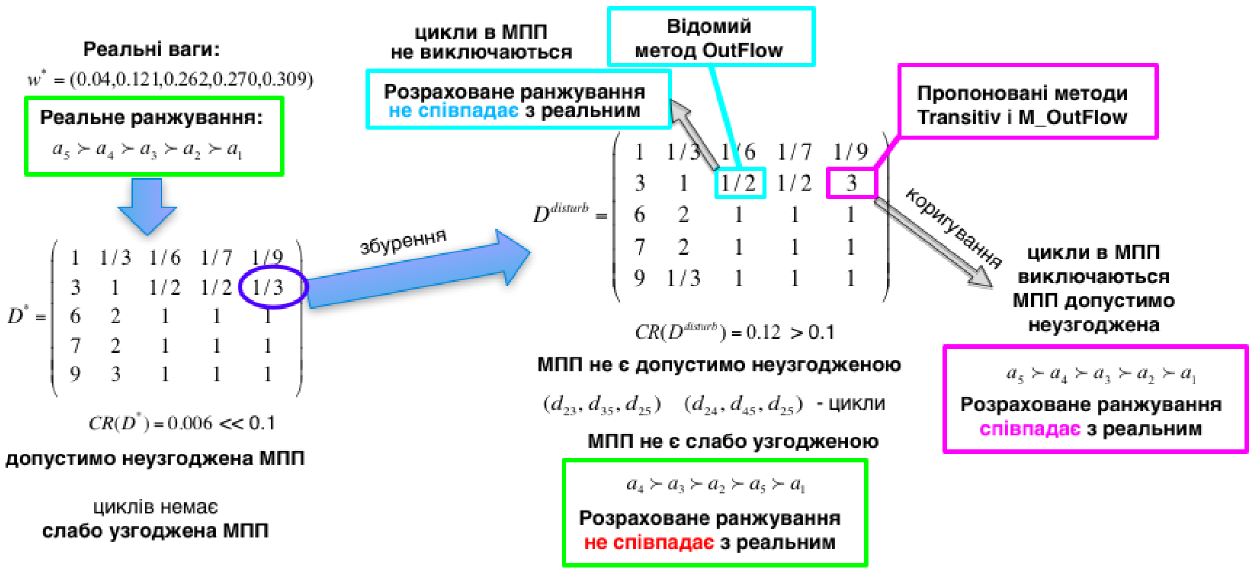


Рис. 2.1. Результати, отримані методами Transitiv і MOutflow на модельній задачі ППР [2]

Підвищення узгодженості слабко неузгодженої МПП. Коригування найбільш неузгодженого елементу МПП

Коригування без участі експерта найбільш неузгодженого елемента $d_{i^*j^*}$ МПП полягає у пошуку нового значення шкали для $d_{i^*j^*}$, яке забезпечує мінімальне значення показника неузгодженості всієї матриці.

Метод підвищення узгодженості слабко неузгодженої МПП полягає в тому, що ітераційно шукається її найбільш неузгоджений елемент, поки не буде досягнута допустима неузгодженість цієї МПП.

У випадку мультиплікативної слабко неузгодженої МПП D та при використанні показника *CR* метод підвищення узгодженості цієї МПП складається з етапів [2]:

1. Обчислити значення *CR* МПП *D*.
2. В циклі, поки $CR > CR^{porog}$:

2.1. Знайти найбільш неузгоджений елемент $d_{i^*j^*}$ МПП D, використовуючи один з методів Transitiv або MOutflow.

2.2. Обчислити скориговану МПП $D^* = \left(d^*_{ij}\right)$, а саме, коригується тільки елемент $d_{i^*j^*}$ і обернено симетричний йому $d_{j^*i^*} = 1/d_{i^*j^*}$. Відповідно до шкали оцінювання, що використовується, елементу $d_{i^*j^*}$ присвоюється значення, яке забезпечує найбільшу можливу узгодженість МПП, тобто, найменше значення CR:

$$d_{i^*j^*} := x^*,\ d_{j^*i^*} := 1/x^*,\ x^* \in Scale,$$

$$x^* = \arg\min_{x \in Scale} CR(D^{cor}, x),$$

де D^{cor} - скоригована МПП, в якій $d^{cor}_{ij} = d_{ij}\ \ \forall i, j$, крім $d^{cor}_{i^*j^*} = x$, $d^{cor}_{j^*i^*} = 1/x$, $Scale = \{1/9, 1/8, \ldots, 1/2, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$.

2.3. Обчислити значення CR МПП D^* . $D := D^*$.

Автоматичне коригування узгодженості МПП без участі експерта

Зворотній зв'язок з експертом потребує багато часу і зусиль з боку експерта, тому для підвищення узгодженості, коли це можливо, використовують методи без участі експерта.

Метод автоматичного підвищення узгодженості мультиплікативної МПП D без участі експерта полягає в ітераційному перерахунку усіх елементів МПП і складається з кроків [2]:

1. Ініціалізація. Задати значення параметру α, $0 < \alpha < 1$, який показує швидкість збіжності до узгодженої МПП. Число ітерацій $k := 0$. Скоригована МПП співпадає з початковою $D^{(0)} = \left(d^{(0)}_{ij}\right) := \left(d_{ij}\right)$.
2. В циклі:

2.1. Розрахувати ваги $w^{(k)} = \left(w^{(k)}_1, \ldots, w^{(k)}_n\right)^T$ на основі МПП $D^{(k)}$;

2.2. Розрахувати $CR^{(k)}(D^{(k)},n)$. Якщо $CR^{(k)}(D^{(k)},n) \le CR^{порог}(n)$, то вихід.

2.3. Розрахувати скориговану МПП $D^{(k+1)} = \left(d_{ij}^{(k+1)}\right)$ на основі $D^{(k)}$, використовуючи один з двох методів

$$d_{ij}^{(k+1)} = \left(d_{ij}^{(k)}\right)^{\alpha} \left(\frac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}} \right)^{1-\alpha}$$ (зваженої геометричної середньої, WGMM)

$$d_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} \alpha d_{ij}^{(k)} + (1-\alpha)\dfrac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}}, & i = 1,2,\dots,n; \;\; j = i, i+1,\dots,n \\ \dfrac{1}{\alpha d_{ji}^{(k)} + (1-\alpha)\dfrac{w_j^{(k)}}{w_i^{(k)}}}, & i = 2,3,\dots,n; \;\; j = 1,2,\dots,i-1 \end{cases}$$

(зваженої арифметичної середньої, WAMM)

2.4. $k := k+1$.

Результат методу – це модифікована МПП $D^{(k)}$ з допустимою неузгодженістю: $CR^{(k)}(D^{(k)},n) \le CR^{порог}(n)$.

<u>Твердження.</u> (Збіжність алгоритму). Для описаного алгоритму $CR^{(k+1)} < CR^{(k)}$, $\lim\limits_{k \to +\infty} CR^{(k)} = 0$.

Критерії ефективності підвищення узгодженості:

1. $\delta^{(k)} = \max\limits_{i,j} \left\{ \left| d_{ij}^{(k)} - d_{ij}^{(0)} \right| \right\}$; 2. $\sigma^{(k)} = \dfrac{1}{n} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \left(d_{ij}^{(k)} - d_{ij}^{(0)} \right)^2}$.

Модифікація $D^{(k)}$ МПП D вважається прийнятною, якщо $\delta^{(k)} < 0.2$ і $\sigma^{(k)} < 0.1$. При цих значеннях модифікована МПП $D^{(k)}$ зберігає більшу частину інформації початкової МПП.

При виборі параметра α слід враховувати, що чим більшим є значення α, тим меншим на кожній ітерації буде відхилення модифікованої МПП від початкової. Кількість ітерацій k збільшується при збільшенні значення α. Використовують $0.5 \le \alpha < 1$.

Метод «трикутник» із зворотнім зв'язком з експертом

Ідея методу полягає в наступному [14]. Спочатку експерт вибирає a_e - еталонну альтернативу і виконує алгоритм «лінія», порівнює $n-1$ альтернатив з a_e. Розраховуються ваги $n-1$ альтернатив. Маємо надію, що залучення додаткової інформації підвищить достовірність визначення ваг. Однак, при використанні a_e отримати додаткову інформацію вже неможливо, тому виключаємо її з множини A і виконуємо алгоритм «лінія» для множини з $n-2$ альтернатив. Процес повторюється поки в A не залишиться одна альтернатива. На кожному кроці розраховуються спектральні коефіцієнти узгодженості обчислених для кожної альтернативи ваг і при необхідності здійснюється коригування ваг в напрямку зближення з середнім значенням ваг для кожної альтернативи. В результаті отримаємо множину узгоджених ваг кожної альтернативи. Остаточні ваги – середні значення цих ваг.

Приклад. Розрахувати ваги трьох альтернатив за методом трикутник, якщо $v_i = v_i d_{ii}$, агрегування ваг проводиться за середнім арифметичним, еталонні альтернативи вибираються в наступному порядку a_1, a_2, a_3, результати парних порівнянь:

- з еталоном $\boldsymbol{a_1}$: $\boldsymbol{d_{12} = 4,\ d_{13} = 5}$,

- з еталоном $\boldsymbol{a_2}$: $\boldsymbol{d_{23} = 1}$

Розв'язання

В якості еталонної береться альтернатива 1:

Ненормовані ваги методом "лінія": 1 0,25 0,2.

В якості еталонної береться альтернатива 2:

Ненормовані ваги методом "лінія": 0,25 0,25.

Спектр ваг для альтернативи 2: R_2 = (0 0 0 2 0 0 0 0 0 0 0).

Коефіцієнт узгодженості: ky(R_2) = 1.

Спектр ваг для альтернативи 3: R_3 = (0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0).

Коефіцієнт узгодженості: ky(R_3) = 0,79.

Агреговані ваги: v[1] = 1 v[2] = 0,25 v[3] = 0,225.

Після нормування: w[1] = 0,678 w[2] = 0,1695 w[3] = 0,1525.

Приклад. Нехай п'ять альтернатив порівнюються у фундаментальній шкалі відносно якісного критерію і МПП дорівнює:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 1 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 3 & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Використаємо гіперболічну залежність ваг від ступенів переваг: $v_i = v_j d_{ij} = v_j / d_{ji}$. Агреговану оцінку ваг визначимо як середнє арифметичне. Нехай на першому кроці (при розгляді 4-х альтернатив) еталонна альтернатива a_1, тобто $a_e^4 = a_1$, $v_1^4 = v_1$. Ваги інших альтернатив $v_2^4 = v_1 / d_{12} = v_1 / 2$, $v_3^4 = v_1 / d_{13} = v_1 / 4$, $v_4^4 = v_1 / d_{14} = v_1 / 2$, $v_5^4 = v_1 / d_{15} = v_1 / 3$ розраховуються за наступною схемою:

Етап	Еталон	Ваги				
1	$a_e^4 = a_1$	$v_1^4 = v_1$	$v_2^4 = v_1 / d_{12} = v_1 / 2$	$v_3^4 = v_1 / d_{13} = v_1 / 4$	$v_4^4 = v_1 / d_{14} = v_1 / 2$	$v_5^4 = v_1 / d_{15} = v_1 / 3$
2	$a_e^3 = a_2$	–	$v_2^3 = v_1 / 2$	$v_3^3 = v_2^3 / d_{23} = v_1 / 6$	$v_4^3 = v_2^3 / d_{24} = v_1 / 2$	$v_5^3 = v_2^3 / d_{25} = v_1 / 4$
Узгодження ваг, отриманих на етапах 1 і 2						
Спектри			Спектральні коефіцієнти узгодженості $k_y(R_i^3)$			
$R_1^3 = \{v_1^4 = v_1\}$ для a_1			1.000			
$R_2^3 = \{v_2^4 = v_2^3 = v_1 / 2\}$ для a_2			1.000			
$R_3^3 = \{v_3^4 = v_1 / 4, v_3^3 = v_1 / 6\}$ для a_3			0.790			
$R_4^3 = \{v_4^4 = v_1 / 2, v_4^3 = v_1 / 2\}$ для a_4			1.000			
$R_5^3 = \{v_5^4 = v_1 / 3, v_5^3 = v_1 / 4\}$ для a_5			1.000			
3	$a_e^2 = a_4$	–	–	$v_3^2 = v_4^2 / d_{43} = v_1 / 6$	$v_4^2 = v_4^* = v_1 / 2$	$v_5^2 = v_4^2 / d_{45} = v_1 / 4$
Узгодження						
Спектри			Спектральні коефіцієнти узгодженості $k_y(R_i^2)$			
$R_3^2 = \{v_3^4 = v_1 / 4, v_3^3 = v_1 / 6, v_3^2 = v_1 / 6\}$ для a_3			0.835			
$R_5^2 = \{v_5^4 = v_1 / 3, v_5^3 = v_1 / 4, v_5^2 = v_1 / 4\}$ для a_5			1.000			
4	$a_e^1 = a_5$	–	–	$v_3^1 = v_5^1 / d_{53} = 5v_1 / 36$	–	$v_5^1 = v_5^* = 5v_1 / 18$

Узгодження					
Спектри			Спектральні коефіцієнти узгодженості $k_y(R_i^1)$		
$R_3^1 = \{v_3^4 = v_1/4, v_3^3 = v_1/6, v_3^2 = v_1/6, v_3^1 = 5v_1/36\}$ для a_3			0.729		
Необхідне коригування ЕО для a_3. Середнє значення $v_3^* = 0.181v_1$, тому коригуємо v_3^4, значення v_3^4 необхідно зменшити, тому величину переваги d_{13} альтернативи a_1 над a_3 збільшити (тому що при розрахунку v_3^4 еталоном була a_1). Нехай експерт вказав нове $d_{13} = 5$.					
4 (кориг)	–	–	$v_3^4 = v_1 / d_{13} = v_1/5$	–	–
Агреговані ваги	$v_1^* = v_1$	$v_2^* = v_1/2$	$v_3^* = 0.168v_1$	$v_4^* = v_1/2$	$v_5^* = 5v_1/18$
Нормовані агреговані ваги	$w_1 = 0.409$	$w_2 = 0.204$	$w_3 = 0.069$	$w_4 = 0.204$	$w_5 = 0.114$

Методи розрахунку ваг альтернатив, стійкі до викидів в МПП

Один з підходів до зменшення впливу викидів в експертних оцінках на результуючі ваги – це побудова матриці парних пропорцій, яка є менш чутливою до викидів, порівняно з матрицею парних порівнянь.

Метод 1

1. Перетворити початкову МПП $D = \{(d_{ij}) \mid i, j = 1,...,n\}$ в матрицю парних пропорцій Z:

$$z_{ij} = \frac{d_{ij}}{1 + d_{ij}};$$

2. Розв'язати систему $(Z + diag(Ze))\hat{w} = n\hat{w}$, знайти вектор ваг $\hat{w}$, він є оцінкою невідомого вектора ваг w.

Метод 2

1. Перетворити початкову МПП $D = \{(d_{ij}) \mid i, j = 1,...,n\}$ в матрицю парних пропорцій Z: $z_{ij} = \dfrac{d_{ij}}{1 + d_{ij}}$;
2. Розв'язати задачу $(diag(Z^T Z) - Z^T * Z)\hat{w} = \lambda\hat{w}$, де операція "$*$" в $C = Z^T * Z$ означає $c_{ij} = z_{ij} z_{ji} = z_{ij}(1 - z_{ij})$, λ – мінімальне власне число,

$\hat{w}$ – власний вектор, який йому відповідає. Знайдений власний вектор – вектор ваг.

2 Порядок виконання роботи

2.1. Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2. Згідно з варіантом виконати підвищення узгодженості МПП залежно від її властивостей. Результатом має бути допустимо неузгоджена МПП.

Якщо початкова МПП слабко неузгоджена, в циклі виконати пошук найбільш неузгоджених елементів цієї МПП за методами згідно з варіантом. Порівняти отримані результати.

Якщо початкова МПП слабко узгоджена, виконати автоматичне коригування її узгодженості за методами WGMM і WAMM, використовувати різні значення α : 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9. Результати представити в наступному вигляді:

$\alpha = \ldots$

k=0	$D^{(k)}=\ldots$	$CR^{(k)}=\ldots$	$w^{(k)}=\ldots$	$\delta^{(k)}=\ldots,\quad \sigma^{(k)}=\ldots$
k=1	$D^{(k)}=\ldots$	$CR^{(k)}=\ldots$	$w^{(k)}=\ldots$	$\delta^{(k)}=\ldots,\quad \sigma^{(k)}=\ldots$
…	…	…	…	…

Порівняти результати, отримані при використанні WGMM і WAMM, а також при різних значеннях α.

2.3. Згідно з варіантом розрахувати ваги за методом «трикутник».

2.4. Згідно з варіантом розрахувати ваги, стійкі до викидів в МПП. Порівняти результати, отримані наведеними в п.1 методами 1 і 2.

2.5. Зробити висновки по роботі.

2.6. Відповісти на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

Звіт має містити:

1 Текст програми, яка реалізує заданий згідно з варіантом пункт порядку виконання роботи для будь-якої МПП.

2 Результати виконання роботи для МПП згідно з варіантом. Вікна програми.

3 Висновки по роботі.

Варіанти завдань

№ варіанту	**Завдання порядку роботи**	**№ задачі ППР**
1	п.2.2	Задача 1
2	п.2.2	Задача 2
3	п.2.2	Задача 3
4	п.2.2	Задача 4
5	п. 2.4	Задача 5
6	п. 2.4	Задача 6
7	п. 2.4	Задача 7
8	п. 2.4	Задача 8
9	п. 2.3	Задача 9
10	п.2.3	Задача 10
11	п.2.3	Задача 11
12	п.2.3	Задача 12
13	п.2.2	Задача 5
14	п. 2.2	Задача 6
15	п. 2.2	Задача 7
16	п. 2.4	Задача 9
17	п. 2.4	Задача 10

18	п. 2.4	Задача 11
19	п. 2.3	Задача 13
20	п. 2.3	Задача 14
21	п. 2.2	Задача 15
22	п. 2.2	Задача 16
23	п. 2.3	Задача 15
24	п. 2.3	Задача 16
25	п. 2.4	Задача 15
26	п. 2.4	Задача 16

Задача 1

Необхідно прийняти рішення щодо придбання деякого обладнання за критерієм «надійність». Результати парних порівнянь семи варіантів обладнання наступні:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 4 & 3 & 0.333 & 2 \\ 1 & 1 & 0.5 & 4 & 3 & 0.333 & 2 \\ 2 & 7 & 1 & 8 & 6 & 0.5 & 4 \\ 0.25 & 0.25 & 0.125 & 1 & 1 & 7 & 0.5 \\ 0.333 & 0.333 & 0.167 & 1 & 1 & 0.111 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0.142 & 9 & 1 & 6 \\ 0.5 & 0.5 & 0.25 & 2 & 1 & 0.167 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 2

Задача прийняття рішення полягає в оцінюванні п'яти варіантів деякого інноваційного товару за критерієм «перспективність попиту». Результати їх парних порівнянь наступні:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1/4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 3

Задача полягає у виборі оптимальних моделей альянсів між банками і страховими компаніями за критерієм «управління зв'язками з клієнтами». Результати парних порівнянь п'яти моделей наступні:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1/3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 4

Задача полягає у виборі мультимедійної інформаційної системи за критерієм «задоволення очікувань керівництва: підтримка постачальників». Результати парних порівнянь шести систем наступні:

$$a=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1 & 2 & 1/3 & 1 \\ 1/6 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 & 1/6 \\ 1 & 1/4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/5 & 1 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 5

Задача полягає в оцінюванні бізнес-договорів за критерієм «очікування (заощадження витрат, гнучкість, фокус на основній діяльності тощо)». Результати парних порівнянь семи варіантів наступні:

$$a:=\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.25 & 2 & 1 & 0.5 & 2 \\ 2 & 1 & 0.25 & 0.5 & 1 & 0.5 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 5 & 2 & 0.142 \\ 0.5 & 2 & 0.5 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0.2 & 0.5 & 1 & 0.5 & 2 \\ 2 & 2 & 0.5 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0.5 & 0.5 & 7 & 0.25 & 0.5 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 6

Задача прийняття рішення полягає в оцінюванні варіантів розміщення стратегічного обладнання за критеріями «критичні процеси на підприємстві-виробнику». Результати парних порівнянь п'яти варіантів наступні:

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1/3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1/7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 7

Нехай задача полягає в оцінюванні наступних семи варіантів інвестицій за критерієм «надійність»: придбання акцій вітчизняних компаній, придбання акцій зарубіжних компаній, оформлення депозиту, придбання облігацій, придбання дорогоцінних металів, гра на Форекс, покласти в банку (скляну). Результати парних порівнянь варіантів інвестицій:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0.333 & 1 & 0.14 & 0.5 & 0.333 & 1 & 0.5 \\ 0.25 & 7 & 1 & 0.5 & 0.25 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 & 2 & 1 & 0.5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 1 & 0.167 & 2 \\ 0.333 & 1 & 1 & 0.5 & 6 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 2 & 2 & 1 & 0.5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 8

Задача полягає у виборі оптимального каналу для розміщення реклами на телебаченні за критерієм «популярність каналу». Результати парних порівнянь семи каналів наступні:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0.2 & 1 & 0.143 & 2 \\ 0.333 & 1 & 0.143 & \frac{1}{9} & 0.333 & 6 & \frac{1}{2} \\ 0.5 & 7 & 1 & \frac{1}{9} & 0.5 & \frac{1}{8} & 1 \\ 5 & 9 & 9 & 1 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 0.2 & 1 & 0.143 & 2 \\ 7 & \frac{1}{6} & 8 & 1 & 7 & 1 & 9 \\ 0.5 & 2 & 1 & \frac{1}{9} & 0.5 & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 9

Інвестор оцінює акції деякої компаній і хоче спрогнозувати, яким буде розподіл ймовірностей зміни ціни на них. Він розглядає наступні можливі варіанти зміни ціни: впаде на 40%, впаде на 20%, впаде на 10%, залишиться незмінною, зросте на 10%, зросте на 15%, зросте на 20%. Використовуючи результати фундаментального аналізу*, парні порівняння варіантів зміни ціни наступні:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{7} & 2 \\ 6 & 1 & 7 & 1 & 6 & 1 & 9 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 1 & 6 & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 1 \\ 5 & 1 & \frac{1}{6} & 1 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & \frac{1}{6} & 2 & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{7} & 2 \\ 7 & 1 & 9 & 1 & 7 & 1 & 7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

* Фундаментальний аналіз включає аналіз коефіцієнта відношення ціни акції до прибутку на неї (price earnings ratio), пропозиції, попиту, принципів компанії тощо.

Задача 10

Задача полягає у виборі оптимальної моделі альянсу між банком і страховими компаніями за критерієм «майбутні економії у зв'язку із зростанням портфеля послуг». Результати парних порівнянь шести моделей наступні:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1/3 & 1 & 1 & 2 & 1/3 & 1 \\ 1/6 & 1/2 & 1/2 & 1 & 1 & 1/6 \\ 1 & 1/4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/5 & 1 & 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 11

Необхідно прийняти рішення про заміщення вакантної посади за критерієм «досвід роботи». Результати парних порівнянь семи кандидатів наступні:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 4 & 5 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{9} & 6 & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ 3 & 9 & 1 & 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & \frac{1}{6} & 1 & 1 & 2 & 8 & 7 \\ 1 & 3 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 4 & 5 \\ \frac{1}{4} & 1 & \frac{1}{9} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & 0.2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 12

Нехай потрібно порівняти начальників семи відділів деякої фірми за узагальненим критерієм «якість роботи» з метою розподілу премії між ними. Результати парних порівнянь цих семи осіб наступні:

$$a := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0.333 & 5 & 1 & 0.5 & 2 \\ 0.333 & 1 & 0.111 & 2 & 0.333 & 0.167 & 0.5 \\ 3 & 9 & 1 & 0.111 & 3 & 1 & 7 \\ 0.2 & 0.5 & 9 & 1 & 0.2 & 0.142 & 0.5 \\ 1 & 3 & 0.333 & 5 & 1 & 0.5 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & 7 & 2 & 1 & 4 \\ 0.5 & 2 & 0.142 & 7 & 0.5 & 0.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 13

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1/7 \\ 1/3 & 1/3 & 3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 14

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 & 1/7 & 1/5 \\ 3 & 1 & 1/4 & 2 & 1/2 \\ 2 & 4 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 7 & 1/2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 15

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 & 1/4 & 8 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 2 & 4 \\ 1/4 & 4 & 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 16

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1/7 \\ 1/3 & 1/2 & 3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1. Дати означення сильно узгодженої та слабко узгодженої МПП, навести приклади.
2. Описати показники, які використовуються для оцінювання рівня неузгодженості мультиплікативної МПП.
3. Які критерії допустимо неузгодженої МПП?
4. Описати загальний метод оцінювання і підвищення узгодженості МПП залежно від її властивостей.
5. Описати метод Transitiv пошуку найбільш неузгодженого елементу (ННЕ) МПП.
6. Описати метод MOutflow пошуку ННЕ МПП.
7. Описати метод розрахунку коефіцієнтів кореляції та метод на основі критерію Хі-квадрат для пошуку ННЕ МПП.
8. Описати метод підвищення узгодженості слабко неузгодженої МПП. Як коригується найбільш неузгоджений елемент МПП?
9. Описати алгоритм автоматичного (без участі експерта) коригування МПП, навести критерії ефективності підвищення узгодженості.
10. Сформулювати і довести твердження, на якому базується алгоритм WGMM автоматичного коригування узгодженості.
11. Сформулювати і довести твердження, на якому базується алгоритм WAMM автоматичного коригування узгодженості.
12. Сформулювати і довести твердження про збіжність алгоритму автоматичного коригування узгодженості МПП.
13. Описати основні етапи методу «трикутник».
14. Описати методи знаходження ваг, стійкі до викидів в МПП.

Практикум 3
Дослідження методів агрегування ваг альтернатив рішень за ієрархічною моделлю критеріїв

Мета роботи:

для модельної задачі ППР:

- *порівняти ваги альтернатив, отримані різними методами агрегування локальних ваг на основі множини критеріїв рішень:*
  - *дистрибутивним та його модифікаціями,*
  - *мультиплікативним,*
  - *за функцією мінімуму,*
  - *групового врахування бінарних відношень переваг альтернатив;*
- *виявити умови появи реверсу рангів в задачі ППР при використанні наведених вище методів та зміни множин критеріїв та альтернатив рішень:*
  - *вилученні найменш вагомого критерію,*
  - *додаванні альтернатив з різними властивостями:*
    - *еквівалентної до однієї з існуючих альтернатив,*
    - *неоптимальної за усіма критеріями,*
    - *оптимальної за одним з критеріїв;*
- *порівняти ваги, отримані різними методами агрегування, та оцінити чутливість результуючого ранжування до зміни множин критеріїв та альтернатив рішень.*

1 Теоретичні відомості

Методи аналізу альтернатив рішень на основі ієрархічної моделі критеріїв (МАІ, analytic hierarchy process, AHP) складаються з наступних чотирьох загальних етапів [3 – 5]:

1. Побудова ієрархічної моделі критеріїв, цілей та інших факторів, які впливають на головну ціль прийняття рішення; побудова множини альтернативних варіантів рішень.

2. Отримання суджень експертів щодо парних порівнянь елементів одного рівня ієрархії відносно спільного елементу вищого рівня. Парні порівняння проводяться у вибраній шкалі і за результатами будуються матриці парних порівнянь (МПП), які є обернено симетричними.

3. Математична обробка суджень експертів:

- розрахунок локальних ваг елементів кожного рівня ієрархії відповідно до батьківських елементів вищого рівня на основі МПП; побудова локальних ранжувань;
- аналіз узгодженості експертних оцінок;
- розрахунок глобальних ваг елементів ієрархії відносно головної цілі прийняття рішення, використовуючи методи агрегування; побудова ранжування на основі глобальних ваг.

4. Аналіз чутливості отриманих ранжувань.

Локальною вагою елемента ієрархії називається вага елемента відносно батьківського елементу, розрахована на основі МПП.

Глобальною вагою елемента ієрархії називається вага відносно вершини ієрархії (в більшості випадків – це головна ціль прийняття рішення), розрахована на основі локальних ваг одним з методів агрегування.

Залежно від використання тих чи інших методів розрахунку локальних та глобальних ваг маємо різні модифікації методів аналізу ієрархій.

Детальніше розглянемо етап розрахунку глобальних ваг елементів ієрархії для ієрархії, що складається з двох рівнів: критерії та альтернативи.

Постановка задачі

Дано: $A = \left\{ A_i \middle| i = \overline{1, N} \right\}$ - множина альтернативних варіантів рішень;

- $C=\{C_j \mid j=\overline{1,M}\}$ - множина критеріїв оцінювання альтернатив;
- a_{ij} - ненормована вага альтернативи A_i за критерієм C_j;
- w_j^C - вага критерію C_j, $\sum_{j=1}^{M} w_j^C = 1$.

<u>Потрібно:</u>

- знайти глобальні ваги $w_i^{глоб}$ альтернатив A_i, $i=\overline{1,N}$.

Існує декілька методів агрегування на ієрархічній моделі.

Дистрибутивний метод

Глобальна вага альтернативи A_i розраховується за формулою [15]

$$w_i^{глоб} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij} ,$$

де $r_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} a_{kj}}$ - нормовані значення ваг a_{ij}, $\sum_{i=1}^{N} r_{ij} = 1 \quad \forall j=\overline{1,M}$.

Модифікований дистрибутивний метод (правило ідеальної точки)

Ненормована глобальна вага альтернативи A_i розраховується так само, як і в дистрибутивному методі за допомогою адитивної функції згортки [15]:

$$v_i^{глоб} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij} ,$$

але нормовані значення ваг a_{ij} – по-іншому, а саме, $r_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{\max\limits_{k=1,\dots,N} a_{kj}}$.

Результуючі глобальні ваги дорівнюють

$$w_i^{глоб} = \frac{v_i^{глоб}}{\sum_{k=1}^{N} v_k^{глоб}} .$$

Мультиплікативний метод

Ненормована глобальна вага альтернативи A_i дорівнює [15]

$$v_i^{глоб} = \prod_{j=1}^{M} (a_{ij})^{w_j^C}, \; i = \overline{1,N}.$$

Результуючі глобальні ваги дорівнюють

$$w_i^{глоб} = \frac{v_i^{глоб}}{\sum_{k=1}^{N} v_k^{глоб}}.$$

Метод на основі функції мінімуму

Ненормована глобальна вага альтернативи A_i [16]

$$v_i^{глоб} = \min_{j=1,...,M} (a_{ij} w_j^C), \; i = \overline{1,N}.$$

Результуючі глобальні ваги дорівнюють

$$w_i^{глоб} = \frac{v_i^{глоб}}{\sum_{k=1}^{N} v_k^{глоб}}.$$

Групове врахування бінарних відношень переваг альтернатив (ГВБВПА)

Проводиться декомпозиція множини альтернатив і задача розв'язується окремо для кожної пари альтернатив. Розглядаються $N(N-1)/2$ підзадач і розраховуються $N(N-1)/2$ пар глобальних ваг альтернатив (w_i^{ik}, w_k^{ik}), де w_i^{ik} - глобальна вага альтернативи A_i при одночасному розгляді тільки пари A_i та A_k, $i = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,(N-1)/2}$ [15]. При використанні дистрибутивного методу значення w_i^{ik} розраховується за формулою:

$$w_i^{ik} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij},$$

де $r_{lj} = \frac{a_{lj}}{a_{ij} + a_{kj}}$, $l \in \{i,k\}$, $r_{ij} + r_{kj} = 1$.

Для об'єднання часткових розв'язків будується матриця $P=\left(w_i^{ik}/w_k^{ik}\right)$, $i,k=\overline{1,N}$, яка задовольняє всім властивостям традиційної матриці парних порівнянь, є обернено симетричною. Ваги, отримані на основі P – шукані глобальні ваги альтернатив.

В загальному випадку ієрархія складається з p рівнів, $p\geq 2$ (рис. 3.1).

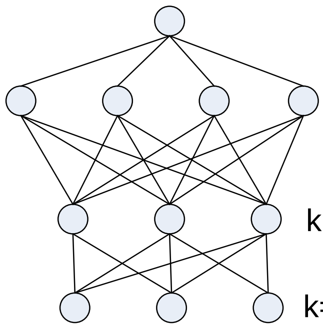


Рис.3.1 Повна ієрархія з $p=3$ рівнями

Розглянемо <u>повні</u> ієрархії, які описуються числом $p\in N$ і вектором $m=\{(m_k)\,|\,k=1,...,p\}$, де $m_k\in N$ - кількість елементів на k-му рівні ієрархії.

Для розрахунку глобальних ваг елементів такої ієрархії розглянуті вище методи агрегування використовуються рекурсивно на кожному рівні ієрархії.

Поняття реверсу рангів

При використанні методів агрегування ваг в ієрархічній моделі ППР може виникнути реверс рангів альтернатив, який для багатьох практичних задач є небажаним.

Реверс рангів – це зміна рангів альтернатив при їх оцінюванні за багатьма критеріями при додаванні/вилученні альтернативи. Множина критеріїв, ваги критеріїв і оцінки «старих» альтернатив за критеріями не змінюються [2, 3, 15].

Існує декілька видів реверсу рангів [15]:

1. <u>зміна знаку переваги між «старими» альтернативами</u>

Наприклад, при розгляді n альтернатив ранжування дорівнює $A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ \boldsymbol{A_i} \succ \boldsymbol{A_k} \succ \ldots \succ A_n$, а після додавання до розгляду ще однієї альтернативи A_{n+1} ранжування стало $A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ \boldsymbol{A_k} \succ \boldsymbol{A_i} \succ \ldots \succ A_n$. Реверс рангів також має місце, якщо ваги деяких альтернатив були рівні (відрізнялися) в межах практичної точності при розгляді n альтернатив і стали відрізнятися (співпадати) після додавання альтернативи A_{n+1}.

