Автор Н.І.Недашківська, д.т.н., доцент, Інститут прикладного системного аналізу
НТУУ “КПІ ім. Ігоря Сікорського”

Інтелектуальні системи підтримки прийняття рішень
Конспект лекцій
для PhD студентів групи КА-11ф
з окремих тем розділу 1

План

1. Сутність процесу прийняття рішень (ПР) і його дійові особи
2. Класифікації методів ПР
3. Призначення систем підтримки прийняття рішень (СППР)
4. Види експертної інформації
5. Методи розрахунку ваг альтернатив рішень за критерієм з використанням оцінок експертів:
   5.1. Загальні відомості
   5.2. Метод безпосереднього оцінювання
   5.3. Методи парних порівнянь. Матриці парних порівнянь (МПП)
   5.4. Метод «лінія» парних порівнянь
   5.5. Метод Головного власного вектору парних порівнянь. Метод геометричної середньої.
6. Методи агрегування ваг альтернатив рішень:
   6.1. Дистрибутивний синтез (лінійна згортка)
   6.2. Ідеальний синтез
   6.3. Мультиплікативний синтез
   6.4. Групове врахування бінарних відношень переваг альтернатив
7. Методи обробки оцінок групи експертів:
   7.1. Груповий метод Головного власного вектору
8. Агрегування ординальних оцінок експертів
   8.1. Методи отримання індивідуального ранжування
   8.2. Узгодженість ординальних оцінок
   8.3. Групові ординальні однокритеріальні експертні оцінки
   8.4. Групові ординальні однокритеріальні експертні оцінки з урахуванням компетентності експертів

1. Сутність процесу прийняття рішень і його дійові особи

Задачі прийняття рішень виникають в усіх сферах людського життя і характеризуються великою різноманітністю. Класифікація задач прийняття рішень:

1. Індивідуальне управління в задачах, які мають характер повторюваності. Наприклад, який комп’ютер купити? Яке місце роботи вибрати?
2. Вибір програм розвитку середнього та малого бізнесу. Прийняття рішень для органів державного управління середнього рівня. Наприклад, якого постачальника вибрати? Яку інформаційну систему запровадити? Якого претендента назначити на вакантну посаду? Як оцінити інвестиційні проекти?
3. Створення комплексних цільових програм для органів державного управління найвищого рівня та управління великих фірм. Як оцінити долю своєї компанії на ринку? Які перспективи використання синтетичного палива для транспорту? Якому проекту надати фінансування? Де розташувати новий міст? Які перспективи розвитку системи вищої освіти на найближчі 20 років?

Прийняття рішень (ПР) – специфічний вид розумової діяльності людини, який полягає у вирішенні задач:
- вибору найкращого варіанту рішення з множини варіантів;
- ранжування варіантів рішень;
- визначення відносних показників важливості (ваг) варіантів рішень

відповідно до того чи іншого алгоритму.

Етапи ПР:
1) Формування цілі
2) Формування множини альтернативних варіантів рішення
3) Оцінювання множини альтернатив і вирішення наведених вище задач.

Детальніше розглянемо кожний з цих етапів.

Етап 1. *Формування цілі* – процес творчий, неформалізований. Виникає, коли стан речей людину не задовольняє і вона прагне змін. На цьому етапі використовуються *методи формування дерев цілей*, які дозволяють побудувати ієрархічну структуру системи цілей, і *дерев критеріїв*, які дозволяють оцінити ступені досягнення цілей.

Етап 2. *Альтернативні варіанти рішень (альтернативи)* розглядаються як можливі способи досягнення поставленої цілі.
Формування альтернатив – творчий процес і здійснюється на основі інформації щодо реальної ситуації та існуючих в задачі обмежень, а також на основі практичного досвіду особи, що приймає рішення, експертів та консультантів.
У багатьох задачах множина допустимих рішень може бути сформована на основі методів *морфологічного аналізу, сканування, мозкового штурму*, *Делфі*, *імітаційного моделювання*.

Суб'єкти прийняття рішень:
Особа, що приймає рішення (ОПР) – особа, в інтересах якої приймається рішення і яка несе відповідальність за нього. Іноді ОПР делегує іншим особам приймати рішення, але відповідальність завжди несе ОПР.
Експерт – спеціаліст, який професійно, тобто краще за ОПР, знає окремі аспекти проблеми, яка потребує вирішення. Експерт відрізняється від ОПР ще й тим, що він несе відповідальність лише за надану інформацію, а не за прийняте рішення.
Активні групи – особи, які не приймають рішення і не є експертами, але зацікавлені в прийнятті рішення (лобісти).
Консультант (аналітик) – організує процес ПР і консультує відносно технології ПР.

Етап 3. *Оцінювання ступеня впливу альтернатив на досягнення цілі* є змістом третього етапу ПР.
Найбільше число відомих методів ППР засновано на опосередкованій оцінці альтернатив відносно цілі через їх оцінку відносно множини критеріїв. Ці методи називаються *багатокритеріальними*.

Критерій – це категорія, яка відбиває суттєві для ОПР властивості альтернатив.
Нехай, наприклад, ціль полягає у виборі оптимального каналу для розміщення реклами на телебаченні. Тоді критеріями для оцінювання каналів можуть бути: ціна розміщення, популярність каналу, відповідність аудиторії рекламованому товару.
При економічній оцінці проекту критеріями слугують економічна ефективність, вартість, реалізованість. При придбанні обладнання – вартість, надійність, продуктивність тощо.

Критерії класифікуються:

- *кількісні* – відбивають властивості альтернатив, які можна виміряти числом (наприклад, час, ціна, вага)
    - *кількісно-визначені* – оцінки альтернатив по якому достовірно відомі (наприклад, ціна товару на даному ринку в даний момент)
    - *кількісно невизначені* – точні оцінки альтернатив по яким невідомі і можуть бути визначені лише експертами (наприклад, величина збільшення доходу фірми як результат проведення рекламної кампанії)
- *якісні* – відбивають властивості альтернатив, які природним шляхом не можна виміряти числом (наприклад, якість товару або програмного забезпечення, компетентність експерта).

Критерії:

- *незалежні між собою*
- *залежні між собою*

Критерій C_1 не залежить від C_2, якщо оцінка альтернативи за критерієм C_1 не залежить від оцінки альтернативи за критерієм C_2. Наприклад, критерій «ціна розміщення реклами на каналі телебачення» і «відповідність аудиторії рекламованому товару» незалежні між собою.

2. Класифікації методів ПР

За ступенем невизначеності інформації, що використовується при ПР:
детерміновані рішення (*в умовах визначеності*) – отримані за аналітично представленими закономірностями, коли для даної сукупності вхідних значень на виході системи може бути отриманий єдиний результат;
рішення в умовах ризику (стохастична невизначеність) – невідомі фактори є випадковими величинами, статистичні характеристики яких є відомими або в принципі можуть бути отримані (використовуються критерії очікуваного значення (доходів чи витрат); комбінації очікуваного значення і дисперсії; відомого граничного рівня; найбільш імовірної події в майбутньому);
рішення в умовах невизначеності (невизначеність нестохастичного виду) – не існує імовірнісних характеристик невідомих факторів (використовуються критерії Вальда, Гурвиця, Севіджа, Лапласа коли невідомі фактори відносяться до так званих «природних» і методи теорії ігор в умовах конфліктних ситуацій чи протидій).

За типом моделі:
об'єктивні – засновані на формалізованих закономірностях (наприклад, методи дослідження операцій).
суб'єктивні – засновані на перевагах ОПР (методи ППР).

Наприклад, меню в солдатській столовій визначається в залежності від того, скільки калорій повинен отримувати солдат кожний день і для цього використовуються методи дослідження операцій. Меню в ресторані – зовсім інша справа, рішення в цьому випадку є найкращим в розумінні ОПР, це суб'єктивне рішення. Задачі дослідження операцій не залежать від поглядів і переваг ОПР. Задачі ПР є суб'єктивними, оскільки ОПР визначає відносну вагомість кожного критерію.

Особливості дослідження операцій:

1) Опираючись на одні й ті ж самі дані, різні спеціалісти-аналітики повинні отримати однакові результати.
2) Існує об’єктивний критерій успіху. Якщо проблема окреслена, то використовуючи аналітичний метод, можна визначити наскільки нове рішення є кращим за існуюче за даним критерієм.

В рамках наукового напрямку «підтримка прийняття рішень» досліджуються так звані слабо структуровані і неструктуровані проблеми.

До *слабо структурованих* відносяться проблеми, які містять як кількісні, так і якісні змінні, причому якісні аспекти проблеми домінують. Наприклад, в задачі вибору оптимального каналу для розміщення реклами на телебаченні критерій «ціна розміщення» є кількісним, критерії «популярність каналу» та «відповідність аудиторії рекламованому товару» - якісні.

Неструктуровані проблеми мають лише якісний опис. Оскільки рішення так або інакше має бути прийнятим, то недостатність інформації, необхідної для вибору найкращого варіанту рішення, має бути компенсована досвідом та інтуїцією людей, професіоналів в досліджуваній області. Разом з тим, якість «суб’єктивного» рішення сильно залежить не лише від ОПР, а й від процедури отримання його переваг.

<u>За кількістю учасників процесу ППР:</u>
індивідуальні рішення – ОПР один, він може використовувати експертів, але рішення приймає він один;
групові рішення – всі учасники процесу ПР в тій чи іншій мірі несуть відповідальність за прийняте рішення.

<u>За ступенем використання системної інформації</u>.
Системна інформація при ППР – вся та інформація, що визначає оцінювання альтернатив: множина критеріїв, цілей, альтернатив, коефіцієнти значущості критеріїв, множина експертів, їх коефіцієнти компетентності, алгоритми оцінки альтернатив.

Рішення, що повторюються – ті, що приймаються з однією і тією ж системною інформацією (наприклад, заміщення вакантних посад, вибір обладнання).
Унікальні рішення – необхідність їх розв’язання виникає лише один раз або дуже рідко (наприклад, вибір місця проходження трубопроводу чи рішення щодо розміщення системи протиракетної оборони).

<u>За ступенем повторюваності рішень:</u>
вибір однієї з фіксованої множини альтернатив (наприклад, при ситуаційному управлінні в залежності від ситуації, що склалася: при наданні невідкладної медичної допомоги, в діяльності правоохоронних органів);
множина альтернатив заздалегідь не фіксована (наприклад, формується ОПР чи активними групами);
рішення з передісторією, тобто існує інформація про досвід використання аналогічних рішень, прийнятих раніше.

Також розрізняють *багатокритеріальні методи,* коли можливо сформувати єдину множину критеріїв, по кожному з яких можна оцінити кожну альтернативу.

3. Призначення систем підтримки прийняття рішень (СППР)

Прийняття обґрунтованих управлінських рішень в економічній, соціальній, політичній, екологічній та інших сферах потребує ефективного зберігання, оперативного доступу, а також повного і всебічного аналізу великих об’ємів різнорідної інформації.

Система підтримки прийняття рішень (СППР, англ. Decision Support System, DSS) – це інформаційно-аналітична система, яка в загальному випадку, використовуючи знання експертів, допомагає ОПР приймати рішення в залежності від його уподобань.

Необхідність підтримки, тобто допомоги, в процесі прийняття управлінських рішень викликана рядом причин:

- величезними об’ємами і різнорідністю вихідної об’єктивної інформації;
- необхідністю врахування великої кількості суперечливих критеріїв і цілей;
- необхідністю проведення розрахунків за різними алгоритмами (статистичними, оптимізаційними, багатокритеріальними);
- наявністю різного роду невизначеностей (нечіткість даних, неповнота тощо);
- необхідністю врахування слабо структурованих даних та суб’єктивних переваг ОПР.

На сьогоднішній день поняття СППР пов’язують з інструментарієм підготовки даних для ОПР. Зокрема до СППР відносять системи, що реалізують технологію OLAP (On-Line Analytical Processing) доступу до багатовимірних, багатозв’язних даних у великих і надвеликих БД, які видаються в формі, визначеній користувачем і зручній для аналізу. Але повноцінна ППР в ситуаціях, що вимагають аналізу великих об’ємів різнорідної інформації, неможлива без використання інструментарію як підготовки даних, так і надання рекомендацій.

Тому можна виділити повний спектр задач, які повинні розв’язуватися інформаційно-аналітичними системами, які виконують ППР.
<u>Завдання СППР:</u>

- підготовка даних для ОПР:
    - підготовка БЗ;
    - організація гнучкого і зручного доступу до БЗ;
    - отримання результатів запросів в формі, максимально зручній для наступного аналізу;
    - використання потужних генераторів звітів;
- надання рекомендацій ОПР:
    - формування множини альтернативних варіантів рішень;
    - оцінювання множини альтернатив.

