ЗМІСТ

ВСТУП

Процес прийняття рішень відносно складних систем з людським фактором щодо їх можливої поведінки в майбутньому отримало назву *передбачення.* Потреба в передбаченні викликана зростанням актуальності задачі представлення майбутнього, яке не може інтерпретуватися як звичайне продовження минулого, оскільки це майбутнє може приймати принципово відмінні форми і структури в порівнянні з тим, що відомо в минулому. Сучасна ринкова економіка має нові особливості, що зумовлюють необхідність використання нових методів і підходів до прийняття рішень щодо сучасних економічних систем. Це обмеження національних ресурсів і бюджетів багатьох країн світу при світовій економічній глобалізації, нові запити суспільства і потреби приватного сектора економіки за умов швидких технологічних змін, збільшення економічних невизначеностей і ризиків та необхідності в оптимальному використанні наявних фінансових ресурсів. За даними Організації Об'єднаних Націй з технологічного розвитку (ЮНІДО) програми з передбачення існують в багатьох країнах світу, Україна теж створює власну програму з передбачення.

Дана робота направлена на розробку методологічного і математичного забезпечення формалізації якісного *методу аналізу ієрархій* (*МАІ)* розв'язання задач передбачення.

МАІ є методом багатокритеріальної підтримки прийняття рішень. На відміну від методів і засобів теорії дослідження операцій, економетрики та інших, що розв'язують задачі прийняття рішень з кількісними значеннями змінних і відношень між ними, методи підтримки прийняття рішень спрямовані на розв'язання слабо-структурованих задач, у яких цілі, структура та умови відомі лише частково і характеризуються більшим обсягом НЕ-факторів: неточністю, неповнотою, невизначеністю, нечіткістю даних, що описують об'єкт. Опис слабо-структурованих задач здійснюється, як правило, експертами-фахівцями в даній області. Оцінки, одержані вид них, суб'єктивні та носять зазвичай вербальний характер.

Основними перевагами МАІ перед іншими експертними методами вважається можливість структуризації складної проблеми у вигляді ієрархії, що включає кількісні та якісні складові, і процедура отримання експертних оцінок методом парних порівнянь, що дозволяє оптимальним чином врахувати психофізіологічні особливості людини.

МАІ знайшов широке розповсюдження в багатьох областях, зокрема для розв'язання задач вибору, оцінювання, розподілу ресурсів, аналізу співвідношення доходи-витрати, прогнозування та планування. В останній час МАІ та його модифікації використовуються для розв'язання *стратегічних проблем,* наприклад, при оцінюванні перспектив використання синтетичного палива для транспорту, прогнозування наслідків розміщення національної системи протиракетної оборони США, оцінювання успішності військово-морського флоту, наслідків для США вступу Китаю до ВТО, оцінювання місій та цілей НАСА, оцінювання долі ринку компанії, освітніх інноваційних проектів, інтелектуальних активів фірми, вибір оптимальних моделей альянсів між банками і страховими компаніями та ін. (див. п.1.4).

Реалізація МАІ направлена на розв'язання стратегічних проблем в межах Галузевої інноваційної програми Наукового парку "Київська політехніка" "Про схвалення інноваційних програм Наукового парку "Київська політехніка" на 2007 – 2011 рр.", що затверджена Розпорядженням Кабінету Міністрів України і відповідає середньостроковим пріоритетним напрямам інноваційної діяльності в інформатизації суспільства, комплексному аналізі і стратегічному плануванні розвитку систем забезпечення великих міст та регіонів України. Оскільки МАІ направлений на розв'язання стратегічних проблем, доцільно детально дослідити цей метод з урахуванням нечітких експертних оцінок, оцінювання чутливості, явища реверсу рангів, ситуаційних ризиків та ризику суб'єктивності експертної інформації, що дозволить обґрунтувати достовірність результатів, отриманих за допомогою цього методу.

Зміст книги. *Перший розділ* присвячено традиційному МАІ, запропонованому в 1970-х роках Томасом Л. Сааті. Описуються функції, принципи та аксіоми МАІ. Розглядається інтерпретація ієрархії і пріоритетів за допомогою теорії графів. Обгрунтовується застосування фундаментальної шкали для чисельного вираження відносних переваг між парою об'єктів. Наводяться математичні основи МАІ: метод власного вектора для знаходження пріоритетів з побудованих за оцінками експертів додатних обернено симетричних матриць парних порівнянь, метод побудови показника узгодженості експертної інформації та метод ієрархічної композиції для синтезу ваг.

На прикладі типової задачі оцінювання детально розглядаються основні етапи МАІ побудови ієрархії, парних порівнянь елементів ієрархії та розрахунку їх локальних і глобальних ваг.

Розглядаються основні класи задач, які вирішуються за допомогою МАІ. Це задачі вибору, оцінювання, розподілу ресурсів, аналізу співвідношення доходи/витрати, прогнозування, планування і розвитку. Окрема увага приділена порівнянню МАІ з іншими методами багатокритеріального експертного оцінювання.

Заключні частини розділу присвячені місцю МАІ в методології сценарного аналізу розв'язання задач передбачення та постановці задачі розробки модифікованого методу аналізу ієрархій (ММАІ) знаходження ваг альтернативних варіантів рішень при розв'язанні задач передбачення.

В *другому розділі* розглядаються модифікації МАІ при різних варіантах формування оцінок експертів: точкових і нечітких. Описуються та порівнюються методи адитивної нормалізації та логарифмічних найменших квадратів (геометричної середньої) для знаходження ваг при точкових оцінках експертів, досліджуються показники узгодженості експертних оцінок в цих методах. Різні методи знаходження ваг в загальному випадку призводять до різних результатів. Виключення становлять узгоджені експертні оцінки – для них ваги, отримані різними методами, співпадають між собою. Описується модифікація МАІ, яка дозволяє розрахувати ваги, стійкі до викидів в експертних оцінках. Розглядаються методи підвищення узгодженості точкових експертних оцінок. В цьому ж розділі аналізуються відомі стохастичні, інтервальні та нечіткі МАІ, досліджуються недоліки і переваги кожної з цих модифікацій. Також в другому розділі розглядаються способи знаходження групового рішення за допомогою МАІ шляхом агрегування індивідуальних оцінок та індивідуальних пріоритетів.

Явище реверсу рангів зміни порядку ранжування альтернатив при додаванні чи вилученні альтернативи досліджується в *третьому розділі*. Проведено моделювання появи цього явища в різних методах синтезу МАІ: дистрибутивному, ідеальному, мультиплікативному та у методі групового врахування бінарних відношень переваг альтернатив. Виявлені випадки появи реверсу рангів в цих методах синтезу в залежності від властивостей альтернативи, що додається.

Модифікованому МАІ обробки нечіткої експертної інформації (ММАІ) присвячено *четвертий розділ*. Потреба у розробці модифікованого МАІ, який дозволяв би обробляти нечіткі експертні оцінки, пояснюється тим, що в умовах невизначеності різної природи людина-експерт не в змозі давати точну оцінку у вигляді скалярного значення, вона може давати її тільки з певним суб'єктивним ступенем впевненості.

В ММАІ використовується декомпозиційне представлення нечіткого числа і здійснюється перехід від нечіткої матриці парних порівнянь до множини інтервальних матриць парних порівнянь (ІМПП). Для розрахунку інтервальних ваг з цих матриць розроблено двохетапний метод, який зводиться до розв'язання двох задач лінійного програмування.

Оскільки в реальних практичних задачах ІМПП є неузгодженими, то необхідними є критерії порівняння інтервальних ваг, розрахованих різними методами. З цією метою введено два критерії і знайдено класи ІМПП, для яких запропонований двохетапний метод є кращим за інші відомі методи. Розроблено класифікацію ІМПП за властивостями узгодженості, присутності об'єктів-копій, транзитивності, повноти ранжування та ін.

Введено інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості як міру узгодженості ІМПП. Запропоновано інтервальні пороги виявлення і застосування, які визначають відповідно присутність інформації в множині нечітких експертних оцінок і достатність їх точності.

Для знаходження агрегованих інтервальних ваг за множиною критеріїв розроблено метод інтервального мультиплікативного синтезу, який полягає у розв'язанні двох задач нелінійного випуклого програмування. Оскільки результуючі ваги є інтервальними / нечіткими, то необхідно використовувати спеціальні методи їх впорядкування. Пропонований метод ранжування нечітких ваг полягає у побудові підмножин недомінованих нечітких ваг. Для оцінювання ступеня довіри до отриманого ранжування введено показники строгої переваги однієї ваги над іншою і еквівалентності ваг в отриманому ранжуванні.

Розроблено відповідні алгоритми обробки нечіткої експертної інформації за допомогою ММАІ.

В *п'ятому розділі* розглядаються запропоновані методи комплексного оцінювання чутливості рішення, отриманого МАІ за точковими експертними оцінками. Оскільки оцінки експертів піддаються впливу невизначеності і можуть містити протиріччя, то для дослідження достовірності отриманого за допомогою МАІ рішення доцільно визначити залежність між результатами МАІ та ступенем суперечливості початкових даних – експертних оцінок. Спочатку розглянуто загальний алгоритм прийняття рішення за допомогою МАІ з урахуванням комплексного оцінювання чутливості. Далі викладено підхід оцінювання стійкості ваг, отриманих з матриць парних порівнянь, до збурень у експертних оцінках. Для одного з методів знаходження ваг, а саме методу геометричної середньої, описано розрахунок інтервалів стійкості для кожної експертної оцінки за критерієм узгодженості. Далі розглянуто поняття критичного елементу ієрархії, ступеня критичності і чутливості елементу. Наведено аналітичні залежності для знаходження діапазонів змін ваг елементів ієрархії, які призводять до змін рангів альтернатив у випадку використання двох різних методів синтезу: дистрибутивного і мультиплікативного.

Оцінюванню ситуаційних ризиків та ризику суб'єктивності експертної інформації присвячено *шостий розділ*. Під ситуаційними ризиками в роботі розуміємо ризики, які виникають внаслідок дій неконтрольованих факторів різного походження. Ризик, обумовлений недостовірністю, неоднозначністю, неповнотою експертних оцінок назвемо ризиком суб'єктивності. Для прийняття рішення з урахуванням ситуаційних ризиків розроблено модифікацію методу BOCR МАІ, що дозволяє оцінити альтернативи рішень за факторами доходів, витрат, можливостей та ризиків на основі нечітких оцінок експертів та провести комплексне оцінювання чутливості отриманого рішення. Показники ризику суб'єктивності експертної інформації запроваджуються для декількох варіантів формування експертних оцінок: точкових, нечітких та інтервальних.

Останній *сьомий розділ* присвячений описанню прикладів практичного використання ММАІ. Розглянуто види сценаріїв, наведено загальний підхід до побудови і оцінювання сценаріїв майбутнього розвитку за допомогою ММАІ. Перший приклад, який ілюструється в цьому розділі – це задача виявлення напрямків доцільного використання космічної інформації (КІ) дистанційного зондування землі (ДЗЗ) при вирішенні тематичних завдань на основі геоінформаційних технологій (ГІС). Експертами були визначені фактори, які найбільше впливають на використання КІ ДЗЗ різними галузями господарства. Ці фактори сформували окремі рівні ієрархічної структури задачі. На останньому рівні ієрархії розташовані альтернативи рішень – галузі господарської діяльності, які оцінювались щодо доцільності використання ними КІ ДЗЗ.

Задача виявлення напрямків доцільного використання КІ ДЗЗ для ГІС була розв’язана різними методами синтезу МАІ і результати співпали в межах практичної точності. Було проведено комплексне оцінювання чутливості отриманого розв’язку, при якому проаналізовано збереження порядку ранжування галузей при вилученні з розгляду галузей з низьким відносним попитом КІ ДЗЗ та знайдено діапазони змін ваг елементів ієрархії, які призводять до змін рангів альтернатив.

Другий приклад ілюструє результати оцінювання заходів з розвитку міста Києва. Задача полягала у виборі найбільш пріоритетних заходів для першочергової реалізації Київською міською державною адміністрацією (КМДА). Експерти з КМДА запропонували для оцінювання наступні *заходи*: будівництво та реконструкція ліній метрополітену, будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора, реконструкція Бортницької станції аерації, будівництво двох сміттєпереробних заводів, реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою «Турбота», будівництво лікувально-діагностичного корпусу Київського міського центрального протитуберкульозного диспансеру. Вказані заходи були оцінені за факторами доходів, витрат і ситуаційних ризиків із застосуванням методу BOCR ММАІ.

РОЗДІЛ 1

Метод аналізу ієрархій
багатокритеріального і багатоцільового прийняття рішень

1.1. Функції, принципи та аксіоми методу аналізу ієрархій

Метод аналізу ієрархій (МАІ) був розроблений для моделювання взаємозв'язків між окремими складовими частинами задачі прийняття рішення за допомогою ієрархічної структури з наступним визначенням ваг або пріоритетів альтернативних варіантів рішень відносно елементів цієї структури [1–7]. *Функції МАІ* полягають у структуризації складності, вимірюванні у шкалі відношень і синтезі. Трьома спорідненими з функціями базовими *принципами МАІ* є декомпозиція, порівняльні судження та ієрархічна композиція.

Принцип декомпозиції полягає у структуризації складної проблеми у вигляді ієрархії факторів, які впливають на головну ціль прийняття рішення. Ієрархію можуть утворювати критерії, підкритерії, групи зацікавлених осіб (актори), цілі, підцілі та політики акторів, сценарії, альтернативні варіанти рішень тощо. На останньому рівні ієрархії зазвичай знаходяться альтернативні варіанти рішень.

Для розрахунку ваг факторів і пріоритетів альтернатив в МАІ використовується *принцип порівняльних суджень*, згідно з яким суб'єктивні оцінки експертів є основною інформацією для визначення переваг одного елемента ієрархії над іншим. В МАІ елементи, що знаходяться на одному рівні ієрархії, попарно порівнюються між собою відносно їх впливу на спільний елемент вищого рівня, і експерт дає оцінку щодо інтенсивності переваги одного елементу над іншим в спеціальній шкалі. *Принцип ієрархічної композиції* використовується для синтезу пріоритетів за всіма рівнями ієрархії.

МАІ базується на чотирьох аксіомах. *Аксіома однорідності* стверджує, що елементи, які порівнюються, не повинні відрізнятися між собою більш ніж на порядок величини, інакше це призведе до значних помилок в судженнях, зменшення точності та збільшення неузгодженості оцінок. Згідно з *аксіомою оберненості,* якщо $P_C(E_A, E_B)$ − результат парного порівняння елементів A та B відносно їх батьківського елементу C і означає в скільки разів більше елемент A володіє властивістю в порівнянні з елементом B, то $P_C(E_B, E_A) = 1/(P_C(E_A, E_B))$.

Третя аксіома – це незалежність елементів вищих рівнів ієрархії від елементів нижчих рівнів. Використання МАІ потребує представлення проблеми у вигляді ієрархії, коли елементи нижчих рівнів залежать від елементів вищих рівнів. Якщо ж проблема прийняття рішення є настільки складною, що потребує моделювання за допомогою мережевої структури зі зворотними зв'язками, то для синтезу слід використовувати метод суперматриці [6–7].

Четверта аксіома МАІ полягає в *адекватному представленні поглядів експертів.* Оскільки МАІ – дуже гнучкий і може використовуватися в різних областях прийняття рішень різними способами, то експерти, які надають оцінки парних порівнянь елементів ієрархії, мають перевірити, що їхні погляди адекватно представлені в результатах роботи МАІ.

1.2. Математичні основи МАІ

1.2.1. Ієрархії та пріоритети

Ієрархію можна розглядати як спеціальний тип впорядкованої множини або частинний випадок графу.

Означення 1.1. *Впорядкованою множиною* називається множина S з бінарним відношенням $\leq$, яке задовольняє умовам рефлексивності, антисиметричності та транзитивності.

Для будь-якого відношення нестрогої переваги $x \le y$ можна визначити відношення домінування $x < y$, що означає $x \le y$ та $x \ne y$. Говорять, що y *домінує (покриває)* x, якщо $x < y$ та не існує t, такого що $x < t < y$.

Впорядковані множини із скінченим числом елементів зручно представити направленим графом. Дуга направлена від елемента a до елемента b, якщо $b < a$.

Існує багато способів визначення ієрархії. Зупинимося на одному з них. Позначимо $x^- = \{y \mid x \text{ покриває } y\}$ та $x^+ = \{y \mid y \text{ покриває } x\}$ для будь-якого елемента x у впорядкованій множині.

Означення 1.2. Нехай H − частково впорядкована множина з найбільшим елементом b. H − *ієрархія*, якщо виконуються умови:

1. Існує розбиття H на підмножини L_k, $k = 1,2,\ldots,h$, де $L_1 = \{b\}$.
2. Із $x \in L_k$ випливає, що $x^- \subset L_{k+1}$, $k = 1,2,\ldots,h-1$.
3. Із $x \in L_k$ випливає, що $x^+ \subset L_{k-1}$, $k = 2,\ldots,h$.

Для кожного $x \in H$ існує вагова функція $w_x : x^- \to [0,1]$, де $\sum\limits_{y \in x^-} w_x(y) = 1$. Вагова функція w_x визначає пріоритети елементів з x^- відносно x. Множини L_k − це рівні ієрархії, а функція w_x − функція пріоритету елемента одного рівня відносно елементу x вищого рівня. Якщо $x^- \ne L_{k+1}$ для деякого рівня L_k, то w_k може бути визначена для всіх L_k, якщо покласти її рівною нулю для всіх елементів в L_{k+1}, які не належать до x^-.

Означення 1.3. Ієрархія називається *повною*, якщо для всіх $x \in L_k$ виконується $x^+ = L_{k-1}$, $k = 2,\ldots,h$.

Задача знаходження пріоритетів елементів ієрархії полягає в тому, щоб для будь-якого заданого елементу $x \in L_\alpha$ та підмножини $S \subset L_\beta$,

$\beta < \alpha$ визначити функцію $w_{x,S} : S \to [0,1]$ таким чином, щоб вона відображала властивості функції пріоритетів w_x на рівнях L_k, $k = \alpha,...,\beta - 1$. Зокрема, необхідно визначити функцію $w_{b,L_h} : L_h \to [0,1]$.

Нехай $Y = \{y_1,...,y_{n_k}\} \subset L_k$, $X = \{x_1,...,x_{n_{k+1}}\} \subset L_{k+1}$ та існує елемент $z \in L_{k-1}$. Розглянемо функції пріоритетів $w_z : Y \to [0,1]$, $w_{y_j} : X \to [0,1]$, $j = 1,...,n_k$. Позначимо через $w : X \to [0,1]$ функцію пріоритету елементів з X відносно z та задамо її наступним чином:

$$w(x_i) = \sum_{j=1}^{n_k} w_{y_j}(x_i) w_z(y_j), \quad i = 1,...,n_{k+1}. \tag{1.1}$$

Таке зважування потребує, щоб на кожному рівні ієрархії критерії були незалежними за перевагами.

Перейдемо до матричного запису. Покладемо $b_{ij} = w_{y_j}(x_i), W_i = w(x_i)$, $W'_j = w_z(y_i)$. Тоді (1.1) запишеться у вигляді

$$W_i = \sum_{j=1}^{n_k} a_{ij} W'_j, \quad i = 1,...,n_{k+1}.$$

В результаті маємо остаточну формулу $W = BW'$.

1.2.2. Принцип ієрархічної композиції: адитивність зважування

Нехай задано дві скінчені множини S і T. Нехай S − множина незалежних властивостей, а T − множина об'єктів, які в якості характеристик мають ці властивості. Припустимо, що з кожним $s_j \in S$ асоціюється чисельна вага (пріоритет, індекс відносної важливості) w_j, так що $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Нехай w_{ij} − ваги, що асоціюються з t_i відносно s_j, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$. Величини w_{ij} задовольняють вимогам $w_{ij} \geq 0$ та

$\sum_{i=1}^{m} w_{ij} = 1$. Тоді випукла комбінація w_{ij}, тобто $\sum_{j=1}^{n} w_{ij} w_j$, $i = 1,...,m$ − це числовий пріоритет чи відносна важливість t_i відносно S.

Теорема 1.1. Нехай H − повна ієрархія з найбільшим елементом b, що має h рівнів. Нехай B_k − матриця пріоритетів k-го рівня, $k = 2,...,h$. Якщо W' − вектор пріоритетів p-го рівня відносно деякого елемента z на $(p-1)$-му рівні, то вектор пріоритетів W q-го рівня, $p < q$ відносно елемента z визначається за формулою

$$W = B_q B_{q-1} ... B_{p+1} W'.$$

Тоді вектор пріоритетів найнижчого рівня L_h відносно елемента b дорівнює $W = B_h B_{h-1} ... B_2 W'$.

Розглянемо інтерпретацію пріоритетів за допомогою теорії графів.

1.2.3. Інтерпретація пріоритетів за допомогою теорії графів

Наведемо деякі відомості з теорії графів [8].

Означення 1.4. Позначимо вузли направленого графу G через $1,2,3,...,n$. З кожною направленою дугою x_{ij} від вузла i до вузла j асоціюється невід’ємне число q_{ij}, $0 < q_{ij} < 1$, яке називається *інтенсивністю дуги* (петлі та кратні дуги дозволяються).

Означення 1.5. *Маршрутом* в направленому графі називається послідовність вузлів та дуг, при якій кожний вузол є кінцем дуги, яка знаходиться у послідовності безпосередньо перед ним та джерелом наступної за ним дуги. Обидві кінцеві точки кожної дуги знаходяться у послідовності. Довжиною маршруту є число дуг у послідовності. Маршрут довжини k назвемо “k-маршрутом”.

Означення 1.6. *Інтенсивністю маршруту* довжини k від вузла i до вузла j є добуток інтенсивностей дуг в маршруті.

Означення 1.7. *Загальною інтенсивністю* всіх k-маршрутів від вузла i до вузла j є сума інтенсивностей маршрутів.

Загальна інтенсивність маршрутів від i до j дорівнює $t_{ij} = p_{ij}q_{ij}$, де p_{ij} – число дуг від i до j, а q_{ij} – інтенсивність кожної дуги.

Означення 1.8. Для заданого направленого графу D елементи u_{ij} *матриці інтенсивності-інцидентності* U – це загальні інтенсивності маршрутів від i до j.

Теорема 1.2. Елемент $u_{ij}(k)$ матриці інтенсивності-інцидентності U^k є загальною інтенсивністю k-маршрутів від вузла i до вузла j.

Наслідок 1.1. Якщо $q_{ij} = 1$ для всіх i та j, то (i, j)-й елемент в U^k є числом k-маршрутів від i до j.

Для знаходження пріоритетів необхідно розв'язати обернену задачу інтерпретації ступенів матриці для підрахунку інтенсивностей маршрутів. З кожним об'єктом процедури парних порівнянь будемо асоціювати вузол направленого графу D. В цьому випадку матрицею інтенсивності-інцидентності U є матриця суджень. Чисельник p_{ij} (i, j)-го елементу такої матриці (маємо на увазі, що він заданий в порівняно простій дробній формі) представляє собою число дуг, направлених від вузла i до вузла j. Інтенсивність кожної дуги від i до j одна й та ж та дорівнює оберненій величині q_{ij} знаменника елемента. Це єдиний спосіб визначення відповідного графу, оскільки для $q_{ij} = 1$ він зводиться до звичайної матриці вершин, k-та ступінь якої дає число маршрутів довжини k [1].

Інтерпретувати (i, j)-й елемент матриці суджень A можна як пряму перевагу або інтенсивність важливості об'єкту i відносно об'єкту j. Він виражає відносний вклад, який об'єкт i вносить у досягнення певної цілі в порівнянні з вкладом, який вносить об'єкт j. Нормалізовані суми рядків матриці A представляють собою рівень вкладу відповідних об'єктів відносно всіх інших об'єктів. Нормалізовані суми рядків квадрату матриці A^2 – це перевага з урахуванням всіх 2-маршрутів, тобто непряме порівняння пар через одну проміжну вершину. Тому рівень важливості об'єкту підвищується чи знижується відповідно до його взаємозв'язків з іншими об'єктами. В загальному випадку ефект переваги між об'єктами можна отримати, обчислюючи граничне значення суми рядків A^k – матриці суджень A k-го ступеню. Кожне число, нормалізоване за допомогою суми цих величин, служить загальним індексом переваги або пріоритетом об'єктів.

Формально поняття відносної переваги об'єкту i над об'єктом j за k кроків можна роз'яснити в термінах загальної інтенсивності всіх k –маршрутів від вузла i до вузла j. Відносна перевага об'єкту i над іншим об'єктом j прямо та опосередковано через проміжні об'єкти, за k кроків представлена (i, j)-м елементом матриці A^k. Внаслідок наявності петлі на кожній вершині отримуємо, що кожний вхід матриці A^k є сумою всіх маршрутів з довжиною меньшою чи рівною k. Кількість включень кожного маршруту залежить від його довжини та від числа перестановок петель маршруту при одержанні потрібної довжини маршруту. Петля сама по собі надає одиничну інтенсивність маршруту. Тому загальна інтенсивність маршруту не змінюється при проходженні вздовж петлі декілька разів. Таким чином, отримали наступну теорему.

Теорема 1.3. Нехай $A = (a_{ij})$ – матриця порівнянь розмірності $n \times n$. Тоді елемент $a_{ij}(k)$ матриці A^k представляє собою відносну перевагу або важливість об'єкту i над об'єктом j за k кроків.

Означення 1.9. *Вагою (пріоритетом)* $w_i(k)$ об'єкту i називається індекс переваги об'єкту i над усіма іншими об'єктами за k кроків:

$$w_i(k) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k) / \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k).$$

Означення 1.10. *Загальна вага (пріоритет)* w_i об'єкту i над всіма іншими об'єктами визначається наступним чином:

$$w_i = \lim_{k\to\infty} w_i(k) = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k) / \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(k) \right).$$

1.2.4. Неприводимі матриці

За результатами експертного оцінювання в МАІ формуються додатні обернено симетричні матриці парних порівнянь.

Означення 1.11. Квадратні матриці $A = (a_{ij})$, для яких $a_{ij} > 0$, $a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}}$, $i, j = 1,...,n$, називаються додатними, *обернено симетричними матрицями*.

Означення 1.12. Додатні обернено симетричні матриці $A = (a_{ij})$, для елементів яких виконується співвідношення $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$, $i, j = 1,...,n$ називаються *узгодженими*.

Наведемо деякі означення і теореми з теорії додатних матриць [9].

Означення 1.13. Матриця називається *неприводимою*, якщо вона не може бути представлена у вигляді $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$, де A_1, A_3 − квадратні матриці, 0 − нульова матриця.

Обернено симетричні матриці парних порівнянь не містять нулів, значить вони завжди неприводимі.

Теорема 1.4 (Перрона-Фробеніуса)

Нехай $A \geq 0$ − невід'ємна неприводима матриця. Тоді:

1. A має дійсне додатне просте власне число $\lambda_{\max}$, що по модулю не менше будь-якого іншого власного числа матриці A (деякі з них можуть бути комплексними числами).

2. Власний вектор матриці A, який відповідає власному числу $\lambda_{\max}$, має додатні компоненти та єдиний (з точністю до постійного множника).

3. Число $\lambda_{\max}$ (називається коренем Перрона матриці A) задовольняє умові

$$\lambda_{\max} = \max_{x \ge 0} \min_{1 \le i \le n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \min_{x \ge 0} \max_{1 \le i \le n} \frac{(Ax)_i}{x_i}; \quad x \ge 0 - \text{довільне.}$$

Наслідок 1.2. Нехай $A \ge 0$ − невід'ємна неприводима матриця і нехай $x \ge 0$ − довільне. Тоді корінь Перрона задовольняє умові

$$\min_{1 \le i \le n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \le \lambda_{\max} \le \max_{1 \le i \le n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

Означення 1.14. Матриця A називається *стохастичною*, якщо суми її рядків дорівнюють одиниці.

Доведення теореми Персона-Фробеніуса спирається на наступні факти теорії додатних матриць.

Нехай A − додатна $n \times n$ матриця, $\lambda_{\max}$ − її найбільше власне число, тоді

1. Число $\lambda_{\max}$ обмежене зверху і знизу відповідно максимальною та мінімальною сумами рядків матриці A. Значить, якщо A − стохастична матриця, то $\lambda_{\max} = 1$.

2. Для стохастичної матриці A, $\lim\limits_{k \to \infty} A^k = ev$, де v − додатній вектор-рядок, $v = (v_1, v_2, ..., v_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} v_i = 1$, $e = (1,1,...,1)^T$.

3. Для додатної матриці A існує додатне число λ, ненульовий вектор-рядок v та ненульовий вектор-стовбець w, такі, що $\lim\limits_{k \to \infty} \frac{A^k}{\lambda^k} = wv$.

4. Число λ є найбільшим власним значенням A і називається головним власним значенням, w та v − головні власні вектори, єдині з точністю до постійного множника.

5. Вектор w ортогональний до усіх не головних власних векторів-стовбців, а v − до усіх не головних власних векторів-рядків.

6. Якщо λ_1 − найбільше власне число A, причому $\lambda_i \neq \lambda_j$; $i \neq j$, $i, j = 1,2,...,n$ і якщо w_1 − головний власний вектор, що відповідає максимальному власному числу λ_1, w_i − правий власний вектор, що відповідає λ_i, то $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{A^k e}{e^T A^k e} = cw_1$, де c − константа.

Теорема 1.5. Якщо A − невід'ємна неприводима матриця, то значення $\lambda_{\max}$ зростає із збільшенням будь-якого елементу a_{ij}.

Означення 1.15. Невід'ємна неприводима матриця A називається *примітивною* якщо існує ціле $m \geq 1$, таке, що $A^m > 0$. Інакше матрицю називають імпримітивною.

Теорема 1.6. В графі примітивної матриці довжина шляху між будь-якими двома вершинами більше або дорівнює m.

Теорема 1.7. Невід'ємна неприводима матриця A примітивна тоді і тільки тоді, коли A має єдиний характеристичний корінь з максимальним модулем, і цей корінь має кратність, яка дорівнює одиниці.

Теорема 1.8. Для примітивної матриці A

$$\lim_{k\to\infty} \frac{A^k e}{\|A^k\|} = cw, \quad \| A^k \| = e^T A^k e,$$

де $c = const$, w − власний вектор, який відповідає найбільшому влсному числу $\lambda_{\max}$.

1.2.5. Узгодженість

Нехай є n каменів $A_1, A_2,..., A_n$ з відомими вагами $w_1, w_2,..., w_n$ та припустимо, що сформована матриця парних порівнянь, в рядках якої знаходяться відношення ваги кожного каменя до ваг всіх інших каменів. Отримаємо рівняння:

$$Aw = \begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = nw.$$

Для отримання ваг необхідно розв’язати систему лінійних однорідних рівнянь $Aw = nw$ чи $(A - nI)w = 0$. Вона має нетривіальний розв’язок тоді і тільки тоді, коли детермінант $A - nI$ дорівнює нулю, тобто коли n є власним числом A. Матриця A має одиничний ранг, оскільки кожний її рядок дорівнює першому рядку, помноженому на константу. В результаті всі власні числа A, окрім одного, дорівнюють нулю. Сума власних чисел матриці дорівнює її сліду – сумі діагональних елементів – в даному випадку слід A дорівнює n. Отже, n є власним числом A та існує нетривіальний розв’язок – додатний вектор w, який єдиний з точністю до константи. Єдиність вектору w забезпечується нормуванням шляхом ділення кожного елементу w на суму всіх його елементів.

Таким чином, знаючи матрицю парних порівнянь A, можна отримати ваги. В цьому випадку розв’язком буде будь-який нормований стовпчик A. Відмітимо, що для елементів матриці A мають виконуватися наступні властивості: оберненої симетричності ($a_{ji} = 1/a_{ij}$, $a_{ii} = 1$) та узгодженості ($a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$).

В загальному випадку немає можливості отримати точні значення відношень w_i / w_j, можна визначити тільки їх оцінки. Припустимо, що отримані від експертів оцінки відношень w_i / w_j – це малі збурення точних значень.

Вибір збурення, яке найбільш відповідає описанню впливу неузгодженості на власний вектор, що розраховується, залежить від психологічного процесу, який має місце при заповненні матриці парних порівнянь. Припустимо, що всі збурення, які заслуговують на увагу, можуть бути зведені до загального вигляду $a_{ij} = w_i \varepsilon_{ij} / w_j$, де $\varepsilon_{ij} > 0$ [1]. Узгодженість має місце, якщо $\varepsilon_{ij} = 1$.

Визначимо $\mu = -\frac{1}{n-1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i$ як середнє не головних власних чисел матриці A із знаком мінус. Тоді з $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = n$ отримуємо $\lambda_{\max} \equiv \lambda_1$, $\mu = (\lambda_{\max} - n)/(n-1)$.

Так як $\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j / w_i$ (i-а компонента рівняння $Aw = \lambda_{\max} w$), то

$$n\lambda_{\max} = n \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ji}) = n + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} (\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}}).$$

Тому $\mu = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{1}{n-1} - \frac{n}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} [a_{ij} \frac{w_j}{w_i} + a_{ji} \frac{w_i}{w_j}]$.

$\mu = -1 + \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} [\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}}]$.

При $\varepsilon_{ij} \to 1$, тобто при досягненні узгодженості, маємо, що $\mu \to 0$. Крім того, μ є випуклою за ε_{ij}, оскільки функція $\varepsilon_{ij} + \frac{1}{\varepsilon_{ij}}$ випукла (має мінімум при $\varepsilon_{ij} = 1$), і сума випуклих функцій є випуклою. Якщо запишемо $\varepsilon_{ij} = 1 + \delta_{ij}$, то при $\delta_{ij} > -1$ маємо $\mu = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \le i < j \le n} [\frac{\delta_{ij}^2}{1 + \delta_{ij}}]$.

Теорема 1.9. Найбільше власне число додатної обернено симетричної матриці задовольняє нерівності $\lambda_{\max} \ge n$ і рівність має місце тоді і тільки тоді, коли матриця є узгодженою.

Таким чином, для досягнення узгодженості матриці бажано, щоб μ було близьким до нуля, або, що те ж саме, $\lambda_{\max}$ було близьким до n.

Для матриць $A=(a_{ij})$, $W=(w_i / w_j)$ маємо $(A-W)w=(\lambda_{\max}-n)w$, звідки випливає, що апроксимація a_{ij} за допомогою w_i / w_j є тим кращою, чим ближче $\lambda_{\max}$ до n. Записавши $a_{ij}=w_i / w_j + w_j \delta_{ij} / w_i$, знаходимо, що $\delta_{ij}^2=[a_{ij} w_j / w_i - 1]^2$. Таким чином, замінивши a_{ij} відношенням w_i / w_j, отримаємо $\delta_{ij}^2=0$, зводячи тим самим до нуля величину $2(\lambda_{\max}-n)/(n-1)$. При $|\delta_{ij}|<1$, апроксимація будь-якого a_{ij} величиною w_i / w_j наближає нас до узгодженості.

Теорема 1.10. Якщо додатна матриця A узгоджена, то кожний її рядок є додатним кратним будь-якого одного рядка.

Тому узгоджена матриця при $a_{ii}=1$ прийме наступний загальний вигляд:

$$\begin{bmatrix} a_{i1}/a_{i1} & a_{i2}/a_{i1} & \cdots & a_{in}/a_{i1} \\ a_{i1}/a_{i2} & a_{i2}/a_{i2} & \cdots & a_{in}/a_{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i1}/a_{ij} & \cdots & \cdots & a_{in}/a_{ij} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i1}/a_{in} & a_{i2}/a_{in} & \cdots & a_{in}/a_{in} \end{bmatrix}.$$

Так як матриця $A=(w_i / w_j)$ має вигляд транспонованої матриці по відношенню до даної, то вона узгоджена.

Теорема 1.11. Якщо A − додатна та узгоджена матриця, тоді $a_{ij}=1/a_{ji}$ і $a_{ii}=1$.

Теорема 1.12. Додатна матриця A узгоджена тоді і тільки тоді, коли вона має одиничний ранг та елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці.

Розглянемо ілюстрацію поняття узгодженості на мові теорії графів.

Відомо, що дерево з n вершинами, яке перекривається, має $n-1$ ребер. Воно є зв’язаним графом, який включає всі вершини та не має контурів. Тому існує єдиний шлях між будь-якою парою вершин.

Теорема 1.13. Необхідною і достатньою умовою існування єдиної додатної узгодженої матриці є те, що об'єкти (як вершини) та судження (як дуги) формують дерево, що перекривається.

Використовуючи властивість оберненої симетричності $a_{ij} = 1/a_{ji}$, з рівності $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ маємо $a_{ij}a_{jk}a_{ki} = 1$. Тому узгодженість для обернено симетричної матриці означає, що всі контури довжини три мають одиничну інтенсивність.

Теорема 1.14. Якщо A - узгоджена матриця, то $A^k = n^{k-1}A$.

Теорема 1.15. Будь-який стовпчик матриці $A = (w_i / w_j)$ є розв'язком задачі про власне значення $Aw = nw$, $w = (w_1, w_2, ..., w_n)^T$.

Теорема 1.16*. *(Про монотонність). Нехай $A = (a_{ij})$ - додатна узгоджена матриця з головним власним вектором $w = (w_1, ..., w_n)^T$. Замінимо один елемент a_{xy} на $a_{xy} + \varepsilon > 0$, $\varepsilon > 0$ та, використовуючи рядок x, побудуємо нову узгоджену матрицю $A^* = (a_{ij}^*)$. Нехай $w^* = (w_1^*, ..., w_n^*)^T$ - головний власний вектор матриці A^*. Тоді $w_x^* > w_x$.

Теорема 1.17. Якщо A - додатна узгоджена матриця і A' отримана з A викресленням i-го рядка та i-го стовпчика, то A' - узгоджена та її відповідний власний вектор отримується з A, якщо покласти $w_i = 0$ та нормалізувати компоненти.

Зауваження. В загальному випадку, якщо $A = (a_{ij})$ - матриця парних порівнянь, а $A' = (a'_{ij})$ побудована за правилами: 1) $a'_{ij} = a_{ij}$, $i, j = 1,...,n$ при $i \neq k, j \neq k$; 2) $a'_{ij} = 0$ при $i = k$ або $j = k$ і якщо w та w' - нормалізовані власні вектори рівнянь $Aw = \lambda_{\max} w$ і $A'w' = \lambda_{\max} w'$ відповідно, то $w'_k = 0$. Але виключення одного рядка з матриці парних порівнянь не визиває пропорційного перерозподілу ваг серед інших рядків, тобто $w'_\alpha / w'_\beta \neq w_\alpha / w_\beta$ для всіх α і β.

Теорема 1.18. (Збереження порядкової узгодженості). Якщо $(o_1,...,o_n)$ − порядкова шкала n об'єктів, де з $o_i \succeq o_k$ витікає, що $a_{ij} \geq a_{kj}$, $j = 1,...,n$, то з $o_i \succeq o_k$ витікає, що $w_i \geq w_k$.

1.2.6. Реакція на збурення та фундаментальна шкала

Для того, щоб відчувати предмети в просторі, мозок людини мініатюризує їх в межах своєї системи нейронів, тому існує пропорційний взаємозв'язок між тим, що ми відчуваємо і тим, що існує в оточуючому просторі. Без пропорційності людина не може координувати думки зі своїми діями з точністю, необхідною для контролю навколишнього світу. Пропорційність по відношенню до окремого впливу потребує, щоб реакція на пропорційно збільшений чи послаблений вплив була пропорційна відгуку на вихідне значення цього впливу. Якщо $w(s)$ − реакція на вплив s, то попереднє твердження може бути записане у вигляді функціонального рівняння $w(as) = bw(s)$. Це рівняння також може бути отримане як необхідна умова розв'язку рівняння Фредгольма 2-го роду $\int_a^b K(s,t)w(t)dt = \lambda_{\max} w(s)$, яке є узагальненням на неперервний випадок дискретної задачі отримання пріоритетів $Aw = \lambda_{\max} w$ [4]. В неперервному випадку замість додатної обернено симетричної матриці маємо додатне ядро $K(s,t) > 0$ з властивостями $K(s,t)K(t,s) = 1$ та $K(s,t)K(t,u) = K(s,u)$ для всіх s,t,u (узгодженість). Розв'язком цього функціонального рівняння в області дійсних чисел є

$$w(s) = Ce^{\log b \log s / \log a} P(\log s / \log a),$$

де P − періодична функція з періодом 1 і $P(0) = 1$. Одним з найпростіших прикладів є $P(u) = \cos(u/2B)$, $u = \log s / \log a$. Логарифмічний закон реакції на вплив можна отримати внаслідок апроксимації даного розв'язку шляхом розкладу в ряд функцій експоненти та косинусу:

$$v(u) = C_1 e^{-\beta u} P(u) \approx C_2 \log s + C_3$$
$$\beta = -\log ab, \ \beta > 0.$$

Це закон Вебера-Фехнера (Weber-Fechner) логарифмічної реакції $M = a \log s + b, \ \ a \neq 0$ на вплив s. Він був емпірично встановлений та перевірений в 1860 році Густавом Теодором Фехнером, який використав закон про розпізнавання двох близьких (сусідніх) значень впливів, сформульований Ернестом Генріхом Вебером. Отже, закон Вебера-Фехнера можна отримати з функціонального рівняння реакції на вплив.

Цілочисельна шкала, яка використовується для оцінювання парних порівнянь, будується наступним чином. Для даного впливу величина реакції залишається постійною поки цей вплив не зросте до достатньо великого значення в порівнянні із значенням впливу. При такому підході зберігається пропорційність відносно зростання при впливі так, щоб його можна було визначити для нової реакції. Тому, якщо s_0 − початковий вплив, то величини наступних впливів мають вигляд:

$$s_1 = s_0 + \Delta s_0 = s_0 + \frac{\Delta s_0}{s_0} s_0 = s_0 (1 + r)$$
$$s_2 = s_1 + \Delta s_1 = s_1 (1 + r) = s_0 (1 + r)^2 \equiv s_0 \alpha^2$$
$$s_n = s_{n-1} \alpha = s_0 \alpha^n \quad (n = 0,1,2,...).$$

Припустимо, що реакції на ці впливи вимірюються у шкалі відношень, тобто у виразі $M = a \log s + b$ значення $b = 0$. Типова реакція має вигляд $M_i = \alpha \log \alpha^i$, $i = 1,...,n$, а послідовність таких реакцій:

$$M_1 = \alpha \log \alpha, \ M_2 = 2\alpha \log \alpha, ..., \ M_n = n\alpha \log \alpha.$$

Розглянемо відношення $M_i / M_1, \ i = 1,...,n$ цих реакцій. Перша реакція є найменшою та служить одиницею порівняння. Людина здатна розрізняти високу, середню та низьку інтенсивності на одному рівні і для кожного з цих значень на другому, більш низькому рівні, також розрізняти високу, середню та низьку інтенсивності. В результаті отримуємо дев’ять категорій. Назначимо мінімальне значення 1 парі (низький, низький) та найбільше значення 9 парі (високий, високий), і покриємо таким чином весь діапазон можливостей на двох рівнях. Значення 9 надається найвищому рівню парної переваги, тобто при порівнянні найбільшого значення з найменшим.

Якщо б ми мали точне значення, виміряне приладом, і захотіли використати його для оцінки, то немає потреби проводити його апроксимацію. Але у випадку, коли точне значення певної характеристики невідоме, а необхідно визначити ваги w_i і w_j двох об'єктів, то замість того, щоб безпосередньо назначати в якості ваг певні числа, а потім формувати відношення w_i / w_j, пропонується назначити одне число з *фундаментальної шкали* (табл. 1.1) для представлення відношення $(w_i / w_j)/1$. Це є найближчою цілочисельною апроксимацією відношення w_i / w_j. Фундаментальна шкала необхідна для чисельного вираження відносного взаємозв'язку переваги.

Розширення шкали з 1-9 до 1-∞

Як відмічалося раніше, людина неспроможна робити точні порівняння об'єктів, які значно відрізняються між собою. Безпосередньо людина не може достатньо надійно порівняти дуже маленький та дуже великий об'єкти. Однак, людина може зробити це поетапно, порівнюючи відносно близькі об'єкти та поступово збільшуючи їх розмір до тих пір, поки не досягнемо потрібного об'єкту великого розміру. При цьому проводиться порівняння декількох близьких чи однорідних об'єктів за допомогою описаної вище фундаментальної шкали відносних величин 1-9, потім знову проводиться парне порівняння більших об'єктів наступного набору (рис. 1.1). Щоб отримати шкалу для другої множини вона має включати найбільший об'єкт з попереднього набору. Всі значення оцінок

Таблиця 1.1. Фундаментальна шкала

Інтенсивність важливості	Якісна оцінка	Пояснення
1	Однаково важливі	Елементи рівні за своїм значенням
3	Ненабагато важливіші	Існують вербальні висловлювання щодо пріоритету одного елементу над іншим, але ці висловлювання досить непереконливі
5	Суттєво важливіші	Існують добрі докази та логічні критерії, які можуть показати, що один з елементів є більш важливий
7	Значно важливіші	Існує переконливий доказ великої значущості одного елемента в порівнянні з іншим
9	Абсолютно важливіші	Усвідомлення пріоритету одного елементу над іншим максимально підтверджується
2,4,6,8	Проміжні оцінки	Потрібен певний компроміс
	Обернені значення ненульових оцінок	Якщо оцінка m_{ij} надана на підставі порівняння i-го та j-го елементів, то m_{ji} має обернене значення $1/m_{ij}$
	Нормування	Нормування виникає з описаної шкали

для другої множини діляться на значення спільного об’єкту, потім всі результуючі значення множаться на вагу загального елементу в першій множині. Таким чином дві множини стають порівняними в одній і тій самій шкалі. Аналогічно проводяться розрахунки для третього набору об’єктів, використовуючи спільний елемент з другої множини.

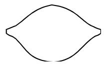
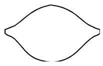
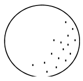
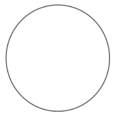
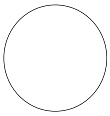
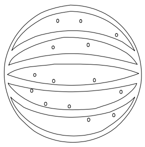
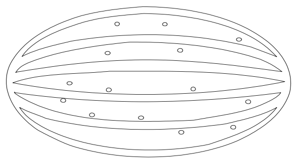
 0.07 Карликовий помідор	 0.28 Маленький помідор	 0.65 Лимон
 0.08 Лимон $\frac{0.08}{0.08}=1$ $0.65\cdot 1=0.65$	 0.22 Грейпфрут $\frac{0.22}{0.08}=2.75$ $0.65\cdot 2.75=1.79$	 0.70 Диня $\frac{0.70}{0.08}=8.75$ $0.65\cdot 8.75=5.69$
 0.10 Диня $\frac{0.10}{0.10}=1$ $5.69\cdot 1=5.69$	 0.30 Маленький гарбуз $\frac{0.30}{0.10}=3$ $5.69\cdot 3=17.07$	 0.60 Великий гарбуз $\frac{0.60}{0.10}=6$ $5.69\cdot 6=34.14$
Це означає, що $\frac{34.14}{0.07}=487.7$ карликових помідорів відповідає великому гарбузу.		

Рис. 1.1. Порівняння карликового помідору з великим гарбузом

1.3. Етапи МАІ

Відокремлюють наступні *етапи МАІ* (рис. 1.2):

1. Побудова ієрархічної структури факторів, які впливають на головну ціль прийняття рішення; визначення альтернативних варіантів рішень.

2. Отримання суджень експертів щодо парних порівнянь елементів одного рівня ієрархії відносно спільного елементу вищого рівня. Парні порівняння проводяться в фундаментальній шкалі відносної важливості

і структуруються в матрицю парних порівнянь (МПП), яка є додатною і обернено симетричною.

Рис. 1.2. Основні етапи МАІ

3. Математична обробка суджень експертів:

- розрахунок локальних ваг елементів кожного рівня ієрархії відповідно до батьківських елементів вищого рівня;
- аналіз узгодженості експертних оцінок;
- розрахунок глобальних ваг елементів ієрархії відносно головної цілі прийняття рішення.

Детальніше розглянемо кожний з етапів МАІ на прикладі оцінювання інформаційних систем аутсорсингу.

1.3.1. Побудова ієрархії

При аналізі реальної системи число елементів та їхніх взаємозв'язків є настільки великим, що перевищує здатність експертів сприймати інформацію в повному обсязі. У цьому випадку реальність підрозділяється на складові частини за допомогою ієрархії.

Ієрархія є певним видом системи, заснованим на припущенні, що елементи системи можуть групуватися в окремі множини. Елементи кожної групи знаходяться під впливом елементів деякої цілком визначеної групи і, у свою чергу, впливають на елементи іншої групи. Але елементи в кожній групі незалежні.

Ієрархія – система, що складається з підсистем, ці підсистеми функціонують як ціле на одному рівні, вони є частинами системи більш високого рівня, стаючи підсистемами цієї системи.

Етапи МАІ проілюструємо на модельному прикладі прийняття рішення компанією щодо передачі функцій з обслуговування і підтримки інформаційних систем сторонній спеціалізованій організації (аутсорсинг).