В загальному випадку умова появи цього виду реверсу рангів для пари альтернатив A_i та A_k, $i,k=1,\ldots,n$ наступна:

$$(\Delta v_{ik}^{глоб} \cdot \Delta \tilde{v}_{ik}^{глоб} < 0) \vee ((\Delta v_{ik}^{глоб} = 0) \wedge (\Delta \tilde{v}_{ik}^{глоб} \neq 0)) \vee ((\Delta v_{ik}^{глоб} \neq 0) \wedge (\Delta \tilde{v}_{ik}^{глоб} = 0)), \quad (3.1)$$

де $\Delta v_{ik}^{глоб} = v_i^{глоб} - v_k^{глоб}$; $\Delta \tilde{v}_{ik}^{глоб} = \tilde{v}_i^{глоб} - \tilde{v}_k^{глоб}$;

$\tilde{v}_i^{глоб}$ - ваги альтернатив при розгляді $n+1$ альтернативи,

Рівність нулю в (3.1) слід розуміти наступним чином:

$(\Delta v_{ik}^{глоб} = 0) \Leftrightarrow (|\Delta v_{ik}^{глоб}| < \varepsilon)$, де ε - задана точність, наприклад, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Аналогічно, $(\Delta v_{ik}^{глоб} \neq 0) \Leftrightarrow (|\Delta v_{ik}^{глоб}| \geq \varepsilon)$.

2. <u>зміна оптимальної альтернативи</u>

Оптимальна альтернатива – яка має найбільшу глобальну вагу. Альтернатива, <u>оптимальна за одним з критеріїв</u> – це альтернатива, яка має найбільшу локальну вагу за цим критерієм.

Умова появи цього виду реверсу рангів:

$$i \neq k,$$

де i - номер оптимальної альтернативи при розгляді n альтернатив, $i: v_i^{глоб} = \max\limits_{l=1,\ldots,n} v_l^{глоб}$, k - номер оптимальної альтернативи при розгляді $n+1$ альтернативи, $k: v_k^{глоб} = \max\limits_{l=1,\ldots,n,n+1} \tilde{v}_l^{глоб}$, $\tilde{v}_l^{глоб}$ - ваги альтернатив при розгляді $n+1$ альтернативи.

3. <u>зміна рангів альтернатив при їх попарному розгляді в порівнянні з розглядом всіх альтернатив одночасно.</u>

Нехай ранжування при одночасному розгляді n альтернатив наступне: $A_1 \succ A_2 \succ ... \succ \boldsymbol{A_i} \succ \boldsymbol{A_k} \succ ... \succ A_n$. Виконаємо декомпозицію задачі прийняття рішень. Будемо розраховувати глобальні ваги лише для пари альтернатив. Потім об'єднаємо знайдені часткові розв'язки у загальне ранжування. Якщо отримане ранжування не співпадає із початковим (при одночасному розгляді всіх альтернатив), наприклад, об'єднане ранжування дорівнює $A_1 \succ A_2 \succ ... \succ \boldsymbol{A_k} \succ \boldsymbol{A_i} \succ ... \succ A_n$, то має місце реверс рангів.

Моделювання явища реверсу рангів

Випадковим чином згенерувати задачу прийняття рішень з n альтернативами і двома критеріями ($m = 2$):

- згенерувати узгоджені мультиплікативні матриці парних порівнянь (МПП) D^j, $j = 1,...,m$ альтернатив за критеріями у фундаментальній шкалі $[1/9, 9]$, розмірність кожної з цих МПП $n \times n$. Для цього достатньо випадковим чином задати один рядок (стовпчик) МПП і побудувати всі інші елементи цієї МПП за правилами оберненої симетричності ($d_{ik} = 1/d_{ki}$) і транзитивності ($d_{ik} = d_{il}d_{lk}$);

- задати нормовані до одиниці ваги критеріїв w_j^c: $\sum_{j=1}^{m} w_j^c = 1$.

Розрахувати локальні ваги альтернатив за кожним з критеріїв.

Розрахувати глобальні ваги альтернатив одним з методів:

- дистрибутивним
- ідеальної точки
- мультиплікативним
- ГВБВПА з дистрибутивним синтезом
- ГВБВПА з ідеальним синтезом

- ГВББВПА з мультиплікативним синтезом.

Додати до розгляду ще одну альтернативу: побудувати розширені МПП $D^{*j}, j = 1,...,m$ альтернатив за критеріями у фундаментальній шкалі $[1/9, 9]$, їх розмірність $(n+1)\times(n+1)$. Оцінки відносно старих альтернатив не змінюються! В D^{*j} випадковим чином задати величину переваги нової альтернативи в тому рядку (стовпчику), за яким генерувалася МПП. Розширена МПП D^{*j} має бути узгодженою, тому слід побудувати ($n+1$)-й рядок і ($n+1$)-й стовпчик цієї матриці за правилами оберненої симетричності і транзитивності.

Додати альтернативу із властивостями:

- неоптимальну за обома критеріями;
- оптимальну за одним із критеріїв;
- еквівалентну до альтернативи з найменшою глобальною вагою;
- еквівалентну до оптимальної альтернативи.

Виконати для розширених МПП D^{*j} наведені вище кроки, розрахувати локальні і глобальні ваги.

Встановити, чи має місце реверс рангів видів 1 – 3.

Виконати моделювання появи реверсу рангів. Для цього експеримент повторити 10 000 разів, знайти відносну кількість появ реверсу.

Моделювання появи реверсу виконати для різної кількості альтернатив n=2, 3, …, 15 і для різних наборів ваг критеріїв: 0.1 і 0.9; 0.2 і 0.8; 0.3 і 0.7; 0.4 і 0.6; 0.5 і 0.5.

Результати оформлюються у вигляді графіків залежності частоти реверсу рангів від кількості альтернатив.

Приклад 1

Керівництво міської державної адміністрації оцінює чотири варіанти підсистем системи автоматизованого керування дорожнім рухом. Розглядаються наступні цілі впровадження системи: c1=”зменшення затримок транспорту”, c2=”зниження рівня аварійності на дорогах”, c3=”покращення екології в місті”.

Експерт виконав порівняння варіантів підсистем за вказаними критеріями у фундаментальній шкалі відносної важливості. В результаті за критерієм c1 другий варіант слабко переважає перший, третій і четверий варіанти; перший варіант має таку ж вартість як третій і четвертий; третій варіант кращий за четвертий, ступінь переваги – між рівною важливістю і слабкою перевагою.

За критерієм c2 перший варіант однаковий з третім, слабко переважає четвертий і суттєво переважає другий; другий варіант ненабагато гірший за третій і четвертий варіанти; третій слабко переважає четвертий.

За критерієм c3 перший варіант однаковий з четвертим, слабко переважає другий і третій; другий однаковий з третім; четвертий слабко переважає другий і третій варіанти.

Відомо, що критерій c2 так само важливий як і c1, критерій c3 ненабагато менш важливий за c1 і c2.

Розрахувати глобальні ваги альтернатив рішень методом групового врахування бінарних відношень переваг з ідеальною згорткою.

Локальні ваги альтернатив рішень та ваги критеріїв розрахувати методом арифметичної нормалізації. Встановити, чи мають оцінки допустимий рівень неузгодженості за означенням, показником HCR та спектральним показником. За необхідності скоригувати оцінки.

Розв’язання

1) Побудуємо матриці парних порівнянь (МПП) альтернатив за кожним з критеріїв, використовуючи фундаментальну шкалу:

Інтенсивність важливості x_k	Якісна оцінка (судження s_k)
1	Однаково важливі
3	Ненабагато важливіший, Слабка перевага
5	Суттєво важливіший, Сильна перевага
7	Значно важливіший, Дуже сильна перевага
9	Абсолютно важливіший, Абсолютна перевага
2,4,6,8	Проміжні оцінки

МПП альтернатив за критеріями с1, с2 і с3 відповідно дорівнюють:

$$D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1/3 & 3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \ D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1/3 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1 & 1/3 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

МПП критеріїв: $D^c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$

2) Проведемо оцінювання узгодженості експертних парних порівнянь

Перевіримо узгодженість МПП за означенням.

Оцінимо узгодженість МПП D^1. Оскільки $n=4$, то кількість транзитивностей, які потрібно перевірити, дорівнює $n!/(3!(n-3)!)=4$.

i	j	k	$d_{ij}=d_{ik}d_{kj}$
1	2	3	виконується
1	2	4	виконується
1	3	4	не виконується
2	3	4	не виконується

Для МПП D^2 і D^3 перевіряються аналогічні транзитивності.

Отримали, що *за означенням МПП* D^1 *і* D^2 *не є узгодженими,* D^3*-узгоджена. Циклів в МПП* D^1, D^2 *і* D^3 *немає.*

Оскільки кількість критеріїв $m = 3$, то кількість транзитивностей, які потрібно перевірити, дорівнює $m!/(3!(m-3)!) = 1$:

i	j	k	$d_{ij} = d_{ik} d_{kj}$
1	2	3	виконується

Тому МПП критеріїв D^c *– узгоджена.*

Показник узгодженості HCR розраховується за формулою

$$HCR(n) = \frac{HCI(n)}{HRCI(n)}, \qquad HCI(n) = \frac{\left(HM(s) - n\right)(n+1)}{n(n-1)},$$

де $HM(s) = n\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1}\right)^{-1}$ - гармонічна середня для $s = \left\{ s_j \,\middle|\, j \in 1,...,n \right\}$, $s_j = \sum_{i=1}^{n} d_{ij}$, $HRCI(n)$ - середнє значення HCI(n) для випадкових МПП (таблична величина).

Знайдемо показник узгодженості HCR для оцінок альтернатив рішень за критерієм c1: $HCI = 0.015$, $HRCI = 0.89$, $HCR = 0.016$.

За критерієм c2: $HCI = 0.018, HRCI = 0.89, HCR = 0.020$.

За критерієм c3: $HCI = 0, HCR = 0$.

Для МПП критеріїв: $HCI = 0, HCR = 0$.

Отримані HCR менші за порогове значення 0.08 (для $n = 4$). Тому МПП D^1 і D^2 оцінок альтернатив за критеріями c1 і c2 мають допустимий рівень неузгодженості. D^3 - узгоджена.

Таким чином, за показником HCR *всі надані експертом оцінки мають допустимий рівень неузгодженості або є узгодженими.*

За критерієм c1 спектральні коефіцієнти узгодженості породжених МПП: Ку=(0.835, 0.835, 0.835, 0.79). Спектральний коефіцієнт узгодженості МПП D^1 Ку_1=0.79.

За критерієм c2: Ку=(1, 0.835, 0.835, 0.769). Спектральний коефіцієнт узгодженості МПП D^2 Ку_2=0.769.

За критерієм c3: Ку=(1, 1, 1, 1). Спектральний коефіцієнт узгодженості МПП D^3 Ку_3=1.

Для МПП критеріїв: Ку=(1, 1, 1), Ку_c=1.

Показник Ку_2 є меншим за поріг застосування Tu=0.79, тому за спектральним показником експертні оцінки за критерієм c2 мають бути повернуті експерту для перегляду.

Згідно з Ку_1 експертні оцінки за критерієм c1 мають допустимий рівень неузгодженості і не потребують повернення експерту.

Експертні оцінки альтернатив за критерієм c3 узгоджені.

3) Знайдемо локальні ваги альтернатив рішень та ваги критеріїв за методом арифметичної нормалізації AN

Ненормовані ваги за методом AN дорівнюють $v_i = \left(s_i\right)^{-1}$, $s_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ji}$.

Нормовані ваги розраховуються за формулою $w_i = v_i / \sum_{k=1}^{n} v_k$.

В даній задачі $n = 4$, вектор ненормованих локальних ваг альтернатив рішень за критерієм c1 дорівнює: $v^1 = (0.167 \quad 0.5 \quad 0.182 \quad 0.143)$,

вектор нормованих ваг: $w^1 = (0.168 \quad 0.504 \quad 0.183 \quad 0.144)$.

Вектор ненормованих локальних ваг альтернатив рішень за критерієм c2 дорівнює: $v^2 = (0.395 \quad 0.083 \quad 0.375 \quad 0.136)$,

вектор нормованих ваг: $w^2 = (0.399 \quad 0.084 \quad 0.379 \quad 0.138)$.

Вектор ненормованих локальних ваг альтернатив рішень за критерієм c3 дорівнює: $v^3 = (0.375 \quad 0.125 \quad 0.125 \quad 0.375)$,

вектор нормованих ваг: $w^3 = (0.375 \quad 0.125 \quad 0.125 \quad 0.375)$.

Вектор ваг критеріїв: $w^C = (0.429 \quad 0.429 \quad 0.142)$.

4) Знайдемо глобальні ваги альтернатив рішень методом групового врахування бінарних відношень переваг з ідеальною згорткою

Відповідно до методу групового врахування бінарних відношень переваг проводиться декомпозиція множини альтернатив і задача розв'язується окремо для кожної пари альтернатив. Розглядаються $n(n-1)/2$ підзадач, де n – кількість альтернатив, і визначаються $n(n-1)/2$ пар глобальних ваг альтернатив (w_i^{ik}, w_k^{ik}), де w_i^{ik} - глобальна вага альтернативи A_i при одночасному розгляді тільки пари A_i та A_k, $i = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,(n-1)/2}$. При використанні методу ідеальної точки значення w_i^{ik}:

$w_i^{ik} = \sum_{j=1}^{m} w_j^C \cdot r_{ij}$, де $r_{pj} = \dfrac{v_{pj}}{\max(v_{ij}, v_{kj})}$, $p \in \{i,k\}$, v_{ij} - вага альтернативи A_i за критерієм c_j.

Для об'єднання часткових розв'язків будується матриця $P = \left(w_i^{ik} / w_k^{ik} \right)$, $i,k = \overline{1,n}$, яка задовольняє всім властивостям традиційної матриці парних порівнянь. Ваги, отримані з P (будь-яким з відомих методів!) – шукані глобальні ваги альтернатив.

Матриця $P = \left(w_i^{ik} / w_k^{ik} \right)$ для даної задачі:

$$P = \begin{matrix} 1 & 1.262 & 1.092 & 1.521 \\ 0.792 & 1 & 0.916 & 1.063 \\ 0.915 & 1.092 & 1 & 1.425 \\ 0.657 & 0.941 & 0.702 & 1 \end{matrix}$$

Шукані глобальні ваги альтернатив, отримані на основі P:

$$w^{глоб} = \quad 0.298 \quad 0.232 \quad 0.270 \quad 0.201.$$

Таким чином, найкращим варіантом за множиною критеріїв є перший варіант підсистеми системи автоматизованого керування дорожнім рухом.

Приклад 2 (ілюстрація реверсу рангів)

Реверси рангів в задачі вибору квартири при використанні дистрибутивного методу і ГВББВПА

Планується оренда квартири в новобудові, використовуючи два критерії: ціна квартири та умови проживання, які включають місце розташування квартири, її площу, додаткові зручності та екологічну обстановку в районі. Ці два критерії є однаково важливими при виборі.

Розглядаються три альтернативні варіанти: A_1 - в смт.Буча, A_2 - в районі метро Лівобережна, A_3 - на Позняках. Нехай особа, що приймає рішення, оцінила ці три альтернативи відносно двох критеріїв наступним чином:

$$M_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1/7 & 1 & 3/7 \\ 1/3 & 7/3 & 1 \end{pmatrix}, \; M_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

МПП M_{C_1} і M_{C_2} - узгоджені, оскільки для $\forall i, j, k = 1,...,n$ виконується $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$, де $n = 3$, a_{ij} - елемент МПП. Тому для кожної з цих МПП $\lambda_{\max} = n = 3$ та індекси узгодженості CI дорівнюють нулю.

Нехай до розгляду додається ще одна альтернатива, позначимо її A_4, яка є неоптимальною за кожним з критеріїв. Нехай особа, що приймає рішення, задала наступні МПП чотирьох альтернатив відносно двох критеріїв:

$$M_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 & 2 \\ 1/7 & 1 & 3/7 & 2/7 \\ 1/3 & 7/3 & 1 & 2/3 \\ 1/2 & 7/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}, \ M_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 & 3/2 \\ 6 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1/2 & 1 & 9/2 \\ 2/3 & 1/9 & 2/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таблиця 3.1 - Глобальні ваги альтернатив за різними методами агрегування

Альтерна-тива	Вага			
	Дистрибу-тивний	Ідеальної точки	метод ГВБВПА	Мультипліка-тивний
A_1	$w_1^{глоб} = 0,3887$	$w_1^{глоб} = 0,3712$	$w_1^{глоб} = 0,3372$	$w_1^{глоб} = 0,34180$
A_2	$w_2^{глоб} = 0,3484$	$w_2^{глоб} = 0,3636$	$w_2^{глоб} = 0,3219$	$w_2^{глоб} = 0,31640$
A_3	$w_3^{глоб} = 0,2629$	$w_3^{глоб} = 0,2652$	$w_3^{глоб} = 0,3409$	$w_3^{глоб} = 0,34177$

Знайдемо глобальні ваги альтернатив після додавання нової, вони дорівнюють:

- дистрибутивним методом: $w_1^{*глоб} = 0,2999$, $w_2^{*глоб} = 0,3174$, $w_3^{*глоб} = 0,2250$, $w_4^{*глоб} = 0,1577$.
- методом ідеальної точки: $w_1^{*глоб} = 0,3108$, $w_2^{*глоб} = 0,3044$, $w_3^{*глоб} = 0,2220$, $w_4^{*глоб} = 0,1628$.
- методом ГВБВПА: $w_1^{*глоб} = 0,2847$, $w_2^{*глоб} = 0,2550$, $w_3^{*глоб} = 0,2797$, $w_4^{*глоб} = 0,1806$.
- мультиплікативним методом: $w_1^{*глоб} = 0,285456$, $w_2^{*глоб} = 0,26429$, $w_3^{*глоб} = 0,285457$, $w_4^{*глоб} = 0,16480$.

Задамося практичною точністю $\varepsilon = 10^{-4}$. Аналізуючи отримані ваги до і після додавання альтернативи, робимо висновок про присутність реверсу рангів (РР) в методах дистрибутивному і ГВБВПА (табл.3.2).

Таблиця 3.2 - Результати до і після додавання неоптимальної альтернативи (+ - РР спостерігався, – - РР не спостерігався)

Метод агрегування	Ранжування		РР
	перед додаванням нової альтернативи	після додавання нової альтернативи	
Дистрибутивний	$A_1 \succ A_2 \succ A_3$	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$	+
Ідеальний	$A_1 \succ A_2 \succ A_3$	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$	–
ГВБВПА	$A_3 \succ A_1 \succ A_2$	$A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$	+
Мультиплікативний	$A_1 \sim A_3 \succ A_2$	$A_1 \sim A_3 \succ A_2 \succ A_4$	–

Реверс рангів в результаті використання методів ідеальної точки і мультиплікативного

Нехай матриці парних порівнянь (МПП) трьох альтернатив відносно двох критеріїв дорівнюють

$$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1 & 4/3 \\ 1/4 & 3/4 & 1 \end{pmatrix} \text{ і } M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/4 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ ваги критеріїв 0.5 і 0.5.}$$

МПП M^1 і M^2 за побудовою узгоджені (для $\forall i, j, k = 1,...,n$ виконується $a_{ij} = a_{ik} a_{kj}$, де $n = 3$, a_{ij} - елемент МПП) для того, щоб вилучити будь-які ефекти неузгодженості парних порівнянь альтернатив відносно кожного з критеріїв.

Додамо до розгляду альтернативу a_4, оптимальну за першим критерієм. МПП після додавання альтернативи дорівнюють

$$M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 4/7 \\ 1/3 & 1 & 4/3 & 4/21 \\ 1/4 & 3/4 & 1 & 1/7 \\ 7/4 & 21/4 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \ M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 3/4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 2/3 & 4/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ці «розширені» МПП також є узгодженими за побудовою.

Локальні і глобальні ваги альтернатив, розраховані за ідеальним і мультиплікативним методами, а також заключне ранжування альтернатив до і після додавання альтернативи наведені в табл. 3.3.

До додавання альтернативи ранжування альтернатив за обома методами: ідеальним і мультиплікативним співпадало і дорівнювало $a_1 \succ a_3 \succ a_2$. Після додавання a_4, оптимальної за першим критерієм, ранжування стало $a_4 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_2$ при використанні методу ідеальної точки і $a_4 \succ a_1 \succ a_3 \succ a_2$ при використанні мультиплікативного методу. Таким чином, оптимальна альтернатива змінилася, нею стала до́дана альтернатива. При використанні методу ідеальної точки змінився також порядок між старими альтернативами a_1 і a_3.

Таблиця 3.3 - Локальні і глобальні ваги альтернатив до і після додавання альтернативи a_4

		Локальні ваги альтернатив	Глобальні ваги альтернатив	Нормовані до одиниці глобал. ваги альтернатив	Ранжування
	Метод ідеальної точки	$v^1 =$ $\{1.00, 0.33, 0.25\}$	$w_1^{глоб} = 0.75$, $w_2^{глоб} = 0.29$, $w_3^{глоб} = 0.625$	$w_1^{глоб} = 0.45$, $w_2^{глоб} = 0.175$, $w_3^{глоб} = 0.375$	$a_1 \succ a_3 \succ a_2$
		$v^2 =$ $\{0.50, 0.25, 1.00\}$			
	Мульт. метод	$v^1 =$ $\{2.2894, 0.7631, 0.5724\}$			$a_1 \succ a_3 \succ a_2$

		$v^2 =$ $\{1.0, 0.5, 2.0\}$	$w_1^{\text{глоб}} = 1.5131$, $w_2^{\text{глоб}} = 0.6177$, $w_3^{\text{глоб}} = 1.0700$	$w_1^{\text{глоб}} = 0.4727$, $w_2^{\text{глоб}} = 0.1930$, $w_3^{\text{глоб}} = 0.3343$	
Після додавання альтернативи	Метод ідеальної точки	$v^1 =$ $\{0.5714, 0.1905, 0.1429, 1.0000\}$	$w_1^{\text{глоб}} = 0.5357$, $w_2^{\text{глоб}} = 0.2203$, $w_3^{\text{глоб}} = 0.5715$, $w_4^{\text{глоб}} = 0.6667$	$w_1^{\text{глоб}} = 0.2686$, $w_2^{\text{глоб}} = 0.1105$, $w_3^{\text{глоб}} = 0.2866$, $w_4^{\text{глоб}} = 0.3343$	$a_4 \succ a_3 \succ a_1 \succ a_2$
		$v^2 =$ $\{0.50, 0.25, 1.00, 0.33\}$			
	Мульт. метод	$v^1 =$ $\{1.6182, 0.5394, 0.4046, 2.8319\}$		$w_1^{\text{глоб}} = 0.3129$, $w_2^{\text{глоб}} = 0.1278$, $w_3^{\text{глоб}} = 0.2213$, $w_4^{\text{глоб}} = 0.3380$	$a_4 \succ a_1 \succ a_3 \succ a_2$
		$v^2 =$ $\{1.1067, 0.5533, 2.2134, 0.7378\}$			

2 Порядок виконання роботи

2.1. Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2. Розрахувати глобальні ваги альтернатив для ієрархії з p рівнями, $p \geq 2$, використовуючи методи ієрархічного синтезу (агрегування) згідно з варіантом:

- дистрибутивний,
- ідеальної точки,
- мультиплікативний,
- на основі функції мінімуму,
- групового врахування бінарних відношень переваг;

2.3.1) задати МПП елементів ієрархії,

2.3.2) розрахувати локальні ваги елементів ієрархії, використовуючи метод з лабораторної роботи № 1,

2.3.3) розрахувати глобальні ваги елементів ієрархії,

2.3.4) порівняти результати, отримані різними методами агрегування,

2.3. Виявити умови появи реверсу рангів в задачі ППР при використанні заданих згідно з варіантом методів та зміни множин критеріїв та альтернатив рішень:

2.3.1) вилучити з розгляду найменш вагомий критерій і виконати етапи 2.2.3 і 2.2.4,

2.3.2) по черзі додати декілька альтернатив-копій еквівалентних до однієї з існуючих альтернатив, в кожному з експериментів виконати етапи 2.2.3 і 2.2.4 для множини з N+1 альтернатив,

2.3.3) по черзі додати декілька неоптимальних за усіма критеріями альтернатив, в кожному з експериментів виконати етапи 2.2.3 і 2.2.4 для множини з N+1 альтернатив,

2.3.4) додати альтернативу, оптимальну за одним з критеріїв, в кожному з експериментів виконати етапи 2.2.3 і 2.2.4 для множини з N+1 альтернатив,

2.4. Порівняти ваги, отримані різними методами агрегування, та оцінити чутливість результуючого ранжування до зміни множин критеріїв та альтернатив рішень.

2.5. Зробити висновки по роботі

2.6. Дати відповіді на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

Звіт має містити:

1. Завдання: ієрархія, методи розрахунку локальних ваг і агрегування.

2. Текст програми, яка реалізує описані вище кроки 2.2 і 2.3.

3. Числові приклади або вікна програми, які <u>детально</u> ілюструють результати за пп.2.2 і 2.3. Це включає МПП елементів ієрархії, локальні, глобальні ваги елементів, ранжування альтернатив в кожному експерименті.

4. Висновки по роботі.

Варіанти завдань

№	Ієрархія	Метод розрахунку глобальних ваг
1	p=3, повна, m=(4, 3, 3)	дистрибутивний, ГВБВПА
2	p=3, повна, m=(3, 3, 4)	ідеальної точки, ГВБВПА
3	p=3, повна, m=(2, 4, 3)	мультиплікативний, ГВБВПА
4	p=3, повна, m=(2, 3, 4)	на основі функції мінімуму, ГВБВПА
5	p=3, повна, m=(3, 3, 4)	дистрибутивний, ГВБВПА
6	p=3, повна, m=(2, 4, 4)	ідеальної точки, ГВБВПА
7	p=3, повна, m=(3, 4, 2)	мультиплікативний, ГВБВПА
8	p=3, повна, m=(4, 4, 3)	на основі функції мінімуму, ГВБВПА
9	p=3, повна, m=(3, 3, 2)	дистрибутивний, ГВБВПА
10	p=3, m=(4, 4, 3)	ГВБВПА з дистрибутивним
11	p=3, m=(3, 2, 4)	ГВБВПА з ідеальним

12	p=3, m=(2, 3, 4)	ГВБВПА з мультиплікативним
13	p=3, m=(3, 4, 3)	ГВБВПА з дистрибутивним
14	p=3, m=(2, 4, 4)	ГВБВПА з ідеальним
15	p=3, m=(3, 4, 2)	ГВБВПА з мультиплікативним
16	p=2, m=(3, 5)	дистрибутивний, ГВБВПА
17	p=2, m=(5, 7)	ідеальної точки, ГВБВПА
18	p=2, m=(5, 4)	мультиплікативний, ГВБВПА
19	p=2, m=(9, 5)	на основі функції мінімуму, ГВБВПА
20	p=2, m=(7, 3)	дистрибутивний, ГВБВПА

№	**Ієрархія**	**Метод розрахунку глобальних ваг**	**Альтернатива, що додається**
21	p=2, m=2	дистрибутивний	еквівалентна альтернативі з мінімальною вагою
22	p=2, m=2	ідеальної точки	оптимальна за одним з критеріїв
23	p=2, m=2	мультиплікативний	оптимальна за одним з критеріїв
24	p=3, m=2	ГВБВПА з дистрибутивним	неоптимальна
25	p=2, m=2	ГВБВПА з правилом ідеальної точки	еквівалентна альтернативі з мінімальною вагою
26	p=2, m=2	ГВБВПА з мультиплікативним	неоптимальна

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1. Дати означення ієрархії як частково впорядкованої множини.
2. Дати означення і навести приклади повних ієрархій.
3. Навести загальні етапи методу аналізу ієрархій.
4. Сформулювати метод ієрархічної композиції.
5. Описати дистрибутивний метод розрахунку глобальних ваг альтернатив.
6. Описати метод ідеальної точки розрахунку глобальних ваг альтернатив.
7. Описати мультиплікативний метод розрахунку глобальних ваг альтернатив.
8. Описати метод агрегування локальних ваг альтернатив на основі функції мінімуму.
9. В чому полягає метод групового врахування бінарних відношень переваг альтернатив?
10. Як можна порівняти різні методи агрегування локальних ваг?
11. Що таке явище реверсу рангів? Навести види реверсу рангів з прикладами.
12. Як здійснюється моделювання реверсу рангів?

Практикум 4
Оцінювання чутливості розв’язку на основі ієрархічної моделі підтримки прийняття рішень

Мета роботи:

- *Дослідити різні методи оцінювання чутливості розв’язку задачі підтримки прийняття рішень (ППР) на основі ієрархічної моделі:*
  - інтервали та індекси стійкості елементів матриць парних порівнянь до збурень в оцінках експертів залежно від рівня узгодженості цієї матриці,
  - інтервали та індекси стійкості локального ранжування,
  - інтервали та індекси стійкості глобального ранжування елементів ієрархічної моделі ППР,
  - графічні методи аналізу чутливості: виконання, градієнтний, різницевий.
- *Знайти чутливі та стійкі елементи ієрархії для модельної практичної задачі ППР.*

1 Теоретичні відомості

Оцінки експерта піддаються впливу невизначеності і, як наслідок, можуть бути суперечливими. Причинами протиріч можуть бути: неповнота знань у експерта у питанні, яке розглядається, існування неузгодженостей реального світу, неадекватність ієрархічної структури моделі, скалярна шкала для вираження суджень експерта [17, 18].

Сімейство методів аналізу ієрархій (МАІ) є одним з найбільш широко використовуваних методів багатокритеріального прийняття рішень на базі експертних оцінок. Для дослідження достовірності отриманого рішення доцільно визначити залежність між результатами МАІ та ступенем неточності початкових даних —оцінок експерта [2, 19]. Ця задача відноситься до більш узагальненого класу задач аналізу чутливості (АЧ) розв’язку до зміни початкових даних. Розрізняють локальний та глобальний аналіз чутливості результатів, отриманих МАІ.

Локальний аналіз чутливості

Нехай $D=\{(d_{ij})\,|\,i,\,j=1,...,n\}$ – МПП, побудована на основі експертних оцінок парних порівнянь альтернатив рішень $a_1, a_2,...,a_n$ відносно спільної для них характеристики (в подальшому – критерію рішень). На основі цієї МПП розраховуються локальні ваги $v_1, v_2,...,v_n$ альтернатив рішень. Будується локальне ранжування альтернатив у порядку спадання цих ваг, в якому найкращій альтернативі відповідає найбільша вага.

Для дослідження достовірності отриманого за допомогою методу парних порівнянь розв’язку доцільно визначити залежність між результатами методу (локальним ранжуванням) та ступенем неточності початкових даних — експертних оцінок. Ставиться задача дослідити наскільки локальне ранжування альтернатив є стійким до зміни оцінок експертів – елементів МПП, зокрема [20]:

1) чи залишається незмінною найкраща альтернатива рішень,
2) чи залишається незмінним усе ранжування альтернатив,
3) чи є елементи МПП стійкими щодо *збереження узгодженості МПП*.

Інтервалом стійкості експертних оцінок парних порівнянь щодо збереження ранжування альтернатив (*RSInt*) назвемо діапазон, в межах якого може змінюватися оцінка експерта так, щоб локальне ранжування альтернатив залишалося незмінним [21].

Інтервалом стійкості експертних оцінок парних порівнянь щодо збереження узгодженості (*CSInt*) називається діапазон, в межах якого може змінюватися оцінка експерта так, щоб рівень неузгодженості всієї множини оцінок залишався допустимим [21].

Інтервалом стійкості (SInt) експертних оцінок парних порівнянь назвемо інтервал, який є перетином інтервалів *RSInt* та *CSInt* [2]:

$$SInt = RSInt \bigcap CSInt.$$

Розрахунок інтервалів стійкості локального ранжування альтернатив

Позначимо $(\underline{d_{ij}}, \overline{d_{ij}})$ – інтервал стійкості *RSInt* для оцінки d_{ij}.

Твердження 4.1 (про збереження найкращої альтернативи). Нехай альтернативи перенумеровані в порядку спадання їх важливості, виконується $v_i > v_j$ для $i < j$, де v_i – локальні ваги, розраховані методом RGMM і *R* – ранжування, побудоване на основі v_i, $i = 1,...,n$. Тоді інтервал стійкості $RSInt_{1j} = (\underline{d_{1j}}, \overline{d_{1j}}]$ для оцінки експерта d_{1j}, $j \neq 1$, такий що не змінюється найкраща альтернатива a_1 в *R*, дорівнює [21]:

$$\underline{d_{1j}} = \max(L_j^1, L_j^2), \ \overline{d_{1j}} = 9,$$

де $L_j^1 = d_{1j} \cdot (\frac{v_j}{v_1})^{n/2}$, $L_j^2 = \max\limits_{k \neq j \neq 1} (d_{1j} \cdot (\frac{v_k}{v_1})^n)$.

Розглянемо випадок зміни будь-якого елементу d_{kj} МПП, якщо $k \neq j \neq 1$. Будемо шукати інтервал стійкості $(\underline{d_{kj}}, \overline{d_{kj}})$ для елементу d_{kj}.

Твердження 4.2. За умов твердження 4.1 інтервал стійкості $(\underline{d_{kj}}, \overline{d_{kj}})$ для оцінки експерта d_{kj}, $k \neq j \neq 1$, за якого не змінюється найкраща альтернатива a_1 в ранжуванні $a_1 \succ a_2 \succ ... \succ a_n$, коли для розрахунку локальних ваг v_j використовується метод RGMM, дорівнює [2]:

$$\underline{d_{kj}} = d_{kj} \cdot (\frac{v_j}{v_1})^n, \ \overline{d_{kj}} = d_{kj} \cdot (\frac{v_1}{v_k})^n.$$

Розглянемо випадок, коли при зміні елементу МПП залишається незмінним все ранжування $a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_n$ альтернатив рішень. Розглянемо зміну елементу d_{kj} МПП, $k \neq j \neq 1$ в інтервалі $(\underline{d_{kj}}, \overline{d_{kj}})$.

Твердження 4.3 (про збереження ранжування альтернатив). За умов попередньої теореми інтервал стійкості $RSInt_{kj} = (\underline{d_{kj}}, \overline{d_{kj}})$ для оцінки d_{kj}, $k < j$, такий що ранжування R залишається незмінним, дорівнює [2]:

$$\underline{d_{kj}} = d_{kj} \cdot (\frac{v_j}{v_k})^{n/2}, \text{ якщо } k+1 = j;$$

$$\underline{d_{kj}} = \max(L_{kj}^1, L_{kj}^2), \text{ де } L_{kj}^1 = d_{kj} \cdot (\frac{v_{k+1}}{v_k})^n \text{ і } L_{kj}^2 = d_{kj} \cdot (\frac{v_j}{v_{j-1}})^n, \text{ якщо } k+1 \neq j;$$

$$\overline{d_{kj}} = \min(U_{kj}^1, U_{kj}^2), \text{ де } U_{kj}^1 = d_{kj} \cdot (\frac{v_j}{v_{j+1}})^n, \text{ якщо } j < n, \; U_{kj}^2 = d_{kj} \cdot (\frac{v_{k-1}}{v_k})^n.$$

Індекс стійкості локального ранжування RSInd для елемента d_{kj} МПП D визначимо наступним чином:

$$I_{kj} = \min((\underline{d_{kj}})^{-1}, \overline{d_{kj}}),$$

де $(\underline{d_{kj}}, \overline{d_{kj}})$ − інтервал стійкості *RSInt* для елемента d_{kj}.