В основі сучасного підходу до інформаційного забезпечення СППР лежить ідея інтегрованого сховища даних (Data Warehouse), яке забезпечує єдиний логічний погляд і доступ до інформації. При цьому суттєво, що дані у сховищі мають історичний характер, тобто забезпечується інтеграція не лише різнорідних джерел даних, але і архівних даних, що виникають в процесі функціонування тої чи іншої системи.

У зв’язку з цим, СППР включає наступні складові:

- джерела даних;
- очищення, перетворення і узгодження даних;
- сховища і багатовимірні вітрини даних;
- оперативна аналітична обробка даних (OLAP);
- інструменти кінцевого користувача для виконання запитів і побудови звітів;
- інтелектуальний аналіз даних (Data Mining);
- СППР на основі знань і багатокритеріальних оцінок (DSS).

Підтримка прийняття управлінських рішень на основі накопичених даних може виконуватися в чотирьох базових сферах:

- *деталізованих даних* (представлення деталізованої інформації);
- *агрегованих показників* (комплексний погляд на зібрану у сховищі даних інформацію, її узагальнення, агрегування, представлення у вигляді гіперкубу і багатовимірний аналіз – OLAP системи);
- *закономірностей* (пошук функціональних, логічних та інших закономірностей в інформації – методи Data Mining);
- *прийняття остаточного рішення* (генерація можливих варіантів рішень, їх оцінка, вибір найкращого чи ранжування альтернатив – СППР на основі знань і багатокритеріальних оцінок (DSS).

Існують наступні <u>види СППР</u>:

1) *Системи багатокритеріального і багатоцільового оцінювання альтернатив Expert Choice [www.expertchoice.com]*

В СППР формулюються множини альтернатив та факторів (критеріїв, цілей тощо), що впливають на їх оцінювання. Будуються ієрархічна чи мережева структури факторів. Система запитує про попарну перевагу елементів, що знаходяться на одному рівні ієрархії і розраховуються ваги альтернатив за кожним фактором.

<u>Способи введення експертної інформації</u>:
вербальний – експерт вводить слово або вибирає із списку;
числовий – експерт вводить число;
графічний – експерт змінює графічне зображення: рухає курсор чи змінює площу круга, виказуючи перевагу одного елементу над іншим.

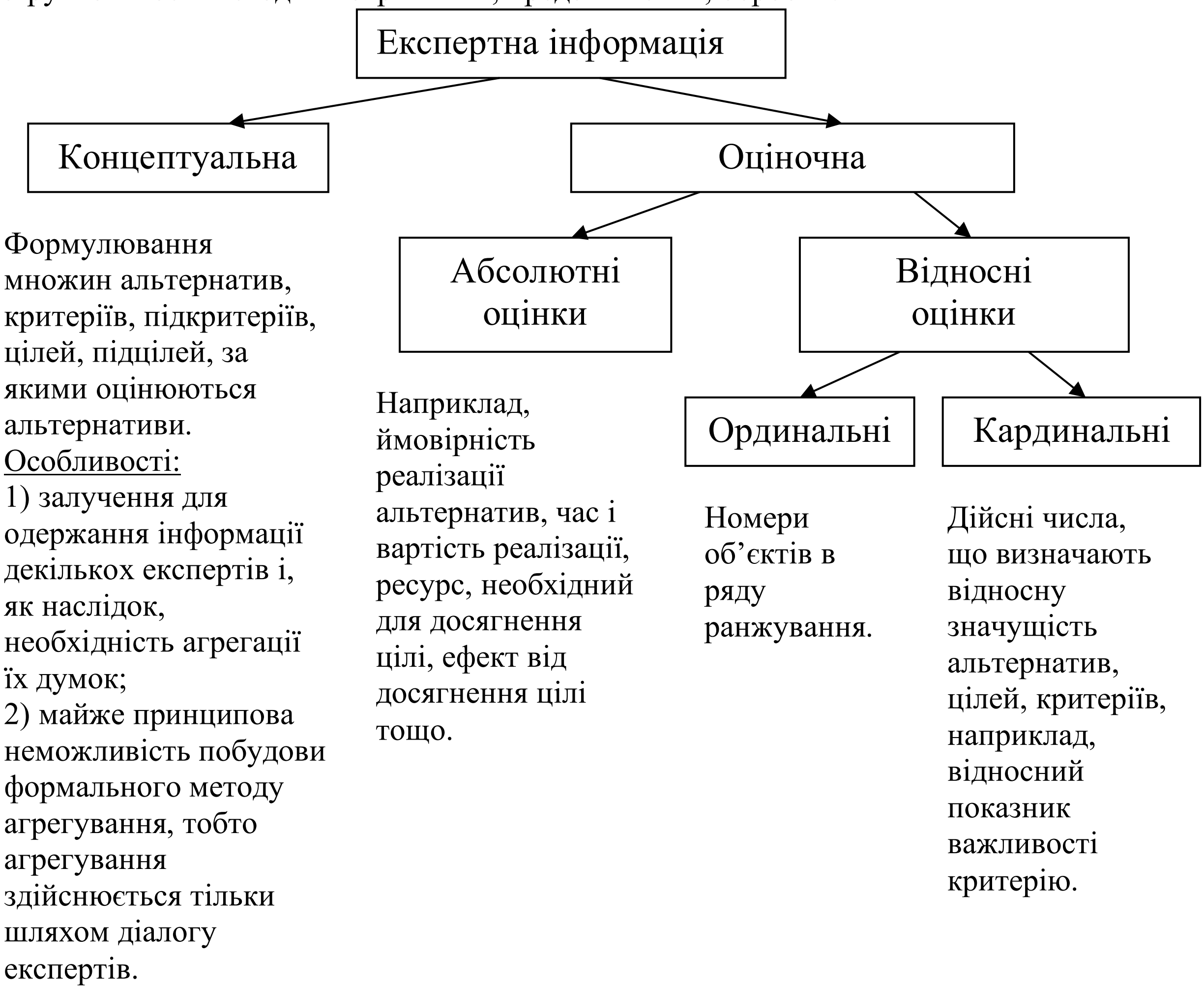
Потім система синтезує отримані ваги і розраховує глобальні ваги альтернатив відносно головної цілі ПР. Результати представляються в графічному вигляді. Expert Choice включає засоби проведення АЧ отриманих результатів: користувач може змінювати ваги критеріїв і спостерігати на екрані як у вигляді відповідних графіків, діаграм змінюються ваги альтернатив.

Наприклад, задача полягає у виборі квартири за критеріями ціна, місце розташування, площа, додаткові зручності, екологічна обстановка. Визначено альтернативи: квартира в смт.Буча, біля метро Лівобережна і на Позняках. Ваги критеріїв відносно цілі ПР формує ОПР, а до оцінювання альтернатив за кожним з критеріїв залучаються експерти.

2) *Адаптивні СППР*, які використовують досвід ОПР (для рішень, що повторюються)

4. Види експертної інформації

Експертна інформація (ЕІ) відіграє важливу роль в процесі прийняття рішень. Ефективність використання цієї інформації суттєво залежить від коректності і обґрунтованості методів її отримання, представлення, обробки.



Якісна інформація – сукупність оцінок порівнянь типу:

- критерій C_i важливіший за критерій C_j (позначення $C_i \succ C_j$);
- критерії C_i та C_j рівноважливі (позначення $C_i \sim C_j$).

Кількісна інформація може бути представлена за допомогою наступних оцінок:

- критерій C_i в α раз важливіший за критерій C_j (критерій C_i важливіший за критерій C_j на величину α);
- важливість критерію C_i має величину α_i.

До числа найбільш розповсюджених видів представлення ЕІ відносять:

- бальні оцінки, ранжування об’єктів;
- парні чи множинні порівняння;
- класифікація.

Значення (градації) бальної шкали представляють собою обмежений дискретний ряд чисел, що відстоять один від одного на однаковій відстані (0, ± 1, ± 2, ..., $\pm m$).

Під *ранжуванням* розуміється представлення об’єктів у вигляді послідовності у відповідності із спаданням їх важливості. При цьому допускається рівноцінність об’єктів.

Попарне порівняння полягає у знаходженні більш важливого об’єкту в кожній парі об’єктів. Метод парних порівнянь застосовують для виявлення переваг експертів «у чистому вигляді». Вважається, що *якісне порівняння двох об’єктів зробити набагато легше, ніж виражати свої переваги в бальній чи ранговій шкалах; цей метод не нав’язує експерту апріорних умов, таких як транзитивність наданих оцінок*.

Психофізіологічні обмеження людини

Розглянемо ті психофізіологічні можливості людини, які відіграють суттєву роль в прийнятті рішень. Особливу увагу будемо приділяти тим можливостям, які є важливими при використанні розглядуваних методів. Ці методи характерні тим, що експерти залучаються для порівняльної оцінки об’єктів. Особливістю такого процесу є те, що людина в ході такого порівняння повинна <u>оперувати всіма об’єктами</u>. Ефективність таких дій людини визначається можливостями її пам’яті.

Найбільш обґрунтованою експериментальними даними на сьогоднішній день є трьохкомпонентна модель пам’яті. Згідно з цією моделлю розрізняють <u>три види пам’яті</u>:

- сенсорна (інформація поступає від органів почуттів і зберігається в ній біля 1/3 секунди);
- короткотермінова (інформація зберігається до 30 секунд);
- довготривала (інформація зберігається десятки років).

Дослідження показують, що процеси прийняття рішень відбуваються за участю саме короткотермінової пам’яті, в яку інформація може поступати із сенсорної чи довготривалої пам’яті.

Об’єм короткотермінової пам’яті обмежений 7 ± 2 одиницями, що називаються *чанками*. При цьому чанком може бути і простий символ, і складний образ, але важливо, щоб об’єкт, що описується чанком, сприймався людиною як єдиний образ.

Тому, при розробці методів ППР число об’єктів, що порівнюються експертом, необхідно обмежити цією магічною границею 7 ± 2.

5. Методи розрахунку ваг альтернатив рішень за критерієм з використанням оцінок експертів (кардинальні оцінки)

5.1. Загальні відомості

Якщо ступінь вираженості деякої властивості (критерію) альтернативи неможливо представити числом, то такий критерій називається *якісним*. Наприклад, якість товару, якість програмного забезпечення, компетентність експерта.

В подальшому будемо використовувати поняття коефіцієнта відносної важливості, тому дамо його означення.

Коефіцієнт відносної важливості (вага) об’єкту (критерію, альтернативи) – невід’ємне нормоване дійсне число, більше значення якого свідчить про більшу важливість відповідного об’єкту.

Ваги $\{w_i \mid i = 1,...,n\}$ називаються *нормованими* (до одиниці), якщо виконується умова $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Розглянемо постановку задачі оцінюванні альтернатив за одним критерієм.

Постановка задачі

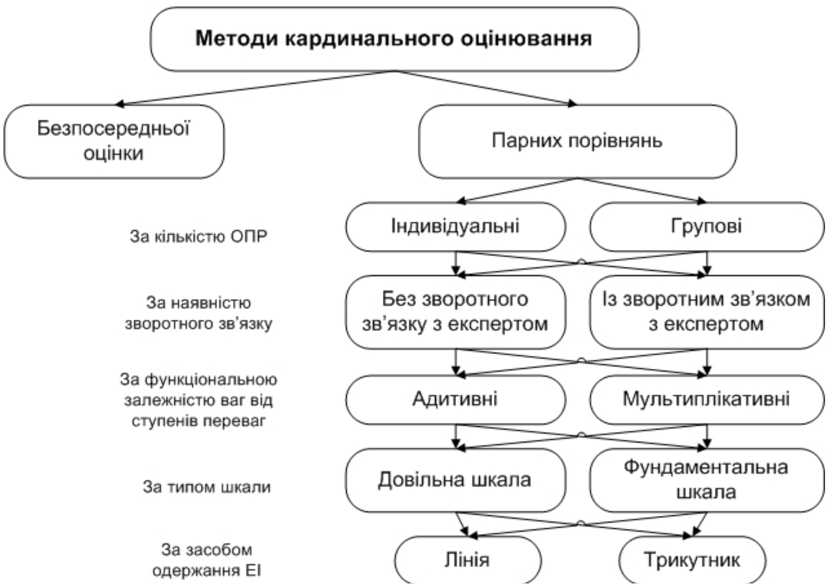
Дано: множина альтернатив $A = \{a_i\}$, $i = 1,...,n$;

критерій C;

Знайти: множину $W = \{w_i\}$ коефіцієнтів відносної вагомості (ваг) альтернатив за

критерієм C при умові $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Методи розв'язання поставленої задачі розрізняються за такими ознаками:
- кількістю ОПР чи експертів (індивідуальні, групові);
- способом взаємодії з експертом (відсутність чи наявність зворотного зв'язку);
- типом питань, які ставляться експерту (мультиплікативні: «у скільки разів один об'єкт важливіший за інший», адитивні «на скільки важливіший»);
- шкалою, в якій подаються результати порівнянь (фундаментальна, довільна);
- кількістю порівнянь, які необхідно виконати експерту («лінія», «трикутник»);
- способом обробки МПП (паралельний, послідовний);
- способом вводу значень переваг об'єктів (вербальний, графічний, числовий).