Приклад

Оцінювання аутсорсингу інформаційних систем (ІС)

Неперервно зростаюча залежність бізнесу від інформаційних технологій передбачає підвищення вимог до роботи інформаційних систем (ІС). Сучасна ІС має забезпечувати неперервне надання послуг користувачам. Для виконання цієї вимоги ІТ-підрозділи компаній вимушені витрачати великі ресурси, що в умовах обмеженого ІТ-бюджету не завжди можливо. В таких випадках буває доцільно повністю або частково передати функції з обслуговування і підтримки ІС сторонній спеціалізованій організації (аутсорсинг).

ІТ-аутсорсинг – це обслуговування і розвиток інформаційної інфраструктури підприємства і включає підтримку апаратних і програмних систем, розробку та інтеграцію пакетів прикладних програм, послуги управління та адміністрування ІТ, консалтинг, навчання тощо.

Перед компанією постала задача оцінити альтернативні ІС аутсорсингу для прийняття рішення щодо вибору однієї з них чи розподілу ресурсів між декількома необхідними для компанії ІС. За результатами експертного оцінювання відокремлено наступні *альтернативи*:

- ІС управління (ІС 1);
- розробка домашньої сторінки в Інтернеті (ІС 2);
- підтримка ІС управління зв'язками з клієнтами (ІС 3);
- розробка ІС управління зв'язками з постачальниками (ІС 4);
- розробка і підтримка ІС он-лайн обробки транзакцій (ІС 5).

Оцінювання вищеперерахованих ІС аутсорсинга буде здійснюватися за *критеріями* (рис. 1.3):

- *Економічний* – зменшення витрат на ІС з переходом від фіксованих витрат до змінних витрат, фінансова гнучкість;

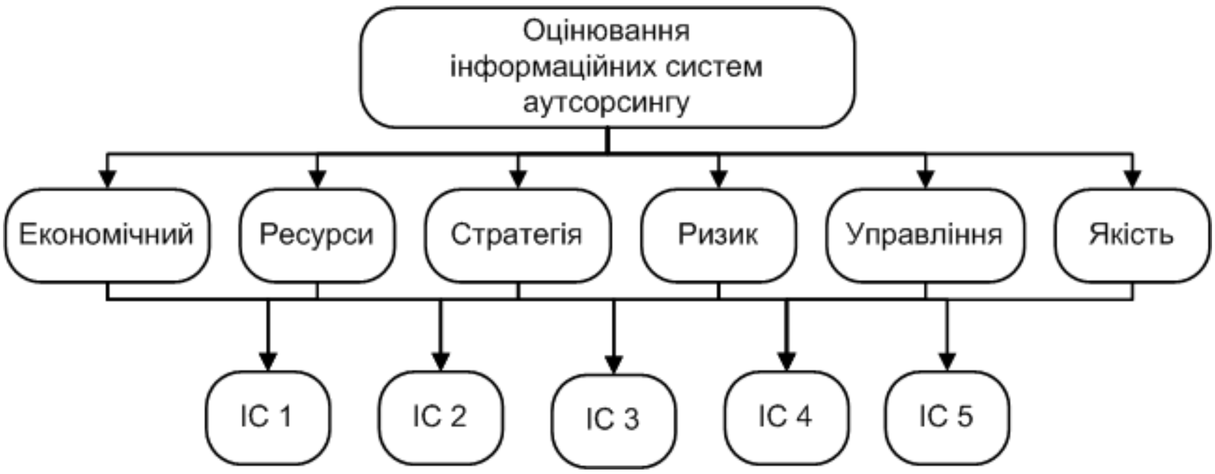


Рис. 1.3. Ієрархія задачі оцінювання аутсорсингу ІС

- *Ресурси* – нові технології, професійні працівники;
- *Стратегія* – фірма має фокусуватися на своїй основній діяльності, а неосновну передавати на аутсорсинг;
- *Ризик* – втрата основної діяльності, втрата внутрішніх технічних знань, втрата гнучкості, погіршення здатності фірми до інновацій, підвищення складності управління інформаційними послугами;

- *Управління* – покращення комунікації між ІТ-підрозділом і операційним підрозділом, стимулювання ІТ-підрозділу у покращенні якості роботи і піднятті бойового духу, збільшення можливостей управління і контролю ІТ-підрозділу, розв’язання проблем текучості і недостатності кадрів, збереження гнучкості у регулюванні підрозділом;
- *Якість* – отримання швидкого доступу до новітніх технологій і висококваліфікованих спеціалістів, більший діапазон послуг, налагодження більш продуктивної роботи із замовниками.

1.3.2. Проведення парних порівнянь

Після того, як ієрархія побудована, необхідно провести парні порівняння елементів, що знаходяться на одному рівні, по відношенню до елементу більш високого рівня.

Згідно з методом парних порівнянь МАІ експерт повинен дати відповіді на питання типу *Який критерій важливіший «Економічний» чи «Ресурси» при виборі ІС аутсорсинга? Яким є ступінь переваги?* Таке питання задається для всіх пар критеріїв, які знаходяться на першому рівні ієрархії. Загалом експерту пропонується провести $n(n-1)/2$ порівнянь, де n − кількість критеріїв одного рівня. В нашому прикладі $n=6$, значить, в даному випадку необхідно здійснити 15 порівнянь різних пар критеріїв.

Експерт дає свої оцінки у фундаментальній шкалі, яка є вербальною, і має 9 поділок (див. табл. 1.1). Так, якщо при порівнянні критеріїв *«Економічний» та «Ресурси»* експерт вважає, що обидва критерії в рівній мірі впливають на досягнення головної мети *«Оцінювання ІС аутсорсингу»*, він вибирає якісну оцінку «однаково важливі». Якщо на думку експерта критерій *«Економічний»* є важливішим за критерій *«Ресурси»*, тобто для компанії економічні чинники вибору ІС аутсорсингу є пріоритетнішими за її забезпеченість ресурсами (або інакше можна сказати, що при виборі ІС більша увага приділяється економічним чинникам, зокрема зменшенню витрат на ІС, а не покращенню ресурсного потенціалу компанії), то вибирається одна з якісних оцінок з множини {«Ненабагато важливіший», «Суттєво важливіший», «Значно важливіший», «Абсолютно важливіший» та проміжні між ними оцінки}.

Наступний крок – порівняти альтернативи. Альтернативи порівнюються відносно кожного з критеріїв вищого рівня ієрархії. При порівнянні альтернатив *ІС 1* та *ІС 2* відносно критерію *Стратегія*, експерт має вказати, яка з цих двох ІС аутсорсингу буде сприяти кращому фокусуванню компанії на власній діяльності. Експерту ставиться питання виду: «Яка ІС «*ІС 1*» чи «*ІС 2*» краща з точки зору критерію «*Стратегія*»? Яким є ступінь переваги?» Коли здійснюється порівняння альтернатив відносно критерію, значення якого необхідно мінімізувати, наприклад, в даному прикладі таким критерієм є «*Ризик*», то питання ставиться відносно того, ризик якої ІС є меншим. Оскільки в ієрархії присутні п’ять альтернатив і шість критеріїв, то експерту необхідно провести 60 порівнянь пар альтернатив.

1.3.3. Матриці парних порівнянь (МПП)

За результатами проведених експертом парних порівнянь формується матриця парних порівнянь (МПП). МПП – це квадратна обернено симетрична матриця, для якої $a_{ji} = 1/a_{ij}$ (див. п. 1.2.4).

У прикладі з оцінюванням ІС аутсорсингу (рис.1.3), критерії першого рівня порівнювались попарно по відношенню до загальної цілі. За результатами парних порівнянь критеріїв будується МПП критеріїв (табл.1.2). При порівнянні альтернатив ІС аутсорсингу формується шість таблиць, оскільки альтернативні варіанти порівнюються за кожним з шести критеріїв. Наприклад, МПП ІС за критерієм «*Стратегія*» наведена в табл.1.3.

Таблиця 1.2. Форма для заповнення МПП критеріїв

Оцінювання ІС аутсорсингу	Економіч-ний	Ресурси	Стратегія	Ризик	Управлін-ня	Якість
Економічний						
Ресурси						
Стратегія						
Ризик						
Управління						
Якість						

Таблиця 1.3. Форма для МПП ІС за критерієм «*Стратегія*»

Стратегія	ІС 1	ІС 2	ІС 3	ІС 4	ІС 5
ІС 1					
ІС 2					
ІС 3					
ІС 4					
ІС 5					

Якби необхідно було б порівнювати явища, для яких передбачена сформована система вимірів (оцінка ваг каменів, довжин стрижнів тощо), то в якості відношень в МПП можна було б заносити відношення дійсних мір (ваг, довжин і т.д.). У випадку ж економічної, політичної та інших задач, парні порівняння можна робити з використанням суджень про відносну важливість компонентів. Потім ці судження виражаються чисельно за спеціально розробленою шкалою відносної важливості (табл.1.1). Вибір цієї шкали обумовлений наступними міркуваннями:

- чим вище число градацій шкали, тим вища точність експертної оцінки;

- оскільки провести одночасне порівняння більш ніж дев'яти об'єктів вкрай важко, то для їхнього розрізнення досить дев'яти градацій.

Ефективність шкали доведена теоретично при порівнянні з багатьма іншими шкалами [1].

При порівнянні елементів матриці визначається наскільки один елемент важливіший за інший. При порівнянні елемента із самим собою відношення дорівнює одиниці. Якщо перший елемент важливіший за другий, то використовується ціле число зі шкали, в іншому випадку використовується зворотна величина. У будь-якому випадку зворотні між собою відношення заносяться в симетричні позиції матриці. Тому матриці завжди будуть позитивними і оберненосиметричними, для їх заповнення необхідно провести $n(n-1)/2$ суджень, де n – загальне число порівнюваних елементів. Отже, при заповненні МПП варто керуватися правилами:

1. Якщо $a_{ij} = \alpha$ то $a_{ji} = 1/\alpha$, $\alpha \neq 0$.
2. Якщо судження такі, що елемент c_i має однакову з елементом c_j відносну важливість, то $a_{ij} = 1, a_{ji} = 1$, зокрема $a_{ii} = 1$ для всіх i.
3. Всі елементи матриці є значеннями однієї і тієї ж шкали.

Розглянемо як заповнюються матриці для задачі оцінювання ІС аутсорсингу (рис. 1.3). Нехай при порівнянні критеріїв *«Економічний»* та «*Ресурси*» експерт вважає, що критерії «*Економічний*» і «*Ресурси*» мають однакову важливість, тоді у відповідну МПП в позицію (*Економічний, Ресурси*) записуємо 1. Автоматично в позицію (*Ресурси, Економічний*) також записуємо 1. Якщо при порівнянні критеріїв «*Стратегія*» і «*Ризик*» експерт вважає, що критерій *«Стратегія»* ненабагато важливіший за *«Ризик»*, тоді в МПП критеріїв в позицію (*Стратегія*, *Ризик*) записуємо значення 3, відповідно в позицію (*Ризик, Стратегія*) автоматично записується значення 1/3, тощо. Проводиться порівняння об'єкту зліва як більш пріоритетного в порівнянні з критерієм зверху. МПП критеріїв і альтернатив відносно критеріїв приведені відповідно в табл. 1.4 і 1.5.

Таблиця 1.4. МПП критеріїв

Оцінювання аутсорсингу ІС	Економіч-ний	Ресурси	Стратегія	Ризик	Управ-ління	Якість
Економічний	1	1	1/2	1/2	2	1/2
Ресурси	1	1	1/2	1	2	1
Стратегія	2	2	1	3	3	3
Ризик	2	1	1/3	1	3	2
Управління	1/2	1/2	1/3	1/3	1	1/2
Якість	2	1	1/3	1/2	2	1

Таблиця 1.5. МПП альтернатив відносно критеріїв

а)

Економічний	**ІС 1**	**ІС 2**	**ІС 3**	**ІС 4**	**ІС 5**
ІС 1	1	1/3	1/4	1/2	1/5
ІС 2	3	1	1/2	1	1/2
ІС 3	4	2	1	2	1
ІС 4	2	1	1/2	1	1/2
ІС 5	5	2	1	2	1

б)

Ресурси	**ІС 1**	**ІС 2**	**ІС 3**	**ІС 4**	**ІС 5**
ІС 1	1	1/2	1	1	1
ІС 2	2	1	3	1	1
ІС 3	1	1/3	1	1/3	1/3
ІС 4	1	1	3	1	1
ІС 5	1	1	3	1	1

в)

Стратегія	ІС 1	ІС 2	ІС 3	ІС 4	ІС 5
ІС 1	1	2	7	3	2
ІС 2	1/2	1	6	2	1
ІС 3	1/7	1/6	1	1/4	1/6
ІС 4	1/3	1/2	4	1	1/2
ІС 5	1/2	1	6	2	1

г)

Ризик	ІС 1	ІС 2	ІС 3	ІС 4	ІС 5
ІС 1	1	2	4	2	3
ІС 2	1/2	1	3	1	2
ІС 3	1/4	1/3	1	1/3	1/2
ІС 4	1/2	1	3	1	2
ІС 5	1/3	1/2	2	1/2	1

д)

Управління	ІС 1	ІС 2	ІС 3	ІС 4	ІС 5
ІС 1	1	1	3	2	1
ІС 2	1	1	2	2	1/2
ІС 3	1/3	1/2	1	1	1/2
ІС 4	1/2	1/2	1	1	1/3
ІС 5	1	2	2	3	1

е)

Якість	ІС 1	ІС 2	ІС 3	ІС 4	ІС 5
ІС 1	1	1	3	1	2
ІС 2	1	1	2	1	1
ІС 3	1/3	1/2	1	1/2	1/2
ІС 4	1	1	2	1	1
ІС 5	1/2	1	2	1	1

1.3.4. Узгодженість МПП

Оцінка варіантів рішень з використанням МАІ здійснюється як на основі об'єктивної, так і суб'єктивної вихідної інформації. У тому випадку, коли вихідна інформація отримана з об'єктивних джерел у повному обсязі і є несуперечливою, результати задач прийняття рішень однозначні, тому немає необхідності в узгодженні вихідних даних.

При використанні в процесі прийняття рішень суб'єктивної інформації, представленої у вигляді кількісних (числових) чи якісних (лінгвістичних) оцінок, виникають умови невизначеності. Причинами виникнення невизначеності є: неповнота знань експерта про властивості об'єктів; недостатній ступінь впевненості в правильності оцінок; суперечливість знань; нечіткість представлення інформації.

Наслідками прояву невизначеності є систематичні і випадкові помилки опитування експертів. Помилки в експертних оцінках призводять до неузгодженості даних і порушення таких властивостей суджень як зв’язність і транзитивність. Якість, а, отже, точність і обґрунтованість прийнятого рішення є тим гіршою, чим більше порушені властивості зв’язності та транзитивності між експертними оцінками. Повна відсутність розглянутих властивостей у системі переваг експерта не дозволяє здійснити однозначний вибір на множині альтернативних варіантів.

Крім того, встановлено, що людина не може з достатньою надійністю порівнювати більше дев’яти елементів, оскільки зростає неузгодженість внаслідок природних обмежень людських здібностей.

В МАІ використовується метод оцінки узгодженості заданої експертом МПП, який заснований на обчисленні *відношення узгодженості (consistency ratio)*:

$$CR = \frac{CI}{MRCI} \ ,$$

де *CI* − індекс узгодженості заповненої експертом МПП, *MRCI* − індекс узгодженості матриці такої ж розмірності, заповненої випадковим чином − індекс випадкової узгодженості (табл.1.6).

Таблиця 1.6. Величини випадкової узгодженості та їх різниці першого порядку [4]

Розмір матриці	1	2	3	4	5	6	7	8	9
MRCI	0	0	0,52	0,89	1,11	1,25	1,35	1,40	1,45
Різниці першого порядку для *MRCI*		0	0,52	0,37	0,22	0,14	0,10	0,05	0,05

Розмір матриці	10	11	12	13	14	15
MRCI	1,49	1,52	1,54	1,56	1,58	1,59
Різниці першого порядку для *MRCI*	0,04	0,03	0,02	0,02	0,02	0,01

Чисельна оцінка ступеня узгодженості базується на тому факті, що для повністю узгодженої додатної обернено симетричної матриці максимальне власне число дорівнює порядку матриці парних порівнянь. Тому *індекс узгодженості* визначено за формулою

$$CI = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} \ ,$$

де $\lambda_{\max}$ − максимальне власне число МПП, n – розмірність МПП (число порівнюваних елементів).

Для визначення припустимого рівня узгодженості заданої експертом МПП знайдене значення CR порівнюється з пороговим значенням (табл.1.7). Якщо CR менше або дорівнює пороговому значенню, то експертні оцінки мають припустимий рівень неузгодженості і можуть використовуватися для отримання ваг. Для повністю узгоджених МПП

$CR = 0$. Якщо ж значення CR перевищує поріг, то експертні оцінки мають неприпустимо високий рівень неузгодженості і повинні бути переглянуті.

Таблиця 1.7. Порогові значения CR для МПП різних розмірностей

n	Порогове значення CR
3	0.05
4	0.08
≥5	0.1

Щоб краще зрозуміти природу відношення узгодженості додатньої обернено симетричної матриці A розглянемо наступну штучну модель. Випадковим чином виберемо елементи над головною діагоналлю матриці A із 17 значень $\{\frac{1}{9}, \frac{1}{8}, ..., 1, 2, ..., 8, 9\}$. Елементи під головною діагоналлю задамо оберненими до відповідних елементів над головною діагоналлю. На головній діагоналі поставимо одиниці та для такої матриці розрахуємо індекс узгодженості. Виконаємо таку процедуру 50 000 разів та знайдемо середнє всіх розрахованих індексів узгодженості. Назвемо знайдене середнє індексом випадкової узгодженості. Індекси випадкової узгодженості для матриць розмірності $1, 2, ..., 15$, що отримані з однієї множини таких штучних моделей, показані в табл. 1.6.

На рис. 1.4 наведено графік залежності індексу випадкової узгодженості $MRCI$ від розмірності матриці (дані – з табл. 1.6). Він показує асимптотичну природу індексу випадкової узгодженості.

Як зазначалося вище, МПП неузгоджена, якщо для $n \geq 5$ відношення узгодженості CR перевищує значення 0.1. Для $n = 3$ і $n = 4$ рекомендується, щоб це значення було меншим 0.05 і 0.08 відповідно (табл.1.7).

Якщо відношення узгодженості є більшим за рекомендоване порогове значення, то можна вжити наступні заходи:

1) знаходиться найбільш неузгоджений елемент МПП;

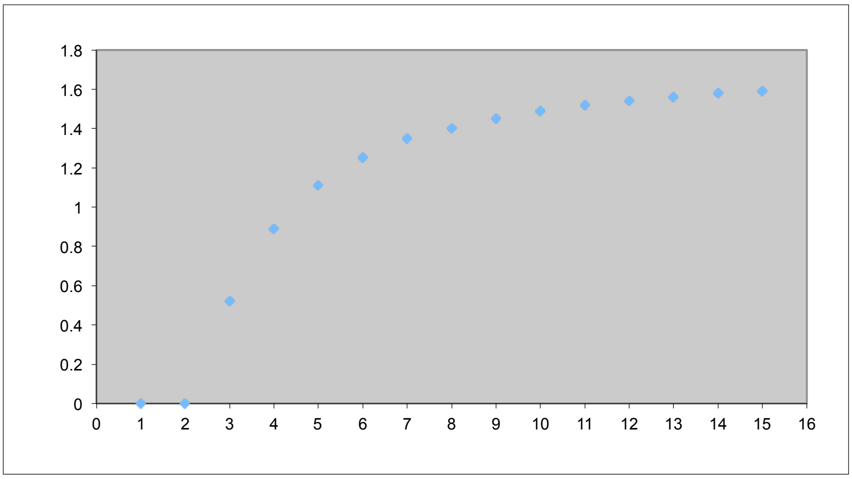


Рис. 1.4. Графік для індексу випадкової узгодженості $MRCI$

2) визначається діапазон значень, в межах якого може бути змінена найбільш неузгоджена оцінка;
3) пропонуємо експерту змінити цю оцінку на інше значення у вказаному діапазоні. Якщо він не хоче, то намагаємося зробити те саме з другою найбільш неузгодженою оцінкою тощо;
4) якщо жодна з оцінок не змінена, рішення відкладається до кращого розуміння проблеми.

Якість оцінок, отриманих від експертів, визначається трьома факторами: точністю, узгодженістю та ефективністю (кількістю отриманої інформації). Оцінки людини в значній мірі чуттєві до великих збурень. Під збуренням мається на увазі чисельне відхилення від відношення узгодженості. Чим більшою є неузгодженість і, значить, більшими є збурення пріоритетів, тим більш чутливою є людина до зміни назначених нею чисельних значень. І, навпаки, чим меншою є неузгодженість, тим важче для людини дізнатися, де саме слід зробити зміни для отримання не тільки найкращої узгодженості, а й найбільш точного результату. При досягненні стану “біля узгодженості”, постаємо перед проблемою: який з елементів має бути збурений на невелику величину, щоб перетворити майже узгоджену матрицю на повністю узгоджену.

В третьому рядку табл. 1.6 наведені різниці між сусідніми значеннями індексу випадкової узгодженості $MRCI$. На рис.1.5 показаний графік цих різниць. Варто звернути увагу на важливість числа сім як відсікаючої точки, після якої різниці стають меншими за 0.1. Після цієї точки мозок людини стає недостатньо чутливим, щоб одночасно проводити точні зміни в оцінках декількох елементів.

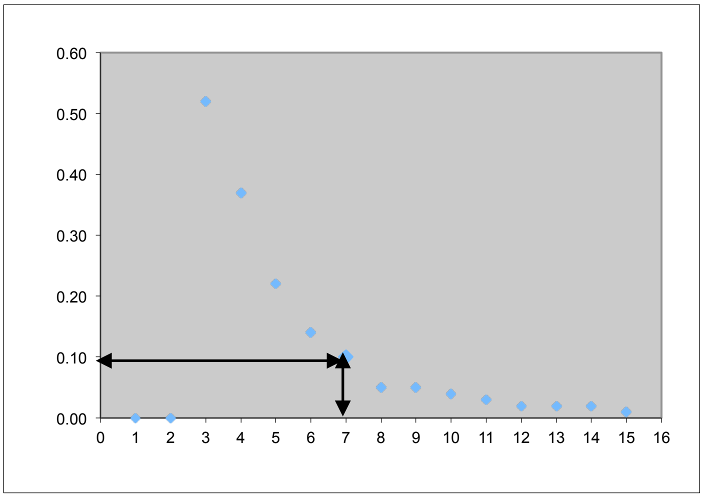


Рис. 1.5. Графік перших різниць індексу випадкової узгодженості $MRCI$

З виразу для розрахунку відношення узгодженості CR випливає, що значення CR залежить від способу обчислення індексу випадкової узгодженості $MRCI$. Значення $MRCI$ були обчислені декількома авторами [1, 10 - 15] і результати виявилися різними (табл. 1.8). Відмінність спричинена використанням різних чисельних методів знаходження найбільшого власного числа МПП і різних множин для випадкового заповнення МПП. Так, Т. Сааті [1] та У. Уппулурі [14] використовували граничний метод розрахунку головного власного вектора, Е. Нобл [12], В. Тумала, Й. Ван [13] – степеневий метод (детальніше про ці методи див. п. 1.3.5). Е. Нобл, В. Тумала та Й. Ван для генерування випадкових МПП використовували множину $\Omega^* = \{1, 2, \ldots, 9, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{9}\}$, всі інші з представлених в табл. 1.8, використовували традиційну множину $\Omega = \{1, 2, \ldots, 9, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{9}\}$.

Таблиця 1.8. Значення $MRCI(n)$ у різних дослідників (n – розмірність МПП) [14]

n	$MRCI(n)$						
	У.Уппулурі	Т.Сааті	Б.Голден, К.Ванг	Е.Лейн, В.Вердіні	Е.Форман	Е.Нобл	В.Тумала, Й.Ван
3	0.382	0.58	0.5799	0.52	0.52333	0.49	0.500
4	0.946	0.9	0.8921	0.87	0.88604	0.82	0.834
5	1.220	1.12	1.1159	1.10	1.10983	1.03	1.046
6	1.032	1.24	1.2358	1.25	1.25390	1.16	1.178
7	1.468	1.32	1.3322	1.34	1.34516	1.25	1.267
8	1.402	1.41	1.3952	1.40	-	1.31	1.326
9	1.350	1.45	1.4537	1.45	-	1.36	1.369
10	1.464	1.49	1.4882	1.49	-	1.39	1.406
11	1.576	1.51	1.5117	-	-	1.42	1.433
12	1.476		1.5356	1.54	-	1.44	1.456
13	1.564		1.5571	-	-	1.46	1.474

В [14] значення $MRCI(n)$ розраховувалися за обома чисельними методами: граничним і степеневим, і використовувалися обидві множини Ω і Ω^*. Використовуючи імітаційне моделювання, встановлено, що граничний та степеневий методи розрахунку головного власного вектора призводять до однакових значень $MRCI(n)$; відмінність у значеннях $MRCI(n)$ для фіксованого n має місце внаслідок використання різних множин для заповнення МПП.

1.3.5. Обчислення локальних пріоритетів

За заповненою експертом МПП об’єктів розраховуються вектори локальних пріоритетів або ваг, що виражають відносну силу, важливість, бажаність, цінність об'єктів відносно елементу вищого рівня ієрархії. Згідно з теорією Т. Сааті, локальні ваги визначаються за *методом* *головного власного вектору*. Згідно з цим методом вектор ваг – це нормалізований власний вектор МПП, що відповідає найбільшому власному числу (див. пп. 1.2.4, 1.2.5).

Існує два чисельних методи знаходження головного власного вектора МПП *A*: так звані граничний і степеневий методи.

Граничний метод

1) задати довільний вектор $x_0 > 0$;
2) розрахувати $A^k x_0,\ k \geq 1$;
3) визначити норму вектора $\|y\| \equiv \sum |y_i|$, тоді $A^k x_0 / \|A^k x_0\|$ збігається до головного власного вектора матриці *A* при $k \to \infty$, а $\|A^k x_0\| / \|A^{k-1} x_0\|$ – до її максимального власного числа.

Степеневий метод

1) задати довільний вектор $x_0 > 0$, $\|x_0\| = 1$;
2) розрахувати послідовність скалярних значень $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ і векторів $x_1, x_2, \ldots$, які задовольняють умовам $\|x_1\| = \|x_2\| = \ldots = 1$ і $Ax_{k-1} = \lambda_k x_k$.

   Ці значення розраховуються за формулами: $x_k = Ax_{k-1} / \|Ax_{k-1}\|$, $\lambda_k = \|Ax_{k-1}\|$. Тоді x_k збігається до головного власного вектора матриці *A* при $k \to \infty$, а λ_k – до її максимального власного числа.

Обидва наведені методи залежать від співвідношення між максимальним і наступним найбільшим власними числами і мають порядок збіжності $O(1/\lambda_{\max}^2)$.

Для прикладу з оцінюванням ІС аутсорсингу ваги критеріїв і альтернатив відносно критеріїв наведені відповідно в табл. 1.9 і 1.10. Експертні оцінки мають припустимий рівень узгодженості і знайдені ваги можуть використовуватися для прийняття рішення (див. значення *CR* в табл. 1.9 і 1.10).

Таблиця 1.9. Ваги критеріїв

Оцінювання ІС аутсорсингу	Вага
Економічний	0.119
Ресурси	0.146
Стратегія	0.333
Ризик	0.190
Управління	0.072
Якість	0.141
$\lambda_{\max} = 6.222, \ CR = 0.035$	

Таблиця 1.10. Ваги альтернатив відносно критеріїв

	Вага					
	Економічний	**Ресурси**	**Стратегія**	**Ризик**	**Управління**	**Якість**
ІС 1	0.067	0.169	0.385	0.376	0.263	0.275
ІС 2	0.164	0.266	0.225	0.215	0.211	0.218
ІС 3	0.302	0.100	0.040	0.074	0.112	0.100
ІС 4	0.151	0.233	0.127	0.215	0.110	0.218
ІС 5	0.315	0.233	0.225	0.121	0.304	0.190
$\lambda_{\max}$	*5.019*	*5.145*	*5.048*	*5.033*	*5.075*	*5.055*
CR	*0.004*	*0.033*	*0.011*	*0.007*	*0.017*	*0.012*

1.3.6. Синтез локальних пріоритетів

Наступний етап МАІ – це синтез локальних пріоритетів і розрахунок так званих глобальних пріоритетів.

Глобальними пріоритетами (вагами) елементів ієрархії називаються ваги відносно вершини ієрархії – головної цілі прийняття рішення.

Існують декілька методів синтезу для знаходження глобальних ваг елементів ієрархії (див. розділ 3). Один з методів – *дистрибутивний* *синтез,* згідно з яким глобальні ваги – це лінійна згортка локальних ваг елементів ієрархії:

$$w_i^{глоб} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C r_{ij}, \quad i = \overline{1,N},$$

де w_j^C – вага j-го критерію, $r_{ij} = a_{ij} / \sum_{k=1}^{N} a_{kj}$ – нормовані значення локальних ваг a_{ij} альтернатив відносно критеріїв, $\sum_{i=1}^{N} r_{ij} = 1 \quad \forall j = \overline{1,M}$, N – кількість альтернатив, M – кількість критеріїв.

Глобальні ваги альтернатив ІС аутсорсингу за методом дистрибутивного синтезу наведені в табл. 1.11. Отже, найбільш пріоритетною за оцінками експерта є передача на аутсорсинг ІС управління. На другому місці – розробка домашньої сторінки в Інтернеті, близько до неї на третьому місці розташована ІС он-лайн обробки транзакцій. ІС управління зв’язками з постачальниками і клієнтами є найменш пріоритетними і займають відповідно четверте і п’яте місця у ранжуванні. Якщо задача ставиться вибрати один найкращий варіант ІС аутсорсингу, то ним є альтернативний варіант з найбільшою глобальною вагою, тобто ІС управління. Якщо необхідно розподілити бюджет на розробку цих п’яти альтернативних ІС, то кошти слід виділяти в процентному співвідношенні за знайденими глобальними вагами.

Таблиця 1.11. Ваги ІС аутсорсингу відносно головної цілі

	Глобальна вага
ІС 1	0.290
ІС 2	0.220
ІС 3	0.100
ІС 4	0.174
ІС 5	0.218

1.4. Класи задач, які розв’язуються із застосуванням МАІ

На сьогоднішній день існують тисячі робіт, присвячених використанню МАІ та його модифікацій для розв’язання практичних задач: в економіці, екології, медицині, у військовій справі та інших сферах господарського життя (див., наприклад, огляди, виконані в [16].

Існують також спроби проведення класифікації областей застосування МАІ [3, 16]. Згідно з однією з класифікацій [3] всі задачі прийняття рішень, які допускають ієрархічне представлення, належать одному з трьох класів задач: прогнозування, вибору або їх поєднання. При цьому, до задач прогнозування відносять задачі визначення найбільш імовірного, «логічного» майбутнього відповідно до переваг ОПР та/чи експертів. Задачі вибору – це задачі знаходження перспективних політик для визначення бажаного майбутнього, в яких ОПР та/чи експерти задають пріоритети елементів, які є, чи повинні бути важливими для здійснення найкращого вибору з метою досягнення бажаного майбутнього.

В іншій класифікації [16] крім описаних вище класів задач окремо розглядається використання МАІ для розв’язання задач оцінювання; розподілу ресурсів та аналізу співвідношення доходи-витрати. Також відокремлюється застосування МАІ в медицині і споріднених областях, а також поєднання МАІ з розгортанням функції якості (QFD). Окрема область – застосування МАІ при проведенні так званого «бенчмаркінгу» (benchmarking), під яким розуміється порівняння ключових бізнес-процесів в різних компаніях чи організаціях з метою отримання чи збереження конкурентної переваги.

На наш погляд області застосування МАІ доцільно класифікувати наступним чином:

1) вибір;
2) оцінювання;
3) розподіл ресурсів;

4) аналіз співвідношення доходи/витрати;
5) прогнозування, планування та розвиток.

Детальніше розглянемо приклади практичного використання МАІ при розв'язанні задач кожного класу.

Задачі вибору полягають у визначенні однієї альтернативи із множини варіантів. При розв'язанні цих задач ієрархія зазвичай складається з трьох-чотирьох рівнів і містить критерії, підкритерії і альтернативи рішень. Ваги найчастіше розраховуються з використанням СППР Expert Choice [17].

В задачі вибору капітального обладнання в галузі охорони здоров'я [18] для побудови ієрархії знадобилося три ітерації. Ієрархія складалася з трьох рівнів: критерії (безпека, клінічні фактори, біомедична інженерія, витрати), їх підкритерії та альтернативні варіанти рішень. Ваги розраховувалися за методом головного власного вектору (ЕМ) в СППР Expert Choice. Для досягнення узгодженості експертних оцінок знадобилося три ітерації. Підвищення узгодженості здійснювалося за допомогою традиційного зворотнього зв'язку при якому відібрані оцінки парних порівнянь поверталися експерту для перегляду. Аналіз чутливості результатів здійснювався засобами СППР Expert Choice.

Ієрархія задачі вибору веб-сайтів [19] складалася з трьох рівнів: критерії якості сайту, їх підкритерії та альтернативи. Критеріями якості сайту були інформаційна якість, якість обслуговування, якість систем та якість, яка залежить від постачальника. До побудови опитувальників було залучено одиннадцять експертів, знадобилося декілька ітерацій для узгодження форми і змісту опитувальника. Ваги розраховувалися в СППР Expert Choice методом ЕМ.

Вибір методів діагностування здійснювався за критеріями: якість діагностування, кількість помилок, витрати, прийнятність методу, ступінь інтегрованості методу [20]. Для відбору альтернатив методів діагностування залучено факторний аналіз. Розрахунок ваг і аналіз чутливості розв'язку були проведені в СППР Expert Choice.

Вибір мультимедійних інформаційних систем [21] відбувався за двома групами критеріїв: технічні можливості (інтерфейс, підтримка графіки, мультимедіа та файлів даних) та критерії задоволення очікувань керівництва (ефективність витрат і підтримка постачальників). Було організовано дві зустрічі з експертами. Перша була присвячена ознайомленню з методологією МАІ та правилами побудови ієрархії. На другій було переглянуто ієрархію та здійснено саме оцінювання. Груповий вибір здійснювався із використанням методу геометричної середньої.

Наступну задачу вибору оптимальних моделей альянсів між банками і страховими компаніями [22] було розв'язано в два етапи. Спочатку було визначено дев'ять критеріїв: розробка продукції, логіка прибутку, управління зв'язками з клієнтом, співвідношення доходи-витрати, джерела конфліктів, необхідний кредитний капітал, інвестиційні можливості, управління продажами. Потім було виключено три критерії з найменшими вагами і добавлено наступні три критерії: економії, які обґрунтовані зростаннями масштабів виробництва і портфеля послуг та ризик. До оцінювання було залучено панель експертів – представників топ-менеджменту банків і страхових компаній. Оцінювання проводилося згідно з консенсусним принципом – інтенсивність того чи іншого парного порівняння визначалася в результаті обговорюваннями всіма учасниками панелі. В результаті кожній альтернативі ставиться у відповідність два числа: вага цієї альтернативи за фінансовими критеріями і вага за критерієм «ризик». Остаточне рішення покладається на ОПР, відповідно до встановлених ним ваг цих двох критеріїв.

В задачі виборі постачальника системи телекомунікацій [23] розглядалися такі критерії як капітальні та операційні витрати, технічна, операційна якість і якість постачальника. Наступні рівні ієрархії формували підкритерії вказаних критеріїв. Двадцяти працівникам телекомунікаційної компанії були розіслані опитувальні форми із запитом визначити важливість критеріїв, що впливають на вибір систем телекомунікацій та їх постачальників. В результаті було відібрано найважливіші критерії, які і сформували ієрархію проблеми. Оцінювання елементів ієрархії проводилося за участю п’яти експертів. Методом отримання групового рішення було вибрано AIJ. Кожній альтернативі ставилася у відповідність позначка п’яти-точкової шкали {«дуже добре», «добре», «посередньо», «погано», «дуже погано»} з метою полегшення процедури оцінювання у випадку великої кількості альтернатив. Ваги розраховувалися методом головного власного вектору.

В задачах оцінювання розраховуються відносні ваги (пріоритети) кожної альтернативи. На відміну від задач вибору, в яких визначається одна найкраща альтернатива, в результаті розв’язання задач оцінювання визначаються ще порядок, інтервали і відношення між альтернативами. Знайдені пріоритети можуть також використовуватися в задачах розподілу ресурсів, які розглядаються як один з різновидів задач оцінювання, що доцільно виділити в окремий клас задач.

Для оцінювання інтелектуальних активів фірми [24] використовувався інтегрований метод МАІ з теорією збалансованої системи показників (balance score card). Було побудовано дві ієрархії. Одна містила критерії унікальності компанії на ринку, друга – критерії колективності компанії.. Ваги розраховувалися в СППР Expert Choice за методом головного власного вектору.

При оцінюванні змін в правилах гри в футбол [25] розглядалася мережева модель, яка включала сегменти ринку, інтереси спортивних ентузіастів, футбольні події та правила гри та різноманітні зв’язки між ними. Метод аналізу мереж був поєднаний з методом розгортання функції якості (quality function deployment).

Інша задача полягала в оцінюванні журналів [26]. Рейтинг журналу визначався за такими критеріями як ефективність, фокус, вплив, масштаб та вибірковість. При оцінюванні використовувалися опитувальники та індекси цитованості журналів. Ваги розраховувалися в СППР Expert Choice за методом головного власного вектору.

СППР для групового прийняття рішень щодо оцінювання місій ті цілей НАСА та інвестування в космічну галузь розроблено в [27]. Для оцінювання використовувалися критерії, пов’язані з місією, готовністю, ексклюзивністю, потребою у майбутньому та розвитком прогресивних технологій. Групове оцінювання етапів місій для дослідження Марса з використанням МАІ виконано в [28].

Оцінювання вступу Китаю до ВТО проведено в [6]. Альтернативними варіантами для Китаю були: отримати статус постійного розміру торгових відношень з США; поточний статус нормальних торгових відношень з США з деякими доповненнями; залишити той самий статус, який був у попередньому році. Ці варіанти оцінювалися за цілями акторів та факторами доходів, витрат, можливостей та ризиків для США залежно від надання Китаю того чи іншого статусу. Оскільки між альтернативами, цілями і факторами існують складні взаємозв’язки, для розрахунку ваг використовувався метод аналізу мереж.

При оцінюванні бізнес-договорів [29] розглядалися три групи критеріїв: очікування, до яких відносилися заощадження витрат, гнучкість та фокус на основній діяльності; ризик і оточуюче середовище. Розрахунок ваг здійснювався в СППР Expert Choice методом головного власного вектору.

Оцінювання організаційного капіталу як складової інтелектуального капіталу компанії здійснювалося за критеріями: запровадження стратегічних цінностей, інвестиції в технології та гнучкість організаційної структури [30]. Кожен з критеріїв розбивався на підкритерії. Зокрема, критерій «інвестиції в технології» включав: надійність, легкість у використанні, релевантність; а критерій «гнучкість організаційної структури» - підтримка розвитку та інновації. Альтернативами були десять індикаторів організаційного капіталу. Експертні оцінки альтернатив за критеріями мали форму трикутних нечітких чисел. Для розрахунку ваг використовувався нечіткий МАІ.

Різновидом задач оцінювання є задачі *розподілу ресурсів*. Розглянемо декілька прикладів використання методу аналізу ієрархій при розв'язанні задач цього класу. Пріоритети освітніх інноваційних проектів оцінювалися за наступними критеріями [31]: цілі (обгрунтованість, адаптація, тривалість, план), потреба (зацікавленість, потреба), економіка (регулювання, ресурси щодо відношень, студенти, прибутковість), масштаб (кількість предметів, студентів, лекторів, синергія, сфера професійних інтересів) та інновації. До оцінювання проектів залучалася група експертів. Розрахунку робилися двома способами: за МАІ і за методом комісій, в останньому групове рішення знаходиться голосуванням. Отримання оцінок було організовано з використанням методу Делфі по електронній пошті. Експертам надали перелік критеріїв, вони провели оцінювання. Потім експертів знайомлять із груповою оцінкою (зворотній зв'язок)і в разі необхідності проводять повторне оцінювання.

При оцінюванні інвестиційних проектів використано два класи критеріїв: прямі доходи (чиста приведена вартість, норма прибутку всередині країни, інвестиційна норма прибутку, період відновлення, загальна сума інвестицій та інші) та потенціал для реалізації майбутнього доходу [32].

В іншій задачі з оцінювання альтернатив інвестицій в ієрархію було включено рівень сценаріїв станів економіки країни [3]. Для знаходження відносних ймовірностей виникнення цих сценаріїв будувалася окрема ієрархія. Розрахунок ваг здійснювався в СППР Expert Choice методом головного власного вектору.

Мережа задачі розміщення стратегічного обладнання включала такі зовнішні та внутрішні фактори, як сегменти ринку, споживачі, їх потреби, конкуренти, характеристики розміщень та критичні процеси на підприємстві-виробнику [33]. Для визначення взаємозалежностей між цими факторами та власне самими розміщеннями використовувався метод будинків розгортання функції якості (QFD). Метод аналізу мереж використовувався як допоміжний інструмент для QFD.

Метод аналізу мереж як узагальнення методу аналізу ієрархій використовувався також в задачі оцінювання долі ринку компанії [6]. Мережа включала кластери альтернатив – конкурентів, споживачів, обслуговуючого персоналу, економічних критеріїв, критеріїв, пов’язаних з рекламою та якістю товарів.

Задачі *аналізу співвідношення доходи/витрати* зазвичай формулюються у вигляді задач математичного програмування, в яких найчастіше максимізуються доходи при обмеженнях на припустимі витрати, або мінімізуються витрати при пороговому обмеженні на рівень доходів. В цих задачах МАІ використовується для визначення коефіцієнтів цільової функції чи функцій-обмежень. Так, в задачі оцінювання успішності військово-морського флоту США побудовано модель цілочисельного програмування для отримання розподілу ефективності флоту з певним поєднанням кораблів [34].

В задачі вибору постачальників нечіткий МАІ використано для розрахунку відносних ваг постачальників [35]. Потім була побудована задача математичного програмування, розраховані оптимальна кількість постачальників і розмір замовлення у кожного з них.

Оцінювання та оптимізація якості веб-послуг проведено в [36]. В цій задачі за допомогою МАІ розраховувалися відносні ваги індексів якості послуг та ваги веб-сервісів за цими індексами. Для оптимізації загального рівня якості надання сервісів при заданому бюджетному обмеженні будувалася задача математичного програмування, в якій коефіцієнтами цільової функції були ваги сервісів, отримані за допомогою МАІ на базі оцінок користувачів.

При оцінюванні технічних умов розробки продукції [37] МАІ, метод аналізу мереж, а також їх нечіткі модифікації були використані для визначення ступенів взаємозалежності між потребами споживачів і технічними умовами виробництва продукції. Далі будувалася модель цілочисельного лінійного програмування, в якій коефіцієнти цільової функції були попередньо розраховані за методом аналізу мереж.

В контексті розв’язання *задач прогнозування* МАІ застосовується в двох напрямах. Перший напрямок – це використання МАІ для об’єднання результатів прогнозів за декількома методами для отримання єдиного, комплексного прогнозу, а також для вибору методу прогнозування. Другий напрям застосування МАІ в задачах прогнозування – це прогнозування альтернативних наслідків і отримання ймовірностей сценаріїв.

Об’єднання результатів прогнозів за декількома методами для отримання єдиного, комплексного прогнозу виконано в [3]. Критеріями оцінювання прогнозів були: середня відносна помилка (MAPE), відхилення, які спостерігалися з року в рік, необхідна початкова інформація, здатність методу прогнозувати поворотні точки та час, необхідний для застосування методу. Досліджувалися наступні методи прогнозування: регресійного аналізу, групові експертні, аналізу намірів споживачів та стимулювання продаж. Ваги методів прогнозування розраховувалися в СППР Expert Choice методом головного власного вектору.

Вибір методу прогнозування, в області технологій розвитку нових матеріалів здійснювався за критеріями наявності даних, обґрунтованості даних, передбачуваності технологічного розвитку, подібності технологій, адаптаційних можливостей методу, легкості у застосуванні та витрат на застосування [38]. Розраховувалися ваги наступних методів: Делфі, кривих росту, case-методів, дерев важливості та методу написання сценаріїв. Оцінки цих альтернатив за критеріями формувалися як нечіткі трикутні числа. До оцінювання було залучено групу однаково компетентних експертів.

Прогнозування вигід від використання в найближчі 15–20 років технологій транспортування на водневому паливі здійснювалося МАІ в поєднанні з методами сценарного аналізу [39]. Аналізувалися три сценарії розвитку технологій, названі «ринкові умови», «економіка» та «оточуюче середовище». За кожним сценарієм розглядалися альтернативні технології транспортування, такі як водень, метанол, бензин, природний газ та інші. Ці альтернативи оцінювалися за такими групами факторів: виробництво і розподіл палива, експлуатація транспорту, оточуюче середовище, ресурси, економіка.

Прогнозування наслідків розміщення національної системи протиракетної оборони (ПРО) США [7] здійснювалося методом BOCR МАІ (детальніше див. п. 6.1) з урахуванням доходів, витрат, можливостей і ризиків альтернатив розміщення. Альтернативами були: розміщувати систему ПРО, глобальний захист, завершити програму ПРО. Розглядалися наступні фактори доходів: економічні, політичні, безпеки, технологічні. Фактори ризиків: технічні невдачі, гонка озброєнь, зростання тероризму, оточуюче середовище, репутація США. Актори: президент/ військові, тех. експерти, конгрес, оборонна промисловість, зарубіжні країни.

МАІ був використаний для прогнозування цін акцій та опціонів [3], де альтернативами розглядалися величини зростання та спадання цін акцій/

опціонів у процентах. Ваги цих альтернатив інтерпретувалися як значення щільності розподілу у відповідних точках.

Окремим видом задач прогнозування, для розв'язання яких можна застосовувати МАІ, є *аналітичне планування*. Це ітераційний процес послідовного прогнозування і вибору (див. детальніше п. 7.1).

Аналітичне планування застосовувалося для прогнозування перспектив використання синтетичного палива для транспорту [2]. Ієрархію утворювали актори, їх цілі і політики та сценарії на останньому рівні. Актори: уряд, енергетичні компанії, споживачі, ОПЕК. Сценарії: ініціатива уряду, коаліція промисловості та уряду, примусове змішування, розробка аварійних заходів і статус-кво.

Аналітичне планування було також використано при плануванні дій виробника споживчої продукції (далі – компанія) [2]. Акторами були компанія, торговці і конкуренти. Інші рівні ієрархії утворювали цілі і політики акторів. Розраховувалися ваги наступних політик акторів: підвищити взаємозв'язки з торговцями, завершити випуск деяких видів продукції, пропонувати стимули торговцям в формі премій та раціоналізувати процедуру розрахунків.

Проведений аналіз застосувань МАІ свідчить про те, що, МАІ та його модифікації були використані до розв'язання багатьох *стратегічних проблем*, таких як оцінювання перспектив використання синтетичного палива для транспортування [2] і прогнозування вигід від використання в найближчі 15–20 років технологій транспортування на водневому паливі [39], прогнозування наслідків розміщення національної системи протиракетної оборони США [7], оцінювання успішності військово-морського флоту США [34], оцінювання наслідків для США вступу Китаю до ВТО [6], оцінювання місій ті цілей НАСА [27], зокрема, для дослідження Марсу [28], оцінювання долі ринку компанії [6], оцінювання освітніх інноваційних проектів [31], оцінювання інтелектуальних активів фірми [24], оцінювання організаційного капіталу [30], вибір оптимальних моделей альянсів між банками і страховими компаніями [22] та ін.

Розглянемо переваги МАІ в порівнянні з іншими відомими методами багатокритеріального експертного оцінювання.

1.5. Порівняння МАІ з іншими методами багатокритеріального експертного оцінювання

На сьогоднішній день існує декілька експертних методів розв'язання задач багатокритеріального прийняття рішень. Одним з підходів до представлення і обробки експертних оцінок є теорія вимірювання в поєднанні з класичною теорією ймовірностей для отримання статистичних висновків [40, 41]. Так, статистична обробка даних експертного опитування використовується в широковідомому методі Делфі [41, 42]. Результати порівняння методу Делфі з МАІ, яке було проведене учасниками процесу прийняття рішення, виявили, що МАІ є більш прийнятним в порівнянні з Делфі. Виявилося, що МАІ має перевагу над Делфі з точки зору використання інформації, встановлення цілі, прояснення проблеми, повноти задачі, задоволення процесом прийняття рішення і результатом [43]. Метод Делфі здебільшого використовується для отримання концептуальної експертної інформації, тобто інформації щодо формулювання альтернативних варіантів рішень, критеріїв, цілей та інших факторів, що впливають на оцінювання альтернатив. МАІ, в свою чергу, призначений для отримання відносних оцінок: відносних важливостей (ваг, пріоритетів) критеріїв, цілей, альтернативних варіантів рішень, ймовірностей сценаріїв розвитку тощо. Однак, цінність МАІ з точки зору мінімальності витрат є доволі низькою, оскільки МАІ вважається часовитратним процесом і потребує значної кількості експертних оцінок.