На основі індексів стійкості визначаються експертні оцінки парних порівнянь, найбільш чутливі до зміни локального ранжування альтернатив.

Розрахунок інтервалів стійкості щодо збереження узгодженості МПП

Тепер перейдемо до розрахунку інтервалів стійкості експертних оцінок парних порівнянь, які зберігають узгодженість цих оцінок. В якості міри неузгодженості використаємо геометричний індекс GCI:

$$GCI = \frac{1}{(n-1)(n-2)} \cdot \sum_{i<j} (\ln e_{ij})^2,$$

де $e_{ij} = d_{ij}\dfrac{v_j}{v_i}$ – помилка апроксимації відношення ваг $\dfrac{v_j}{v_i}$ за допомогою елемента d_{ij} МПП при застосуванні методу RGMM для розрахунку ваг.

Позначимо $[\underline{\delta_{rs}(\Delta)}, \overline{\delta_{rs}(\Delta)}]$ - *інтервал стійкості CSInt* для оцінки експерта d_{rs} при заданому Δ, де $\Delta > 0$ – обмеження на значення *GCI*, $GCI' - GCI < \Delta$, GCI' – нове значення *GCI* для МПП після зміни оцінки d_{rs}.

Абсолютний інтервал стійкості (ACSInt) для оцінки d_{rs}, $r \neq s \neq 1$, при заданому $\Delta > 0$ визначено $[\underline{\gamma_{rs}(\Delta)}, \overline{\gamma_{rs}(\Delta)}]$, де $\underline{\gamma_{rs}(\Delta)} = d_{rs}\underline{\delta_{rs}(\Delta)}$, $\overline{\gamma_{rs}(\Delta)} = d_{rs}\overline{\delta_{rs}(\Delta)}$.

Інтервали стійкості експертних оцінок щодо їх узгодженості розраховуються на основі наступних тверджень.

Твердження 4.4. [3] Якщо елемент d_{rs} МПП D змінено і нове значення дорівнює d'_{rs} ($r \neq s \neq 1$), то геометричний індекс узгодженості *GCI* МПП змінюється на величину

$$GCI' - GCI = \frac{2n}{(n-1)(n-2)} \cdot \ln(\rho) \cdot \ln((e_{rs})^2 \rho^{n-2}),$$

де $\rho = \left(\dfrac{d'_{rs}}{d_{rs}}\right)^{1/n}$, $e_{rs} = d_{rs}\dfrac{v_s}{v_r}$.

Твердження 4.5. [3] Відносний інтервал стійкості для елементу d_{rs} МПП, $r \neq s \neq 1$, при заданому рівні $\Delta > 0$ для *GCI* розраховується наступним чином:

$$\underline{\delta_{rs}(\Delta)} = \exp(n \cdot \ln(\rho_{\min})), \ \overline{\delta_{rs}(\Delta)} = \exp(n \cdot \ln(\rho_{\max})),$$

де $[\ln \rho_{\min}, \ln \rho_{\max}]$ – інтервал для $\ln \rho_{rs}$, який визначається з наступної нерівності другого порядку:

$$\frac{2n}{(n-1)(n-2)} \cdot [(n-2) \cdot (\ln \rho_{rs})^2 + 2 \cdot \ln e_{rs} \cdot \ln \rho_{rs}] \leq \Delta.$$

В останній нерівності вільний член ($-\Delta$) від'ємний, тому гарантується існування розв'язку $\ln\rho_{\min}$ і $\ln\rho_{\max}$ цієї нерівності. Позначимо $\Delta' = \frac{(n-1)(n-2)}{2n}\Delta$. Розв'язок останньої нерівності відповідає тим точкам, в яких парабола $(n-2)\cdot(\ln\rho_{rs})^2 + 2\cdot\ln e_{rs}\cdot\ln\rho_{rs} - \Delta'$ приймає від'ємні значення. Оскільки вільний член $-\Delta'$ від'ємний, то гарантовано існує два розв'язки для $\ln\rho_{rs}$, додатний і від'ємний, і, як наслідок, два значення $\rho_{\min}$ і $\rho_{\max}$ більше і менше за одиницю відповідно. Ці значення дозволяють отримати $\underline{\delta_{rs}(\Delta)}$ і $\overline{\delta_{rs}(\Delta)}$ на основі твердження 4.5.

*Індекс стійкості за узгодженістю (*CSInd*)* для елементу d_{rs} МПП D при заданому Δ [3]:

$$\delta_{rs} = \min((\underline{\delta_{rs}})^{-1}, \overline{\delta_{rs}}).$$

Для $n=3$ за умов твердження 4.5 індекси стійкості за узгодженістю для трьох елементів d_{12}, d_{23}, d_{13} МПП D співпадають між собою [3].

Метод оцінювання стійкості локального ранжування

Нехай $a_1 \succ a_2 \succ \ldots \succ a_n$ − ранжування альтернатив рішень на основі вектора локальних ваг цих альтернатив.

Метод оцінювання стійкості локального ранжування складається з етапів [2]:

1. Знайти інтервали стійкості $RSInt_{1j} = (\underline{d_{1j}}, \overline{d_{1j}}]$, $j \neq 1$ та $RSInt_{kj} = (\underline{d_{kj}}, \overline{d_{kj}})$, $k \neq j \neq 1$, які зберігають найкращу альтернативу, а також інтервали стійкості $RSInt_{kj}^{all\ rank} = (\underline{d_{kj}}, \overline{d_{kj}})$, $k < j$, які зберігають все ранжування альтернатив.

2. Знайти інтервали стійкості $CSInt_{ij}(\Delta) = (\underline{\delta_{ij}(\Delta)}, \overline{\delta_{ij}(\Delta)})$, $\forall\, i, j$, за яких зберігається допустима неузгодженість МПП, де $\Delta = IУ^{пороz} - IУ(D) > 0$,

$IУ^{порог} = IУ^{порог}(n)$ – порогове значення індексу узгодженості ($IУ$), $IУ(D)$ – значення $IУ$ для МПП D.

3. Розрахувати інтервали стійкості $SInt_{ij} = RSInt_{ij} \bigcap CSInt_{ij} \quad \forall\, i, j$, за яких зберігається найкраща альтернатива та допустима неузгодженість МПП, та інтервали стійкості $SInt_{ij}^{all\ rank} = RSInt_{ij}^{all\ rank} \bigcap CSInt_{ij} \quad \forall\, i, j$, за яких зберігається все ранжування та допустима неузгодженість МПП.
4. Шукані індекси стійкості $\delta_{ij} = \min((\underline{SInt_{ij}})^{-1}, \overline{SInt_{ij}})$ і $\delta_{ij}^{all\,rank} = \min((\underline{SInt_{ij}^{all\,rank}})^{-1}, \overline{SInt_{ij}^{all\,rank}})$, $\forall\, i, j$.

На основі знайдених індексів стійкості шукаються експертні оцінки парних порівнянь, які найбільшою мірою впливають на зміну локального ранжування альтернатив рішень та зміну рівня узгодженості множини оцінок.

Глобальний аналіз чутливості результатів, отриманих МАІ

Нехай ієрархічна модель прийняття рішень складається з двох рівнів: критерії та альтернативи.

Дано:

- $A = \{a_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ - множина альтернативних варіантів рішень;
- $C = \{C_j \mid j = 1, \ldots, m\}$ - множина критеріїв (цілей);
- $W^C = \{w_j^C\}$, w_j^C - вага критерію C_j, $\sum_{j=1}^{m} w_j^C = 1$.
- $W = \{w_{ij}\}$, w_{ij} - вага a_i відносно C_j;
- $W^{глоб} = \{w_i^{глоб}\}$, $w_i^{глоб}$ - глобальна вага альтернативи a_i;

Потрібно оцінити чутливість ранжування на основі глобальних ваг альтернатив $W^{глоб}$ до змін у вагах критеріїв W^C.

Приклад. Оцінювання чутливості розв'язку задачі визначення відносної привабливості альтернативних варіантів інвестицій (розподіл ресурсів)

Варіанти інвестицій: відкритий пайовий інвестиційний фонд (ПІФ) (a_1); депозит (a_2); готівка (a_3).

Цілі інвестора (табл. 1.1): збереження принципів (c_1); зростання (приріст прибутку) (c_2); мінімізація ризику (c_3); зусилля на управління (c_4).

Локальні і глобальні ваги альтернатив наведені в табл. 1.2 і 1.3.

Таблиця 1.1 - Оцінювання цілей інвестора

	Збереження принципів	Зростання (приріст прибутку)	Мінімізація ризику	Зусилля на управління	Вага
Збереження принципів	1	1/5	1/5	1	0.094
Зростання (приріст прибутку)	5	1	3	3	0.509
Мінімізація ризику	5	1/3	1	1	0.243
Зусилля на управління	1	1/3	1	1	0.154
	$\lambda_{\max}$ =4.264, CR=0.1				

Таблиця 1.2 - Оцінювання варіантів відносно цілей

c_1	a_1	a_2	a_3	Вага
a_1	1	1/5	1/5	0.090
a_2	5	1	1	0.455
a_3	5	1	1	0.455
				CR=0

c_2	a_1	a_2	a_3	вага
a_1	1	3	7	0.649
a_2	1/3	1	5	0.279
a_3	1/7	1/5	1	0.072
				CR=0.062

c_3	a_1	a_2	a_3	вага
a_1	1	1/7	1/7	0.065
a_2	7	1	1/2	0.361
a_3	7	2	1	0.574
				CR=0.052

c_4	a_1	a_2	a_3	вага
a_1	1	1/3	1/5	0.114
a_2	3	1	1	0.405
a_3	5	1	1	0.481
				CR=0.028

Таблиця 1.3 – Ваги альтернатив інвестицій відносно часткових цілей і головної цілі прийняття рішення

	Збереження принципів (0.094)	Зростання (приріст прибутку) (0.509)	Мінімізація ризику (0.243)	Зусилля на управління (0.154)	Ваги відносно головної цілі	
					Дистрибутивний синтез	Мультиплікативний синтез
Відкритий ПІФ	0.090	0.649	0.065	0.114	0.372	0.312
Депозит	0.455	0.279	0.361	0.405	0.335	0.436
Готівка	0.455	0.072	0.574	0.481	0.293	0.252

Графічні методи АЧ глобальних ваг альтернатив рішень до змін ваг критеріїв

1) АЧ виконання. Будується графічне представлення задачі ППР, у якому ваги критеріїв (цілей) позначаються стовпчиковою діаграмою у лівій шкалі (рис.4.1), а локальні ваги альтернатив за кожним з критеріїв – відмітками на вертикальних лініях критеріїв в правій шкалі. Також на правій шкалі позначені глобальні ваги альтернатив.

В даному прикладі альтернатива a_1 краща за інші альтернативи лише за одним критерієм з чотирьох, але отримала найбільшу глобальну вагу. Оптимальність альтернативи залежить від ваг критеріїв. При поточних оцінках переваг оптимальною є альтернатива a_1, тобто інвестору слід вкладати кошти у відкритий ПІФ. Однак, якщо, збільшиться вага цілі «мінімізація ризику», то оптимальною може стати альтернатива a_2.

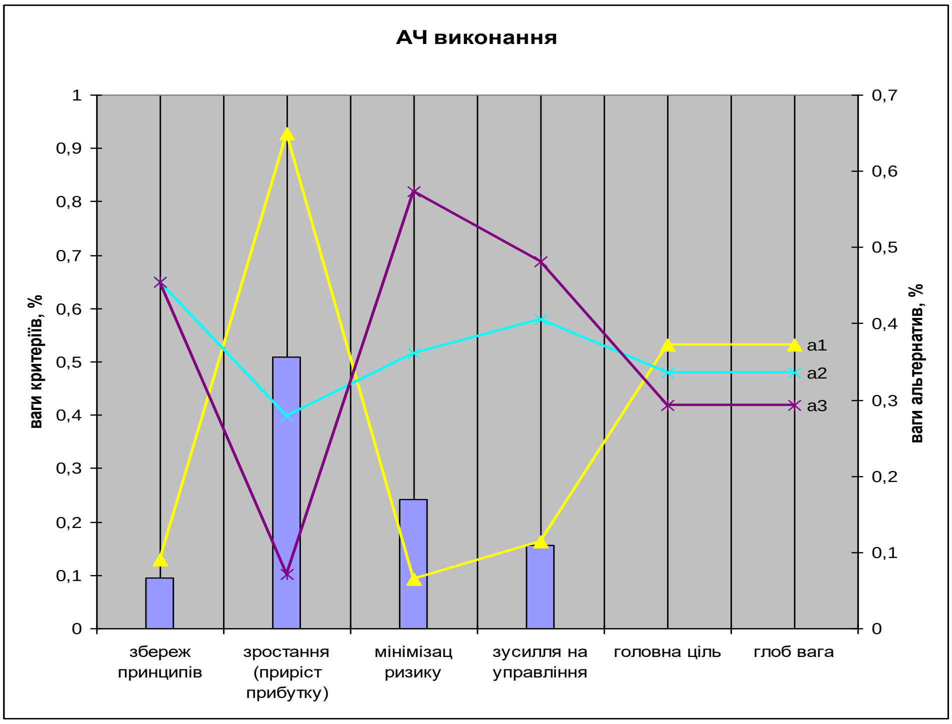


Рис.4.1 - АЧ виконання

Локальні і глобальні ваги виміряні у шкалі відношень. Це означає, що крім ранжування альтернатив за кожним з критеріїв та загального ранжування альтернатив, нам відомі також інтервали і відношення між оцінками альтернатив.

Розглянемо, наприклад, критерій «збереження принципів». Альтернативи a_2 і a_3 мають однакове виконання за цим критерієм, в той час як інтервал між альтернативами a_1 і a_2 за цим критерієм є великим. Інтервали між оптимальною альтернативою a_1 і наступною оптимальною альтернативою a_2 є великими за кожним з критеріїв. Це є важливою інформацією.

АЧ виконання наглядно представляє умову і результати задачі ППР.

2) Градієнтний АЧ. Для кожного з критеріїв задачі ППР будується графік, на якому по осі абсцис відкладається значення можливої ваги цього критерію в інтервалі [0, 1], а по осі ординат – глобальні ваги альтернатив рішень (рис.4.2). За допомогою цього інструменту досліджується чутливість ранжування на основі глобальних ваг альтернатив до зміни ваги одного фіксованого критерію.

Градієнт лінії альтернативи у точці показує процентне відношення зміни глобальної ваги альтернативи при зміні ваги даного критерію.

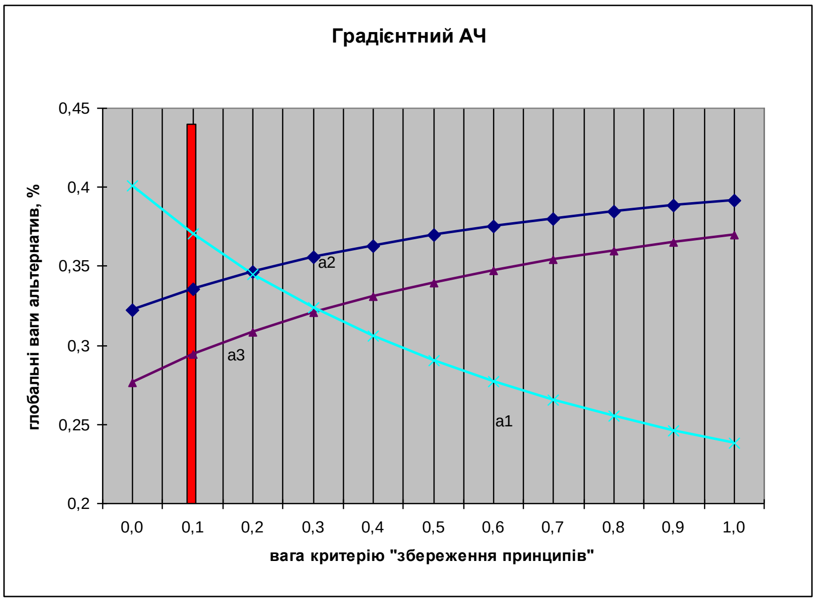


Рис.4.2. Градієнтний АЧ

Розглянемо, наприклад, критерій c_1 «збереження принципів». Поточна важливість цього критерію дорівнює 0.09, про що свідчить вертикальна червона лінія на рис.4.2. При вазі критерію «збереження принципів» рівній $w_1^C = 0.09$, оптимальною є альтернатива a_1. При зменшенні ваги w_1^C глобальна важливість a_1 зменшується, а глобальна важливість a_2, навпаки, збільшується. Якщо вага критерію «збереження принципів» стає меншою за 0.2, то оптимальною стає альтернатива a_2. Для такої зміни оптимальної альтернативи вага критерію має змінитися на 100% (0.09 + 1*0.09=0.2), тобто для зміни оптимальної альтернативи потрібно суттєво змінити вагу критерію.

3) Динамічний АЧ. Ваги критеріїв та глобальні ваги альтернатив відображаються на двох лінійчатих діаграмах. Користувач може змінювати вагу одного з критеріїв, рухаючи відповідний елемент діаграми (ваги інших критеріїв при цьому змінюються пропорційно до своїх початкових значень) та спостерігати як на другій діаграмі змінюються глобальні ваги альтернатив.

4) Різницевий АЧ. Для кожної пари альтернатив рішень будується лінійна діаграма, на якій зображуються різниці локальних ваг цих альтернатив за кожним з критеріїв рішень та глобальних ваг цих альтернатив (рис.4.3).

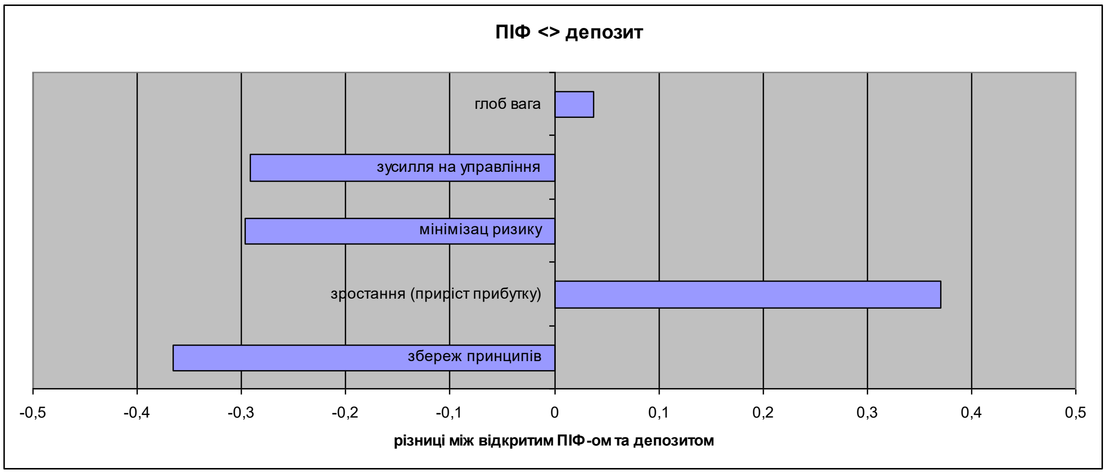


Рис.4.3. Різницевий АЧ

В даному прикладі альтернатива a1 «ПІФ» сильно перевищує альтернативу a2 «депозит» за критерієм «зростання». За іншими трьома критеріями a2 «депозит» в значній мірі важливіша за a1 «ПІФ». Оскільки важливість критерію «зростання» рівна 0.509 і перевищує сумарну важливість всіх інших критеріїв, глобальна вага a1 «ПІФ» більша за глобальну вагу a2 «депозит», проте, як бачимо з рис.4.3, ця перевага незначна.

Розвинений метод комплексного оцінювання чутливості результатів, отриманих МАІ

Нехай H – ієрархія, яка має $p+1$ рівень. Кількість елементів L_k-го рівня позначимо N_{L_k}, $L_k \in [L_0; L_p]$. Позначимо $D_r^{L_k L_{k-1}}$ — МПП елементів L_k-го рівня ієрархії відносно r-го елементу L_{k-1}-го рівня, $r \in [1; N_{L_{k-1}}]$; $\hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}}$ — локальна вага l-го елементу L_k-го рівня відносно r-го елементу L_{k-1}-го рівня, $l \in [1; N_{L_k}]$, $r \in [1; N_{L_{k-1}}]$. Глобальні ваги елементів L_k-го рівня ієрархії позначимо $\hat{w}_l^{L_k}$, $l \in [1; N_{L_k}]$. Згідно із МАІ, вони обчислюються на основі локальних ваг $\hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}}$ за принципом ієрархічної композиції. Глобальні ваги $\hat{w}^{L_p} = \{\hat{w}_i^{L_p} \mid i \in [1; N_{L_p}]\}$ альтернативних варіантів рішень – елементів останнього рівня є результатом роботи МАІ. Необхідно оцінити чутливість ранжування, отриманого на основі вектора рішення $\hat{w}^{L_p}$ до неточностей та протиріч в елементах МПП $D_r^{L_k L_{k-1}}$.

Розвинений метод комплексного оцінювання чутливості глобального ранжування альтернатив рішень складається з етапів [2]:

1 оцінити стійкість локальних ранжувань на основі векторів $\hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}}$ до змін в елементах матриць $D_r^{L_k L_{k-1}}$, розрахувати інтервали та індекси стійкості локальних ранжувань;

2 оцінити стійкість кожного елемента матриць $D_r^{L_k L_{k-1}}$ щодо збереження узгодженості матриці $D_r^{L_k L_{k-1}}$, розрахувати інтервали та індекси стійкості елементів цих матриць щодо збереження узгодженості;

3 знайти експертні оцінки парних порівнянь, які найбільшою мірою впливають на зміну локального ранжування альтернатив рішень та зміну рівня узгодженості множини оцінок;

4 оцінити чутливість глобального ранжування альтернатив рішень до зміни ваг елементів ієрархії;

5 знайти чутливі та стійкі елементи L_k -го рівня ієрархії.

Для фіксованої МПП $D_r^{L_k L_{k-1}}$ експертною оцінкою парних порівнянь, яка найбільшою мірою впливає на зміну локального ранжування альтернатив рішень, є оцінка, яка має найменше значення індексу стійкості:

$$I_{ij} = \min((\underline{RInt_{ij}})^{-1}, \overline{RInt_{ij}}),$$

де $\underline{RInt_{ij}}$ і $\overline{RInt_{ij}}$ – кінці інтервалу стійкості $RSInt$, $i, j = 1,...,n$.

Для фіксованої МПП $D_r^{L_k L_{k-1}}$ *експертною оцінкою парних порівнянь, яка найбільшою мірою впливає на зміну рівня узгодженості множини оцінок*, є оцінка (елемент МПП), що має найменше значення індексу стійкості [2]:

$$I_{ij} = \min((\underline{CInt_{ij}})^{-1}, \overline{CInt_{ij}}),$$

де $\underline{CInt_{ij}}$ і $\overline{CInt_{ij}}$ – кінці інтервалу стійкості $CSInt$, $i, j = 1,...,n$.

Індексом стійкості критерія c_l в ієрархічній моделі *до зміни глобального ранжування* альтернатив рішень називається [2]

$$SVal(c_l) = \min_{i<j} (|\,\delta_{i,j,l}\,|)$$

де $\delta_{i,j,l}$ – величина відносної зміни глобальної ваги елемента c_l, що призводить до зміни глобального ранжування між альтернативами a_i і a_j, $i, j = 1,...,n$, $l = 1,...,m$. Формули для розрахунку $\delta_{i,j,l}$ наведено в [1].

Елементом L_k*-го рівня ієрархії, який найбільшою мірою впливає на зміну глобального ранжування альтернатив рішень* є той, що має найменше значення індексу стійкості $SVal(c_l)$.

Індексом стійкості i*-ї альтернативи* відносно r-го елементу L_{p-1}-го рівня ієрархічної моделі задачі ППР [2]:

$$C_{ir}^{a} = \min_{\substack{j \in [1; N_{L_p}] \\ j \neq i}} \left\{ \left| \delta_{i,j,r}^{a} \right| \right\}.$$

Альтернативою, яка найбільшою мірою впливає на зміну глобального ранжування альтернатив рішень, є та, що має найменше значення індексу стійкості C_{ir}^{a} для всіх $i \in [1; N_{L_p}]$, $r \in [1; N_{L_{p-1}}]$.

Приклад. *Знаходження діапазонів змін ваг критеріїв, які призводять до змін рангів альтернатив в задачі оцінювання привабливості інвестицій*

Дистрибутивний метод

Згідно з розв’язком, отриманим дистрибутивним методом, отримали ранжування альтернатив інвестицій:

$$a_1 \succ a_2 \succ a_3 .$$

Найважливішим серед чотирьох критеріїв є *критерій* C_2 *«зростання»,* його вага дорівнює 0.509. Знайдемо порогове значення відносної зміни ваги цього критерію, що призводить до зміни ранжування між, наприклад, альтернативами a_1 і a_2. Ця величина обчислюється за формулою

$$\delta_{1,2,2}^{пороз} = \frac{0.335 - 0.372}{0.279 - 0.649} \cdot \frac{1}{0.509} = 0.198 .$$

Додатне значення величини $\delta_{1,2,2}^{пороз}$ свідчить про те, що *вага критерію «зростання» має бути зменшена* для зміни ранжування між альтернативами a_1 і a_2. Відносна величина цього зменшення дорівнює 19.8%.

Так як $w_{22} < w_{12}$, то $\delta_{1,2,2} > \delta_{1,2,2}^{пороз} = 0.198$. Таким чином, діапазон відносних значень змін ваг C_2, що призводить до зміни ранжування між a_1 і a_2, дорівнює

$$\delta_{1,2,2} \in (0.198;\ 1.000).$$

Наприклад, нехай переваги інвестора змінилися і важливість критерію C_2 для нього зменшилася до 0.407 (тобто, на 20%). Після перенормування ваги критеріїв будуть дорівнювати $w_1^C = 0.105$, $w_2^C = 0.453$, $w_3^C = 0.271$, $w_4^C = 0.171$. Тоді глобальні ваги альтернатив: $w_1^{глоб} = 0.341$, $w_2^{глоб} = 0.341$, $w_3^{глоб} = 0.318$. Відносні значення змін ваг усіх досліджуваних критеріїв, що призводять до змін ранжувань між різними парами альтернатив, наведені в таблиці:

Таблиця – Порогові значення $\delta_{i,j,l}^{пороз}$ (дистрибутивний метод)

Пара альтернатив (i, j)	$\delta_{i,j,l}^{пороr}$, %			
	C_1	C_2	C_3	C_4
(1,2)	-108.7*	19.8	-51.8	-83.2
(1,3)	-230.8	27.0	-64.0	-140.1
(2,3)	-	39.8	-81.0	-358.0

* Від'ємне значення величини $\delta_{i,j,l}^{пороr}$ свідчить про те, що вага критерію C_l має бути збільшена для зміни ранжування між альтернативами a_i та a_j.

Згідно з означенням, найбільш чутливий критерій для зміни оптимальної альтернативи визначається як мінімальне значення відносних змін ваг в рядках попередньої таблиці, що відповідають оптимальній альтернативі a_1. Це мінімальне значення (рівне 19.8%) відповідає критерію C_2 при розгляді альтернатив a_1 і a_2. Таким чином, зменшення ваги критерію C_2 на 19.8% призводить до зміни оптимальної альтернативи, нею стає a_2. Критерій C_2 - найбільш чутливий до зміни ваги, за ним іде критерій C_3, потім C_4 і останній - C_1:

Таблиця – Ступені критичності $CritVal$ та чутливості $SensVal$ критеріїв (дистрибутивний синтез)

Критерій	$CritVal$, %	$SensVal$
C_1	108.7	0.009
C_2	19.8	0.051
C_3	51.8	0.019
C_4	83.2	0.012

Мультиплікативний метод

Глобальні ваги альтернатив за мультиплікативним методом дорівнюють $w_1^{глоб} = 0.312$, $w_2^{глоб} = 0.436$, $w_3^{глоб} = 0.252$, тобто, оптимальною є альтернатива a_2:

$$a_2 \succ a_1 \succ a_3 .$$

Відносні значення змін ваг критеріїв, що призводять до зміни отриманого ранжування при використанні мультиплікативного синтезу наведені в таблиці нижче.

Таблиця– Порогові значення $\delta_{i,j,l}^{порог}$ (мультиплікативний синтез)

Пара альтернатив (i, j)	$\delta_{i,j,l}^{порог}$, %			
	C_1	C_2	C_3	C_4
(1,2)	-	-77.8	80.3	-
(1,3)	-141.7	19.3	-40.8	-97.3
(2,3)	-	79.8	-488.3	-

Наприклад, величина $\delta_{1,3,2}^{порог}$ відносної зміни ваги критерію C_2, що призводить до зміни ранжування між a_1 і a_3 обчислюється за формулою:

$$\delta_{1,3,2}^{порог} = \frac{\ln(0.312) - \ln(0.252)}{\ln(0.649) - \ln(0.072)} \cdot \frac{1}{0.509} = 0.193,$$

$$\Rightarrow \delta_{1,3,2} \in (19.3\%;\ 100\%).$$

Дійсно, при відносному зменшенні ваги C_2, наприклад, на 20%, нова вага буде дорівнювати $(w_2^C)' = 0.509 - 0.2 \cdot 0.509 = 0.407$. Тоді глобальні ваги альтернатив: $w_1^{глоб} = 0.277$, $w_2^{глоб} = 0.443$, $w_3^{глоб} = 0.280$.

Найбільш чутливий критерій для зміни оптимальної альтернативи a_2 визначається як мінімальне за модулем значення відносних змін ваг в рядках попередньої таблиці, що відповідають оптимальній альтернативі a_2. Це мінімальне значення (рівне 77.8%) відповідає критерію C_2 при розгляді альтернатив a_1 і a_2. Збільшення ваги критерію C_2 більш ніж на 77.8% призводить до зміни оптимальної альтернативи, нею стає a_1.

Таблиця – Ступені критичності $CritVal$ та чутливості $SensVal$ критеріїв (мультиплікативний синтез)

Критерій	$CritVal$, %	$SensVal$
C_1	141.7	0.007
C_2	19.3	0.052
C_3	40.8	0.025
C_4	97.3	0.010

Як свідчить попередня таблиця, найбільш чутливим для зміни ранжування між будь-якими двома досліджуваними альтернативами також є критерій C_2: відносної зміни його ваги, рівної 19.3%, достатньо для зміни ранжування між неоптимальними альтернативами a_1 і a_3.

Критерій C_2 - найбільш чутливий до зміни ваги, за ним іде критерій C_3, потім C_4 і останній - C_1.

Приклад. *Розрахувати інтервали стійкості для елементів наступної матриці парних порівнянь:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Відносний інтервал стійкості (CRSI) $\left[\underline{\delta_{rs}}(\Delta), \overline{\delta_{rs}}(\Delta)\right]$ для елементу a_{rs} матриці парних порівнянь (МПП) – це діапазон, в межах якого може змінюватися оцінка експерта (елемент a_{rs}) так, що міра неузгодженості всієї матриці не перевищує заздалегідь заданого порогового значення $\Delta > 0$: $GCI' - GCI < \Delta$, GCI' − нове значення GCI після зміни оцінки d_{rs}.

Інтервал стійкості (CSI) елементу a_{rs} при заданому $\Delta > 0$ визначимо $\left[\underline{d_{rs}}(\Delta), \overline{d_{rs}}(\Delta)\right]$, де $\underline{d_{rs}}(\Delta) = a_{rs}\underline{\delta_{rs}}(\Delta)$, $\overline{d_{rs}}(\Delta) = a_{rs}\overline{\delta_{rs}}(\Delta)$.

Знайдемо інтервали стійкості для кожного елементу заданої МПП за критерієм узгодженості при використанні методу RGMM розрахунку ваг і міри неузгодженості $GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}\ln^2 e_{ij}$, де $e_{ij} = a_{ij}v_j / v_i$.

Знайдемо значення геометричного індексу узгодженості GCI заданої МПП. Вектор ненормованих ваг v за методом RGMM: $v = (\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{3/2}, \sqrt[3]{1/15})$. Матриця помилок $E = \{(e_{ij}) \mid i, j = 1,...,n\}$:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt[3]{6/5} & \sqrt[3]{5/6} \\ \sqrt[3]{5/6} & 1 & \sqrt[3]{6/5} \\ \sqrt[3]{6/5} & \sqrt[3]{5/6} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$GCI(A) = \frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}\ln^2 e_{ij} = (\ln\sqrt[3]{6/5})^2 = 0.011.$$

При $n = 3$ порогове значення GCI для допустимої неузгодженості МПП дорівнює GCI^{porog}=0.31. Тому задамо величину Δ наступним чином:

$$\Delta = GCI^{porog} - GCI(A) = 0.30.$$

Для елементу a_{rs} МПП A кінці відносного інтервалу стійкості $CRSI$ при заданому D розраховується наступним чином:

$$\underline{\delta_{rs}}(\Delta) = e^{n\ln\rho_{\min}},\ \underline{\delta_{rs}}(\Delta) = e^{n\ln\rho_{\max}},$$

де $[\ln \rho_{\min}, \ln \rho_{\max}]$ – інтервал для $\ln \rho_{rs}$, який визначається з наступної нерівності другого порядку:

$$\frac{2n}{(n-1)(n-2)}\left[(n-2)\ln^2 \rho_{rs} + 2\ln e_{rs} \ln \rho_{rs}\right] \le \Delta .$$

Запишемо цю нерівність для елементу a_{12} нашої МПП та $\Delta = 0.3$:

$$3(\ln^2 \rho_{12} + 2\ln e_{12} \ln \rho_{12}) \le 0.3.$$

Розв'язавши її, отримаємо відносний інтервал стійкості *CRSI* для елементу a_{12}: $[\ln \rho_{\min}, \ln \rho_{\max}] = [-0.383, 0.261]$,

$\underline{\delta_{12}}(\Delta) = \exp(-3 \cdot 0.383) = 0.317$, $\overline{\delta_{12}}(\Delta) = \exp(3 \cdot 0.261) = 2.190$,

таким чином, $\left[\underline{\delta_{12}}(\Delta), \overline{\delta_{12}}(\Delta)\right] = [0.317, 2.190]$.