Детальніше розглянемо основні методи кардинального оцінювання.

5.2. Метод безпосереднього оцінювання

Метод складається з наступних кроків:

1. Експерт привласнює кожній альтернативі a_i число v_i (ранг, бал, вага), яке, на його думку, відбиває ступінь властивості, представленої критерієм C:

$$\forall i \quad a_i \to v_i \in (0,n).$$

2. Значення v_i нормуються і отримують відносні показники значущості альтернативи за критерієм: $w_i = v_i / \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Недолік методу полягає в тому, що <u>мають місце значні похибки коли альтернативи досить близькі</u>.

5.3. Загальна характеристика методів парних порівнянь. Матриці парних порівнянь (МПП)

Одними з найбільш популярних методів знаходження ваг критеріїв та альтернатив є методи парних порівнянь. Результати багаточисленних досліджень показують, що парні порівняння дозволяють оптимальним чином врахувати психофізіологічні особливості людини і тому призводять до більш точних оцінок експертів.

Нехай задана множина альтернатив $A = \{a_i\}$, $i = 1,...,n$. В методах парних порівнянь кожна альтернатива порівнюється в загальному випадку з усіма іншим альтернативами відносно заданого критерію і за результатами порівнянь формується <u>матриця парних порівнянь</u> $D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ (табл. 1), де елемент d_{ij} в кількісній формі виражає силу переваги альтернативи a_i над альтернативою a_j. Для надання елементам МПП конкретних числових значень перед початком процедури порівняння розробляються шкали вербальних експертних суджень з градаціями s_k і відповідних кількісних виражень цих градацій x_k, де x_k - дійсні числа, $k = 0,...,K$. Передбачається, що число поділок шкали $K+1$ є скінченим і фіксованим.

Після формування шкал суджень заповнення МПП здійснюється за правилом:

$$d_{ij} = x_k,$$

якщо порівняння альтернативи a_i з альтернативою a_j описується судженням s_k.

Однією з широко розповсюджених вербальних шкал є <u>фундаментальна шкала</u> відносної важливості (табл. 2). Експериментально доведена ефективність цієї шкали над іншими шкалами.

Таблиця 1. Матриця парних порівнянь

	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n
a_1	d_{11}	d_{12}	d_{13}	$\cdots$	d_{1n}
a_2		d_{22}	d_{23}	$\cdots$	d_{2n}
a_3			d_{33}	$\cdots$	d_{2n}
$\vdots$				...	$\vdots$
a_n					d_{nn}

Таблиця 2. Фундаментальна шкала експертних суджень

Інтенсивність важливості x_k	Якісна оцінка (судження s_k)	Пояснення
1	Однаково важливі	Елементи рівні за своїм значенням
3	Ненабагато важливіші	Існують вербальні висловлювання щодо пріоритету одного елементу над іншим, але ці висловлювання досить непереконливі
5	Суттєво важливіші	Існують добрі докази та логічні критерії, які можуть показати, що один з елементів є більш важливий
7	Значно важливіші	Існує переконливий доказ великої значущості одного елемента в порівнянні з іншим
9	Абсолютно важливіші	Усвідомлення пріоритету одного елементу над іншим максимально підтверджується
2,4,6,8	Проміжні оцінки	Потрібен певний компроміс

Важливим моментом для подальшої обробки МПП є апріорний вибір інтерпретації елементів МПП в термінах ваг об’єктів. В загальному випадку

$$d_{ij} \approx f(w_i, w_j), \tag{1}$$

де f - деяка функція, а "$\approx$" означає відповідність, оскільки для заданих експертами МПП не обов’язково має місце точна рівність.

Достатньо часто на практиці використовуються представлення:

$f(w_i, w_j) = w_i / w_j$ (<u>мультиплікативні</u> парні порівняння),

$f(w_i, w_j) = w_i - w_j$ (<u>адитивні</u> парні порівняння).

При мультиплікативних парних порівняннях експерту ставиться питання «у скільки разів альтернатива a_i переважає альтернативу a_j відносно критерію», при адитивних порівняннях – «на скільки».

Оскільки спостерігається симетрія відносно перестановок двох порівнюваних альтернатив, то для елементів МПП має місце залежність (властивість *оберненої симетричності)*:

$d_{ji} = 1/d_{ij}$, $d_{ij} > 0$ (<u>мультиплікативні</u> парні порівняння),

$d_{ji} = -d_{ij}$ (<u>адитивні</u> парні порівняння).

МПП $D = \{d_{ij} \mid i, j = 1,...,n\}$ називається *узгодженою*, якщо для всіх її елементів виконується властивість *транзитивності*: $d_{ij} = d_{ik} d_{kj}$ (мультиплікативна МПП), $d_{ij} = d_{ik} + d_{kj}$ (адитивна МПП) $\forall i, j, k$.

МПП, елементи якої при деяких вагах w_i, описуються рівністю $d_{ij} = f(w_i, w_j)$, називається *теоретичною МПП,* $i, j = 1,...,n$. Теоретична МПП завжди є узгодженою, оскільки

$d_{ij} = \frac{w_i}{w_j} = \frac{w_i}{w_k}\frac{w_k}{w_j} = d_{ik}d_{kj}$ (мультиплікативна МПП),

$d_{ij} = w_i - w_j = (w_i - w_k) + (w_k - w_j) = d_{ik} + d_{kj}$ (адитивна МПП).

В загальному випадку заповнена експертом МПП відрізняється від теоретичної в тому сенсі, що ні при яких w_i не буде виконуватися рівність $d_{ij} = f(w_i, w_j)$. Основними причинами цього є як неузгодженість оцінок експерта при виборі вербальних суджень, так і апріорна фіксація кількісних виражень градацій шкали.

В методі <u>«лінія»</u> експерт визначає лише один рядок МПП, тобто порівнює всі альтернативи з однією вибраною, так званою еталонною альтернативою. У методі «трикутник» треба виконати порівняння кожного об’єкту з кожним, тобто всього $\frac{n(n-1)}{2}$ порівнянь, інші елементи МПП обчислюються за допомогою певних розрахунків. При цьому в методі «трикутник» експертна інформація є надлишковою і використовується для оцінювання її узгодженості з метою організації, якщо це необхідно, зворотного зв’язку з експертом.

В i-му рядку МПП альтернатива a_i виступає еталоном. Тому МПП – це результат порівнянь всіх альтернатив з різними еталонними альтернативами. Відносні ваги визначаються як результати обробки МПП.

5.4. Метод «лінія» парних порівнянь

<u>Дано:</u>

- множина альтернатив $A = \{a_i\}$, $i = 1,...,n$,
- якісний критерій C.

<u>Знайти:</u>

- коефіцієнти відносної вагомості (ваги) альтернатив $W = \{w_i\}$, $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

<u>Ідея методу.</u> Метод «лінія» є методом парних порівнянь у довільній шкалі без зворотного зв’язку з експертом. Експерт вибирає еталонну альтернативу з усієї множини альтернатив і попарно порівнює з нею всі інші альтернативи. Далі вибирається адитивна чи мультиплікативна модель залежності ваг від величин переваг і розраховуються ваги альтернатив.

<u>Метод «лінія» складається з наступних кроків:</u>

1. Експерт вибирає a_e - еталонну альтернативу і порівнює з нею всі інші альтернативи a_i, $i \neq e$. При мультиплікативних порівняннях експерту ставиться питання «у скільки разів a_e переважає a_i відносно критерію C», при адитивних порівняннях – «на скільки».

За результатами формується множина $D = \{d_{ei}\}$ ступенів переваг a_i над a_e.

2. Еталону a_e присвоюється вага v_e, під якою розуміємо кількісну міру ступеня вираженості у альтернативи a_e властивості, що описується критерієм C.

3. Обчислюються ненормовані ваги $v_i = \varphi(v_e, d_{ei})$, $\forall\ i \neq e$, де φ - монотонна функція. При мультиплікативних порівняннях $v_i = v_e \varphi_{mult}(d_{ei})$, $\varphi_{mult}(1) = 1$, при адитивних порівняннях $v_i = v_e + \varphi_{ad}(d_{ei})$, $\varphi_{ad}(0) = 0$.

Тобто, вага кожної альтернативи виражається через вагу еталона.

4. Здійснюється нормування ваг і знаходяться відносні ваги $w_i = v_i / \sum_{i=1}^{n} v_i$.

Трудомісткість: $n-1$ порівнянь.

5.5. Метод головного власного вектору парних порівнянь

Дано:

- множина альтернатив $A = \{a_i\}$, $i = 1,...,n$,
- якісний критерій C .

Знайти:

- коефіцієнти відносної вагомості (ваги) альтернатив $W = \{w_i\}$, $w_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Ідея методу.
Експерт попарно порівнює альтернативи у фундаментальній шкалі і за результатами порівнянь заповнюється $n(n-1)/2$ елементів верхньої трикутної частини МПП D . Елементи нижньої трикутної частини розраховуються за правилом оберненої симетричності $d_{ji} = 1/d_{ij}$.

Твердження. *Вектором ваг є власний вектор МПП D, що відповідає її найбільшому власному числу.*

Нехай є n каменів $a_1, a_2, ..., a_n$ з відомими вагами $w_1, w_2, ..., w_n$ та припустимо, що сформована МПП D , елементи якої – відношення ваг каменів. Отримаємо рівняння:

$$Dw = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = nw .$$

Для отримання ваг необхідно розв'язати систему лінійних однорідних рівнянь

$$Dw = nw \text{ чи } (D - nI)w = 0 . \tag{2}$$

Вона має нетривіальний розв'язок тоді і тільки тоді, коли $\det(D - nI) = 0$, тобто коли n є власним числом D .

Ранг МПП D дорівнює одиниці, $rang(D) = 1$, оскільки кожний її рядок дорівнює першому рядку, помноженому на константу. В результаті всі власні числа D , окрім одного, дорівнюють нулю.

Відомо, що сума власних чисел матриці дорівнює її сліду – сумі діагональних елементів. Для даної матриці D слід дорівнює n , $\sum_i \lambda_i = trD = n$. Отже, n є власним числом матриці D та існує нетривіальний розв'язок рівняння (2). Цей розв'язок додатний (елементи вектору ваг w є додатними) та єдиний з точністю до константи. Щоб w став єдиним проводять нормування шляхом ділення кожного його елементу на суму всіх елементів.

Нагадаємо, що для елементів матриці D виконані наступні властивості: $d_{ji} = \frac{1}{d_{ij}}$ (D - обернено симетрична), $d_{ii} = 1$ та $d_{ik} = d_{ij} d_{jk}$ (D - транзитивна, узгоджена).

В загальному випадку немає можливості отримати точні значення відношень $\frac{w_i}{w_j}$, можна визначити тільки їх оцінки. Припустимо, що отримані від експертів оцінки відношень $\frac{w_i}{w_j}$ - це малі збурення точних значень.

Вибір збурення, яке найбільш відповідає описанню впливу неузгодженості на власний вектор, що розраховується, залежить від психологічного процесу, який має місце при заповненні МПП. Припустимо, що всі збурення, які заслуговують на увагу, можуть бути зведені до загального вигляду $d_{ij} = \frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}$, де $\varepsilon_{ij} > 0$. Узгодженість має місце, якщо $\varepsilon_{ij} = 1$.

Має місце $\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \frac{w_j}{w_i}$ (як i-а компонента матричної рівності $Dw = \lambda_{\max} w$).

Визначимо $\mu = -\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n} \lambda_i$ (середнє значення не головних власних чисел МПП D із знаком мінус). Тоді з $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$ отримуємо, що $\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$;

В загальному випадку $\lambda_{\max} \geq n$ і рівність має місце тоді і тільки тоді, коли D - узгоджена.

<u>Означення.</u> *Індексом узгодженості* (consistency index) МПП D називається величина $CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1}$.

<u>Означення.</u> *Відношенням узгодженості* (consistency ratio) МПП називається $CR = \frac{CI}{MRCI}$, де $MRCI$ - середнє значення індексів узгодженості для заповнених випадковим чином МПП (табл. 3).