Методи багатокритеріального експертного оцінювання можна класифікувати у відповідності із задачами, які потребують розв’язання: методи теорії корисності [44–46], методи ранжування (ЗАПРОС [47], ELECTRE [48, 49], PROMETHEE [48–50] та ін.).

Сутність методів, заснованих на використанні функції корисності, полягає в отриманні «системи цінностей» особи, що приймає рішення (ОПР). На базі цієї системи переваг будується функція цінності, значення якої використовуються для прийняття рішення. Найчастіше застосовують функцію лінійної згортки, при цьому вибір цієї функції в багатьох випадках здійснюється необґрунтовано. Методи теорії корисності дозволяють розв’язувати задачі вибору «найкращого» альтернативного варіанту, ранжування альтернатив та знаходження ваг (пріоритетів, імовірностей, корисностей) альтернатив. До цього класу методів також відносить і МАІ [48, 51], однак щодо цього питання існують суперечливі погляди [1–3].

Результатами роботи методів ранжування є лише впорядкування множин альтернативних варіантів рішень (ординальні оцінки). Ці методи, на відміну від МАІ, не дозволяють в кількісній формі визначити відносну значимість факторів і альтернатив. Одним з методів ранжування є ЗАПРОС (ЗАмкнуті ПРоцедури навколо Опорних Ситуацій) [47]. Він базується на ідеї недопустимості застосування числових значень при вираженні оцінок за якісними критеріями. Під опорними ситуаціями розуміються кортежі, які мають найгірші та найкращі значення оцінок за всіма критеріями. Від ОПР вимагається порівняти пари кортежів навколо опорних ситуацій, що дозволяє побудувати єдину шкалу за всіма критеріями. Після цього здійснюється впорядкування в рамках цієї шкали множини кортежів оцінок за досліджуваними критеріями.

Методи ELECTRE і PROMETHEE представляють «Європейську школу» багатокритеріальних методів прийняття рішень на базі експертної інформації. На сьогоднішній день існує ряд модифікацій методів, зокрема ELECTRE II, ELECTRE III і PROMETHEE II. В цих методах для опису переваг ОПР використовується функція переваг і ОПР для кожного критерію визначає деякі параметри (наприклад, пороги) цієї функції. Для отримання результуючого ранжування альтернативних варіантів використовуються індекси згоди і незгоди (у випадку ELECTRE) або «додатній» та «від'ємний» потоки (у випадку PROMETHEE). Причому розрахунок вказаних індексів і потоків базується на заданих експертами бальних чи рангових оцінках альтернатив відносно критеріїв, тобто, потребується виконання безпосереднього оцінювання. Загальновідомо, що цей спосіб отримання інформації від експертів може призвести до помилок на відміну від методу парних порівнянь МАІ, який дозволяє виявити переваги експертів «в чистому вигляді» [1–3, 40]. Вважається, що якісне порівняння двох об'єктів зробити набагато легше, ніж виражати свої переваги в бальній чи ранговій шкалі; цей метод оцінки не нав'язує експерту апріорних умов, також парні порівняння, на відміну від інших видів оцінок, не передбачають попередньої транзитивності переваг.

Методи і системи підтримки прийняття групових рішень при ієрархічному багатоцільовому оцінюванні альтернативних варіантів з використанням експертних оцінок розроблені В.Г. Тоценко [51, 52]. В цих роботах запропоновано: методи «лінія», «трикутник», «квадрат» при розгляді різних видів залежності відносних пріоритетів від ступенів переваг; індивідуальні та групові методи експертного оцінювання зі зворотнім зв'язком з експертами; методи оцінювання компетентності експертів.

Результати порівняння методів адитивного, мультиплікативного зважування, МАІ, ELECTRE, TOPSIS наведені в [51]. Порівняння методів здійснювалося шляхом моделювання. Встановлено, що кількість критеріїв мало впливає на результати застосування методів мультиплікативного зважування, МАІ та ELECTRE. Відмінності між ранжуваннями, отриманими методами адитивного зважування і TOPSIS, збільшуються із зростанням числа альтернатив, однак при цьому зменшується кількість змін рангів. При використанні методу ELECTRE збільшення кількості критеріїв призводить до зростання числа змін рангів [51]. В [48] результати роботи методів ELECTRE і PROMETHEE на базі case-дослідження порівнюються з МАІ. Методи ELECTRE і PROMETHEE рекомендується застосовувати у випадку великої кількості критеріїв і альтернатив рішення, перевагою цих методів вважається зручність при роботі з порядковою і описовою інформацією, а недоліком – складність при інтерпретації результатів [48].

Говорячи про порівняння методів багатокритеріального оцінювання, зазначимо, що різні групи методів представляють різні підходи до розв’язання задачі прийняття рішень і вибір того чи іншого методу визначається конкретною задачею та наявними ресурсами. Достовірність отриманого розв’язку може бути оцінена шляхом використання декількох методів і співставлення отриманих результатів, а також в результаті застосування спеціально розроблених методів і прийомів.

Існує ряд робіт, присвячених поєднанню МАІ з іншими методами і теоріями. Зокрема, МАІ розглядається допоміжним інструментом при розв’язанні задач математичного [3, 27, 28, 34–37] і цілочисельного [3, 34, 37] програмування. Зв’язок МАІ з теорією масового обслуговування досліджується в [3], а з моделями компромісного програмування (compromise programming) – в [53]. Удосконалення методу PROMETHEE за допомогою елементів МАІ пропонуються в [50, 54].

1.6. Місце МАІ в методології сценарного аналізу розв'язання задач передбачення

Процес прийняття рішень відносно складних систем з людським фактором щодо їх можливої поведінки в майбутньому отримало назву *передбачення* [55–58]. Потреба в передбаченні викликана зростанням актуальності задачі представлення майбутнього, яке не може інтерпретуватися як звичайне продовження минулого, оскільки це майбутнє може приймати принципово відмінні форми і структури в порівнянні з тим, що відомо в минулому.

За даними Організації Об'єднаних Націй з технологічного розвитку (ЮНІДО) програми з передбачення існують в багатьох країнах світу, Україна теж створює власну програму з передбачення. Потреба в ньому зумовлена новими особливостями сучасної ринкової економіки, а саме: зростаючими масштабами світової економічної глобалізації з одночасним обмеженням національних ресурсів і бюджетів багатьох країн світу; новими запитами суспільства і потребами приватного сектора економіки за умов швидких технологічних змін, збільшення економічних невизначеностей і ризиків та необхідності в оптимальному використанні наявних фінансових ресурсів.

Для розв'язання задач передбачення можуть використовуватися різні методи, деякі з них розроблено спеціально для аналізу майбутнього, а інші запозичені з областей управління і планування [59–63]. Зокрема, виділяють дослідницькі (дескриптивні) методи, які базуються на екстраполяції минулих трендів чи причинній динаміці (наприклад, аналіз трендів, аналіз перехресних впливів, Делфі та ін.), та нормативні методи, які базуються на попередньому розгляді бажаного сценарію майбутнього розвитку (наприклад, дерева важливості, морфологічний аналіз, різні варіанти методу сценаріїв тощо).

Інша класифікація – розмежування кількісних методів, які базуються на кількісній вхідній інформації, та якісних методів, які дозволяють отримувати висновки на базі суб’єктивних оцінок експертів. В контексті розв’язання задач передбачення до кількісних відносять методи моделей Байєса, аналізу трендів та імітаційне моделювання. До якісних, в свою чергу, відносяться методи мозкового штурму, SWOT і STEEPV аналізу, сканування, експертних панелей, МАІ, Делфі, морфологічного аналізу, технологічного «дороговказівника» (roadmapping), критичних технологій, перехресних впливів, сценаріїв, методи mind mapping, рольові ігри, дерева важливості, робочі групи тощо.

Задачі передбачення є інноваційними і тому принципово неформалізованими, оскільки містять принципово неформалізовані процедури, такі як вибір критеріїв, вибір умов раціонального компромісу тощо [55, 57]. При розв’язанні таких задач, які потребують прийняття рішень в умовах концептуальної невизначеності [64], часто єдино можливим до застосування є метод експертних оцінок. Це є наслідком того факту, що у проблемах подолання нестачі чи принципової неможливості отримання необхідних статистичних даних для розв’язання поставлених задач єдиним джерелом інформації може виявитися досвід і знання людей, експертів в області, що розглядається. Зокрема, існує поняття «суб’єктивних ймовірностей», які мають природу, відмінну від статистичної і визначаються компетентними особами за допомогою спеціально організованих експертних процедур.

На сьогоднішній день не існує універсальних і всеосяжних підходів і методів побудови і оцінювання сценаріїв майбутнього для складних систем з людським фактором. Для розв’язання таких проблем використаються як якісні, так і кількісні за своєю природою методи в складній людино-машинній процедурі. При цьому часто не враховуються переваги й недоліки кожного із застосовуваних методів, особливості досліджуваної системи, топологія взаємних зв'язків між її внутрішніми елементами, характер циркулюючої в системі інформації (кількісного або якісної), протиріччя між критеріями й цілями, на множині яких вирішується задача, рівні невизначеності інформації й інші аспекти. Задачі подібного типу необхідно вирішувати на основі методології системного аналізу, що дозволяє враховувати всю сукупність необхідних властивостей і характеристик досліджуваних об'єктів [55, 57, 58].

Побудова і оцінювання сценаріїв може бути забезпечена за допомогою універсальної сукупності засобів і підходів, яка названа *методологією сценарного аналізу,* що є комплексом математичних, програмних, логічних й організаційних засобів й інструментів для визначення послідовності застосування окремих методів, взаємозв'язків між ними й, у цілому, формування самого процесу передбачення [55–58].

В методології сценарного аналізу відібрано й адаптовано вісім методів якісного й кількісного аналізу. Ці методи використовуються на таких чотирьох етапах передбачення [58]: 1) попереднє вивчення проблеми; 2) якісний аналіз проблеми; 3) написання сценаріїв; 4) аналіз і відбір сценаріїв.

На етапі *попереднього вивчення проблеми* використовуються методи сканування і мозкового штурму (рис. 1.6). Відібрані та задокументовані на цьому етапі ідеї і підходи до вирішення проблеми використовують для підготовки рішень на наступних етапах передбачення.

У результаті виконання *якісного аналізу проблеми* будуються і оцінюються альтернативи (попередні сценарії), які мають стати каркасом для узагальнених сценаріїв, що розробляються. На цьому етапі використовуються такі методи як Делфі, перехресного впливу, морфологічного аналізу та МАІ (рис. 1.7).

Рис. 1.6. Перший етап передбачення – Попереднє вивчення проблеми

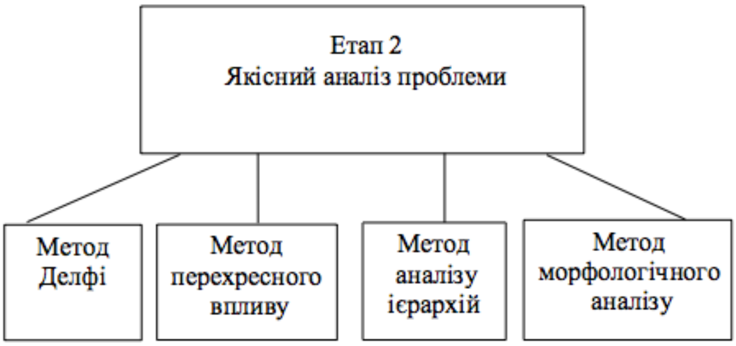


Рис. 1.7. Другий етап передбачення – Якісний аналіз проблеми

МАІ і його узагальнення – метод аналізу мереж займають важливе місце в методології сценарного аналізу розв’язання задач передбачення. Основними перевагами МАІ перед іншими експертними методами вважається можливість структуризації складної проблеми у вигляді ієрархії, можливість об’єднання в єдиній структурі прийняття рішень кількісної і якісної (експертної) вхідної інформації, і процедура отримання експертних оцінок методом парних порівнянь, яка дозволяє оптимальним чином врахувати психофізіологічні особливості людини (див. п. 1.5).

Розглянемо вхідні дані для МАІ при розв'язанні задач передбачення (рис. 1.8). Оскільки МАІ дуже гнучкий метод і може використовуватися для розв'язання різноманітних задач в процесі побудови і оцінювання сценаріїв, то реалізація МАІ і вигляд ієрархії проблеми залежать від поставленої задачі і предметної області. Тому деякі з перерахованих нижче факторів можуть бути відсутніми при розв'язанні конкретної задачі.

В МАІ попередні сценарії та альтернативи рішень можуть оцінюватися за різноманітними критеріями, які формують окремі рівні ієрархії проблеми: економічними, соціальними, екологічними, технологічними, інформаційними, політичними тощо. Метод BOCR МАІ полягає в оцінюванні сценаріїв (альтернатив) за факторами доходів, витрат, можливостей і ризиків (детальніше див. п. 6.1).

Цілі і політики осіб, зацікавлених у прийнятті того чи іншого рішення стосовно досліджуваної системи, також можуть враховуватися при розв'язанні задачі за допомогою МАІ. Вони формують окремі рівні ієрархії і оцінюються за методом парних порівнянь так само як і критерії.

Якщо задача полягає в знаходженні ймовірностей появи певних сценаріїв, то зазвичай ці сценарії (попередні чи узагальнені) формують останній рівень ієрархії. На її вищих рівнях в цьому випадку знаходяться критерії, цілі і політики акторів. Якщо ж задача полягає у виборі дій для досягнення бажаного сценарію, то ієрархія будується по-іншому і на її останньому рівні знаходяться політики акторів (детальніше див. п. 7.1). Сценарії і фактори, що впливають на їх реалізацію, формуються експертом за результатами проведених методів сканування, мозкового штурму, морфологічного аналізу, STEEP або ж є результатами попередніх використань МАІ (у випадку оцінювання узагальнених сценаріїв).

Взаємозв'язки між сценаріями і факторами сценаріїв можуть задаватися безпосередньо експертом, або опосередковано шляхом побудови матриць впливів.

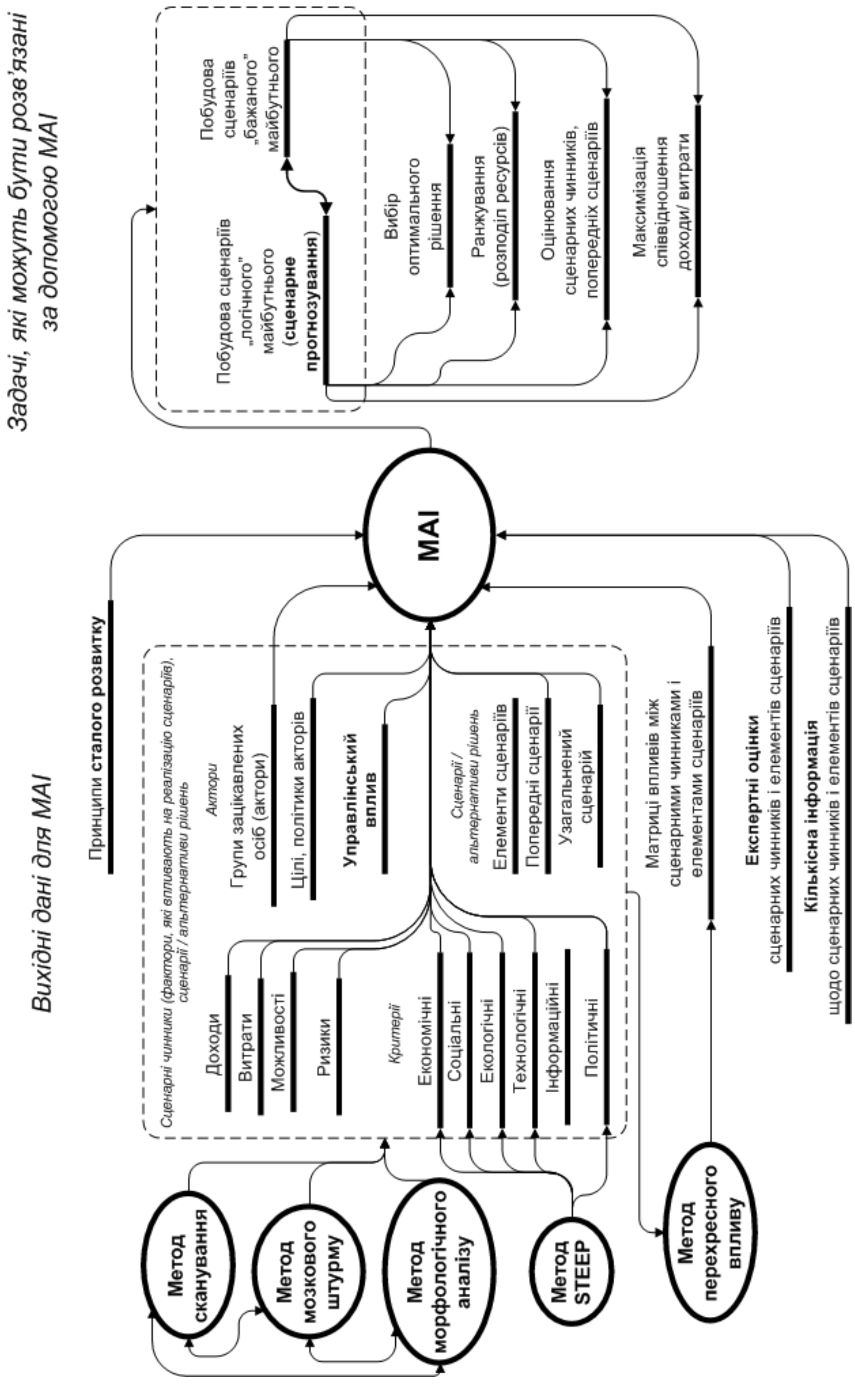


Рис. 1.8. Вхідні і вихідні дані для МАІ

Коли ці взаємозв’язки встановлені, будується ієрархічна чи мережева структури проблеми і застосовується теорія МАІ чи методу аналізу мереж.

Для знаходження ваг, пріоритетів та ймовірностей елементів ієрархії за допомогою МАІ потрібно, щоб експерт вербально попарно порівняв елементи ієрархії. Власне, парне порівняння у вербальній шкалі необхідне при оцінці альтернатив рішень відносно факторів, які мають якісний характер (комфорт, якість тощо). Якщо ж в ієрархії присутні кількісні фактори (ціна, швидкість тощо), то парні порівняння альтернатив за цими факторами зводяться до розрахунку відношень між відповідними числовими значеннями.

Управлінський вплив може включатися до МАІ у вигляді: зміненої експертної оцінки відносно пари елементів ієрархічної структури факторів; зміненої ваги елемента ієрархічної структури факторів; добавлення/вилучення елемента ієрархії факторів, добавлення/ вилучення сценарію.

В результаті управлінського впливу перераховуються імовірності попередніх сценаріїв та ваги факторів та визначаються так звані критичні і стійкі елементи ієрархії (детальніше див. розділ 5, присвячений комплексному оцінюванню чутливості в МАІ).

У результаті виконання етапу якісного аналізу будують і оцінюють попередні сценарії, які використовують на наступному етапі написання узагальнених сценаріїв, аналізі та оцінюванні їх реалістичності з метою підготовки остаточних рішень.

Третій етап є інтегральним у комплексі робіт з передбачення в тому розумінні, що експертом (чи аналітиком) будуються узагальнені сценарії, які об’єднують якісні оцінки та попередні сценарії, побудовані за допомогою методів якісного аналізу.

Аналіз узагальнених сценаріїв здійснюється експертами чи суб'єктом сценарію (особа, організація, країна) за *методом Лоуверіджа,* і з використанням МАІ:

- за результатами МАІ на другому етапі відбираються попередні сценарії з найбільшими ймовірностями виконання, деякі з попередніх сценаріїв можуть об'єднуватися і формуються узагальнені сценарії;
- експертом визначаються стратегічні фактори, за якими будуть оцінюватися узагальнені сценарії;
- використовується теорія МАІ для оцінювання узагальнених сценаріїв.

На *четвертому етапі* здійснюється оцінювання реалістичності розроблюваних сценаріїв за методом Байєса.

На сьогоднішній день існує велика кількість робіт, присвячених дослідженню різних властивостей МАІ, розробці модифікацій для подолання тих чи інших недоліків МАІ. При цьому, щодо однієї і тієї ж властивості цього методу в літературі існують різні, часто протилежні, точки зору, що значно ускладнює порівняння існуючих модифікацій МАІ.

Так, дискусійним питанням є явище реверсу рангів, під яким розуміється зміна порядку ранжування альтернативних варіантів рішень при додаванні нової альтернативи чи вилученні альтернативи з розгляду. В літературних джерелах спостерігаються протилежні погляди щодо можливості існування реверсу рангів в методах підтримки прийняття рішень та припустимості реверсу рангів для конкретних практичних задач; з метою виключення цього явища розробляються різні модифікації МАІ.

Також різні автори пропонують різні методи оцінювання узгодженості експертної інформації в МАІ, часто пов'язуючи питання оцінювання узгодженості із знаходженням ваг з побудованих за оцінками експертів матриць парних порівнянь (МПП). Різні методи знаходження ваг в загальному випадку призводять до різних результатів, і лише у випадку узгодженої МПП існує вектор ваг, який відповідає всій множині оцінок експертів.

Однак, можна виділити «загальноприйнятні» недоліки МАІ, до яких насамперед відноситься відсутність в цих методах засобів обробки неточних (нечітких) експертних оцінок. У зв'язку з цим, в останній час для розв'язання практичних задач все більше розробляються нечіткі МАІ, які є модифікаціями МАІ при іншому варіанті формування експертних оцінок. Що стосується задач технологічного передбачення, які характеризуються присутністю концептуальної невизначеності, то використання для їх розв'язання методів, які дозволяють обробляти лише точкові експертні оцінки, в більшості випадків, взагалі, є неприйнятним.

Існують прихильники як стохастичних МАІ, які обґрунтовують різні закони розподілу оцінок експертів, так і нечітких МАІ, в яких експертна оцінка ступеня переваги одного елементу ієрархії над іншим формується у вигляді інтервалу. У розробників нечітких МАІ, в свою чергу, спостерігаються протилежні погляди з приводу того, мають бути результуючі ваги чіткими чи нечіткими тощо.

Така суперечливість представлених в літературних джерелах методів і прийомів, пов'язаних з різними аспектами роботи МАІ, призводить до необхідності пошуку нових засобів оцінювання існуючих модифікацій МАІ та результатів їх роботи. Проблема полягає в тому, що при заданій початковій інформації, представленій експертними оцінками порівнянь на множинах факторів і альтернатив рішення, застосування різних модифікацій МАІ призводить до різних, іноді протилежних, результатів. При цьому «істинність» того чи іншого отриманого результату принципово не може бути встановлена на момент прийняття рішення.

Представлені в літературних джерелах модифікації МАІ представляють різні підходи в залежності від конкретної практичної задачі. Вони відрізняються за такими взаємозалежними критеріями, як час, необхідний для реалізації методу, вартість і достовірність отриманих результатів.

Як зазначалося вище, задачі передбачення є інноваційними. Розв’язання задач передбачення пов’язано із оцінюванням сценаріїв майбутнього для систем, в яких «рвуться внутрішні зв’язки» і майбутні стани можуть характеризуватися вкрай відмінними формами і структурами в порівнянні з минулими станами. У зв’язку з цим будь-яка екстраполяція минулих значень кількісних факторів прийняття рішення на майбутнє дасть невірні результати, і єдиним джерелом інформації виступають якісні оцінки експертів. Тому традиційні критерії порівняння методів, які засновані на величинах відхилень отриманих результатів від деяких «істинних» значень, в принципі не можуть бути використані. «Істинного», «100% правильного» рішення на момент його прийняття просто не існує. Використовуючи суб’єктивні експертні оцінки, можна визначити його тільки з певним рівнем достовірності.

Відомо, що експертні оцінки піддаються впливу невизначеності і, як наслідок, можуть бути суперечливими. У зв’язку з цим, обов’язкового розв’язання потребує задача дослідження достовірності отриманих за допомогою МАІ числових значень. При цьому, як зазначалося вище, методи оцінювання достовірності доцільно вибирати в залежності від задачі, яка розв’язується. Так, при прийнятті рішень відносно задач, які мають характер повторюваності, можна обмежитися такими відомими в літературних джерелах прийомами, як визначення ступеня узгодженості експертних оцінок та традиційним прийомом аналізу чутливості за допомогою ППП Expert Choice [17]. Але, для розв’язання задач передбачення і прогнозування у стратегічному плануванні, які здебільшого спрямовані на прийняття інноваційних рішень на рівні великих організацій і компаній, на галузевому і державному рівнях, і тому потребують дослідження в єдиній структурі великої кількості різнорідних факторів, а також зазнають впливу з боку різного роду невизначеностей та ризиків, потрібно проводити більш детальне, комплексне оцінювання достовірності отриманих результатів з метою уникнення небажаних наслідків, аварій та катастроф. Згідно з методологією аналізу багатофакторних ризиків [55] поняття *ризику* характеризується наступними основними показниками: ступінь ризику, рівень ризику і ресурс припустимого ризику.

Ступінь ризику – це ймовірність появи небажаних наслідків дій будь-яких факторів ризику в будь-який момент часу в процесі функціонування складної системи. Рівень ризику – це величина збитків небажаних наслідків дій будь-яких факторів ризику в будь-який момент часу в процесі функціонування складної системи. Під ресурсом припустимого ризику розуміється тривалість періоду функціонування складної системи в певному режимі, на протязі якого ступінь і рівень ризику в результаті можливої дії факторів ризику не перевищують апріорно заданих допустимих значень [55].

Розглянемо постановку задачі розробки ММАІ знаходження ваг (пріоритетів) альтернативних варіантів рішень при розв’язанні задач передбачення.

1.7. Постановка задачі розробки модифікованого методу аналізу ієрархій (ММАІ) знаходження ваг альтернативних варіантів рішень при розв’язанні задач передбачення

<u>Змістовна постановка задачі</u>

<u>Дано:</u>

- головна ціль прийняття рішень;
- множина альтернативних варіантів рішень;
- множина факторів, які впливають на головну ціль в деякий фіксований момент часу.

Потрібно:

- визначити ваги (пріоритети) альтернативних варіантів рішень з урахуванням багатофакторних ризиків, що впливають на процес і результат прийняття рішення.

Будемо здійснювати розв’язання поставленої задачі на базі ММАІ (рис. 1.9). Потреба в модифікаціях МАІ викликана рядом особливостей поставленої задачі і недоліками МАІ (див. також п. 1.6) .

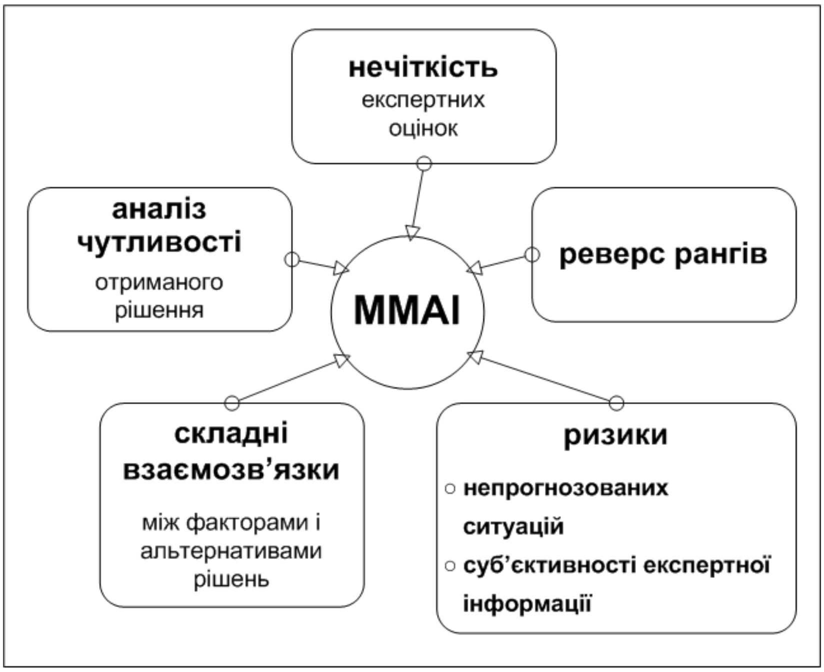


Рис. 1.9. Розробка ММАІ

По-перше, фактори, які впливають на головну ціль, визначаються не тільки діями осіб, залучених до процесу прийняття рішення, а й дією множин факторів ризику, які змінюються з плином часу. Тому, в процесі прийняття рішення слід враховувати змінні в часі багатофакторні ризики, в тому числі ризик суб’єктивної експертної інформації, спричинений її недостовірністю, неоднозначністю, неповнотою. Крім того, фактори і альтернативні варіанти рішень можуть коригуватися чи принципово змінюватися на протязі деякого часового проміжку. Період для прийняття рішення задається як об’єктивними факторами необхідності прийняття рішення до настання деякого критичного моменту, так і суб'єктивною оцінкою ОПР відповідного рівня інформованості.

По-друге, загальновідомим фактом є те, що в умовах невизначеності різної природи людина-експерт не в змозі давати точну оцінку у вигляді скалярного значення, вона може давати її тільки з певним суб'єктивним ступенем впевненості. Тому виникає потреба в розробці ММАІ, який дозволяв би обробляти нечіткі експертні оцінки. По-третє, на результати роботи МАІ значно впливає явище реверсу рангів зміни ваг альтернативних варіантів рішень при додаванні нової чи вилученні альтернативи. По-четверте, існують задачі прийняття рішень з настільки великою кількістю зв'язків між окремими елементами, що спостерігаються залежності елементів вищих рівнів ієрархії від елементів більш низьких рівнів, а також залежності між елементами на одному рівні ієрархії. Тому, постає необхідність розробки узагальненого ММАІ обробки мережевої структури факторів і альтернатив рішень.

Перейдемо до *математичної постановки загальної задачі.*

Дано:

- $G = \{g\}$ – головна ціль прийняття рішення;
- $A^{\tau} = \left\{ A_i^{\tau} \mid i = \overline{1, N_a^{\tau}} \right\}$ – множина альтернатив рішень в момент часу $T^{\tau} \in T$;
- $F^{\tau} = \left\{ F_j^{\tau} \mid j = \overline{1, N_f^{\tau}} \right\}$ – множина факторів, які впливають на головну ціль $G = \{g\}$ в момент часу $T^{\tau} \in T$;
- T - заданий чи прогнозований період для прийняття рішення.

Потрібно:

визначити відносні ваги (пріоритети) альтернативних варіантів рішень A_i^{τ}, $i = \overline{1, N_a^{\tau}}$ на базі експертної інформації в момент часу $T^{\tau} \in T$ при мінімізації:

- факторів ризику непрогнозованих ситуацій, спричиненого ситуаційною невизначеністю, та форс-мажорного ризику;
- факторів ризику суб’єктивності експертної інформації, внаслідок її недостовірності, неоднозначності, неповноти;

з урахуванням:

a. нечітких експертних оцінок;
b. мережевої структури факторів і альтернатив рішення;
c. комплексного оцінювання чутливості рішення, отриманого ММАІ;
d. явища реверсу рангів.

Розглянемо системний підхід до оцінювання достовірності розв’язку, отриманого модифікованим МАІ, в якому умовно можна виділити два взаємопов’язаних етапи.

Перший етап полягає в аналізі початкової матриці парних порівнянь (МПП), побудованої за оцінками експертів. Він включає: 1) дослідження рівня суперечливості МПП за допомогою різних показників узгодженості; 2) аналіз властивостей МПП, таких як сильна і слабка транзитивність та інших; 3) дослідження чутливості елементів МПП до випадкових збурень; 4) пошук викидів в МПП. В результаті проведеного аналізу ми повинні прийти до висновку щодо придатності МПП для подальшого використання, або повернути її експерту для коригування. Другий напрямок – це розробка таких методів і прийомів, які, по-перше, дозволять найповніше виразити судження експертів (реалізується шляхом формування нечітких оцінок), по-друге, найповніше описати складну проблему, включаючи мережеву структуру взаємозв’язків між елементами та фактори ризику непрогнозованих ситуацій і форс-мажорного ризику. При цьому, методи і прийоми обробки не повинні вносити додаткових викривлень чи звужень, ніж ті, що задані в початковій експертній інформації. Це реалізується за допомогою аналізу явища реверсу рангів; та розробкою методів отримання нечітких, а не точкових ваг на базі нечіткої експертної інформації.

Проблема розробки математичного забезпечення достовірності результатів, отриманих на базі модифікованого МАІ (ММАІ) представлена у вигляді складної багаторівневої системної задачі, яка включає (рис. 1.10):

1. Оцінювання *ризику появи* явища *реверсу рангів* в різних методах синтезу ММАІ.

2. Розробку ММАІ обробки *нечітких* експертних оцінок.

3. Розробку *комплексного оцінювання чутливості* рішення ММАІ.

4. Розробку модифікованого BOCR (скорочено від benefits, opportunities, costs, risks) оцінювання *ситуаційних ризиків*.

5. Оцінювання *ризику суб'єктивної експертної інформації*.

6. Розробку узагальненого ММАІ для *мережевої* структури факторів і альтернатив рішень.

Оскільки МАІ направлений на розв'язання стратегічних проблем, доцільно детально дослідити цей метод з урахуванням реверсу рангів, нечітких експертних оцінок, оцінювання чутливості, ситуаційних ризиків, та ризику суб'єктивності експертної інформації, що дозволить обґрунтувати достовірність отриманих результатів.

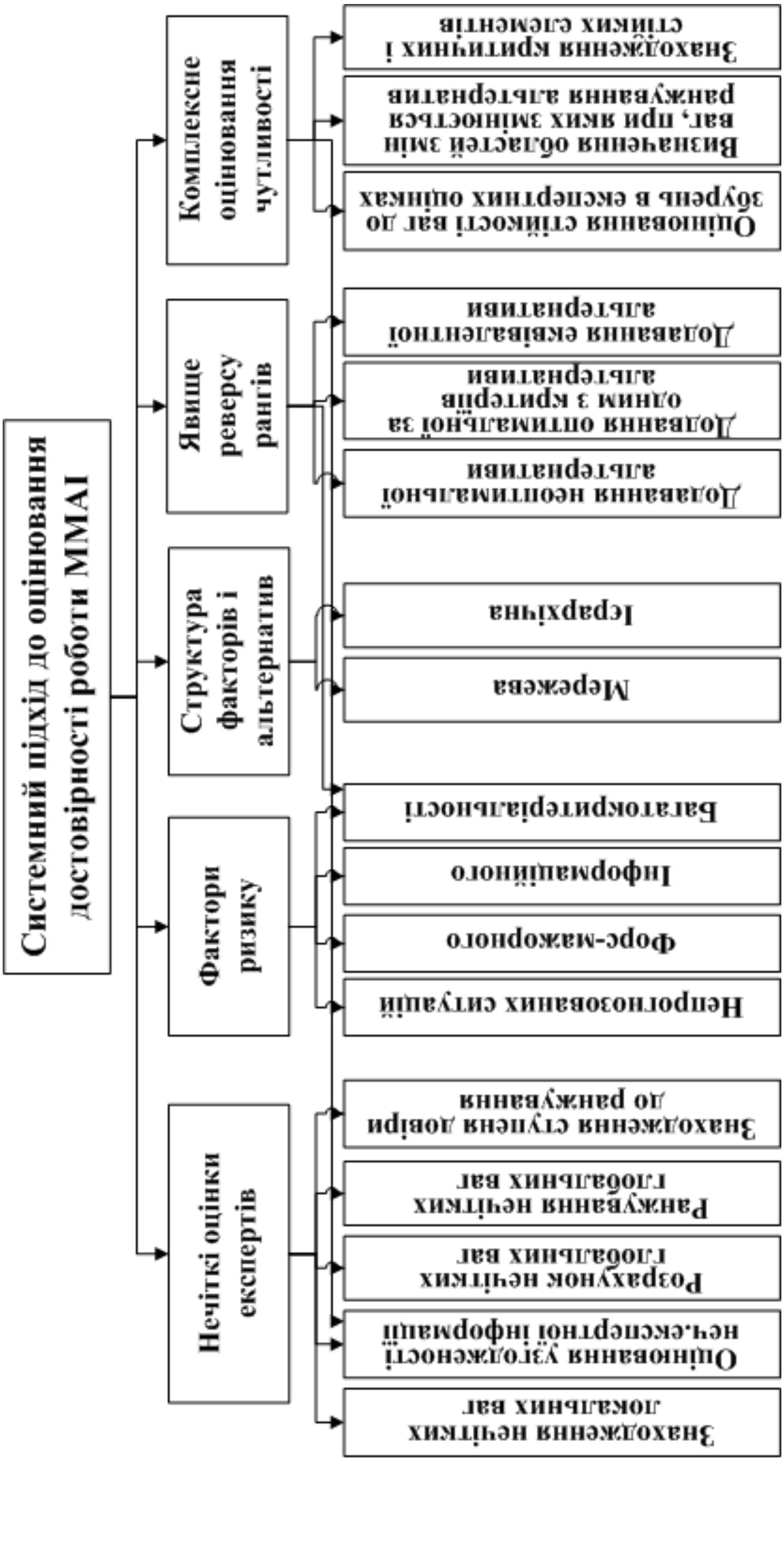


Рис. 1.10. Системний підхід до оцінювання достовірності роботи ММАІ

РОЗДІЛ 2

Модифіковані методи аналізу ієрархій (ММАІ)

2.1. ММАІ при різних варіантах формування оцінок експертів

2.1.1. ММАІ при точкових оцінках експертів. Оцінювання узгодженості точкової експертної інформації

Центральною проблемою в МАІ є розрахунок локальних ваг або пріоритетів зі сформованих експертами МПП. Одним з методів знаходження локальних ваг є метод головного власного вектора (eigenvector method, EM) (див. пп. 1.2, 1.3.5). Згідно з цим методом, вектор ваг – це нормалізований власний вектор МПП, що відповідає максимальному власному числу цієї матриці [1, 5]. Але лише для узгодженої МПП існує вектор ваг, який повністю відображає записані в ній судження. Узгодженість експертної інформації оцінюється за допомогою відношення узгодженості CR (див. пп. 1.2.4, 1.3.5).

Крім методу EM розроблені й інші методи знаходження локальних ваг: адитивної нормалізації [65, 66], математичні моделі оптимізації [67–70], серед яких широко відомий метод логарифмічних найменших квадратів, інша назва якого – метод геометричної середньої [67, 68].

Детальніше розглянемо ці методи.

Метод адитивної нормалізації знаходження локальних ваг

Метод адитивної нормалізації (additive normalization, AN) розглядається як апроксимація методу EM, що не потребує розрахунку власних векторів [65, 66]. При гарній узгодженості МПП в межах інтервалів для CR результати, отримані за методом AN, є близькими до результатів отриманих за методом EM.

Метод AN, так само як і EM, є детермінованим: елементи МПП вважаються константами. Недостатня узгодженість відповідей експертів –

наслідок психологічних обмежень, а не статистичної помилки. Детальніше розглянемо метод AN.

Нехай $s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ – сума j-го стовпчика заданої експертами МПП A = $=\{(a_{ij}) \mid i \in [1;n],\ j \in [1;n]\}$. Побудуємо нову матрицю $\tilde{A} = \{(\tilde{a}_{ij}) \mid i \in [1;n],$ $j \in [1;n]\}$, $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} / s_j$, яка буде використовуватися для перевірки узгодженості МПП A.

Твердження 2.1. Обернено симетрична матриця A розмірності $n \times n$ узгоджена тоді і тільки тоді, коли всі стовпчики $\tilde{A}$ однакові.

Доведення. Якщо A узгоджена, тоді будь-який стовпчик A може бути отриманий з першого стовпчика: $a_{ij} = a_{i1} a_{1j}$ для $\forall i, j$. Візьмемо суму лівої і правої частин цієї рівності за i, отримаємо $s_j = s_1 a_{1j}$. За означенням $\tilde{a}_{ij} = a_{ij} / s_j = a_{i1} a_{1j} / s_j = a_{i1} / s_1 = \tilde{a}_{i1}$. Отже, всі стовпчики матриці $\tilde{A}$ однакові.

В зворотну сторону. Нехай $p_k = s_k^{-1}$ і w – будь-який з однакових стовпчиків матриці $\tilde{A}$. Тоді $w_i = a_{ij} / s_j = a_{ij} p_j$ і $w_i = p_i$, оскільки $a_{ii} = 1$. Тому $a_{ij} = p_i / p_j$ і $a_{ik} a_{kj} = (p_i / p_k)(p_k / p_j) = p_i / p_j = a_{ij}$. Твердження доведено.

Для дослідження сум стовпців матриці A використаємо три варіанти нерівності Йенсена:

1. Нехай $\sum_{i=1}^{n} p_i \le 1$ і φ – випукла функція на інтервалі $[0;\infty)$, $\varphi(0) = 0$. Тоді $\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(x_i) \le \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$ виконується для всіх $x_i > 0$.
2. Якщо $\sum_{i=1}^{n} p_i < 1$ і φ – строго зростаюча випукла функція, для якої $\varphi(0) = 0$, то не існує таких x_i, $i = 1,...,n$, щоб $\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(x_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$.

3. Якщо $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $p_i > 0$ для $\forall i$ і φ – строго зростаюча випукла функція, для якої $\sum_{i=1}^{n} p_i \varphi(x_i) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right)$, то всі x_i рівні між собою.

У випадку узгодженості матриці *A розв'язком за методом AN* є величини $(s_1^{-1},...,s_n^{-1})$, обернені до сум стовпчиків МПП. Наступне твердження показує, що сума величин $(s_1^{-1},...,s_n^{-1})$ не перевищує одиниці.

Твердження 2.2. Для будь-якої обернено симетричної матриці *B* розмірності $n \times n$ виконується $\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1} \le 1$, де s_j – сума j-го стовпчика *B*. Рівність має місце тоді і тільки тоді коли *B* є узгодженою.

Доведення. Доведення проводиться за індукцією по *n*. При $n = 1$ $s_1 = 1$ і твердження виконується. Припустимо, що твердження має місце для *n*, доведемо, що воно справджується і для *n*+1.

Нехай A_{n+1} – будь-яка обернено симетрична матриця $(n+1) \times (n+1)$:

$$A_{n+1} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & b_1 \\ & A_n & & \vdots \\ & & & b_n \\ \hline 1/b_1 & \cdots & 1/b_n & 1 \end{array} \right).$$

Нехай $s_1,...,s_n$ – суми стовпчиків матриці A_n, а R – сума обернених величин до сум стовпчиків матриці A_{n+1}. Необхідно показати, що для всіх $b_i > 0$ виконується $R \le 1$, де

$$R = \sum_j (s_j + b_j^{-1})^{-1} + (1 + \sum_i b_i)^{-1} .$$

Нехай $p_j = s_j^{-1}$, $x_j = b_j / p_j$, тоді $R = \sum_j p_j \frac{x_j}{1 + x_j} + \frac{1}{1 + \sum_i p_i x_i}$. Нерівність $R \le 1$ еквівалентна нерівності

$$\sum_j p_j \frac{x_j}{1+x_j} \le \frac{\sum_i p_i x_i}{1+\sum_i p_i x_i} \quad . \tag{2.1}$$

Розглянемо випуклу функцію $\varphi(x) = x/(1+x)$. Вона задовольняє варіанту 1 нерівності Йенсена і при $\sum_j p_j \le 1$ отримуємо, що (2.1) справджується для всіх $x_i > 0$. Твердження доведено.

Базуючись на твердженні 2.2, індекс узгодженості визначається за допомогою гармонічної середньої $HM(s) = n\left(\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1}\right)^{-1}$ для $s = \{s_j \mid j \in [1;n]\}$. Умова $\sum_{j=1}^{n} s_j^{-1} \le 1$ твердження 2.2 еквівалентна $HM(s) \ge n$. Аналогічно до *CI*,

проведено масштабування величини *HM* як функції від *n* і побудовано гармонічний індекс узгодженості *HCI*.

Означення 2.1. *Гармонічним індексом узгодженості* заповненої експертом МПП називається

$$HCI(n) = \frac{(HM(s)-n)(n+1)}{n(n-1)}.$$

Множник $(n+1)/n$ вибрано за результатами імітаційного моделювання і введено для зближення *HCI* із значеннями *CI*. Випадковим чином було згенеровано 500 МПП розмірності 4×4 і для кожної з них розраховані значення *CI* і *HCI*. Результати показали, що *CI* і *HCI* близькі між собою і коефіцієнт кореляції дорівнює 0.9.

Для виключення залежності від розмірності МПП визначено гармонічне відношення узгодженості.

Означення 2.2. *Гармонічним відношенням узгодженості* називається

$$HCR(n) = \frac{HCI(n)}{HRCI(n)},$$

де $HRCI(n)$ – середнє значення гармонічних індексів узгодженості для заповнених випадковим чином МПП.

Оскільки значення CI і HCI близькі між собою, то порогові значення для HCR встановлені такі ж, як і для CR (табл. 2.1). Величина HCR дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли МПП узгоджена.

Таблиця 2.1. Порогові значення для HCR (n – розмірність МПП)

Порогове значення HCR	n
0.05	3
0.08	4
0.1	≥5

Величину HCI рекомендується використовувати для оцінювання узгодженості при використанні методу AN знаходження локальних ваг, оскільки існує зв’язок між методами AN і EM. Розглянемо зв’язок між AN і граничним і степеневим методами розрахунку головного власного вектору (див. п. 1.3.5):

Зв’язок AN з граничним методом:

1) визначимо $x_0 = \{x_{0i} \mid i \in [1;n]\}$, $x_{0i} = (ns_i)^{-1}$;

2) покладемо $x_1 = Ax_0$ – середня кожного рядка матриці A з нормованими стовпчиками, тобто x_1 – розв’язок за методом AN.

Сума елементів вектору x_1 дорівнює одиниці: $\|x\| \equiv \sum |x_i|$, $\| x_1 \| = (1\ldots1)A((ns_1)^{-1}\ldots(ns_n)^{-1})^T = (s_1\ldots s_n)((ns_1)^{-1}\ldots(ns_n)^{-1})^T = 1$.

Оскільки $\| x_0 \| \neq 1$, то AN-розв’язок x_1 є першою ітерацією граничного методу. Середня гармонічна $HM(s)$ сум стовпчиків матриці A є першим кроком ітераційного методу знаходження максимального власного числа матриці A, так як при $k=1$ має місце

$$\frac{\left\|A^k x_0\right\|}{\left\|A^{k-1} x_0\right\|}=\frac{\left\|x_1\right\|}{\left\|x_0\right\|}=\frac{1}{\left\|x_0\right\|}=\left(\sum_i \left(ns_i\right)^{-1}\right)^{-1}=HM(s).$$

Зв'язок AN із степеневим методом:

1) визначимо $x_0=\{x_{0i} \mid i\in[1;n]\}$, $x_{0i}=HM(s)/(ns_i)$;

2) тоді $x_1=Ax_0/\|Ax_0\|$ – також розв'язок за методом AN і

$$\lambda_1=\|Ax_0\|=HM(s)(1\ldots1)A((ns_1)^{-1}\ldots(ns_n)^{-1})^T=HM(s).$$

Тому метод AN – це апроксимація методу EM, а гармонічна середня сум стовпчиків МПП – це апроксимація її максимального власного числа.

В [71] описано яким чином змінюється традиційний індекс узгодженості CI при зміні елементу МПП. Встановлено, що при зростанні одного елементу МПП (інші елементи – незмінні) можливі три випадки: CI зростає; CI спадає; CI спадає до мінімуму, а потім зростає. Останній випадок найбільш поширений на практиці, оскільки ми сподіваємося знайти значення елементу МПП, при якому неузгодженість буде найменшою. Використання CI як міри неузгодженості було б сумнівним, якщо б функція CI мала декілька мінімумів.

Твердження 2.3. Гармонічний індекс узгодженості HCI як функція будь-якого одного елементу обернено симетричної МПП A розмірності $n\times n$, $n\geq 3$ має один мінімум і жодного максимуму.

Доведення. Нехай $s_1,...,s_n$ – суми стовпчиків обернено симетричної матриці A. Помножимо елемент a_{jk} цієї матриці на деяку величину ε. Нехай $a_{jk}=a$, тоді змінена сума k-го стовпця дорівнюватиме $s_k(\varepsilon)=a_{1k}+\ldots+a\varepsilon+\ldots+a_{nk}=s_k+a(\varepsilon-1)$. Елемент a_{kj} матриці A змінився з $1/a$ на $1/(a\varepsilon)$. Сума j-го стовпчика стає рівною $s_j(\varepsilon)=s_j+1/(a\varepsilon)-1/a$. Візьмемо часткову похідну за ε середньої гармонічної $HM(s(\varepsilon))$ змінених сум $s(\varepsilon)$. Вона дорівнює $\dfrac{\partial HM(s(\varepsilon))}{\partial\varepsilon}=\dfrac{HM(s(\varepsilon))^2}{n}\left(\dfrac{\partial s_j(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\dfrac{1}{s_j^2(\varepsilon)}+\dfrac{\partial s_k(\varepsilon)}{\partial\varepsilon}\dfrac{1}{s_k^2(\varepsilon)}\right)$.