Звідси отримаємо інтервал *CSI:* $a'_{12} \in [0.634, 4.380]$,

та *індекс стійкості* $\delta_{rs} = \min\left\{\underline{\delta_{rs}}^{-1}, \overline{\delta_{rs}}\right\} : \delta_{12} = 2.190$.

Аналогічно розраховуються інтервали та індекси стійкості для інших елементів МПП A:

Елемент МПП	Значення	*CRSI*	*CSI*	δ_{rs}
a_{12}	2	[0.317, 2.190]	[0.634, 4.380]	2.190
a_{13}	5	[0.457, 3.153]	[2.285, 15.765]	2.190
a_{23}	3	[0.317, 2.190]	[0.951, 6.570]	2.190

Відносний інтервал стійкості – процент зміни початкової оцінки, припустимий при прийнятому рівні неузгодженості. У випадку коли інтервал стійкості *CSI* елементу МПП виходить за межі фундаментальної шкали

$\{1/9,\ldots,9\}$ (випадок a_{13}), дозволяється будь-яке збільшення елементу в цій шкалі без втрати допустимої неузгодженості.

2 Порядок виконання роботи

2.1. Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2. Для заданих матриць парних порівнянь (МПП) згідно з варіантом:

- розрахувати інтервали та індекси стійкості для всіх елементів МПП, за яких зберігається найкраща альтернатива та все локальне ранжування альтернатив,
- знайти елементи МПП, які найбільшою мірою впливають на зміну локального ранжування альтернатив рішень,
- знайти, як рівень узгодженості МПП впливає на ширину розрахованих інтервалів та значення індексів стійкості.

2.3. Для заданих матриць парних порівнянь згідно з варіантом:

- розрахувати інтервали та індекси стійкості для всіх елементів МПП, за яких зберігається узгодженість МПП,
- знайти елементи МПП, які найбільшою мірою впливають на зміну рівня узгодженості МПП,
- знайти, як рівень узгодженості МПП впливає на ширину розрахованих інтервалів та значення індексів стійкості.

2.4. Для багатокритеріальної задачі прийняття рішення згідно з варіантом:

- розрахувати глобальні ваги альтернатив методами дистрибутивного або мультиплікативного агрегування (згідно з варіантом),
- дослідити чутливість глобальних ваг альтернатив до змін ваг критеріїв графічними методами,
- знайти найбільш чутливий та стійкий критерії.

2.5. Для багатокритеріальної задачі прийняття рішення згідно з варіантом:

- розрахувати глобальні ваги альтернатив методами дистрибутивного або мультиплікативного агрегування (згідно з варіантом),

- розрахувати діапазони змін ваг критеріїв, за яких має місце зміна глобального ранжування альтернатив,

- розрахувати індекси стійкості критеріїв до зміни глобального ранжування альтернатив рішень,

- знайти, який з критеріїв найбільшою мірою впливає на зміну глобального ранжування альтернатив рішень.

2.6. Зробити висновки по роботі.

2.7. Дати відповіді на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

Звіт має містити:

1. Завдання до роботи згідно з варіантом.
2. Проміжні та кінцеві результати розрахунків згідно із завданням.
3. Текст програми, яка реалізує завдання, скріншоти вікон з результатами.
4. Конкретні висновки по роботі на основі проведеного аналізу.

Варіанти завдань

№	Пункт порядку виконання роботи	№ практичної задачі підтримки прийняття рішень
1	2.2	1
2	2.3	1
3	2.4 (дистрибутивний метод)	2
4	2.5 (дистрибутивний метод)	3

5	2.4 (мультиплікативний метод)	4
6	2.5 (мультиплікативний метод)	5
7	2.2	6
8	2.3	6
9	2.4 (дистрибутивний метод)	7
10	2.5 (дистрибутивний метод)	8
11	2.4 (мультиплікативний метод)	9
12	2.5 (мультиплікативний метод)	10
13	2.2	12
14	2.3	12
15	2.4 (дистрибутивний метод)	11
16	2.5 (дистрибутивний метод)	13
17	2.4 (мультиплікативний метод)	14
18	2.5 (мультиплікативний метод)	15
19	2.2	16
20	2.3	16
21	2.4 (дистрибутивний метод)	17
22	2.5 (дистрибутивний метод)	17
23	2.4 (мультиплікативний метод)	18
24	2.5 (мультиплікативний метод)	18
25	2.2	19
26	2.3	19

Задачі підтримки прийняття рішень

Варіант 1

$$D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1/2 & 2 & 3 \\ 1/9 & 1 & 1/8 & 1/8 & 1/3 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 8 \\ 1/2 & 8 & 1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 3 & 1/8 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2 & 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 2

Необхідно вибрати оптимальний канал для розміщення реклами на телебаченні. Ваги каналів за критеріями «ціна розміщення», «популярність каналу», «відповідність аудиторії рекламованому товару» наведені в таблиці. Ваги критеріїв дорівнюють 0.5, 0.3 і 0.2.

Канали	Критерії		
	Ціна розміщення*	Популярність каналу	Відповідність аудиторії
Канал 1	0.25	0.22	0.36
Канал 2	0.25	0.32	0.26
Канал 3	0.40	0.09	0.10
Канал 4	0.10	0.37	0.28

* Критерій «Ціна» потребує мінімізації в тому розумінні, що вибирати слід канал з найменшою ціною, на відміну від критеріїв «популярність» та «відповідність аудиторії», які необхідно максимізувати. У зв'язку з цим, ваги каналів за критерієм «ціна» інтерпретуються наступним чином: ціна четвертого каналу є найбільшою (тому його вага – найменша за цим критерієм), ціна третього каналу є найменшою (тому його вага – найбільша). Ціни розміщення реклами на першому і другому каналах знаходяться десь посередині між цінами попередніх двох каналів.

Варіант 3

Необхідно вибрати найкраще обладнання за критеріями «вартість», «надійність» і «продуктивність». Ваги критеріїв дорівнюють 0.25, 0.45 і 0.30. Відомо, що перший варіант обладнання є найбільш надійним, але його продуктивність – найнижча серед всіх трьох варіантів, а ціна – середня. Другий варіант має найнижчу ціну, середню надійність та продуктивність. Надійність третього варіанту обладнання – найнижча, а продуктивність –

найбільша серед варіантів, що розглядаються. Ваги кожного варіанту обладнання за трьома критеріями наведені в таблиці.

Обладнання	Критерії		
	Вартість	Надійність	Продуктивність
Обладнання 1	0.35	0.5	0.25
Обладнання 2	0.45	0.3	0.35
Обладнання 3	0.20	0.2	0.40

Варіант 4

Необхідно розподілити фінансування між трьома варіантами деякого інноваційного товару. Оцінювання товарів здійснюється за критеріями «економічна ефективність», «конкурентоспроможність», «перспективність попиту» і «технологічна складність». Ваги критеріїв: 0.35, 0.25, 0.25 і 0.15. За результатами експертного оцінювання встановлено, що перший товар має найбільшу економічну ефективність серед усіх трьох варіантів, але технологічно складний для виробництва і має невелику конкурентоспроможність. Найменш технологічно складним є третій товар, але його економічна ефективність та перспективність попиту – найнижчі. Ваги варіантів товарів за критеріями наведені в таблиці.

Інноваційний товар	Критерії			
	Економічна ефективність	Конкуренто-спроможність	Перспективність попиту	Технологічна складність
Товар 1	0.5	0.25	0.4	0.25
Товар 2	0.3	0.50	0.4	0.25
Товар 3	0.2	0.25	0.2	0.50

Варіант 5

Нехай інвестор оцінює акції деякої компаній і хоче спрогнозувати яким буде розподіл ймовірностей зміни ціни на них. Він розглядає наступні можливі варіанти зміни ціни: впаде на 20%, впаде на 10%, залишиться незмінною, зросте на 10%. Оцінки кожного варіанту за результатами проведених фундаментального та технічного аналізу, а також аналізу циклів наведені в таблиці. Результати, отримані різними методами, є для інвестора однаково важливими.

Варіанти зміни ціни	Критерії		
	Фундаментальний аналіз	Технічний аналіз	Аналіз циклів
Впаде на 20%	0.1	0.1	0.15
Впаде на 10%	0.2	0.2	0.25
Залишиться незмінною	0.3	0.3	0.35
Зросте на 10%	0.4	0.4	0.25

Варіант 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 & 3 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 7

Задача полягає у виборі оптимальної моделі альянсу між банком і страховими компаніями за критеріями «співвідношення доходи/витрати», «управління зв’язками з клієнтами», «джерела конфліктів» і «майбутні економії у зв’язку із зростанням портфеля послуг». Ваги критеріїв: 0.50, 0.20, 0.10 і 0.20. Ненормовані ваги кожної моделі альянсу за вказаними критеріями наведені нижче.

Модель альянсу	Критерії			
	Співвідно-шення доходи/витрати	Управління зв’язками з клієнтами	Джерела конфліктів	Майбутні економії у зв’язку із зростанням портфеля послуг
М 1	1	4	5	4
М 2	3	2	3	3
М 3	6	2	2	1

Варіант 8

Необхідно вибрати один з чотирьох методів діагностування за критеріями «якість діагностування», «витрати» і «ступінь інтегрованості методу». Ваги кожного методу діагностування за вказаними критеріями наведені в таблиці. Коефіцієнти відносної важливості критеріїв дорівнюють 0.3, 0.5 і 0.2.

Методи діагностування	Критерії		
	Якість діагностування	Витрати	Ступінь інтегрованості методу
Метод 1	0.3	0.2	0.3
Метод 2	0.1	0.4	0.2
Метод 3	0.5	0.1	0.2
Метод 4	0.1	0.3	0.3

Варіант 9

Задача полягає у виборі постачальника системи телекомунікацій за критеріями «капітальні витрати», «операційні витрати» і «якість». Коефіцієнти відносної важливості критеріїв дорівнюють 0.3, 0.3 і 0.4. Ваги альтернативних варіантів постачальників за критеріями наступні:

Постачальники	Критерії		
	капітальні витрати	операційні витрати	якість
П 1	0.20	0.30	0.25
П 2	0.45	0.25	0.15
П 3	0.10	0.15	0.50
П 4	0.25	0.30	0.10

Варіант 10

Задача полягає у виборі мультимедійної інформаційної системи за критеріями «задоволення очікувань керівництва: ефективність витрат» (вага 0.25), «задоволення очікувань керівництва: підтримка постачальників» (вага 0.25) та «технічні можливості» (вага 0.50). Ненормовані ваги інформаційних систем за вказаними критеріями наведені в таблиці.

Альтернативи	Критерії		
	ефективність витрат	підтримка постачальників	технічні можливості
ІС 1	4	3	3
ІС 2	5	1	2
ІС 3	1	3	4
ІС 4	3	2	3

Варіант 11

Задача полягає у виборі устаткування для медичного підприємства за критеріями «безпека» (вага 0.3), «клінічні фактори» (вага 0.2), «біомедична інженерія» (0.1) і «витрати» (вага 0.4). Ваги альтернатив устаткування за критеріями наступні:

Варіанти устаткування	Критерії			
	безпека	клінічні фактори	біомедична інженерія	витрати
1	0.50	0.25	0.4	0.20
2	0.15	0.50	0.4	0.45
3	0.35	0.25	0.2	0.35

Варіант 12

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1 & 1/6 & 1/8 \\ 6 & 1 & 3 & 1/2 & 2 \\ 1 & 1/3 & 1 & 1/9 & 1/4 \\ 6 & 2 & 9 & 1 & 1/2 \\ 8 & 1/2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 1/7 & 1/9 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 6 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 13

Задача полягає у розрахунку рейтингів журналів за критеріями «ефективність» (вага 0.35), «фокус» (вага 0.15), «вплив» (вага 0.20) і «масштаб» (вага 0.30). Ваги досліджуваних журналів за критеріями наступні:

Журнали	Критерії			
	ефективність	фокус	вплив	масштаб
1	0.1	0.1	0.30	0.25
2	0.2	0.2	0.25	0.15
3	0.3	0.3	0.15	0.50
4	0.4	0.4	0.30	0.10

Варіант 14

Необхідно оцінити бізнес-договори компанії за критеріями «заощадження витрат», «гнучкість», «фокус на основній діяльності», «ризик». Коефіцієнти відносної важливості критеріїв дорівнюють 0.35, 0.30, 0.20 і 0.15. Ваги альтернативних варіантів договорів за критеріями:

Бізнес-договори	Критерії			
	заощадження витрат	гнучкість	фокус на основній діяльності	ризик
1	0.25	0.20	5	1
2	0.25	0.30	2	2
3	0.40	0.10	4	3
4	0.10	0.40	2	4

Варіант 15

Необхідно розподілити ресурси між освітніми науково-дослідними проектами, використовуючи наступні критерії: «рівень обґрунтованості та потреба», «тривалість», «масштаб (кількість залучених представників професорсько-викладацького штату, студентів тощо)», «інновації». Ваги критеріїв дорівнюють 0.35, 0.20, 0.30 і 0.15. Ваги проектів за критеріями:

Освітні НД проекти	Критерії			
	рівень обґрунтованості та потреба	тривалість	масштаб	інновації
1	0.20	1	0.35	0.20
2	0.30	1	0.25	0.40
3	0.40	2	0.10	0.25
4	0.10	1	0.30	0.15

Варіант 16

$$D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 2 & 3 \\ 1/3 & 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1/2 & 1/5 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/2 & 1/2 & 2 \\ 1/5 & 2 & 1 & 1/3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D^3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 1/2 & 2 & 5 \\ 1/9 & 1 & 1/9 & 1/9 & 1/3 \\ 2 & 9 & 1 & 1/2 & 7 \\ 1/2 & 9 & 2 & 1 & 5 \\ 1/5 & 3 & 1/7 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 17

Необхідно оцінити долі ринку трьох компаній-конкурентів за групами критеріїв «реклама», «місце розташування», «групи споживачів», «продукція». Коефіцієнти відносної важливості критеріїв дорівнюють 0.20, 0.10, 0.35 і 0.35. Ненормовані ваги компаній за критеріями:

Компанії	Критерії			
	реклама	місце розташування	групи споживачів	продукція
1	4	1	5	3
2	3	1	4	5
3	2	2	2	2

Варіант 18

Задача полягає в оцінюванні долі ринку п’яти авіакомпаній за групами критеріїв «сервіси», «комфорт», «витрати». Ваги груп критеріїв дорівнюють 0.40, 0.25 і 0.35. Ваги авіакомпаній за групами критеріїв:

Авіакомпанії	Групи критеріїв		
	сервіси	комфорт	витрати
1	0.25	0.30	0.15
2	0.35	0.20	0.10
3	0.20	0.20	0.20
4	0.10	0.20	0.20
5	0.10	0.10	0.35

Варіант 19

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1/3 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 1/5 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 1/7 & 1 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1/2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1/5 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/7 & 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1/3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 4 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1. Наведіть постановку задачі локального аналізу чутливості результатів, отриманих на основі ієрархічної моделі.
2. Дайте означення інтервалів та індексів стійкості щодо збереження локального ранжування та збереження узгодженості.
3. Наведіть етапи розрахунку інтервалів стійкості локального ранжування альтернатив.
4. Наведіть постановку задачі розрахунку інтервалів стійкості експертних оцінок, які зберігають узгодженість матриці парних порівнянь.
5. Наведіть етапи розрахунку інтервалів стійкості експертних оцінок, які зберігають узгодженість матриці парних порівнянь.
6. Сформулюйте і доведіть твердження про нове значення геометричного індексу узгодженості МПП в результаті зміни елементу МПП.

7. Як знайти експертні оцінки парних порівнянь, які найбільшою мірою впливають на зміну локального ранжування альтернатив рішень?
8. Як знайти експертні оцінки парних порівнянь, які найбільшою мірою впливають на зміну рівня узгодженості множини оцінок?
9. Наведіть постановку задачі глобального аналізу чутливості результатів, отриманих на основі ієрархічної моделі.
10. Описати графічні методи аналізу чутливості результатів, отриманих на основі ієрархічної моделі ППР.
11. Опишіть етапи методу комплексного оцінювання чутливості результатів на основі ієрархічної моделі ППР.
12. Як оцінити чутливість глобального ранжування альтернатив рішень до зміни ваг елементів ієрархічної моделі ППР?
13. Як розрахувати діапазони відносних змін ваг критеріїв, що призводять до зміни глобального ранжування альтернатив рішень у випадку використання дистрибутивного методу агрегування?
14. Як розрахувати діапазони відносних змін ваг критеріїв, що призводять до зміни глобального ранжування альтернатив рішень у випадку використання мультиплікативного методу агрегування?
15. Дати означення стійкого критерію. Як встановити стійкість критерію?
16. Як знайти чутливі та стійкі елементи L_k-го рівня ієрархії ППР?
17. Як визначити, який з елементів L_k-го рівня ієрархії ППР найбільшою мірою впливає на зміну глобального ранжування альтернатив рішень?

Практикум 5

Дослідження методів розрахунку пріоритетів альтернатив рішень на основі нечітких експертних оцінок парних порівнянь

Мета роботи:

- *Дослідити різні методи розрахунку пріоритетів (ваг) альтернатив за одним критерієм на основі нечітких оцінок експерта.*

- *Оцінити і підвищити узгодженість нечітких оцінок експерта.*

- *Порівняти результати, знайдені різними методами. Порівняти з результатами, отриманими при формуванні чітких експертних оцінок.*

- *Розрахувати пріоритети (ваги) альтернатив рішень на основі нечіткої матриці парних порівнянь в модельній задачі підтримки прийняття рішень.*

1 Теоретичні відомості

Основні означення

Інтервальною матрицею парних порівнянь (ІМПП) називається [2, 3, 22]

$$A = \left\{ (a_{ij}) \middle| \; a_{ij} = [l_{ij}; u_{ij}],\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n \right\}, \tag{5.1}$$

де $u_{ij} \ge l_{ij} > 0$, $l_{ij} = \dfrac{1}{u_{ji}}$ при $i \ne j$ і $a_{ii} = l_{ii} = u_{ii} = 1$.

Задача полягає у розрахунку вектору ваг $w = \{w_i \mid i = 1,...,n\}$ на основі ІМПП.

ІМПП називається *узгодженою*, якщо існує вектор ваг *w*, $w_i \in \Re$, $w_i > 0$:

$$l_{ij} \le w_i / w_j \le u_{ij}\ ,\quad i = 1,2,...,n-1,\ \ j = 2,3,...,n\,,\ \ i < j\,.$$

ІМПП узгоджена тоді і тільки тоді, коли її елементи задовольняють умові [2, 3, 22]:

$$\max_k (l_{ik} l_{kj}) \le \min_k (u_{ik} u_{kj}) \text{ для } \forall \ \ i = \overline{1,n}\,,\ \ j = \overline{1,n}\,.$$

У наступних означеннях відношення переваги для випадку інтервальних чисел a_{ij} або w_i визначається *методом ступенів переваги*.

ІМПП *A* називається *слабко* або *порядково узгодженою*, якщо для її елементів виконуються порядкові транзитивності [2]:

$$(a_{ij} > 1) \wedge (a_{jk} > 1) \Rightarrow (a_{ik} > 1),\ (a_{ij} = 1) \wedge (a_{jk} > 1) \Rightarrow (a_{ik} > 1),$$

$$(a_{ki} > 1) \wedge (a_{ij} = 1) \Rightarrow (a_{kj} > 1).$$

ІМПП *A* називається *слабко неузгодженою*, якщо в ній існує принаймні один цикл, який визначається трійкою індексів (i, j, k), таких що [2]:

$$(a_{ij} > 1) \wedge (a_{jk} > 1) \wedge (a_{ik} < 1) \text{ або } (a_{ij} = 1) \wedge (a_{jk} > 1) \wedge (a_{ik} \le 1), \text{ або}$$

$$(a_{ki} > 1) \wedge (a_{ij} = 1) \wedge (a_{kj} \le 1), \text{ або } (a_{ij} = 1) \wedge (a_{jk} = 1) \wedge (a_{ik} \ne 1).$$

Цикл в ІМПП свідчить про порушення порядкової транзитивності на множині порівнюваних альтернатив рішень і може бути результатом випадкової помилки експерта при виконанні парних порівнянь альтернатив. У більшості випадків ІМПП з циклом має високий рівень неузгодженості і не може застосовуватися для обчислення ваг.

Порядок в ІМПП A зберігається слабо (перевага за елементами), якщо

$$(a_{ij} > 1) \Rightarrow (w_i \ge w_j).$$

Порядок в ІМПП A зберігається сильно (перевага за рядками), якщо з умов $\forall\, k = \overline{1,n}$ $a_{ik} \ge a_{jk}$ і $\exists\, q = \overline{1,n}$ $a_{iq} > a_{jq}$ витікає, що $w_i \ge w_j$.

Метод оцінювання і підвищення узгодженості нечіткої МПП (НМПП) полягає в тому, що будується дефазифікована МПП [23]:

$$D = \{(d_{ij})\} \in R^{+}_{nxn},$$

де $d_{ij} = Defuz(a_{ij})$ - результат дефазифікації нечіткої множини $a_{ij} \ge 1$, і $d_{ij} = 1/d_{ji}$, якщо $a_{ij} < 1$, і застосовується метод оцінювання і підвищення узгодженості для чіткої МПП *D*.

Метод розрахунку нечітких локальних ваг на основі НМПП

На рис.5.1 показана структурна схема методу розрахунку нормованих нечітких локальних ваг на основі НМПП. Метод містить етапи оцінювання допустимості неузгодженості НМПП для розрахунку ваг, підвищення узгодженості НМПП, врахування властивостей слабкого і сильного збереження порядку в НМПП та етап коригування НМПП з метою збереження цих бажаних властивостей [2]. В методі використовується декомпозиційне представлення НМПП на множину ІМПП, що дозволяє працювати з НМПП з довільним виглядом функцій приналежності. Інтервальна апроксимація нечіткого числа є зручною в багатьох випадках і широко використовується в літературі [24, 25].

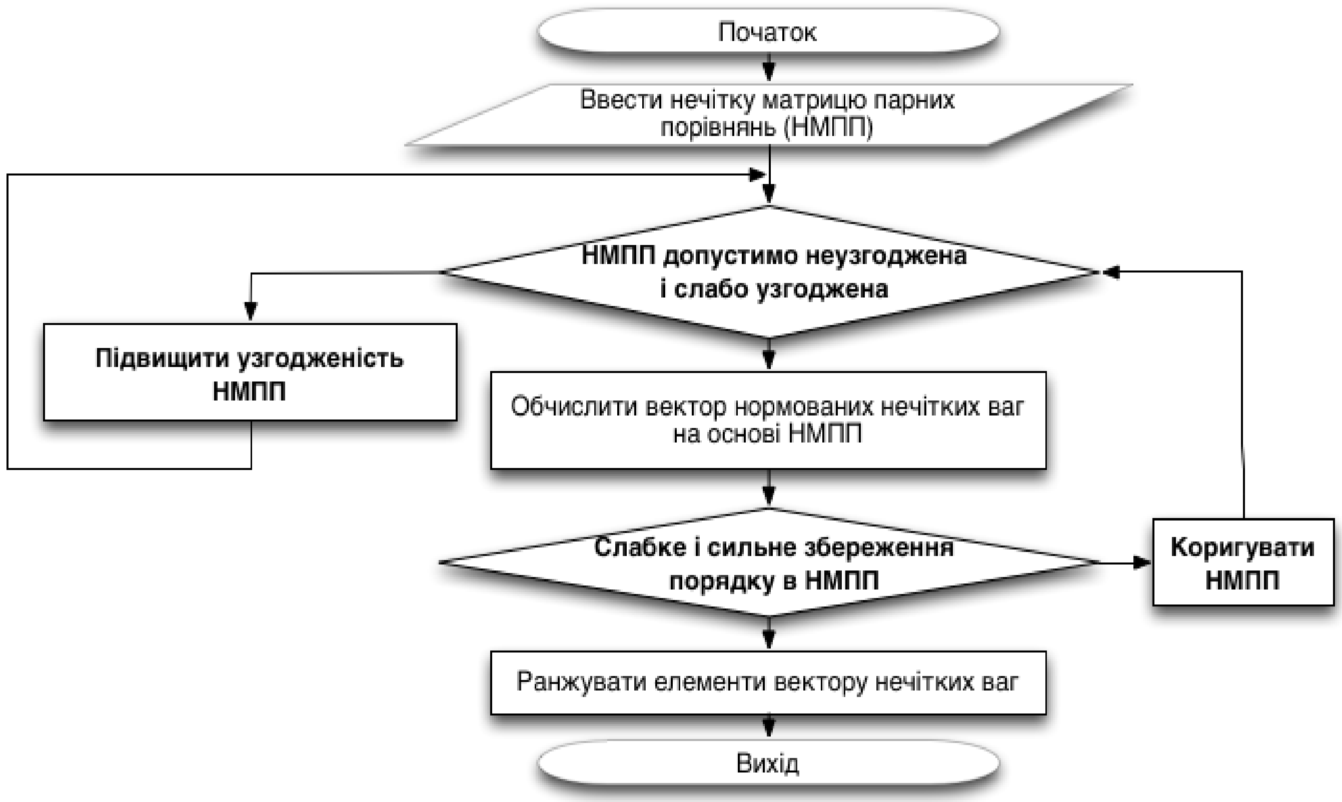


Рисунок 5.1. Структурна схема методу розрахунку нечітких локальних ваг на основі НМПП [2]

Декомпозиційне представлення НМПП $A_k^{неч}$, $k=\overline{1,K}$ полягає в її розкладенні за множинами рівня $A_k(\alpha)$ [26 – 29]:

$$A_k^{неч} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_k(\alpha), \quad k=\overline{1,K},$$

де $A_k(\alpha)=\left\{\left(a_{ijk}(\alpha)\right) \middle| \, i,j=\overline{1,N}\right\}$ – матриця множин рівня α, $a_{ijk}(\alpha)=\left\{x:\mu_{ijk}(x)\geq\alpha\right\}$, $\alpha\in[0,1]$, $\mu_{ijk}(x)$ – функція приналежності нечіткій множині $a_{ijk}^{неч}$, $x\in\Re$.

Нехай елементи $a_{ijk}^{неч}$ НМПП $A_k^{неч}$, $k=\overline{1,K}$ – трикутні нечіткі числа $a_{ijk}^{неч}=\left(a_{ijk}^{l},a_{ijk}^{m},a_{ijk}^{u}\right)$, $a_{ijk}^{l}\leq a_{ijk}^{m}\leq a_{ijk}^{u}$. Тоді елементи $A_k(\alpha)$ множини рівня $\alpha\in[0,1]$ дорівнюють $a_{ijk}(\alpha)=\left[a_{ijk}^{l}+\alpha\left(a_{ijk}^{m}-a_{ijk}^{l}\right), a_{ijk}^{u}-\alpha\left(a_{ijk}^{u}-a_{ijk}^{m}\right)\right]$, $i,j=\overline{1,N}$. Елементи $a_{ijk}(\alpha)$ також можна представити у вигляді $a_{ijk}^{інтерв.\alpha}=\left[a_{ijk}^{m}-x1_{ijk}^{\alpha}, a_{ijk}^{m}+x2_{ijk}^{\alpha}\right]$, де $x1_{ijk}^{\alpha}=(1-\alpha)\left(a_{ijk}^{m}-a_{ijk}^{l}\right)$, $x2_{ijk}^{\alpha}=(1-\alpha)\left(a_{ijk}^{u}-a_{ijk}^{m}\right)$, $x1_{ijk}^{\alpha}\geq0$, $x2_{ijk}^{\alpha}\geq0$ – величини відхилень від значення a_{ijk}^{m} [30, 31].

Використовуючи декомпозиційне представлення НМПП $A_k^{неч}$, $k=\overline{1,K}$ переходимо до розгляду множини ІМПП:

$$\left\{A_k(\alpha) \middle| \alpha\in[0,1]\right\},$$

де $A_k(\alpha)=\left\{\left(a_{ijk}(\alpha)\right) \middle| i,j=\overline{1,N}\right\}$, $a_{ijk}(\alpha)=\left[a_{ijk}^{m}-x1_{ijk}^{\alpha}, a_{ijk}^{m}+x2_{ijk}^{\alpha}\right]$.

Задача розрахунку нормованих нечітких локальних ваг альтернатив відносно критерію C_k зводиться до задачі розрахунку множини нормованих інтервальних локальних ваг $\left\{w_k(\alpha) \middle| \, \alpha\in[0,1]\right\}$ альтернатив на основі множини ІМПП $\left\{A_k(\alpha) \middle| \alpha\in[0,1]\right\}$, $k=\overline{1,K}$, де $w_k(\alpha)=\left\{\left(w_{ik}(\alpha)\right) \middle| i=\overline{1,N}\right\}$, $\alpha\in[0,1]$. Подальші дії полягають в агрегуванні множини інтервальних ваг за рівнями $\alpha\in[0,1]$ і отриманні локальних нечітких ваг.

Під час розв'язання багатокритеріальних задач підтримки прийняття рішень часто використовуються нормовані ваги альтернатив за кожним з критеріїв. Тому пропонований метод містить етап нормування інтервальних ваг, обчислених на основі ІМПП. В задачах вибору найкращої альтернативи рішень, побудови рейтингів та інших задачах упорядкування альтернатив за їх важливістю потрібні спеціальні методи ранжування інтервальних ваг. Методи ранжування і нормування інтервалів використовуються також на етапах оцінювання узгодженості ІМПП та розрахунку інтервальних ваг.

Модель GPM. ІМПП $A = \left\{(a_{ij}) \middle| \, a_{ij} = [l_{ij}; u_{ij}], \, i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, n \right\}$, де $u_{ij} \geq l_{ij} > 0$, $l_{ij} = \dfrac{1}{u_{ji}}$ при $i \neq j$ і $a_{ii} = l_{ii} = u_{ii} = 1$ представляємо двома дійснозначними додатними матрицями A^L і A^U, де $A^L \leq A \leq A^U$: $A_L = \{(l_{ij})\}$, $A_U = \{(u_{ij})\}$.

Припустимо, що для заданої експертом ІМПП A існує нормований вектор $W = (w_i)$, $w_i = [w_i^L, w_i^U]$, близький до A в сенсі $a_{ij} = \dfrac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]} \varepsilon_{ij}$ для всіх $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, де ε_{ij} – деяке збурення. Розглянемо узгоджену ІМПП $\tilde{A} = \{(\tilde{a}_{ij})\}$:

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{[w_i^L, w_i^U]}{[w_j^L, w_j^U]} = \left[\frac{w_i^L}{w_j^U}, \frac{w_i^U}{w_j^L} \right] \tag{5.2}$$

і представимо її за допомогою двох чітких додатних матриць $\tilde{A}^L$ і $\tilde{A}^U$:

$$\tilde{A}^L = \left[\frac{w_i^L}{w_j^U} \right], \; \tilde{A}^U = \left[\frac{w_i^U}{w_j^L} \right].$$

Накладемо додаткову умову, що діагональні елементи в матрицях $\tilde{A}^L$ і $\tilde{A}^U$ дорівнюють одиницям, тоді можна записати в матричному виді

$$\tilde{A}_L W_U = W_U + (n-1) W_L,$$

$$\tilde{A}_U W_L = W_L + (n-1) W_U, \tag{4.3}$$

де $W_L = \{(w_i^L) \mid i = 1, \ldots, n\}$, $W_U = \{(w_i^U) \mid i = 1, \ldots, n\}$ - чіткі вектори ваг.

ІМПП A (5.1) в загальному випадку неузгоджена, тому рівності (5.3) для A виконуються тільки наближено. Введемо вектори відхилень:

$$\mathrm{E} = (A_L - I)W_U - (n-1)W_L ,$$

$$\Gamma = (A_U - I)W_L - (n-1)W_U , \tag{5.4}$$

де $\mathrm{E} = \{(\varepsilon_i) \mid i = 1,\dots,n\}$, $\Gamma = \{(\gamma_i) \mid i = 1,\dots,n\}$, I - одинична матриця розмірності n. Величини ε_i, γ_i при $i = \overline{1,n}$ є показниками відхилень.

Бажано, щоб абсолютні значення цих показників були якомога меншими, причому граничний випадок $\varepsilon_i = \gamma_i = 0$ відповідає узгодженій ІМПП A. Тому для знаходження вектору ваг $W = (w_i)$, $w_i = [w_i^L, w_i^U]$ будується наступна модель 1 математичного програмування. В цій моделі перші два обмеження відповідають умовам (5.4). Наступні два обмеження задають необхідну і достатню умови нормування для інтервального вектору ваг. Останні два – це умови на нижній і верхній кінці інтервальної ваги та їх невід’ємність. Так як невідомі величини – елементи векторів відхилень E і Γ - можуть приймати від’ємні значення в моделі 1, то проводиться заміна змінних:

$$\varepsilon_i^+ = \frac{\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2},\ \varepsilon_i^- = \frac{-\varepsilon_i + |\varepsilon_i|}{2},\ \gamma_i^+ = \frac{\gamma_i + |\gamma_i|}{2} \text{ і } \gamma_i^- = \frac{-\gamma_i + |\gamma_i|}{2},\ i = \overline{1,n},$$

$\varepsilon_i^+ \geq 0$, $\varepsilon_i^- \geq 0$, $\gamma_i^+ \geq 0$ і $\gamma_i^- \geq 0$, $i = \overline{1,n}$. Після введення заміни змінних модель 1 переписується у вигляді моделі 2 лінійного програмування.