Таблиця 3. Значення $MRCI$ в залежності від розмірності n МПП

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$MRCI$	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45	1,49	1,52	1,54	1,56	1,58	1,59

Таким чином, для узгодженої МПП $CR = 0$. Якщо значення CR перевищує встановлений поріг (табл. 4), то МПП має неприпустимо високий рівень неузгодженості і не може використовуватися для розрахунку ваг.

Таблиця 4. Порогові значення CR в залежності від розмірності n МПП

n	Порогове значення CR
3	0.05
4	0.08
≥5	0.1

Існує два чисельних методи знаходження головного власного вектора МПП D: так звані граничний і степеневий методи.

Граничний метод

1. задати довільний вектор $x_0 > 0$;
2. розрахувати $D^k x_0$, $k \ge 1$;
3. визначити норму вектора $\|y\| \equiv \sum |y_i|$, тоді $\dfrac{D^k x_0}{\|D^k x_0\|}$ збігається до головного власного вектора матриці D при $k \to \infty$, а $\dfrac{\|D^k x_0\|}{\|D^{k-1} x_0\|}$ - до її максимального власного числа.

Степеневий метод

1. задати довільний вектор $x_0 > 0$, $\| x_0 \| = 1$;
2. розрахувати послідовність скалярних значень $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ і векторів $x_1, x_2, \ldots$, які задовольняють умовам $\|x_1\| = \|x_2\| = \ldots = 1$ і $Dx_{k-1} = \lambda_k x_k$. Ці значення розраховуються за формулами: $x_k = \dfrac{Dx_{k-1}}{\|Dx_{k-1}\|}$, $\lambda_k = \|Dx_{k-1}\|$. Тоді x_k збігається до головного власного вектора матриці D при $k \to \infty$, а λ_k - до її максимального власного числа.

Обидва наведені методи залежать від співвідношення між максимальним і наступним найбільшим власними числами і мають порядок збіжності $O\left(1/\lambda_{max}^2\right)$. Відмінність між ними полягає в тому, що в степеневому методі нормалізація стовпчиків степені МПП відбувається після кожної ітерації, а в граничному методі проводиться нормалізація граничної МПП (МПП у великій степені).

Метод геометричної середньої

Крім методу головного власного вектору для знаходження ваг використовують й інші методи, які в основному базуються на мінімізації відхилення елементів заданої експертом МПП від невідомої узгодженої МПП. Перевагою цих оптимізаційних підходів є те, що результуючі ваги мають властивість збереження рангів.

Нехай елементи МПП за побудовою $d_{ij} \approx w_i / w_j$ (мультиплікативна модель), що еквівалентно $d_{ij} w_j \approx w_i$. Ваги w можуть бути знайдені з однієї з наступних задач математичного програмування:

<u>Задача 1</u>

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} w_j - w_i)^2$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i > 0,\ i = 1,...,n.$$

<u>Задача 2</u>

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (d_{ij} - w_i / w_j)^2$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1,$$

$$w_i > 0,\ i = 1,...,n.$$

Обидва цих підходи є методами найменших квадратів. Задача 2 є нелінійною, оскільки цільова функція нелінійна і зазвичай не випукла, більш того, не існує єдиного розв’язку цієї задачі. Для її розв’язання використовується метод Ньютона, але при умові гарного початкового наближення.

Інший підхід – використання методу логарифмічних найменших квадратів:

<u>Задача 3</u>

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\ln d_{ij} - \ln w_i + \ln w_j)^2$$

при обмеженнях

$$\prod_{i=1}^{n} w_i = 1, \ (*)$$

$$w_i > 0, i = 1,...,n.$$

За умови мультиплікативної нормалізації (*) розв’язком задачі 3 є ваги, розраховані за методом <u>геометричної середньої</u>:

$$v_i = \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}\ .$$

Тоді нормовані до одиниці ваги альтернатив розраховуються за формулою

$$w_i = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} d_{ij}}}\ .$$

Метод геометричної середньої дуже широко використовується на практиці як наближення до методу головного власного вектору. Однак, лише при гарній узгодженості МПП ваги, знайдені за цими двома методами, є близькими. Якщо ж заповнена експертом МПП має високий рівень неузгодженості, то ці ваги будуть значно відрізнятися між собою.

При використання методу геометричної середньої мірою неузгодженості МПП слугує незміщена оцінка дисперсії збурень:

$$s^2 = \frac{S}{d.f} = \frac{2\sum_{i<j}\left(\ln d_{ij} - \ln\frac{v_i}{v_j}\right)^2}{(n-1)(n-2)},$$

де S - квадрат відстані між $\ln d_{ij}$ і $\ln\frac{v_i}{v_j}$, $d.f$ - (*скороч. від* degree of freedom) - кількість ступенів свободи, яка дорівнює різниці між кількістю оцінок $n(n-1)/2$ і кількістю оцінюваних параметрів $n-1$.

Обґрунтування використання методу геометричної середньої може бути проведене за допомогою двох підходів:

1. описаного вище детермінованого методу мінімізації логарифма квадратів помилок (логарифмічний МНК);

2. стохастичного методу максимальної правдоподібності пріоритетів, в якому використовується мультиплікативна модель збурень $d_{ij} = \frac{v_i}{v_j}\varepsilon_{ij}$ для представлення елементів МПП, де збурення ε_{ij} - незалежні випадкові величини, які мають лог-нормальний розподіл з нульовим середнім і постійною дисперсією, $\pi_{ij} \sim Lognormal(0,\sigma)$, тобто логарифм від ε_{ij} має нормальний закон розподілу.

З точки зору детермінованого методу, менше значення s^2 свідчить про коротшу відстань між d_{ij} і $\frac{v_i}{v_j}$. В стохастичному методі чим меншим є значення s^2, тим меншою є дисперсія збурень ε_{ij} і кращою є відповідність між оцінками експертів і вектором ваг v, і, як наслідок, більш узгодженою є МПП D.

Означення. Геометричним індексом узгодженості GCI МПП D при використанні методу RGMM знаходження ваг називається:

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}\ln^2 e_{ij} \quad ,$$

де $e_{ij} = d_{ij}v_j / v_i$ - помилка апроксимації відношення ваг v_i / v_j за допомогою елемента МПП d_{ij}.

Для визначення припустимості рівня неузгодженості МПП можна було б провести нормування індексу GCI аналогічно до того, як це було зроблено при визначенні відношення узгодженості CR. Однак, виявляється, що математичне сподівання для s^2 є постійною величиною.

Твердження. Математичне сподівання геометричного індексу узгодженості GCI для заповненої випадковим чином МПП D при умові, що елементи МПП є незалежними у сукупності, обернено симетричними і мають однаковий розподіл, є постійною величиною, рівною $E(GCI) = Var(\ln d_{ij})$.

Твердження. Для МПП D при використанні методу RGMM знаходження ваг виконується $GCI = \frac{2n}{n-2}CI + o(\varepsilon^3)$, де $\varepsilon = \max_{i,j}\{|\ln e_{ij}|\}$, $e_{ij} = d_{ij}v_j / v_i$.

Наслідок. За умов останнього твердження виконується рівність $GCI = k(n)CR + o(\varepsilon^3)$, де $k(n) = \frac{2n}{n-2}E(CI(n))$.

Таким чином, для малих помилок e_{ij} геометричний індекс узгодженості GCI пропорційний традиційній мірі узгодженості CR. Використовуючи імітаційне моделювання, оцінено регресію GCI від CR для різних інтервалів CR в межах $CR \le 0.1$. Отримані порогові значення для GCI наведені в табл. 5.

Таблиця 5. Порогові значення GCI для різних розмірностей МПП n

Порогове значення GCI		
$n=3$	$n=4$	$n \ge 5$
0.1573	0.3526	0.370

Якщо значення GCI, розраховані для заданих експертами МПП, перевищують вказані в табл. 5 пороги, то це свідчить про високу неузгодженість оцінок експертів.

Порівняння методів парних порівнянь «лінія» і головного власного вектору

Для методу головного власного вектору необхідно виконати достатньо велику кількість парних порівнянь $n(n-1)/2$, де n - кількість порівнюваних елементів. Отримана в результаті експертна інформація є надлишковою і використовується для підвищення достовірності оцінювання ваг. В умовах обмеженості часових і фінансових ресурсів використовують метод «лінія», який потребує лише $n-1$ порівнянь.

Метод	Трудомісткість, кількість порівнянь	Можливість оцінювання узгодженості множини ЕО	Можливість адитивних порівнянь	Коли застосовувати
«лінія»	$n-1$	–	+	Обмежені часові і фінансові ресурси
головного власного вектору	$\frac{n(n-1)}{2}$	+	–	Необхідно оцінити рівень довіри до ЕО

<u>Приклад 5.1.</u> Розрахунок коефіцієнтів відносної важливості (ваг) альтернатив рішень методами парних порівнянь. Оцінювання узгодженості оцінок експертів

Нехай потрібно порівняти трьох кандидатів на деяку посаду за критерієм «досвід». В результаті порівняння у фундаментальній шкалі першого кандидата з усіма іншими виявилося, що його досвід не набагато кращий за досвід другого, але сильно переважає досвід третього. Досвід другого кандидата практично такий же як і у третього, тільки трохи кращий. Тому матриця парних порівнянь (МПП) кандидатів дорівнює

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1/3 & 1 & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ваги кандидатів <u>методом головного власного вектору</u>.

$$\det(D - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 3 & 5 \\ 1/3 & 1-\lambda & 2 \\ 1/5 & 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + \tfrac{61}{30}$$

Значення $\lambda_{\max}$ розраховується як найбільший дійсний корінь рівняння

$$(1-\lambda)^3 - 3(1-\lambda) + \tfrac{61}{30} = 0.$$

Єдиний дійсний корінь дорівнює $\lambda = 3.004$.

Індекс узгодженості дорівнює

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{3.004 - 3}{3-1} = 0.002.$$

Відношення узгодженості $CR = \dfrac{CI}{MRCI} = \dfrac{0.002}{0.51} = 0.004$ не перевищує порогового значення 0.05 (для $n = 3$), тому МПП D є майже повністю узгодженою (для повністю узгодженої МПП $CR = 0$) і, як наслідок, може використовуватися для знаходження ваг.

Ваги v розраховуються з системи лінійних рівнянь $Dv = \lambda v$, в розгорнутому вигляді

$$\begin{cases} 1 \cdot v_1 + 3 \cdot v_2 + 5 \cdot v_3 = 3.004 \cdot v_1 \\ \frac{1}{3} \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 2 \cdot v_3 = 3.004 \cdot v_2 \\ \frac{1}{5} \cdot v_1 + \frac{1}{2} \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 = 3.004 \cdot v_3 \end{cases}.$$

Система має безліч розв’язків, оскільки її детермінант дорівнює нулю. Один з ненульових розв’язків: $v_1 = 5.2891$, $v_2 = 1.8815$, $v_3 = 1$.

Нормовані ваги:

$w_1 = 0.648$, $w_2 = 0.230$, $w_3 = 0.122$.

Наближеним до методу головного власного вектора є <u>метод геометричної середньої</u> розрахунку ваг. Згідно з цим методом ненормовані ваги дорівнюють

$$v_1 = \sqrt[3]{1 \cdot 3 \cdot 5} = 2.4662,$$

$$v_2 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2} = 0.8736,$$

$$v_3 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{5} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 1} = 0.4642.$$

Після нормування отримаємо ваги $w_1 = 0.648$, $w_2 = 0.230$, $w_3 = 0.122$.

Геометричний індекс узгодженості дорівнює

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} \left(\ln d_{ij} - \ln \frac{v_i}{v_j} \right)^2 = 0.011.$$

Цей індекс не перевищує порогового значення 0.1573 (для $n = 3$ і $CR^{порог} = 0.05$), тому МПП D має гарну узгодженість (для повністю узгодженої МПП $GCI = 0$).

Результати показують, що ваги, отримані точним та наближеним методами, співпадають. Це є результатом гарної узгодженості МПП D. В загальному випадку, при неузгодженій МПП ці ваги відрізняються і відмінність є тим більшою, чим більш неузгодженою є МПП.

Знайдемо ваги кандидатів <u>методом «лінія»</u>.

Нехай еталоном є перший кандидат. Тому при розрахунку ваг будемо використовувати оцінки парних порівнянь кожного кандидата з першим, тобто елементи першого рядка МПП D.

Для того щоб можна було порівняти результати методу «лінія» з методом головного власного вектору необхідно покласти мультиплікативну залежність ваг від величин переваг у вигляді $v_i = v_e d_{ie}$, де $v_e = v_1$, $i = 2,3$.

Тоді $v_2 = v_1 / 3$, $v_3 = v_1 / 5$.