Оскільки нас цікавить лише знак похідної, то достатньо проаналізувати вираз у дужках. Після спрощення він дорівнює $\frac{a}{(s_k + a(\varepsilon - 1))^2} -$ $\frac{a}{(a\varepsilon s_j + 1 - \varepsilon)^2}$. Цей вираз є більшим за нуль, якщо виконується нерівність $\varepsilon > \frac{s_k - (a+1)}{as_j - (a+1)}$. Чисельник виразу справа завжди більший за нуль, оскільки за умовою $n \geq 3$ і в k-му стовпці присутній принаймні один додатній елемент, відмінний від a і 1. Знаменник також строго додатній, оскільки $s_j > 1 + 1/a$. Тому єдиною стаціонарною точкою є $\varepsilon^* = \frac{s_k - (a+1)}{as_j - (a+1)}$. Ця точка відповідає мінімуму середньої гармонічної *HM* $s(\varepsilon)$, оскільки похідна є додатною для всіх $\varepsilon > \varepsilon^*$ і від'ємною для $\varepsilon < \varepsilon^*$. Твердження доведено.

Таким чином, для будь-якої неузгодженої обернено симетричної матриці для покращення її узгодженості до найкращого можливого рівня в напрямку мінімізації величини *HCI* існує єдине коригування для кожного елементу цієї матриці і цим коригуванням є ε^*. Зауважимо, що при n=2 значення ε^* може бути 0 чи ∞. Тобто, *HM* $s(\varepsilon)$ може збільшуватися чи зменшуватися для всіх ε так само як і λ_{max}.

Математичні моделі оптимізації знаходження ваг

Метод геометричної середньої (логарифмічних найменших квадратів)

Ще одним методом, який використовується для знаходження локальних ваг в МАІ, є метод геометричної середньої (row geometric mean method, RGMM) [67, 68, 72–75]. Обґрунтування використання RGMM проводиться за допомогою двох різних підходів:

1) детермінованого методу мінімізації логарифма квадратів помилок (логарифмічний МНК);

2) стохастичного методу максимальної правдоподібності пріоритетів, в якому використовується мультиплікативна модель збурень $a_{ij} = \frac{w_i}{w_j}\pi_{ij}$ елементів МПП A, де збурення π_{ij} – незалежні випадкові величини, які мають лог-нормальний розподіл з нульовим середнім і постійною дисперсією, $\pi_{ij} \sim Lognormal(0,\sigma)$.

Згідно з RGMM ненормовані ваги v_i розраховуються за формулою:

$$v_i = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}\right)^{1/n},$$

де $A = \{(a_{ij}) \mid i \in [1;n], j \in [1;n]\}$ – заповнена експертами МПП.

Для подальшого використання в МАІ проводиться нормування ваг:

$$w_i = v_i / \sum_{i=1}^{n} v_i .$$

Аналітично доведено [76], що відмінність між оцінками ваг отриманими за методами ЕМ і RGMM має порядок $O(\sigma^2)$, де σ^2 – дисперсія $\ln(a_{ij})$.

При використанні RGMM мірою неузгодженості МПП слугує незміщена оцінка дисперсії збурень:

$$s^2 = \frac{S}{d.f} = \frac{2\sum_{i<j}(\ln a_{ij} - \ln(v_i / v_j))^2}{(n-1)(n-2)},$$

де S – квадрат відстані між $\ln(a_{ij})$ і $\ln(v_i / v_j)$, $d.f$ – кількість ступенів свободи, яка дорівнює різниці між кількістю оцінок $n(n–1) / 2$ і кількістю оцінюваних параметрів $n–1$.

З точки зору детермінованого методу менше значення s^2 свідчить про коротшу відстань між a_{ij} і v_i / v_j. В стохастичному методі чим меншим є значення s^2, тим меншою є дисперсія збурень π_{ij} і кращою є відповідність між оцінками експертів і вектором ваг *v*. Менша дисперсія збурень свідчить про більшу узгодженість МПП *A*.

Означення 2.3. *Геометричним індексом узгодженості GCI* МПП *A* при використанні методу RGMM знаходження ваг називається:

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} \ln^2 e_{ij},$$

де $e_{ij} = a_{ij} v_j / v_i$ – помилка апроксимації відношення v_i / v_j за допомогою a_{ij}.

Оскільки традиційний індекс узгодженості *CI* може бути представлений у вигляді $CI = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \neq j} (e_{ij} - 1)$ (див. п. 1.2.5), то геометричний індекс узгодженості *GCI* – це середнє значення квадрата відстані між логарифмом помилки і логарифмом одиниці ($e_{ij} = 1$ для узгодженої МПП):

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} (\ln e_{ij} - \ln 1)^2 .$$

Наступний крок – визначити за допомогою індексу *GCI* припустимість рівня неузгодженості МПП, тобто встановити деякі пороги, перевищення яких свідчитиме про неприпустимо високий рівень неузгодженості. Для цього можна було б провести нормування індексу *GCI* аналогічно до того, як це робить Т.Сааті при визначенні відношення узгодженості *CR* (див. п. 1.3.4). Однак, виявляється, що математичне сподівання значення s^2 є постійною величиною, про що свідчить наступне твердження.

Твердження 2.4. Математичне сподівання геометричного індексу узгодженості *GCI* для заповненої випадковим чином МПП при умові, що елементи МПП є незалежними у сукупності, обернено симетричними і мають однаковий розподіл, є постійною величиною, рівною $E(GCI) = Var(\ln a_{ij})$.

Доведення.

$$E(GCI)=E\left(\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}\ln^2 e_{ij}\right)=\frac{2}{(n-1)(n-2)}\sum_{i<j}E(\ln^2 e_{ij}).$$

Оскільки всі e_{ij} мають однаковий розподіл і кількість доданків в сумі дорівнює $n(n-1)/2$, то

$$E(GCI)=\frac{2}{(n-1)(n-2)}\frac{n(n-1)}{2}E(\ln^2 e_{ij})=\frac{n}{(n-2)}E(\ln^2 e_{ij}) \qquad (2.2)$$

для будь-яких i, j.

Для розрахунку математичного сподівання $E(\ln^2 e_{ij})$ розпишемо логарифм:

$$\ln^2 e_{ij}=\ln^2\left(a_{ij}\frac{w_j}{w_i}\right)=\ln^2\left(a_{ij}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{a_{jk}}{a_{ik}}\right)^{1/n}\right)=\ln^2\left(a_{ij}^{1-2/n}\left(\prod_{k\neq i,j}^{n}\frac{a_{jk}}{a_{ik}}\right)^{1/n}\right)=$$

$$=\left(\ln a_{ij}^{1-2/n}+\sum_{k\neq i,j}\ln a_{jk}^{1/n}-\sum_{k\neq i,j}\ln a_{ik}^{1/n}\right)^2.$$

Розкриваючи квадрат, отримаємо доданки, які є квадратами логарифмів (наприклад, $\ln^2 a_{ij}$), і добутками логарифмів (наприклад, $\ln a_{ij}\ln a_{ik}$). Оскільки судження експертів a_{ij} обернено симетричні та незалежні, то математичні сподівання добутків логарифмів дорівнюють нулю, тому

$$E(\ln^2 e_{ij})=E\left(\ln^2 a_{ij}^{1-2/n}+\sum_{k\neq i,j}\ln^2 a_{jk}^{1/n}-\sum_{k\neq i,j}\ln^2 a_{ik}^{1/n}\right)=$$

$$=E\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^2\ln^2 a_{ij}+\sum_{k\neq i,j}\frac{1}{n^2}\ln^2 a_{jk}-\sum_{k\neq i,j}\frac{1}{n^2}\ln^2 a_{ik}\right).$$

Всі судження мають однаковий розподіл, тому математичні сподівання $\ln^2 a_{ij}$, $\ln^2 a_{jk}$ і $\ln^2 a_{ik}$ співпадають. Як наслідок

$$E(\ln^2 e_{ij})=\left(\left(\frac{n-2}{n}\right)^2+2\frac{n-2}{n^2}\right)E(\ln^2 a_{ij})=\frac{n-2}{n}E(\ln^2 a_{ij}).$$

Використовуючи (2.2), маємо $E(GCI) = E(\ln^2 a_{ij}) = Var(\ln a_{ij})$. Твердження доведено.

Оскільки математичне сподівання *GCI* є постійною величиною, то порогові значення для *GCI* визначаються на основі зв'язку між *GCI* і *CR* в області, де оцінки експертів є припустимими, тобто при $CR \le 1$. Наступне твердження ілюструє залежність між *GCI* і *CR* при малих помилках.

Твердження 2.5. Нехай $A = \{(a_{ij}) \mid i, j = 1,...,n\}$ – МПП, $v = \{v_i \mid i = 1,...,n\}$ – вектор ваг, отриманий методом RGMM. Тоді $GCI = \dfrac{2n}{n-2} CI + o(\varepsilon^3)$, де $\varepsilon = \max\limits_{i,j}\{|\ln e_{ij}|\}$, $e_{ij} = a_{ij} v_j / v_i$ [77].

Наслідок 2.1. За умов твердження 2.5 виконується рівність $GCI = k(n)CR + o(\varepsilon^3)$, де $k(n) = \dfrac{2n}{n-2} E(CI(n))$.

Наслідок 2.1 виводиться безпосередньо з твердження 2.5 і означення відношення узгодженості *CR =CI / MRCI*.

Таким чином, для малих помилок e_{ij} геометричний індекс узгодженості *GCI* пропорційний традиційній мірі узгодженості *CR*. Використовуючи імітаційне моделювання, оцінено регресію *GCI* від *CR* для різних інтервалів *CR* в межах $CR \le 1$. Отримані порогові значення для *GCI* наведені в табл. 2.2. Якщо значення *GCI* перевищують вказані пороги, то МПП неузгоджені.

ММАІ, стійкий до викидів в МПП

Під *викидами* розуміються незвичайні і помилкові елементи МПП, які виникають внаслідок неточного вводу оцінок чи випадкових помилок. Однією з причин появи викидів може бути неправильне розміщення отриманих від експерта оцінок в симетричні позиції МПП. Розглядається наступна проблема: як ідентифікувати викиди в МПП і зменшити їх вплив на результуючі ваги.

Таблиця 2.2. Порогові значення *GCI* для різних значень *CR*, n – розмірність МПП [77]

CR	Порогове значення *GCI*		
	$n = 3$	$n = 4$	$n \geq 5$
0.01	0.0314	0.0352	0.037
0.05	0.1573	0.1763	0.185
0.1	0.3147	0.3526	0.370
0.15	0.4720	0.5289	0.555

Матриці парних пропорцій

Один з підходів до знаходження викидів в МПП – це побудова так званої матриці парних пропорцій, яка є менш чутливою до викидів.

Теоретичною *матрицею парних пропорцій* називається матриця $U = \{(u_{ij}) \mid i \in [1;n], j \in [1;n]\}$ [70]:

$$u_{ij} = \frac{w_i}{w_i + w_j} = \frac{w_i / w_j}{1 + w_i / w_j},$$

де u_{ij} – доля i -ї невідомої (теоретичної) ваги w_i в сумі i -ї та j -ї істинних ваг.

Відношення невідомих ваг w_i / w_j оцінюється в МАІ елементом a_{ij} емпіричної МПП *A*. Тому $z_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{1 + a_{ij}}$ – емпірична оцінка теоретичних парних пропорцій u_{ij}. Всі елементи z_{ij} додатні і менші одиниці: $z_{ij} \in (0,1)$ і $z_{ij} + z_{ji} = 1$. Крім того, елементи z_{ij} і z_{ji} рівновіддалені від діагональних елементів $z_{ii} = 0.5$: $z_{ij} - z_{ii} = z_{ii} - z_{ji}$.

Побудована емпірична матриця парних пропорцій $Z = \{(z_{ij}) \,|\, i \in [1;n], j \in [1;n]\}$ виявляється менш чутливою до впливу можливих викидів в МПП ніж традиційна МПП A. Перетворення початкової матриці A в матрицю парних пропорцій Z робить оцінки ваг нечутливими до високої мінливості значень парних відношень матриці A. Розглянемо, яким чином отримати вектор ваг із матриці Z.

Для теоретичної матриці парних пропорцій U запишемо систему рівнянь

$$
\begin{aligned}
&\frac{w_1}{w_1 + w_1}(w_1 + w_1) + \frac{w_1}{w_1 + w_2}(w_1 + w_2) + \ldots + \frac{w_1}{w_1 + w_n}(w_1 + w_n) = nw_1, \\
&\ldots \\
&\frac{w_n}{w_n + w_1}(w_n + w_1) + \frac{w_n}{w_n + w_2}(w_n + w_2) + \ldots + \frac{w_n}{w_n + w_n}(w_n + w_n) = nw_n.
\end{aligned}
$$

Або з використанням позначень u_{ij}:

$$
\begin{aligned}
&\left(u_{11} + \sum_{j=1}^{n} u_{1j}\right) w_1 + u_{12} w_2 + \ldots + u_{1n} w_n = nw_1, \\
&\ldots \\
&u_{n1} w_1 + u_{n2} w_2 + \ldots + \left(u_{nn} + \sum_{j=1}^{n} u_{nj}\right) w_n = nw_n.
\end{aligned}
$$

Ця система може бути представлена в матричній формі:

$$(U + diag(Ue))w = nw,$$

де w – вектор невідомих ваг, e – одиничний вектор, $diag(Ue)$ – діагональна матриця, на її діагоналі знаходяться суми $\sum_{j=1}^{n} u_{kj}$ елементів рядків.

Аналогічно будується система $(Z + diag(Ze))\,\hat{w} = n\hat{w}$ для пошуку невідомого вектора ваг $\hat{w} = (\hat{w}_1 \;\; \ldots \;\; \hat{w}_n)$ для емпіричної МПП A. Знайдений із цієї системи вектор ваг $\hat{w}$ є оцінкою вектора w істинних ваг елементів.

Розглянемо оптимізаційний підхід до оцінювання ваг матриці парних пропорцій Z. Оскільки елементи Z не відповідають в точності теоретичній структурі пропорцій U, то використовується наступна модель для їх поєднання [70]:

$$z_{ij}(\hat{w}_i + \hat{w}_j) = \hat{w}_i + \varepsilon_{ij},$$

де $\hat{w}_i$ – оцінки невідомих ваг w_i.

Якщо емпірична матриця Z повністю узгоджена з теоретичною структурою пропорцій пріоритетів U (тобто всі $z_{ij} = u_{ij}$), тоді відхилення ε_{ij} дорівнюють нулю і оцінка $\hat{w}$ співпадає з вектором ваг w. Тому введемо цільову функцію для мінімізації всіх відхилень ε_{ij}:

$$\|\varepsilon\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n}(z_{ij}(\hat{w}_i + \hat{w}_j) - \hat{w}_i)^2 = \sum_{i,j=1}^{n}(z_{ij}\hat{w}_j - z_{ji}\hat{w}_i)^2 \to \min,$$

при обмеженнях $z_{ij} \in (0,1)$, $z_{ij} + z_{ji} = 1$.

Використовуючи умову нормування $\hat{w}^T\hat{w} = 1$ для вектора ваг, отримаємо наступну оптимізаційну задачу:

$$\|\varepsilon\|^2 - \lambda(\hat{w}^T\hat{w} - 1) = \sum_{i,j=1}^{n}(z_{ij}\hat{w}_j - z_{ji}\hat{w}_i)^2 - \lambda\left(\sum_{i=1}^{n}\hat{w}_i^2 - 1\right) \to \min.$$

Знайдемо перші похідні та прирівняємо їх до нуля, отримаємо систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ik}^2\hat{w}_k - \sum_{i=1}^{n} z_{ki}(1 - z_{ki})\hat{w}_i = \lambda\hat{w}_k,\ k = 1,\ldots,n$$

або у матричній формі

$$(diag(Z^T Z) - Z^T * Z)\hat{w} = \lambda\hat{w},$$

де операція “$*$” в $C = Z^T * Z$ означає $c_{ij} = z_{ij}z_{ji} = z_{ij}(1 - z_{ij})$.

Тепер задача зводиться до знаходження власного вектора для мінімального власного числа і цей власний вектор – стійка оцінка ваг.

Таким чином, отримали два методи отримання стійких до викидів ваг. Метод 1 зводиться до наступних кроків:

1) перетворити початкову МПП A в матрицю парних пропорцій Z;
2) розв’язати систему $(Z + diag(Ze))\,\hat{w} = n\hat{w}$, знайти вектор ваг $\hat{w}$, він є оцінкою вектора w невідомих ваг елементів.

Алгоритм методу 2 наступний:

1) перетворити початкову МПП A в матрицю парних пропорцій Z;
2) побудувати матрицю C;
3) розв’язати $(diag(Z^T Z) - Z^T * Z)\,\hat{w} = \lambda\,\hat{w}$, знайти мінімальне власне число і власний вектор, який йому відповідає. Знайдений власний вектор – стійкий до викидів.

В загальному випадку, різні методи розрахунку ваг з МПП призводять до різних результатів, і лише у випадку узгоджених МПП ваги, знайдені за різними методами, співпадають між собою. Питання вибору того чи іншого методу розрахунку локальних ваг на сьогоднішній день залишається відкритим.

2.1.2. Підвищення узгодженості точкових оцінок експертів

При розв’язанні практичних задач підтримки прийняття рішень побудовані експертами МПП рідко виявляються узгодженими. Причинами неузгодженості називають психологічні обмеження людини-експерта [66, 78], помилки експертів при висловлюванні своїх оцінок та використання фундаментальної шкали [79, 80]. Крім того, протиріччя в оцінках експертів можуть бути наслідком нездатності людини точно виразити свої судження за допомогою скалярних значень [81].

Відомо, що якщо надані експертами оцінки не мають припустимої узгодженості, то вони не можуть бути використані при прийнятті рішення. Постає необхідність у розробці методів підвищення узгодженості експертної інформації. Традиційний метод – це організація зворотного зв’язку з експертом, коли експерту для перегляду повертаються вся недостатньо узгоджена МПП [51, 52, 82], або її найбільш неузгоджені елементи [70]. Процедура перегляду повторюється допоки не буде досягнуто припустимого рівня неузгодженості експертних оцінок.

Помилкові елементи МПП, які виникають внаслідок неточного вводу оцінок чи випадкових помилок, називаються викидами. Розглянемо декілька методів знаходження викидів в МПП.

Метод 1 (розрахунок CI для укороченої МПП)

Перший метод базується на обчисленні індексу узгодженості CI для укороченої МПП, отриманої з початкової МПП послідовним виключенням з розгляду одного з рядків (стовпчиків) МПП A. Метод складається з наступних кроків:

1. Послідовно виключається з розгляду один з n елементів: перший, другий, ..., n-й. Для $(n-1)$-го елемента, що залишилися, розраховується значення CI. Позначимо CI_i – індекс узгодженості для $n-1$ елемента після виключення i-го елементу.

2. Знаходяться CI_{i^*} та CI_{j^*}, які мають найменші значення, тоді елемент $a_{i^* j^*}$ – викид.

Метод 2 (розрахунок кореляції між рядками і стовпчиками МПП)

Другий метод базується на факті, що зі збільшенням узгодженості МПП кореляція між її рядками (і стовпчиками) прямує до одиниці. Метод складається з наступних кроків:

1. Розраховуються математичні сподівання $M(R_i^r)$ коефіцієнтів кореляції між i-м та всіма іншими рядками МПП A, а також математичні сподівання $M(R_j^c)$ коефіцієнтів кореляції між j-м та всіма іншими стовпчиками A.

2. Знаходяться $\min_i\{M(R_i^r)\}$ і $\min_j\{M(R_j^c)\}$. Нехай ці мінімуми досягаються на рядку з номером $i = i^*$ і стовпчику з номером $j = j^*$.

3. Тоді елемент $a_{i^* j^*}$ – викид.

Метод 3 (критерій Хі-квадрат)

Нехай $W = \{(w_i / w_j) \mid i \in [1;n], j \in [1;n]\}$ – *теоретична* узгоджена МПП. Для цієї матриці виконуються рівності $Ww = nw$ і $W^T v = nv$. МПП W можна представити у вигляді

$$W = wv^T,$$

де $w = (w_1 \quad w_2 \quad \ldots \quad w_n)^T$ – вектор невідомих (теоретичних) ваг, $v^T = (w_1^{-1} \quad w_2^{-1} \quad \ldots \quad w_n^{-1})$, або

$$w_{ij} = w_i v_j = \frac{\left(w_i \sum_{j=1}^{n} v_j \right) \left(v_j \sum_{i=1}^{n} w_i \right)}{\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \sum_{j=1}^{n} v_j \right)}.$$

В чисельнику знаходиться добуток суми елементів i-го рядка і суми елементів j-го стовпчика МПП W; в знаменнику – сума всіх елементів МПП W. В теорії статистичного аналізу матрицю такої структури називають *випадковою таблицею* [83].

Теоретична МПП розмірності $n \times n$, яка розглядається в МАІ, відповідає випадковій таблиці з двох атрибутів – ваг w (в рядках) і величин, обернених вагам v (в стовпчиках). Відмінність МПП від випадкової таблиці полягає в тому, що МПП не описує частоти як традиційна випадкова таблиця.

Заповнену експертами МПП $A = \{(a_{ij}) \mid i \in [1;n], j \in [1;n]\}$ назвемо *емпіричною*. Аналогічно до теоретичної МПП, елементи t_{ij} випадкової таблиці для емпіричної МПП дорівнюють

$$t_{ij} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} \right) \left(\sum_{l=1}^{n} a_{lj} \right)}{\left(\sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{kl} \right)}.$$

Метод знаходження викидів полягає в оцінюванні подібності між емпіричною МПП заданою експертом і теоретичною МПП за критерієм згоди Пірсона [70]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{(a_{ij} - t_{ij})^2}{t_{ij}}.$$

Якщо емпірична МПП є узгодженою, то $\chi^2 = 0$. Чим більше розходження між емпіричною і теоретичною матрицями, тим більше значення приймає χ^2. Алгоритм знаходження викидів складається з наступних кроків:

1. Для кожного елементу емпіричної МПП A обчислюються значення $\chi_{ij}^2 = \dfrac{(a_{ij} - t_{ij})^2}{t_{ij}}$.

2. Розраховується математичне сподівання і дисперсія χ_{ij}^2. Визначається довірчий інтервал для χ_{ij}^2.

3. Визначаються ті значення $\chi_{i^* j^*}^2$, які лежать за межами довірчого інтервалу. Тоді відповідні елементи $a_{i^* j^*}$ – викиди.

Зворотній зв'язок з експертом потребує багато часу і зусиль з боку експертів, тому для підвищення узгодженості, коли це можливо, використовують методи автоматичного коригування МПП.

Розглянемо *метод автоматичного підвищення узгодженості МПП* без участі експертів, заснований на наступних двох твердженнях [78].

Твердження 2.6. Нехай $A = \{(a_{ij}) \mid i, j = 1,...,n\}$ – додатна обернено симетрична матриця, $\lambda_{\max}$ – максимальне власне число A, $w = (w_1,...,w_n)^T$ – власний вектор A. Якщо $A^* = \{(a_{ij}^*) \mid i, j = 1,...,n\}$, де

$$a_{ij}^* = (a_{ij})^\alpha \left(\frac{w_i}{w_j}\right)^{1-\alpha}, \ 0 < \alpha < 1,$$

$\mu_{\max}$ – максимальне власне число A^*,

то $\mu_{\max} \le \lambda_{\max}$ і рівність досягається тоді і тільки тоді, коли A є узгодженою.

Твердження 2.7. Нехай $A = \{(a_{ij}) | i, j = 1,...,n\}$ – додатна обернено симетрична матриця, $\lambda_{\max}$ – максимальне власне число A, $w = (w_1,...,w_n)^T$ – власний вектор A. Якщо $A^* = \{(a_{ij}^*) | i, j = 1,..., n\}$, де

$$a_{ij}^* = \begin{cases} \alpha a_{ij} + (1-\alpha)\dfrac{w_i}{w_j}, & i = 1,2,...,n;\ j \ge i \\ \dfrac{1}{\alpha a_{ji} + (1-\alpha)\dfrac{w_j}{w_i}}, & i = 2,...,n;\ j < i \end{cases}, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$\mu_{\max}$ – максимальне власне число A^*,

то $\mu_{\max} \le \lambda_{\max}$ і рівність досягається тоді і тільки тоді, коли A є узгодженою.

Доведення цих тверджень базується на наступних двох лемах.

Лема 2.1. Нехай $A = \{(a_{ij}) | i, j = 1,...,n\}$ – додатна матриця, $\lambda_{\max}$ – максимальне власне число A. Розглянемо простір $\Re_n^+ = \{x = (x_1,...,x_n)^T \mid x_i > 0, i = 1,...,n\}$. Тоді $\lambda_{\max} = \min\limits_{x \in \Re_n^+} \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\dfrac{x_j}{x_i}$,.

Лема 2.2. Нехай $x > 0$, $y > 0$, $u > 0$, $v > 0$, $u + v = 1$. Тоді $x^u y^v \le ux + vy$ і рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $x = y$.

Доведення твердження 2.6

Нехай $e_{ij} = a_{ij}\dfrac{w_j}{w_i}$, тоді $a_{ij}^* = e_{ij}^\alpha \dfrac{w_i}{w_j}$ і $\lambda_{\max} = \sum\limits_{j=1}^n e_{ij}$ (див.п.1.2.5).

$$\mu_{\max} = \min_{x \in \Re_n^+} \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}^* \frac{x_j}{x_i} \le \max_i \sum_{j=1}^n a_{ij}^* \frac{w_j}{w_i} = \max_i \sum_{j=1}^n e_{ij}^\alpha \le \max_i \sum_{j=1}^n (\alpha e_{ij} + 1 - \alpha)$$

$$= \alpha\lambda_{\max} + (1-\alpha)n \le \lambda_{\max},$$

де рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{\max} = n$, тобто A є узгодженою. Твердження 2.6 доведено.

Доведення твердження 2.7.

Нехай $e_{ij} = a_{ij}\dfrac{w_j}{w_i}$, тоді $\lambda_{\max} = \sum_{j=1}^{n} e_{ij}$. Нескладно показати, що виконується нерівність $\dfrac{1}{\alpha e_{ji} + (1-\alpha)} \le \alpha e_{ij} + (1-\alpha)$. Вона спрощується до нерівності $e_{ij} + 1/e_{ij} \ge 2$, яка виконується для $\forall e_{ij} > 0$.

З використанням леми 2.1 отримаємо

$$\mu_{\max} = \min_{x \in \Re_n^+} \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^* \frac{x_j}{x_i} \le \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^* \frac{w_j}{w_i} =$$

$$\max_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\alpha a_{ji} + (1-\alpha)(w_j / w_i)} + \sum_{j=i}^{n} (\alpha a_{ij} + (1-\alpha)(w_i / w_j)) \right) (w_j / w_i) =$$

$$\max_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\alpha e_{ji} + (1-\alpha)} + \sum_{j=i}^{n} (\alpha e_{ij} + (1-\alpha)) \right) \le$$

$$\max_i \left(\sum_{j=1}^{i-1} \alpha e_{ij} + (1-\alpha) + \sum_{j=i}^{n} (\alpha e_{ij} + (1-\alpha)) \right) =$$

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} (\alpha e_{ij} + (1-\alpha)) = \alpha \lambda_{\max} + (1-\alpha) n \le \lambda_{\max},$$

де рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $\lambda_{\max} = n$, тобто A узгоджена. Твердження 2.7 доведено.

На базі тверджень 2.6 і 2.7 розроблено *ітераційний алгоритм автоматичного підвищення узгодженості МПП A* [78]:

1. задати значення α, $0 < \alpha < 1$. На першому кроці при $k = 0$, $A^{(0)} = (a_{ij}^{(0)}) = (a_{ij})$;
2. розрахувати ваги $w^{(k)} = (w_1^{(k)}, ..., w_n^{(k)})^T$ з МПП $A^{(k)}$;
3. розрахувати $CR^{(k)}$. Якщо $CR^{(k)} \le 0.1$, перейти на крок 6, інакше перейти на крок 4;

4. розрахувати $A^{(k+1)} = (a_{ij}^{(k+1)})$, використовуючи один з двох методів:

4.1. $a_{ij}^{(k+1)} = (a_{ij}^{(k)})^{\alpha} \left(\dfrac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}} \right)^{1-\alpha}$ (зваженої геометричної середньої)

4.2. $$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} \alpha a_{ij}^{(k)} + (1-\alpha)\dfrac{w_i^{(k)}}{w_j^{(k)}}, & i = 1,2,...,n; \ \ j \ge i \\ \dfrac{1}{\alpha a_{ji}^{(k)} + (1-\alpha)\dfrac{w_j^{(k)}}{w_i^{(k)}}}, & i = 2,...,n; \ \ j < i \end{cases}$$

(зваженої арифметичної середньої)

5. $k := k+1$, перейти на крок 2;
6. вивести k, $A^{(k)}$, $CR^{(k)}$. $A^{(k)}$ – модифікована МПП з припустимою неузгодженістю ($CR^{(k)} \le 0.1$).

Твердження 2.8. (Збіжність алгоритму). Для описаного вище алгоритму $CR^{(k+1)} < CR^{(k)}$, $\lim\limits_{k \to +\infty} CR^{(k)} = 0$.

Критерії ефективності підвищення узгодженості:

1. $\delta^{(k)} = \max\limits_{i,j}\{| a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(0)} |\}$;
2. $\sigma^{(k)} = \dfrac{1}{n}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}(a_{ij}^{(k)} - a_{ij}^{(0)})^2}$.

Модифікація $A^{(k)}$ МПП A вважається прийнятною, якщо $\delta^{(k)} < 0.2$ і $\sigma^{(k)} < 0.1$ [78]. При цих значеннях модифікована МПП зберігає більшу частину інформації початкової МПП.

При виборі параметра α слід враховувати, що кількість ітерацій k збільшується при збільшенні значення α і чим більшим є α, тим меншим є відхилення модифікованої МПП від початкової. Доцільно вибирати значення α з інтервалу $0.5 \le \alpha < 1$ [78].

2.1.3. ММАІ при неточних оцінках експертів (стохастичні, інтервальні та нечіткі ММАІ)

Неточність, присутня в оцінках експертів, може бути виражена двома способами: по-перше, за допомогою точкових оцінок і функції розподілу ймовірностей; по-друге, за допомогою інтервальних оцінок без розподілу ймовірностей. Представлення точкових оцінок з апріорно заданими розподілами ймовірностей оцінок експертів призвело до декількох модифікацій МАІ, названих стохастичними МАІ, тоді як другий спосіб вираження неточності експертних оцінок потребує застосування інтервальних та нечітких методів знаходження ваг.

При використанні стохастичних методів для обробки експертних оцінок одним із головних питань є обґрунтування вибору закону розподілу оцінок експертів. Проблема полягає в тому, що цей розподіл в основному встановлюється розробником методу і не є математично обґрунтованим. Так, авторами стохастичних МАІ, що базується на методі імітаційного моделювання Монте-Карло [84] і регресійному методі пошуку ваг [67, 85, 86] використовується лог-нормальний закон розподілу експертних оцінок. Автори стохастичного МАІ з логіт- [87 – 89] і пробіт- [88] моделями, в свою чергу, пропонують мультиноміальний закон розподілу оцінок експертів. Існують також інші припущення щодо характеру цього розподілу [70]. Однак, питання строгого математичного обґрунтування того чи іншого закону розподілу експертних оцінок на сьогоднішній день залишається відкритим.

Перевага стохастичних МАІ в порівнянні з детермінованими аналогами полягає в можливості перевірки гіпотез щодо рівності у статистичному смислі рангів альтернативних варіантів рішень, розрахунок ймовірностей ранжувань і появ реверсу рангів між альтернативами.

Оцінювання ступеня виконання переваги однієї альтернативи над іншою можливо виконувати і для інтервальних та нечітких ваг альтернатив, оскільки існує велика кількість методів порівняння й ранжування нечітких та інтервальних чисел. Так, способи знаходження ступеня переваги однієї нечіткої оцінки над іншою запропоновані в [90 – 93]. Огляд великої кількості методів ранжування нечітких чисел виконаний у роботах [94, 95]. Способи порівняння інтервальних чисел розглядаються в [96 – 100].

В табл.2.3 представлені основні характеристики методів одержання ваг з інтервальних матриць парних порівнянь (ІМПП). Ці методи класифікуються за наступними критеріями:

• методи, які дозволяють одержувати ваги як з узгоджених, так і з неузгоджених ІМПП; а також методи, які працюють лише з узгодженими ІМПП або не гарантують одержання рішення у випадку неузгоджених ІМПП;

• методи, результатами роботи яких є точкові ваги і методи, результатами роботи яких є інтервальні ваги.

Більшість відомих методів дозволяють одержувати ваги з неузгоджених ІМПП. Але при істотній неузгодженості експертних оцінок виникає проблема складності ранжування альтернатив [100].

Різні погляди спостерігаються з приводу результуючих ваг: вони повинні бути чіткими чи інтервальними. Проблема полягає в тому, що при результуючих інтервальних вагах необхідно розробляти додаткові методи їх ранжування. У загальному випадку інтервальні локальні або глобальні ваги перекриваються на окремих діапазонах і у багатьох випадках можна одержати лише часткове ранжування [109]. З іншого боку, одержання чітких ваг є неприродним і нелогічним. Це видиме спрощення веде до втрати важливої інформації, яка може бути використана при оцінюванні ризику використання експертних оцінок. Результуючі інтервальні ваги

Таблиця 2.3. Основні характеристики методів отримання ваг з ІМПП

Метод	Характеристика			
	Неузг. ІМПП	Ваги		Міра узгодженості
		точк.	інтерв.	
Нечіткого програ-мування переваг (FPP) [103, 104]	+	+		цільова функція задачі нечіткого програмування
Імітаційного моделюваня Монте-Карло [106]	+		+	обмеженням є вимога припустимої узгодженості
Нелінійного програмування [101]	+		+	обмеженням є вимога припустимої узгодженості
Програмування переваг [108]	–		+	лише для узгоджених ІМПП
Лексикографічного цільового програ-мування [107]	+	+		немає
Інтервальний МАІ [97]	±		+	сума довжин отриманих інтервалів
Цільового програ-мування [102]	+		+	немає
Двохетапний [69]	+	+		цільова функція задачі лінійного програмування (ЛП) першого етапу
Двохетапний цільового програмування [105]	+		+	цільова функція задачі ЛП першого етапу

дозволяють оцінити присутню в інтервальній інформації невизначеність. Тому, більш доцільним для одержання ваг з ІМПП є метод, результатом роботи якого є інтервальні, а не точкові ваги.

Детальніше розглянемо методи, які дозволяють одержувати ваги з узгоджених і неузгоджених нечітких МПП. Одним з них є метод нечіткого програмування переваг [103, 104], який зводиться до класичної задачі нечіткого програмування з використанням принципу Белмана-Заде. Вводиться функція приналежності як ступінь задоволення експерта результуючими вагами, розглядається слабка неузгодженість оцінок експертів. Недолік цього методу – отримання точкових результуючих ваг.

Методом, який дозволяє отримувати інтервальні ваги з ІМПП, є метод Монте-Карло, запропонований Т.Сааті та Л.Варгасом [106]. З інтервалів оцінок ІМПП випадковим чином вибираються скалярні значення, будується чітка МПП, розраховується головний власний вектор останньої. Після проведення досить великої кількості імітацій будуються довірчі інтервали для кожного елементу власного вектора. Однак, обмеженість числа імітацій може призвести до більш вузьких інтервалів ваг порівняно з реальними. Інший метод, що дозволяє одержувати інтервальні ваги з ІМПП, запропоновано в [101]. Він базується на традиційному методі головного власного вектора, дозволяє отримати ваги при попередньо визначеному рівні узгодженості і зводиться до розв’язання задач нелінійного програмування.

В інтервальному МАІ [97] для знаходження інтервальних ваг формулюються дві задачі ЛП, названі верхньою і нижньою моделями, які базуються на використанні відношення інтервального включення. Перевагою цього методу є те, що задається умова нормування інтервального вектора ваг, недоліком – можливість застосування нижньої моделі лише до узгоджених ІМПП.

В методі цільового програмування [102] ваги знаходяться в результаті розв’язання однієї задачі лінійного програмування, при цьому аналізується вся ІМПП, а не окремо кожний елемент, як в методах [69, 97, 105], крім того, задається умова нормування інтервального вектора ваг. Недоліком є те, що не введено показника узгодженості ІМПП.

Одним з підходів до знаходження ваг з ІМПП є двохетапні методи [69, 105], в яких перший етап полягає у знаходженні мінімальних значень відхилень заданої експертом ІМПП від невідомої узгодженої МПП, а другий – у безпосередньому знаходженні ваг при знайдених відхиленнях. Такий підхід представляє логічні та інтуїтивно зрозумілі засоби оцінювання узгодженості ІМПП, також стає можливим здійснювати зворотній зв’язок з експертом з пред’явленням йому найбільш неузгоджених елементів (див. розділ 4).

Що стосується нечітких МАІ, то найбільш широко [37, 110 – 114] використовується нечіткий МАІ, запропонований в роботі [91]. Цей метод був названий методом розширеного аналізу (extent analysis method). Він дозволяє отримувати точкові ваги елементів ієрархії з нечіткої МПП, елементами якої є нечіткі трикутні числа, використовуючи нечітку арифметику, і не потребує розв’язання задач математичного програмування. На нечіткій арифметиці також базуються нечіткі МАІ, запропоновані в [115 – 117]. Але відомо, що застосування нечіткої арифметики може призвести до суперечливих результатів [101, 109].

2.2. Методи отримання групового рішення в ММАІ

Знаходження *групового рішення* можна проводити двома методами:

- шляхом агрегування індивідуальних оцінок (aggregating individual judgments, AIJ), коли група стає одним індивідом і діє як одна нова особа;
- шляхом агрегування індивідуальних пріоритетів (aggregating individual priorities, AIP), коли група діє як множина індивідів.

При використанні кожного з цих методів для отримання групової оцінки в основному використовують методи зважених середньої арифметичної (WAMM) і середньої геометричної (WGMM). При цьому, продовжуються дискусії щодо парето-оптимальності результатів роботи цих методів. Так, дослідження виконані в [118] показали, що використання GMM призводить до порушення парето-оптимальності рішення. Пізніше [119, 120] було встановлено що це порушення не пов'язане з недоліками GMM, оскільки група стає новим індивідом і діє як єдиний експерт, тому говорити про парето-оптимальність є неумісним. Порушення парето-оптимальності при груповому прийнятті рішень є очікуваним, оскільки фінальне агрегування є компромісом всіх членів групи. Порушення парето-оптимальності є наслідком того факту, що здійснюється агрегування індивідуальних оцінок, тому використовувати GMM доцільніше для агрегування індивідуальних пріоритетів на останньому рівні ієрархії. При такому підході результат є парето-ефективним [120].

Нехай $A^k = (a_{ij}^k)$ – МПП, надана k-м експертом при порівнянні n елементів, $i, j = 1,...,n$, $w^k = (w_1^k,...,w_n^k)$ – вектор ваг, отриманий з A^k, $w_i^k > 0$, $\sum_{i=1}^{n} w_i^k = 1$, β_k – вага (компетентність) k-го експерта, $\beta_k > 0$, $\sum_{k=1}^{m} \beta_k = 1$, $k = 1,...,m$, m – кількість експертів.

Детальніше розглянемо методи AIJ та AIP розрахунку групового вектору ваг $w^G = (w_i^G)$.

Метод AIJ полягає в наступному. З індивідуальних МПП A^k, використовуючи один з методів агрегування, розраховується групова МПП $A^G = (a_{ij}^G)$. Наприклад, при використанні методу агрегування WGMM елементи групової МПП дорівнюють $a_{ij}^G = \prod_{k=1}^{m} (a_{ij}^k)^{\beta_k}$, $i, j = 1,...,n$. Вектор ваг w^G розраховується з групової МПП шляхом використання одного з методів знаходження локальних ваг з МПП.

В *методі AIP* з індивідуальних МПП A^k розраховуються індивідуальні вектори ваг w^k, $k = 1,...,m$. Потім груповий вектор ваг w^G розраховується з індивідуальних векторів ваг, використовуючи один з методів агрегування. Так, при використанні метода WGMM елементи групового вектора ваг дорівнюють $w_i^G = \prod_{k=1}^{m} (w_i^k)^{\beta_k}$, $i = 1,...,n$.

Обидва методи AIJ і AIP приводять до однакового групового вектора ваг альтернатив у випадку використання WGMM і методу геометричної середньої знаходження локальних ваг (див. п. 1.3.5):

$$w_i^G(AIJ) = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}^G\right)^{1/n} = \left(\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{m} (a_{ij}^k)^{\beta_k}\right)^{1/n} = \prod_{k=1}^{m}\left(\left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}^k\right)^{1/n}\right)^{\beta_k} =$$

$$= \prod_{k=1}^{m} (w_i^k)^{\beta_k} = w_i^G(AIP) \cdot$$

Але при використанні метода власного вектора цей результат в загальному випадку буде невірним. Лише для узгодженої МПП A^k, для якої всі методи знаходження локальних ваг призводять до однакових результатів, методи AIJ і AIP при використанні WGMM є еквівалентними.

Для ілюстрації методу *AIJ* розглянемо обчислення групового геометричного індексу узгодженості GCI^G.

Геометричний індекс узгодженості розраховується за формулою (див.означення 2.3 п.2.1.1):

$$GCI = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} \ln^2 e_{ij},$$

де $e_{ij} = a_{ij} v_j / v_i$ – помилка апроксимації відношення v_i / v_j ненормованих ваг, знайдених методом геометричної середньої, за допомогою a_{ij}.

Нехай e_{ij}^k – помилка k-го експерта, $e_{ij}^k = a_{ij}^k \dfrac{v_j^k}{v_i^k}$, $\varepsilon_{ij}^k = \ln e_{ij}^k$, $k = 1,...,m$. Якщо використовуються методи AIJ, WGMM і RGMM, тоді групова помилка для a_{ij} задається як зважена геометрична середня для індивідуальних помилок:

$$e_{ij}^G = a_{ij}^G \frac{v_j^G}{v_i^G} = \prod_{k=1}^{m} (a_{ij}^k)^{\beta_k} \frac{\prod_{k=1}^{m} (v_j^k)^{\beta_k}}{\prod_{k=1}^{m} (v_i^k)^{\beta_k}} = \prod_{k=1}^{m} (a_{ij}^k v_j^k / v_i^k)^{\beta_k} = \prod_{k=1}^{m} (e_{ij}^k)^{\beta_k} \quad ,$$

тому *груповий геометричний індекс* узгодженості GCI^G не є середнім значенням індивідуальних GCI^k [121]:

$$GCI^G = \frac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} (\varepsilon_{ij}^G)^2 ,$$

де $\varepsilon_{ij}^G = \ln e_{ij}^G = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \varepsilon_{ij}^k$, β_k – коефіцієнт компетентності k-го експерта.

Для групового геометричного індексу узгодженості виконується наступне твердження.

Твердження 2.9. При використанні методів WGMM для агрегування, RGMM для отримання ваг і GCI як міри неузгодженості, виконується нерівність:

$$GCI^G \le \max_{k=1,...,m} \left\{ GCI^{[k]} \right\}.$$

Доведення. Нехай $\alpha = \max_{k=1,...,m} \left\{ GCI^{[k]} \right\}$. Тоді для всіх $k = 1,...,m$:

$$GCI^k \le \alpha \iff \sum_{1 \le i < j \le n} (\varepsilon_{ij}^k)^2 \le \gamma ,$$

де $\gamma = \dfrac{\alpha(n-1)(n-2)}{2}$.

Потрібно довести, що $GCI^G \le \alpha$, що еквівалентно доведенню $\sum_{1 \le i < j \le n} (\varepsilon_{ij}^G)^2 \le \gamma$.

Оскільки $\varepsilon_{ij}^G = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \varepsilon_{ij}^{[k]}$, то

$$(\varepsilon_{ij}^G)^2 = \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k \varepsilon_{ij}^{[k]} \right)^2 = \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2 (\varepsilon_{ij}^{[k]})^2 + 2\sum_{k<l}^{m} \beta_k \beta_l \varepsilon_{ij}^{[k]} \varepsilon_{ij}^{[l]}$$

$$\text{і} \sum_{1 \le i<j \le n} (\varepsilon_{ij}^G)^2 = \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2 \sum_{1 \le i<j \le n} (\varepsilon_{ij}^{[k]})^2 + 2\sum_{k<l}^{m} \beta_k \beta_l \sum_{1 \le i<j \le n} \varepsilon_{ij}^{[k]} \varepsilon_{ij}^{[l]}.$$

Оскільки $\sum_{1 \le i<j \le n} (\varepsilon_{ij}^k)^2 \le \gamma$ і для будь-яких $a, b \in \Re^n$ виконується нерівність $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le Max\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2, \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right)$, то отримуємо

$$\sum_{1 \le i<j \le n} \varepsilon_{ij}^{[k]} \varepsilon_{ij}^{[l]} \le Max\left(\sum_{1 \le i<j \le n} (\varepsilon_{ij}^{[k]})^2, \sum_{1 \le i<j \le n} (\varepsilon_{ij}^{[l]})^2 \right) \le \gamma.$$

Тому $\sum_{1 \le i<j \le n} (\varepsilon_{ij}^G)^2 \le \gamma \sum_{k=1}^{m} \beta_k^2 + 2\gamma \sum_{k<l}^{m} \beta_k \beta_l = \gamma \left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k \right)^2 = \gamma$. Доведено.

З твердження 2.9 випливає, що якщо індивідуальні оцінки мають припустиму неузгодженість, тоді групові оцінки також мають припустиму неузгодженість, тобто $(GCI^k \le \tau \ \ \forall k \in [1;m]) \Rightarrow (GCI^G \le \tau)$, де τ – поріг припустимої неузгодженості.

Застосовування МАІ в груповому прийнятті рішень передбачає однорідність груп експертів [122], що часто порушується для груп великого розміру. Якщо експерти не мають однорідних поглядів, то немає сенсу проводити агрегування цих індивідуальних оцінок. У зв'язку з цим доцільно проводити кластеризацію оцінок експертів на базі відношення подібності між індивідуальними перевагами. Коротко опишемо цей метод.

Кожний експерт будує ієрархію, тобто визначає фактори, що впливають на досягнення головної цілі прийняття рішення. Потім індивідуальні ієрархії аналізуються, визначаються уніфікована множина факторів і відмінності в індивідуальних множинах факторів. Кожний фактор, який використовується в індивідуальній моделі, відображається на один з факторів уніфікованої множини. Визначаються уніфіковані функції корисності, які потім групуються в різні класи для наступного агрегування.

В іншій моделі групового прийняття рішення поєднуються три можливі структури переваг, а мультиплікативні відношення переваг використовуються як база для однорідного представлення експертних оцінок [123]. Передбачається, що експерти представляють свої переваги однією з наступних трьох структур:

- у вигляді ранжування альтернатив;
- наданням функції корисності;
- у вигляді мультиплікативного відношення переваги.

Спочатку будується функція перетворення порядкових оцінок експертів і функції корисності у відношення переваги, а потім проводиться агрегування однорідних експертних оцінок у єдине колективне мультиплікативне відношення переваги за допомогою оператора порядкової зваженої середньої геометричної (OWG – ordered weighted geometric) [124, 125].

Окремим питанням при знаходженні групового рішення є розрахунок коефіцієнтів *компетентності експертів*. Один з підходів до цього – формувати в ієрархії окремий рівень експертів, який розмістити безпосередньо нижче головної цілі, або ж будувати окрему ієрархію оцінювання експертів за критеріями або цілями ОПР [1, 2, 6, 7]. В обох випадках відносні компетентності експертів розраховуються як ваги будь-яких інших елементів ієрархії із застосуванням всієї теорії МАІ. Парні порівняння експертів здійснюються, наприклад, ОПР, а груповий синтез – за допомогою одного з методів ієрархічного синтезу (див. п. 3.1).

Інший метод знаходження величин компетентності експертів базується на об’єднанні самооцінки, взаємної оцінки та оцінки на основі об’єктивних даних за допомогою коефіцієнту схожості ключових слів обговорюваного питання із базовими ключовими словами [51]. В цій же роботі пропонується метод розрахунку коефіцієнту узгодженості множини індивідуальних парних порівнянь з урахуванням компетентності експертів, а також визначення узгодженості для агрегованої групової оцінки.