Модель 1 [22, 32]

Мінімізувати

$$J = \sum_{i=1}^{n} (|\varepsilon_i| + |\gamma_i|) \tag{5.5}$$

при обмеженнях:

$$\mathrm{E} = (A_L - I)W_U - (n-1)W_L$$

$$\Gamma = (A_U - I)W_L - (n-1)W_U$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} w_j^U + w_i^L \geq 1,\ i = \overline{1,n}$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} w_j^L + w_i^U \leq 1,\ i = \overline{1,n}$$

$$W_U - W_L \geq 0$$

$$W_L \geq 0$$

Модель 2 [22, 32]

Мінімізувати

$$J=\sum_{i=1}^{n}(\varepsilon_i^{+}+\varepsilon_i^{-}+\gamma_i^{+}+\gamma_i^{-})=e^{T}(\mathrm{E}^{+}+\mathrm{E}^{-}+\Gamma^{+}+\Gamma^{-}) \qquad (5.6)$$

при обмеженнях:

$$\mathrm{E}^{+}+\mathrm{E}^{-}=(A_L-I)W_U-(n-1)W_L$$

$$\Gamma^{+}+\Gamma^{-}=(A_U-I)W_L-(n-1)W_U$$

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} w_j^U+w_i^L\ge 1,\ i=\overline{1,n}$$

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} w_j^L+w_i^U\le 1,\ i=\overline{1,n}$$

$$W_U-W_L\ge 0$$

$$W_L,\mathrm{E}^{+},\mathrm{E}^{-},\Gamma^{+},\Gamma^{-}\ge 0$$

Для узгоджених ІМПП значення цільових функціоналів J моделей 1 і 2 дорівнюють нулю. Якщо $J^{*}\neq 0$, то ІМПП неузгоджена. Величина відхилення J^{*} від нуля слугує оцінкою неузгодженості ІМПП.

Нормування інтервальних ваг. Нехай $w=\{(w_i=[w_i^L,w_i^U])\,|\,i=1,...,n\}$ - вектор інтервальних ваг, де $0\le w_i^L\le w_i^U$, $N=\{X=(x_1,...,x_n)\,|\,w_i^L\le x_i\le w_i^U,\ i=1,...,n,\ \sum_{i=1}^{n}x_i=1\}$ - множина векторів нормованих інтервальних чисел.

Вектор ваг $w=\{(w_i=[w_i^L,w_i^U])\,|\,i=1,...,n\}$, $0\le w_i^L\le w_i^U$ називається *нормованим*, якщо він задовольняє двом умовам:

1) $\exists X=(x_1,...,x_n)\in N$,

2) w_i^L і w_i^U досяжні в N для всіх $i=1,...,n$.

Твердження. Вектор інтервальних ваг $w=\{(w_i=[w_i^L,w_i^U])\,|\,i=1,...,n\}$, $0\le w_i^L\le w_i^U$ нормований за наведеним вище означенням тоді і тільки тоді коли:

$$\sum_{i=1}^{n}w_i^L+\max_j(w_j^U-w_j^L)\le 1,\quad \sum_{i=1}^{n}w_i^U-\max_j(w_j^U-w_j^L)\ge 1.$$

Ці дві умови можуть бути переписані в еквівалентному виді:

$$w_j^U+\sum_{i\neq j}^{n}w_i^L\le 1,\ j=1,...,n,\quad w_j^L+\sum_{i\neq j}^{n}w_i^U\ge 1,\ j=1,...,n.$$

Ранжування інтервальних чисел методом ступенів переваги. Нехай $a=[a^L,a^U]$ і $b=[b^L,b^U]$ - інтервальні числа, $0\le a^L\le a^U\le 1$, $0\le b^L\le b^U\le 1$.

Ступінь переваги $a \succeq b$ обчислюється наступним чином [32]:

$$p(a \succeq b)=\max(1-\max(\frac{b^U-a^L}{(a^U-a^L)+(b^U-b^L)},0),0)\,. \qquad (5.7)$$

Ступінь переваги $p(a \succeq b)$ можна розглядати як ступінь виконання нечіткого відношення переваги $a \succeq b$ одного інтервального числа над іншим. При побудові ранжування використовують позначення $a \underset{}{\overset{p(a\succeq b)}{\succ}} b$.

Формулу розрахунку ступеня переваги (5.7) можна записати в еквівалентному виді:

$$p(a \succeq b)=\frac{\max(a^U-b^L,0)-\max(a^L-b^U,0)}{(a^U-b^L)-(a^L-b^U)}$$

Метод ранжування інтервальних чисел на основі ступенів переваги складається з етапів [32]:

1. Обчислити матрицю ступенів переваги $P=\{(p_{ij})\,|\,i,j=1,\dots,n\}$, де $p_{ij}=p(x_i \succeq x_j)$.
2. Для кожного $i=1,.2,\dots,n$ обчислити узагальнену величину переваги інтервального числа x_i :

   $p_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}$ чи $p_i=\frac{1}{n(n-1)}(\sum_{j=1}^{n}p_{ij}+\frac{n}{2}-1)$ (модифікований метод)
3. Побудувати ранжування інтервальних чисел $x_1,x_2,\dots,x_n$ відповідно до спадання величин p_i.

Цей метод дає повне ранжування множини інтервальних чисел $x_1,x_2,\dots,x_n$

.

Метод нечіткого програмування переваг (Fuzzy Preference Programming Method, FPP)

Даний метод дозволяє знайти чіткі ваги $w_i \in \Re$, $w_i > 0$.

ІМПП називається *узгодженою*, якщо існує вектор ваг w, $w_i \in \Re$, $w_i > 0$:

$$l_{ij} \le w_i / w_j \le u_{ij} \ , \ \ i = 1,2,...,n-1, \ j = 2,3,...,n, \ i < j. \tag{5.8}$$

Будемо шукати вектор ваг w, який задовольняє нерівності (4.8) нечітко, наближено. Тобто, допускаємо порушення (5.8) з деяким ступенем.

ІМПП називається *нечітко узгодженою*, якщо $\exists$вектор w, $w_i \in \Re$, $w_i > 0$:

$$l_{ij} \underset{\sim}{\le} w_i / w_j \underset{\sim}{\le} u_{ij} \ , \ \ i = 1,2,...,n-1, \ j = 2,3,...,n, \ i < j, \tag{5.9}$$

де $\underset{\sim}{\le}$ - нечітке відношення нестрогої переваги [33].

Перетворимо нерівність (5.9) наступним чином:

$$\begin{gathered} w_i - u_{ij} w_j \underset{\sim}{\le} 0 \ , \\ -w_i + l_{ij} w_j \underset{\sim}{\le} 0, \end{gathered} \tag{5.10}$$

$i = 1,2,...,n-1$, $j = 2,3,...,n$, $i < j$.

Систему (5.10) з $n(n-1)$ нерівностей запишемо у матричному вигляді:

$$Rw \underset{\sim}{\le} 0, \tag{5.11}$$

$$R \in \Re^{m \times n}, \ \ m = n(n-1)$$

k-ий рядок нерівності (5.11), для якого $R_k w \underset{\sim}{\le} 0$, $k = 1,2,...,m$, представляє нечітке лінійне обмеження і задається функцією приналежності:

$$\mu_k(R_k w) = \begin{cases} 1, & R_k w \le 0, \\ 1 - \dfrac{R_k w}{d_k}, & 0 < R_k w \le d_k, \\ 0, & R_k w > d_k, \end{cases} \tag{5.12}$$

де d_k - параметр, який задає допустимий інтервал наближеного задоволення чіткої нерівності $R_k w \le 0$.

Функція приналежності (5.12) показує рівень задоволення ОПР певним вектором ваг, відповідно до k-ї односторонньої нерівності (5.10).

Значення функції приналежності $\mu_k(R_k w)$:

- приймає значення нуль, коли відповідне чітке обмеження $R_k w \leq 0$ сильно порушується;

- лінійно зростає і приймає додатні значення, що менші за одиницю, коли обмеження $R_k w \leq 0$ задовольняється наближено;

- приймає значення одиниця, якщо обмеження $R_k w \leq 0$ повністю задовольняється.

Нехай $\mu_k(R_k w)$ - функції приналежності, $k = 1,2,...,m$ нечітких обмежень $R_k w \underset{\sim}{\leq} 0$ в області $T^{n-1} = \left\{(w_1,...,w_n) \mid w_i > 0,\ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1\right\}$, яка представляє $(n-1)$-вимірний симплекс.

Нечіткою допустимою областю $\tilde{A}$ симплекса T^{n-1} називається нечітка множина, яка є перетином нечітких обмежень (5.11):

$$\mu_{\tilde{A}}(w) = \left\{\min\{\ \mu_1(R_1 w),...,\mu_m(R_m w)\} \mid \sum_{i=1}^{n} w_i = 1\right\}. \qquad (5.13)$$

Якщо параметри d_k функцій приналежності (5.12) приймають достатньо великі значення, тоді можна отримати непорожню нечітку допустиму область. Тому, непорожня допустима область $\tilde{A}$ симплекса T^{n-1} є випуклою нечіткою множиною. Вона показує загальне задоволення для особи, що приймає рішення, певним чітким вектором ваг. Розв'язком є вектор ваг, на якому досягається максимум функції приналежності $\mu_{\tilde{A}}(w)$.

Максимізуючим розв'язком є вектор w^*, який відповідає максимальному значенню $\mu_{\tilde{A}}(w)$:

$$w^* = \arg\max_{w} \left\{\min\{\ \mu_1(R_1 w),...,\mu_m(R_m w)\} \mid \sum_{i=1}^{n} w_i = 1\right\}. \qquad (5.14)$$

Нечітка допустима область $\tilde{A}$ - випукла множина і всі нечіткі обмеження визначені як випуклі множини, тому принаймні одна точка w^* завжди присутня у симплексі, яка має максимальний ступінь приналежності множині $\tilde{A}$.

Задача знаходження максимізуючого розв’язку перетворюється на задачу лінійного програмування шляхом введення змінної λ, використання (5.12) і (5.14) [33, 34]:

$$\max \lambda \tag{5.15}$$

при обмеженнях

$d_k \lambda + R_k w \le d_k$,

$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, $w_i > 0$, $i = 1,2,...,n$,

$k = 1,2,...,m$.

Твердження: Якщо ІМПП узгоджена, то $\lambda^* \ge 1$.

Твердження: Якщо ІМПП неузгоджена, то $\lambda^* \in (0,1)$.

Для неузгоджених ІМПП значення λ^* залежить від рівня неузгодженості ІМПП та від значень параметрів d_k . Параметри d_k мають бути достатньо великими, щоб гарантувати непорожність припустимої області $\tilde{P}$ і додатність значення λ^*.

Приклад. Розглянемо три альтернативи рішень та елементи нечіткої матриці парних порівнянь цих альтернатив $\tilde{a}_{12} = (1.5,\ 2,\ 2.5)$, $\tilde{a}_{13} = (4,\ 5,\ 6)$, $\tilde{a}_{23} = (2.5,\ 3,\ 3.5)$ - трикутні нечіткі числа. Значення параметрів $d_1 = d_2 = ... = d_5 = d_6 = 1$.

Максимізуючий розв’язок w^* та оптимальне значення λ^* цільової функції для різних α наведені в таблиці:

α	w_1^*	w_2^*	w_3^*	λ^*
0	0.5556	0.3333	0.1111	1.056
0.3	0.5699	0.3226	0.1075	1.038
0.5	0.5748	0.3171	0.1081	1.020

0.8	0.5802	0.3099	0.1099	0.991
1.0	0.5833	0.3056	0.1111	0.972

Задача (5.15) розрахунку ваг на кожному α - рівні запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \lambda \to \max \\ d_1\lambda + w_1 - u_{12}(\alpha)w_2 \le d_1 \\ d_2\lambda - w_1 + l_{12}(\alpha)w_2 \le d_2 \\ d_3\lambda + w_2 - u_{23}(\alpha)w_3 \le d_3 \\ d_4\lambda - w_2 + l_{23}(\alpha)w_3 \le d_4 \\ d_5\lambda + w_1 - u_{13}(\alpha)w_3 \le d_5 \\ d_6\lambda - w_1 + l_{13}(\alpha)w_3 \le d_6 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ w_1, w_2, w_3 > 0 \end{cases}$$

де $l_{12}(\alpha) = \alpha(m_{12} - l_{12}) + l_{12}$, $u_{12}(\alpha) = \alpha(m_{12} - u_{12}) + u_{12}$ для трикутного нечіткого числа $\tilde{a}_{12} = (l_{12}, m_{12}, u_{12})$.

Розрахунок довірчих інтервалів [Bel, Pls] для локальних ваг альтернатив рішень

Нехай $D_{n\times n} = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ – **чітка МПП** альтернатив рішень $a_1, a_2,..., a_n$.

В основу методу розрахунку довірчих інтервалів для локальних ваг покладено твердження,що задана експертом МПП деякою мірою відображає реальні відношення ваг альтернатив і містить невизначеність, незалежно від рівня її узгодженості. Нехай МПП містить наступні види невизначеності [35]:

1) невизначеність, яку вносить шкала, в якій експерт виконує оцінювання,

2) невизначеність, обумовлена можливими помилками експерта при виконанні парних порівнянь і його особистими якостями, такими як реалізм, оптимізм або песимізм.

Для кількісного оцінювання невизначеності описаних вище видів, надалі називатимемо її *невизначеністю експертних оцінок*, і побудови довірчих інтервалів для ваг альтернатив, пропонується метод, що використовує апарат теорії довіри (свідчень) Демпстера-Шеффера.

Суть цього методу полягає в наступному. Розглядаються наступні гіпотези:

- одноелементні множини $\{a_1\},\{a_2\},...,\{a_n\}$, які включають окремі альтернативи рішень,

- множина $A=\{a_1,a_2,...,a_n\}=\Theta$, яка включає усі альтернативи рішень.

Базові довіри $m_i=m(\{a_i\})$ до альтернатив відповідають вагам альтернатив; базову довіру $m(\Theta)$ до множини, яка містить усі альтернативи, як довіра до гіпотези, що усі альтернативи нерозрізнені експертом або мають однакову важливість для експерта, пропонується використовувати для вираження рівня невизначеності експертних оцінок [35].

В теорії довіри *базовим розподілом довіри* називається функція $m:2^{\Theta}\to[0,1]$, що визначена на підмножинах множини Θ і задовольняє аксіомам: $m(\varnothing)=0$ і $\sum_{B\in 2^{\Theta}} m(B)=1$.

Базовий розподіл довіри в задачі, що розглядається, визначимо наступним чином [2]:

$$m(a_i)=m_i=\frac{v_i}{\sum_{j=1}^{n} v_j+X},\quad i=1,...,n,$$

де $v_i>0$ – ненормована вага альтернативи a_i, обчислена на основі МПП одним з відомих методів: головного власного вектору EM, геометричної середньої RGMM або ін., $X>0$ – ненормований показник рівня невизначеності експертних оцінок парних порівнянь.

Значення базової довіри до усієї множини альтернатив – нормований *показник рівня невизначеності експертних оцінок* визначимо [3, 35]

$$m_\Theta = \frac{X}{\sum_{j=1}^{n} v_j + X}.$$

Виконується рівність: $\sum_i m_i + m_\Theta = 1$. Показник X побудуємо як деякий відсоток від суми $\sum_j v_j$ таким чином [3, 35]:

– якщо експертні оцінки повністю узгоджені, то $X = X_1 = k_1 \sum_{j=1}^{n} v_j$, де параметр $k_1 \in (0,1)$ моделює невизначеність, яку вносить шкала Сааті, а також невизначеність внаслідок якостей експерта, таких як песимізм і оптимізм;

– якщо в експертних оцінках присутня неузгодженість, то рівень невизначеності збільшується мультиплікативно відповідно до значення показника узгодженості (ПУ) МПП, узятого з деяким коефіцієнтом $k_2 > 0$:

$$X = X_1(1 + k_2 \cdot ПУ),$$

$$X = X_1 = k_1 \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ) ,$$

де $k_1 \in (0,1)$, $k_2 > 0$, $ПУ \geq 0$.

Тоді значення базової довіри до альтернативи a_i дорівнює

$$m_i = \frac{v_i}{(1 + k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ)) \sum_{j=1}^{n} v_j}, \tag{5.16}$$

а нормований показник рівня неузгодженості експертних оцінок –

$$m_\Theta = \frac{k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ)}{1 + k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ)}, \; i = 1,...,n. \tag{5.17}$$

Довірчий інтервал для локальної ваги альтернативи a_i визначимо, використовуючи апарат теорії довіри Демпстера-Шеффера, наступним чином [3, 35]:

$$[Bel_i, Pls_i],$$

де Bel_i і Pls_i – значення функцій довіри і правдоподібності до одноелементної гіпотези $\{a_i\}$.

В теорії довіри функція довіри $Bel: 2^{\Theta} \to [0,1]$ визначається аксіомами $Bel(\varnothing)=0$, $Bel(\Theta)=1$ і $Bel(A)+Bel(\neg A)\le 1$. Величина $Bel(A)$ обчислюється як сума базових довір за всіма підмножинами A: $Bel(A)=\sum_{B\subseteq A} m(B)$ і показує повну довіру до гіпотези $A\subseteq\Theta$.

Функцією правдоподібності називається $Pls: 2^{\Theta}\to[0,1]$, де $Pls(A)$ показує величину максимального значення довіри, яке може бути по можливості назначено гіпотезі $A\subseteq\Theta$: $Pls(A)=1-Bel(\neg A)$. Величина $Bel(\neg A)$ показує рівень сумніву в гіпотезі A і обчислюється за формулою: $Bel(\neg A)=\sum_{\substack{B\subseteq\Theta \\ A\cap B=\varnothing}} m(B)$.

Функції $Bel(A)$ і $Pls(A)$ інтерпретуються як нижні і верхні імовірності появи гіпотези A в тому розумінні, що припускається існування деякої істинної імовірності $p(A)$ появи гіпотези A, такої що $Bel(A)\le p(A)\le Pls(A)$.

Очевидно, що значення довіри Bel до одноелементної множини співпадає зі значенням базової довіри до неї: $Bel(\{a_i\})=m_i$, а значення правдоподібності для множини $\{a_i\}$: $Pls(\{a_i\})=m_i+m_{\Theta}$. Таким чином, *довірчий інтервал для локальної ваги* альтернативи a_i в даній задачі дорівнює довірчому інтервалу до гіпотези $\{a_i\}$ і дорівнює:

$$[Bel_i, Pls_i]=[m_i,\; m_i+m_{\Theta}]. \tag{5.18}$$

Враховуючи (5.16) і (5.17), сформулюємо етапи методу розрахунку довірчого інтервалу для локальної ваги альтернативи a_i. Відомі особисті якості експерта (реаліст, песиміст або оптиміст).

Метод складається з етапів [36]:

1. Розрахувати ненормовані локальні ваги v_i на основі МПП D одним з відомих методів, наприклад, головного власного вектору.

2. Розрахувати показник узгодженості МПП D.

3. Визначити значення параметру $k_1 \in (0,1)$ залежно від особистих якостей експерта та шкали. Задати значення параметру $k_2 > 0$.

4. Розрахувати довірчі інтервали $[Bel_i, Pls_i] = [m_i,\ m_i + m_\Theta]$ для локальних ваг альтернатив a_i, $i = 1,...,n$, використовуючи рівності (5.16) і (5.17) .

Параметр $k_1(n)$ в (5.16) і (5.17) визначено на основі емпіричної оцінки $\hat{p}_1 = \hat{p}_1^{0.90}(n)$ (табл.5.1) величини $p_1(l) = \| w(l) - w^{реал}(l) \|_\infty$ чебишевської норми відхилення реальних ваг $w^{реал}(l)$ від ваг $w(l)$, обчислених на основі МПП $D^*(l)$ за результатами комп'ютерного моделювання [36]:

$$k_1 = k_{11} \cdot \hat{p}_1 \,, \qquad (5.19)$$

де $w(l) = v(l) / \sum_k v_k(l)$, вектор $v(l)$ обчислено методом головного власного вектору, $\hat{p}_1^{0.90}(n) = \hat{p}_1^{ср}(n) + 1.3\sigma(p_1(n))$ – значення чебишевської норми, таке, що для 90% модельованих МПП $D^*(l)$ виконується нерівність $p_1(l) \le \hat{p}_1^{0.90}(n)$, l – номер експерименту, $l = 1,...,10^5$, коефіцієнт $k_{11}(n) > 0$.

Значення коефіцієнта $k_{11} = k_{11}(n)$ в (5.19) визначаються емпірично так, щоб в 90% експериментів всі координати вектору нормованих реальних ваг $w^{реал}$, $w_i^{реал} = v_i^{реал} / \sum_k v_k^{реал}$ містилися в своїх довірчих інтервалах (табл.5.2):

$$w_i^{реал} \in [Bel_i, Pls_i],\ i = 1,2,...,n.$$

Таблиця 5.1. Оцінки значень параметра p_1 в рівності (5.19) при обчисленні довірчих інтервалів для ваг альтернатив [2, 36]

n	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{p}_1^{реаліст}$	0.054	0.046	0.039	0.033	0.025	0.021	0.017
$\hat{p}_1^{pessim}$	0.126	0.105	0.088	0.073	0.064	0.056	0.050
$\hat{p}_1^{optim}$	0.106	0.095	0.084	0.072	0.064	0.056	0.050

Таблиця 5.2. Значення коефіцієнта k_{11} і середні значення $\hat{m}_\Theta$ показника невизначеності m_Θ, що їм відповідають для експертів реаліста, песиміста/оптиміста [2, 36]

n	3	4	5	6	7	8	9
$k_{11}^{реаліст}$	2.35	2.84	3.34	3.85	4.77	5.40	6.00
$k_{11}^{опт/пес}$	3.60	4.40	5.20	5.05	6.80	7.70	8.27
$\hat{m}_\Theta$ для $k_{11}^{реаліст}$	0.113	0.115	0.115	0.112	0.106	0.100	0.094
$\hat{m}_\Theta$ для $k_{11}^{опт/пес}$	0.319	0.324	0.319	0.313	0.309	0.307	0.301

Значення $\hat{m}_\Theta$ в табл.5.2 показують, що рівень невизначеності експертних оцінок в даній задачі обчислення ваг зменшується із зростанням кількості альтернатив *n*. Як наслідок, із зростанням *n* зменшується ширина обчислюваних довірчих інтервалів (5.18).

Приклади розв'язання типових задач за роботою

Задача 1

Для заданої нечіткої матриці парних порівнянь (МПП) побудувати інтервальну МПП для рівнів $\alpha = 0$, $\alpha = 0.5$ та $\alpha = 1$, використовуючи нечітку фундаментальну шкалу ФП 1 (див. в кінці цієї лабораторної роботи):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \tilde{2} & \tilde{4} \\ 1/\tilde{2} & 1 & \tilde{3} \\ 1/\tilde{4} & 1/\tilde{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Для нечіткої МПП $\tilde{A} = \left\{ \left(\tilde{a}_{ij} = \left(a_{ij}^l, a_{ij}^m, a_{ij}^u \right) \right) | \, i, j = \overline{1, n} \right\}$ елементи інтервальної МПП $A(\alpha) = \left\{ \left(a_{ij}(\alpha) = \left[l_{ij}(\alpha), u_{ij}(\alpha) \right] \right) \middle| i, j = \overline{1, n} \right\}$ розраховуються: $l_{ij}(\alpha) = (1-\alpha)\left(a_{ij}^m - a_{ij}^l \right)$, $u_{ij}(\alpha) = (1-\alpha)\left(a_{ij}^u - a_{ij}^m \right)$.

При $\alpha = 0$, $\alpha = 1$ та $\alpha = 0.5$ інтервальні МПП дорівнюють

$$A(\alpha)\Big|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [3,5] \\ [1/3, 1] & 1 & [2,4] \\ [1/5, 1/3] & [1/4, 1/2] & 1 \end{pmatrix}, \quad A(\alpha)\Big|_{\alpha=1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}$$

і $$A(\alpha)\Big|_{\alpha=0.5} = \begin{pmatrix} 1 & [1.5,\ 2.5] & [3.5,\ 4.5] \\ [1/2.5,\ 1/1.5] & 1 & [2.5,\ 3.5] \\ [1/4.5,\ 1/3.5] & [1/3.5,\ 1/2.5] & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2

Розрахувати локальні ваги методом нечіткої геометричної середньої (FRGMM) для наступної інтервальної МПП:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & [\mathbf{3},\mathbf{4}] & \mathbf{6} & [\mathbf{6},\mathbf{7}] \\ [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}] & \mathbf{1} & [\mathbf{3},\mathbf{4}] & [\mathbf{3},\mathbf{4}] \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}} & [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}] & \mathbf{1} & [\mathbf{3},\mathbf{4}] \\ [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{7}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{6}}] & [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}] & [\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}] & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Згідно з методом FRGMM ненормовані і нормовані локальні ваги розраховуються відповідно

$$v_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}, \qquad w_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}},$$

використовуючи розширені бінарні операції.

Отримаємо наступні результати:

$$w^T = \big([0.523,\ 0.673] \quad [0.199,\ 0.284] \quad [0.096,\ 0.128] \quad [0.050, 0.069]\big)$$

Задача 3

Побудувати породжені матриці для наступної інтервальної матриці парних порівнянь (МПП):

$$A=\begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [3,5] \\ [1/3,1] & 1 & [2,4] \\ [1/5,1/3] & [1/4,1/2] & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

Матрицею, породженою h-им рядком інтервальної МПП A, називається інтервальна МПП $A^h=\left\{\left(a_{ij}^h\right)\middle|a_{ij}^h=\left[l_{ij}^h,u_{ij}^h\right],i,j=\overline{1,n}\right\}$, елементи $[l_{hj}^h,u_{hj}^h]$, $j\neq h$, h-го рядка (та h-го стовпчика) якої дорівнюють елементам h-го рядка (стовпчика) заданої МПП A; всі інші елементи $[l_{ij}^h,u_{ij}^h]$ матриці A^h, $i\neq j\neq h$, обчислюються згідно з правилом транзитивності: $l_{ij}^h=l_{ih}^h\cdot l_{hj}^h$, $u_{ij}^h=u_{ih}^h\cdot u_{hj}^h$. В даній задачі породжені МПП:

$$A^1=\begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [3,5] \\ [1/3,1] & 1 & [1,5] \\ [1/5,1/3] & [1/5,1] & 1 \end{pmatrix},\quad A^2=\begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [2,12] \\ [1/3,1] & 1 & [2,4] \\ [1/12,1/2] & [1/4,1/2] & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & [3/4,5/2] & [3,5] \\ [2/5,4/3] & 1 & [2,4] \\ [1/5,1/3] & [1/4,1/2] & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4

Виконати нормування інтервальних ваг, використовуючи нечітку арифметику: w_1=[3, 4.5], w_2=[4, 4.5], w_3=[1.5, 4.5], w_4= [1, 1.125].

Розв'язання

Використаємо наступну формулу для нормування ваг

$$w_i^{norm}=w_i\ /\sum_{k=1}^{n}w_k\ ,$$

де бінарні операції є розширеними бінарними операціями.

Отримаємо наступні результати: w_1^{norm}=[0.205; 0.474], w_2^{norm}=[0.274; 0.474], w_3^{norm}=[0.103; 0.474], w_4^{norm} = [0.068; 0.118].

Задача 5

Побудувати ранжування заданих інтервальних глобальних ваг альтернатив за методом, який базується на розрахунку ступеня переваги: w1=[0.2, 0.4], w2=[0.1, 0.4], w3=[0.2, 0.6].

Розв’язання

Матриця ступенів переваг дорівнює

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.333 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.667 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Суми ступенів переваг однієї ваги над всіма іншими вагами:

p1=1.43, p2=1.2, p3=1.87. Результуюче ранжування: $w3 \succeq w1 \succeq w2$.

Задача 6

Побудувати ранжування інтервальних глобальних ваг альтернатив за методом, що базується на нечітких відношеннях переваги:

w1=[0.05; 0.18; 0.32], w2=[0.17; 0.32; 0.48], w3=[0.14; 0.27; 0.44].

Розв’язання

Для кожної пари заданих ваг розрахуємо значення відношень нестрогої переваги $\nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$, строгої переваги $n_s\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$ та еквівалентності $n_e\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$:

(i, j)	$n\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$	$n_s\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$	$n_e\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$
(1,2)	0.521	0	0.521

(1,3)	0.659	0	0.659
(2,3)	1	0.148	0.852
(2,1)	1	0.479	0.521
(3,1)	1	0.341	0.659
(3,2)	0.852	0	0.852

Задамо порогові значення $g_s = 0.2$ і $g_e = 0.8$. Тоді виконуються строгі переваги w2>w1, w3>w1 та еквівалентність w2~w3.

Підмножини недомінованих нечітких ваг дорівнюють:

$M_1 = \{w2, w3\}$, $M_2 = \{w1\}$.

Задача 7

Знайти довірчі інтервали [Bel, Pls] для локальних ваг альтернатив на основі МПП D^*, яка відповідає оцінкам цих альтернатив, наданих експертом-реалістом в шкалі Сааті:

$$D^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 1/2 & 1 & 3 & 1 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. З табл.5.1 і табл.5.2 беремо параметри $\hat{p}_1 = 0.046$ і $k_{11}^{реаліст} = 2.84$. Відношення узгодженості МПП D^* дорівнює *CR*=0.006 і значно менше порогового значення $CR^{porog} = 0.08$, тому МПП D^* має малий рівень неузгодженості. Кінці довірчих інтервалів $[\,Bel_i(D^*)\ , Pls_i(D^*)\,]$ для ваг альтернатив a_i за умов $m_i = \dfrac{v_i}{(1 + k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ))\sum_{j=1}^{n} v_j}$,

$m_\Theta = \dfrac{k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ)}{1 + k_1 \cdot (1 + k_2 \cdot ПУ)}$, *ПУ*=*CR*, $k_1 = k_{11} \cdot \hat{p}_1$, $k_2 = 1$ наведено в табл.5.3.

Таблиця 5.3. Значення лівого і правого кінців довірчих інтервалів для локальних ваг альтернатив a_i, $i=1,\ldots,4$ задачі 7

Альтернативи	a_1	a_2	a_3	a_4
$Bel_i(D^*)$	0.401	0.211	0.081	0.190
$Pls_i(D^*)$	0.517	0.327	0.198	0.307

Значення показника невизначеності експертних оцінок $m_\Theta = 0.116$.

2. Порядок виконання роботи

2.1. Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2. Оцінити і за необхідності підвищити узгодженість НМПП, заданих згідно з варіантом. Використати різні функції приналежності елементів НМПП та різні методи дефазифікації. Чи змінюється результат оцінювання узгодженості при використанні різних функцій приналежності та різних методів дефазифікації на основі однієї і тієї ж НМПП?

2.3. Використовуючи метод GPM, розрахувати ваги на основі НМПП та декількох різних функцій приналежності, заданих згідно з варіантом. Використати декомпозиційний підхід. Порівняти результати, отримані при різних функціях приналежності. Чи змінюється ранжування альтернатив рішень при використанні різних функцій приналежності на основі однієї і тієї ж НМПП? Результуючі ваги та ранжування представити графічно залежно від рівня α.

2.4. Використовуючи метод GPM та декомпозиційний підхід, розрахувати ваги на основі НМПП, заданих згідно з варіантом. Результуючі ваги представити графічно залежно від рівня α. Знайти ранжування на основі цих ваг для кожного α. Перевірити виконання властивостей сильного і слабкого збереження порядку та скоригувати НМПП в разі необхідності. Чи змінюється ранжування альтернатив рішень після коригування НМПП?

2.5. Використовуючи метод FPP, розрахувати ваги на основі НМПП та декількох різних функцій приналежності, заданих згідно з варіантом. Використати декомпозиційний підхід. Порівняти результати, отримані при різних функціях приналежності. Чи змінюється ранжування альтернатив рішень при використанні різних функцій приналежності на основі однієї і тієї ж НМПП? Результуючі ваги та ранжування представити графічно залежно від рівня α.

2.6. Використовуючи метод FPP, розрахувати ваги на основі НМПП, заданих згідно з варіантом, та декількох різних наборів параметрів d_k. Використати декомпозиційний підхід. Результуючі ваги представити графічно залежно від рівня α. Встановити, в яких випадках вибір параметрів d_k впливає на результуючі ваги, в яких – ні. Як вибирати значення параметрів d_k, щоб гарантувати непорожність допустимої області і додатність значення λ^*?

2.7. Розглянути чіткі МПП, побудовані на основі заданих НМПП. Розрахувати інтервали [Bel, Pls] для ваг на основі чітких МПП. За інтервалами [Bel, Pls] побудувати ранжування альтернатив. Порівняти з ранжуваннями, отриманими на основі НМПП при різних значеннях рівня α.

2.8. Розглянути чіткі МПП, побудовані на основі заданих НМПП. Розрахувати ваги і показники узгодженості чітких МПП методом з лабораторної роботи №1 згідно варіанту. Побудувати ранжування альтернатив. Порівняти з ранжуваннями, отриманими на основі НМПП.

2.9. Зробити висновки по роботі.