Після нормування отримаємо нормовані ваги $w_1 = \frac{v_1}{v_1 + v_1/3 + v_1/5} = \frac{15}{23} = 0.652$,

$w_2 = \frac{v_1/3}{v_1 + v_1/3 + v_1/5} = \frac{5}{23} = 0.217$, $w_3 = \frac{v_1/5}{v_1 + v_1/3 + v_1/5} = \frac{3}{23} = 0.131$.

Отже, ваги, розраховані методами «лінія» і головного власного вектору, дещо відрізняються між собою, але задають однакове ранжування кандидатів.

6. Методи агрегування ваг альтернатив рішень

Набір критеріїв у багатокритеріальній задачі повинен задовольняти певним вимогам:

Повнота. Використання будь-яких додаткових критеріїв не змінює результатів рішення задачі, а відкидання хоча б одного з обраних критеріїв, навпаки, призводить до зміни результатів.

Операційність. Кожен критерій повинен мати зрозуміле формулювання, характризувати визначений (певний) аспект наслідків.

Декомпозитність. Набір критеріїв повинен забезпечувати можливість спрощення задачі оцінювання пріоритетів шляхом розбиття первісної задачі на окремі більш прості частини (підзадачі).

Ненадмірність. Різноманітні критерії з набору не повинні враховувати один і той же аспект наслідків.

Мінімальність. Набір повинен містити якомога меншу кількість критеріїв. Оптимальна кількість критеріїв 7 ± 2 (див. вище психофізіологічні обмеження людини).

Вимірність. Кожний критерій повинен припускати можливість оцінити по ньому кожну альтернативу.

Ці вимоги містять суперечності, вони не можуть бути задовільнені одночасно. Вимога мінімальності орієнтує на агрегування критеріїв, що часто призводить до суперечності з вимогами операційності та вимірності; оскільки агрегований критерій звичайно має менш зрозуміле і однозначне значення. З іншого боку, вимоги повноти та операційності орієнтують на декомпозицію критеріїв на елементарні, що призводить до збільшення кількості критеріїв у наборі. Тому при формуванні набору критеріїв в реальних задачах для задоволення цих вимог необхідно йти на компроміси.

Метод аналізу ієрархій

Метод аналізу ієрархій (МАІ, англ. Analytic Hierarchy Process, AHP) - метод знаходження ваг альтернатив за ієрархічною структурою критеріїв.

Функції МАІ:
- структуризація складності,
- вимірювання у шкалі відношень,
- синтез.

Трьома спорідненими з функціями базовими принципами МАІ:
- декомпозиція,
- порівняльні судження,
- ієрархічна композиція.

Принцип декомпозиції полягає у структуризації складної проблеми у вигляді ієрархії критеріїв, які впливають на головну ціль прийняття рішення. На останньому рівні ієрархії зазвичай знаходяться альтернативні варіанти рішень.

Для встановлення ваг (пріоритетів) факторів і альтернатив в МАІ використовується *принцип порівняльних суджень*, згідно з яким елементи, що знаходяться на одному рівні ієрархії, попарно порівнюються між собою відносно їх впливу на спільний елемент вищого рівня і експерт дає оцінку щодо інтенсивності переваги одного елементу над іншим в фундаментальній шкалі.

Згідно з *принципом ієрархічної композиції* ваги синтезуються, починаючи з нижнього рівня ієрархії.

Розглянемо чотири аксіоми МАІ.

Аксіома однорідності МАІ стверджує, що елементи, які порівнюються, не повинні відрізнятися між собою більш ніж на порядок величини, інакше це призведе до значних помилок в судженнях, зменшення точності та збільшення неузгодженості оцінок.

Аксіома оберненості (взаємності) МАІ: якщо $P_C(A,B)$ - результат парного порівняння елементів A та B відносно їх батьківського елементу C і означає в скільки разів більше елемент A володіє властивістю в порівнянні з елементом B, то $P_C(B,A) = 1/P_C(A,B)$.

Аксіома незалежності елементів вищих рівнів ієрархії від елементів нижчих рівнів. Використання МАІ потребує представлення проблеми у вигляді ієрархії, коли елементи нижчих рівнів залежать від елементів вищих рівнів.

Аксіома адекватного представлення поглядів експертів. Оскільки МАІ – дуже гнучкий і може використовуватися в різних областях прийняття рішень різними способами, то експерти, які надають оцінки парних порівнянь елементів ієрархії, мають перевірити, що їхні погляди адекватно представлені в результатах роботи МАІ.

Відокремлюють наступні *етапи МАІ* :

1. Побудова ієрархічної структури критеріїв, які впливають на головну ціль прийняття рішення; формування множини альтернативних варіантів рішень.
2. Отримання суджень експертів щодо парних порівнянь елементів одного рівня ієрархії відносно спільного елементу вищого рівня. Парні порівняння є мультиплікативними і проводяться в фундаментальній шкалі відносної важливості. За результатами парних порівнянь будуються матриці парних порівнянь (МПП), які є додатніми і обернено симетричними.
3. Математична обробка суджень експертів:
   - розрахунок локальних ваг елементів кожного рівня ієрархії відповідно до батьківських елементів вищого рівня;
   - аналіз узгодженості експертних оцінок;
   - розрахунок глобальних ваг елементів ієрархії відносно головної цілі прийняття рішення.

Локальною вагою елемента ієрархії називається вага елемента відносно елементу сусіднього вищого рівня ієрархії, розрахована з МПП методом головного власного вектору чи одним із наближених методів, наприклад, середньої геометричної.

Глобальною вагою елемента ієрархії називається вага елемента відносно вершини ієрархії (в більшості випадків – це головна ціль прийняття рішення), розрахована за локальними вагами одним з методів ієрархічного синтезу.

Методи розрахунку локальних ваг елементів кожного рівня ієрархії відповідно до батьківських елементів вищого рівня і показники узгодженості експертних оцінок описано вище в розділі 5.

Тому перейдемо до розрахунку глобальних ваг елементів ієрархії.

Постановка задачі

Дано:

- $A = \left\{ A_i \middle| i = \overline{1, N} \right\}$ - множина альтернативних варіантів рішень;
- $C = \{ C_j \mid j = \overline{1, M} \}$ - множина критеріїв;
- v_{ij} - ненормована вага альтернативи A_i за критерієм C_j;
- w_j^C - нормована вага критерію C_j.

Потрібно:

- знайти глобальні ваги $w_i^{глоб}$ альтернатив A_i, $i = \overline{1, N}$.

Існує декілька методів знаходження глобальних ваг:

- дистрибутивний синтез,
- ідеальний синтез,
- мультиплікативний синтез,
- групове врахування бінарних відношень переваг альтернатив.

В подільшому будемо використовувати поняття оптимальних альтернатив, тому дамо їх означення.

Оптимальна альтернатива - альтернатива, яка має найбільшу глобальну вагу. Альтернатива, *оптимальна за одним з критеріїв* – це альтернатива, яка має найбільшу вагу за цим критерієм (локальну вагу).

Детальніше розглянемо кожен з методів синтезу.

6.1. Метод дистрибутивного синтезу (лінійна згортка)

Глобальна вага альтернативи A_i розраховується за формулою

$$w_i^{глоб} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij} \ ,$$

де $r_{ij} = \frac{v_{ij}}{\sum_{k=1}^{N} v_{kj}}$ - нормовані значення ваг v_{ij}, $\sum_{i=1}^{N} r_{ij} = 1 \quad \forall j = \overline{1, M}$.

Результуючі ваги $w_i^{глоб}$ є нормованими, тобто $\sum_{i=1}^{N} w_i^{глоб} = 1$.

6.2. Метод ідеального синтезу

Глобальна вага альтернативи A_i розраховується так само, як і в методі дистрибутивного синтезу, за допомогою адитивної функції згортки

$$\overline{w}_i^{глоб} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij} , \qquad (6.1)$$

але нормування локальних ваг v_{ij} проводиться по-іншому, а саме, визначається співвідношення між v_{ij} та «ідеалом», де під ідеалом розуміють альтернативу, оптимальну за даним критерієм C_j:

$$r_{ij} = \frac{v_{ij}}{\max\limits_{k=1,...,N} v_{kj}} .$$

Отримані згідно з (6.1) ваги $\overline{w}_i^{глоб}$ потребують нормування до одиниці, тому шукані нормовані ваги $w_i^{глоб}$ дорівнюють

$$w_i^{глоб} = \overline{w}_i^{глоб} / \sum_{i=1}^{N} \overline{w}_i^{глоб} .$$

6.3. Метод мультиплікативного синтезу (мультиплікативна згортка)

При порівнянні альтернатив A_i та A_k за методом мультиплікативного синтезу розраховується наступний добуток:

$$P\left(\frac{A_i}{A_k}\right) = \prod_{j=1}^{M} \left(\frac{v_{ij}}{v_{kj}}\right)^{w_j^C} , \quad i,k = \overline{1,N} .$$

Якщо $P\left(\frac{A_i}{A_j}\right) \geq 1$, тоді альтернатива A_i є важливішою за альтернативу A_j.

Глобальна вага $\overline{w}_i^{глоб}$ альтернативи A_i розраховується за формулою для зваженої середньої геометричної

$$\overline{w}_i^{глоб} = \prod_{j=1}^{M} (v_{ij})^{w_j^C} , \; i = \overline{1,N} . \qquad (6.2)$$

Отримані згідно з (6.2) ваги $\overline{w}_i^{глоб}$ потребують нормування до одиниці, тому шукані нормовані ваги $w_i^{глоб}$ дорівнюють

$$w_i^{глоб} = \overline{w}_i^{глоб} / \sum_{i=1}^{N} \overline{w}_i^{глоб} .$$

6.4. Метод групового врахування бінарних відношень переваг альтернатив (ГВБВПА)

Цей метод полягає у розбитті проблеми на підпроблеми, досліджуючи одночасно тільки пару альтернатив з усієї множини альтернатив. Розглядаються $N(N-1)/2$ підзадач і визначаються $N(N-1)/2$ пар глобальних ваг альтернатив (w_i^{ik}, w_k^{ik}), де w_i^{ik} - глобальна вага альтернативи A_i при одночасному розгляді тільки пари A_i та A_k, $i = \overline{1,N}$, $k = \overline{1,(N-1)/2}$. Значення w_i^{ik} розраховується за *дистрибутивним методом*:

$$w_i^{ik} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij} ,$$

де $r_{lj} = \dfrac{a_{lj}}{a_{ij} + a_{kj}}$, $l \in \{i, k\}$, $r_{ij} + r_{kj} = 1$.

Для об’єднання часткових розв’язків будується матриця $P = \left(w_i^{ik} / w_k^{ik} \right)$, $i, k = \overline{1, N}$, яка задовольняє всім властивостям традиційної матриці парних порівнянь: альтернативи попарно порівнюються відносно всіх критеріїв, вона є обернено симетричною. Ваги, отримані з матриці P, формують загальний розв’язок задачі.

Порівняння методів синтезу. Реверс рангів

Методи дистрибутивного, ідеального синтезу та ГВБВПА МАІ базуються на методі зваженої середньої, особливості останньої полягають в наступному:

- мале значення альтернативи за одним критерієм компенсується великим її значенням за іншим критерієм;
- всі критерії повинні мати одну і ту ж розмірність, тому *обов’язковим є попереднє нормування оцінок*, отриманих за різними критеріями.

Метод мультиплікативного синтезу:

- є безрозмірним методом;
- критерії можуть мати різні одиниці вимірювання.

Один з підходів до порівняння методів синтезу – це реверс рангів альтернатив рішень.

Реверс рангів – це зміна рангів альтернатив при додаванні чи вилученні альтернативи за умови незмінності множини критеріїв, їх ваг, а також оцінок альтернатив за критеріями.

<u>Постановка задачі оцінювання реверсу рангів в різних методах синтезу</u>

<u>Дано:</u>

- $A = \{ A_i \mid i = 1, ..., n \}$ - множина альтернативних варіантів рішень;
- $C = \{ C_j \mid j = 1, ..., m \}$ - множина критеріїв;
- $D^j = (d_{ik}^j)$ - узгоджена МПП альтернатив за критерієм C_j, $i, k = 1, ..., n$;
- $D^{*j} = (d_{ik}^{*j})$ - узгоджена МПП $n+1$ альтернативи за критерієм C_j, $i, k = 1, ..., n+1$, де $d_{ik}^{*j} = d_{ik}^j$ при $i, k = 1, ..., n$;
- w_j^C - нормована вага критерію C_j, $\sum_{j=1}^{m} w_j^C = 1$.
- $w_i^{глоб}$ - глобальні ваги альтернатив A_i, $i = 1, ..., n$;
- $w_i^{*глоб}$ - глобальні ваги альтернатив A_i після додавання додаткової альтернативи A_{n+1}, $i = 1, ..., n+1$.