2.3. Приклади

2.3.1. Ілюстрація обчислення ваг при точкових оцінках експертів

Розглянемо МПП порівняння критеріїв класичної задачі вибору будинку [2]:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 6 & 6 & 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 1/3 & 5 & 3 & 3 & 1/5 & 1/7 \\ 1/3 & 3 & 1 & 6 & 3 & 4 & 6 & 1/5 \\ 1/7 & 1/5 & 1/6 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/4 & 4 & 2 & 1 & 1/5 & 1/6 \\ 3 & 5 & 1/6 & 7 & 5 & 5 & 1 & 1/2 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо ваги критеріїв, використовуючи традиційний метод EM, а також розглянуті в п.2.1.1 методи адитивної нормалізації, геометричної середньої (логарифмічних найменших квадратів) та стійких до викидів методів, що базуються на побудові матриці парних пропорцій (табл.2.4).

Результати показують, що різні методи призводять до різних порядків ранжувань критеріїв, а саме (в порядку спадання важливості):

- 8, 3, 1, 7, 2, 6, 5, 4 (метод EM);
- 8, 1, 7, 3, 2, 6, 5, 4 (метод AN);
- 8, 1, 7, 3, 2, 6, 5, 4 (метод геометричної середньої);
- 8, 7, 1, 3, 2, 6, 5, 4 (стійкі до викидів методи 1 і 2);

Таблиця 2.4. Результати застосування різних методів знаходження ваг

Номер критерію	Ваги				
	EM	AN	RGMM	Стійкі до викидів	
				Метод 1	Метод 2
1	0.173	0.111	0.175	0.150	0.114
2	0.054	0.046	0.063	0.054	0.045
3	0.188	0.098	0.149	0.141	0.097
4	0.018	0.024	0.019	0.022	0.022
5	0.031	0.038	0.036	0.037	0.036
6	0.036	0.039	0.042	0.041	0.038
7	0.167	0.099	0.167	0.163	0.134
8	0.333	0.392	0.350	0.392	0.512
	CR=0.170	HCR=0.166	GCI=0.529		

Така відмінність в порядках ранжування є наслідком неприпустимо високої неузгодженості даної МПП. Так, відношення узгодженості для цієї МПП, що дорівнює CR=0.170, і гармонічне відношення узгодженості HCR=0.166 перевищують порогові значення 0.1; геометричний індекс узгодженості GCI=0.529 також перевищує свій поріг 0.370.

2.3.2. Ілюстрація методів підвищення узгодженості МПП

Проведемо автоматичне коригування МПП з прикладу 2.3.1. Результати цього коригування при використанні методу ЕМ знаходження ваг і різних значеннях параметру α наведені в табл.2.5. Вони показують, що при всіх α, що розглядалися, знайдені за скоригованими МПП ваги задають той самий порядок ранжування, що і метод ЕМ для початкової МПП. Більшим α відповідають більші CR, оскільки чим більшим є α, тим меншим є відхилення скоригованої МПП від початкової неузгодженої.

Як зазначалося вище, коригування МПП вважається прийнятним, якщо значення δ і σ задовольняють умовам $\delta < 0.2$ і $\sigma < 0.1$. Для даного прикладу отримуємо припустиму неузгодженість (CR=0.037 при $\alpha = 0.5$ та CR=0.076 при $\alpha = 0.7$), але помилки δ і σ є досить великими.

Таблиця 2.5. Значення ваг w, відношення узгодженості CR та критерії ефективності δ і σ автоматичного підвищення узгодженості МПП при різних значеннях α: а)$\alpha = 0.1$, б)$\alpha = 0.3$, в)$\alpha = 0.5$, г)$\alpha = 0.7$, д,е)$\alpha = 0.9$.

а)

α	k	$w^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.1	1	0.173	0.001	9.451	1.831
		0.055			
		0.184			
		0.018			
		0.031			
		0.037			
		0.167			
		0.335			

б)

α	k	$w^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.3	1	0.174	0.013	6.674	1.390
		0.056			
		0.178			
		0.018			
		0.032			
		0.038			
		0.168			
		0.336			

в)

α	k	$w^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.5	1	0.174	0.037	4.339	0.987
		0.057			
		0.176			
		0.018			
		0.032			
		0.038			
		0.170			
		0.336			

г)

α	k	$w^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.7	1	0.173 0.056 0.178 0.018 0.032 0.038 0.170 0.335	0.076	2.375	0.601

д)

α	k	$w^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.9	1	0.173 0.055 0.184 0.018 0.031 0.037 0.168 0.334	0.134	0.924	0.208

е)

α	k	$w^{(k)}$	$CR^{(k)}$	$\delta^{(k)}$	$\sigma^{(k)}$
0.9	2	0.173 0.056 0.180 0.018 0.032 0.037 0.169 0.335	0.105	1.647	0.386

Знайдемо викиди в даній МПП. Для цього застосуємо методи, розглянуті в п.2.1.2. Результати використання всіх трьох методів показують, що *викидом* є елемент a_{37} і відповідно обернено симетричний йому елемент a_{73}. Дійсно, згідно з методом 1, виключаючи з розгляду по черзі один з критеріїв отримаємо наступні значення індексу узгодженості:

- CI =0.201 без першого критерію;
- CI =0.266 без другого критерію;
- CI =0.124 без третього критерію;
- CI =0.272 без четвертого критерію;
- CI =0.280 без п'ятого критерію;
- CI =0.276 без шостого критерію;
- CI =0.121 без сьомого критерію;
- CI =0.256 без восьмого критерію.

Результуючі CI свідчать про те, що без 3-го і 7-го критеріїв величина CI значно нижча, тому елементи a_{37} і a_{73} – викиди.

Згідно з методом 2 знаходження викидів математичні сподівання $M(R_i^r)$ коефіцієнтів кореляції між i-м та всіма іншими рядками МПП D дорівнюють:

$$M(R_i^r) = (0.742 \quad 0.825 \quad 0.519 \quad 0.776 \quad 0.775 \quad 0.802 \quad 0.747 \quad 0.692).$$

Математичні сподівання $M(R_j^c)$ коефіцієнтів кореляції між j-м та всіма іншими стовпчиками D дорівнюють:

$$M(R_j^c) = (0.684 \quad 0.798 \quad 0.646 \quad 0.749 \quad 0.744 \quad 0.755 \quad 0.230 \quad 0.680).$$

Найменше значення серед $M(R_i^r)$ відповідає кореляції між третім і усіма іншими рядками МПП (значення 0.519). Найменше значення серед $M(R_j^c)$ відповідає кореляції між сьомим і усіма іншими стовпчиками МПП (значення 0.230). Отже, елемент a_{37} (і відповідно a_{73}) МПП A – найбільш неузгоджений.

Згідно з методом 3 знаходження викидів значення $\chi^2_{37} = 11.907$ і $\chi^2_{73} = 1.543$ відхилень емпіричної МПП від теоретичної (табл. 2.6) лежать за межами довірчого інтервалу для χ_{ij}^2, оскільки середнє і стандартне відхилення для χ_{ij}^2 дорівнюють 0.511 і 1.507 відповідно. Сума відхилень $\chi^2 = 32.715$. Тому елементи a_{37} і a_{73} – викиди також і за методом 3.

Таблиця 2.6. Значення Δ_{ij} відхилень емпіричної МПП від теоретичної

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.324	0.130	0.506	0.121	0.149	0.195	1.351	0.122
2	0.441	0.439	0.356	0.549	0.207	0.244	0.529	0.029
3	0.854	0.073	0.251	0.050	0.353	0.004	***11.907***	0.107
4	0.000	0.065	0.000	0.176	0.019	0.065	0.002	0.172
5	0.096	0.313	0.010	1.246	0.000	0.250	0.093	0.046
6	0.220	0.634	0.177	1.326	0.204	0.126	0.229	0.005
7	1.137	0.267	***1.543***	0.027	0.010	0.022	0.376	0.003
8	1.079	0.245	1.905	0.767	0.141	0.103	0.171	0.153

2.3.3. Ілюстрація групових методів МАІ

Розглянемо задачу оцінювання чотирьох альтернатив чотирма експертами. МПП, побудовані за оцінками кожного експерта, наведені нижче [121, 126]:

$$A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \\ 1/4 & 1 & 3 & 4 \\ 1/6 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/7 & 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},\ A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 1/5 & 1 & 4 & 6 \\ 1/7 & 1/4 & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/6 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 8 \\ 1/3 & 1 & 4 & 5 \\ 1/5 & 1/4 & 1 & 2 \\ 1/8 & 1/5 & 1/2 & 1 \end{pmatrix},\ A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \\ 1/4 & 1 & 3 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 & 2 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Застосуємо для агрегування індивідуальних оцінок методи AIJ і WGMM і знайдемо групові МПП A^G для двох груп експертів. Для першої групи покладемо однакову компетентність експертів, $\beta_k = 0.25$, $k = 1,...,4$. В другій групі експерти мають різну компетентність: $\beta_1 = 0.1$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.3$, $\beta_4 = 0.4$.

Для цих двох груп групові МПП дорівнюють:

$$A^{G1} = \begin{pmatrix} 1 & 3.936 & 5.692 & 7.416 \\ 0.254 & 1 & 3.464 & 4.356 \\ 0.176 & 0.289 & 1 & 2 \\ 0.135 & 0.230 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{G2} = \begin{pmatrix} 1 & 3.837 & 5.446 & 7.204 \\ 0.261 & 1 & 3.464 & 4.134 \\ 0.184 & 0.287 & 1 & 2 \\ 0.139 & 0.242 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вектори ваг, отримані за методом RGMM та геометричні індекси узгодженості *GCI* для шести МПП представлені в табл.2.7. Індивідуальні МПП $A^1 - A^4$ і групові A^{G1}, A^{G2} мають припустиму неузгодженість, оскільки *GCI* для них менше за порогове значення 0.35 (див. табл. 2.2 п.2.1.1).

Таблиця 2.7. Ваги і *GCI* для індивідуальних і групових МПП

Альтернативи	Ваги					
	A^1	A^2	A^3	A^4	A^{G1}	A^{G2}
1	0.614	0.646	0.569	0.597	0.608	0.602
2	0.225	0.227	0.276	0.221	0.237	0.239
3	0.099	0.079	0.097	0.109	0.096	0.098
4	0.062	0.048	0.058	0.074	0.060	0.062
GCI	0.135	0.236	0.119	0.166	0.155	0.155

РОЗДІЛ 3

Реверс рангів в ММАІ

3.1. Поняття реверсу рангів. Постановка задачі

Реверс рангів (РР) – це зміна рангів альтернатив при додаванні чи вилученні альтернативи, коли множина критеріїв оцінювання альтернатив та ваги критеріїв залишаються незмінними та не змінюються оцінки альтернатив за критеріями.

Поява РР в МАІ широко обговорюється в науковій літературі, зокрема у Дж. Барзілаї та Ф. Лутсма [75], Е. Тріантафілоу [127, 128], Ю. Самохвалова [129], В. Белтона та Т. Гера [130], Е. Формана [131], Т. Сааті [132–134]. Дослідження появи явища РР в інших методах багатокритеріального оцінювання, таких як «лінія», «трикутник», «квадрат» виконані В. Г. Тоценко в роботі [135].

Оскільки в подальшому буде використовуватися поняття глобальних та локальних ваг, нагадаємо її визначення.

Глобальною вагою елемента ієрархії називається вага елемента відносно вершини ієрархії (в більшості випадків – це головна ціль прийняття рішення), розрахована за локальними вагами одним з методів ієрархічного синтезу.

Локальною вагою елемента ієрархії називається вага елемента відносно елементу сусіднього вищого рівня ієрархії, розрахована з матриці парних порівнянь методом головного власного вектору чи одним із наближених методів, наприклад, геометричної середньої.

В подальшому нам знадобиться також поняття оптимальної альтернативи.

Означення 3.1. *Оптимальною* назвемо альтернативу, яка має найбільшу глобальну вагу. Оптимальна за одним з критеріїв – це альтернатива, яка має найбільшу вагу за цим критерієм.

Існує декілька поглядів щодо можливості існування РР в методах підтримки прийняття рішень та припустимості РР для конкретних практичних задач. Так, однією з аксіом багатовимірної теорії корисності [136] є неприпустимість РР при додаванні до розгляду неоптимальної альтернативи. Розробник МАІ Т. Сааті, в свою чергу, стверджує, що існують реальні системи, в яких РР може виникнути, і називає їх замкненими системами, і системи, в яких виникнення РР є небажаним – відкриті системи. Замкненими є системи з фіксованою кількістю ресурсів, а відкритими – системи, для яких ресурси можуть додаватися чи вилучатися в процесі їх функціонування. Задачі розподілу ресурсів та прогнозування належать до замкнених, задачі вибору однієї альтернативи – до відкритих.

Встановлено декілька причин появи РР в МАІ. Однією з причин є використання адитивної функції синтезу (агрегування) ваг альтернатив за багатьма критеріями. У зв'язку з цим на сьогоднішній день існує декілька модифікацій МАІ з різними методами синтезу, проте жодна з них не виключає повністю явища РР. В початково розробленому МАІ використовувався так званий дистрибутивний синтез (див. п. 1.3.6) – лінійна згортка локальних ваг альтернатив, де ваговими коефіцієнтами є ваги критеріїв. Потім був запроваджений ідеальний синтез з іншим методом нормування локальних ваг альтернатив. Дистрибутивний синтез пропонувалося використовувати в замкнених системах, а ідеальний синтез – у відкритих [132], оскільки при використанні останнього, як передбачалося, РР не виникає. Але, як показали подальші дослідження, деякі види РР можуть виникати також і при використанні ідеального синтезу [75, 128, 130, 137].

В [75] пропонується модифікований МАІ з мультиплікативним синтезом, який є мультиплікативною згорткою локальних ваг альтернатив.

Для уникнення появи РР Ю. Самохвалов та Е. Тріантафілоу розробили модифікований МАІ з синтезом за методом групового врахування бінарних відношень переваг альтернатив (ГВББВПА), в якому дистрибутивний та ідеальний синтези застосовуються до пари альтернатив за всіма критеріями з наступним об'єднанням цих часткових розв'язків [128, 129]. Ідея підходу полягає в тому, що для бінарних векторів операція нормалізації в початковому МАІ не повинна викликати ефекту РР. Подальші дослідження показали [128, 137], що деякі види РР можуть виникати також і при використанні методу ГВББВПА.

В [133] Т. Сааті стверджує, що причиною появи РР є наявність альтернатив-копій, які відрізняються не більш ніж на 10% за всіма критеріями. Тому, якщо до розгляду додається альтернатива-копія, то для уникнення РР до ієрархії слід додати ще один критерій виду «кількість елементів певного типу». Дослідження Дж. Дауера [139] показали, що ця 10-ти процентна умова не забезпечує невиникнення РР. РР може виникати також і при наявності альтернатив, які не є копіями. Емпіричне дослідження питання значущості 10-ти процентної умови Т. Сааті при використанні різних шкал оцінювання проведено в [140].

В більш пізніх роботах [134] Т. Сааті відокремлює три види відношень між альтернативами: залежність, незалежність і умовна незалежність. Так, якщо ваги критеріїв залежать від альтернатив, то співвідношення між вагами альтернатив є інваріантним до додавання нової альтернативи. Ця інваріантість має місце також і в більш строгому випадку, коли критерії не залежать від альтернатив, але самі альтернативи є структурно незалежними між собою. Коли ж пропорційність за кожним критерієм не зберігається внаслідок структурної залежності, то може виникнути РР. Тому, при використанні ідеального синтезу, якщо оптимальна альтернатива зберігається, то співвідношення між альтернативами також зберігається і РР не виникає. Якщо ж додається альтернатива, яка є кращою за «існуючий ідеал» хоча б за одним з критеріїв, то ранги можуть змінитися.

В [141] пропонується модифікація МАІ – DEAHP – поєднання МАІ з методом комплексного аналізу даних (DEA). В DEAHP ваги альтернатив розраховуються окремо для кожної альтернативи, використовуючи окрему задачу лінійного програмування. Крім того, в DEAHP, на відміну від традиційних методів синтезу МАІ, нормалізація не проводиться. Також слід зазначити, що згідно з DEAHP ваги альтернатив розраховуються відносно ваги оптимальної альтернативи, тобто DEAHP в цьому плані є подібним до методу ідеального синтезу МАІ. Тому DEAHP виключає можливість виникнення РР при додаванні/виключенні неоптимальних альтернатив. Але, якщо виключається альтернатива, яка має найбільшу вагу, то ранжування альтернатив може змінитися.

Таким чином, РР може виникнути при використанні будь-якого методу синтезу. Поява цього явища залежить також від властивості альтернативи, що додається/вилучається.

Розглянемо постановку задачі оцінювання РР в МАІ з різними методами синтезу.

Постановка задачі оцінювання реверсу рангів в МАІ

Дано:

- $A = \{A_i \mid i = 1,...,n\}$ − множина альтернативних варіантів рішень;
- $C = \{C_j \mid j = 1,...,m\}$ − множина критеріїв;
- $D^j = (d_{ik}^j)$ − узгоджена матриця парних порівнянь n альтернатив за критерієм C_j, $i,k = 1,...,n$;
- $D^{*j} = (d_{ik}^{*j})$ − узгоджена матриця парних порівнянь $n+1$ альтернативи за критерієм C_j, $i,k = 1,...,n+1$, де $d_{ik}^{*j} = d_{ik}^j$ при $i,k = 1,...,n$;
- w_j^C − вага критерію C_j, $\sum_{j=1}^{m} w_j^C = 1$.
- w_i^{glob} − глобальні ваги альтернатив $A_i, i = 1,...,n$;

- w_i^{*glob} – глобальні ваги альтернатив A_i після додавання додаткової альтернативи A_{n+1}, $i = 1,...,n+1$.

Потрібно:

- встановити, чи має місце РР при використанні методу синтезу МАІ,
- виявити випадки появи РР,
- знайти частоти появи РР.

Детальніше розглянемо методи синтезу МАІ.

3.2. Методи синтезу ММАІ

Синтезом називається метод розрахунку агрегованих глобальних ваг альтернатив за багатьма критеріями. Розглянемо постановку задачі багатокритеріального оцінювання.

Дано:

- $A = \{A_i \mid i = \overline{1,N}\}$ – множина альтернативних варіантів рішень;
- $C = \{C_j \mid j = \overline{1,M}\}$ – множина критеріїв;
- a_{ij} – вага альтернативи A_i за критерієм C_j;
- w_j^C – вага критерію C_j, $w_j^C > 0$, $\sum_{j=1}^{M} w_j^C = 1$.

Потрібно:

- знайти глобальні ваги w_i^{glob} альтернатив A_i, $i = \overline{1,N}$.

На сьогоднішній день розроблено модифіковані МАІ з дистрибутивним [1–4], ідеальним [1–4] і мультиплікативним [75, 141] синтезами та синтезом за методом ГВБВПА [127–129]. Коротко опишемо ці методи.

3.2.1. Метод дистрибутивного синтезу

Метод дистрибутивного синтезу є традиційним для МАІ (див. п. 1.3.6). Глобальна вага альтернативи A_i розраховується за формулою

$$w_i^{glob} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij} \ ,$$

де $r_{ij} = a_{ij} / \sum\limits_{k=1}^{N} a_{kj}$ – нормовані значення ваг a_{ij}, $\sum\limits_{i=1}^{N} r_{ij} = 1 \ \forall j = \overline{1, M}$.

3.2.2. Метод ідеального синтезу

Глобальна вага альтернативи A_i розраховується так само, як і в методі дистрибутивного синтезу, за допомогою адитивної згортки:

$$w_i^{glob} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij} \ ,$$

але нормування ваг a_{ij} здійснюється по-іншому, а саме $r_{ij} = a_{ij} / \max\limits_{k=1,\ldots,N} a_{kj}$.

3.2.3. Метод ГВБВПА

Цей метод полягає у розбитті проблеми на підпроблеми, досліджуючи одночасно тільки пару альтернатив з усієї множини альтернатив. Розглядаються $N(N-1)/2$ підзадач і визначаються $N(N-1)/2$ пар глобальних ваг альтернатив $(w_{A_i}^{ik}, w_{A_k}^{ik})$, де $w_{A_i}^{ik}$ – глобальна вага альтернативи A_i при одночасному розгляді тільки пари A_i та A_k, $i = \overline{1, N}$, $k = \overline{1, (N-1)/2}$. Значення $w_{A_i}^{ik}$ розраховується за дистрибутивним методом:

$$w_{A_i}^{ik} = \sum_{j=1}^{M} w_j^C \cdot r_{ij} \quad ,$$

де $r_{lj} = \frac{a_{lj}}{a_{ij} + a_{kj}}$, $l \in \{i, k\}$, $r_{ij} + r_{kj} = 1$.

Для об’єднання часткових розв’язків будується матриця $P = (w_{A_i}^{ik} / w_{A_k}^{ik})$, $i, k = \overline{1, N}$, яка задовольняє всім властивостям традиційної матриці парних порівнянь: альтернативи попарно порівнюються відносно всіх критеріїв, вона є обернено симетричною. Ваги, отримані з матриці P, формують загальний розв’язок задачі.

3.2.4. Метод мультиплікативного синтезу

При порівнянні альтернатив A_i та A_k за методом мультиплікативного синтезу розраховується наступний добуток:

$$P\left(\frac{A_i}{A_k}\right) = \prod_{j=1}^{M}\left(\frac{a_{ij}}{a_{kj}}\right)^{w_j^C}, \; i,k = \overline{1,N}.$$

Якщо $P(A_i / A_k) \geq 1$, тоді альтернатива A_i є важливішою за альтернативу A_j.

Глобальна вага w_i^{glob} альтернативи A_i розраховується за формулою

$$w_i^{glob} = \prod_{j=1}^{M}(a_{ij})^{w_j^C}, \; i = \overline{1,N}.$$

3.3. Види реверсів рангів. Властивість транзитивності переваг

Відокремлюють декілька видів реверсу рангів:

1) зміна знаку переваги між старими альтернативами

Наприклад, ранжування альтернатив дорівнювало $A_1 \succ A_2 \succ ... \succ \boldsymbol{A_i} \succ \boldsymbol{A_k} \succ ... \succ A_n$, а після додавання до розгляду ще однієї альтернативи A_{n+1} ранжування стало $A_1 \succ A_2 \succ ... \succ \boldsymbol{A_k} \succ \boldsymbol{A_i} \succ ... \succ A_n$.

В загальному випадку умова появи цього виду реверсу рангів для пари альтернатив A_i та A_k, $i,k = 1,...,n$ наступна:

$$(\Delta w_{ik}^{glob} \cdot \Delta w_{ik}^{*glob} < 0) \vee ((\Delta w_{ik}^{glob} = 0) \wedge (\Delta w_{ik}^{*glob} \neq 0)) \vee ((\Delta w_{ik}^{glob} \neq 0) \wedge (\Delta w_{ik}^{*glob} = 0)),$$

де $\Delta w_{ij}^{glob} = w_i^{glob} - w_j^{glob}$, $\Delta w_{ik}^{*glob} = w_i^{*glob} - w_k^{*glob}$.

2) зміна оптимальної альтернативи

Оптимальна альтернатива − альтернатива, яка має найбільшу глобальну вагу. Альтернатива, *оптимальна за одним з критеріїв* – це альтернатива, яка має найбільшу вагу за цим критерієм (локальну вагу).

Умова появи цього виду реверсу рангів: $i \neq i^*$, де i − номер оптимальної альтернативи при розгляді n альтернатив, $i: w_i^{glob} = \max\limits_{k=1,...,n} w_k^{glob}$, i^* − номер оптимальної альтернативи при розгляді $n+1$ альтернативи, $i^*: w_{i^*}^{glob} = \max\limits_{k=1,...,n,n+1} w_k^{*glob}$.

3) *зміна рангів альтернатив при їх попарному розгляді в порівнянні з розглядом всіх альтернатив одночасно.*

Нехай ранжування при одночасному розгляді n альтернатив наступне: $A_1 \succ A_2 \succ ... \succ \boldsymbol{A_i} \succ \boldsymbol{A_k} \succ ... \succ A_n$. Виконаємо декомпозицію задачі прийняття рішень. Будемо розраховувати глобальні ваги лише для пари альтернатив. Потім об'єднаємо знайдені часткові розв'язки у загальне ранжування. Якщо отримане ранжування не співпадає із початковим ранжуванням (при одночасному розгляді всіх альтернатив), наприклад, об'єднане ранжування дорівнює $A_1 \succ A_2 \succ ... \succ \boldsymbol{A_k} \succ \boldsymbol{A_i} \succ ... \succ A_n$, то виникає реверс рангів.

Ефективний метод багатокритеріального прийняття рішень має задовольняти властивості транзитивності. В наступних двох твердженнях досліджується виконання властивості транзитивності ранжування при використанні методів дистрибутивного, ідеального та мультиплікативного синтезу.

Твердження 3.1. Ранжування, отримані методами дистрибутивного та ідеального синтезу з узгоджених МПП не завжди задовольняють властивості транзитивності.

Для доведення цього твердження розглянемо наступний контрприклад, в якому порушується транзитивність переваг при використанні методу ідеального синтезу.

Приклад 3.1.

Нехай три альтернативи $A_1 - A_3$ порівнюються за чотирма критеріями $C_1 - C_4$. Припустимо, що оцінки альтернатив за критеріями представлені дійсними (ненормованими) числами в неперервному інтервалі $[1,9]$ (табл.3.1). Використаємо для розрахунку ваг метод ідеального синтезу.

Таблиця 3.1. Ненормовані оцінки альтернатив за критеріями (в дужках – ваги критеріїв)

Альтернативи	Ваги			
	C_1 (0.27)	C_2 (0.41)	C_3 (0.05)	C_4 (0.27)
A_1	1.92	7.59	1.27	6.13
A_2	3.12	4.31	8.57	7.11
A_3	7.70	4.77	7.45	3.29

Розглянемо пару альтернатив (A_1, A_2).

Нормовані ваги цих альтернатив дорівнюють: ($\frac{1.92}{3.12}$, 1) за критерієм C_1; (1, $\frac{4.31}{7.59}$) за критерієм C_2; ($\frac{1.27}{8.57}$, 1) за критерієм C_3; ($\frac{6.13}{7.11}$, 1) за критерієм C_4.

Тоді ваги за методом ідеального синтезу дорівнюють:

$w_1^{12} = \frac{1.92}{3.12} \cdot 0.27 + 1 \cdot 0.41 + \frac{1.27}{8.57} \cdot 0.05 + \frac{6.13}{7.11} \cdot 0.27 = 0.8163$,

$w_2^{12} = 1 \cdot 0.27 + \frac{4.31}{7.59} \cdot 0.41 + 1 \cdot 0.05 + 1 \cdot 0.27 = 0.8228$. Тому $A_2 \succ A_1$.

Аналогічні розрахунки для пари альтернатив (A_1, A_3) призводять до ваг $w_1^{13} = 0.7558$, $w_3^{13} = 0.7226$, тому отримали ранжування $A_1 \succ A_3$. Однак, при розгляді A_2 і A_3, ваги дорівнюють $w_2^{23} = 0.7999$, $w_3^{23} = 0.8484$ і ранжування наступне: $A_3 \succ A_2$. Таким чином, транзитивність переваг порушується.

Подібне порушення спостерігається і при використанні дистрибутивного синтезу. Твердження доведено.

Твердження 3.2. Ранжування, отримані методом мультиплікативного синтезу з узгоджених МПП задовольняють властивості транзитивності.

Доведення. Розглянемо будь-які три альтернативи A_1, A_2, A_3. Нехай ці альтернативи оцінюються за M критеріями. Припустимо, що $A_1 \succ A_2$, тоді згідно з мультиплікативним синтезом виконується наступна нерівність:

$$P\left(\frac{A_1}{A_2}\right) = \prod_{j=1}^{M}\left(\frac{a_{1j}}{a_{2j}}\right)^{w_j^C} > 1 \;\Leftrightarrow\; \prod_{j=1}^{M}(a_{1j})^{w_j^C} > \prod_{j=1}^{M}(a_{2j})^{w_j^C}. \qquad (3.1)$$

Аналогічно, припустимо, що $A_2 \succ A_3$, тоді

$$P\left(\frac{A_2}{A_3}\right) = \prod_{j=1}^{M}\left(\frac{a_{2j}}{a_{3j}}\right)^{w_j^C} > 1 \;\Leftrightarrow\; \prod_{j=1}^{M}(a_{2j})^{w_j^C} > \prod_{j=1}^{M}(a_{3j})^{w_j^C}. \qquad (3.2)$$

Об'єднуючи нерівності (3.1) и (3.2), отримаємо:

$$\prod_{j=1}^{M}(a_{1j})^{w_j^C} > \prod_{j=1}^{M}(a_{3j})^{w_j^C} \;\Leftrightarrow\; \prod_{j=1}^{M}\left(\frac{a_{1j}}{a_{3j}}\right)^{w_j^C} > 1 \;\Leftrightarrow\; A_1 \succ A_3.$$

Отримали, що $(A_1 \succ A_2) \wedge (A_2 \succ A_3) \Rightarrow (A_1 \succ A_3)$, що означає виконання умови транзитивності. Вищенаведені міркування розповсюджуються на випадок N альтернатив, тобто, аналогічно доводиться, що метод мультиплікативного синтезу *не призводить* до нетранзитивного ранжування $A_1 \succ A_2 \succ ... \succ A_k \succ ... \succ A_1$ (при умові, що МПП є узгодженими). Твердження доведено.

Приклад 3.2.

Розглянемо умову прикладу 3.1. Застосуємо метод мультиплікативного синтезу послідовно до кожної з пар альтернатив.

Для пари (A_1, A_2) маємо ранжування $A_2 \succ A_1$, оскільки

$$R(A_1/A_2) = (1.92/3.12)^{0.27}(7.59/4.31)^{0.41}(1.27/8.57)^{0.05}(6.13/7.11)^{0.27} = 0.966.$$

Далі розглядається пара (A_1, A_3), $A_3 \succ A_1$:

$$R(A_1/A_3) = (1.92/7.70)^{0.27}(7.59/4.77)^{0.41}(1.27/7.45)^{0.05}(6.13/3.29)^{0.27} = 0.9.$$

Остання пара (A_2, A_3) впорядкована наступним чином $A_3 \succ A_2$, так як

$$R(A_1/A_3) = (3.12/7.70)^{0.27}(4.31/4.77)^{0.41}(8.57/7.45)^{0.05}(7.11/3.29)^{0.27} = 0.932$$

Таким чином, транзитивність переваг при використанні мультиплікативного синтезу зберігається.

3.4. Моделювання виникнення реверсів рангів

Для виявлення випадків та знаходження частот появи реверсу рангів при використанні різних методів синтезу ММАІ було проведене комп’ютерне моделювання.

Умови моделювання:

1) випадковим чином генерувалися узгоджені МПП альтернатив відносно критеріїв;
2) для $N = 2,3,4,5$ альтернатив був проведений повний перебір всіх узгоджених МПП;
3) для кожного методу синтезу і для фіксованого числа альтернатив було проведено 10000 незалежних експериментів для знаходження відносних частот появи різних видів РР;
4) досліджувалася поява РР двох видів: зміна знаку переваги між старими альтернативами (вид 1) і зміна оптимальної альтернативи (вид 2)
5) до множини альтернатив додавалися альтернативи з різними властивостями: еквівалентні до існуючих, неоптимальні та оптимальні за одним з критеріїв;
6) задача розв’язувалася для різного числа альтернатив, а саме, для $N = 2,3,...,15$ альтернатив;
7) ваги критеріїв варіювалися;
8) умови появи РР перевірялися з точністю 10^{-4}.

Результати моделювання показали, що поява РР залежить як від властивості альтернативи, що додається, так і від ваг критеріїв: найбільші частоти появи РР виявлені при використанні рівноважливих критеріїв [137, 138] (табл. 3.1).

Таблиця 3.1. Випадки появи різних видів РР в різних методах синтезу ММАІ (+ − РР спостерігався, **–** − РР не спостерігався)

Метод синтезу	Властивості доданої альтернативи					
	Еквівалентна		Випадковим чином			
			Неоптимальна		Оптимальна за одним з критеріїв	
	РР виду 2	РР виду 1	РР виду 2	РР виду 1	РР виду 2	РР виду 1
Дистрибутивний	–	+	+	+	+	+
Ідеальний	–	–	–	–	+*	+*
ГВББВПА	–	+	+	+	+	+
Мультиплікатив.	–	–	+*	–	+	–

* для рівноважливих критеріїв

Для критеріїв, які мають однакову вагу, простежується наступна залежність появи РР від оцінок альтернатив за критеріями: для пари альтернатив A_i та A_j, в яких відбувається РР, характерна конфліктність відносно двох рівноважливих критеріїв. Тобто, РР виникає коли за одним з критеріїв альтернатива A_i переважає A_j в k разів ($k>1$), а за другим критерієм, навпаки, альтернатива A_j переважає A_i в $k+\varepsilon$ разів ($\varepsilon \in \{-2,-1,0,1,2\}$). Також мають місце випадки нерозрізненості альтернатив A_i та A_j до або після включення додаткової альтернативи, тобто A_i та A_j мають однакові (різні) ваги до включення додаткової альтернативи, та різні (однакові) ваги після включення додаткової альтернативи.

Для усіх методів синтезу, що розглядалися, частоти появи РР виду 1 збільшуються із зростанням кількості альтернатив від 2 до 15. Частота зміни оптимальної альтернативи (РР виду 2), навпаки, зменшується із збільшененням досліджуваної кількості альтернатив.

Для кожного з розглядуваних методів частоти появи РР для *випадковим чином заповнених* узгоджених МПП розмірності N є близькими до відповідних частот, розрахованих при *повному переборі всіх* узгоджених МПП розмірності N.

В методі дистрибутивного синтезу РР виду 1 виникає при додаванні альтернативи неоптимальної, оптимальної за одним з критеріїв, а також еквівалентної. Зміна оптимальної альтернативи може відбутися при додаванні альтернатив неоптимальної та оптимальної за одним з критеріїв.

В методі ідеального синтезу РР виду 1 спостерігається при додаванні альтернативи, оптимальної за одним з критеріїв у випадку рівноважливих критеріїв, при цьому частота появи РР дуже стрімко зростає при збільшенні кількості альтернатив. Зміна оптимальної альтернативи в методі ідеального синтезу має місце при вагах критеріїв 0.5, 0.5 і 0.4, 0.6, при інших досліджуваних комбінаціях ваг зміна оптимальної альтернативи не спостерігалася.

Метод ГВБВПА краще використовувати з дистрибутивним синтезом – частоти появи РР в усіх розглянутих випадках є меншими в порівнянні з методом ГВБВПА з ідеальним синтезом. Метод ГВБВПА допускає РР в тих самих випадках, що і дистрибутивний синтез, тобто при додаванні альтернативи неоптимальної, оптимальної за одним з критеріїв та еквівалентної до існуючої. Однак, метод ГВБВПА з дистрибутивним синтезом є кращим за класичний метод дистрибутивного синтезу в тому розумінні, що частоти появи РР для нього є меншими. Особливо це стосується випадку додавання альтернативи, оптимальної за одним з критеріїв, де частоти виникнення РР в методі ГВБВПА є на порядок меншими. Недоліком методу попарного розгляду альтернатив є порушення транзитивності рангів альтернатив. Також ранжування, отримане за допомогою методу ГВББВПА може не співпадати з ранжуванням, отриманим під час одночасного розгляду всієї множини альтернатив.

В методі мультиплікативного синтезу РР виду 1 у випадках, що розглядалися, не виникає. Однак, при додаванні альтернативи неоптимальної (при рівноважливих критеріях) чи оптимальної за одним з критеріїв в цьому методі синтезу може відбутися зміна оптимальної альтернативи, тоді оптимальною стає альтернатива, що додається. Також можна зробити висновок, що частоти зміни оптимальної альтернативи в мультиплікативному синтезі є набагато меншими за відповідні частоти в інших методах синтезу.

Таким чином, РР можуть виникнути в кожному з досліджуваних методів синтезу. Встановлено, що РР здебільшого виникають в задачах прийняття рішень з конфліктними оцінками альтернатив за критеріями. В цьому випадку РР відображає раціональний процес прийняття рішень.

Метод прийняття рішень, в якому може виникнути РР, доцільно використовувати в так званих замкнених системах – системах з фіксованою кількістю ресурсів, до яких належать задачі розподілу ресурсів та прогнозування.

3.5. Приклад. Реверси рангів в задачі вибору квартири

Нехай планується придбання чотирьохкімнатної квартири в новому будинку за житловою програмою банку Аркада. При оцінці альтернативних варіантів будемо використовувати два *критерії*: ціна квартири та умови проживання (які включають місце розташування квартири, її площу, додаткові зручності та екологічну обстановку в районі). Будемо вважати, що ці два *критерії є однаково важливими* при виборі квартири.

Розглянемо наступні варіанти квартир:

1. Смт. Буча, б-р. Б. Хмельницького. Загальна вартість квартири складає 264 782,23 грн, а її площа – 132,59/66,40/22,64. Біля будинку чудовий парк, недалеко знаходиться автостоянка.

2. Дніпровський район, Лівобережний центр, вул. Нікольсько-слобідська. Загальна вартість квартири складає 1044742,73 грн. Площа 130,65/78,74/14,37 (загальна/ жила/ кухня). Будинок знаходиться поруч з метро Лівобережна, супермаркетом Фуршет. З вікон будинку відкриваються чудові види на Дніпро, поруч зона відпочинку, де влітку можна загорати й купатися. Але недалеко знаходиться міжнародний виставковий центр і там завжди дуже багато машин.

3. Дарницький район, Позняки-8, вул. Княжий затон. Загальна вартість квартири складає 330 199,38 грн, площа 130,68/81,07/15,68. Будинок знаходиться недалеко від метро Позняки, поруч автостоянка, однак у цьому районі совсім немає зелених насаджень.

Таким чином, маємо три альтернативи: A_1 − смт. Буча, A_2 − м.Лівобережна, A_3 − Позняки. Нехай особа, що приймає рішення, оцінила ці три альтернативи відносно двох критеріїв наступним чином (припустимо, що оцінки є повністю узгодженими):

$$M_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1/7 & 1 & 3/7 \\ 1/3 & 7/3 & 1 \end{pmatrix}, \; M_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 \\ 6 & 1 & 2 \\ 3 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використаємо метод аналізу ієрархій і знайдемо глобальні ваги альтернатив. Вони дорівнюють:

- за дистрибутивним синтезом: $w_1^{glob} = 0,3887$, $w_2^{glob} = 0,3484$, $w_3^{glob} = 0,2629$.
- за ідеальним синтезом: $w_1^{glob} = 0,3712$, $w_2^{glob} = 0,3636$, $w_3^{glob} = 0,2652$.

- за методом ГВБВПА з дистрибутивним синтезом: $w_1^{glob} = 0{,}3372$, $w_2^{glob} = 0{,}3219$, $w_3^{glob} = 0{,}3409$.
- за мультиплікативним: $w_1^{glob} = 0{,}34180$, $w_2^{glob} = 0{,}31640$, $w_3^{glob} = 0{,}34177$.

Нехай до розгляду додається ще одна альтернатива, позначимо її A_4, така що її ціна складає 300 тис. грн, але умови проживання в цій квартирі для особи, що приймає рішення, є гіршими, ніж у альтернативи A_1. Нехай нова альтернатива є неоптимальною за кожним з критеріїв і, згідно з оцінками особи, що приймає рішення, матриці парних порівнянь чотирьох альтернатив відносно двох критеріїв мають вигляд (оцінки є повністю узгодженими):

$$M_{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 1/7 & 1 & 3/7 \\ 1/3 & 7/3 & 1 \end{pmatrix},\ M_{C_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & 1/3 & 3/2 \\ 6 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1/2 & 1 & 9/2 \\ 2/3 & 1/9 & 2/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Використаємо метод аналізу ієрархій і знайдемо глобальні ваги альтернатив та ранжування альтернатив після додавання нової (табл. 3.2).

Таблиця 3.2. Результати роботи ММАІ до і після додавання нової альтернативи (+ − РР спостерігався, **–** − РР не спостерігався)

Метод синтезу	Ранжування		РР
	перед додаванням нової альтернативи	після додавання нової альтернативи	
дистрибутивний	$A_1 \succ A_2 \succ A_3$	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$	+
ідеальний	$A_1 \succ A_2 \succ A_3$	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$	–
ГВБВПА	$A_3 \succ A_1 \succ A_2$	$A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$	+
мультиплікативний	$A_1 \sim A_3 \succ A_2$	$A_1 \sim A_3 \succ A_2 \succ A_4$	–

Глобальні ваги дорівнюють:

- за дистрибутивним синтезом: $w_1^{*glob} = 0,2999$, $w_2^{*glob} = 0,3174$, $w_3^{*glob} = 0,2250$, $w_4^{*glob} = 0,1577$.
- за ідеальним синтезом: $w_1^{*glob} = 0,3108$, $w_2^{*glob} = 0,3044$, $w_3^{*glob} = 0,2220$, $w_4^{*glob} = 0,1628$.
- за методом ГВБВПА з дистрибутивним синтезом: $w_1^{*glob} = 0,2847$, $w_2^{*glob} = 0,2550$, $w_3^{*glob} = 0,2797$, $w_4^{*glob} = 0,1806$.
- за мультиплікативним синтезом: $w_1^{*glob} = 0,285456$ $w_2^{*glob} = 0,26429$, $w_3^{*glob} = 0,285457$, $w_4^{*glob} = 0,16480$.

Таким чином, після додавання нового варіанту рішення ранжування, отримані за допомогою різних методів синтезу, відрізняють між собою.

Задамося практичною точністю 10^{-4}. Аналізуючи ваги, отримані за ММАІ до і після додавання альтернативи робимо висновок про присутність РР в методах дистрибутивного синтезу і ГВБВПА.

РОЗДІЛ 4

ММАІ обробки нечітких експертних оцінок

В умовах невизначеності різної природи людина-експерт не в змозі давати точну оцінку у вигляді скалярного значення, вона може давати її тільки з певним суб'єктивним ступенем впевненості. Тому виникає потреба в розробці модифікованого методу аналізу ієрархій (ММАІ), який дозволяв би обробляти нечіткі експертні оцінки. Розглянемо ММАІ на основі нечітких експертних оцінок з урахуванням оцінювання рівня їх узгодженості та введених показників ступеня довіри до отриманого рішення.

4.1. Постановка задачі

Введемо наступне означення, яке буде використовуватися в ММАІ.

Означення 4.1. *Нечіткою матрицею парних порівнянь (НМПП)* назвемо матрицю $A^{fuz} = \left\{ \left(a_{ij}^{fuz} \right) \middle| \, i, j = \overline{1,n} \right\}$, для якої $a_{ij}^{fuz} = \left(x, \mu_{ij}\left(x \right) \right)$ − нормальна нечітка множина і відображає результат парного порівняння об'єктів O_i та O_j, $x \in \Re$, де $\Re$ − множина дійсних чисел. Значення функції приналежності $\mu_{ij}\left(x \right)$ нечіткої множини a_{ij}^{fuz} є ступенем виконання переваги $O_i \succeq O_j$, причому результат порівняння об'єкта O_i з самим собою дорівнює одиниці, тобто $a_{ii}^{fuz} = 1$.

Дано:

- $A = \left\{ A_i \middle| i = \overline{1,N} \right\}$ − множина альтернативних варіантів рішень;
- $C = \left\{ C_k \middle| k = \overline{1,K} \right\}$ − множина критеріїв;
- $\mathrm{A}^{fuz} = \left\{ \left(A_k^{fuz} \right) \middle| k = \overline{1,K} \right\}$ − множина НМПП альтернатив відносно

критеріїв, де $A_k^{fuz} = \left\{ \left(a_{ijk}^{fuz} \right) \middle| i, j = \overline{1,N}, k = \overline{1,K} \right\}$ − НМПП, в якій

$a_{ijk}^{fuz} = \left(x, \mu_{ijk}\left(x\right)\right)$ − нормальна нечітка множина і відображає результат парного порівняння альтернатив A_i та A_j відносно критерію C_k, $k = \overline{1,K}$, $x \in \Re$, $\Re$ − множина дійсних чисел. Значення функції приналежності $\mu_{ijk}\left(x\right)$ нечіткої множини a_{ijk}^{fuz} є ступенем виконання переваги $A_i \succeq A_j$ відносно критерію C_k, результат порівняння альтернативи A_i з собою дорівнює одиниці, тобто $a_{iik}^{fuz} = 1$.

<u>*Потрібно*</u>:

- знайти вектор нечітких глобальних ваг $w^{fuz\,glob} = \left\{ w_i^{fuz\,glob} \middle| i = \overline{1,N} \right\}$, який відображає переваги з множини НМПП $\mathrm{A}^{fuz} = \left\{ \left(A_k^{fuz}\right) \middle| k = \overline{1,K} \right\}$;
- оцінити узгодженість нечітких експертних оцінок;
- визначити ранжування нечітких глобальних ваг w_i^{fuz};
- оцінити ступінь довіри до отриманого ранжування.

Розіб'ємо цю загальну задачу на підзадачі. Задача обробки нечітких експертних оцінок за допомогою ММАІ є складною багаторівневою системною задачею (рис. 4.1). На другому рівні цієї ієрархічної структури знаходяться підзадачі знаходження нечітких локальних і глобальних ваг, оцінювання узгодженості нечітких експертних оцінок, визначення ранжування нечітких глобальних ваг і ступеня довіри до отриманого ранжування. Детальніше розглянемо постановку кожної з цих підзадач.

<u>*Задача знаходження нечітких локальних ваг*</u>

<u>*Дано:*</u>

- $A^{fuz} = \left\{ \left(a_{ij}^{fuz}\right) \middle| i, j = \overline{1,N} \right\}$ – НМПП.

<u>*Потрібно:*</u>

- знайти вектор нечітких ваг $w^{fuz} = \left\{ \left(w_i^{fuz}\right) \middle| \, i = \overline{1,N} \right\}$, який відображає переваги, записані в НМПП A^{fuz}; координата w_i^{fuz} цього вектору – нормальна нечітка множина;

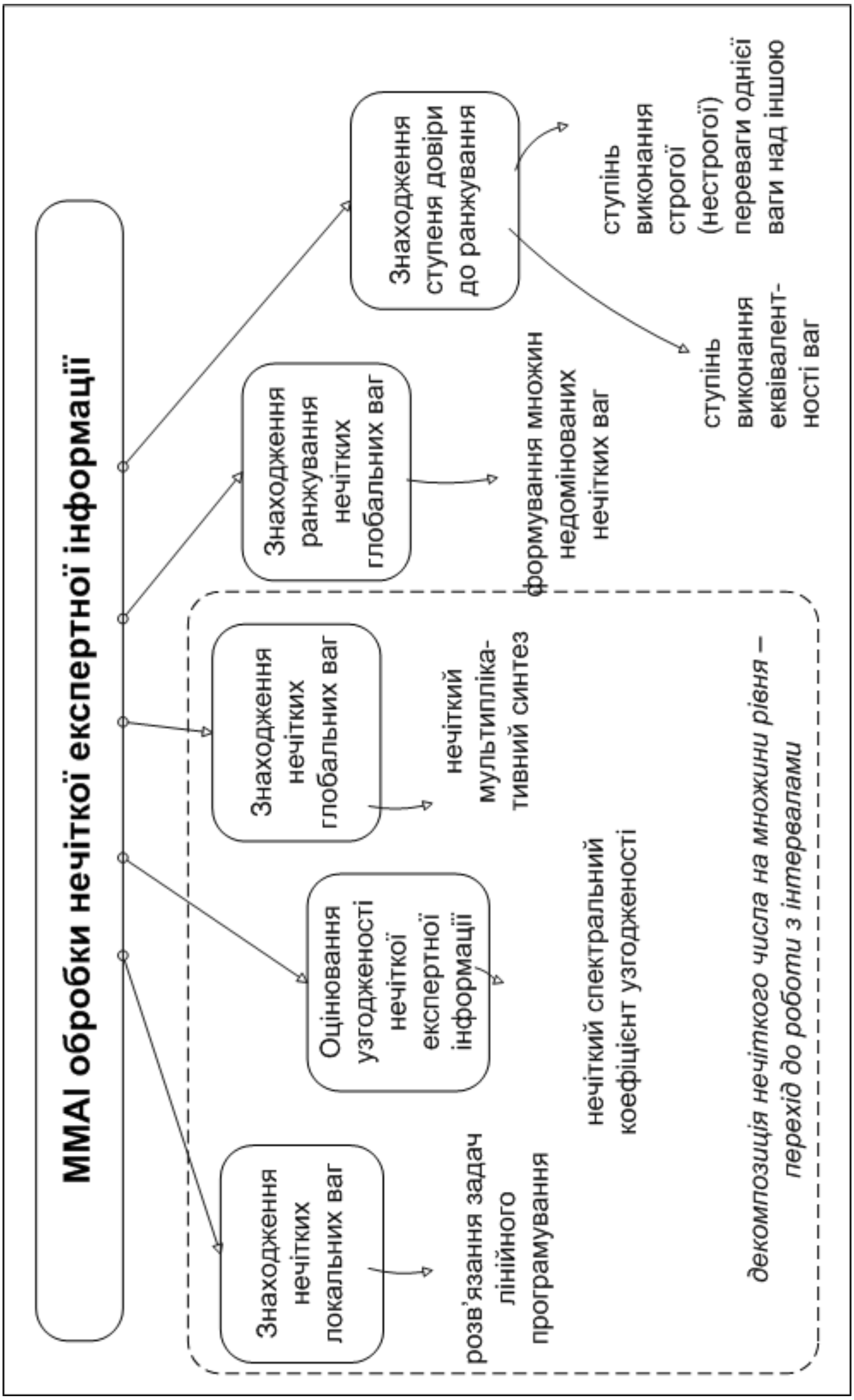


Рис. 4.1. Ієрархічна система задач, які розв'язуються за допомогою ММАІ обробки нечітких експертних оцінок

<u>Задача</u> оцінювання узгодженості нечітких експертних оцінок

<u>Дано:</u>

- $A^{fuz} = \left\{ \left(a_{ij}^{fuz} \right) \middle| \; i, j = \overline{1, N} \right\}$ – НМПП.