2.10. Дати відповіді на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

Варіанти завдань

№ варіанту	№ пункту порядку виконання роботи	№ нечіткої матриці парних порівнянь (див.нижче)	№ функції приналежності (див.нижче)
1	2.2, 2.7	1, 2, 3	1, 7, гаусівська
2	2.3, 2.7	13, 3, 6	2, 8, гаусівська
3	2.4, 2.7	1, 14, 15	3, 9, гаусівська
4	2.5, 2.7	13, 3, 6	4, 7, гаусівська
5	2.6, 2.7	1, 14, 15	5, 10, гаусівська
6	2.2, 2.7	4, 5, 6	2, 8, гаусівська
7	2.3, 2.7	7, 16, 17	5, 10, гаусівська
8	2.4, 2.7	8, 18, 19	4, 7, гаусівська
9	2.5, 2.7	7, 16, 17	3, 9, гаусівська
10	2.6, 2.7	8, 18, 19	1, 7, гаусівська
11	2.2, 2.7	7, 8, 9	3, 9, гаусівська
12	2.3, 2.7	11, 20, 21	1, 7, гаусівська
13	2.4, 2.7	22, 23, 24	5, 10, гаусівська
14	2.5, 2.8	11, 20, 21	2, 8, гаусівська
15	2.6, 2.8	22, 23, 24	3, 7, гаусівська
16	2.2, 2.8	10, 11, 12	4, 5, гаусівська
17	2.3, 2.8	25, 26	2, 9, гаусівська
18	2.4, 2.8	27, 28	1, 6, гаусівська
19	2.5, 2.8	25, 26	3, 8, гаусівська
20	2.6, 2.8	27, 28	5, 7, гаусівська
21	2.2, 2.8	29, 30	4, 10, гаусівська

22	2.3, 2.8	31, 32	6, 10, гаусівська
23	2.4, 2.8	33, 34	2, 8, гаусівська
24	2.5, 2.8	31, 32	1, 7, гаусівська
25	2.6, 2.8	33, 34	3, 9, гаусівська
26	2.2, 2.8	35, 36	2, 7, гаусівська

Нечіткі матриці парних порівнянь

Варіант 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 1/7 & 1/9 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1/3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1/7 \\ 1/3 & 1/3 & 3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 2 & 4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 1/8 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 5

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 3 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 1/3 & 1/3 & 1 & 1/3 & 1/7 \\ 1/3 & 1/2 & 3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1/2 & 2 & 3 \\ 1/9 & 1 & 1/8 & 1/8 & 1/3 \\ 2 & 8 & 1 & 1 & 8 \\ 1/2 & 8 & 1 & 1 & 5 \\ 1/3 & 3 & 1/8 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1 & 1/6 & 1/8 \\ 6 & 1 & 3 & 1/2 & 2 \\ 1 & 1/3 & 1 & 1/9 & 1/4 \\ 6 & 2 & 9 & 1 & 1/2 \\ 8 & 1/2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 8

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 1/3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 9

Варіант 10

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 1/4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/2 & 1/7 & 1/5 \\ 3 & 1 & 1/4 & 2 & 1/2 \\ 2 & 4 & 1 & 1/2 & 1/3 \\ 7 & 1/2 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 11

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/3 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1/3 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1/7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 12

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 13

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 1/3 & 1 & 2 & 1/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2 & 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 14

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/6 & 1/7 & 1/9 \\ 3 & 1 & 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 6 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 15

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1/3 & 1 & 3 & 1/5 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 5 & 2 & 1 & 2 \\ 1/5 & 2 & 2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 16

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1 & 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 17

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/7 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 18

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 & 3 & 2 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/2 & 2 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 19

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1 & 1/2 & 2 & 1/2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 2 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 20

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 1/2 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 1 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 21

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1/3 & 5 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1/5 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 22

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1/3 & 7 & 3 \\ 1/5 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1/7 & 1/2 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 23

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1 & 1/2 & 1/2 & 2 \\ 1/5 & 2 & 1 & 1/3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 24

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 1/2 & 2 & 5 \\ 1/9 & 1 & 1/9 & 1/9 & 1/3 \\ 2 & 9 & 1 & 1/2 & 7 \\ 1/2 & 9 & 2 & 1 & 5 \\ 1/5 & 3 & 1/7 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 25

1	3	1/2	4	5	1/3	3
1/3	1	1/7	1	2	1/3	1
2	7	1	8	6	3	7
1/4	1	1/8	1	1	1/3	1/2
1/5	1/2	1/6	1	1	1/9	1
3	3	1/3	3	9	1	7
1/3	1	1/7	2	1	1/7	1

Варіант 26

1	1/5	2	1/4	1/5	1/9	1/2
5	1	6	1	2	1/3	3
1/2	1/6	1	1/7	1/7	1/9	1/9
4	1	7	1	1	1/7	1/2
5	1/2	7	1	1	1/9	1
9	3	9	7	9	1	7
2	1/3	9	2	1	1/7	1

Варіант 27

1	1/3	2	1/4	1/3	1/3	1/2
3	1	3	2	2	1/3	3
1/2	1/3	1	1/4	1/3	1/4	1/5
4	1/2	4	1	1	1/3	1/2

3	1/2	3	1	1	1/5	1
3	3	4	3	5	1	5
2	1/3	5	2	1	1/5	1

Варіант 28

1	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1
2	1	2	1	1	1	3
1	1/2	1	1/2	1/3	1/2	1/3
2	1	2	1	1	1	1/2
2	1	3	1	1	1/3	1
2	1	2	1	3	1	2
1	1/3	3	2	1	1/2	1

Варіант 29

1	3	5	3	1	1/3	2
1/3	1	1/7	1/2	1/3	1	1/2
1/5	7	1	1/2	1/4	1	1/2
1/3	2	2	1	1/2	2	1
1	3	4	2	1	1/6	2
3	1	1	1/2	6	1	1/2
1/2	2	2	1	1/2	2	1

Варіант 30

1	1/6	2	1/5	5	1	2
6	1	3	1	5	1	5
1/2	1/3	1	1/7	1/5	1/9	1/2
5	1	7	1	1/3	1	7
1/5	1/5	5	3	1	1/7	2
1	1	9	1	7	1	7
1/2	1/5	2	1/7	1/2	1/7	1

Варіант 31

1	1/4	1/3	1/6	3	1	2
4	1	3	1	5	1	5
3	1/3	1	1/3	5	1/3	2

6	1	3	1	5	1	7
1/3	1/5	1/5	1/5	1	1/7	1
1	1	3	1	7	1	5
1/2	1/5	1/2	1/7	1	1/5	1

Варіант 32

1	4	6	3	2	1/4	3
1/4	1	2	1	1/3	1/5	1/2
1/6	1/2	1	1/2	1/5	1/5	1/3
1/3	1	2	1	1/2	1/3	1/3
1/2	3	5	2	1	1/3	2
4	5	5	3	3	1	2
1/3	2	3	3	1/2	1/2	1

Варіант 33

1	1	1/4	3	2	1/4	5
1	1	1/5	4	3	1/5	3
4	5	1	9	7	1/5	9
1/3	1/4	1/9	1	1/2	1/7	1/2
1/2	1/3	1/7	2	1	1/3	2
4	5	5	7	3	1	4
1/5	1/3	1/9	2	1/2	1/4	1

Варіант 34

1	2	1/4	1/3	2	1/5	7
1/2	1	1/5	1/4	3	1/4	3
4	5	1	1	6	2	7
3	4	1	1	5	2	3
1/2	1/3	1/6	1/5	1	1/3	2
5	4	1/2	1/2	3	1	4
1/7	1/3	1/7	1/3	1/2	1/4	1

Варіант 35

1	5	7	3	1	1/3	2
1/5	1	1/3	1/2	1/3	1	1/2
1/7	3	1	1/2	1/3	1	1/2

1/3	2	2	1	1/2	1/2	1
1	3	3	2	1	1/3	2
3	1	1	2	3	1	1/2
1/2	2	2	1	1/2	2	1

Варіант 36

1	1/7	1/2	1/5	3	1	2
7	1	3	1	5	1	5
2	1/3	1	1/3	5	1/3	1/2
5	1	3	1	5	1	7
1/3	1/5	1/5	1/5	1	1/7	2
1	1	3	1	7	1	7
1/2	1/5	2	1/7	1/2	1/7	1

Таблиця. Функції приналежності, які відповідають нечітким фундаментальним шкалам трикутного виду

	Нечіткі числа					
Лінгвістична змінна	**ФП 1**	**ФП 2**	**ФП 3**	**ФП 4**	**ФП 5**	**ФП 6**
Рівна важливість $\tilde{1}$	$\tilde{1}=(1,1,3)$	$\tilde{1}=(1,1,1)$	$\tilde{1}=(1,1,1)$	$\tilde{1}=(1,1,2)$	$\tilde{1}=(1,1,1)$	$\tilde{1}=(1/2,1,3/2)$
Слабка перевага $\tilde{3}$	$\tilde{3}=(1,3,5)$	$\tilde{3}=(2,3,4)$	$\tilde{3}=(2,3,4)$	$\tilde{3}=(2,3,4)$	$\tilde{3}=(1,3,5)$	$\tilde{3}=(1,3/2,2)$
Сильна перевага $\tilde{5}$	$\tilde{5}=(3,5,7)$	$\tilde{5}=(4,5,6)$	$\tilde{5}=(4,5,6)$	$\tilde{5}=(4,5,6)$	$\tilde{5}=(3,5,7)$	$\tilde{5}=(3/2,2,5/2)$
Дуже сильна $\tilde{7}$	$\tilde{7}=(5,7,9)$	$\tilde{7}=(6,7,8)$	$\tilde{7}=(6,7,8)$	$\tilde{7}=(6,7,8)$	$\tilde{7}=(5,7,9)$	$\tilde{7}=(2,5/2,3)$
Абсолютна перевага $\tilde{9}$	$\tilde{9}=(7,9,9)$	$\tilde{9}=(9,9,9)$	$\tilde{9}=(8,9,10)$	$\tilde{9}=(8,9,9)$	$\tilde{9}=(7,9,11)$	$\tilde{9}=(5/2,3,7/2)$
Проміжні значення $\tilde{2}$, $\tilde{4}$, $\tilde{6}$, $\tilde{8}$	$\tilde{2}=(1,2,4)$ $\tilde{4}=(2,4,6)$ $\tilde{6}=(4,6,8)$ $\tilde{8}=(6,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,3)$ $\tilde{4}=(3,4,5)$ $\tilde{6}=(5,6,7)$ $\tilde{8}=(7,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,3)$ $\tilde{4}=(3,4,5)$ $\tilde{6}=(5,6,7)$ $\tilde{8}=(7,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,3)$ $\tilde{4}=(3,4,5)$ $\tilde{6}=(5,6,7)$ $\tilde{8}=(7,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,4)$ $\tilde{4}=(2,4,6)$ $\tilde{6}=(4,6,8)$ $\tilde{8}=(6,8,10)$	$\tilde{2}=(3/4,5/4,7/4)$ $\tilde{4}=(5/4,7/4,9/4)$ $\tilde{6}=(7/4,9/4,11/4)$ $\tilde{8}=(9/4,11/4,13/4)$

Таблиця. Функції приналежності, які відповідають нечітким фундаментальним шкалам трапецевидного виду

Лінгвістична змінна	**ФП 7**	**ФП 8**	**ФП 9**	**ФП 10**

Рівна важливість $\tilde{1}$	$\tilde{1}=(1,1,1,2)$	$\tilde{1}=(1,1,1,3)$	$\tilde{1}=(1/3, 1/2, 3/2, 2)$	$\tilde{1}=(1/4, 1/2, 2, 3)$
Слабка перевага $\tilde{3}$	$\tilde{3}=(2, 2.5, 3.5, 4)$	$\tilde{3}=(1, 2, 4, 5)$	$\tilde{3}=(2, 2.5, 3.5, 4)$	$\tilde{3}=(1, 2, 4, 5)$
Сильна перевага $\tilde{5}$	$\tilde{5}=(4, 4.5, 5.5, 6)$	$\tilde{5}=(3, 4, 6, 7)$	$\tilde{5}=(4, 4.5, 5.5, 6)$	$\tilde{5}=(3, 4, 6, 7)$
Дуже сильна перевага $\tilde{7}$	$\tilde{7}=(6, 6.5, 7.5, 8)$	$\tilde{7}=(5, 6, 8, 9)$	$\tilde{7}=(6, 6.5, 7.5, 8)$	$\tilde{7}=(5, 6, 8, 9)$
Абсолютна перевага $\tilde{9}$	$\tilde{9}=(8, 9, 9, 9)$	$\tilde{9}=(7, 9, 9, 9)$	$\tilde{9}=(8, 9, 9, 9)$	$\tilde{9}=(7, 9, 9, 9)$
Проміжні значення між двома сусідніми судженнями	$\tilde{2}=(1, 1.5, 2.5, 3)$ $\tilde{4}=(3, 3.5, 4.5, 5)$ $\tilde{6}=(5, 5.5, 6.5, 7)$ $\tilde{8}=(7, 7.5, 8.5, 9)$	$\tilde{2}=(1, 1, 3, 4)$ $\tilde{4}=(2, 3, 5, 6)$ $\tilde{6}=(4, 5, 7, 8)$ $\tilde{8}=(6, 7, 9, 9)$	$\tilde{2}=(1, 1.5, 2.5, 3)$ $\tilde{4}=(3, 3.5, 4.5, 5)$ $\tilde{6}=(5, 5.5, 6.5, 7)$ $\tilde{8}=(7, 7.5, 8.5, 9)$	$\tilde{2}=(1, 1, 3, 4)$ $\tilde{4}=(2, 3, 5, 6)$ $\tilde{6}=(4, 5, 7, 8)$ $\tilde{8}=(6, 7, 9, 9)$

Звіт має містити:

1 Завдання до роботи згідно з варіантом.

2 Проміжні та кінцеві результати розрахунків згідно із завданням.

3 Текст програми, яка реалізує завдання, скріншоти вікон з результатами.

4 Конкретні висновки по роботі на основі проведеного аналізу.

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1. Дайте означення узгодженої, слабко узгодженої ІМПП.
2. Сформулюйте і доведіть критерій узгодженості ІМПП.
3. Дайте означення властивостей сильного і слабкого збереження порядку в ІМПП.
4. Наведіть етапи методу оцінювання і підвищення узгодженості ІМПП.
5. Наведіть алгоритм методу розрахунку нечітких локальних ваг на основі НМПП.

6. Опишіть декомпозиційний підхід до розрахунку нечітких локальних ваг на основі НМПП.
7. Опишіть модель GPM розрахунку ваг на основі ІМПП.
8. Опишіть методи нормування інтервальних ваг.
9. Дайте означення і наведіть властивості ступеня переваги одного інтервального числа над іншим.
10. Наведіть етапи методу ранжування інтервальних чисел на основі ступенів переваги.
11. Опишіть метод нечіткого програмування переваг FPP.
12. Яку структуру має матриця R в методі нечіткого програмування переваг?
13. Як задається функція приналежності нечіткого відношення нестрогої переваги в методі нечіткого програмування переваг FPP?
14. Доведіть твердження: Якщо ІМПП узгоджена, то $\lambda^* \geq 1$.
15. Доведіть твердження: Якщо ІМПП неузгоджена, то $\lambda^* \in (0,1)$.
16. Як вибирати значення параметрів d_k, щоб гарантувати непорожність допустимої області і додатність значення λ^* в методі FPP.
17. Опишіть метод нечіткої геометричної середньої FRGMM.
18. В чому полягає метод нечітких переваг FAHP?

Практикум 6

Дослідження методів ранжування нечітких ваг альтернатив

Мета роботи:

- *Розглянути загальний алгоритм розв'язання багатокритеріальних задач підтримки прийняття рішень при нечітких оцінках експертів.*
- *Дослідити методи ранжування нечітких ваг; порівняти результати, отримані різними методами та при різних видах функцій приналежності нечітких експертних оцінок.*

1 Теоретичні відомості

Постановка задачі ранжування нечітких глобальних ваг

Дано:

- $A=\left\{A_i \left| i=\overline{1,N}\right.\right\}$ - множина альтернативних варіантів рішень;
- $C=\left\{C_k \left| k=\overline{1,K}\right.\right\}$ - множина критеріїв;
- $w^{неч\ глоб}=\left\{w_i^{неч\ глоб} \left| i=\overline{1,N}\right.\right\}$ - вектор нечітких глобальних ваг альтернатив.

Потрібно:

- знайти ранжування нечітких глобальних ваг $w_i^{неч\ глоб}$,
- оцінити ступінь довіри до отриманого ранжування.

Методи ранжування інтервальних ваг

Дано:

- $w^{глоб}=\left\{(w_i^{глоб}) \left| w_i^{глоб}=\left[w_i^{глоб\ L}, w_i^{глоб\ U}\right], i=1,\ldots,n\right.\right\}$ - вектор інтервальних ваг альтернатив, $w_i^L \le w_i^U$, $w_i^L, w_i^U \in \mathbb{R}$.

Потрібно:

- знайти ранжування інтервальних ваг $w_i^{глоб}$.

Ранжування інтервальних ваг базується на порівнянні двох інтервальних чисел. Розглянемо методи порівняння інтервальних чисел $a=[l_a,u_a]$ і $b=[l_b,u_b]$, $l_a \le u_a$, $l_b \le u_b$, $l_a,u_a,l_b,u_b \in \mathbb{R}$.

I. Методи, що базуються на порівнянні кінців інтервалів [3]

<u>I.1.</u> Нестрога перевага $a \succeq b$ має місце, якщо $(l_a \ge l_b) \wedge (u_a \ge u_b)$.

Метод не працює, коли інтервали строго вкладені. Так, інтервальні числа $a=[0.2, 0.4]$ і $d=[0.1, 0.6]$ – непорівняні.

<u>I.2.</u> Нестрога перевага $a \succeq b$ має місце, якщо центр числа a є більшим за центр числа b і ширина числа a є меншою за ширину числа b:

$$(l_a + u_a \ge l_b + u_b) \wedge (u_a - l_a \le u_b - l_b).$$

II. Методи, що базуються на розрахунку ступеня переваги [3]

Ідея цих методів полягає в тому, що розраховується ступінь переваги $p(a \succeq b) \in [0,1]$ інтервального числа $a=[l_a,u_a]$ над інтервальним числом $b=[l_b,u_b]$.

<u>*II.1*</u>. $p(a \succeq b) = \max\left(1 - \max\left(\frac{u_a - l_b}{(u_a - l_a)+(u_b - l_b)}, 0\right), 0\right).$

Виведемо цю формулу з наступних аксіом:

1. Якщо $u_b \le l_a$, тоді покладемо $p(a \succeq b) = 1$.

2. Якщо $u_a < l_b$, тоді покладемо $p(a \succeq b) = 0$.

3. Якщо $(u_a \ge l_b) \wedge (l_a < u_b)$, тоді визначимо ступінь переваги наступним чином:

$$p(a \succeq b) = \frac{u_a - l_b}{(u_a - l_a)+(u_b - l_b)}.$$

Об’єднаємо умови 2 і 3, отримаємо, що $p(a \succeq b) = \max\left(\frac{u_a - l_b}{(u_a - l_a)+(u_b - l_b)}, 0\right)$.

Об’єднаємо всі три умови 1 – 3, враховуючи рівність

$$\frac{u_a - l_b}{(u_a - l_a) + (u_b - l_b)} = 1 - \frac{u_b - l_a}{(u_a - l_a) + (u_b - l_b)}$$, отримаємо

$$p(a \succeq b) = \max\left(1 - \max\left(\frac{u_a - l_b}{(u_a - l_a) + (u_b - l_b)}, 0\right), 0\right).$$ Доведено.

<u>Властивості</u> $p(a \succeq b)$:

1. $p(a \succeq b) \in [0,1]$, $p(b \succeq a) \in [0,1]$

2. $(p(a \succeq b) = 1) \Leftrightarrow (u_b \leq l_a)$

3. $(p(a \succeq b) = 0) \Leftrightarrow (u_a \leq l_b)$

4. $p(a \succeq b) + p(b \succeq a) = 1$, $p(a \succeq a) = 1/2$

5. $(p(a \succeq b) \geq 1/2) \Leftrightarrow (l_a + u_a \geq l_b + u_b)$ (отримується шляхом розв'язання нерівності $p(a \succeq b) = \frac{u_a - l_b}{(u_a - l_a) + (u_b - l_b)} \geq 1/2$), $(p(a \succeq b) = 1/2) \Leftrightarrow (l_a + u_a = l_b + u_b)$

6. $(p(a \succeq b) \geq 1/2) \wedge (p(b \succeq c) \geq 1/2) \Rightarrow (p(a \succeq c) \geq 1/2)$.

Розглянемо *метод ранжування інтервальних ваг*. Він полягає в наступному [3]:

1. Формування матриці ступенів переваг $P = \{(p_{ij}) \mid i, j = 1, \ldots, n\}$, $p_{ij} = p(w_i \succeq w_j)$, $p_{ij} \in [0,1]$, $p_{ij} + p_{ji} = 1$, $p_{ii} = \frac{1}{2}$.

2. Розрахунок величини переваги ваги w_i над всіма іншими вагами:

$$p_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} .$$

3. Ранжування ваг w_i здійснюється у спадаючому порядку значень p_i.

<u>Приклад.</u> Нехай $a = [0.2, 0.4]$, $b = [0.1, 0.4]$, $c = [0.2, 0.6]$. Матриця ступенів переваг дорівнює:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.6 & 0.33 \\ 0.4 & 0.5 & 0.3 \\ 0.67 & 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Розраховані величини переваги $p_a = 1.43$, $p_b = 1.2$ і $p_c = 1.87$ призводять до ранжування $c \succeq a \succeq b$.

Методи, що базуються на розрахунку відстані між інтервальними вагами

III.1. Строга перевага $a \succ b$ має місце, якщо $P_2(a,O) > P_2(b,O)$,

де $P_2\left(a,O\right) = \sqrt{\left(\frac{l_a + u_a}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{u_a - l_a}{2}\right)^2}$ - відстань між інтервальними числами a і нуль $O = [0,0]$.

<u>Приклад.</u> Нехай $a = [0.2, 0.4]$, $b = [0.1, 0.4]$, $c = [0.2, 0.6]$.

$P_2^2\left(a,O\right) = 0.093$, $P_2^2\left(b,O\right) = 0.070$ і $P_2^2\left(c,O\right) = 0.173$, тому ранжування дорівнює $c \succeq a \succeq b$.

Метод III ранжування нечітких ваг на основі підмножин недомінованих нечітких ваг [28, 29]

<u>Дано:</u>

- $w^{неч} = \left\{ w_i^{неч} \middle| i = \overline{1,N} \right\}$ - вектор нечітких ваг альтернатив, координата $w_i^{неч}$ цього вектору – нечітке число, характеризується функцією належності $\mu_{w_i}\left(x\right)$, $x \in \Re$ ($\Re$ - множина дійсних чисел).

<u>Потрібно:</u>

- знайти ранжування нечітких глобальних ваг $w_i^{неч\ глоб}$;
- оцінити ступінь довіри до отриманого ранжування.

Нечітке відношення нестрогої переваги V на множині нечітких ваг $w^{неч}$ задається функцією належності $\nu\left(w_i^{неч}, w_j^{неч}\right)$, значення $\nu\left(w_i^{неч}, w_j^{неч}\right)$ є ступенем переваги нечіткої ваги $w_i^{неч}$ над нечіткою вагою $w_j^{неч}$:

$$\nu\left(w_i^{неч}, w_j^{неч}\right) = \nu\left(w_i^{неч} \geq w_j^{неч}\right) = \sup_{\substack{x,y\in\Re,\\ x\geq y}} \min\left(\mu_{w_i}(x), \mu_{w_j}(y)\right).$$

Нехай $w_i^{неч}$ є трикутним нечітким числом $w_i^{неч} = \left(w_i^l, w_i^m, w_i^u\right)$, $w_i^l \leq w_i^m \leq w_i^u$. Ступінь переваги $\nu\left(w_i^{неч}, w_j^{неч}\right)$ будемо характеризувати ординатою точки перетину графіків функцій належності $\mu_{w_i}(x)$ і $\mu_{w_j}(y)$. Якщо графіки функцій $\mu_{w_i}(x)$ і $\mu_{w_j}(y)$ не перетинаються і $w_i^u \leq w_j^l$, то ступінь переваги нечіткої ваги $w_i^{неч}$ над нечіткою вагою $w_j^{неч}$ покладається рівним нулю. Якщо $w_i^m \geq w_j^m$, то будемо вважати, що $w_i^{неч}$ переважає $w_j^{неч}$ зі ступенем переваги, рівним одиниці. В іншому випадку, при $w_i^m < w_j^m$ і $w_i^u > w_j^l$ знайдемо ординату точки перетину графіків функцій $\mu_{w_i}(x)$ і $\mu_{w_j}(y)$, вона дорівнює $d = \dfrac{w_i^u - w_j^l}{\left(w_i^u - w_j^l\right) - \left(w_i^m - w_j^m\right)}$. Таким чином,

$$\nu\left(w_i^{неч}, w_j^{неч}\right) = \nu\left(w_i^{неч} \geq w_j^{неч}\right) = \begin{cases} 0, & w_i^u \leq w_j^l \\ 1, & w_i^m \geq w_j^m \\ \dfrac{w_i^u - w_j^l}{\left(w_i^u - w_j^l\right) - \left(w_i^m - w_j^m\right)}, & \left(w_i^m < w_j^m\right) \wedge \left(w_i^u > w_j^l\right) \end{cases}.$$

Відомо, що нечіткі відношення строгої переваги ν_s та еквівалентності ν_e на множині нечітких ваг $w^{неч}$ задаються відповідно функціями належності

$$\nu_s\left(w_i^{неч}, w_j^{неч}\right) = \nu_s\left(w_i^{неч} > w_j^{неч}\right) = \begin{cases} \nu\left(w_i^{неч} \geq w_j^{неч}\right) - \nu\left(w_j^{неч} \geq w_i^{неч}\right), & \nu\left(w_i^{неч} \geq w_j^{неч}\right) > \nu\left(w_j^{неч} \geq w_i^{неч}\right) \\ 0, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

$$\nu_e\left(w_i^{неч}, w_j^{неч}\right) = \nu_e\left(w_i^{неч} \sim w_j^{неч}\right) = \min\left[\nu\left(w_i^{неч} \geq w_j^{неч}\right), \nu\left(w_j^{неч} \geq w_i^{неч}\right)\right].$$

Будемо вважати, що вага $w_i^{неч}$:

1. *строго переважає* вагу $w_j^{неч}$ $\left(w_i^{неч} > w_j^{неч}\right)$, якщо $\nu_s\left(w_i^{неч} > w_j^{неч}\right) \geq \gamma_s$;
2. є *еквівалентною* вазі $w_j^{неч}$ $\left(w_i^{неч} \sim w_j^{неч}\right)$, якщо $\nu_e\left(w_i^{неч} \sim w_j^{неч}\right) \geq \gamma_e$;

3. *нестрого переважає* вагу $w_j^{неч}$ $\left(w_i^{неч} \geq w_j^{неч}\right)$, якщо $\left(w_i^{неч} > w_j^{неч}\right) \vee \left(w_i^{неч} \sim w_j^{неч}\right)$, тобто $\left[v_s\left(w_i^{неч} > w_j^{неч}\right) \geq \gamma_s\right] \vee \left[v_e\left(w_i^{неч} \sim w_j^{неч}\right) \geq \gamma_e\right]$,

де $0 < \gamma_s < 1$ і $0 < \gamma_e < 1$ - встановлені порогові значення.

Розглянемо <u>метод ранжування нечітких ваг</u> $w_i^{неч}$, який є модифікацією відомого методу для чітких відношень переваг:

1. Побудуємо підмножину M_1 недомінованих нечітких ваг $w_{j_1}^{неч}$ з усієї множини $w^{неч}$, $M_1 = \left\{w_{j_1}^{неч} \middle| \neg\exists\, w_i^{неч} : w_i^{неч} > w_{j_1}^{неч}, i \neq j_1, w_i^{неч}, w_{j_1}^{неч} \in w^{неч}\right\}$. Пов’яжемо з M_1 підмножину індексів $J_1 = \left\{j_1 \in J \middle| w_{j_1}^{неч} \in M_1\right\}$, $J = [1, N]$. Тоді всі об’єкти O_{j_1}, $j_1 \in J_1$, отримують перший (найвищий) ранг.
2. Побудуємо підмножину M_2 недомінованих нечітких ваг $w_{j_2}^{неч}$, $M_2 = \left\{w_{j_2}^{неч} \middle| \neg\exists\, w_i^{неч} : w_i^{неч} > w_{j_2}^{неч}, i \neq j_2, w_i^{неч}, w_{j_2}^{неч} \in w^{неч} \setminus M_1\right\}$. Пов’яжемо з M_2 підмножину індексів $J_2 = \left\{j_2 \in J \middle| w_{j_2}^{неч} \in M_2\right\}$. Тоді об’єкти O_{j_2}, $j_2 \in J_2$, отримують другий ранг.
3. Аналогічно будуються інші $M_3, \ldots, M_m$ і визначаються групи об’єктів, які отримують третій і подальші ранги.

2 Порядок виконання роботи

2.1. Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2. Розглянути ієрархію та множину МПП, які побудовані в лабораторній роботі №3 (п.2.2).

2.2.1. Виконати фазифікацію всіх МПП ієрархії, використовуючи функції приналежності з лабораторної роботи №5. Отримати множину нечітких МПП (НМПП).

2.2.2. Виконати декомпозицію НМПП на множини рівня α, $\alpha \in [0,1]$ з кроком 0.01, тобто розглядати значення $a = 0$, $a = 0.01$, ..., $a = 1$.

Для кожного значення α :

- побудувати множину інтервальних МПП (ІМПП) всієї ієрархії,

- розрахувати локальні ваги на основі ІМПП, використовуючи методи GPM, FPP та FRGMM згідно з варіантом,

- побудувати ранжування на основі локальних ваг, використовуючи методи згідно з варіантом,

- розрахувати глобальні ваги елементів ієрархії, використовуючи метод згідно з варіантом,

- побудувати ранжування на основі глобальних ваг.

2.2.3. Побудувати графіки залежності локальних і глобальних ранжувань від рівня α. Чи змінюються локальні чи глобальне ранжування при різних значеннях рівня α?

2.2.4. Встановити як зміна функції приналежності впливає на зміну ранжувань.

2.3. Згідно з варіантом, дослідити метод ранжування, який базується на побудові підмножин недомінованих нечітких ваг:

2.3.1. Розглянути НМПП та трикутні функції приналежності з лабораторної роботи №5,

2.3.2. Розрахувати локальні ваги на основі НМПП, використовуючи методи, згідно з варіантом:

- GPM для НМПП з трикутними функціями приналежності,
- FRGMM.

2.3.3. Вибрати значеннях порогів $\gamma_s \in (0,1)$ і $\gamma_e \in (0,1)$, побудувати ранжування, використовуючи метод побудови підмножин недомінованих нечітких ваг.

2.3.4. Змінювати значення порогів γ_s і γ_e з певним кроком, наприклад, 0.1, знайти ранжування. Чи змінюється ранжування при різних значеннях наборів порогів? Виявити значення наборів порогів γ_s і γ_e, які призводять до різних підмножин недомінованих нечітких ваг.

2.3.5. Навести результати для всіх заданих згідно варіанту видів функцій приналежності нечітких експертних оцінок.

2.4. Зробити висновки по роботі.

2.5. Дати відповіді на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

Варіанти завдань

№ варі-анту	**№ пункту порядку виконання роботи**	**Метод розрахунку лок.ваг**	**№ нечіткої МПП (див. лаб. роботу №5)**	**Метод агрегування**	**Метод ранжу-вання**
1	2.3	GPM	1, 2, 3	-	III
2	2.2	GPM	13, 3, 6	Дистрибутив.	I, II
3	2.2	GPM	1, 14, 15	ГВБВПА з дистрибутив.	III
4	2.2	FPP, FRGMM	13, 3, 6	Мультиплік.	I, II
5	2.3	FRGMM	1, 14, 15	-	III
6	2.3	GPM	4, 5, 6	-	III
7	2.2	GPM	7, 16, 17	ГВБВПА з дистрибутив.	I, II
8	2.3	GPM	8, 18, 19	-	III

9	2.2	FPP, FRGMM	7, 16, 17	ГВБВПА з дистрибутив.	I, II
10	2.2	FPP, FRGMM	8, 18, 19	ГВБВПА з мультиплік.	III
11	2.3	FRGMM	7, 8, 9	-	III
12	2.2	GPM	11, 20, 21	Дистрибутив.	III
13	2.2	GPM	22, 23, 24	Функція min	III
14	2.2	FPP, FRGMM	11, 20, 21	Дистрибутив.	III
15	2.2	FPP, FRGMM	22, 23, 24	Мультиплік.	III
16	2.3	GPM	10, 11, 12	-	III
17	2.2	GPM	25, 26	Функція min	III
18	2.2	GPM	27, 28	Функція min	III
19	2.2	FPP, FRGMM	25, 26	ГВБВПА з дистрибутив.	I, II
20	2.2	FPP, FRGMM	27, 28	ГВБВПА з мультиплік.	I, II
21	2.3	FRGMM	29, 30	-	III
22	2.2	GPM	31, 32	Функція min	I, II
23	2.2	GPM	33, 34	Дистрибутив.	I, II
24	2.2	FPP, FRGMM	31, 32	Дистрибутив.	III
25	2.2	FPP, FRGMM	33, 34	Мультиплік.	III
26	2.3	FRGMM	35, 36	-	III

Додаткові варіанти завдань (для захисту роботи)

1. Методами I, II і III виконати ранжування інтервальних ваг w_1=[0.03, 0.25], w_2=[0.09, 0.30], w_3=[0.20, 0.35], w_4=[0.30, 0.45], w_5=[0.01, 0.09].

2. Методами I, II і III виконати ранжування інтервальних ваг w_1=[0.1, 0.3], w_2=[0.05, 0.25], w_3=[0.30, 0.45], w_4=[0.30, 0.55], w_5=[0.15, 0.25]

3. Методами I, II і III виконати ранжування інтервальних ваг w_1=[0.23, 0.36], w_2=[0.1, 0.20], w_3=[0.25, 0.40], w_4=[0.30, 0.45]

4. Розрахувати ваги методом нечіткої геометричної середньої та виконати їх ранжування методами I, II і III для НМПП варіанту 13 лабораторної роботи №5 за умови використання функції приналежності №1.

5. Розрахувати ваги методом нечіткої геометричної середньої та виконати їх ранжування методами I, II і III для НМПП варіанту 14 лабораторної роботи №5 за умови використання функції приналежності №2.

6. Розрахувати ваги методом нечіткої геометричної середньої та виконати їх ранжування методами I, II і III для НМПП варіанту 15 лабораторної роботи №5 за умови використання функції приналежності №3.

7. Розрахувати ваги методом нечіткої геометричної середньої та виконати їх ранжування методами I, II і III для НМПП варіанту 16 лабораторної роботи №5 за умови використання функції приналежності №4.

8. Розрахувати ваги методом нечіткої геометричної середньої та виконати їх ранжування методами I, II і III для НМПП варіанту 17 лабораторної роботи №5 за умови використання функції приналежності №5.

9. Виконати ранжування ваг методом на основі підмножин недомінованих нечітких ваг: w_1=[0.03; 0.10; 0.25], w_2=[0.09; 0.18; 0.30], w_3=[0.20; 0.25; 0.35], w_4=[0.30; 0.40; 0.45], w_5=[0.01; 0.07; 0.09]. Порогові значення вибрати самостійно.

10. Виконати ранжування ваг методом на основі підмножин недомінованих нечітких ваг: w_1=[0.23; 0.30; 0.36], w_2=[0.1; 0.13; 0.20], w_3=[0.25; 0.35; 0.40], w_4=[0.30; 0.40; 0.45]. Порогові значення вибрати самостійно.

11. Виконати ранжування ваг методом на основі підмножин недомінованих нечітких ваг: w_1=[0.1; 0.2; 0.3], w_2=[0.05; 0.18; 0.25], w_3=[0.30; 0.40; 0.45], w_4=[0.30; 0.50; 0.55], w_5=[0.15; 0.20; 0.25]. Порогові значення вибрати самостійно.

Звіт має містити:

1. Завдання згідно з варіантом.
2. Текст програми, яка реалізує завдання роботи.
3. Результати роботи:

для п.2.2 порядку виконання роботи:

- ІМПП та локальні ваги на їх основі для декількох значень α ($a=0$, $\alpha=0.1$, $a=0.5$, $a=1$), ранжування на основі локальних ваг,
- глобальні ваги елементів ієрархії, ранжування на їх основі,
- графіки залежності локальних і глобальних ранжувань від рівня α,
- дати відповідь на питання, чи змінюються локальні чи глобальне ранжування при різних значеннях рівня α.