<u>Потрібно:</u>

- встановити, чи має місце реверс рангів при використанні методу синтезу,
- виявити випадки появи реверсу рангів,
- знайти частоти появи реверсу рангів.

Види реверсу рангів:

1. зміна знаку переваги між старими альтернативами

Наприклад, $A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ \boldsymbol{A_i} \succ \boldsymbol{A_k} \succ \ldots \succ A_n$, а після додавання до розгляду ще однієї альтернативи A_{n+1} ранжування стало $A_1 \succ A_2 \succ \ldots \succ \boldsymbol{A_k} \succ \boldsymbol{A_i} \succ \ldots \succ A_n$.

В загальному випадку цей вид реверсу рангів спостерігається для пари альтернатив A_i та A_k, $i,k = \overline{1,N}$, якщо виконується наступна *умова*:

$$(\Delta w_{ik}^{глоб} \cdot \Delta w_{ik}^{*глоб} < 0) \vee ((\Delta w_{ik}^{глоб} = 0) \wedge (\Delta w_{ik}^{*глоб} \neq 0)) \vee ((\Delta w_{ik}^{глоб} \neq 0) \wedge (\Delta w_{ik}^{*глоб} = 0)),$$

$$\text{де } \Delta w_{ik}^{глоб} = w_i^{глоб} - w_k^{глоб},\ \Delta w_{ik}^{*глоб} = w_i^{*глоб} - w_k^{*глоб}.$$

2. зміна оптимальної альтернативи

Умова появи цього виду реверсу рангів наступна:

$$i \neq i^*,$$

де i - номер оптимальної альтернативи при розгляді n альтернатив, $i: w_i^{глоб} = \max\limits_{k=1,\ldots,n} w_k^{глоб}$, i^* - номер оптимальної альтернативи при розгляді $n+1$ альтернативи, $i^*: w_{i^*}^{глоб} = \max\limits_{k=1,\ldots,n,n+1} w_k^{*глоб}$,

3. зміна рангів альтернатив при їх попарному розгляді в порівнянні з розглядом всіх альтернатив одночасно.

Результати моделювання реверсу рангів для великої кількості випадковим чином заповнених МПП показали, що це явище може виникнути в кожному з описаних вище методів синтезу. Найбільша частота появи реверсу – в методах дистрибутивного синтезу і ГВБВПА. Найменша частота – в мультиплікативному методі.

Причиною появи реверсу в методі дистрибутивного синтезу є нормалізація ваг до одиниці (шляхом ділення на суму елементів вектору ваг) і використання адитивної функції синтезу. Причина реверсу в ідеальному синтезі – зміна «ідеалу», тобто альтернативи, оптимальної за одним з критеріїв. В мультиплікативному синтезі реверс виникає при окремих комбінаціях ваг критеріїв та альтернатив.

Приклад 6.1. Багатокритеріальне прийняття рішень за методами ідеального та мультиплікативного синтезу. Реверс рангів

Нехай необхідно вибрати одного з трьох кандидатів на вакантну посаду за критеріями «освіта» і «досвід роботи». Ваги критеріїв дорівнюють 0.4 і 0.6.

Нехай особа, що приймає рішення, порівняла кандидатів за кожним з критеріїв і за результатами побудовані наступні МПП:

$$D^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/6 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},\ D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 1/5 \\ 5/2 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

МПП D^1 і D^2 - узгоджені, оскільки для $\forall i, j, k = 1,...,n$ виконується $d_{ij} = d_{ik} d_{kj}$, де $n = 3$, d_{ij} - елемент МПП. Тому для кожної з цих МПП $\lambda_{\max} = n = 3$ та індекси узгодженості CI дорівнюють нулю.

Для узгоджених МПП ненормовані локальні ваги, розраховані методами головного власного вектору та геометричної середньої, співпадають між собою. Тому розрахуємо ваги альтернатив методом геометричної середньої. Вони дорівнюють:

- відносно критерію C_1:

$$v^1 = \{\sqrt[3]{1 \cdot 2 \cdot 6},\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3},\ \sqrt[3]{\tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot 1}\} = \{2.2894,\ 1.1447,\ 0.3816\},$$

- відносно критерію C_2:

$$v^2 = \{\sqrt[3]{1 \cdot \tfrac{2}{5} \cdot \tfrac{1}{5}},\ \sqrt[3]{\tfrac{5}{2} \cdot 1 \cdot \tfrac{1}{2}},\ \sqrt[3]{5 \cdot 2 \cdot 1}\} = \{0.4309,\ 1.0772,\ 2.1544\}.$$

Знайдемо глобальні ваги кандидатів методами ідеального та мультиплікативного синтезу.

Метод ідеального синтезу

Нормовані ваги для методу ідеального синтезу дорівнюють:

- відносно критерію C_1: $w^1 = \{\frac{2.2894}{2.2894}, \frac{1.1447}{2.2894}, \frac{0.3816}{2.2894}\} = \{1.0000,\ 0.5000,\ 0.1667\}$,
- відносно критерію C_2: $w^2 = \{\frac{0.4309}{2.1544}, \frac{1.0772}{2.1544}, \frac{2.1544}{2.1544}\} = \{0.2,\ 0.5,\ 1.0\}$.

Глобальні ваги альтернатив розраховуються за формулами:

$w_1^{глоб} = 1.0 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 = 0.52$,

$w_2^{глоб} = 0.5 \cdot 0.4 + 0.5 \cdot 0.6 = 0.5$,

$w_3^{глоб} = 0.1667 \cdot 0.4 + 1.0 \cdot 0.6 = 0.6667$.

Отримані глобальні ваги альтернатив пронормуємо так, щоб їх сума була рівною одиниці. Тоді нормовані ваги: $w_1^{глоб} = 0.3083$, $w_2^{глоб} = 0.2964$, $w_3^{глоб} = 0.3953$.

Метод мультиплікативного синтезу

При використанні мультиплікативного синтезу глобальні ваги альтернатив розраховуються за формулами:

$w_1^{глоб} = 2.2894^{0.4} \cdot 0.4309^{0.6} = 0.8405$,

$w_2^{глоб} = 1.1447^{0.4} \cdot 1.0772^{0.6} = 1.1037$,

$w_3^{глоб} = 0.3816^{0.4} \cdot 2.1544^{0.6} = 1.0781$.

Отримані глобальні ваги альтернатив пронормуємо так, щоб їх сума дорівнювала одиниці: $w_1^{глоб} = 0.2781$, $w_2^{глоб} = 0.3652$, $w_3^{глоб} = 0.3567$.

Таким чином, різні методи синтезу призводять до різних результатів. Згідно з ідеальним синтезом необхідно вибирати третього кандидата (його вага найбільша), на другому місці перший кандидат, на третьому – другий кандидат. Згідно з мультиплікативним синтезом на першому місці другий кандидат, на другому – третій кандидат, а перший кандидат виявився найгіршим.

Проілюструємо реверс рангів альтернатив. Нехай до розгляду додається ще один кандидат, який за одним із критеріїв є кращим за трьох попередніх кандидатів. Нехай новий кандидат має найкращу освіту (критерій C_1). Нехай МПП цих чотирьох альтернатив відносно C_1 і C_2 дорівнюють (оцінки є повністю узгодженими):

$$D^{*1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6 & 2/3\\ 1/2 & 1 & 3 & 1/3\\ 1/6 & 1/3 & 1 & 1/9\\ 3/2 & 3 & 9 & 1\end{pmatrix},\ D^{*2}=\begin{pmatrix}1 & 2/5 & 1/5 & 4/5\\ 5/2 & 1 & 1/2 & 2\\ 5 & 2 & 1 & 4\\ 5/4 & 1/2 & 1/4 & 1\end{pmatrix}.$$

Зазначимо, що оцінки трьох «старих» кандидатів відносно критеріїв залишилися незмінними (порівняти з попередніми МПП D^1 і D^2)

Знайдемо локальні ваги розширених МПП D^{*1} і D^{*2} методом геометричної середньої. Ненормовані ваги альтернатив відносно критеріїв C_1 і C_2 дорівнюють:

$$v^1=\{\sqrt[4]{1\cdot 2\cdot 6\cdot \tfrac{2}{3}},\ \sqrt[4]{\tfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\cdot \tfrac{1}{3}},\ \sqrt[4]{\tfrac{1}{6}\cdot \tfrac{1}{3}\cdot 1\cdot \tfrac{1}{9}},\ \sqrt[4]{\tfrac{3}{2}\cdot 3\cdot 9\cdot 1}\}=,$$

$$=\{1.6818,\ 0.8409,\ 0.2803,\ 2.5227\}$$

$$v^2=\{\sqrt[4]{1\cdot \tfrac{2}{5}\cdot \tfrac{1}{5}\cdot \tfrac{4}{5}},\ \sqrt[4]{\tfrac{5}{2}\cdot 1\cdot \tfrac{1}{2}\cdot 2},\ \sqrt[4]{5\cdot 2\cdot 1\cdot 4},\ \sqrt[4]{\tfrac{5}{4}\cdot \tfrac{1}{2}\cdot \tfrac{1}{4}\cdot 1}\}=.$$

$$=\{0.5030,\ 1.2574,\ 2.5149,\ 0.6287\}$$

Нормовані ваги для методу <u>ідеального синтезу</u> дорівнюють:

- відносно критерію C_1: $w^1=\{0.6667,\ 0.3333,\ 0.11111,\ 1.0000\}$,
- відносно критерію C_2: $w^2=\{0.20,\ 0.50,\ 1.00,\ 0.25\}$.

За методом <u>ідеального синтезу</u> глобальні ваги альтернатив наступні:

$w_1^{глоб}=0.6667\cdot 0.4+0.2\cdot 0.6=0.3867$,

$w_2^{глоб}=0.3333\cdot 0.4+0.5\cdot 0.6=0.4333$,

$w_3^{глоб}=0.1111\cdot 0.4+1.0\cdot 0.6=0.6444$,

$w_4^{глоб}=1.00\cdot 0.4+0.25\cdot 0.6=0.55$.

Отримані глобальні ваги альтернатив пронормуємо так, щоб їх сума дорівнювала одиниці: $w_1^{глоб}=0.1920$, $w_2^{глоб}=0.2151$, $w_3^{глоб}=0.3199$, $w_4^{глоб}=0.2730$.

При використанні <u>мультиплікативного синтезу</u> глобальні ваги альтернатив розраховуються за формулами:

$w_1^{глоб}=1.6818^{0.4}\cdot 0.5030^{0.6}=0.8152$,

$w_2^{глоб}=0.8409^{0.4}\cdot 1.2574^{0.6}=1.0705$,

$w_3^{глоб}=0.2803^{0.4}\cdot 2.5149^{0.6}=1.0456$,

$w_4^{глоб}=2.5227^{0.4}\cdot 0.6287^{0.6}=1.0960$.

Отримані глобальні ваги альтернатив пронормуємо так, щоб їх сума дорівнювала одиниці: $w_1^{глоб}=0.2024$, $w_2^{глоб}=0.2658$, $w_3^{глоб}=0.2596$, $w_4^{глоб}=0.2722$.

Таблиця. Результати до і після додавання альтернативи, оптимальної за одним з критеріїв (+ - РР спостерігався, – - РР не спостерігався)

Метод синтезу	Ранжування		Реверс рангів
	перед додаванням нової альтернативи	після додавання нової альтернативи	

ідеальний	$a_3 \succ a_1 \succ a_2$	$a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_1$	+
мультиплікативний	$a_2 \succ a_3 \succ a_1$	$a_4 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_1$	+

Таким чином, при використанні ідеального синтезу ранжування альтернатив було $a_3 \succ a_1 \succ a_2$ і стало $a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_1$ після додавання a_4, оптимальної за першим критерієм, тобто присутній реверс рангів між альтернативами a_1 і a_2.

При використанні мультиплікативного синтезу ранжування альтернатив було $a_2 \succ a_3 \succ a_1$ і стало $a_4 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_1$ після додавання a_4, тобто оптимальна альтернатива змінилася, нею стала дóдана альтернатива, змінилися номери старих альтернатив в ранжуванні, тому це також випадок реверсу рангів.

7. Методи обробки оцінок групи експертів

Групове мислення

Під груповим мисленням розуміють збіжність (однаковість) поглядів у групи експертів.

Характерні ознаки групового мислення:

- всі члени групи – один колектив, який протистоїть всьому світу;
- загроза існуванню всієї групи як цілому;
- обмаль варіантів поведінки, недостатній пошук інформації, вибірковий аналіз інформації; при обговоренні варіантів рішень приймаються до уваги лише переваги та ігноруються збитки, ризики;
- метою є збереження групи як єдиного цілого, її позитивного іміджу, а не якість прийнятого рішення.

Наслідком групового мислення є низька якість рішень, що приймаються.