<u>Потрібно:</u>

- визначити показник рівня узгодженості $A^{неч}$.

<u>Задача</u> синтезу нечітких локальних ваг

<u>Дано:</u>

- $W^{fuz} = \left\{ w_{ik}^{fuz} \middle| i = \overline{1, N}, k = \overline{1, K} \right\}$ – матриця нечітких локальних ваг альтернатив відносно критеріїв, в якій $w_{ik}^{fuz} = \left(x, \mu_{w_{ik}}(x) \right)$ – нормальна нечітка множина;

- $w^{fuz\,crit} = \left\{ w_k^{fuz\,crit} \middle| k = \overline{1, K} \right\}$ – вектор нечітких ваг критеріїв, координата $w_k^{fuz\,crit} = \left(x, \mu_{w_k^{crit}}(x) \right)$ цього вектору – нормальна нечітка множина.

<u>Потрібно</u>:

- знайти $w^{fuz\,glob} = \left\{ w_i^{fuz\,glob} \middle| i = \overline{1, N} \right\}$ – вектор нечітких глобальних ваг альтернатив, де $w_i^{fuz\,glob}$ – нормальна нечітка множина.

<u>Задача</u> ранжування нечітких глобальних ваг і визначення ступеня довіри до отриманого ранжування

<u>Дано:</u>

- $w^{fuz\,glob} = \left\{ w_i^{fuz\,glob} \middle| i = \overline{1, N} \right\}$ – вектор нечітких глобальних ваг альтернатив, координата $w_i^{fuz\,glob}$ цього вектору – нормальна нечітка множина.

<u>Потрібно:</u>

- знайти ранжування нечітких глобальних ваг $w_i^{fuz\,glob}$;
- оцінити ступінь довіри до отриманого ранжування.

В наступних підрозділах наведено розв'язання кожної з описаних вище підзадач. Але перед цим розглянемо декомпозиційний підхід до розв'язання загальної задачі обробки нечітких експертних оцінок.

4.2. Загальне розв'язання задачі обробки нечітких експертних оцінок

Нехай задано множини альтернатив, критеріїв і НМПП альтернатив відносно критеріїв. Потрібно оцінити узгодженість НМПП і знайти нечіткі локальні ваги альтернатив відносно критеріїв та глобальні ваги альтернатив.

Для розв'язання цієї задачі використаємо декомпозиційне представлення нечіткого числа, яке дозволяє перейти до роботи з множиною інтервалів. Інтервальна апроксимація нечіткого числа є зручною в багатьох випадках і широко використовується в літературі [90, 104, 142–144], оскільки робота з інтервалами може виявитися простішою ніж безпосереднє оперування нечіткими числами.

Розкладемо НМПП A_k^{fuz}, $k=\overline{1,K}$, за множинами рівня $A_k\left(\alpha\right)$, тобто представимо A_k^{fuz} у вигляді

$$A_k^{fuz} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha A_k\left(\alpha\right),\ \ k=\overline{1,K}, \tag{4.1}$$

де $A_k\left(\alpha\right)=\left\{\left(a_{ijk}\left(\alpha\right)\right)\middle|\, i,j=\overline{1,N}\right\}$ – матриця множин рівня α, $\alpha\in\left[0,1\right]$, $a_{ijk}\left(\alpha\right)=\left\{x:\mu_{ijk}\left(x\right)\geq\alpha\right\}$, $\mu_{ijk}\left(x\right)$ − функція приналежності нечіткій множині a_{ijk}^{fuz}, $x\in\Re$.

Оскільки елементи a_{ijk}^{fuz} НМПП A_k^{fuz}, $k=\overline{1,K}$, є оцінками деяких параметрів (в даному випадку – оцінками парних порівнянь відносно критерію C_k), то для їх представлення зручно використовувати трикутні нечіткі числа $a_{ijk}^{fuz}=\left(a_{ijk}^{l},a_{ijk}^{m},a_{ijk}^{u}\right)$, $a_{ijk}^{l}\le a_{ijk}^{m}\le a_{ijk}^{u}$, де a_{ijk}^{m} – значення інтервалу, в якому функція приналежності $\mu_{ijk}(x)$ дорівнює одиниці (рис. 4.2). Тоді елементи $A_k(\alpha)$ множини рівня $\alpha\in[0,1]$ дорівнюють $a_{ijk}(\alpha)=\left[a_{ijk}^{l}+\alpha\left(a_{ijk}^{m}-a_{ijk}^{l}\right),a_{ijk}^{u}-\alpha\left(a_{ijk}^{u}-a_{ijk}^{m}\right)\right]$, $i,j=\overline{1,N}$.

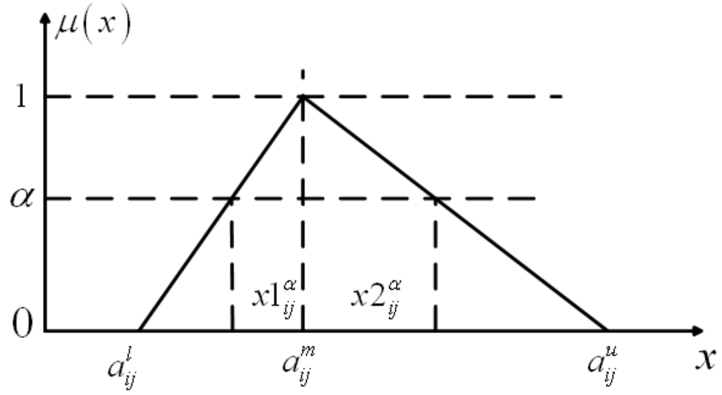


Рис. 4.2. Функція належності трикутного нечіткого числа

Елементи $a_{ijk}(\alpha)$ також можна представити у вигляді $a_{ijk}^{\text{interv.}\,\alpha}=$ $=\left[a_{ijk}^{m}-x1_{ijk}^{\alpha},a_{ijk}^{m}+x2_{ijk}^{\alpha}\right]$, де $x1_{ijk}^{\alpha}=(1-\alpha)\left(a_{ijk}^{m}-a_{ijk}^{l}\right)$, $x2_{ijk}^{\alpha}=(1-\alpha)\left(a_{ijk}^{u}-a_{ijk}^{m}\right)$, $x1_{ijk}^{\alpha}\ge 0$, $x2_{ijk}^{\alpha}\ge 0$ – величини відхилень від значення a_{ijk}^{m}. Тому, від вихідної НМПП A_k^{fuz}, $k=\overline{1,K}$, переходимо до розгляду множини інтервальних матриць парних порівнянь (ІМПП) $\left\{A_k(\alpha)\middle|\alpha\in[0,1]\right\}$, де $A_k(\alpha)=\left\{\left(a_{ijk}(\alpha)\right)\middle|i,j=\overline{1,N}\right\}$, $a_{ijk}(\alpha)=\left[a_{ijk}^{m}-x1_{ijk}^{\alpha},a_{ijk}^{m}+x2_{ijk}^{\alpha}\right]$. І задача знаходження нечітких локальних ваг альтернатив відносно критерію C_k зводиться до знаходження множини інтервальних ваг $\left\{w_k(\alpha)\middle|\,\alpha\in[0,1]\right\}$ з ІМПП $\left\{A_k(\alpha)\middle|\alpha\in[0,1]\right\}$, $k=\overline{1,K}$, де $w_k(\alpha)=\left\{\left(w_{ik}(\alpha)\right)\middle|i=\overline{1,N}\right\}$, $\alpha\in[0,1]$, а координата $w_{ik}(\alpha)=\left[w_{ik}^{l}(\alpha),w_{ik}^{u}(\alpha)\right]$.

Множина $\left\{w_k(\alpha)\middle|\,\alpha\in[0,1]\right\}$ є множиною рівня вектора нечітких ваг $w_k^{fuz}=\left\{\left(w_{ik}^{fuz}\right)\middle|\,i=\overline{1,N}\right\}$, який відображає переваги, записані в НМПП A_k^{fuz},

$k = \overline{1,K}$. В загальному виді вектор нечітких локальних ваг w_k^{fuz} може бути отриманий шляхом наступного об'єднання за $\alpha \in [0,1]$:

$$w_k^{fuz} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha w_k(\alpha),\ k = \overline{1,K}. \qquad (4.2)$$

Розглянемо ІМПП $A = \left\{ (a_{ij}) \middle| a_{ij} = [m_{ij} - x1_{ij}, m_{ij} + x2_{ij}], i,j = \overline{1,N} \right\}$, де m_{ij} – значення інтервалу зі ступенем виконання, рівним одиниці, $x1_{ij} \geq 0$, $x2_{ij} \geq 0$ – відхилення від m_{ij}, які показують ступінь невизначеності, пов'язану з наближеною рівністю $m_{ij} \approx w_i / w_j$.

ІМПП A також можна представити у вигляді $A = \left\{ (a_{ij}) \middle| a_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}], i,j = \overline{1,N} \right\}$, де $l_{ij} = m_{ij} - x1_{ij}$, $u_{ij} = m_{ij} + x2_{ij}$, $x1_{ij} \geq 0$, $x2_{ij} \geq 0$. Тому задача знаходження нечітких локальних ваг зводиться до знаходження вектору інтервальних ваг $w = \left\{ (w_i) \middle| w_i = [w_i^l, w_i^u], i = \overline{1,N} \right\}$ з ІМПП A (див. пп. 4.4.1, 4.4.2).

Оцінювання рівня узгодженості НМПП A^{fuz} здійснюється на базі нечіткого спектрального коефіцієнта узгодженості.

Означення 4.2. Нечіткий спектральний коефіцієнт узгодженості k_y^{fuz} визначимо як інфінум інтервальних спектральних коефіцієнтів узгодженості $k_y^{\text{interv}}(\alpha)$ ІМПП $A(\alpha)$ при рівні $\alpha \in [0,1]$: $k_y^{fuz} = \inf\limits_{\alpha \in [0;1]} k_y^{\text{interv}}(\alpha)$.

Тому задача оцінювання узгодженості нечітких експертних оцінок зводиться до побудови інтервального спектрального коефіцієнту узгодженості k_y^{interv} ІМПП A (див. п. 4.4.3).

При розв'язанні задачі синтезу нечітких локальних ваг розкладемо матрицю W^{fuz} нечітких локальних ваг альтернатив і вектор $w^{fuz\,crit}$ нечітких ваг критеріїв за множинами рівня $W(\alpha)$ і $w^{crit}(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, відповідно, тобто, представимо W^{fuz} і $w^{fuz\,crit}$ у вигляді

$$W^{fuz} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha W(\alpha), \tag{4.3}$$

$$w^{fuz\,crit} = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} \alpha w^{crit}(\alpha), \tag{4.4}$$

де $W(\alpha)=\left\{\left(w_{ik}(\alpha)\right)\middle| i=\overline{1,N}, k=\overline{1,K}\right\}$ – матриця множин рівня α, $w^{crit}(\alpha)= =\left\{\left(w_k^{crit}(\alpha)\right)\middle| k=\overline{1,K}\right\}$ – вектор множин рівня α, $\alpha\in[0,1]$, $w_{ik}(\alpha)= =\left\{x:\mu_{w_{ik}}(x)\geq\alpha\right\}$, $\mu_{w_{ik}}(x)$ – функція приналежності нечіткій множині w_{ik}^{fuz}, $w_k^{crit}(\alpha)=\left\{x:\mu_{w_k^{crit}}(x)\geq\alpha\right\}$, $\mu_{w_k^{crit}}(x)$ – функція приналежності нечіткій множині $w_k^{fuz\,crit}$, $x\in\Re$.

Таким чином, декомпозиційне представлення нечітких ваг (4.3) і (4.4) дозволяє перейти до роботи з інтервальними вагами $w_{ik}(\alpha)$, $w_k^{crit}(\alpha)$. Тому задача синтезу нечітких локальних ваг альтернатив зводиться до знаходження множини інтервальних глобальних ваг альтернатив з наступним агрегуванням за множинами рівня (див. п. 4.4.5).

В роботі розглядаються нечіткі ваги, які є трикутними нечіткими числами, тому подальшими об'єктами дослідження при розв'язанні задачі синтезу будуть:

- матриця інтервальних локальних ваг альтернатив відносно критеріїв $W=\left\{\left[w_{ik}^l, w_{ik}^u\right]\middle| i=\overline{1,N}, k=\overline{1,K}\right\}$ і
- вектор інтервальних ваг критеріїв $w^{crit}=\left\{\left[w_k^{crit\,l}, w_k^{crit\,u}\right]\middle| k=\overline{1,K}\right\}$.

Розглянемо алгоритм обробки нечітких експертних оцінок.

4.3. Алгоритм ММАІ обробки нечітких експертних оцінок

<u>*Дано*</u>:

- $A=\left\{A_i\middle| i=\overline{1,N}\right\}$ – множина альтернативних варіантів рішень;
- $C=\left\{C_k\middle| k=\overline{1,K}\right\}$ – множина критеріїв.

Потрібно:

- знайти вектор нечітких глобальних ваг $w^{fuz\,glob} = \left\{ w_i^{fuz\,glob} \middle| i = \overline{1,N} \right\}$ альтернатив відносно критеріїв на базі нечітких оцінок експертів;
- оцінити узгодженість нечітких експертних оцінок;
- визначити ранжування нечітких глобальних ваг w_i^{fuz};
- оцінити ступінь довіри до отриманого ранжування.

Загальний алгоритм обробки нечітких експертних оцінок за допомогою ММАІ складається з наступних етапів (рис. 4.3):

1. Отримати від експерта множину $\mathrm{A}^{fuz} = \left\{ \left(A_k^{fuz} \right) \middle| k = \overline{1,K} \right\}$ НМПП альтернатив відносно критеріїв, а також вектор нечітких ваг критеріїв $w^{fuz\,crit} = \left\{ w_k^{fuz\,crit} \middle| k = \overline{1,K} \right\}$.
2. Для кожної A_k^{fuz}, $k = \overline{1,K}$:
   2.1. Побудувати множину ІМПП $A_k(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$ (див. п. 4.2 – декомпозиційне представлення НМПП).
   2.2. Визначити рівень узгодженості ІМПП $A_k(\alpha)$ за допомогою запропонованих в роботі коефіцієнтів CI^* (див. п. 4.4.2) та k_y^{interv} (див. п. 4.4.3). Якщо необхідно, виконати підвищення узгодженості нечітких експертних оцінок.
   2.3. Знайти вектор інтервальних ваг $\left\{ w_k(\alpha) \middle| \alpha \in [0,1] \right\}$ альтернатив з ІМПП $A_k(\alpha)$, де $w_k(\alpha) = \left\{ \left(w_{ik}(\alpha) \right) \middle| i = \overline{1,N} \right\}$, $w_{ik}(\alpha) = \left[w_{ik}^l(\alpha), w_{ik}^u(\alpha) \right]$ (див. п. 4.4.1).

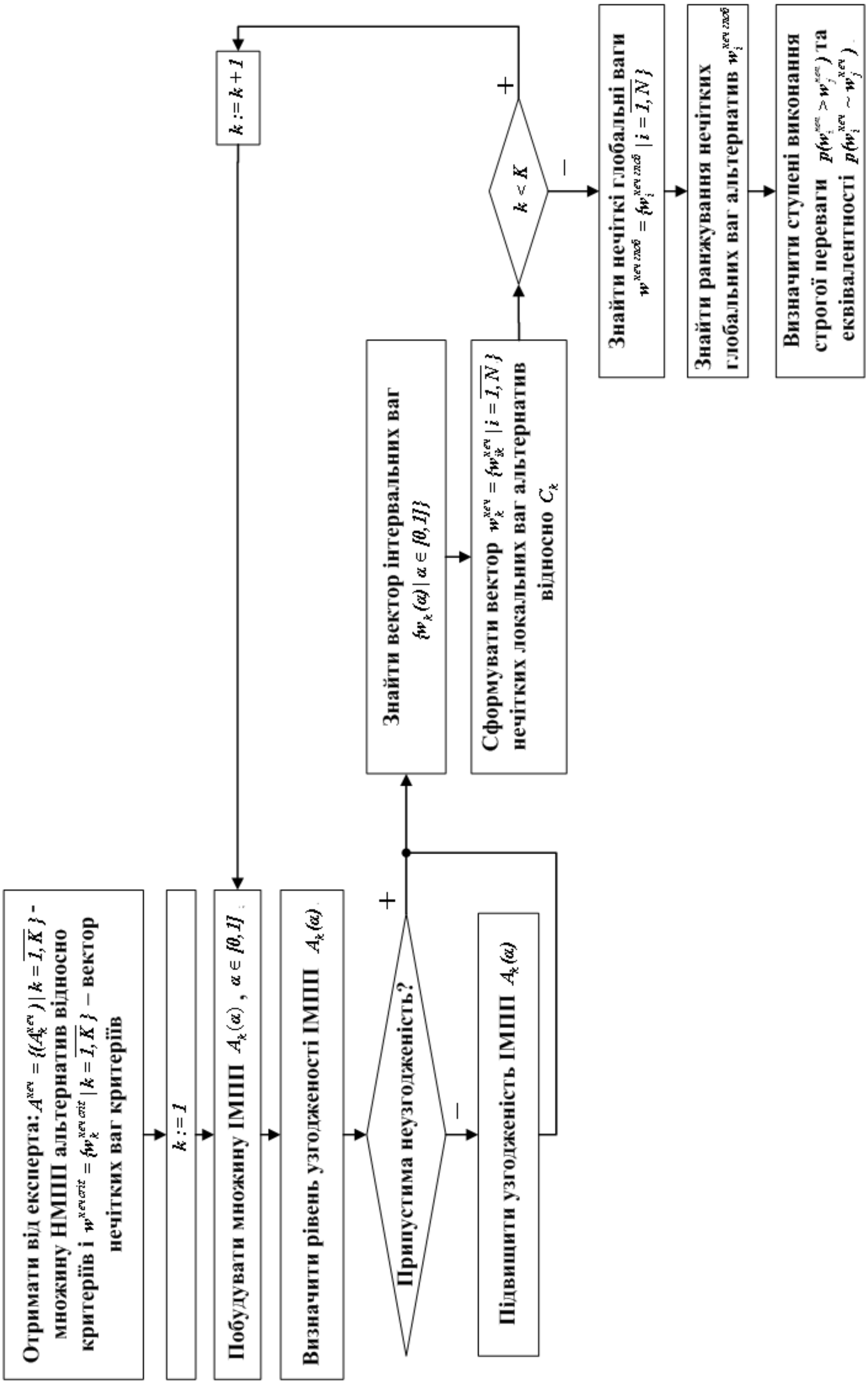


Рис. 4.3. Загальний алгоритм обробки нечітких експертних оцінок за допомогою ММАІ

2.4. Сформувати вектор $w_k^{fuz} = \left\{ \left(w_{ik}^{fuz} \right) \middle| \, i = \overline{1, N} \right\}$ нечітких локальних ваг альтернатив відносно критерію C_k (див. п. 4.2 – декомпозиційне представлення НМПП).

3. Провести синтез локальних ваг альтернатив, використовуючи модифікований метод мультиплікативного синтезу (див. п. 4.4.5), і отримати нечіткі глобальні ваги альтернатив $w^{fuz\,glob} = \left\{ w_i^{fuz\,glob} \middle| i = \overline{1, N} \right\}$.
4. Визначити порядок ранжування нечітких глобальних ваг $w_i^{fuz\,glob}$
5. Оцінити ступінь довіри до отриманого ранжування. Для цього розрахувати ступені виконання строгої переваги $p\left(w_i^{fuz} > w_j^{fuz} \right)$ та еквівалентності $p\left(w_i^{fuz} \sim w_j^{fuz} \right)$ між парами ваг w_i^{fuz}, w_j^{fuz}, $i, j = \overline{1, N}$ (див. п. 4.5).

4.4. Методи розрахунку інтервальних локальних та глобальних ваг

4.4.1. Метод розрахунку інтервальних локальних ваг з інтервальних матриць парних порівнянь (ІМПП)

Дано:

- $A = \left\{ \left(a_{ij} \right) \middle| a_{ij} = \left[l_{ij}, u_{ij} \right], i, j = \overline{1, n} \right\}$ – ІМПП, отримана за оцінками експертів;

Потрібно:

- знайти $w = \left\{ \left(w_i \right) \middle| w_i = \left[w_i^l, w_i^u \right], i = \overline{1, n} \right\}$ – вектор інтервальних ваг.

Розв'язання

В подальшому будемо досліджувати обернено симетричні ІМПП, тому розглянемо наступне означення.

Означення 4.3. ІМПП $A = \left\{ (a_{ij}) \middle| a_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}], i, j = \overline{1,n} \right\}$ називається *обернено симетричною*, якщо $l_{ij} = 1/u_{ji}$, $u_{ij} = 1/l_{ji}$ для $\forall\, i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$, діагональні елементи $a_{ii} = l_{ii} = u_{ii} = 1$ [101].

Опишемо метод знаходження вектора інтервальних ваг w із заданої експертом узгодженої чи неузгодженої обернено симетричної ІМПП A. Інтервальні ваги повинні адекватно відображати рівень ризику, спричинений суб'єктивним характером заданої експертом ІМПП. У зв'язку з цим метод є двохетапним, де на першому етапі визначаються найменші величини відхилень заданої ІМПП від невідомої узгодженої ІМПП, які формують так звані розширені інтервали, а на другому етапі розраховуються інтервальні ваги при знайдених відхиленнях. Ідея моделювання суб'єктивності ІМПП і пов'язаної з нею невизначеності за допомогою розширених інтервалів розглядається також в роботах [69, 103, 105, 145, 146].

В даній роботі використовуємо наступне означення узгодженої ІМПП.

Означення 4.4. ІМПП називається *узгодженою*, якщо непорожньою є область $W = \left\{ w = (w_1, \ldots, w_n) \middle| l_{ij} \leq w_i / w_j \leq u_{ij}, w_i > 0, w_j > 0, i, j = \overline{1,n} \right\}$.

Для перевірки узгодженості ІМПП існує наступне твердження.

Твердження 4.1. ІМПП узгоджена тоді і тільки тоді, коли її елементи задовольняють обмеженню $\max_l (l_{il} l_{lj}) \leq \min_l (u_{il} u_{lj})$ для $\forall\, i, j = \overline{1,n}$ [101].

Оскільки інтервальні оцінки можуть інтерпретуватися як обмеження на ваги, то для узгодженої ІМПП виконується нерівність

$$l_{ij} \leq w_i / w_j \leq u_{ij},\ \forall\, i, j = \overline{1,n}. \tag{4.5}$$

Згідно з означенням 4.4 якщо ІМПП неузгоджена, то не існує такого вектора ваг, щоб нерівність (4.5) виконувалася для $\forall\, i, j = \overline{1,n}$. В цьому випадку припустимо, що оцінені ваги w_i задовольнятимуть нерівності (4.5) нечітко, наближено і відношення ваг w_i / w_j гарантовано потрапляє в деякий розширений інтервал. При формуванні цих розширених інтервалів можливими є декілька підходів. Найбільш логічним є задання розширених інтервалів у вигляді [147]

$$\left(1-\delta 1_{ij}\right) l_{ij} \le w_i / w_j \le \left(1+\delta 2_{ij}\right) u_{ij}, \ \forall\, i, j = \overline{1,n}, \tag{4.6}$$

де $0 \le \delta 1_{ij} < 1$, $\delta 2_{ij} \ge 0$ – величини відхилень.

Тоді область

$$\begin{gathered}\tilde{W} = \Big\{ w = \left(w_1, \ldots, w_n\right) \Big| \left(1-\delta 1_{ij}\right) l_{ij} \le w_i / w_j \le \left(1+\delta 2_{ij}\right) u_{ij}, \\ w_i > 0,\ w_j > 0,\ 0 \le \delta 1_{ij} < 1,\ \delta 2_{ij} \ge 0,\ i, j = \overline{1,n} \Big\}\end{gathered} \tag{4.7}$$

за побудовою непорожня. Менші значення величин відхилень $\delta 1_{ij}$, $\delta 2_{ij}$ свідчать про вищий рівень узгодженості ІМПП, а для узгодженої ІМПП виконується $\delta 1_{ij} = \delta 2_{ij} = 0 \ \ \forall\, i, j = \overline{1,n}$.

Задача знаходження найменших величин відхилень, при яких область $\tilde{W}$ (4.7) є непорожньою, формулюється наступним чином [147, 148]:

$$Min \quad \delta\left(\delta 1, \delta 2\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\delta 1_{ij} + \delta 2_{ij}\right) \tag{4.8}$$

при обмеженнях

$$w_i / w_j \ge l_{ij}\left(1-\delta 1_{ij}\right),\ \ i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.9}$$

$$w_i / w_j \le u_{ij}\left(1+\delta 2_{ij}\right),\ \ i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.10}$$

$$0 \le \delta 1_{ij} < 1,\ \ i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.11}$$

$$\delta 2_{ij} \ge 0,\ \ i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.12}$$

$$0 < w_i < 1,\ i = \overline{1,n}. \tag{4.13}$$

Оскільки цільова функція (4.8) мінімізує суму $n(n-1)/2$ змінних, а саме, $\delta 1_{ij} + \delta 2_{ij}$ для $i < j$, $i, j = \overline{1,n}$, то міра узгодженості ІМПП розраховується за наступним означенням.

Означення 4.5. *Індексом узгодженості* CI^* назвемо середнє значення $\delta 1_{ij} + \delta 2_{ij}$ для елементів вище головної діагоналі ІМПП: $CI^* = \dfrac{2\delta^*}{n(n-1)}$, де

δ^* − оптимальне значення цільової функції (4.8), отримане в результаті розв'язання задачі (4.8) – (4.13).

У випадку узгодженості ІМПП мають місце рівності $\delta 1_{ij} = \delta 2_{ij} = 0$ і $CI^* = 0$. Чим більше значення приймає CI^*, тим більш неузгодженою є ІМПП.

Для знаходження інтервальної ваги $w_h = [w_h^l, w_h^u]$, $h = \overline{1, n}$ пропонуються наступні дві задачі [147, 148]:

$$Min / Max \quad w_h \tag{4.14}$$

при обмеженнях

$$w_i / w_j \geq l_{ij}\left(1 - \delta 1_{ij}\right),\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.15}$$

$$w_i / w_j \leq u_{ij}\left(1 + \delta 2_{ij}\right),\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.16}$$

$$0 \leq \delta 1_{ij} < 1,\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.17}$$

$$\delta 2_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1, n-1},\ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.18}$$

$$0 < w_i < 1,\ i = \overline{1, n}, \tag{4.19}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\delta 1_{ij} + \delta 2_{ij}\right) = \delta^*, \tag{4.20}$$

де δ^* − оптимальне значення цільової функції (4.8).

Оптимум x_h^{*Min} задачі мінімізації (4.14) – (4.20) – це ліва границя ваги w_h, а оптимум x_h^{*Max} задачі максимізації (4.14) – (4.20) – це права границя ваги w_h.

Оскільки задачі (4.8) – (4.13) і (4.14) – (4.20) описаної вище двохетапної моделі – це задачі нелінійного невипуклого програмування і тому практично неефективні, то перейдемо до іншої, лінійної моделі, побудованої на тій самій ідеї знаходження найменших величин відхилень від узгодженої ІМПП, що покладена в основу нелінійної моделі (4.8) – (4.13). Наведемо математичну постановку і обґрунтування лінійної моделі.

Згідно із означенням 4.4, для узгодженої ІМПП виконується нерівність $l_{ij} \le w_i / w_j \le u_{ij}$, $\forall\, i, j = \overline{1, n}$, $w_i, w_j > 0$, $u_{ij} \ge l_{ij} > 0$. Тому, якщо ІМПП узгоджена, то для її елементів виконується також нерівність

$$\ln(l_{ij}) \le \ln(w_i / w_j) \le \ln(u_{ij}),\ \forall\, i, j = \overline{1, n}. \tag{4.21}$$

Якщо ж ІМПП неузгоджена, то не існує такого вектора ваг, щоб (4.21) виконувалася для $\forall\, i, j = \overline{1, n}$. В цьому випадку припустимо, що логарифм відношення ваг w_i / w_j гарантовано потрапляє в деякий розширений інтервал

$$\ln(l_{ij}) - \Delta 1_{ij} \le \ln(w_i / w_j) \le \ln(u_{ij}) + \Delta 2_{ij},\ \forall\, i, j = \overline{1, n}, \tag{4.22}$$

де $\Delta 1_{ij} \ge 0$, $\Delta 2_{ij} \ge 0$ – величини відхилень.

Чим менші значення приймають величини відхилень $\Delta 1_{ij}$, $\Delta 2_{ij}$, тим більшим є рівень узгодженості ІМПП. Для узгодженої ІМПП виконуються рівності $\Delta 1_{ij} = \Delta 2_{ij} = 0$ $\forall\, i, j = \overline{1, n}$. Розрахунок найменших значень відхилень $\Delta 1_{ij}$, $\Delta 2_{ij}$, що задовольняють нерівностям (4.22), здійснюється за наступною задачею лінійного програмування:

$$Min \quad \Delta\left(\Delta 1, \Delta 2\right) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\Delta 1_{ij} + \Delta 2_{ij}\right) \tag{4.23}$$

при обмеженнях

$$x_i - x_j + \Delta 1_{ij} \ge \ln(l_{ij}),\ \ i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.24}$$

$$x_i - x_j - \Delta 2_{ij} \le \ln(u_{ij}),\ \ i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.25}$$

$$\Delta 1_{ij} \ge 0,\ \ i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.26}$$

$$\Delta 2_{ij} \ge 0,\ \ i = \overline{1, n-1},\ \ j = \overline{i+1, n}, \tag{4.27}$$

$$0 \le a \le x_i \le b,\ i = \overline{1, n}, \tag{4.28}$$

де $x_i = \ln(w_i)$, $w_i \ge 1$, a, b – задані величини.

Означення 4.6. *Індексом узгодженості* CI^* назвемо $CI^* = \dfrac{2\Delta^*}{n(n-1)}$, де Δ^* − оптимальне значення цільової функції (4.23).

Для узгодженої ІМПП виконується $CI^* = 0$. Чим більше значення приймає CI^*, тим більшим є рівень неузгодженості ІМПП.

Для знаходження логарифма інтервальної ваги $x_h = [x_h^l, x_h^u]$, $h = \overline{1,n}$ пропонуються наступні дві задачі лінійного програмування:

$$Min / Max \quad x_h \tag{4.29}$$

при обмеженнях (4.24) – (4.28) і

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\Delta 1_{ij} + \Delta 2_{ij}\right) = \Delta^*, \tag{4.30}$$

де Δ^* − оптимальне значення цільової функції (4.23).

Результуючі ненормовані ваги $w_h = [w_h^l, w_h^u]$ дорівнюють $w_h^l = \exp(x_h^{*l})$, $w_h^u = \exp(x_h^{*u})$, де x_h^{*l}, x_h^{*u} − оптимальні розв'язки відповідно задач мінімізації і максимізації (4.29) – (4.30).

Розглянемо алгоритм знаходження інтервальних ваг з ІМПП.

4.4.2. Алгоритм знаходження інтервальних ваг з ІМПП

<u>*Дано:*</u>

- $A = \left\{ \left(a_{ij}\right) \middle| a_{ij} = \left[l_{ij}, u_{ij}\right], i, j = \overline{1,n} \right\}$ − ІМПП, отримана за оцінками експертів;

<u>*Потрібно:*</u>

- знайти $w = \left\{ \left(w_h\right) \middle| w_h = \left[w_h^l, w_h^u\right], h = \overline{1,n} \right\}$ − вектор інтервальних ваг.

<u>*Розв'язання*</u>

В п. 4.4.1 запропонована наступна двохетапна лінійна модель знаходження інтервальних ваг з ІМПП.

<u>Етап 1</u> (знаходження найменших значень відхилень інтервалів):

$$Min \quad \Delta(\Delta 1, \Delta 2) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\Delta 1_{ij} + \Delta 2_{ij} \right) \tag{4.31}$$

при обмеженнях

$$x_i - x_j + \Delta 1_{ij} \geq \ln(l_{ij}), \; i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{i+1, n}, \tag{4.32}$$

$$x_i - x_j - \Delta 2_{ij} \leq \ln(u_{ij}), \; i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{i+1, n}, \tag{4.33}$$

$$\Delta 1_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{i+1, n}, \tag{4.34}$$

$$\Delta 2_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1, n-1}, \; j = \overline{i+1, n}, \tag{4.35}$$

$$0 \leq a \leq x_i \leq b, \; i = \overline{1, n}. \tag{4.36}$$

Змінні: x_l, $l = \overline{1,n}$ та $\Delta 1_{ij}$, $\Delta 2_{ij}$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{i+1, n}$. a, b – задані величини.

Етап 2 (знаходження логарифма інтервальної ваги $x_h = [x_h^l, x_h^u]$, $h = \overline{1, n}$):

$$Min / Max \quad x_h$$

при обмеженнях (4.32) – (4.36) і

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(\Delta 1_{ij} + \Delta 2_{ij} \right) = \Delta^*,$$

де Δ^* − оптимальне значення цільової функції (4.31) етапу 1.

Змінні: x_l, $l = \overline{1,n}$ та $\Delta 1_{ij}$, $\Delta 2_{ij}$, $i = \overline{1, n-1}$, $j = \overline{i+1, n}$. a, b – задані величини.

Наведемо послідовність виконання методу знаходження інтервальної ваги w_h, $h = \overline{1, n}$:

1. Задати початкове наближення для задачі етапу 1:
   1.1. Задати точковий вектор ненормованих ваг $w^{crisp\,h} = \left\{ \left(w_i^{crisp\,h} \right) | \, i = \overline{1,n} \right\}$, $w_i^{crisp\,h} \geq 1$, тоді початкове наближення x_i^0 для x_i дорівнює $x_i^0 = \ln(w_i^{crisp\,h}) \geq 0$.
   1.2. Встановити значення $\Delta 1_{ij} \geq 0$ і $\Delta 2_{ij} \geq 0$.
   1.3. Встановити значення a, b, $b \geq a \geq 0$.
2. Розв’язати задачу лінійного програмування етапу 1.

3. Розв’язати задачу лінійного програмування етапу 2.
4. Результуючі ненормовані ваги $w_h = [w_h^l, w_h^u]$ дорівнюють $w_h^l = \exp(x_h^{*l})$, $w_h^u = \exp(x_h^{*u})$, де x_h^{*l}, x_h^{*u} – отримані на кроці 3 оптимальні розв’язки задач мінімізації і максимізації відповідно.
5. Знайти нормовані ваги $w_h = [w_h^l, w_h^u]$ за правилами інтервальної арифметики: $w_h^l = w_h^l / \sum_{i=1}^{n} w_i^u$, $w_h^u = w_h^u / \sum_{i=1}^{n} w_i^l$.

Згідно з означ. 4.6 *індекс узгодженості* CI^* розраховується за формулою $CI^* = \dfrac{2\Delta^*}{n(n-1)}$, де Δ^* – оптимальне значення цільової функції (4.31) етапу 1.

Для узгодженої ІМПП виконуються рівності $\Delta 1_{ij} = \Delta 2_{ij} = 0$, $\Delta^* = 0$ і $CI^* = 0$. Чим більші значення приймає CI^*, тим більшим є рівень неузгодженості ІМПП.

Запропонована лінійна модель знаходження інтервальних ваг з ІМПП дозволяє визначити найбільш неузгоджені елементи ІМПП та організувати процедуру підвищення її узгодженості.

4.4.3. Оцінювання узгодженості інтервальних експертних оцінок. Інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості

В пп. 2.1.1 і 4.1.1 розглянуто різні показники узгодженості точкової та інтервальної експертної інформації. Ці показники узгодженості пов’язані з методами розрахунку ваг з МПП та ІМПП. Так, при використанні методу головного власного вектора для розрахунку ваг узгодженість експертної інформації оцінюється за допомогою відношення узгодженості *CR*, розрахунок якого базується на знаходженні найбільшого власного числа МПП. При використанні методу адитивної нормалізації розрахунку ваг мірою узгодженості МПП слугує гармонічне відношення узгодженості, при використанні методу геометричної середньої – це незміщена оцінка дисперсії збурень.

Інший показник узгодженості – це спектральний коефіцієнт узгодженості [149], який не пов'язаний з методом знаходження ваг. Цей метод був розроблений для оцінювання узгодженості точкових експертних оцінок. Розглянемо узагальнення цього показника – інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості.

Дано:

- $A = \left\{ \left(a_{ij} \right) \middle| a_{ij} = \left[l_{ij}, u_{ij} \right], i, j = \overline{1,n} \right\}$ – ІМПП, отримана за оцінками експертів.

Потрібно:

- побудувати інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості ІМПП A.

Розв'язання

Для побудови інтервального спектрального коефіцієнту узгодженості будемо використовувати поняття породженої матриці та відстані між інтервальними числами, тому дамо їх означення.

Означення 4.9. Матрицею, *породженою h-им рядком ІМПП A* ($h = \overline{1,n}$) назвемо інтервальну матрицю $A^h = \left\{ \left(a_{ij}^h \right) \middle| a_{ij}^h = \left[l_{ij}^h, u_{ij}^h \right], i, j = \overline{1,n} \right\}$, елементи $[l_{hj}^h, u_{hj}^h]$, $j \neq h$, h-го рядка якої дорівнюють елементам h-го рядка вихідної ІМПП A; елементи $[l_{ih}^h, u_{ih}^h]$, $i \neq h$, h-го стовбчика A^h розраховуються за елементами h-го рядка A^h згідно з правилом оберненої симетричності: $l_{ih}^h = 1/u_{hi}^h$, $u_{ih}^h = 1/l_{hi}^h$; всі інші елементи $[l_{ij}^h, u_{ij}^h]$ матриці A^h, $i \neq j \neq h$ (крім діагональних), обчислюються згідно з правилом транзитивності: $l_{ij}^h = l_{ih}^h l_{hj}^h$, $u_{ij}^h = u_{ih}^h u_{hj}^h$.

Таким чином, в h-му рядку A^h відображені результати порівняння кожного об'єкту O_i, $i = \overline{1,n}$, з об'єктом O_h. Суб'єктивність ІМПП A і протиріччя при порівнянні об'єктів, які виникають, призводять до того, що значення ваг $w^h = \left\{ \left(w_i^h \right) \middle| w_i^h = \left[w_i^{lh}, w_i^{uh} \right], i = \overline{1,n} \right\}$, отриманих з множини

$\left\{A^h \middle| h=\overline{1,n}\right\}$, відрізняються між собою. І відмінності є тим більшими, чим більшим є рівень неузгодженості ІМПП A.

Означення 4.10. *Відстань D(A,B) між інтервальними числами* $A=\left[a_1, a_2\right]$ і $B=\left[b_1, b_2\right]$ визначається наступним чином [150]:

$$D^2\left(A,B\right)=\int_{-1/2}^{1/2}\int_{-1/2}^{1/2}\left(\left(\frac{a_1+a_2}{2}+x\left(a_2-a_1\right)\right)-\left(\frac{b_1+b_2}{2}+y\left(b_2-b_1\right)\right)\right)^2 dx\,dy=$$

$$=\left(\frac{a_1+a_2}{2}-\frac{b_1+b_2}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)^2+\left(\frac{b_2-b_1}{2}\right)^2\right),$$

$$D\left(A,B\right)=\sqrt{D^2\left(A,B\right)}.$$

Таким чином, при розрахунку величини *D(A,B)* беруться до уваги всі точки в обох інтервалах, на відміну від більшості існуючих методів розрахунку відстані [93–100], які часто базуються тільки на нижній і верхній границях інтервалів.

Побудуємо матрицю відстаней $D=\left\{\left(d_{ij}\right)\middle|\, i,j=\overline{1,n}\right\}$: $d_{ij}=D\left(a_{ij},O\right)$, де $a_{ij}=[l_{ij},u_{ij}]$, $O=\left[0,0\right]$ – число нуль.

Відстань d_{ij} використовуватимемо як чітке представлення інтервального числа a_{ij}. Згідно з означенням 4.10 вираз для $D^2\left(a_{ij},O\right)$ приймає вигляд $D^2\left(a_{ij},O\right)=\left(\frac{l_{ij}+u_{ij}}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{u_{ij}-l_{ij}}{2}\right)^2$, тоді

$$d_{ij}=\sqrt{\left(\frac{l_{ij}+u_{ij}}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{u_{ij}-l_{ij}}{2}\right)^2}.$$

Перейдемо до побудови інтервального спектрального коефіцієнту узгодженості. Нехай $\left\{A^h \middle|\, h=\overline{1,n}\right\}$ – множина матриць, породжених рядками ІМПП A. Нехай $\left\{w^h \middle|\, h=\overline{1,n}\right\}$ – множина інтервальних векторів ваг $w^h=\left\{\left(w^{kh}\right)\middle|\, k=\overline{1,n}\right\}$, де $w^{kh}=\left\{\left(w_i^{kh}\right)\middle|\, w_i^{kh}=\left[w_i^{kh\,l},w_i^{kh\,u}\right], i=\overline{1,n}\right\}$ – інтервальна вага об'єкта O_k отримана з породженої матриці A^h. Тобто, кожний об'єкт O_k, $k = \overline{1,n}$, характеризується n оцінками інтервальних ваг $W^k = \left\{\left(w^{kh}\right) \middle|\ h = \overline{1,n}\right\}$.

Далі передбачаємо, що оцінки ваг W^k є номерами позначок деякої шкали $S = \left\{s_j \middle|\ j = \overline{0,m}\right\}$ з $(m+1)$ позначками. Кількість позначок шкали можна визначити задавшись допустимою помилкою віднесення оцінки ваг до тієї чи іншої позначки шкали. Нехай нульова і остання поділки відповідно дорівнюють $s_0 = 0$ і $s_m = 1$. Позначка шкали s_j дорівнює j/m.

Побудуємо відображення $F^k : W^k \to S$, $F^k\left(w^{kh}\right) = s_j$. Для цього пов'яжемо з множиною W^k множину відстаней D^k інтервальних ваг w^{kh} до чіткого числа нуль $O = [0,0]$, яке символізує нульову позначку шкали s_0: $D^k = \left\{d^{kh} \middle| d^{kh} \in \Re, h = \overline{1,n}\right\}$, де відстань $d^{kh} = D\left(w^{kh}, O\right)$ розраховується за означенням 4.10. Тобто, віднесення інтервальної ваги w^{kh} до тієї чи іншої позначки шкали будемо проводити згідно з віддаленістю цієї ваги від нульової позначки шкали. Тоді відображення F^k − це композиція відображень G і D^k, $F^k = G \circ D^k$, де $G\left(d^{kh}\right)$ − позначка шкали, найменш віддалена від d^{kh}.

Представимо множину W^k спектром $R^k = \left\{\left(r_j^k\right) \middle|\ j = \overline{1,m}\right\}$, де r_j^k − кількість інтервальних ваг, що належать позначці шкали s_j. Побудуємо міру узгодженості ІМПП – інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості. Для цього необхідно спочатку визначити інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості $k_y^{\text{interv}}\left(R^k\right)$ спектра R^k множини W^k інтервальних ваг об'єкта O_k, отриманих з множини $\left\{A^h \middle| h = \overline{1,n}\right\}$.

Означення 4.11. *Інтервальним спектральним коефіцієнтом узгодженості* спектра R^k множини W^k інтервальних ваг об'єкта O_k, отриманих з множини породжених матриць $\left\{A^h \middle| h = \overline{1, n}\right\}$, називається коефіцієнт узгодженості $k_y^{\text{interv}}\left(R^k\right)$ [149]:

$$k_y^{\text{interv}}(R^k) = \left(1 - \frac{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} r_j^k \left|j - a^k\right| - \sum_{j=1}^{m} \frac{r_j^k}{n} \ln\left(\frac{r_j^k}{n}\right)}{G\sum_{j=1}^{m}\left|j - \frac{m+1}{2}\right| + \ln(m)}\right) z,$$

де a^k – середня множини інтервальних ваг W^k, $G = \dfrac{n}{\ln(n) \cdot m \cdot \ln(m)}$ – масштабний коефіцієнт, z – булева функція, яка задає необхідні та достатні умови рівності нулю $k_y^{\text{interv}}\left(R^k\right)$.

Коефіцієнт $k_y^{\text{interv}}\left(R^k\right)$ є теоретичним, а не емпіричним показником узгодженості, в тому розумінні, що не потребує розрахунку узгодженості випадковим чином заповнених МПП.

Таким чином, результати парних порівнянь об’єктів O_i, $i = \overline{1, n}$ відносно об’єкта O_k характеризуються $k_y^{\text{interv}}\left(R^k\right)$. Тому природно визначити міру узгодженості всієї ІМПП як інфінум множини інтервальних спектральних коефіцієнтів узгодженості $k_y^{\text{interv}}\left(R^k\right)$, аналогічно до визначення міри узгодженості точкової ІМПП [51].

Означення 4.12. *Інтервальним спектральним коефіцієнтом узгодженості* ІМПП *A* називається коефіцієнт узгодженості

$$k_y^{\text{interv}} = \inf_{k \in [1;n]} k_y^{\text{interv}}(R^k).$$

Припустимість рівня неузгодженості ІМПП оцінюється шляхом порівняння k_y^{interv} з інтервальними порогами застосування та виявлення [149].

Порогом застосування при оцінці узгодженості результатів парних порівнянь одного експерта називається коефіцієнт узгодженості множини експертних оцінок, який забезпечує розрахунок ваг елементів з припустимою точністю. Для характеристики точності експертних оцінок будемо використовувати поняття «припустимої відмінності у оцінках» − припустимою вважається відмінність двох оцінок не більш ніж на b поділок шкали. При цьому, вибір величини b визначається вимогами до якості експертної інформації. Як правило, приймають $b = 1$ [51].

Означення 4.13. *Інтервальним порогом застосування* T_u^{interv} при оцінці узгодженості інтервальних оцінок парних порівнянь одного експерта називається інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості $k_y^{\text{interv}}\left(R^k\right)$ спектра R^k, який містить тільки дві інтервальні оцінки, віддалені на b поділок шкали (рис. 4.4). Відстань між цими двома оцінками визначається згідно з означенням 4.10.

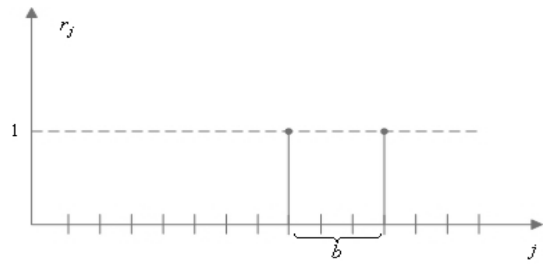


Рис. 4.4. Спектр оцінок для розрахунку порога застосування

Рівень неузгодженості інтервальних експертних оцінок будемо вважати припустимим, якщо $k_y^{\text{interv}} \geq T_u^{\text{interv}}$. Якщо ж значення коефіцієнта узгодженості $k_y^{\text{interv}}\left(R^k\right)$ є меншим за поріг застосування, то можливі два випадки: експертні оцінки містять корисну інформацію, тоді для досягнення припустимого рівня неузгодженості застосовуються методи підвищення узгодженості оцінок; в експертних оцінках міститься шум, тоді необхідно заново провести оцінювання.

Для визначення, чи містять оцінки інформацію, використовується інтервальний поріг виявлення – коефіцієнт узгодженості експертних оцінок, які містять мінімальну кількість інформації.

Означення 4.14. *Інтервальним порогом виявлення* T_0^{interv} при оцінці узгодженості інтервальних оцінок парних порівнянь називається інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості $k_y^{\text{interv}}\left(R^k\right)$ спектра R^k, який будується наступним чином: із спектра, в якому кожну поділку шкали вибрав рівно один експерт, виключається оцінка, що знаходиться на поділці 1, і переміщується додатково на поділку $[\varepsilon m+1]$, де $[.]$ − операція взяття цілої частини, $\varepsilon = 0.5$ − мінімально реєстрована величина (рис. 4.5).