Навести результати для кожної із функцій приналежності, заданих згідно з варіантом.

Навести вікна програми.

Для п.2.3 порядку виконання роботи:

- локальні ваги на основі НМПП,
- підмножини недомінованих нечітких ваг та результуючі ранжування для різних наборів значень порогів γ_s і γ_e,
- дати відповідь на питання, чи змінюється ранжування при різних значеннях наборів порогів,
- виявлені значення наборів порогів γ_s і γ_e, які призводять до різних підмножин недомінованих нечітких ваг,

Навести результати для для кожної із функцій приналежності нечітких експертних оцінок, заданих згідно з варіантом.
Навести вікна програми.

4. Висновки по роботі.

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1. В чому полягає загальний підхід до багатокритеріального оцінювання альтернатив при нечітких оцінках експертів?
2. Опишіть етапи алгоритму розв'язання багатокритеріальних задач підтримки прийняття рішень при нечітких оцінках експертів.
3. В чому полягає дистрибутивний метод агрегування інтервальних ваг.
4. Опишіть мультиплікативний метод агрегування інтервальних ваг.
5. Опишіть метод на основі функції мінімуму для агрегування інтервальних ваг.
6. Наведіть етапи методу ГВБВПА для агрегування інтервальних ваг.
7. Опишіть метод ранжування інтервальних ваг, який базується на розрахунку ступеня переваги.
8. Опишіть метод ранжування інтервальних ваг, який базується на розрахунку відстані між інтервальними вагами. Вивести формулу для відстані.
9. Як визначаються нечіткі відношення нестрогої переваги, строгої переваги та еквівалентності?
10. Як розраховуються підмножини недомінованих нечітких ваг?

Практикум 7
Дослідження спектрального методу оцінювання узгодженості нечітких оцінок експерта

Мета роботи:

Дослідити спектральний метод оцінювання узгодженості залежно від використання функцій приналежності різного виду для представлення нечітких експертних оцінок.

1 Теоретичні відомості

Розглянемо $A^{неч} = \left\{ \left(a_{ij}^{неч} \right) \middle| \; i, j = \overline{1, N} \right\}$ - нечітку матрицю парних порівнянь (НМПП).

Потрібно:

- оцінити рівень узгодженості НМПП, визначити, чи допустимий рівень неузгодженості для розрахунку ваг на її основі, використовуючи спектральний підхід,

- дослідити чутливість результатів до зміни функцій приналежності елементів НМПП.

Відомо, що при оцінюванні узгодженості точкової експертної інформації використовується декілька показників, які пов’язані з методами розрахунку ваг на основі МПП. Так, при розрахунку ваг за методом головного власного вектору використовується відношення узгодженості CR, яке розраховується на основі найбільшого власного числа МПП. При використанні методу адитивної нормалізації розрахунку ваг мірою узгодженості МПП слугує гармонічне відношення узгодженості, при використанні методу геометричної середньої – незміщена оцінка дисперсії збурень.

Інший показник узгодженості експертних оцінок – це спектральний коефіцієнт узгодженості, який не пов’язаний з методом розрахунку ваг.

Розглянемо декомпозиційний підхід до розрахунку нечіткого спектрального коефіцієнта узгодженості.

<u>Нечіткий спектральний коефіцієнт узгодженості</u> $k_y^{неч}$ визначимо як інфінум інтервальних спектральних коефіцієнтів узгодженості $k_y^{інтерв}(\alpha)$ ІМПП $A(\alpha)$ при рівні $\alpha \in [0,1]$: $k_y^{неч} = \inf_{\alpha \in [0;1]} k_y^{інтерв}(\alpha)$. [28 – 31]

Оцінювання узгодженості інтервальних оцінок експертів

Дано: $A = \left\{(a_{ij}) \middle| a_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}], i, j = \overline{1,n}\right\}$ - ІМПП, де $u_{ij} \geq l_{ij} > 0$, $l_{ij} = \dfrac{1}{u_{ji}}$ при $i \neq j$ і $a_{ii} = l_{ii} = u_{ii} = 1$..

Потрібно: побудувати інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості ІМПП A.

Для побудови інтервального спектрального коефіцієнту узгодженості будемо використовувати поняття породженої матриці та відстані між інтервальними числами, тому дамо їх означення.

<u>Матрицею, породженою h-им рядком ІМПП</u> A $(h = \overline{1,n})$ назвемо інтервальну матрицю $A^h = \left\{(a_{ij}^h) \middle| a_{ij}^h = [l_{ij}^h, u_{ij}^h], i, j = \overline{1,n}\right\}$, елементи $[l_{hj}^h, u_{hj}^h]$, $j \neq h$, h -го рядка якої дорівнюють елементам h-го рядка вихідної ІМПП A; елементи $[l_{ih}^h, u_{ih}^h]$, $i \neq h$, h-го стовбчика A^h розраховуються за елементами h-го рядка A^h згідно з правилом оберненої симетричності: $l_{ih}^h = 1/u_{hi}^h$, $u_{ih}^h = 1/l_{hi}^h$; всі інші елементи $[l_{ij}^h, u_{ij}^h]$ матриці A^h, $i \neq j \neq h$ (крім діагональних), обчислюються згідно з правилом транзитивності: $l_{ij}^h = l_{ih}^h l_{hj}^h$, $u_{ij}^h = u_{ih}^h u_{hj}^h$ [28, 29].

Таким чином, в h-му рядку A^h відображені результати порівняння кожного об’єкту O_i, $i = \overline{1,n}$, з об’єктом O_h. Суб’єктивність ІМПП A і протиріччя при порівнянні об’єктів, які виникають, призводять до того, що значення ваг $w^h = \left\{(w_i^h) \middle| w_i^h = [w_i^{lh}, w_i^{uh}], i = \overline{1,n}\right\}$, отриманих на основі множини

$\left\{A^h \middle| h=\overline{1,n}\right\}$, відрізняються між собою. Відмінності є тим більшими, чим більшим є рівень неузгодженості ІМПП A.

<u>Відстань</u> $D(A,B)$ *<u>між інтервальними числами</u>* $A=[a_1,a_2]$ і $B=[b_1,b_2]$ визначається наступним чином:

$$D^2(A,B)=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\left(\frac{a_1+a_2}{2}+x(a_2-a_1)\right)-\left(\frac{b_1+b_2}{2}+y(b_2-b_1)\right)\right)^2 dxdy=$$

$$=\left(\frac{a_1+a_2}{2}-\frac{b_1+b_2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)^2+\left(\frac{b_2-b_1}{2}\right)^2\right),$$

$$D(A,B)=\sqrt{D^2(A,B)}.$$

Таким чином, при розрахунку величини $D(A,B)$ беруться до уваги всі точки в обох інтервалах, на відміну від більшості існуючих методів розрахунку відстані, які часто базуються тільки на значеннях лівого і правого кінців інтервалів.

Побудуємо матрицю відстаней $D=\left\{(d_{ij}) \middle| i,j=\overline{1,n}\right\}$:

$$d_{ij}=D(a_{ij},O),$$

де $a_{ij}=[l_{ij},u_{ij}]$, $O=[0,0]$ - число нуль.

Відстань d_{ij} використовуємо як чітке представлення інтервального числа a_{ij}. Тоді

$$d_{ij}=\sqrt{\left(\frac{l_{ij}+u_{ij}}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{u_{ij}-l_{ij}}{2}\right)^2}.$$

Перейдемо до побудови інтервального спектрального коефіцієнту узгодженості. Нехай $\left\{A^h \middle| h=\overline{1,n}\right\}$ - множина матриць, породжених рядками ІМПП A. Нехай $\left\{w^h \middle| h=\overline{1,n}\right\}$ - множина інтервальних векторів ваг $w^h=\left\{(w^{kh}) \middle| k=\overline{1,n}\right\}$, де $w^{kh}=\left\{(w_i^{kh}) \middle| w_i^{kh}=\left[w_i^{kh\,l},w_i^{kh\,u}\right], i=\overline{1,n}\right\}$ - інтервальна вага об'єкта O_k отримана на основі породженої матриці A^h. Тобто, кожний об'єкт O_k, $k=\overline{1,n}$, характеризується n оцінками інтервальних ваг $W^k=\left\{\left(w^{kh}\right)\middle|\ h=\overline{1,n}\right\}$.

Нехай оцінки ваг W^k є номерами позначок деякої шкали $S=\left\{s_j\ \middle|\ j=\overline{0,m}\right\}$ з $(m+1)$ позначками. Кількість позначок шкали можна визначити задавшись допустимою помилкою віднесення оцінки ваг до тієї чи іншої позначки. Нехай нульова і остання поділки відповідно дорівнюють $s_0=0$ і $s_m=1$. Позначка шкали s_j дорівнює j/m.

Побудуємо відображення $F^k: W^k \to S$, $F^k\left(w^{kh}\right)=s_j$. Для цього пов'яжемо з множиною W^k множину відстаней D^k інтервальних ваг w^{kh} до чіткого числа нуль $O=[0,0]$, яке символізує нульову позначку шкали s_0: $D^k=\left\{d^{kh}\middle|d^{kh}\in\Re, h=\overline{1,n}\right\}$, де відстань $d^{kh}=D\left(w^{kh},O\right)$ розраховується за наведеним вище означенням. Тобто, віднесення інтервальної ваги w^{kh} до тієї чи іншої позначки шкали будемо проводити згідно з віддаленістю цієї ваги від нульової позначки шкали. Тоді відображення F^k - це композиція відображень G і D^k, $F^k=G\circ D^k$, де $G\left(d^{kh}\right)$ - позначка шкали, найменш віддалена від d^{kh}.

Представимо множину W^k спектром $R^k=\left\{\left(r_j^k\right)\middle|\ j=\overline{1,m}\right\}$, де r_j^k - кількість інтервальних ваг, що належать позначці шкали s_j. Для побудови інтервального спектрального коефіцієнта узгодженості ІМПП необхідно спочатку визначити інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості $k_y^{інтерв}\left(R^k\right)$ спектра R^k множини W^k інтервальних ваг об'єкта O_k, отриманих на основі множини породжених матриць $\left\{A^h\middle|h=\overline{1,n}\right\}$.

<u>*Інтервальним спектральним коефіцієнтом узгодженості спектра*</u> R^k множини W^k інтервальних ваг об'єкта O_k, отриманих на основі множини

породжених матриць $\left\{A^h \middle| h=\overline{1,n}\right\}$, називається коефіцієнт узгодженості $k_y^{інтерв}\left(R^k\right)$ [28 – 31]:

$$k_y^{інтерв}(R^k)=\left(1-\frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} r_j^k\left|j-a^k\right|-\sum_{j=1}^{m}\frac{r_j^k}{n}\ln\left(\frac{r_j^k}{n}\right)}{G\sum_{j=1}^{m}\left|j-\frac{m+1}{2}\right|+\ln(m)}\right)z,$$

де a^k - середнє значення множини інтервальних ваг W^k, $G=\dfrac{n}{\ln(n)\cdot m\cdot\ln(m)}$ - масштабний коефіцієнт, z - булева функція, яка задає необхідні та достатні умови рівності нулю $k_y^{інтерв}\left(R^k\right)$.

Коефіцієнт $k_y^{інтерв}\left(R^k\right)$ є теоретичним, а не емпіричним показником узгодженості, в тому розумінні, що не потребує розрахунку узгодженості випадковим чином заповнених МПП.

Таким чином, результати парних порівнянь об'єктів O_i, $i=\overline{1,n}$ відносно об'єкта O_k характеризуються $k_y^{інтерв}\left(R^k\right)$. Тому визначимо міру узгодженості всієї ІМПП як інфінум множини інтервальних спектральних коефіцієнтів узгодженості $k_y^{інтерв}\left(R^k\right)$, аналогічно до визначення міри узгодженості точкової ІМПП .

Інтервальним спектральним коефіцієнтом узгодженості ІМПП A називається коефіцієнт

$$k_y^{інтерв}=\inf_{k\in[1;n]} k_y^{інтерв}(R^k).$$

Допустимість рівня неузгодженості ІМПП оцінюється шляхом порівняння $k_y^{інтерв}$ з інтервальними порогами застосування $T_з^{інтерв}$ та виявлення $T_в^{інтерв}$.

Порогом застосування при оцінці узгодженості результатів парних порівнянь, наданих одним експертом, називається коефіцієнт узгодженості множини експертних оцінок, який забезпечує розрахунок ваг елементів з допустимою точністю. Для характеристики точності ваг будемо використовувати поняття «допустимої відмінності у оцінках», де допустимою вважається відмінність двох оцінок не більш ніж на b поділок шкали (рис. 7.1). Вибір величини b визначається вимогами до якості експертної інформації. Як правило, приймають $b=1$.

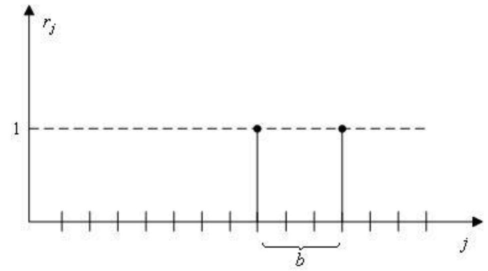


Рисунок 7.1. Спектр оцінок для розрахунку порогу застосування [3]

<u>*Інтервальним порогом застосування*</u> $T_з^{інтерв}$ при дослідженні узгодженості інтервальних оцінок парних порівнянь експерта називається інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості $k_у^{інтерв}\left(R^k\right)$ спектра R^k, який містить тільки дві інтервальні оцінки, віддалені на b поділок шкали. Відстань між цими двома оцінками визначається згідно з означенням відстані $D(A,B)$ між інтервальними числами $A=[a_1,a_2]$ і $B=[b_1,b_2]$ [28, 29].

Рівень неузгодженості інтервальних експертних оцінок будемо вважати допустимим, якщо $k_у^{інтерв} \geq T_з^{інтерв}$. В іншому випадку, якщо $k_у^{інтерв}\left(R^k\right)$ приймає значення менше за поріг застосування, то можливі два випадки:

- експертні оцінки містять корисну інформацію, тоді для досягнення допустимого рівня неузгодженості застосовуються методи підвищення узгодженості,

- в експертних оцінках міститься шум, тоді необхідно заново провести оцінювання.

Для визначення, чи містять оцінки інформацію, використовується інтервальний поріг виявлення – коефіцієнт узгодженості експертних оцінок, які містять мінімальну кількість інформації.

<u>*Інтервальним порогом виявлення*</u> $T_{в}^{інтерв}$ при оцінці узгодженості елементів інтервальної матриці парних порівнянь називається інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості $k_{у}^{інтерв}(R^k)$ спектра R^k, який будується наступним чином: із спектра, в якому кожну поділку шкали вибрав рівно один експерт, виключається оцінка, що знаходиться на поділці 1, і переміщується додатково на поділку $[\varepsilon m+1]$, де $[.]$ - операція взяття цілої частини, $\varepsilon = 0.5$ - мінімально реєстрована величина (рис.7.2) [28, 29].

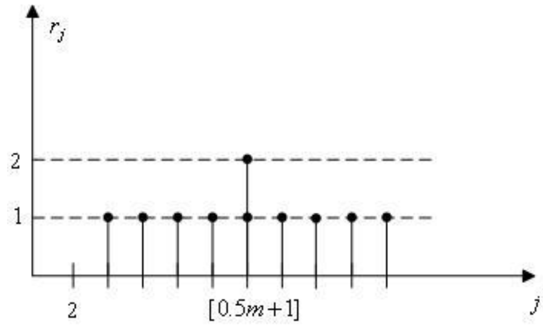


Рисунок 7.2. Спектр оцінок для розрахунку порогу виявлення [3]

Якщо $k_{у}^{інтерв} < T_{в}^{інтерв}$, то експертні оцінки не містять інформації і необхідно заново провести оцінювання. У випадку $T_{в}^{інтерв} \le k_{у}^{інтерв} < T_{з}^{інтерв}$ експертні оцінки містять інформацію, але є сильно неузгодженими, тоді для досягнення допустимого рівня неузгодженості застосовують методи підвищення узгодженості ІМПП.

2 Порядок виконання роботи

2.1. Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2. <u>Взяти НМПП та розглянути декілька функцій приналежності, які були задані за варіантом з лабораторної роботи №5</u>.

2.3. Розкласти НМПП на множини рівня α, $\alpha \in [0,1]$ з кроком 0.01, тобто розглядати значення $a = 0$, $a = 0.01$, ..., $a = 1$,

для кожного значення α *:*

- побудувати ІМПП,

- розрахувати коефіцієнт узгодженості $k_y^{інтерв}$ ІМПП, пороги $T_в^{інтерв}$ та $T_з^{інтерв}$,

- побудувати графік залежності $k_y^{інтерв}$ від α, зробити висновок щодо допустимості неузгодженості ІМПП,

- розрахувати нечіткий спектральний коефіцієнт узгодженості, нечіткі пороги виявлення та застосування,

- порівняти результати, отримані для НМПП, всіх ІМПП та чіткої МПП (при $a = 1$).

2.4. Порівняти результати, знайдені при різних функціях приналежності.

2.5. Дати відповіді на контрольні питання.

Звіт має містити:

1. Завдання згідно з варіантом.
2. Текст програми, яка реалізує п.2.3 порядку виконання роботи.
3. Результати роботи:

для кожного виду функцій приналежності:

- ІМПП для декількох значень α ($a = 0$, $\alpha = 0.1$, $a = 0.5$, $a = 1$),
- спектральні коефіцієнти узгодженості $k_y^{інтерв}$, пороги $T_в^{інтерв}$ та $T_з^{інтерв}$ для ІМПП за наведених вище чотирьох значень α,
- графік залежності $k_y^{інтерв}$ від α,
- висновки про необхідність підвищення узгодженості кожної ІМПП,
- нечіткий спектральний коефіцієнт узгодженості, нечіткі пороги виявлення та застосування, висновок щодо необхідності підвищення узгодженості НМПП,

- чітка МПП, значення k_y та порогів, висновок щодо необхідності підвищення узгодженості чіткої МПП.

Навести вікна програми.

4. Висновки по роботі.

Додаткові варіанти завдань (для захисту роботи)

№	**Застосувати спектральний метод до оцінювання узгодженості ІМПП**	№	**Застосувати спектральний метод до оцінювання узгодженості ІМПП**
1	$\begin{pmatrix} 1 & [\frac{1}{2},1] & [\frac{1}{2},1] & [3,5] \\ [1,2] & 1 & [2,4] & [\frac{1}{2},1] \\ [1,2] & [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & 1 & [1,3] \\ [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [1,2] & [\frac{1}{3},1] & 1 \end{pmatrix}$	4	$\begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [\frac{1}{2},1] & [\frac{1}{2},1] \\ [\frac{1}{3},1] & 1 & [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [\frac{1}{2},1] \\ [1,2] & [3,5] & 1 & [\frac{1}{3},\frac{1}{2}] \\ [1,2] & [1,2] & [2,3] & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} 1 & [2,4] & [1,3] & [1,3] \\ [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & 1 & [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & [1,2] \\ [\frac{1}{3},1] & [2,4] & 1 & [\frac{1}{2},1] \\ [\frac{1}{3},1] & [\frac{1}{2},1] & [1,2] & 1 \end{pmatrix}$	5	$\begin{pmatrix} 1 & [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [\frac{1}{2},1] \\ [3,5] & 1 & [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & [1,3] \\ [3,5] & [2,4] & 1 & [\frac{1}{2},1] \\ [1,2] & [\frac{1}{3},1] & [1,2] & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [3,5] & [1,3] \\ [\frac{1}{3},1] & 1 & [\frac{1}{2},1] & [2,4] \\ [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] & [1,2] & 1 & [\frac{1}{5},\frac{1}{3}] \\ [\frac{1}{3},1] & [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & [3,5] & 1 \end{pmatrix}$	6	$\begin{pmatrix} 1 & [\frac{1}{4},\frac{1}{2}] & [1,3] & [\frac{1}{2},1] \\ [2,4] & 1 & [5,7] & [\frac{1}{2},1] \\ [\frac{1}{3},1] & [\frac{1}{7},\frac{1}{5}] & 1 & [\frac{1}{3},\frac{1}{2}] \\ [1,2] & [1,2] & [2,3] & 1 \end{pmatrix}$

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1. Дайте означення спектру експертних оцінок.
2. Як будується спектральний коефіцієнт узгодженості для точкових оцінок експертів?

3. Наведіть приклади повністю узгодженого та повністю неузгодженого спектрів точкових експертних оцінок.
4. Дайте означення породженої матриці.
5. Сформулюйте означення інтервальної породженої матриці.
6. Дайте означення нечіткого спектрального коефіцієнту узгодженості.
7. Наведіть етапи розрахунку спектрального коефіцієнту узгодженості інтервальних експертних оцінок.
8. Як розраховуються інтервальні пороги виявлення та застосування?
9. Сформулюйте критерій необхідності підвищення узгодженості експертних оцінок при застосуванні спектрального підходу.

Практикум 8

Дослідження методів ELECTRE і PROMETHEE багатокритеріального оцінювання альтернатив рішень

Мета роботи:

- *Дослідити методи багатокритеріального оцінювання альтернатив:*
  - PROMETHEE I / II,
  - ELECTRE I / III,
- *Оцінити узгодженість індивідуальних ранжувань за показниками:*
  - коефіцієнт рангової кореляції,
  - коефіцієнт конкордації.
- *Знайти групове ранжування альтернатив методами:*
  - Борда,
  - Кондорсе.

Порівняти результати, отримані різними методами.

2 Теоретичні відомості

Постановка задачі

Дано:

$A = \{a_i \mid i = 1,...,n\}$ - множина альтернатив,

$C = \{c_j \mid j = 1,...,m\}$ - множина критеріїв (якісних та/чи кількісних),

$V = (v_j(a_i))$ - матриця рішень - оцінки альтернатив за критеріями (ненормовані ваги альтернатив за критеріями),

$W^c = (w_j^c)$ - ваги критеріїв, $\sum_{j=1}^{m} w_j^c = 1$.

Потрібно:

1. визначити ранжування альтернатив;
2. вибрати найкращу альтернативу.

Методи PROMETHEE (Preference Ranking Organization METHod for Enrichment Evaluations)

1) Розраховується агрегований ступінь переваги a_k над a_l за усіма критеріями

$$F(a_k, a_l) = \sum_{j=1}^{m} w_j^c H_j(a_k, a_l),$$

$H_j(a_k, a_l) = H_j(f_j(a_k, a_l))$ - ступінь переваги a_k над a_l за критерієм c_j,

$f_j(a_k, a_l) = v_j(a_k) - v_j(a_l)$, $0 \le H_j(a_k, a_l) \le 1$.

Використовуються шість типів функцій переваг (рис.8.1). Для кожного критерію експерт (чи ОПР) вказує вид функції переваги та її параметри. На рис.5.1 q_j і p_j - пороги нерозрізненості і строгої переваги відповідно. Для гаусівської функції використовується параметр середньої переваги s_j.

Наприклад, якщо $H_j(a_k, a_l)$ - лінійна функція переваги (див.рис.8.1 – linear shape), то її аналітичний вигляд наступний:

$$H_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 1, & v_j(a_k) - v_j(a_l) \ge p_j \\ 0, & v_j(a_k) - v_j(a_l) \le q_j \\ \frac{v_j(a_k) - v_j(a_l) - q_j}{p_j - q_j}, & \text{інакше} \end{cases}.$$

2) Для кожної альтернативи a_k розраховуються:

- вихідний потік - ступінь переваги a_k над усіма a_l, $\forall l \ne k$,

$$\Phi^+(a_k) = \tfrac{1}{n-1} \sum_{l \ne k} F(a_k, a_l)$$

- вхідний потік - ступінь переваги усіх a_l, $\forall l \ne k$ над a_k,

$$\Phi^-(a_k) = \tfrac{1}{n-1} \sum_{l \ne k} F(a_l, a_k)$$

- чистий потік $\Phi(a_k) = \Phi^+(a_k) - \Phi^-(a_k)$.

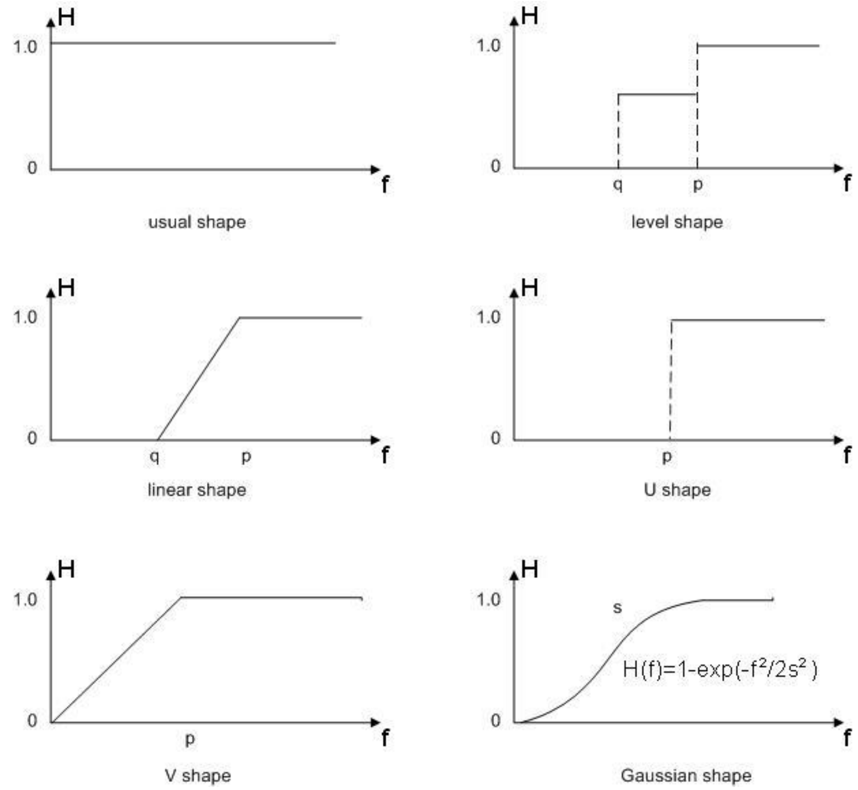


Рис. 8.1 - Функції переваги в методі PROMETHEE

В методі PROMETHEE I альтернативи ранжуються за вихідним і вхідним потоками:

$a_k \mathrm{I} a_l$ якщо $(\Phi^+(a_k) = \Phi^+(a_l)) \wedge (\Phi^-(a_k) = \Phi^-(a_l))$

$$a_k \mathrm{P} a_l \text{ якщо } \left[\begin{array}{l} (\Phi^+(a_k) \geq \Phi^+(a_l)) \wedge (\Phi^-(a_k) < \Phi^-(a_l)) \\ (\Phi^+(a_k) > \Phi^+(a_l)) \wedge (\Phi^-(a_k) = \Phi^-(a_l)) \end{array}\right.$$

$a_k \mathrm{Q} a_l$ в іншому випадку,

де I,P,Q - відношення нерозрізненості, сильної і слабкої переваги (непорівнюваності) відповідно.

В результаті порівняння вихідних і вхідних потоків можна отримати часткове ранжування, оскільки деякі альтернативи можуть виявитися непорівнюваними.

Для отримання повного ранжування порівнюються чисті потоки (метод PROMETHEE II):

$a_k \mathrm{I} a_l$ якщо $\Phi(a_k) = \Phi(a_l)$,

$a_k \mathrm{P} a_l$ якщо $\Phi(a_k) > \Phi(a_l)$.

Приклад

Нехай задача полягає в оцінюванні п'яти альтернатив за шістьома критеріями, всі критерії потрібно максимізувати. Матриця рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6
a1	10	4	5	1	5	5
a2	25	5	4	1/2	4	4
a3	40	3	1	1/4	2	2
a4	20	5	3	1/2	2	4
a5	50	5	4	1/3	5	3

Ваги критеріїв дорівнюють:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6
w_j^c	0.12	0.15	0.33	0.19	0.07	0.14

Нехай для критеріїв використовувалися наступні типи функцій переваги:

Критерій	Функція переваги	Параметри
c1	Gaussian shape	s=15
c2	U shape	p=1.5
c3	linear shape	p=2, q=1
c4	Level shape	p=1.5, q=0.5
c5	Level shape	p=1.5, q=0.5
c6	Level shape	p=2, q=1

Згідно з методом PROMETHEE необхідно за кожним критерієм розрахувати значення функцій переваг для кожної пари альтернатив.

Наприклад, для критерію с4 значення функції переваг $H_4(a_k, a_l)$ для всіх пар альтернатив дорівнюють:

	a1	a2	a3	a4	a5
a1	0	0.5	1	1	0
a2	0	0	1	1	0
a3	0	0	0	0	0
a4	0	0	0	0	0
a5	0	0.5	1	1	0

Значення функції $F(a_k, a_l)$:

	a1	a2	a3	a4	a5
a1	0	0.082	0.739	0.424	0.352
a2	0.047	0	0.737	0.076	0.090
a3	0.104	0.047	0	0.071	0.024
a4	0.024	0.006	0.691	0	0.104
a5	0.117	0.125	0.574	0.174	0

Потоки для альтернатив дорівнюють:

	a1	a2	a3	a4	a5
Φ^+	0.399	0.238	0.061	0.206	0.247
Φ^-	0.073	0.065	0.685	0.186	0.142
Φ	0.326	0.173	-0.624	0.020	0.105

Порівнюючи чисті потоки, *ранжування* альтернатив:

$$A_1 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_3 .$$

Методи ELECTRE (з фр.ELimination and Choice Expressing REality)

Метод ELECTRE III

1) Для кожної пари альтернатив a_k, a_l розраховується <u>агрегований індекс згоди</u> $T(a_k, a_l)$ за усіма критеріями:

$$T(a_k, a_l) = \sum_{j=1}^{m} w_j^c t_j(a_k, a_l),$$

де w_j^c - вага критерію c_j, $\sum_{j=1}^{m} w_j^c = 1$,

$t_j(a_k, a_l)$ - <u>індекс згоди</u> - ступінь того, що a_k є не гіршою за a_l за критерієм c_j:

$$t_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 0, & v_j(a_l) \geq v_j(a_k) + p_j(v_j(a_k)) \\ 1, & v_j(a_l) \leq v_j(a_k) + q_j(v_j(a_k)) \\ \frac{p_j(v_j(a_k)) - (v_j(a_l) - v_j(a_k))}{p_j(v_j(a_k)) - q_j(v_j(a_k))}, & \text{інакше} \end{cases}$$

Пороги p_j і q_j є лінійними функціями від оцінок $v_j(a_k)$. В частковому випадку, коли ці пороги є константами, індекс згоди дорівнює (рис.8.2):

$$t_j(a_k, a_l) = \begin{cases} 0, & v_j(a_l) - v_j(a_k) \geq p_j \\ 1, & v_j(a_l) - v_j(a_k) \leq q_j \\ \frac{p_j - (v_j(a_l) - v_j(a_k))}{p_j - q_j}, & \text{інакше} \end{cases}.$$

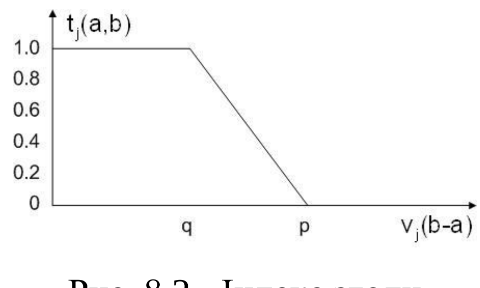


Рис. 8.2 - Індекс згоди

2) Для кожної пари альтернатив a_k, a_l розраховується <u>індекс незгоди</u> – це ступінь того, що a_k гірша за a_l:

$$d_j(a_k,a_l)=\begin{cases}0, & v_j(a_l)\le v_j(a_k)+p_j(v_j(a_k))\\ 1, & v_j(a_l)\ge v_j(a_k)+r_j(v_j(a_k))\\ \frac{(v_j(a_l)-v_j(a_k))-p_j(v_j(a_k))}{r_j(v_j(a_k))-p_j(v_j(a_k))}, & \text{інакше}\end{cases},$$

де $r_j \ge p_j$ - поріг вето.

3) Розраховуються <u>ступені переваги</u> a_k над a_l:

$$S(a_k,a_l)=\begin{cases}T(a_k,a_l), & \text{якщо } J(a_k,a_l)=\varnothing\\ T(a_k,a_l)\prod\limits_{j\in J(a_k,a_l)}\frac{1-d_j(a_k,a_l)}{1-T(a_k,a_l)}, & \text{інакше}\end{cases},$$

де $J(a_k,a_l)$- множина критеріїв, для яких індекс незгоди більший за агрегований індекс згоди: $d_j(a_k,a_l) > T(a_k,a_l)$.

4) Ранжування альтернатив здійснюється шляхом порівняння вихідного і вхідного потоків (див. PROMETHEE I) або чистих потоків (див. PROMETHEE II):

- вихідний потік $\Phi^+(a_k)=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{l\ne k}S(a_k,a_l)$ - ступінь переваги a_k над a_l, $\forall l\ne k$,

- вхідний потік $\Phi^-(a_k)=\frac{1}{n-1}\sum\limits_{l\ne k}S(a_l,a_k)$ - ступінь переваги a_l $\forall l\ne k$ над a_k.

- чистий потік $\Phi(a_k)=\Phi^+(a_k)-\Phi^-(a_k)$.

Приклад

Задача полягає в оцінюванні одинадцяти альтернатив за одинадцятьма критеріями. Нехай маємо наступну матрицю рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11
a1	125	866	9.81	218	1.41	542	483	23	1.5	1	1
a2	11980	900	11.45	189	1.45	452	303	12	1.5	6	6
a3	31054	883	9.86	172	1.82	341	311	0	0	3	3
a4	28219	840	10.38	171	1.95	339	318	0	0	3	3
a5	31579	903	10.74	165	1.7	312	281	0	0	5	5
a6	39364	922	13.87	167	1.65	287	269	0	0	8	7
a7	125	769	9.33	182	1.64	458	180	0	1.5	1	1
a8	8075	896	9.82	172	1.7	408	121	0	1.5	6	6
a9	3089	770	9.39	177	1.9	430	228	0	1	2	2
a10	6449	766	7.22	172	1.65	401	157	0	1	4	4
a11	12074	897	10.61	169	1.65	378	162	0	1	7	6

Ваги критеріїв W, пороги нерозрізненості Q і переваги P наступні:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11
W	0.160	0.033	0.033	0.097	0.097	0.160	0.097	0.160	0.033	0.033	0.097
Q	±1000	10%	10%	±5	10%	10%	10%	±2	0.2	0	0
P	±2000	20%	20%	±10	20%	20%	20%	±4	0.2	±1	±1

Порогу вето не введено.