Засоби запобігання груповому мисленню:

- при обговоренні варіантів рішень більше звертати увагу на збитки, а не на переваги;
- ввести в групу «адвоката диявола», тобто людину, яка бачить у кожному ділі негативну сторону;
- змінити ролі членів групи, змінити керівні посади;
- давати своєму супротивнику можливість зберегти лице.

7.1. Груповий метод Головного власного вектору

Дано:

$A = \{a_i\}$ - множина альтернатив, $i = 1,...,n$;

C - якісний критерій;

E - множина експертів, $h = 1,...,m$;

$D^h = \left(d_{ij}^h\right)$ - МПП альтернатив відносно критерію C, надана h-им експертом;

$w^h = \left(w_1^h, ..., w_n^h\right)$ - нормований вектор ваг, отриманий з D^h, $w_i^h > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i^h = 1$,

k_h - нормований коефіцієнт компетентності h-го експерта, $k_h > 0$, $\sum_{h=1}^{m} k_h = 1$.

Потрібно: знайти груповий нормований вектор ваг $w^G = \left(w_i^G\right)$, $w_i^G > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i^G = 1$.

Знаходження *групового рішення* можна проводити двома способами:

- шляхом агрегування індивідуальних оцінок (aggregating individual judgments, AIJ), коли група стає одним індивідом і діє як одна нова особа;
- шляхом агрегування індивідуальних пріоритетів (aggregating individual priorities, AIP), коли група діє як множина індивідів.

При використанні кожного з цих способів для отримання групової оцінки використовують наступні методи агрегування:

- зваженої середньої геометричної (WGMM);
- зваженої середньої арифметичної (WAMM).

Детальніше розглянемо кожен з способів знаходження групового рішення.

Спосіб AIJ знаходження групового вектора ваг полягає в наступному. З індивідуальних МПП D^h, використовуючи один з методів агрегування, розраховується групова МПП $D^G = \left(d_{ij}^G\right)$.

Наприклад, елементи групової МПП d_{ij}^G дорівнюють

$d_{ij}^G = \prod_{h=1}^{m} \left(d_{ij}^h\right)^{k_h}$ (при використанні методу WGMM),

$d_{ij}^G = \sum_{h=1}^{m} d_{ij}^h k_h$ (при використанні методу WAMM), $i, j = 1,...,n$.

Вектор ваг w^G розраховується з групової МПП D^G шляхом використання одного з методів знаходження локальних ваг: головного власного вектора, геометричної середньої чи «лінія».

В *способі AIP* спочатку розраховуються індивідуальні вектори ваг w^h з індивідуальних МПП D^h, $h = 1,...,m$, використовуючи один з методів: головного власного вектора, геометричної середньої чи «лінія». Потім груповий вектор ваг w^G розраховується з індивідуальних векторів ваг, використовуючи один з методів агрегування.

Наприклад, елементи групового вектора ваг w_i^G дорівнюють

$w_i^G = \prod_{h=1}^{m} \left(w_i^h\right)^{k_h}$ (при використанні методу WGMM),

$w_i^G = \sum_{h=1}^{m} w_i^h k_h$ (при використанні методу WAMM), $i = 1,...,n$.

Твердження. Способи AIJ і AIP приводять до однакового групового вектора ваг альтернатив у випадку використання методу агрегування WGMM і методу геометричної середньої знаходження локальних ваг.

Доведення.

$$w_i^G\left(AIJ\right) \overset{\substack{\text{метод}\\ \text{геометрич.}\\ \text{середньої}}}{=} \left(\prod_{j=1}^{n} d_{ij}^G\right)^{1/n} \overset{\substack{\text{метод}\\ \text{агрегув.}\\ \text{WGMM}}}{=} \left(\prod_{j=1}^{n}\prod_{h=1}^{m}\left(d_{ij}^h\right)^{k_h}\right)^{1/n} = \prod_{h=1}^{m}\left(\left(\prod_{j=1}^{n} d_{ij}^h\right)^{1/n}\right)^{k_h} = \prod_{h=1}^{m}\left(w_i^h\right)^{k_h} = w_i^G\left(AIP\right)$$

Твердження доведено.

При використанні методу власного вектора для знаходження локальних ваг цей результат в загальному випадку буде невірним. Лише для узгоджених МПП D^h, для яких всі методи знаходження локальних ваг призводять до однакових результуючих ваг, підходи AIJ і AIP при використанні методу агрегування WGMM є еквівалентними.

Приклад 7.1.

Розглянемо задачу оцінювання чотирьох альтернатив чотирма експертами. Нехай експерти мають різну компетентність: $k_1 = 0.1$, $k_2 = 0.2$, $k_3 = 0.3$, $k_4 = 0.4$. МПП, побудовані за оцінками кожного експерта, наведені нижче:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/7 & 1/4 & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 1/3 & 1 & 4 & 5 \\ 1/5 & 1/4 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1/4 & 1 & 3 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Будемо агрегувати індивідуальні оцінки (підхід AIJ) за методом WGMM. Тоді групова МПП A^G дорівнює:

$$A^G = \begin{pmatrix} 1 & 3.837 & 5.446 & 7.204 \\ 0.261 & 1 & 3.464 & 4.134 \\ 0.184 & 0.287 & 1 & 2 \\ 0.139 & 0.242 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Елемент a_{12}^G групової МПП A^G отримано наступним чином:

$$a_{12}^G = \prod_{h=1}^{4}\left(a_{12}^h\right)^{k_h} = 4^{0.1}5^{0.2}3^{0.3}4^{0.4} = 3.837.$$

Розрахуємо вектори ваг за методом геометричної середньої RGMM та геометричні індекси узгодженості GCI. Результати – в табл. 6.

Таблиця 6. Ваги та значення GCI для індивідуальних і групової МПП

Альтернативи	Ваги					
	A^1	A^2	A^3	A^4		A^G
1	0.614	0.646	0.569	0.597		0.602
2	0.225	0.227	0.276	0.221		0.239
3	0.099	0.079	0.097	0.109		0.098
4	0.062	0.048	0.058	0.074		0.062
GCI	0.135	0.236	0.119	0.166		0.155

З таблиці 6 видно, що індивідуальні МПП $A^1 - A^4$ і групова A^G мають припустиму неузгодженість, оскільки відповідні значення GCI є меншим за порогове значення 0.3526 (див. табл. 5, п.5.5). Внаслідок гарної узгодженості ваги, що розраховані з групової МПП, співпадають в межах практичної точності (0.1) з вагами, отриманими з індивідуальних МПП.

8. Агрегування ординальних оцінок експертів

Ординальні оцінки – це номери об'єктів в ряду ранжування.

Ординальними оцінками є оцінки в бальних і рангових шкалах. Значення (градації) бальної шкали представляють собою обмежений дискретний ряд чисел, які відстоять один від одного на однаковій відстані. Зазвичай при експертному оцінюванні в якості значень шкали беруть відрізок натурального ряду або частину ряду цілих чисел, симетричну відносно нуля ($0, \pm1, \pm2, ..., \pm n$).

Розрізняють два види бальних оцінок.

В першому випадку оцінювання здійснюється за *об'єктивним критерієм*, так що індивідуальні оцінки є деякими збуреннями реальних значень. При цьому існують деякі загально прийнятні еталони, які відповідають градаціям шкали, з якими і порівнюються досліджувані об'єкти. Чим точніше охарактеризовані і оцінені можливі відхилення від еталонів, тим меншими є флуктуації в оцінках, тим більшою є довіра до них. Наприклад, оцінювання фігуристів чи правила присвоєння кваліфікаційних розрядів працівникам даної професії. При деяких умовах бальні шкали такого роду можуть розглядатися як кількісні.

Бальна оцінка другого виду здійснюється, коли нема не лише загально прийнятних еталонів, але *ставиться під сумнів навіть присутність деякого єдиного об'єктивного критерію*, суб'єктивним вираженням якого є оцінки, так що беззмістовним є саме питання про кількісне співвідношення оцінок. В цьому випадку оцінки розглядаються виконаними в так званій *ранговій або порядковій шкалі*. Вимірювання здійснено в порядковій (ранговій) шкалі, якщо множина припустимих перетворювань складається з усіх монотонно зростаючих функцій. Рангові оцінки має сенс порівнювати лише за відношенням «більше – менше»: воно зберігається при монотонних перетвореннях. Немає сенсу порівнювати довжини інтервалів між оцінками.

Оскільки рангові оцінки мають сенс лише з точністю до впорядкування за величиною, їх можна давати не лише в числових термінах, а й в якості градацій використовувати символи будь-якої впорядкованої множини (алфавіту). Це рівносильно співставленню чисел, впорядкування яких за величиною співпадає з впорядкуванням символів множини. Наприклад, для оцінювання знань застосовується множина з двох градацій: «зараховано» (1), «не зараховано» (0). Аналогічно, привабливість професій може оцінюватися в алфавіті: «дуже подобається» (2), «подобається» (1), «не подобається» (-1), «дуже не подобається» (-2). В дужках розташовані можливі числові значення.

8.1. Методи отримання індивідуального ранжування

Постановка задачі

Дано: $A=\{a_i\}, i=1,...,n$ - множина альтернатив

C - критерій їх оцінки.

Потрібно:

знайти ранжування $R=\{r_i\}$ альтернатив $a_i \in A$ за критерієм C.

Розглянемо методи виключення і розширення отримання індивідуального ранжування.

Метод виключення

Метод складається з наступних кроків:

1. Експерт вибирає найкращий об’єкт $a_{m1} \in A$ з усієї множини A.
2. Об’єкт a_{m1} виключається з множини A і експерт вибирає найкращий об’єкт з множини $A_2 = A \setminus a_{m1}$ і т.д.
3. На i-му кроці, $i>1$, експерту пред’являється множина $A_i = A_{i-1} \setminus a_{m(i-1)}$, $A_1 = A$, де $a_{m(i-1)}$ - найкращий з точки зору експерта об’єкт, вибраний ним на $(i-1)$-му кроці.

Загальне число кроків виконання алгоритму дорівнює $(n-1)$.

Метод розширення отримання індивідуального ранжування

Метод складається з наступних кроків:

1. Вибирається довільна пара (a_k, a_h) і визначається, який об’єкт з точки зору експерта більш важливий. Нехай $a_k \succ a_h$, тобто співвідношення рангів наступне: $r_k < r_h$. Ця нерівність має виконуватися в будь-якому ранжуванні об’єктів $a \in A$.

2. Вибирається довільний об’єкт a_s. Експерт порівнює a_s з a_k і a_h і визначає, яке з наступних трьох відношень справедливе: $a_s \succ a_k \succ a_h$, $a_k \succ a_s \succ a_h$ чи $a_k \succ a_h \succ a_s$.

3. На $i-$му кроці, $i=1,2,...,n-1$ експерту пред’являються варіанти ранжувань, що містять по $(i+1)$ об’єктів, і він повинен виконати i порівнянь.

Кількість порівнянь, які повинен виконати експерт, щоб сформулювати остаточне ранжування, утворюють арифметичну прогресію з початковим елементом $b_1 = 1$ і кінцевим елементом $b_{n-1} = n-1$. Тому, загальна кількість порівнянь, які повинен виконати експерт щоб проранжувати n об’єктів, дорівнює сумі $(n-1)$ членів цієї прогресії: $n(n-1)/2$.

8.2. Узгодженість ординальних оцінок

<u>Дано:</u> $A=\{a_i\}, i=1,...,n$ - множина альтернатив,

C - критерій оцінки альтернатив,

$E=\{e_h\}, h=1,...,m$ - множина рівно компетентних експертів,

$R=\{r_h\}$ - множина індивідуальних ранжувань, де $r_h=\{r_{hi}\}$, r_{hi} - ранг i-го об'єкту, даний h-м експертом.

<u>Потрібно:</u>

кількісно оцінити узгодженість ранжувань з множини R.

Коефіцієнтами рангової кореляції у статистиці називаються міри взаємозв'язку між парою ознак, кожна з яких ранжує досліджувану сукупність об'єктів.

Ці коефіцієнти будуються на основі наступних трьох аксіом:

1. якщо ранжування за обома ознаками повністю співпадають (тобто, кожний об'єкт займає одне й те ж саме місце в обох ранжуваннях), то коефіцієнт рангової кореляції має дорівнювати +1, що означає повну додатну кореляцію;
2. якщо об'єкти в одному ранжуванні розташовані в зворотному порядку в порівнянні з іншим ранжуванням, то коефіцієнт дорівнює -1, що означає повну від'ємну кореляцію;
3. в інших випадках значення коефіцієнту розташовані в інтервалі [-1,+1]; зростання модуля коефіцієнта від 0 до +1 характеризує збільшення відповідності між двома ранжуваннями.