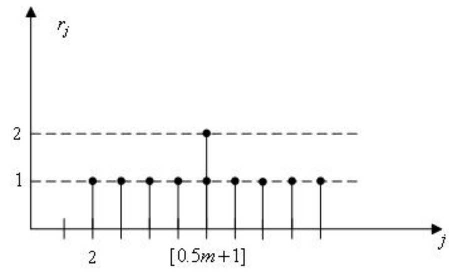


Рис. 4.5. Спектр оцінок для розрахунку порога виявлення

Якщо $k_y^{\text{interv}} < T_u^{\text{interv}}$, то експертні оцінки не містять інформації і необхідно заново провести оцінювання. У випадку $T_0^{\text{interv}} \le k_y^{\text{interv}} < T_u^{\text{interv}}$ експертні оцінки містять інформацію, але є сильно неузгодженими, тоді для досягнення припустимого рівня неузгодженості застосовують методи підвищення узгодженості ІМПП.

Для виродженої ІМПП, елементи якої – числа, значення запропонованого k_y^{interv} співпадає із значенням відомого спектрального коефіцієнту узгодженості [51] для точкових експертних оцінок.

4.4.4. Критерії порівняння інтервальних ваг, знайдених різними методами

Різні методи знаходження ваг в загальному випадку призводять до різних результатів. Виключення становлять узгоджені МПП: для таких матриць ваги, отримані різними методами, співпадають між собою. Оскільки в реальних практичних задачах ІМПП дуже рідко бувають узгодженими, виникає необхідність у використанні спеціальних критеріїв порівняння результуючих інтервальних ваг.

Означення 4.15. *Помилкою оцінювання ваг* P називається величина [102]

$$P=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(l_{ij}-\tilde{l}_{ij}\right)^2+\left(u_{ij}-\tilde{u}_{ij}\right)^2\right)},$$

де $A=\{(a_{ij})\,|\,i,j=\overline{1,n}\}$, $a_{ij}=[l_{ij},u_{ij}]$ – початкова ІМПП, заповнена експертом, $\tilde{A}=\{(\tilde{a}_{ij})\,|\,i,j=\overline{1,n}\}$ – ІМПП, побудована за знайденими вагами $\tilde{w}_i,\tilde{w}_j$ згідно з правилами інтервальної арифметики, $\tilde{a}_{ij}=[\tilde{l}_{ij},\tilde{u}_{ij}]=\tilde{w}_i/\tilde{w}_j=$ $=[\tilde{w}_i^l,\tilde{w}_i^u]/[\tilde{w}_j^l,\tilde{w}_j^u]$.

Означення 4.16. *Помилкою оцінювання ваг* T називається величина

$$T=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left(l_{ij}-\hat{a}_{ij}\right)^2+\left(u_{ij}-\hat{a}_{ij}\right)^2\right)},$$

де $\hat{A}=\{(\hat{a}_{ij})\,|\,i,j=\overline{1,n}\}$ – точкова МПП, побудована за знайденими інтервальними вагами $\tilde{w}_i,\ \tilde{w}_j$, $\hat{a}_{ij}=d(\tilde{w}_i)/d(\tilde{w}_j)$, $d(\tilde{w}_i)=$ $=\sqrt{(\tilde{w}_i^l+\tilde{w}_i^u)^2/4+(\tilde{w}_i^u-\tilde{w}_i^l)^2/12}$ – відстань від ваги $\tilde{w}_i=[\tilde{w}_i^l,\tilde{w}_i^u]$ до числа нуль (див. означ. 4.10).

Будемо класифікувати ІМПП за наступними властивостями:

1) *узгодженість*
2) *присутність об'єктів-копій*
3) *транзитивність*
   - сильна (узгоджена ІМПП);
   - слабка (збереження порядку на множині об'єктів, що порівнюються: $(O_i\succ O_j)\wedge(O_j\succ O_k)\Rightarrow(O_i\succ O_k)\ \ \forall\, i,j,k=\overline{1,n}$);
4) *повнота ранжування*
   - повний порядок;
   - частковий порядок;
5) *визначеність щодо переваги для пари об'єктів*

- ІМПП, для яких виконується умова $(u_{ij} \geq l_{ij} \geq 1) \vee (l_{ij} \leq u_{ij} \leq 1)$ $\forall i, j = \overline{1,n}$ (тобто, $\forall i, j = \overline{1,n}$ $O_i \succ O_j$ або $O_j \succ O_i$);
- ІМПП, для яких $\exists\, i, j = \overline{1,n}$ $(u_{ij} > 1) \wedge (l_{ij} < 1) \wedge (u_{ij} > l_{ij})$, тобто, для деякої пари об'єктів $\left(O_i, O_j\right)$ експерт не може визначити, чи $O_i \succ O_j$, чи $O_j \succ O_i$, і дає, наприклад, оцінку [1/2, 5]);

б) склад припустимої області

$$W = \left\{ w = \left(w_1, ..., w_n\right) \middle| \, l_{ij} \leq w_i / w_j \leq u_{ij}, w_i > 0, w_j > 0, i, j = \overline{1,n} \right\}$$

- ІМПП, для яких припустима область ваг складається з одного елементу, тоді результуючі ваги є точковими;
- ІМПП, для яких припустима область ваг складається більш ніж з одного елементу, тоді результуючі ваги є інтервальними.

Означення 4.17. ІМПП $A = \{(a_{ij}) \mid i, j = \overline{1,n}\}$ задає *повний порядок ранжування*, якщо $\forall (i, j)$, $i \neq j$ виконується умова $\left[\left(d_{ik} \geq d_{jk} \;\; \forall k\right) \vee \left(d_{jk} \geq d_{ik} \;\; \forall k\right)\right]$. Якщо умова виконується не для $\forall (i, j)$, $i \neq j$, то ІМПП задає частковий порядок ранжування.

Означення 4.18. В ІМПП $A = \{(a_{ij}) \mid a_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}], i, j = \overline{1,n}\}$ присутні *об'єкти-копії* O_i, O_j, якщо $\exists (i, j)$: $\left(l_{ij} = 1\right) \vee \left(u_{ij} = 1\right)$, $i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$.

Порівняння різних методів знаходження інтервальних ваг на прикладах конкретних ІМПП виконано в п. 4.6.1.

4.4.5. Розрахунок інтервальних глобальних ваг

Наступний етап ММАІ – це синтез інтервальних локальних ваг альтернатив за множиною криетріїв. Розглянемо постановку цієї задачі.

<u>Дано</u>:

- $w = \left\{ \left[w_{ik}^L, w_{ik}^U \right] \middle| i = \overline{1,N}, k = \overline{1,K} \right\}$ – матриця інтервальних локальних ваг альтернатив відносно критеріїв,

- $w^{crit} = \left\{ \left[w_k^{crit\,L}, w_k^{crit\,U} \right] \middle| k = \overline{1,K} \right\}$ – вектор інтервальних ваг критеріїв.

<u>*Потрібно*</u>:

- знайти $w^{glob} = \left\{ \left[w_i^{glob\,L}, w_i^{glob\,U} \right] \middle| i = \overline{1,N} \right\}$ – вектор інтервальних глобальних ваг альтернатив.

<u>*Розв'язання*</u>

Метод знаходження інтервальних глобальних ваг альтернатив базується на методі мультиплікативного синтезу і полягає у розв'язанні двох задач нелінійного випуклого програмування [148, 149]:

$$Min \quad w_i^{glob\,L} = \prod_{k=1}^{K} \left(w_{ik}^{L} \right)^{w_k^{crit}}, \text{ при обмеженні } w^{crit} \in \Omega_W^{mult}, \tag{4.37}$$

$$Max \quad w_i^{glob\,U} = \prod_{k=1}^{K} \left(w_{ik}^{U} \right)^{w_k^{crit}}, \text{ при обмеженні } w^{crit} \in \Omega_W^{mult}, \tag{4.38}$$

де $\Omega_W^{mult} = \left\{ \left(w_k^{crit} \right)^T \middle| w_k^{crit\,L} \le w_k^{crit} \le w_k^{crit\,U}, \sum_{p=1}^{K} w_p^{crit} = \lambda, k = \overline{1,K} \right\}$, $i = \overline{1,N}$.

Задача (4.37) відповідає знаходженню лівої, а задача (4.38) – правої границь глобальних ваг, ваги критеріїв – змінні вказаних задач.

Слід зазначити, що в літературних джерелах [101, 102, 105, 151] для розв'язання поставленої задачі також розглядаються дві задачі математичного програмування, наприклад, з лінійними цільовими функціями $w_i^{L\,glob} = \sum_{k=1}^{K} w_{ik}^{L} w_k^{crit}$, $w_i^{U\,glob} = \sum_{k=1}^{K} w_{ik}^{U} w_k^{crit}$ і обмеженнями на ваги критеріїв виду $\sum_{k=1}^{K} w_k^{crit} = 1$, тобто використовуються розширення методу *дистрибутивного* синтезу на випадок інтервальних ваг, а також нелінійні цільові функції $w_i^{L\,glob} = \sum_{k=1}^{K} \left(w_{ik}^{L} \right)^{w_k^{crit}}$, $w_i^{U\,glob} = \sum_{k=1}^{K} \left(w_{ik}^{U} \right)^{w_k^{crit}}$ з обмеженням $\prod_{k=1}^{K} w_k^{crit} = 1$.

В [149] для знаходження інтервальних глобальних ваг пропонується узагальнення на випадок інтервальних ваг саме методу *мультиплікативного* синтезу, оскільки при його використанні в меншій кількості випадків виникає явище реверсу рангів зміни рангів альтернатив при додаванні/ вилученні альтернативи (див. розділ 3, присвячений аналізу цього явища в різних методах синтезу).

4.5. Ранжування нечітких ваг. Показники ступеня довіри до отриманого ранжування

Глобальні ваги, знайдені в п. 4.4.5, є інтервальними, тому виникає потреба у використанні додаткових методів для їх ранжування. У загальному випадку інтервальні ваги перекриваються на окремих діапазонах і у деяких випадках можна одержати лише їх часткове ранжування [79]. Розглянемо постановку задачі ранжування нечітких ваг.

Дано:

- $w^{fuz} = \left\{ w_i^{fuz} \middle| i = \overline{1,N} \right\}$ – вектор нечітких ваг альтернатив, координата w_i^{fuz} цього вектору – нормальна нечітка множина і характеризується функцією належності $\mu_{w_i}(x)$, $x \in \Re$ ($\Re$ – множина дійсних чисел).

Потрібно:

- знайти ранжування нечітких ваг w_i^{fuz};
- оцінити ступінь довіри до отриманого ранжування.

Розв'язання

Відомо [90], що *нечітке відношення нестрогої переваги V* на множині нечітких ваг w^{fuz} задається функцією належності $\nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$, значення $\nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$ є ступенем переваги нечіткої ваги w_i^{fuz} над нечіткою вагою w_j^{fuz}: $\nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right) = \nu\left(w_i^{fuz} \geq w_j^{fuz}\right) = \sup\limits_{\substack{x,y \in \Re, \\ x \geq y}} \min\left(\mu_{w_i}(x), \mu_{w_j}(y)\right)$.

Нехай w_i^{fuz} є трикутним нечітким числом $w_i^{fuz} = \left(w_i^l, w_i^m, w_i^u\right)$, $w_i^l \leq w_i^m \leq w_i^u$. Ступінь переваги $\nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$ будемо характеризувати ординатою точки перетину графіків функцій належності $\mu_{w_i}(x)$ і $\mu_{w_j}(y)$ (рис.

4.6). Якщо графіки функцій $\mu_{w_i}(x)$ і $\mu_{w_j}(y)$ не перетинаються і $w_i^u \le w_j^l$, то ступінь переваги нечіткої ваги w_i^{fuz} над нечіткою вагою w_j^{fuz} покладається рівним нулю. Якщо $w_i^m \ge w_j^m$, то будемо вважати, що w_i^{fuz} переважає w_j^{fuz} зі ступенем переваги, рівним одиниці. В іншому випадку, при $w_i^m < w_j^m$ і $w_i^u > w_j^l$ знайдемо ординату точки перетину графіків функцій $\mu_{w_i}(x)$ і $\mu_{w_j}(y)$, вона дорівнює $d = \dfrac{w_i^u - w_j^l}{\left(w_i^u - w_j^l\right) - \left(w_i^m - w_j^m\right)}$. Таким чином,

$$\nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right) = \nu\left(w_i^{fuz} \ge w_j^{fuz}\right) = \begin{cases} 0, & w_i^u \le w_j^l \\ 1, & w_i^m \ge w_j^m \\ \dfrac{w_i^u - w_j^l}{\left(w_i^u - w_j^l\right) - \left(w_i^m - w_j^m\right)}, & \left(w_i^m < w_j^m\right) \wedge \left(w_i^u > w_j^l\right) \end{cases}. \tag{4.39}$$

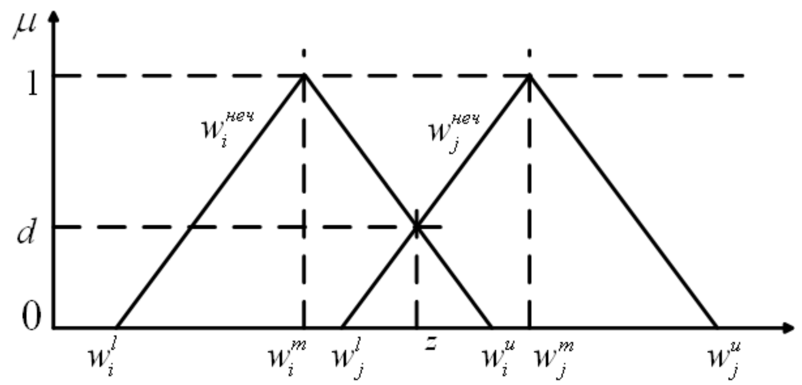


Рис. 4.6. Ступінь переваги $\nu\left(w_i^{fuz} \ge w_j^{fuz}\right)$ при $\left(w_i^m < w_j^m\right) \wedge \left(w_i^u > w_j^l\right)$

Відомо, що нечіткі відношення строгої переваги V_s та еквівалентності V_e на множині нечітких ваг w^{fuz} задаються відповідно функціями належності

$$\nu_s\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right) = \nu_s\left(w_i^{fuz} > w_j^{fuz}\right) = \begin{cases} \nu\left(w_i^{fuz} \ge w_j^{fuz}\right) - \nu\left(w_j^{fuz} \ge w_i^{fuz}\right), & \nu\left(w_i^{fuz} \ge w_j^{fuz}\right) > \nu\left(w_j^{fuz} \ge w_i^{fuz}\right) \\ 0, & else \end{cases}$$

$$\nu_e\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right) = \nu_e\left(w_i^{fuz} \sim w_j^{fuz}\right) = \min\left[\nu\left(w_i^{fuz} \ge w_j^{fuz}\right), \nu\left(w_j^{fuz} \ge w_i^{fuz}\right)\right].$$

Вага w_i^{fuz}:

1) *строго переважає* вагу w_j^{fuz} $\left(w_i^{fuz} > w_j^{fuz}\right)$, якщо $\nu_s\left(w_i^{fuz} > w_j^{fuz}\right) \geq \gamma_s$;

2) є *еквівалентною* вазі w_j^{fuz} $\left(w_i^{fuz} \sim w_j^{fuz}\right)$, якщо $\nu_e\left(w_i^{fuz} \sim w_j^{fuz}\right) \geq \gamma_e$;

3) *нестрого переважає* вагу w_j^{fuz} $\left(w_i^{fuz} \geq w_j^{fuz}\right)$, якщо $\left(w_i^{fuz} > w_j^{fuz}\right) \vee \left(w_i^{fuz} \sim w_j^{fuz}\right)$, тобто, $\left[\nu_s\left(w_i^{fuz} > w_j^{fuz}\right) \geq \gamma_s\right] \vee \left[\nu_e\left(w_i^{fuz} \sim w_j^{fuz}\right) \geq \gamma_e\right]$

де $0 < \gamma_s < 1$ і $0 < \gamma_e < 1$ – встановлені порогові значення.

Метод ранжування нечітких ваг w_i^{fuz} складається з наступних етапів [148, 149]:

1. Побудувати підмножину M_1 недомінованих нечітких ваг $w_{j_1}^{fuz}$ з множини w^{fuz}, $M_1 = \left\{w_{j_1}^{fuz} \,\middle|\, \neg\exists\, w_i^{fuz} : w_i^{fuz} > w_{j_1}^{fuz},\ i \neq j_1,\ w_i^{fuz}, w_{j_1}^{fuz} \in w^{fuz}\right\}$.

   Пов'яжемо з M_1 підмножину індексів $J_1 = \left\{j_1 \in J \,\middle|\, w_{j_1}^{fuz} \in M_1\right\}$, $J = [1, N]$. Тоді всі об'єкти O_{j_1}, $j_1 \in J_1$, отримують перший (найвищий) ранг.

2. Побудувати підмножину M_2 недомінованих нечітких ваг $w_{j_2}^{fuz}$, $M_2 = \left\{w_{j_2}^{fuz} \,\middle|\, \neg\exists\, w_i^{fuz} : w_i^{fuz} > w_{j_2}^{fuz}, i \neq j_2, w_i^{fuz}, w_{j_2}^{fuz} \in w^{fuz} \setminus M_1\right\}$.

   Пов'яжемо з M_2 підмножину індексів $J_2 = \left\{j_2 \in J \,\middle|\, w_{j_2}^{fuz} \in M_2\right\}$. Тоді об'єкти O_{j_2}, $j_2 \in J_2$, отримують другий ранг.

3. Аналогічно побудувати інші $M_3, ..., M_m$ і визначити групи об'єктів, які отримують третій і подальші ранги.

Під ступенем довіри до отриманого ранжування будемо розуміти ступінь виконання строгої/нестрогої переваги або еквівалентності однієї нечіткої ваги над іншою в цьому ранжуванні.

Означення 4.19. *Ступінь виконання нестрогої переваги* $p\left(w_i^{fuz} \geq w_j^{fuz}\right)$ нечіткої ваги w_i^{fuz} над нечіткою вагою w_j^{fuz} визначимо $p\left(w_i^{fuz} \geq w_j^{fuz}\right) = \nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$.

Означення 4.20. *Ступінь виконання строгої переваги* $p\left(w_i^{fuz} > w_j^{fuz}\right)$ нечіткої ваги w_i^{fuz} над нечіткою вагою w_j^{fuz} визначимо $p\left(w_i^{fuz} > w_j^{fuz}\right) = \nu_s\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$.

Означення 4.21. *Ступінь виконання еквівалентності* $p\left(w_i^{fuz} \sim w_j^{fuz}\right)$ нечітких ваг w_i^{fuz} і w_j^{fuz} визначимо $p\left(w_i^{fuz} \sim w_j^{fuz}\right) = \nu_e\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$.

4.6. Приклади

4.6.1. Розрахунок інтервальних ваг з ІМПП і спектрального коефіцієнту узгодженості

Розглянемо ІМПП, які наведені в літературних джерелах [69, 97, 101, 102, 106, 107]. Розрахуємо ваги, використовуючи лінійну двохетапну модель знаходження інтервальних ваг з ІМПП (див. п. 4.4.1). Використовуючи коефіцієнти P і T (див. п. 4.4.4), виконаємо порівняння результатів, отриманих за лінійною моделлю, та іншими методами, розробленими іншими авторами.

Приклад 4.6.1.1

Розглянемо ІМПП, яка досліджувалася в роботі [101]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & [3,4] & [5,6] & [6,7] \\ \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] & 1 & [4,5] & [5,6] \\ \left[\frac{1}{6},\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right] & 1 & [3,4] \\ \left[\frac{1}{7},\frac{1}{6}\right] & \left[\frac{1}{6},\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] & 1 \end{pmatrix}$$

Дана ІМПП є *неузгодженою* за усіма досліджуваними критеріями узгодженості: індекс узгодженості дорівнює $CI^* = 1.638$, а інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості дорівнює $k_y^{\text{interv}} = 0.58$ і є меншим за інтервальний поріг застосування (0.79). Але k_y^{interv} перевищує поріг виявлення (0.398), тому ІМПП A містить корисну для прийняття рішення інформацію і необхідно виконувати процедури підвищення її узгодженості. ІМПП має властивості *повного порядку ранжування і відсутності об'єктів-копій*.

Таблиця 4.1. Ваги об'єктів, отримані за лінійною двохетапною моделлю та різними варіантами задачі нелінійного програмування [101]

Об'єкт	Вага			
	Нелінійного програмування		Лінійна двохетапна модель	
	При мінімізації CR	При $CR \le 0.1$	Ненормов. ваги	Нормов. ваги
O_1	0.5600	[0.537; 0.601]	[7; 7.5]	[0.436; 0.526]
O_2	0.2811	[0.248; 0.308]	[5; 6]	[0.311; 0.421]
O_3	0.1058	[0.092; 0.130]	[1.25; 1.5]	[0.078; 0.105]
O_4	0.0531	[0.047; 0.058]	[1; 1.071]	[0.062; 0.075]

Таблиця 4.2. Помилки знаходження ваг об'єктів за лінійною двохетапною моделлю та різними варіантами задачі нелінійного програмування [101]

	Помилка			
	Нелінійного програмування		Лінійна двохетапна модель	
	При мінімізації CR	При $CR \le 0.1$	Ненормов. ваги	Нормов. ваги
P	7.214	7.807	4.622	5.052
T	7.214	7.555	4.900	4.901

За результатами роботи різних методів можна зробити наступні висновки (табл. 4.1, 4.2): 1) ваги, отримані різними методами, відрізняються між собою; 2) за критеріями P і T точнішою є лінійна двохетапна модель (див. п. 4.4.1); 3) *порядки ранжування ваг об'єктів*, отриманих різними методами, *співпадають* і дорівнюють $O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_4$ зі ступенем виконання, рівним 1.

Приклад 4.6.1.2

Розглянемо ІМПП, яка досліджувалася в роботах [101, 107]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & [1,2] & [1,2] & [2,3] \\ \left[\frac{1}{2},1\right] & 1 & [3,5] & [4,5] \\ \left[\frac{1}{2},1\right] & \left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right] & 1 & [6,8] \\ \left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right] & \left[\frac{1}{8},\frac{1}{6}\right] & 1 \end{pmatrix}$$

Дана ІМПП є *неузгодженою* за всіма досліджуваними в роботі критеріями узгодженості. Так, індекс узгодженості дорівнює $CI^* = 1.792$ і є відмінним від нуля. Значення інтервального спектрального коефіцієнту узгодженості дорівнює $k_y^{\text{interv}} = 0.536$ і є меншим за інтервальний поріг застосування (0.79). Але k_y^{interv} перевищує поріг виявлення (0.398), тому ІМПП A містить корисну для прийняття рішення інформацію і необхідно виконувати процедури підвищення узгодженості цієї матриці. ІМПП має властивості *часткового порядку, слабкої транзитивності, існування копій.*

За результатами роботи різних методів можна зробити наступні висновки (табл. 4.3, 4.4): 1) ваги, отримані за всіма досліджуваними методами, відрізняються між собою; 2) за критеріями P і T лінійна двохетапна модель точніша за методи лексикографічного цільового програмування і нелінійного програмування.

Встановлено, що ваги за всіма досліджуваними методами, крім лінійного двохетапного, задають одне й те ж ранжування об'єктів $O_2 \succ O_1 \succ O_3 \succ O_4$. При цьому для методів лексикографічного цільового програмування, нелінійного програмування з мінімізацією CR і при обмеженні $CR \le 0.1$ вказане ранжування має місце зі ступенем виконання, рівним 1. Для методу нелінійного програмування з відсутністю обмежень на CR, порядок $O_2 \succ O_3 \succ O_4$ виконується із ступенем виконання, рівним 1, а переваги $O_1 \succ O_3$ і $O_2 \succ O_1$ − із ступенями виконання 0.49 і 0.63, відповідно.

Таблиця 4.3. Ваги об'єктів за лінійною двохетапною моделлю, методами нелінійного [101] і лексикографічного цільового програмування [107]

Об'єкт	Вага					
	Метод лексик. цільов. програм.	Нелінійного програмування			Лінійна двохетапна модель	
		Мініміз CR	При $CR \le 0.1$	Відсутні обмеж. на CR	Ненормов. ваги	Нормов. ваги
O_1	0. 303	0. 281	[0. 258; 0.326]	[0. 228; 0.383]	[3; 4.5]	[0.205; 0.474]
O_2	0. 455	0. 413	[0. 388; 0.430]	[0. 326; 0.476]	[4; 4.5]	[0.274; 0.474]
O_3	0. 151	0. 239	[0. 212; 0.258]	[0. 179; 0.282]	[1.5; 4.5]	[0.103; 0.474]
O_4	0. 091	0. 067	[0. 064; 0.074]	[0. 056; 0.084]	[1; 1.125]	[0.068; 0.118]

Лінійна двохетапна модель задає трохи інше ранжування $O_2 \sim O_1 \sim O_3 \succ O_4$ зі ступенями виконання 0.855 для $O_2 \sim O_1$, 0.843 для $O_1 \sim O_3$ і 0.929 для $O_3 \succ O_4$. Таким чином, *порядки ранжування ваг*, отриманих різними методами, *співпадають з точністю до нестрогого відношення переваги* і дорівнюють $O_2 \sim O_1 \sim O_3 \succ O_4$ (лінійна двохетапна модель) і $O_2 \succ O_1 \succ O_3 \succ O_4$ (інші методи).

Таблиця 4.4. Помилки знаходження ваг за лінійною двохетапною моделлю, методами нелінійного і лексикографічного цільового програмування

<table>
<tr><th rowspan="3"></th><th colspan="6">Помилка</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Метод лексик. цільов. програм.</th><th colspan="3">Нелінійного програмування</th><th colspan="2">Лінійна двохетапна модель</th></tr>
<tr><th>Мініміз CR</th><th>При $CR \le 0.1$</th><th>Відсутні обмеж. на CR</th><th>Ненормов. ваги</th><th>Нормов. ваги</th></tr>
<tr><td>P</td><td>8.412</td><td>7.373</td><td>7.122</td><td>7.937</td><td>7.023</td><td>8.348</td></tr>
<tr><td>T</td><td>8.412</td><td>7.373</td><td>7.411</td><td>7.489</td><td>7.595</td><td>7.410</td></tr>
</table>

Приклад 4.6.1.3

Розглянемо ІМПП, наведену в роботах [101, 106]:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & [2,4] & [3,5] & [3,5] \\ \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] & 1 & \left[\frac{1}{2},1\right] & [2,5] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right] & [1,2] & 1 & \left[\frac{1}{3},1\right] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right] & \left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right] & [1,3] & 1 \end{pmatrix}.$$

Дана ІМПП є *неузгодженою* за усіма досліджуваними критеріями узгодженості: індекс узгодженості дорівнює $CI^* = 0.693$, інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості дорівнює $k_y^{\mathrm{interv}} = 0.685$ і є меншим за поріг застосування (0.79). В цій ІМПП *транзитивність відсутня*.

За результатами роботи різних моделей можна зробити наступні *висновки* (табл. 4.5, 4.6): 1) всі ваги, отримані досліджуваними методами, не співпадають між собою; 2) за критерієм *P* ненормовані ваги, отримані за лінійною двохетапною моделлю, точніші за ваги, отримані деякими варіантами методу нелінійного програмування.

Знайдемо порядки ранжування ваг наведених в табл. 4.5. Так, згідно з вагами, отриманими методом Монте-Карло, порядок ранжування об'єктів дорівнює $O_1 \succ O_2 \succ O_3 \sim O_4$, причому $O_1 \succ O_2 \succ O_4$ виконується зі ступенем виконання, рівним 1; $O_2 \succ O_3$ і $O_2 \sim O_3$ − із ступенями виконання 0.669 і 0.331; а $O_3 \succ O_4$ і $O_3 \sim O_4$ − із ступенями виконання 0.296 і 0.704. Ваги, отримані методом нелінійного програмування, задають трохи інший порядок: при мінімізації відношення узгодженості CR він дорівнює $O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_4$ зі ступенем виконання 1; при обмеженні на відношення узгодженості $CR \le 0.1$ можна отримати лише *часткове ранжування* $O_1 \succ O_2 \sim O_3$, $O_2 \succ O_4 \sim O_3$: $O_1 \succ O_2$ зі ступенем виконання 1; $O_2 \succ O_3$ і $O_2 \sim O_3$ зі ступенями виконання 0.445 і 0.555; $O_3 \succ O_4$ і $O_3 \sim O_4$ зі ступенями виконання 0.161 і 0.839; $O_2 \succ O_4$ і $O_2 \sim O_4$ зі ступенями виконання 0.574 і 0.426; при відсутності обмежень на відношення узгодженості CR також отримуємо лише *часткове ранжування*

Таблиця 4.5. Ваги об'єктів, отримані за лінійною двохетапною моделлю, методами нелінійного програмування [101] і Монте-Карло [106]

Об'єкт	Ваги					
	Метод Монте-Карло	Нелінійного програмування			Лінійна двохетапна модель	
		Мініміз CR	При $CR \le 0.1$	Відсутні обмеж. на CR	Ненормов. ваги	Нормов. ваги
O_1	[0. 437; 0.570]	[0. 492; 0.563]	[0. 433; 0.601]	[0. 381; 0.601]	[3; 4]	[0.346; 0.667]
O_2	[0. 165; 0.271]	[0. 181; 0.210]	[0. 139; 0.289]	[0. 139; 0.306]	[1; 2]	[0.115; 0.333]
O_3	[0. 111; 0.197]	[0. 143; 0.166]	[0. 103; 0.213]	[0. 102; 0.214]	[1; 1.333]	[0.115; 0.222]
O_4	[0. 101; 0.163]	[0. 114; 0.132]	[0. 088; 0.194]	[0. 086; 0.208]	[1; 1.333]	[0.115; 0.222]

$O_1 \succ O_2 \sim O_3$, $O_2 \succ O_4 \sim O_3$: $O_1 \succ O_2$ зі ступенем виконання 1; $O_2 \succ O_3$ і $O_2 \sim O_3$ зі ступенями виконання 0.464 і 0.536; $O_3 \succ O_4$ і $O_3 \sim O_4$ зі ступенями виконання 0.094 і 0.906; $O_2 \succ O_4$ і $O_2 \sim O_4$ зі ступенями виконання 0.524 і 0.476. Лінійна двохетапна модель задає порядок ранжування $O_1 \succ O_2 \sim O_3 \sim O_4$.

Таким чином, *порядки ранжування ваг*, отриманих різними методами, *не співпадають* між собою, що пов'язується, насамперед, із властивою ІМПП відсутністю транзитивності.

Таблиця 4.6. Помилки знаходження ваг за лінійною двохетапною моделлю, методами нелінійного програмування і Монте-Карло

	Помилка					
	Метод Монте-Карло	Нелінійного програмування			Лінійна двохетапна модель	
		Мініміз CR	При $CR \le 0.1$	Відсутні обмеж. на CR	Ненормов. ваги	Нормов. ваги
P	3.877	4.489	4.355	4.639	4.434	4.985
T	5.284	5.203	5.346	5.52	5.687	5.685

4.6.2. Багатокритеріальне групове оцінювання інноваційних об'єктів із застосуванням нечітких оцінок експертів

Розглянемо задачу групового оцінювання чотирьох інноваційних об'єктів на основі показників ринкової конкурентоспроможності (K_1), перспективності ринкового попиту (K_2), технологічної складності виробництва (K_3) та економічної ефективності збуту (K_4). На рис. 4.7 показана ієрархія, яка відповідає поставленій задачі. Початкові дані представлені оцінками чотирьох об’єктів відносно цих показників, виконані шістнадцятьма експертами в семиточковій шкалі S [57] (табл. Б.1–Б.16). Задача полягала у виборі найбільш пріоритетного об’єкту.

Рис. 4.7. Ієрархія оцінювання інвестиційних об’єктів

Задача розв’язувалася двома методами. Спочатку нечіткі експертні оцінки бути дефазифіковані та застосовано традиційний МАІ. Другий метод, яким було розв’язано задачу – це ММАІ, в якому безпосередньо оброблялися нечіткі оцінки експертів.

Розрахунок пріоритетів інноваційних об’єктів за допомогою традиційного МАІ

Ваги об’єктів розраховувалися методом ідеального синтезу при різних значеннях ваг показників $K_1 - K_4$ (табл.4.7). Результати свідчать про те, що найбільші ваги за оцінками всіх експертів отримали об’єкти 3 і 4 (табл.4.8–4.10, рис. 4.8).

Таблиця 4.7. Значення ваг показників $K_1 - K_4$

Показник	Вага		
	множина 1	*множина 2*	*множина 3*
Ринкова конкурентоспроможність	0.2	0.2	0.25
Перспективність ринкового попиту	0.25	0.2	0.25
Технологічна складність	0.2	0.2	0.25
Економічна ефективність збуту	0.35	0.4	0.25

Таблиця 4.8. Ваги об'єктів за результатами оцінок всіх експертів при значеннях ваг показників з множини 1

Номер об'єкта	Номер експерта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.599	0.542	0.729	0.526	0.589	0.731	0.791	0.559
2	0.740	0.672	0.786	0.758	0.711	0.735	0.735	0.711
3	1.000	1.000	1.000	0.734	1.000	0.815	1.000	0.892
4	1.000	0.852	0.885	1.000	0.944	1.000	0.993	1.000

Номер об'єкта	Номер експерта							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0.667	0.676	0.621	0.817	0.691	0.526	0.655	0.915
2	0.676	0.637	0.626	0.823	0.711	0.672	0.651	0.711
3	1.000	1.000	1.000	0.980	0.882	0.710	1.000	0.711
4	1.000	0.964	1.000	1.000	1.000	1.000	0.922	1.000

Таблиця 4.9. Ваги об’єктів за результатами оцінок всіх експертів при значеннях ваг показників з множини 2

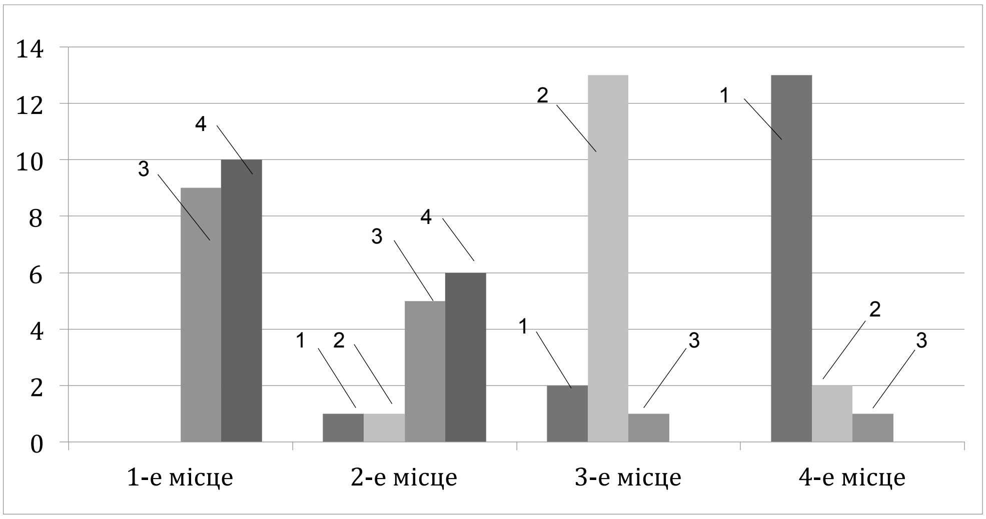
Номер об’єкта	Номер експерта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.573	0.542	0.800	0.526	0.625	0.778	0.808	0.540
2	0.730	0.661	0.856	0.780	0.711	0.746	0.725	0.711
3	1.000	1.000	1.000	0.745	1.000	0.795	0.989	0.868
4	0.925	0.838	0.944	1.000	0.978	1.000	1.000	1.000

Номер об’єкта	Номер експерта							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0.654	0.669	0.647	0.817	0.716	0.526	0.651	0.921
2	0.673	0.602	0.635	0.823	0.711	0.664	0.674	0.711
3	1.000	1.000	1.000	0.980	0.914	0.720	1.000	0.711
4	1.000	0.905	1.000	1.000	1.000	1.000	0.968	1.000

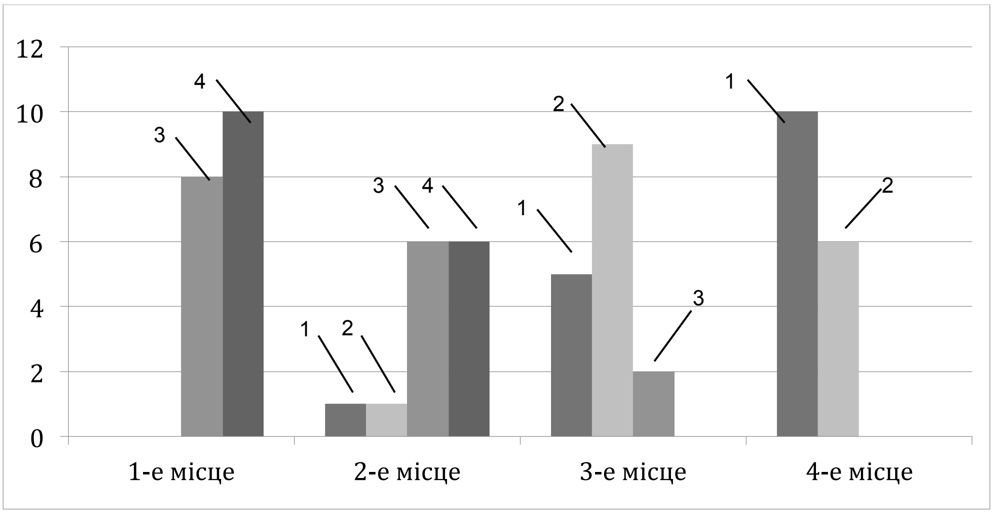
Таблиця 4.10. Ваги об’єктів за результатами оцінок всіх експертів при значеннях ваг показників з множини 3

Номер об’єкта	Номер експерта							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0.603	0.526	0.665	0.526	0.535	0.691	0.811	0.583
2	0.711	0.669	0.723	0.749	0.720	0.727	0.814	0.711
3	0.916	1.000	1.000	0.711	0.954	0.835	1.000	1.000
4	1.000	0.837	0.822	1.000	1.000	1.000	0.996	0.979

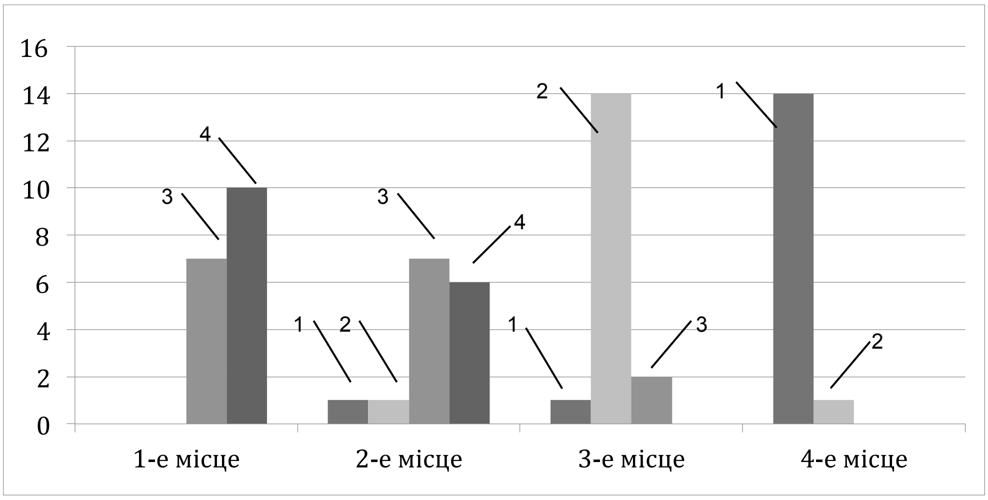
Номер об'єкта	Номер експерта							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0.652	0.647	0.581	0.767	0.675	0.526	0.672	0.866
2	0.674	0.674	0.603	0.834	0.690	0.680	0.663	0.711
3	0.995	1.000	1.000	0.910	0.887	0.680	1.000	0.711
4	1.000	1.000	0.910	1.000	1.000	1.000	0.998	1.000



(а)



(б)



(в)

Рис. 4.8. Кількість експертів, які присвоїли об’єктам 1–4 відповідне місце при значеннях ваг показників з множин 1 (а) – 3 (в)

Таблиця 4.11. Нечіткі локальні ваги об’єктів за кожним з критеріїв ($K_1 - K_4$) на основі оцінок всіх експертів

Об’єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.055; 0.087; 0.148]	[0.056; 0.089; 0.141]	[0.102; 0.194; 0.316]	[0.081; 0.137; 0.212]
O_2	[0.081; 0.138; 0.215]	[0.128; 0.213; 0.315]	[0.118; 0.218; 0.357]	[0.01; 0.156; 0.245]
O_3	[0.19; 0.312; 0.43]	[0.184; 0.293; 0.406]	[0.168; 0.298; 0.449]	[0.247; 0.362; 0.507]
O_4	[0.254; 0.378; 0.527]	[0.213; 0.319; 0.437]	[0.108; 0.185; 0.301]	[0.137; 0.23; 0.363]

Розрахунок пріоритетів інноваційних об’єктів за допомогою модифікованого МАІ за нечіткими оцінками експертів

На основі нечітких оцінок кожного експерта були знайдені нечіткі локальні (табл. Б.17–Б.32, 4.11) та глобальні (табл. 4.12) ваги об’єктів за ММАІ обробки нечітких оцінок. При знаходженні групового рішення покладалася рівна компетентність експертів $\left[0.9\cdot 1/16;\;\; 1.1\cdot 1/16\right]$. Під час розрахунку нечітких глобальних ваг важливість критеріїв вважалася однаковою, рівною $\left[0.9\cdot 1/4;\;\; 1.1\cdot 1/4\right]$.

Таблиця 4.12. Нечіткі глобальні ваги об’єктів на основі оцінок всіх експертів

Об’єкт	Вага
O_1	[0.055; 0.12; 0.228]
O_2	[0.045; 0.178; 0.315]
O_3	[0.166; 0.315; 0.484]
O_4	[0.141; 0.268; 0.437]

Проведемо ранжування отриманих нечітких глобальних ваг об’єктів (див. табл. 4.12) за методом, наведеним в п. 4.5. Нехай $\gamma_s = 0.2$ і $\gamma_e = 0.8$. Тоді, використовуючи значення відношень нестрогої переваги $\nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$, строгої переваги $\nu_s\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$ та еквівалентності $\nu_e\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$ (табл. 4.13), робимо висновок, що мають місце наступні відношення строгої переваги $w_2^{fuz} > w_1^{fuz}$, $w_3^{fuz} > w_1^{fuz}$, $w_4^{fuz} > w_1^{fuz}$, $w_3^{fuz} > w_2^{fuz}$, $w_4^{fuz} > w_2^{fuz}$ та еквівалентності $w_3^{fuz} \sim w_4^{fuz}$. Підмножини недомінованих нечітких ваг в даному випадку дорівнюють: $M_1 = \left\{w_3^{fuz}, w_4^{fuz}\right\}$, $M_2 = \left\{w_2^{fuz}\right\}$, $M_3 = \left\{w_1^{fuz}\right\}$.

Таблиця 4.13. Значення відношень нестрогої $\nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$, строгої переваг $\nu_s\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$ та еквівалентності $\nu_e\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$ для пар об’єктів (i, j)

(i, j)	$\nu\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$	$\nu_s\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$	$\nu_e\left(w_i^{fuz}, w_j^{fuz}\right)$
(1,2)	0.759	0	0.759
(1,3)	0.241	0	0.241
(1,4)	0.370	0	0.370
(2,3)	0.521	0	0.521

(2,4)	0.659	0	0.659
(3,4)	1	0.148	0.852
(2,1)	1	0.241	0.759
(3,1)	1	0.759	0.241
(4,1)	1	0.630	0.370
(3,2)	1	0.479	0.521
(4,2)	1	0.341	0.659
(4,3)	0.852	0	0.852

Таким чином, при заданих порогових значеннях γ_s і γ_e перший ранг отримують об'єкти O_3 і O_4, вони є еквівалентними, другий ранг – об'єкт O_2, а третій ранг – об'єкт O_1. Оцінимо ступінь довіри до отриманого ранжування. Ступінь виконання $p\left(w_3^{fuz} \sim w_4^{fuz}\right)$ еквівалентності нечітких ваг w_3^{fuz} і w_4^{fuz} дорівнює $p\left(w_3^{fuz} \sim w_4^{fuz}\right) = 0.852$. Ступені виконання $p\left(w_4^{fuz} > > w_2^{fuz}\right)$, $p\left(w_3^{fuz} > w_2^{fuz}\right)$, $p\left(w_2^{fuz} > w_1^{fuz}\right)$ строгих переваг нечіткої ваги w_4^{fuz} над нечіткою вагою w_2^{fuz}, w_3^{fuz} над w_2^{fuz}, w_2^{fuz} над w_1^{fuz}, дорівнюють відповідно $p\left(w_4^{fuz} > w_2^{fuz}\right) = 0.341$, $p\left(w_3^{fuz} > w_2^{fuz}\right) = 0.479$, $p\left(w_2^{fuz} > w_1^{fuz}\right) = 0.241$.

Таким чином, *розв'язання задачі багатокритеріального групового оцінювання інноваційних об'єктів, виконане різними методами (див. табл. 4.7–4.10, 4.12), призводить до однакових ранжувань об'єктів, що підтверджує достовірність отриманого розв'язку.*

РОЗДІЛ 5

Комплексне оцінювання чутливості рішення в ММАІ

Експертні оцінки піддаються впливу невизначеності і, як наслідок, можуть містити протиріччя. Причинами протиріч, зокрема, можуть бути: неповнота знань у експертів щодо питання, яке розглядається, їхня втома або незацікавленість у рішенні, існування неузгодженостей реального світу, неадекватна структура моделі [3, 51].

Для дослідження достовірності отриманого за допомогою МАІ рішення доцільно визначити залежність між результатами МАІ та ступенем суперечливості початкових даних — експертних оцінок. По суті, поставлена задача відноситься до більш узагальненого класу задач аналізу чутливості (АЧ) розв'язку до зміни початкових даних. МАІ є найбільш ефективним, коли його супроводжує АЧ, який допомагає краще зрозуміти природу проблеми, що розглядається, виявити можливості взаємозв'язку з іншими подібними ситуаціями, а також перевірити обґрунтованість числових значень та необхідність у більш високій точності обчислень.

Традиційним вважається локальний АЧ: розглядається певне рішення і досліджується його чутливість по відношенню до вибраного параметру [19, 20, 152–159]. Більшість дослідників зводять АЧ результатів МАІ до аналізу залежності вектору глобальних ваг альтернатив лише від ваг критеріїв. Це пояснюється декількома причинами:

1) ранжування, отримане за допомогою МАІ, є найбільш чутливим до змін ваг елементів на вищих рівнях ієрархії;
2) розгляд впливу одночасної зміни декількох елементів ієрархії на результуючий вектор ваг є відносно складним для практичного застосування.

На практиці АЧ рішень, отриманих МАІ, найчастіше проводиться графічними методами реалізованими в ППП Expert Choice [17]. До них відносяться градієнтний АЧ, динамічний, 2D та різницевий АЧ. У цих методах користувач може змінювати ваги критеріїв і спостерігати на екрані як у вигляді відповідних графіків, діаграм змінюються ваги альтернатив. Однак запропоновані Т. Сааті є методами типу «що буде, якщо». Вони не є системним підходом до проведення АЧ і дозволяють лише відповісти на питання «яким буде рішення, якщо вагу певного елементу змінити на деяку величину». Більш корисним, на нашу думку, результатом проведення АЧ у МАІ є знаходження критичного критерію, який характеризується найменшою зміною своєї ваги, що призводить до зміни порядку ранжування альтернатив [160].

МАІ використовується при розв'язанні різноманітних задач прийняття рішень. У залежності від задачі слід вибирати той чи інший метод проведення АЧ. У роботі [51] розглядаються три класи задач прийняття рішень:

1. Створення комплексних цільових програм для органів державного управління найвищого рівня та управління великих фірм.
2. Вибір програм розвитку середнього та малого бізнесу. Прийняття рішень для органів державного управління середнього рівня.
3. Індивідуальне управління в задачах, які мають характер повторюваності.

Для задач третього класу, розв'язання яких базується на інформації про результати використання рішень подібних задач, прийнятих у минулому, скоріш за все, достатньо буде проведення локального аналізу чутливості. Можна, наприклад, обмежитися методами, реалізованими в ППП Expert Choice. Однак, коли мова йде про задачі прийняття рішень першого та другого класів, при плануванні комплексних цільових програм для обґрунтування рішень відносно включення в програму різних політичних, соціальних чи економічних заходів та розподілу між ними ресурсів, при виборі сценаріїв розвитку галузей промисловості, а також при необхідності прийняття рішень відносно інноваційного розвитку сучасного суспільства, слід проводити більш повний (глобальний) АЧ, інтегрувати його в кожний етап прийняття рішення, включити в неперервний циклічний процес розв’язання задачі.

5.1. Постановка задачі

Дано:

- ієрархія, яка має p+1 рівень. Нульовий рівень L_0 складається з одного елементу – головної цілі. Останній рівень L_p складається з альтернативних варіантів рішень. Рівні ієрархії, які знаходяться між нульовим рівнем і останнім, представляють можливі фактори, які впливають на рішення. Кількість елементів L_k-го рівня дорівнює N_{L_k}, $L_k = \overline{L_0, L_p}$.