Критерії c2, c6 і c7 – критерії доходів (їх треба максимізувати), всі інші критерії – витрат (їх треба мінімізувати).

Розрахуємо індекси згоди і незгоди для всіх пар альтернатив.

Індекс згоди (за першим критерієм) $t_1(a_k, a_l)$:

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11
a1	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
a2	0	-	1	1	1	1	0	0	0	0	1
a3	0	0	-	0	1	1	0	0	0	0	0
a4	0	0	1	-	1	1	0	0	0	0	0
a5	0	0	1	0	-	1	0	0	0	0	0
a6	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0
a7	1	1	1	1	1	1	-	1	1	1	1
a8	0	1	1	1	1	1	0	-	0	0.37	1
a9	0	1	1	1	1	1	0	1	-	1	1
a10	0	1	1	1	1	1	0	1	0	-	1
a11	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	-

Якщо для критерію C_j не визначено поріг вето, то $d_j(a_k, a_l) = 0$ для всіх пар альтернатив. В даному прикладі індекси незгоди дорівнюють нулю для всіх критеріїв і всіх пар альтернатив.

Наступний крок – розрахунок агрегованого індексу згоди $T(a_k, a_l)$:

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11
a1	0	0.74	0.71	0.71	0.71	0.71	0.74	0.74	0.71	0.68	0.71
a2	0.44	0	0.57	0.58	0.58	0.71	0.48	0.57	0.39	0.39	0.71
a3	0.36	0.58	0	0.84	0.96	1.00	0.55	0.69	0.55	0.69	0.83
a4	0.36	0.58	1.00	0	0.95	0.95	0.49	0.65	0.55	0.62	0.76
a5	0.38	0.63	0.86	0.68	0	1.00	0.54	0.68	0.54	0.52	0.68
a6	0.38	0.48	0.48	0.47	0.68	0	0.52	0.52	0.52	0.52	0.52
a7	0.72	0.86	0.76	0.77	0.75	0.74	0	0.88	0.87	0.84	0.85
a8	0.38	0.84	0.74	0.74	0.70	0.87	0.58	0	0.58	0.61	0.87

a9	0.35	0.78	0.85	0.85	0.74	0.73	0.67	0.97	0	0.94	0.89
a10	0.40	0.81	0.72	0.74	0.81	0.84	0.60	0.98	0.61	0	0.98
a11	0.41	0.70	0.74	0.74	0.74	0.87	0.53	0.81	0.55	0.68	0

Останній крок – розрахунок ступенів переваги $S(a_k, a_l)$. Оскільки в даному прикладі всі індекси незгоди дорівнюють нулю, то ступені переваги дорівнюють агрегованим індексам згоди: $S(a_k, a_l) = T(a_k, a_l)$.

Метод ELECTRE I

1. Розрахунок індексу згоди:

$$c(a_k, a_l) = \sum_{j \in C^+ \cup C^0} w_j^c,$$

де C^+ - множина критеріїв, для яких $a_k \succ a_l$;

C^- - множина критеріїв, для яких $a_l \succ a_k$;

C^0 - множина критеріїв, для яких $a_k \sim a_l$;

2. Розрахунок індексу незгоди:

$$d(a_k, a_l) = \max_{j \in C^-} \frac{v_j(a_l) - v_j(a_k)}{L_j},$$

де L_j – довжина шкали критерію c_j.

3. Знаходження ядер

Задається пара порогів c_1, d_1:

Якщо $c(a_k, a_l) \geq c_1$ і $d(a_k, a_l) \leq d_1$, тоді має місце сильна перевага $a_k \succ a_l$, тобто $a_k \mathrm{P} a_l$, інакше має місце слабка перевага.

Приклад

Нехай задача полягає в оцінюванні п’яти альтернатив за сьома критеріями, всі критерії потрібно максимізувати. Експерт оцінив альтернативи в шкалі [1,5] і задав наступну матрицю рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
a1	1	2	1	5	2	2	4
a2	3	5	3	5	3	3	3
a3	3	5	3	5	3	2	2
a4	1	2	2	5	1	1	1
a5	1	1	3	5	4	1	5

Ваги критеріїв дорівнюють:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
w_j^c	0.078	0.118	0.157	0.314	0.235	0.039	0.059

Індекси згоди для даного прикладу дорівнюють:

	a1	a2	a3	a4	a5
a1	1.000	0.373	0.412	0.843	0.549
a2	0.941	1.000	1.000	1.000	0.706
a3	0.941	0.902	1.000	1.000	0.706
a4	0.667	0.314	0.314	1.000	0.549
a5	0.843	0.765	0.765	0.882	1.000

Індекси незгоди дорівнюють (всі $L_j = 4$):

	a1	a2	a3	a4	a5
a1	0.000	0.750	0.750	0.250	0.500

a2	0.250	0.000	0.000	0.000	0.500
a3	0.500	0.250	0.000	0.000	0.750
a4	0.750	0.750	0.750	0.000	1.000
a5	0.250	1.000	1.000	0.250	0.000

Задамо різні значення порогів c_1, d_1 і знайдемо ядра:

Нехай $c_1 = 0.85$, $d_1 = 0.25$. Тоді для даного прикладу отримаємо наступні порядки (P означає строгу перевагу):

	a1	a2	a3	a4	a5
a1	-			P	
a2	P	-	P	P	
a3		P	-	P	
a4				-	
a5				P	-

Виходячи з цієї таблиці порядків, домінованою є альтернатива a_4 і у першому ядрі знаходяться альтернативи a_1, a_2, a_3, a_5.

Задамо більш «слабкі» значення порогів: $c_2 = 0.75$, $d_2 = 0.50$:

	a1	a2	a3	a4	a5
a1	-			P	
a2	P	-	P	P	
a3	P	P	-	P	
a4				-	
a5	P			P	-

Виходячи з попередньої таблиці порядків, домінованими будуть альтернативи a_4, a_1. Тому в другому ядрі найкращих альтернатив знаходяться три альтернативи a_2, a_3, a_5. При заданих значеннях порогів $c_2 = 0.75$, $d_2 = 0.5$ альтернативи a_2, a_3, a_5 є непорівнюваними.

Задамо ще «слабкіші» значення порогів $c_3 = 0.75$, $d_3 = 0.75$:

	a1	a2	a3	a4	a5
a1	-			P	
a2	P	-	P	P	
a3	P	P	-	P	
a4				-	
a5	P			P	-

Отримали той самий результат, що і при порогах $c_2 = 0.75$, $d_2 = 0.5$.

Очевидно, що розрізнити альтернативи a_2, a_3, a_5 ми можемо тільки якщо підвищити другий поріг до значення $d_3 = 1.00$, при $c_3 = 0.75$:

	a1	a2	a3	a4	a5
a1	-			P	
a2	P	-	P	P	
a3	P	P	-	P	
a4				-	
a5	P	P	P	P	-

Тоді в третьому ядрі найкращих альтернатив знаходяться єдина альтернатива a_5.

2 Порядок виконання роботи

2.1 Уважно прочитати теоретичні відомості, наведені в п.1.

2.2 Використовуючи оцінки, надані одним експертом, знайти агреговані ранжування альтернатив за методами PROMETHEE I/ PROMETHEE II. Використати різні типи функцій переваг: usual shape, linear shape, V shape, U shape, level shape, Gaussian shape та різні значення порогів і порівняти отримані результати.

2.3 Використовуючи оцінки, надані одним експертом, знайти агреговані ранжування альтернатив за методами ELECTRE I / ELECTRE III. Порівняти результати, отримані при використанні різних значень порогів.

2.4 Відомі оцінки, надані m експертами. Використовуючи методи PROMETHEE I/ II та/або ELECTRE I / III, знайти індивідуальні агреговані ранжування альтернатив. Розрахувати коефіцієнти рангової кореляції τ та/або конкордації W отриманих індивідуальних ранжувань. Зробити висновок щодо узгодженості ранжувань. Знайти групове ранжування альтернатив за методами Кондорсе / Борда.

2.5 Зробити висновки по роботі.

2.6 Дати відповіді на контрольні питання, наведені в кінці роботи.

Звіт має містити:

1 Завдання (кількість експертів, множина експертних оцінок альтернатив за критеріями, ваги критеріїв, досліджувані методи).

2 Текст програми.

3 Результати виконання роботи, вікна програми.

4 Висновки по роботі.

Варіанти завдань

№	Кількість експертів	Завдання (згідно поряд-ку виконання роботи)	Методи	Показник узгодженості ранжувань наданих групою	Метод розрахунку групового ранжування	Експертні оцінки
1	1	п.2.3	ELECTRE I			варіант 4
2	3	п.2.4	PROMETHEE I	W	Кондорсе	варіанти 1(експерт 1), 2(експерт 2), 3(експерт 3)
3	2	п.2.4	PROMETHEE II	τ	Борда	варіанти 4, 5
4	3	п.2.4	PROMETHEE II	W	Кондорсе	варіанти 4 – 6
5	3	п.2.4	ELECTRE I	τ	Борда	варіанти 1 – 3
6	1	п.2.2	PROMETHEE I			варіант 1
7	3	п.2.4	ELECTRE I	W	Кондорсе	варіанти 4 – 6
8	2	п.2.4	ELECTRE III	τ	Кондорсе	варіанти 10, 11
9	3	п.2.4	ELECTRE III	W	Кондорсе	варіанти 7 – 9
10	1	п.2.2	PROMETHEE II			варіант 6
11	1	п.2.3	ELECTRE III			варіант 8
12	2	п.2.4	PROMETHEE I	τ	Борда	варіанти 5, 6
13	2	п.2.4	PROMETHEE I	W	Борда	варіанти 4, 5
14	3	п.2.4	PROMETHEE II	τ	Кондорсе	варіанти 4 – 6
15	3	п.2.4	PROMETHEE II	W	Борда	варіанти 1 – 3
16	3	п.2.4	ELECTRE I	τ	Кондорсе	варіанти 4 – 6
17	2	п.2.4	ELECTRE I	W	Борда	варіанти 4, 5
18	2	п.2.4	ELECTRE III	τ	Борда	варіанти 10, 11
19	3	п.2.4	PROMETHEE I	τ	Кондорсе	варіанти 4, 5, 6
20	3	п.2.4	ELECTRE III	τ	Кондорсе	варіанти 4, 5, 6
21	1	п.2.3	ELECTRE I			варіант 12
22	1	п.2.3	ELECTRE I			варіант 13
23	1	п.2.3	ELECTRE I			варіант 14
24	3	п.2.4	ELECTRE I	W	Кондорсе	варіанти 12 (експерт 1),

						13 (експерт 2), 14 (експерт 3)
25	3	п.2.4	PROMETHEE I	W	Кондорсе	варіанти 12 - 14
26	3	п.2.4	PROMETHEE II	τ	Борда	варіанти 12 - 14

Варіант 1

Задача полягає в оцінюванні п'яти альтернатив за сьома критеріями, всі критерії потрібно максимізувати. Експерт оцінив альтернативи в шкалі [1,5] і задав наступну матрицю рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
A1	1	2	1	5	2	2	4
A2	3	5	3	5	3	3	3
A3	2	4	2	4	2	1	1
A4	1	2	2	5	1	1	1
A5	1	1	3	5	4	1	5

Ваги критеріїв дорівнюють:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
W_c	0.078	0.118	0.157	0.314	0.235	0.039	0.059

Варіант 2

Задача полягає в оцінюванні п'яти альтернатив за сьома критеріями, всі критерії потрібно максимізувати. Експерт оцінив альтернативи в шкалі [1,5] і задав наступну матрицю рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
A1	1	2	1	5	2	2	4
A2	3	5	3	5	3	3	3
A3	1	1	1	1	1	1	1
A4	1	2	2	5	1	1	1
A5	1	1	3	5	4	1	5

Ваги критеріїв дорівнюють:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7

W_c	0.078	0.118	0.157	0.314	0.235	0.039	0.059

Варіант 3

Задача полягає в оцінюванні п’яти альтернатив за сьома критеріями, всі критерії потрібно максимізувати. Експерт оцінив альтернативи в шкалі [1,5] і задав наступну матрицю рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
A1	1	2	1	5	2	2	4
A2	3	5	3	5	3	3	3
A3	5	5	5	5	5	5	5
A4	1	2	2	5	1	1	1
A5	1	1	3	5	4	1	5

Ваги критеріїв дорівнюють:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
W_c	0.078	0.118	0.157	0.314	0.235	0.039	0.059

Варіант 4

Задача полягає в оцінюванні шести альтернатив за сьома критеріями, всі критерії потрібно максимізувати. Експерт оцінив альтернативи в шкалі [1,5] і задав наступну матрицю рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
A1	1	2	1	5	2	2	4
A2	3	5	3	5	3	3	3
A3	3	5	3	5	3	2	2
A4	1	2	2	5	1	1	1
A5	1	1	3	5	4	1	5
A6	1	1	1	1	1	1	1

Ваги критеріїв дорівнюють:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
W_c	0.078	0.118	0.157	0.314	0.235	0.039	0.059

Варіант 5

Задача полягає в оцінюванні шести альтернатив за сьома критеріями, всі критерії потрібно максимізувати. Експерт оцінив альтернативи в шкалі [1,5] і задав наступну матрицю рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
A1	1	2	1	5	2	2	4
A2	3	5	3	5	3	3	3
A3	3	5	3	5	3	2	2
A4	1	2	2	5	1	1	1
A5	1	1	3	5	4	1	5
A6	3	5	3	5	3	3	3

Ваги критеріїв дорівнюють:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
W_c	0.078	0.118	0.157	0.314	0.235	0.039	0.059

Варіант 6

Задача полягає в оцінюванні шести альтернатив за сьома критеріями, всі критерії потрібно максимізувати. Експерт оцінив альтернативи в шкалі [1,5] і задав наступну матрицю рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
A1	1	2	1	5	2	2	4
A2	3	5	3	5	3	3	3
A3	3	5	3	5	3	2	2
A4	1	2	2	5	1	1	1
A5	1	1	3	5	4	1	5
A6	5	5	5	5	5	5	5

Ваги критеріїв дорівнюють:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
W_c	0.078	0.118	0.157	0.314	0.235	0.039	0.059

Варіант 7

Задача полягає в оцінюванні одинадцяти альтернатив за одиннадцятьма критеріями. Матриця рішень, тобто оцінки альтернатив за критеріями, наступні:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11
a1	2125	866	9.81	218	1.41	452	483	23	1.5	1	1
a2	11980	900	11.45	189	1.45	452	303	12	1.5	6	6
a3	31054	883	9.86	172	1.82	341	311	0	0	3	3
a4	28219	840	10.38	171	1.95	339	318	0	0	3	3

a5	31579	903	10.74	165	1.7	312	281	0	0	5	5
a6	39364	922	13.87	167	1.65	287	269	0	0	8	7
a7	125	769	9.33	182	1.64	458	180	0	1.5	1	1
a8	8075	896	9.82	172	1.7	408	121	0	1.5	6	6
a9	3089	770	9.39	177	1.9	430	228	0	1	2	2
a10	6449	766	7.22	172	1.65	401	157	0	1	4	4
a11	12074	897	10.61	169	1.65	378	162	0	1	7	6

Ваги критеріїв W, пороги нерозрізненості Q і переваги P наступні:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11
W	0.160	0.033	0.033	0.097	0.097	0.160	0.097	0.160	0.033	0.033	0.097
Q	±1000	10%	10%	±5	10%	10%	10%	±2	0.2	0	0
P	±2000	20%	20%	±10	20%	20%	20%	±4	0.2	±1	±1

Порогу вето не введено.

Критерії c2, c6 і c7 – критерії доходів (їх треба максимізувати), всі інші критерії – витрат (їх треба мінімізувати).

Варіант 8

Задача полягає в оцінюванні одинадцяти альтернатив за одиннадцятьма критеріями. Матриця рішень, тобто оцінки альтернатив за критеріями, наступні:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11
a1	32000	766	13.87	218	1.95	287	121	12	1.5	8	7
a2	11980	900	11.45	189	1.45	452	303	12	1.5	6	6
a3	31054	883	9.86	172	1.82	341	311	0	0	3	3
a4	28219	840	10.38	171	1.95	339	318	0	0	3	3
a5	31579	903	10.74	165	1.7	312	281	0	0	5	5
a6	39364	922	13.87	167	1.65	287	269	0	0	8	7
a7	125	769	9.33	182	1.64	458	180	0	1.5	1	1
a8	8075	896	9.82	172	1.7	408	121	0	1.5	6	6
a9	3089	770	9.39	177	1.9	430	228	0	1	2	2
a10	6449	766	7.22	172	1.65	401	157	0	1	4	4
a11	12074	897	10.61	169	1.65	378	162	0	1	7	6

Ваги критеріїв W, пороги нерозрізненості Q і переваги P наступні:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11

W	0.160	0.033	0.033	0.097	0.097	0.160	0.097	0.160	0.033	0.033	0.097
Q	±1000	10%	10%	±5	10%	10%	10%	±2	0.2	0	0
P	±2000	20%	20%	±10	20%	20%	20%	±4	0.2	±1	±1

Порогу вето не введено.

Критерії c2, c6 і c7 – критерії доходів (їх треба максимізувати), всі інші критерії – витрат (їх треба мінімізувати).

Варіант 9

Задача полягає в оцінюванні одинадцяти альтернатив за одиннадцятьма критеріями. Матриця рішень, тобто оцінки альтернатив за критеріями, наступні:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11
a1	125	922	7.22	165	1.45	458	318	0	0	1	1
a2	11980	900	11.45	189	1.45	452	303	12	1.5	6	6
a3	31054	883	9.86	172	1.82	341	311	0	0	3	3
a4	28219	840	10.38	171	1.95	339	318	0	0	3	3
a5	31579	903	10.74	165	1.7	312	281	0	0	5	5
a6	39364	922	13.87	167	1.65	287	269	0	0	8	7
a7	125	769	9.33	182	1.64	458	180	0	1.5	1	1
a8	8075	896	9.82	172	1.7	408	121	0	1.5	6	6
a9	3089	770	9.39	177	1.9	430	228	0	1	2	2
a10	6449	766	7.22	172	1.65	401	157	0	1	4	4
a11	12074	897	10.61	169	1.65	378	162	0	1	7	6

Ваги критеріїв W, пороги нерозрізненості Q і переваги P наступні:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11
W	0.160	0.033	0.033	0.097	0.097	0.160	0.097	0.160	0.033	0.033	0.097
Q	±1000	10%	10%	±5	10%	10%	10%	±2	0.2	0	0
P	±2000	20%	20%	±10	20%	20%	20%	±4	0.2	±1	±1

Порогу вето не введено.

Критерії c2, c6 і c7 – критерії доходів (їх треба максимізувати), всі інші критерії – витрат (їх треба мінімізувати).

Варіант 10

Задача полягає в оцінюванні дванадцяти альтернатив за одиннадцятьма критеріями. Матриця рішень, тобто оцінки альтернатив за критеріями, наступні:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11
a1	125	866	9.81	218	1.41	542	483	23	1.5	1	1
a2	11980	900	11.45	189	1.45	452	303	12	1.5	6	6
a3	31054	883	9.86	172	1.82	341	311	0	0	3	3
a4	28219	840	10.38	171	1.95	339	318	0	0	3	3
a5	31579	903	10.74	165	1.7	312	281	0	0	5	5
a6	39364	922	13.87	167	1.65	287	269	0	0	8	7
a7	125	769	9.33	182	1.64	458	180	0	1.5	1	1
a8	8075	896	9.82	172	1.7	408	121	0	1.5	6	6
a9	3089	770	9.39	177	1.9	430	228	0	1	2	2
a10	6449	766	7.22	172	1.65	401	157	0	1	4	4
a11	12074	897	10.61	169	1.65	378	162	0	1	7	6
a12	125	922	7.22	165	1.45	458	318	0	0	1	1

Ваги критеріїв W, пороги нерозрізненості Q і переваги P наступні:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11
W	0.160	0.033	0.033	0.097	0.097	0.160	0.097	0.160	0.033	0.033	0.097
Q	±1000	10%	10%	±5	10%	10%	10%	±2	0.2	0	0
P	±2000	20%	20%	±10	20%	20%	20%	±4	0.2	±1	±1

Порогу вето не введено.

Критерії c2, c6 і c7 – критерії доходів (їх треба максимізувати), всі інші критерії – витрат (їх треба мінімізувати).

Варіант 11

Задача полягає в оцінюванні одинадцяти альтернатив за одиннадцятьма критеріями. Матриця рішень, тобто оцінки альтернатив за критеріями, наступні:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11
a1	125	866	9.81	218	1.41	542	483	23	1.5	1	1
a2	11980	900	11.45	189	1.45	452	303	12	1.5	6	6
a3	31054	883	9.86	172	1.82	341	311	0	0	3	3

a4	28219	840	10.38	171	1.95	339	318	0	0	3	3
a5	31579	903	10.74	165	1.7	312	281	0	0	5	5
a6	39364	922	13.87	167	1.65	287	269	0	0	8	7
a7	125	769	9.33	182	1.64	458	180	0	1.5	1	1
a8	8075	896	9.82	172	1.7	408	121	0	1.5	6	6
a9	3089	770	9.39	177	1.9	430	228	0	1	2	2
a10	6449	766	7.22	172	1.65	401	157	0	1	4	4
a11	12074	897	10.61	169	1.65	378	162	0	1	7	6
a12	32000	766	13.87	218	1.95	287	121	12	1.5	8	7

Ваги критеріїв W, пороги нерозрізненості Q і переваги P наступні:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8	c9	c10	c11
W	0.160	0.033	0.033	0.097	0.097	0.160	0.097	0.160	0.033	0.033	0.097
Q	±1000	10%	10%	±5	10%	10%	10%	±2	0.2	0	0
P	±2000	20%	20%	±10	20%	20%	20%	±4	0.2	±1	±1

Порогу вето не введено.

Критерії c2, c6 і c7 – критерії доходів (їх треба максимізувати), всі інші критерії – витрат (їх треба мінімізувати).

Варіант 12

Задача полягає в оцінюванні п’яти альтернатив за восьма критеріями, всі критерії потрібно максимізувати. Експерт оцінив альтернативи в шкалі [1, 9] і задав наступну матрицю рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8
A1	6	3	1	7	2	1	4	3
A2	4	8	3	2	6	4	1	7
A3	3	5	2	6	1	7	7	2
A4	1	9	3	5	1	5	5	8
A5	1	1	7	8	4	2	5	1

Ваги критеріїв дорівнюють:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
W_c	0.078	0.118	0.157	0.314	0.235	0.039	0.059

Варіант 13

Задача полягає в оцінюванні п'яти альтернатив за восьма критеріями, всі критерії потрібно максимізувати. Експерт оцінив альтернативи в шкалі [1, 9] і задав наступну матрицю рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8
A1	3	7	5	1	4	3	2	1
A2	5	4	9	3	1	2	2	6
A3	6	1	3	5	7	2	1	3
A4	2	5	8	7	3	6	1	2
A5	7	1	5	3	4	2	5	3

Ваги критеріїв дорівнюють:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
W_c	0.078	0.118	0.157	0.314	0.235	0.039	0.059

Варіант 14

Задача полягає в оцінюванні п'яти альтернатив за восьма критеріями, всі критерії потрібно максимізувати. Експерт оцінив альтернативи в шкалі [1, 9] і задав наступну матрицю рішень (оцінки альтернатив за критеріями):

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7	c8
A1	5	2	7	1	7	3	4	3
A2	7	1	3	2	6	4	1	7
A3	1	9	2	3	1	5	7	2
A4	2	3	6	5	7	9	5	8
A5	6	2	5	9	4	1	5	4

Ваги критеріїв дорівнюють:

	c1	c2	c3	c4	c5	c6	c7
W_c	0.078	0.118	0.157	0.314	0.235	0.039	0.059

Контрольні запитання для підготовки до роботи:

1 Як задається функція переваг при оцінюванні альтернатив за множиною критеріїв? Які види функції переваг використовуються?

2 Описати методи PROMETHEE. В чому відмінність між методами PROMETHEE I і PROMETHEE II?

3 Якими є етапи методу ELECTRE I?

4 Як слід змінювати пороги, щоб отримати за допомогою методу ELECTRE I ядра з меншою кількістю альтернатив?

5 Навести етапи методу ELECTRE III. Яке призначення порогу вето в цьому методі?

6 Як здійснюється ранжування альтернатив в методі ELECTRE III?

7 Як розраховується коефіцієнт рангової кореляції Кендала?

8 Як розраховується коефіцієнт конкордації?

9 Описати метод Кондорсе розрахунку групового ранжування.

Список літератури

1. Недашківська Н.І. Методологія та інструментарій підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних та мережевих моделей, *автореф. дис. ... докт. техн. наук*. Київ, 2018. 40 с.
2. Недашківська Н.І. Методологія та інструментарій підтримки прийняття рішень на основі ієрархічних та мережевих моделей, *дис. ... докт. техн. наук*. Київ, 2018. 407 с.
3. Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І. Моделі і методи аналізу ієрархій: Теорія. Застосування: *Навчальний посібник.* К: ІВЦ «Видавництво «Політехніка», 2010. 372 с.
4. Саати Т. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. Изд. 2-е. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 360 с.
5. Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.
6. Недашковская Н.И. Принятие решений при согласованных экспертных оценках парных сравнений. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2014. №4. С. 35 – 44.
7. Недашківська Н.І. Метод узгоджених парних порівнянь при оцінюванні альтернатив рішень за якісним критерієм. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2013. №4. С. 67 – 79.
8. Nedashkovskaya N.I. Evaluation of quality of expert pairwise comparison judgements in decision-making techniques. *International Journal of Latest Engineering and Management Research*. 2018. Vol.3, No.5. P. 69 – 74.
9. Nedashkovskaya N.I. Investigation of methods for improving consistency of a pairwise comparison matrix. *Journal of the Operational Research Society*. 2018. Vol.69, No.12. P.1947 – 1956.

10. Недашковская Н.И. Оценивание качества экспертной информации при анализе альтернатив решений. *Интеллектуальные системы принятия решений и проблемы вычислительного интеллекта*: материалы международ. научн. конф. (Железный порт, 25 – 28 мая 2015 г.). Херсон: ХНТУ, 2015. С. 201 – 203.
11. Недашковская Н.И. Методы повышения согласованности матриц парных сравнений. *Интеллектуальный анализ информации*: сборник трудов международ. науч. конф. им. Т.А.Таран (Киев, 20 – 22 мая 2015г.). Киев: «Просвита», 2015. С. 146–151.
12. Недашковская Н.И. Подготовка экспертной информации для метода анализа иерархий. *Системный анализ в проектировании и управлении*: сборник науч. трудов XVIII международ. науч.-практич. конф. (Санкт-Петербург, 1 – 3 июля 2014г.). Санкт-Петербург, 2014. С.92 – 94.
13. Недашковская Н.И. Метод M_Outflow поиска наиболее несогласованных элементов матрицы парных сравнений. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали міжнарод. наук.-техніч. конф. SAIT 2015 (22 – 25 червня 2015 р., м. Київ). К.: ННК “ІПСА” НТУУ “КПІ”, 2015. С. 95. Режим доступу: http://sait.kpi.ua/books/.
14. Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. К.: Наукова думка, 2002. 381 с.
15. Недашківська Н.І. Оцінювання реверсу рангів в методі аналізу ієрархій. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2005. №4. С. 120– 130.
16. Недашковская Н.И. Многокритериальное принятие решений с использованием максиминного синтеза в методе анализа иерархий (МАИ). *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2010. №3. С.7 – 16.

17. Недашківська Н.І. Оцінювання чутливості розв'язку задачі прийняття рішень із застосуванням методу аналізу ієрархій. *Наукові вісті НТУУ «КПІ».* 2006. №2. С.27 – 36.
18. Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І. Комплексне оцінювання чутливості рішення на основі методу аналізу ієрархій. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2006. №3. С.7 – 25.
19. Недашківська Н.І. Кількісна оцінка чутливості задачі обробки поглядів експертів за методами аналізу ієрархій. *Системи підтримки прийняття рішень. Теорія і практика*: матеріали наук.-техніч. конф. з міжнародною участю (Київ, 26–30 трав 2010 р.). Київ: ІПММС НАНУ, 2010. С. 42 – 45.
20. Недашківська Н.І. Системний підхід до підтримання прийняття рішень на основі ієрархічних та мережевих моделей. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2018. №1. С.7 – 18.
21. Недашківська Н.І. Оцінювання стійкості локальних ваг альтернатив рішень на основі методу парних порівнянь. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2016. №4. С.14 – 22.
22. Недашковская Н.И. Модели парных сравнений на основании интервальных оценок экспертов. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Збірник наукових праць. 2015. Вип.15. С.121 – 137.
23. N. Pankratova, N. Nedashkovskaya. Estimation of consistency of fuzzy pairwise comparison matrices using a defuzzification method. Editors M.Z.Zgurovsky, V.A.Sadovnihiy. Springer. 2016. Vol. 86. P.161-172.
24. Поспелов Д. А. Нечёткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта. 1986.
25. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Підручник. Сьоме видання. К.: Слово, 2006. 816 с.

26. Панкратова Н.Д., Недашковская Н.И. Методология обработки нечеткой экспертной информации в задачах предвидения. Часть 1. *Проблемы управления и информатики*. 2007. №2 С. 40 – 55.
27. Natalya D. Pankratova, Nadezhda I. Nedashkovskaya. Method for Processing Fuzzy Expert Information in Prediction Problems. Part I. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2007. Vol. 39. Issue 4. P.22 – 36.
28. Панкратова Н.Д., Недашковская Н.И. Методология обработки нечеткой экспертной информации в задачах предвидения. Часть 2. *Проблемы управления и информатики*. 2007. №3. С. 49 – 63.
29. Natalya D. Pankratova, Nadezhda I. Nedashkovskaya. Method for Processing Fuzzy Expert Information in Prediction Problems. Part II. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2007. Vol. 39. Issue 6. P.30 – 44.
30. N. Pankratova, N. Nedashkovskaya. Spectral coefficient of consistency of fuzzy expert information and estimation of its sensitivity to fuzzy scales when solving foresight problems. *International Journal «Information Technologies and Knowledge»*, vol.6, №4. 2012. P.316-329.
31. Недашковская Н.И. Оценивание чувствительности спектрального коэффициента согласованности нечетких экспертных оценок парных сравнений. *Інтелектуальний аналіз інформації*: збірка праць XII міжнарод. конф. (Київ, 16 – 18 трав. 2012 р.) Київ: Просвіта, 2012. С.226 – 232.
32. N. Pankratova, N. Nedashkovskaya. Estimation of decision alternatives on the basis of interval pairwise comparison matrices. *ICA*. 2016. Vol.7., No 2. P. 39 – 54.
33. N. D. Pankratova and N.I.Nedashkovskaya. Hybrid Method of Multicriteria Evaluation of Decision Alternatives. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50 (5). P. 701-711.

34. Недашковская Н.И. Гибридный метод поддержки принятия решений в нечетких условиях при взаимозависимых критериях. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали міжнарод. наук.-техніч. конф. (Київ, 24 квіт. 2012 р.). Київ: ННК "ІПСА" НТУУ "КПІ", 2012. С. 95 – 96.
35. Nedashkovskaya N.I. Method for Evaluation of the Uncertainty of the Paired Comparisons Expert Judgements when Calculating the Decision Alternatives Weights. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2015. Vol. 47, No. 10. P.69 – 82.
36. Недашковская Н.И. Построение доверительных интервалов для весов альтернатив решений на основе экспертных оценок парных сравнений. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2015. №3. С. 121 – 130.
37. Недашківська Н.І. Багатокритеріальне оцінювання альтернатив при взаємозалежних критеріях за допомогою методу BOCR/MAI та нечітких мір. *Системи підтримки прийняття рішень. Теорія і практика*: матеріали наук.-техн. конф. з міжнародною участю СППР (Київ, 26-30 трав. 2011 р.). Київ: ІПММС НАНУ, 2011. С. 42 – 45.
38. Недашківська Н.І. Адаптивне стратегічне планування розвитку підприємства з використанням нечіткого методу аналізу ієрархій. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали XII міжнародної науково-технічної конференції SAIT-2010 (Київ, 25–29 трав. 2010 р.). Київ: НТУУ «КПІ», 2010. С.123.
39. Недашківська Н.І. Оцінювання якості кластеризації методами багатокритеріальної підтримки прийняття рішень. *Системний аналіз та інформаційні технології*: матеріали XII міжнарод. наук.-техніч. конф. (Київ, 25–29 трав. 2010 р.) Київ: НТУУ «КПІ», 2010. С.294.
40. Недашковская Н.И. Методологическое и математическое обеспечение оценивания направлений развития социально-экономических систем.

Информационно-компьютерные технологии в экономике, образовании и социальной сфере: материалы V Всеукраин. науч.-практич. конф. (Симферополь, 13 – 14 мая 2010 г.). Симферополь: КРП «Издательство «Крымучпедгиз», 2010. С. 61 – 62.

41. Система підтримки прийняття рішень «Decision Lens». URL: http://www.decisionlens.com. (дата звернення: 04.06.2018)
42. Система підтримки прийняття рішень «Expert Choice» URL: https://expertchoice.com/ (дата звернення: 04.06.2018)
43. Система підтримки прийняття рішень «СОЛОН» URL: http://www.dss-lab.org.ua/Diss.pdf (дата звернення: 04.06.2018)
44. Система підтримки прийняття рішень «Logical Decisions» URL: http://www.logicaldecisions.com. (дата звернення: 04.06.2018)
45. Система підтримки прийняття рішень «Make It Rational» URL: http://makeitrational.com/, http://www.transparentchoice.com. (дата звернення: 04.06.2018)
46. Система підтримки прийняття рішень «Mpriority» URL: http://www.tomake choice.com/ mpriority.html (дата звернення: 04.06.2018)
47. Система підтримки прийняття рішень «Super Decisions» URL: http://www. superdecisions.com. (дата звернення: 04.06.2018)
48. Система підтримки прийняття рішень «Vibor» URL: http://www.softportal.com/software-7763-sppr-vibor.html (дата звернення: 04.06.2018)