Вказані властивості має коефіцієнт рангової кореляції Кендалла.

<u>*Коефіцієнт рангової кореляції Кендалла*</u>

Застосовується для визначення зв'язку двох ранжувань.

Кожному ранжуванню r_h ставиться у відповідність матриця $D^h=\{d_{ij}^h\}$, елементи якої визначені наступним чином:

$$d_{ij}^h=\begin{cases}1, & if \;\; a_i \succ a_j \quad in \;\; r_h \\ -1, & if \;\; a_j \succ a_i \quad in \;\; r_h\end{cases}.$$

Коефіцієнт τ рангової кореляції Кендалла дорівнює

$$\tau=\frac{S}{\frac{1}{2}n(n-1)},$$

$$S=\sum_{i<j} d_{ij}^{h_1} d_{ij}^{h_2},$$

де $d_{ij}^{h_1}, d_{ij}^{h_2}$ - елементи матриць D для ранжувань r_{h_1}, r_{h_2} відповідно.

Величина τ належить інтервалу $[-1,+1]$.

Для повністю узгоджених ранжувань $S=\frac{n(n-1)}{2}$, тому $\tau=1$. Для повністю неузгоджених ранжувань $\tau=-1$.

<u>Приклад 8.1.</u>

Нехай два експерти проранжували чотири об'єкти і результати наведені в табл.7, $n=4$, $m=2$.

Таблиця 7

Об’єкт	Ранги	
	Експерт 1	Експерт 2
1	1	1
2	2	3
3	3	2
4	4	4

Необхідно оцінити узгодженість цих двох ранжувань, використовуючи коефіцієнт рангової кореляції Кендалла.

Розв’язання.

Матриці D для ранжувань r_1, r_2 дорівнюють

$$D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \ D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Значення S розраховується для елементів верхніх трикутних чистин (при $i<j$) матриць D^1 і D^2:

$$S = \sum_{i<j} d_{ij}^1 d_{ij}^2 = 1+1+1-1+1+1 = 4.$$

Тому коефіцієнт Кендалла $\tau = \dfrac{S}{\frac{1}{2} n(n-1)} = \dfrac{2 \cdot 4}{4(4-1)} = 0.67$.

Оскільки τ належить інтервалу $[-1,+1]$ і $\tau = 1$ свідчить про повну узгодженість ранжувань, то задані експертами ранжування (див. табл. 7) є узгодженими.

Множинний коефіцієнт рангової кореляції (коефіцієнт конкордації)

Застосовується для визначення зв’язку між довільною кількістю ранжувань.

Для побудови коефіцієнта конкордації розраховують суму

$$S = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{m} r_{hj} - \bar{a} \right)^2,$$

де S - сума квадратів відхилень сум рангів об’єктів від середнього значення $\bar{a}$ сум рангів об’єктів, $\bar{a} = \dfrac{m(n+1)}{2}$.

Отриману суму S нормують на максимально можливе її значення, що дорівнює

$$S_{\max} = \frac{m^2 (n^3 - n)}{12}.$$

Таким чином, коефіцієнт конкордації розраховується за формулою:

$$W = \frac{12 \cdot S}{m^2 (n^3 - n)}.$$

Величина W належить інтервалу $[0,1]$. $W = 0$ означає повну неузгодженість m ранжувань. $W = 1$ означає повну узгодженість (всі m ранжувань співпадають).

Твердження 8.1. Максимально можливе значення величини $S=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{h=1}^{m} r_{hj}-\overline{a}\right)^2$ дорівнює $S_{\max}=\frac{m^2(n^3-n)}{12}$, де $\overline{a}=\frac{m(n+1)}{2}$ - середнє значення суми рангів кожної альтернативи по всім експертам.

Доведення. Розглянемо повністю узгоджені ранжування, тобто всі m ранжувань співпадають:

Ранги				Сума рангів
1	1	…	1	m
2	2	…	2	$2m$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	n	…	n	$n\cdot m$

Середнє значення сум рангів $\overline{a}=\frac{m+2m+...+nm}{n}=\frac{m}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{m(n+1)}{2}$.

$$S=\sum_{j=1}^{n}\left(jm-\frac{m(n+1)}{2}\right)^2=\sum_{j=1}^{n} j^2m^2-2\sum_{j=1}^{n}2jm\frac{m(n+1)}{2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{m^2(n+1)^2}{4}=$$

$$=m^2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-m^2(n+1)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n\cdot m^2(n+1)^2}{4}=n\cdot m^2(n+1)\left(\frac{2n+1}{6}-\frac{n+1}{4}\right)=$$

$$=\frac{n\cdot m^2(n+1)(n-1)}{12}=\frac{m^2(n^3-n)}{12}.$$ Доведено.

Приклад 8.2.

Нехай три експерти проранжували сім об’єктів і результати наведені в табл. 8, $n=7$, $m=3$.

Таблиця 8

Об’єкт	Ранги		
	1	2	3
1	1	5	7
2	2	3	6
3	3	4	5
4	4	6	4
5	5	1	3
6	6	7	2
7	7	2	1

Необхідно оцінити узгодженість цих трьох ранжувань, використовуючи коефіцієнт конкордації.

Розв’язання. Для знаходження коефіцієнту конкордації необхідно для кожного об’єкту розрахувати відхилення суми його рангів від відповідного середнього значення. Проміжні результати зручно представити у вигляді наступної таблиці:

Об'єкт	Ранги			Сума рангів	Відхилення від середнього	Квадрат відхилень
	1	2	3			
1	1	5	7	13	1	1
2	2	3	6	11	-1	1
3	3	4	5	12	0	0
4	4	6	4	14	2	4
5	5	1	3	9	-3	9
6	6	7	2	15	3	9
7	7	2	1	10	-2	4
				$\overline{a}=12$		$S=28$

Тоді за даними цієї таблиці коефіцієнт конкордації дорівнює

$$W=\frac{12\cdot S}{m^2(n^3-n)}=0.11.$$

Величина W належить інтервалу $[0,1]$, причому $W=0$ свідчить про повну неузгодженість ранжувань. Отже, задані експертами ранжування (див. табл. 8) є неузгодженими.

8.3. Групові ординальні однокритеріальні експертні оцінки

Дано: $A=\{a_i\}, i=1,...,n$ - множина альтернатив,
C - критерій оцінки альтернатив,
$E=\{e_h\}, h=1,...,m$ - множина однаково компетентних експертів,
$R=\{r_h\}$ - множина індивідуальних ранжувань, де $r_h=\{r_{hi}\}$, r_{hi} - ранг i-го об'єкту, даний h-м експертом.

Потрібно: знайти групове ранжування r^* альтернатив за критерієм C.

Розглянемо методи Кондорсе і Борда знаходження групових ординальних експертних оцінок за умови однакової компетентності експертів.

Метод Кондорсе

Ідея методу полягає у тому, що для будь-якої пари альтернатив (a_i,a_j) порівнюються два числа: s_{ij} - кількість індивідуальних ранжувань, в яких $a_i \succ a_j$; s_{ji} - кількість індивідуальних ранжувань, в яких $a_j \succ a_i$. Якщо $s_{ij}>s_{ji}$, то в груповому ражуванні r^* ранг a_i менший за ранг a_j. Якщо $\forall j$ $s_{ij}>s_{ji}$, то a_i має перший ранг у r^*.

Метод Кондорсе складається з наступних етапів:

1. Для будь-якої пари (a_i,a_j), $i,j=1,...,n$ визначається величина

$$w_{ij}=\sum_{h=1}^{m}\beta_{ijh}\text{, де}$$

$$\beta_{ijh} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } a_i \succ a_j \text{ в ранжуванні } r_h \\ 0, \text{ якщо } a_i = a_j \text{ в ранжуванні } r_h \\ -1, \text{ якщо } a_i \prec a_j \text{ в ранжуванні } r_h \end{cases}, \quad h = 1,...,m.$$

2. Будується матриця $D = \{(d_{ij}) \,|\, i, j = 1,..,n\}$, де

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \quad w_{ij} > 0 \\ 0, \text{ якщо } \quad w_{ij} = 0 \\ -1, \text{ якщо } \quad w_{ij} < 0 \end{cases}.$$

3. За знайденою матрицею D будуються часткові групові порядки для пари альтернатив і визначається загальне групове ранжування r^*.

При використанні цього методу може виникнути порушення транзитивності $(s_{ij} > s_{ji}) \wedge (s_{jk} > s_{kj}) \Rightarrow (s_{ki} > s_{ik})$, яке отримало назву *парадокс Кондорсе*. Цей парадокс виникає приблизно в 9% ранжувань.

Приклад 8.3.

Нехай три експерти оцінюють чотири альтернативи. За результатами оцінювання отримано наступні індивідуальні ранжування:

Номер експерта h	r_h
1	$a_2 \succ a_1 \succ a_3 \succ a_4$
2	$a_1 \succ a_2 \succ a_4 \succ a_3$
3	$a_3 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_1$

Необхідно знайти групове ранжування альтернатив методом Кондорсе.

Розв’язання.

Для кожного з індивідуальних ранжувань побудуємо матриці β_{ijh}:

$$\beta_{ij1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; \beta_{ij2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \beta_{ij3} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриця $W = \{(w_{ij})\}$ дорівнює сумі знайдених трьох матриць β_{ijh}:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = D.$$

Часткові групові ранжування дорівнюють $a_2 \succ a_1$ (оскільки $d_{21} = 1$), $a_1 \succ a_3$ (оскільки $d_{13} = 1$), $a_1 \succ a_4$, $a_2 \succ a_3$, $a_2 \succ a_4$, $a_3 \succ a_4$. Поєднуючи ці часткові ранжування отримаємо групове ранжування $a_2 \succ a_1 \succ a_3 \succ a_4$.

Метод Борда

Метод складається з наступних етапів:

1. При аналізі ранжування r_h об'єкту, що знаходиться на останньому місці в r_h присвоюється ранг 0; об'єкту, що знаходиться на передостанньому місці – ранг -1 і т.д; об'єкт, який займає в ранжуванні r_h перше місце, отримує ранг $-(n-1)$.
2. Для альтернативи a_i, $i=1,...,n$ розраховується сума рангів, отриманих в m індивідуальних ранжуваннях

$$\sigma_i = \sum_{h=1}^{m} \rho_{ih} ,$$

де ρ_{ih} – ранг, отриманий a_i в ранжуванні r_h.

3. За знайденими σ_i будується групове ранжування r^*: перший ранг у r^* отримує a_i з мінімальним значенням σ_i і т.д, останній ранг має a_i з максимальним σ_i.

Приклад 8.4.

Розглянемо умову прикладу 8.3. Знайдемо групове ранжування альтернатив методом Борда.

Розв'язання.

Згідно з методом Борда необхідно присвоїти кожній альтернативі ранги, в залежності від її місця в заданих експертами ранжуваннях. Ці ранги наведені в наступній таблиці:

	a_1	a_2	a_3	a_4
ρ_{i1}	-2	-3	-1	0
ρ_{i2}	-3	-2	0	-1
ρ_{i3}	0	-1	-3	-2
σ_i	-5	-6	-4	-3

Аналізуючи останній рядок цієї таблиці отримали, що групове ранжування r^* альтернатив має вигляд $a_2 \succ a_1 \succ a_3 \succ a_4$.

8.4. Групові ординальні однокритеріальні експертні оцінки з урахуванням компетентності експертів

Дано: $A=\{a_i\}, i=1,...,n$ - множина альтернатив,

C - критерій оцінки альтернатив,

$E=\{e_h\}, h=1,...,m$ - множина однаково компетентних експертів,

$K=\{k_h\}$ - множина нормованих коефіцієнтів відносної компетентності експертів,

$R=\{r_h\}$ - множина індивідуальних ранжувань, де $r_h=\{r_{hi}\}$, r_{hi} - ранг i-го об'єкту, даний h-м експертом.

Потрібно: знайти групове ранжування r^* альтернатив за критерієм C.

Виберемо найбільший спільний дільник η для коефіцієнтів компетентності $k_h \in K$. Тоді $\forall k_h$ можна представити у вигляді $k_h = z_h \eta$, де z_h - ціле число.

Число z_h можна розглядати як кількість експертів з рівною компетентністю η, що в сукупності еквівалентні експерту з компетентністю k_h. Тому множину $R = \{r_h\}$ індивідуальних ранжувань об'єктів можна замінити множиною R_z ранжувань, де замість одного ранжування r_h записано z_h його копій.

Тоді задача визначення групового ранжування з m експертами різної компетентності зводиться до задачі визначення групового ранжування з

$$m = \sum_{h=1}^{m} z_h$$

рівно компетентними експертами, кожний з яких має компетентність η.

Тоді для знаходження групового ранжування використовуються описані вище методи Борда і Кондорсе.