- $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ – заповнена експертами МПП елементів L_k-го рівня ієрархії відносно r-го елементу L_{k-1}-го рівня, $r = \overline{1, N_{L_{k-1}}}$ (знак $\wedge$ у виразі $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ показує, що елементи є оцінками відношень істинних ваг).

- $\hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}}$ – локальна вага l-го елементу L_k-го рівня відносно r-го елементу L_{k-1}-го рівня, $l = \overline{1, N_{L_k}}$, $r = \overline{1, N_{L_{k-1}}}$.

- $\hat{w}_l^{L_k}$ – глобальна вага елементів L_k-го рівня ієрархії, $l = \overline{1, N_{L_k}}$.

Глобальні ваги альтернативних варіантів рішень $\hat{w}^{L_p} = \{(\hat{w}_i^{L_p}) \mid i = \overline{1, N_{L_p}}\}$ є результатом роботи методу аналізу ієрархій.

Потрібно:

провести комплексне оцінювання чутливості вектору рішення $\hat{w}^{L_p}$:

- дослідити узгодженість експертних оцінок (матриць $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$);
- оцінити стійкість ваг $\hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}}$ до збурень, присутніх в $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$;

- знайти області змін ваг $\hat{w}_l^{L_k}$, при яких не відбувається зміни порядку ранжування у векторі розв’язку $\hat{w}^{L_p}$, $l = \overline{1, N_{L_k}}$, $L_k = \overline{L_1, L_{p-1}}$;
- знайти критичні та стійкі елементи L_k-го рівня.

5.2. Алгоритм прийняття рішення за допомогою ММАІ урахуванням комплексного оцінювання чутливості

В даній роботі оцінювання чутливості вектору рішення до неточностей та протиріч в експертних оцінках пропонується реалізовувати в структурі *комплексної методології оцінювання чутливості* отриманого рішення (рис. 5.1). Так, згідно з МАІ, спочатку проводиться декомпозиція проблеми, визначаються головна ціль і фактори, які впливають на її досягнення. Далі проводяться парні порівняння елементів, які знаходяться на одному рівні побудованої ієрархії, відносно спільного для них елемента сусіднього вищого рівня. Процес парних порівнянь супроводжується дослідженням узгодженості отриманих експертних оцінок. Розглянемо L_k-й рівень ієрархії. Нехай проведені парні порівняння елементів цього рівня відносно *r*-го елементу L_{k-1}-го рівня і результати організовані в МПП $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$. Досліджується узгодженість матриці $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$. Якщо $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ узгоджена або її рівень неузгодженості є припустимим, то розраховується вектор локальних ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \{(\hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}}) \mid l = \overline{1, N_{L_k}}\}$ елементів L_k-го рівня відносно *r*-го елементу L_{k-1}-го рівня і проводиться оцінювання стійкості вектора ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ до збурень, присутніх в $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ (див. п. 5.3). Якщо ж оцінки порівнянь елементів L_k-го рівня відносно *r*-го елементу L_{k-1}-го рівня перевищують припустимий рівень неузгодженості, то визначаються найбільш неузгоджені оцінки, і експерту пропонується змінити їх. Якщо в результаті досягається припустимий рівень неузгодженості, то розраховується вектор локальних ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ і проводиться оцінка його стійкості. Якщо експерт відмовився змінити свої оцінки або отримані нові оцінки знову не задовольняють умові припустимої неузгодженості, то пропонується змінити структуру ієрархії шляхом додавання додаткових рівнів [161]. У випадку невдачі доцільно відкласти прийняття рішення до отримання більш повної інформації. Після отримання локальних ваг елементів всіх рівнів обчислюється вектор $\hat{w}^{L_p}$ глобальних ваг альтернатив, який і є розв'язком задачі. Потім знаходяться області змін ваг $\hat{w}_l^{L_k}$, $l = \overline{1, N_{L_k}}$, $L_k = \overline{L_1, L_{p-1}}$, при яких не відбувається зміни порядку ранжування у векторі розв'язку $\hat{w}^{L_p}$ (див. п. 5.4).

Ієрархія аналізується на предмет критичних та стійких елементів (див. п. 5.4). ***Критичним*** називається такий елемент, зміна ваги якого, що призводить до зміни порядку ранжування альтернатив, є найменшою. Елемент називається ***стійким***, якщо ніякі припустимі зміни його ваги не призводять до зміни рангів альтернатив. Після знаходження критичних елементів задачі, можливо, буде потреба повернутися на попередні етапи процесу прийняття рішення та запропонувати експертам перевірити свої оцінки відносно цих найбільш чутливих елементів (пунктирна лінія на рис. 5.1).

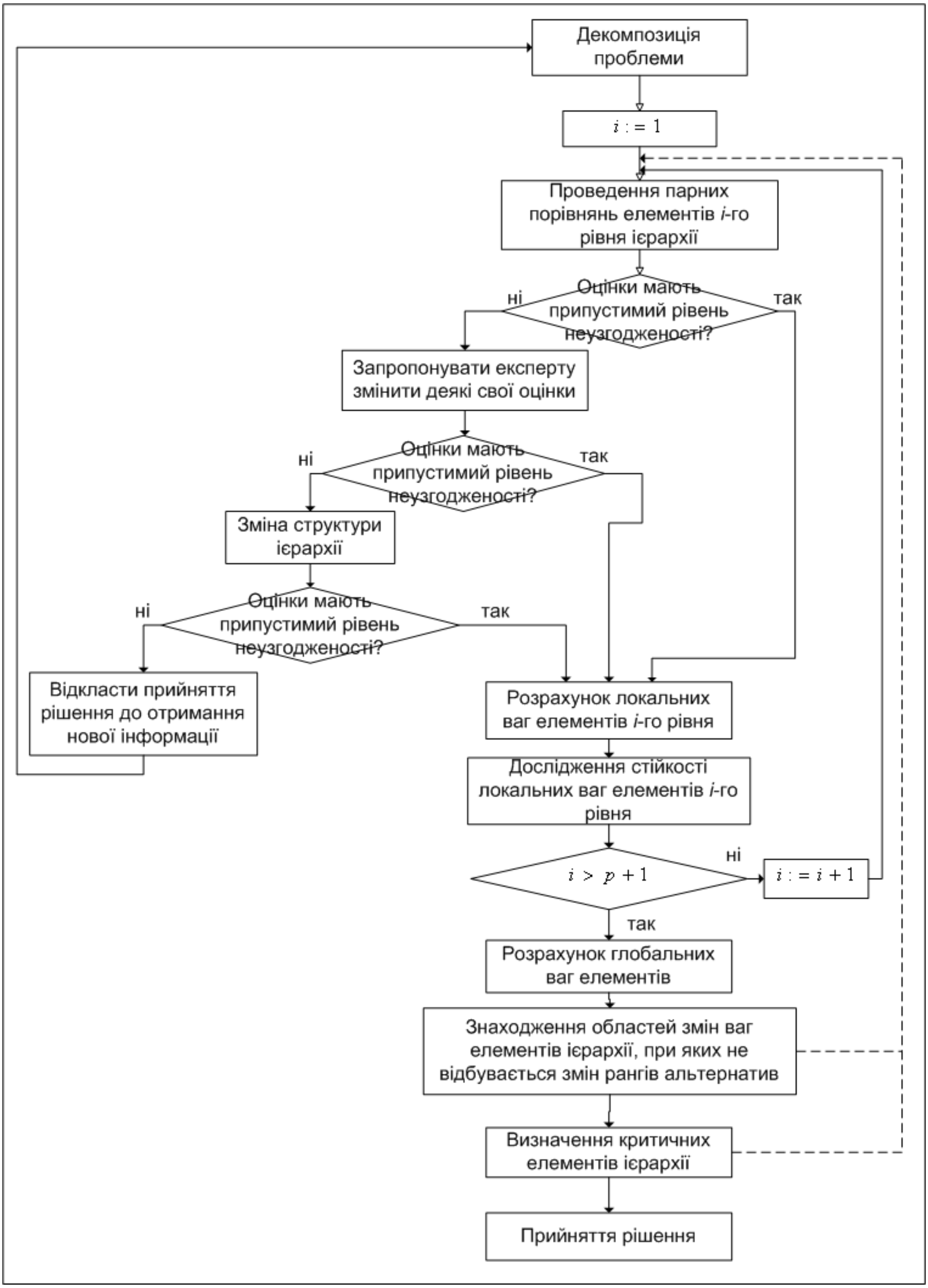


Рис. 5.1. Алгоритм прийняття рішення за допомогою ММАІ з урахуванням комплексного оцінювання чутливості

5.3. Оцінювання стійкості локальних ваг елементів ієрархії до збурень, викликаних суб'єктивністю експертних оцінок

Розглянемо $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{a}_{l_1 l_2 r}^{L_k L_{k-1}} \middle| l_1, l_2 = \overline{1, N_{L_k}} \right\}$ – заповнену експертами МПП елементів L_k-го рівня ієрархії відносно r-го елементу L_{k-1}-го рівня. В загальному випадку $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ не є узгодженою. Припустимо, що заповнена експертами МПП є збурена матриця відношень істинних ваг, тобто $\hat{a}_{l_1 l_2 r}^{L_k L_{k-1}} = a_{l_1 l_2}^{L_k} \varepsilon_{l_1 l_2}$, де $a_{l_1 l_2}^{L_k} = w_{l_1}^{L_k} / w_{l_2}^{L_k}$ – елемент узгодженої МПП, $\varepsilon_{l_1 l_2}$ – величина збурення.

Введемо вектори $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \middle| l = \overline{1, N_{L_k}} \right\}$ і $w_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ w_{lr}^{L_k L_{k-1}} \middle| l = \overline{1, N_{L_k}} \right\}$ локальних ваг елементів L_k-го рівня ієрархії відносно r-го елемента L_{k-1}-го рівня, $r = \overline{1, N_{L_{k-1}}}$, отримані після обробки заповненої експертами МПП $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ та узгодженої МПП $A_r^{L_k L_{k-1}}$ відповідно.

Оцінювання стійкості локальних ваг елементів ієрархії до збурень, викликаних суб'єктивністю експертних оцінок, складається з двох частин:

1) дослідження зміни рангів між вектором ваг, отриманим після обробки заданої експертами МПП, і вектором ваг, отриманим з породженої матриці;

2) дослідження зміни рангів між вектором ваг, отриманим після обробки заданої експертами МПП, і вектором ваг, отриманим із збуреної МПП.

Дослідження зміни рангів між вектором ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ *і вектором ваг, отриманим з породженої матриці* $A_{qr}^{*L_k L_{k-1}}$. Поставимо у відповідність збуреній матриці $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$ сукупність узгоджених МПП $\{A_{1r}^{*L_k L_{k-1}}, A_{2r}^{*L_k L_{k-1}}, ..., A_{N_{L_k} r}^{*L_k L_{k-1}}\}$, де $A_{qr}^{*L_k L_{k-1}}$ – узгоджена МПП, побудована за q-м рядком породженої МПП $\hat{A}_r^{L_k L_{k-1}}$, $q = \overline{1, N_{L_k}}$, $r = \overline{1, N_{L_{k-1}}}$.

Означення 5.1. Вектор ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \middle| l = \overline{1, N_{L_k}} \right\}$, $r = \overline{1, N_{L_{k-1}}}$ створює *зміну рангів* з вектором ваг $w_{qr}^{*L_k L_{k-1}} = \left\{ w_{qlr}^{*L_k L_{k-1}} \middle| l = \overline{1, N_{L_k}} \right\}$ породженої матриці $A_{qr}^{*L_k L_{k-1}}$ для даного $q = \overline{1, N_{L_k}}$, якщо $\exists\ l_1, l_2 = \overline{1, N_{L_k}}$ такі, що виконується умова

$$\begin{aligned}&\left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} > \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (w_{q l_1 r}^{*L_k L_{k-1}} < w_{q l_2 r}^{*L_k L_{k-1}})\right) \vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} < \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (w_{q l_1 r}^{*L_k L_{k-1}} > w_{q l_2 r}^{*L_k L_{k-1}})\right) \vee \\ &\vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} = \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (w_{q l_1 r}^{*L_k L_{k-1}} \neq w_{q l_2 r}^{*L_k L_{k-1}})\right) \vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} \neq \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (w_{q l_1 r}^{*L_k L_{k-1}} = w_{q l_2 r}^{*L_k L_{k-1}})\right).\end{aligned}$$

Означення 5.2. Вектор ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \middle| l = \overline{1, N_{L_k}} \right\}$ назвемо *стійким*, якщо $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ не створює зміни рангів ні з одним з векторів $w_{qr}^{*L_k L_{k-1}}$, $q = \overline{1, N_{L_k}}$.

Дослідження зміни рангів між вектором ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ і вектором ваг, отриманим із збуреної МПП $\hat{A}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$. Випадковим чином генерується велика кількість збурених матриць $\hat{A}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{a}_{l_1 l_2 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}} \middle| l_1, l_2 = \overline{1, N_{L_k}} \right\}$, $\hat{a}_{l_1 l_2 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}} = \hat{a}_{l_1 l_2 r}^{L_k L_{k-1}} \varepsilon_{l_1 l_2}$, де $\varepsilon_{l_1 l_2}$ – рівномірно розподілена випадкова величина на інтервалі $[1, \varepsilon_{\max}]$, $r = \overline{1, N_{L_{k-1}}}$. Для кожної $\hat{A}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$ обчислюються вектор ваг $\hat{w}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$ і відношення узгодженості. Розраховується імовірність зміни рангів між векторами $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ та $\hat{w}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$.

Означення 5.3. Вектор ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \middle| l = \overline{1, N_{L_k}} \right\}$, $r = \overline{1, N_{L_{k-1}}}$ створює *зміну рангів* з вектором ваг $\hat{w}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{\varepsilon L_k L_{k-1}} \middle| l = \overline{1, N_{L_k}} \right\}$ збуреної матриці $\hat{A}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$ для даного $\varepsilon_{l_1 l_2} \in [1, \varepsilon_{\max}]$, якщо $\exists\ l_1, l_2 = \overline{1, N_{L_k}}$ такі, що

$$\begin{aligned}&\left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} > \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (\hat{w}_{l_1 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}} < \hat{w}_{l_2 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}})\right) \vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} < \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (\hat{w}_{l_1 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}} > \hat{w}_{l_2 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}})\right) \vee \\ &\vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} = \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (\hat{w}_{l_1 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}} \neq \hat{w}_{l_2 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}})\right) \vee \left((\hat{w}_{l_1 r}^{L_k L_{k-1}} \neq \hat{w}_{l_2 r}^{L_k L_{k-1}}) \wedge (\hat{w}_{l_1 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}} = \hat{w}_{l_2 r}^{\varepsilon L_k L_{k-1}})\right).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Означення 5.4. *Ступенем зміни рангів* між векторами ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ і $\hat{w}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$ назвемо кількість пар (l_1, l_2), $l_1 < l_2$, для яких виконується умова (5.1). Якщо вектор ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ не створює зміну рангів з вектором ваг $\hat{w}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$ то ступінь зміни рангів покладається рівним нулю.

Наприклад, нехай вектор $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ задає наступне ранжування елементів: $O_1 \succ O_2 \succ O_3 \succ O_4$ (об'єкт O_1 має найбільшу вагу), а вектор $\hat{w}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$ збуреної МПП – ранжування $O_1 \succ O_4 \succ O_3 \succ O_2$. Ступінь зміни рангів між $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ та $\hat{w}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$ в даному випадку дорівнює трьом (пари (2,3), (2,4) і (3,4)).

Означення 5.5. *Імовірністю появи зміни рангів k-го ступеня* $P(r^k)$ між векторами ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ і $\hat{w}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$ назвемо відношення $P(r^k) = \frac{N^k}{N}$, де N^k – число появи зміни рангів *k*-го ступеня між $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ і $\hat{w}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$ в N експериментах.

Означення 5.6. Вектор ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}} = \left\{ \hat{w}_{lr}^{L_k L_{k-1}} \,\middle|\, l = \overline{1, N_{L_k}} \right\}$ назвемо *стійким*, якщо імовірності появи зміни рангів k -го ступеня $P(r^k)$ між векторами ваг $\hat{w}_r^{L_k L_{k-1}}$ та $\hat{w}_r^{\varepsilon L_k L_{k-1}}$ менші за попередньо задані порогові значення P_0^k .

Означення 5.7. *Інтервал стійкості* (*consistency stability interval, CSI*) – це діапазон, в межах якого може змінюватися оцінка експерта так, що міра неузгодженості не перевищує заздалегідь заданого порогового значення.

Знання *CSI* є особливо корисним при груповому прийнятті рішень, коли при розробці групового рішення необхідно, щоб гарантувалася допустима неузгодженість групи.

Означення 5.8. *Відносний інтервал стійкості CRSI* (будемо опускати слова «за критерієм узгодженості») для оцінки $\hat{a}_{rs}$ при заданому Δ визначимо $\left[\underline{\delta_{rs}}(\Delta), \overline{\delta_{rs}}(\Delta)\right]$, де Δ – обмеження на значення *GCI*, $GCI' - GCI < \Delta$, GCI' – нове значення *GCI* після зміни оцінки $\hat{a}_{rs}$.

Означення 5.9. *Інтервал стійкості CSI* оцінки $\hat{a}_{rs}$ при заданому Δ визначимо $\left[\underline{d_{rs}}(\Delta), \overline{d_{rs}}(\Delta)\right]$, де $\underline{d_{rs}}(\Delta) = a_{rs}\underline{\delta_{rs}}(\Delta)$, $\overline{d_{rs}}(\Delta) = a_{rs}\overline{\delta_{rs}}(\Delta)$.

Знайдемо інтервали стійкості для кожної експертної оцінки при використанні методу RGMM розрахунку ваг.

Твердження 5.1. Якщо елемент $\hat{a}_{rs}$ МПП $\hat{A}$ змінено і нове значення дорівнює $\hat{a}'_{rs}$ ($r \neq s$), тоді нові значення помилок при використанні методу

RGMM знаходження ваг дорівнюють:

$$e'_{ij} = e_{ij},\ \forall i, j \neq r, s,$$

$$e'_{rj} = e_{rj}\frac{1}{\rho},\ \forall j \neq r, s, \quad e'_{jr} = e_{jr}\rho,\ \forall j \neq r, s,$$

$$e'_{sj} = e_{sj}\rho,\ \forall j \neq r, s, \quad e'_{js} = e_{js}\frac{1}{\rho},\ \forall j \neq r, s,$$

$$e'_{rs} = e_{rs}\rho^{n-2}, \qquad e'_{sr} = e_{sr}\frac{1}{\rho^{n-2}},$$

де $\rho = \left(\frac{\hat{a}'_{rs}}{\hat{a}_{rs}}\right)^{1/n}$.

Доведення. Оскільки змінюється $\hat{a}_{rs}$, то змінюються лише ваги $\widehat{w}_r$ і $\widehat{w}_s$. Тому змінюються лише помилки з індексами r чи s.

Розглянемо помилку e_{rj}, де $j \neq r, s$ (в подальшому опускатимемо знак «$\wedge$» в позначенні елементів МПП і ваг):

$$e'_{rj} = \frac{a_{rj}w_j}{w'_r} = \frac{a_{rj}w_j}{w_r\left(\frac{a'_{rs}}{a_{rs}}\right)^{1/n}} = \frac{a_{rj}w_j}{w_r}\frac{1}{\rho} = e_{rj}\frac{1}{\rho}.$$

Помилки обернено симетричні, тому $e'_{jr} = \frac{1}{e'_{rj}} = \frac{\rho}{e_{rj}} = \rho e_{jr}$ для $\forall j \neq r, s$.

Аналогічно доводяться співвідношення для e_{sj} і e_{js}. Для e_{rs} маємо:

$$e'_{rs} = \frac{a'_{rs}w'_s}{w'_r} = \frac{a'_{rs}}{a_{rs}}\frac{a_{rs}w'_s}{w'_r} = \frac{a'_{rs}}{a_{rs}}\frac{a_{rs}w_s\left(\frac{a_{rs}}{a'_{rs}}\right)^{1/n}}{w_r\left(\frac{a'_{rs}}{a_{rs}}\right)^{1/n}} = \rho^n\frac{a_{rs}w_s}{w_r}\frac{1}{\rho^2} = e_{rs}\rho^{n-2}.$$

На базі цього співвідношення автоматично отримуємо вираз для e_{sr}. Твердження доведено.

Твердження 5.2. Якщо елемент $\hat{a}_{rs}$ МПП $\hat{A}$ змінено і нове значення дорівнює $\hat{a}'_{rs}$ ($r \neq s$), то *GCI* змінюється на величину

$$\Delta GCI = GCI' - GCI = \frac{2n}{(n-1)(n-2)}\ln\rho\ln(e_{rs}^2\rho^{n-2}),$$

де $\rho = \left(\dfrac{\hat{a}'_{rs}}{\hat{a}_{rs}}\right)^{1/n}$, $e_{rs} = \hat{a}_{rs}\dfrac{\hat{v}_s}{\hat{v}_r}$ – помилка апроксимації відношення ваг $\dfrac{\hat{v}_r}{\hat{v}_s}$ за допомогою $\hat{a}_{rs}$ при застосуванні RGMM для підрахунку ваг.

Доведення. Згідно з означенням, *GCI* розраховується як сума квадратів логарифмів помилок. Тому його зміна залежить лише від зміни елементів МПП, розташованих в рядках чи стовпчиках *r* і *s*. Тому, запишемо:

$$\Delta GCI = \Delta_r GCI + \Delta_s GCI + \Delta_{rs} GCI,$$

де $\Delta_r GCI$ означає зміну, спричинену помилками з першим чи другим індексом, рівним *r*, окрім e_{rs}; $\Delta_s GCI$ означає зміну, спричинену помилками з першим чи другим індексом, рівним *s*, окрім e_{rs}; і $\Delta_{rs} GCI$ означає зміну, спричинену e_{rs}.

Розглянемо доданок $\Delta_r GCI$. Приймаючи до уваги, що елементи в рядках і стовпчиках обернено симетричні, достатньо оперувати, наприклад, з елементами *r*-го рядка:

$$\Delta_r GCI = 2\sum_{j\neq r,s}(\ln^2 e'_{rj} - \ln^2 e_{rj}).$$

Зараз працюємо лише з чисельником виразу для *GCI*, знаменник додамо в кінці доведення.

Перетворюючи вираз в правій частині $\Delta_r GCI$, отримаємо:

$$\Delta_r GCI = 2\sum_{j\neq r,s}(\ln^2 \tfrac{e_{rj}}{\rho} - \ln^2 e_{rj}) = 2\sum_{j\neq r,s}(\ln\tfrac{e_{rj}}{\rho} + \ln e_{rj})(\ln\tfrac{e_{rj}}{\rho} - \ln e_{rj}) =$$

$$= 2\sum_{j\neq r,s}(\ln\tfrac{e_{rj}^2}{\rho})(\ln\tfrac{1}{\rho}) = 2\ln\tfrac{1}{\rho}\sum_{j\neq r,s}\ln\tfrac{e_{rj}^2}{\rho} = 2\ln\tfrac{1}{\rho}\ln\prod_{j\neq r,s}\tfrac{e_{rj}^2}{\rho} =$$

$$= 2\ln\tfrac{1}{\rho}\ln\left(\tfrac{1}{\rho^{n-2}}\prod_{j\neq r,s}e_{rj}^2\right) = 2\ln\tfrac{1}{\rho}\ln\left(\tfrac{1}{\rho^{n-2}}\tfrac{1}{e_{rs}^2}\prod_j e_{rj}^2\right).$$

Покажемо, що $\prod_j e_{rj} = 1$:

$$\prod_j e_{rj} = \prod_j \tfrac{a_{rj}w_j}{w_r} = \tfrac{\prod_j a_{rj}\prod_j w_j}{w_r^n} = \tfrac{w_r^n\prod_j w_j}{w_r^n} = \prod_j w_j = \prod_j\left(\prod_i a_{ji}\right)^{1/n} = \left(\prod_{i<j} a_{ji}a_{ij}\right)^{1/n} = 1.$$

Тому маємо, що $\Delta_r GCI = 2\ln\frac{1}{\rho}\ln\left(\frac{1}{\rho^{n-2}}\frac{1}{e_{rs}^2}\right) = 2\ln\rho\ln(\rho^{n-2}e_{rs}^2)$.

Аналогічно, $\Delta_s GCI = 2\ln\rho\ln(\rho^{n-2}e_{rs}^2)$. Залишилося знайти $\Delta_{rs}GCI$:

$$\Delta_{rs}GCI = 2(\ln^2 e'_{rs} - \ln^2 e_{rs}) = 2(\ln^2 e_{rs}\rho^{n-2} - \ln^2 e_{rs}) =$$

$$= 2(\ln e_{rs}\rho^{n-2} + \ln e_{rs})(\ln e_{rs}\rho^{n-2} - \ln e_{rs}) = 2(\ln e_{rs}^2\rho^{n-2})(\ln\rho^{n-2}) =$$

$$= 2(n-2)\ln\rho(\ln e_{rs}^2\rho^{n-2}).$$

Загальна зміна GCI дорівнює

$$\Delta GCI = \Delta_r GCI + \Delta_s GCI + \Delta_{rs}GCI = \frac{2n}{(n-1)(n-2)}\ln\rho\ln(e_{rs}^2\rho^{n-2}).$$

Твердження доведено.

Твердження 5.3. Для МПП $\hat{A}$ границі відносного інтервалу стійкості *CRSI* для елементу $\hat{a}_{rs}$ МПП при заданому рівні Δ для *GCI* розраховується наступним чином:

$$\underline{\delta_{rs}}(\Delta) = e^{n\ln\rho_{\min}},\ \underline{\delta_{rs}}(\Delta) = e^{n\ln\rho_{\max}},$$

де $\lfloor \ln\rho_{\min}, \ln\rho_{\max} \rfloor$ – інтервал для $\ln\rho_{rs}$, який визначається з наступної нерівності другого порядку:

$$\frac{2n}{(n-1)(n-2)}\left[(n-2)\ln^2\rho_{rs} + 2\ln e_{rs}\ln\rho_{rs}\right] \le \Delta.$$

В останній нерівності вільний член $(-\Delta)$ від'ємний, тому гарантується існування розв'язку $\ln\rho_{\min}$ і $\ln\rho_{\max}$ цієї нерівності (рис. 5.2).

Доведення. Припустимо, що модифікується елемент $\hat{a}_{rs}$ МПП і зростання *GCI* не перевищує величини $\Delta > 0$. Приймаючи до уваги твердження 5.2, маємо

$$\frac{2n}{(n-1)(n-2)}\ln\rho_{rs}\ln(e_{rs}^2\rho_{rs}^{n-2}) \le \Delta$$

і тому $\ln\rho_{rs}\ln(e_{rs}^2\rho_{rs}^{n-2}) \le \overline{\Delta}$, де $\overline{\Delta} = \frac{(n-1)(n-2)}{2n}\Delta$.

Після перетворень виразу в лівій частині останньої нерівності отримаємо

$$\ln\rho_{rs}(2\ln e_{rs} + (n-2)\ln\rho_{rs}) \le \overline{\Delta}, \quad (n-2)\ln^2\rho_{rs} + 2\ln e_{rs}\ln\rho_{rs} \le \overline{\Delta}.$$

Розв’язуючи нерівність відносно $\ln\rho_{rs}$, отримуємо два значення ρ_{rs}, які відповідають мінімальному і максимальному значенню $\hat{a}_{rs}$ при заданому індексі узгодженості.

Розв’язок останньої нерівності відповідає тим точкам, в яких парабола $(n-2)\ln^2\rho_{rs} + 2\ln e_{rs}\ln\rho_{rs} - \overline{\Delta}$ приймає від’ємні значення. Оскільки вільний член ($-\Delta$) від’ємний, то гарантовано існує два розв’язки для $\ln\rho_{rs}$, додатний і від’ємний, і, як наслідок, два значення $\rho_{\min}$ і $\rho_{\max}$ більше і менше за одиницю відповідно. Ці значення дозволяють отримати $\underline{\delta_{rs}}(\Delta)$ і $\overline{\delta_{rs}}(\Delta)$. Твердження доведено.

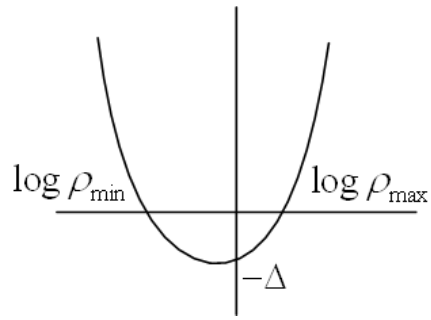


Рис. 5.2. Розв’язок для $\ln\rho_{rs}$ (знаком «log» на рисунку позначено натуральний логарифм)

Означення 5.10. *Індекс стійкості* за критерієм узгодженості для елементу $\hat{a}_{rs}$ МПП $\hat{A}$ при заданому Δ визначено наступним чином:

$$\delta_{rs} = \min\left\{\underline{\delta_{rs}^{-1}}, \overline{\delta_{rs}}\right\}.$$

Індекс стійкості дозволяє визначити найбільш критичні за критерієм узгодженості елементи МПП.

Наслідок 5.1. Для $n=3$ за умов твердження 5.3 індекси стійкості за критерієм узгодженості для трьох елементів $\hat{a}_{12}, \hat{a}_{23}, \hat{a}_{13}$ МПП $\hat{A}$ співпадають між собою.

Доведення. Для $n = 3$ матриця помилок приймає вигляд

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1/a \\ 1/a & 1 & a \\ a & 1/a & 1 \end{pmatrix},$$

оскільки $e_{12} = a_{12}\frac{w_2}{w_1} = \sqrt[3]{\frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}}}$, $e_{13} = a_{13}\frac{w_3}{w_1} = \sqrt[3]{\frac{a_{13}a_{32}}{a_{12}}} = \frac{1}{e_{12}}$ при використанні методу RGMM розрахунку ваг (в подальшому опускатимемо знак «∧» в позначенні елементів МПП і ваг).

Інтервал стійкості *CRSI* визначається за твердженням 5.3 і співпадає для елементів a_{12} і a_{23}:

$$3(\ln^2 \rho_{12} + 2\ln a \ln \rho_{12}) \le \Delta \ . \tag{5.2}$$

Оскільки значення *CRSI* співпадають, то відповідні індекси стійкості також рівні.

Для a_{13} нерівність має вигляд

$$3(\ln^2 \rho_{13} - 2\ln a \ln \rho_{13}) \le \Delta.$$

Оскільки значення $\underline{\delta_{13}}(\Delta)$ і $\overline{\delta_{13}}(\Delta)$ − це обернені величини до $\underline{\delta_{12}}(\Delta)$ і $\overline{\delta_{12}}(\Delta)$ відповідно, то використовуючи означення індексу стійкості, отримаємо $\delta_{13}(\Delta) = \min\left\{\underline{\delta_{13}}(\Delta)^{-1}, \overline{\delta_{13}}(\Delta)\right\} = \min\left\{\overline{\delta_{12}}(\Delta), \underline{\delta_{12}}(\Delta)^{-1}\right\} = \delta_{12}(\Delta)$. Наслідок доведено.

5.4. Розрахунок діапазонів змін ваг елементів ієрархії, які призводять до змін рангів альтернатив. Знаходження критичних і стійких елементів

Нехай альтернативи перенумеровані таким чином, що при $i < j$ виконується $\hat{w}_i^{L_p} \ge \hat{w}_j^{L_p}$, $i, j = \overline{1, N_{L_p}}$, де $\hat{w}_l^{L_k}$ − глобальна вага *l*-го елементу L_k − го рівня.

Означення 5.11. Позначимо $\Delta_{i,j,l}^{L_k}$, $i,j=\overline{1,N_{L_p}}$, $l=\overline{1,N_{L_k}}$, $L_k=\overline{L_1,L_{p-1}}$ величину *абсолютної зміни* ваги $\hat{w}_l^{L_k}$, що призводить до зміни порядку ранжування між *i*-м та *j*-м елементами L_p-го рівня (альтернативами *i* та *j*), тобто, нехай нова вага *l*-го елементу L_k-го рівня дорівнює $\hat{w}_l'^{L_k}=\hat{w}_l^{L_k}-\Delta_{i,j,l}^{L_k}$, $\hat{w}_l'^{L_k}>0$, і для $i<j$ виконується умова $\hat{w}_i'^{L_p}<\hat{w}_j'^{L_p}$, де $\hat{w}_i'^{L_p}$ – нова глобальна вага *i*-го елементу L_p-го рівня.

Означення 5.12. Позначимо $\delta_{i,j,l}^{L_k}$, $i,j=\overline{1,N_{L_p}}$, $l=\overline{1,N_{L_k}}$, $L_k=\overline{L_1,L_{p-1}}$ величину *відносної зміни* ваги $\hat{w}_l^{L_k}$, що призводить до зміни порядку ранжування між *i*-м та *j*-м елементами L_p-го рівня (*i*-ю та *j*-ю альтернативами), тобто, нехай нова вага *l*-го елементу L_k-го рівня дорівнює $\hat{w}_l'^{L_k}=\hat{w}_l^{L_k}-\dfrac{\delta_{i,j,l}^{L_k}\hat{w}_l^{L_k}}{100}$, $\hat{w}_l'^{L_k}>0$ і для $i<j$ виконується умова $\hat{w}_i'^{L_p}<\hat{w}_j'^{L_p}$, де $\hat{w}_i'^{L_p}$ – нова глобальна вага *i*-го елементу L_p-го рівня.

Величини відносної та абсолютної зміни ваги $\hat{w}_l^{L_k}$ *l*-го елементу L_k-го рівня пов'язані співвідношенням $\delta_{i,j,l}^{L_k}=\dfrac{\Delta_{i,j,l}^{L_k}}{\hat{w}_l^{L_k}}\cdot 100\,(\%)$.

Розглянемо деякі означення, які були введені в [163, 164] для характеристики рівня чутливості елементів ієрархії.

Означення 5.13. *l*-й елемент L_k-го рівня назвемо *стійким*, якщо ніякі припустимі зміни ваги даного елементу не призводять до зміни рангу ні однієї альтернативи.

Означення 5.14. *Критичним* елементом L_k-го рівня назвемо елемент L_k-го рівня, який має найменше значення $|\delta_{i,j,l}^{L_k}|$, тобто l_{crit}-й елемент L_k-го рівня – критичний, якщо $|\delta_{i,j,l_{crit}}^{L_k}|=\min\limits_{l=\overline{1,N_{L_k}}}\left\{|\delta_{i,j,l}^{L_k}|\right\}$, $i,j=\overline{1,N_{L_p}}$.

Означення 5.15. *Ступенем критичності* $C_l^{L_k}$ *l*-го елементу L_k-го рівня назвемо величину найменшої відносної зміни ваги $\hat{w}_l^{L_k}$ даного елементу, яка призводить до зміни порядку ранжування альтернатив: $C_l^{L_k} = \min\limits_{\substack{i,j=1,N_{L_p}, \\ i<j}} \left\{ | \delta_{i,j,l}^{L_k} | \right\}$.

Означення 5.16. *Чутливістю* $S_l^{L_k}$ l-го елементу L_k-го рівня назвемо величину, обернену до ступеня критичності даного елементу: $S_l^{L_k} = 1 / C_l^{L_k}$. Якщо l-й елемент L_k-го рівня є стійким, то покладається $S_l^{L_k} = 0$.

Чим меншим є ступінь критичності $C_l^{L_k}$ l-го елементу L_k-го рівня, тим «легше» змінити порядок ранжування альтернатив, тобто менше значення ступеня критичності $C_l^{L_k}$ свідчить про меншу зміну ваги $\hat{w}_l^{L_k}$, яку достатньо здійснити для зміни порядку ранжування альтернатив. І чим «легше» змінити порядок ранжування альтернатив, тим чутливість $S_l^{L_k}$ l-го елементу L_k-го рівня є більшою.

Знайдемо величину $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ відносної зміни ваги $\hat{w}_l^{L_k}$, що призводить до зміни порядку ранжування між i-м та j-м елементами L_p-го рівня у випадку використання для знаходження ваг двох методів синтезу: дистрибутивного і мультиплікативного.

5.4.1. Випадок використання дистрибутивного методу синтезу знаходження ваг

Нехай вага $w_l^{L_k}$ (*в подальшому будемо опускати знак* $\wedge$ *в позначеннях ваг*) l-го елементу L_k-го рівня змінена і нова вага $w_l'^{L_k}$ дорівнює $w_l'^{L_k} = w_l^{L_k} - \Delta_{i,j,l}^{L_k} = w_l^{L_k} - \dfrac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100}$. Оскільки повинна виконуватися умова додатності ваги $w_l'^{L_k} > 0$, то на величини $\Delta_{i,j,l}^{L_k}$ і $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ накладаються обмеження $\Delta_{i,j,l}^{L_k} < w_l^{L_k}$ і $\delta_{i,j,l}^{L_k} < 100\,\%$.

При використанні дистрибутивного синтезу глобальні ваги елементів кожного рівня ієрархії є нормованими, тому необхідно провести нормування елементів L_k-го рівня з врахуванням зміненої ваги $w_l'^{L_k}$ l-го елементу даного рівня. Позначимо нормовані ваги $w_{l_1}^{*L_k}$, $l_1 = \overline{1, N_{L_k}}$. Вони розраховуються наступним чином:

$$w_l^{*L_k} = \frac{w_l'^{L_k}}{w_l'^{L_k} + \sum\limits_{l_1=1, l_1 \neq l}^{N_{L_k}} w_{l_1}^{L_k}}, \; w_{l_1}^{*L_k} = \frac{w_{l_1}^{L_k}}{w_l'^{L_k} + \sum\limits_{l_1=1, l_1 \neq l}^{N_{L_k}} w_{l_1}^{L_k}} \text{ для } \forall l_1 = \overline{1, N_{L_k}},\ l_1 \neq l. \qquad (5.3)$$

Для знаходження величини $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ розпишемо умову $w_i'^{L_p} < w_j'^{L_p}$ зміни порядку ранжування між i-м та j-м елементами L_p-го рівня з урахуванням принципу ієрархічної композиції, згідно з яким

$$w_i'^{L_p} = \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_{k+1}=1}^{N_{L_k}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_k j_{k+1}}^{L_{k+1} L_k} w_{j_{k+1}}^{*L_k}.$$

Тоді нерівність $w_i'^{L_p} < w_j'^{L_p}$ запишеться у вигляді

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum\limits_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum\limits_{j_{k+1}=1}^{N_{L_k}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_k j_{k+1}}^{L_{k+1} L_k} w_{j_{k+1}}^{*L_k} < \\ < \sum\limits_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum\limits_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum\limits_{j_{k+1}=1}^{N_{L_k}} w_{jj_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_k j_{k+1}}^{L_{k+1} L_k} w_{j_{k+1}}^{*L_k} \end{array},$$

а після підстановки виразів для $w_{l_1}^{*L_k}$, згідно з (5.3), а потім $w_l'^{L_k}$, згідно з означ. 5.12, отримаємо

$$\begin{cases} \sum\limits_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum\limits_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum\limits_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} \sum\limits_{\substack{j_{k+1}=1, \\ j_{k+1} \neq l}}^{N_{L_k}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k j_{k+1}}^{L_{k+1} L_k} w_{j_{k+1}}^{L_k} + \\ + \sum\limits_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum\limits_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum\limits_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k} \left(w_l^{L_k} - \dfrac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100} \right) < \\ < \sum\limits_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum\limits_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum\limits_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} \sum\limits_{\substack{j_{k+1}=1, \\ j_{k+1} \neq l}}^{N_{L_k}} w_{jj_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k j_{k+1}}^{L_{k+1} L_k} w_{j_{k+1}}^{L_k} + \\ + \sum\limits_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum\limits_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum\limits_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{jj_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k} \left(w_l^{L_k} - \dfrac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100} \right) \end{cases}$$

Після перетворень остання нерівність приймає вигляд

$$\begin{cases} w_i^{L_p} - \dfrac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100} \sum\limits_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum\limits_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum\limits_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k} < \\ < w_j^{L_p} - \dfrac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100} \sum\limits_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum\limits_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum\limits_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{jj_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k} \end{cases}$$

або $w_j^{L_p} - w_i^{L_p} > \dfrac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100}\left(w_{jl}^{L_p L_k} - w_{il}^{L_p L_k} \right)$, де

$$w_{il}^{L_p L_k} = \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{ij_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k}, \qquad (5.4)$$

$$w_{jl}^{L_p L_k} = \sum_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} \ldots \sum_{j_k=1}^{N_{L_{k+1}}} w_{jj_1}^{L_p L_{p-1}} w_{j_1 j_2}^{L_{p-1} L_{p-2}} \ldots w_{j_{k-1} j_k}^{L_{k+2} L_{k+1}} w_{j_k l}^{L_{k+1} L_k}.$$

Отже, $\delta_{i,j,l}^{L_k} < \dfrac{w_j^{L_p} - w_i^{L_p}}{w_{jl}^{L_p L_k} - w_{il}^{L_p L_k}} \cdot \dfrac{100}{w_l^{L_k}}$, якщо $w_{jl}^{L_p L_k} > w_{il}^{L_p L_k}$;

$\delta_{i,j,l}^{L_k} > \dfrac{w_j^{L_p} - w_i^{L_p}}{w_{jl}^{L_p L_k} - w_{il}^{L_p L_k}} \cdot \dfrac{100}{w_l^{L_k}}$, якщо $w_{jl}^{L_p L_k} < w_{il}^{L_p L_k}$.

Оскільки, як зазначалося раніше, повинна виконуватися умова $w_l'^{L_k} > 0$, то $\Delta_{i,j,l}^{L_k} < w_l^{L_k}$ і $\delta_{i,j,l}^{L_k} < 100\,\%$, тобто має виконуватися $w_l^{L_k} > \dfrac{w_j^{L_p} - w_i^{L_p}}{w_{jl}^{L_p L_k} - w_{il}^{L_p L_k}}$, де вага $w_{il}^{L_p L_k}$ розраховується за рівнянням (5.4).

Таким чином, отримали наступне твердження.

Твердження 5.4. Величина $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ відносної зміни ваги $\hat{w}_l^{L_k}$, що призводить до зміни порядку ранжування між *i*-м та *j*-м елементами L_p-го рівня, $i, j = \overline{1, N_{L_p}}$, $l = \overline{1, N_{L_k}}$, $L_k = \overline{L_1, L_{p-1}}$, для $i < j$, задовольняє нерівності:

$\delta_{i,j,l}^{L_k} < \delta_{i,j,l}^{L_k porog}$, якщо $\hat{w}_{jl}^{L_p L_k} > \hat{w}_{il}^{L_p L_k}$;

$\delta_{i,j,l}^{L_k} > \delta_{i,j,l}^{L_k porog}$, якщо $\hat{w}_{jl}^{L_p L_k} < \hat{w}_{il}^{L_p L_k}$,

де порогове значення $\delta_{i,j,l}^{L_k porog}$ величини $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ обчислюється за формулою

$$\delta_{i,j,l}^{L_k porog} = \Delta_{i,j,l}^{L_k porog} \cdot \frac{100}{\hat{w}_l^{L_k}} (\%), \text{ де } \Delta_{i,j,l}^{L_k porog} = \frac{\hat{w}_j^{L_p} - \hat{w}_i^{L_p}}{\hat{w}_{jl}^{L_p L_k} - \hat{w}_{il}^{L_p L_k}} \tag{5.5}$$

за умов:

1) $\hat{w}_i^{L_p} \geq \hat{w}_j^{L_p}$ для $i < j$;

2) $\hat{w}_l^{L_k} > \Delta_{i,j,l}^{L_k\, porog}$ (що еквівалентно $\delta_{i,j,l}^{L_k\, porog} < 100\%$).

Наслідок 5.2. l-й елемент L_k-го рівня, $l = \overline{1, N_{L_k}}$ *стійкий*, якщо для $i < j$ виконується $\hat{w}_l^{L_k} \leq \Delta_{i,j,l}^{L_k porog}$ при $\forall\, i, j = \overline{1, N_{L_p}}$, де порогове значення $\Delta_{i,j,l}^{L_k porog}$ величини $\Delta_{i,j,l}^{L_k}$ обчислюється згідно з (5.5).

Наслідок 5.3. Якщо $\hat{w}_{jl}^{L_p L_k} \leq \hat{w}_{il}^{L_p L_k}$ для $\forall\, l = \overline{1, N_{L_k}}$, тобто j-й елемент L_p-го рівня не переважає i-й елемент L_p-го рівня за всіма елементами L_k-го рівня, $L_k = \overline{L_1, L_{p-1}}$, тоді ніякі припустимі зміни ваг елементів L_k-го рівня не призведуть до зміни порядку ранжування між цими елементами L_p-го рівня.

5.4.2. Випадок використання мультиплікативного методу синтезу знаходження ваг

Нехай вага $w_l^{L_k}$ l-го елементу L_k-го рівня змінена і нова вага $w_l'^{L_k}$ дорівнює $w_l'^{L_k} = w_l^{L_k} - \Delta_{i,j,l}^{L_k} = w_l^{L_k} - \dfrac{\delta_{i,j,l}^{L_k} w_l^{L_k}}{100}$. Умова додатності ваги $w_l'^{L_k} > 0$ вимагає накладання обмежень $\Delta_{i,j,l}^{L_k} < w_l^{L_k}$ і $\delta_{i,j,l}^{L_k} < 100\,\%$.

Нагадаємо, що до зміни ваги $w_l^{L_k}$ виконується $w_i^{L_p} \geq w_j^{L_p}$, $i < j$, а після зміни порядок ранжування між i-ю і j-ю альтернативами змінюється, тобто $w_i'^{L_p} < w_j'^{L_p}$. Знайдемо вирази для $w_i'^{L_p}$, $w_j'^{L_p}$ і підставимо їх в останню нерівність.

Нехай $a_{ij}^{L_k L_m}$ − ненормована вага i-го елементу L_k-го рівня відносно j-го елементу L_m-го рівня. Згідно з мультиплікативним синтезом вага i-ї альтернативи розраховується за формулою $w_i^{L_p} = \prod_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} (a_{ij_1}^{L_p L_{p-1}})^{w_{j_1}^{L_{p-1}}}$.

Припустимо, що змінюється вага l-го елементу L_{p-1}-го рівня, тоді

$$w_i'^{L_p} = \left(\prod_{j_1=1, j_1 \neq l}^{N_{L_{p-1}}} (a_{ij_1}^{L_p L_{p-1}})^{w_{j_1}^{L_{p-1}}} \right) (a_{il})^{w_l'^{L_{p-1}}} = \left(\prod_{j_1=1, j_1 \neq l}^{N_{L_{p-1}}} (a_{ij_1}^{L_p L_{p-1}})^{w_{j_1}^{L_{p-1}}} \right) (a_{il}^{L_p L_{p-1}})^{w_l^{L_{p-1}} - \Delta_{ijl}^{L_{p-1}}} =$$

$$= \frac{w_i^{L_p}}{(a_{il}^{L_p L_{p-1}})^{\Delta_{ijl}^{L_{p-1}}}}.$$

Тоді нерівність $w_i'^{L_p} < w_j'^{L_p}$ прийме вигляд

$$\frac{w_i^{L_p}}{(a_{il}^{L_p L_{p-1}})^{\Delta_{ijl}^{L_{p-1}}}} < \frac{w_j^{L_p}}{(a_{jl}^{L_p L_{p-1}})^{\Delta_{ijl}^{L_{p-1}}}}$$

і після перетворень

$$\Delta_{ijl}^{L_{p-1}} > \frac{\ln(w_i^{L_p} / w_j^{L_p})}{\ln(a_{il}^{L_p L_{p-1}} / a_{jl}^{L_p L_{p-1}})} \text{ при } a_{il}^{L_p L_{p-1}} > a_{jl}^{L_p L_{p-1}}.$$

Припустимо, що змінюється вага l-го елементу L_{p-2}-го рівня, тоді

$$w_i'^{L_p} = \prod_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} (a_{ij_1}^{L_p L_{p-1}})^{w_{j_1}'^{L_{p-1}}} = \prod_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} (a_{ij_1}^{L_p L_{p-1}})^{\frac{w_{j_1}^{L_{p-1}}}{(a_{j_1 l}^{L_{p-1} L_{p-2}})}} = \frac{w_i^{L_p}}{\prod_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} (a_{ij_1}^{L_p L_{p-1}})^{(a_{j_1 l}^{L_{p-1} L_{p-2}})^{\Delta_{ijl}^{L_{p-2}}}}}.$$

В цьому випадку нерівність нерівність $w_i'^{L_p} < w_j'^{L_p}$ прийме вигляд

$$\frac{w_i^{L_p}}{\prod_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} (a_{ij_1}^{L_p L_{p-1}})^{(a_{j_1 l}^{L_{p-1} L_{p-2}})^{\Delta_{ijl}^{L_{p-2}}}}} < \frac{w_j^{L_p}}{\prod_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} (a_{jj_1}^{L_p L_{p-1}})^{(a_{j_1 l}^{L_{p-1} L_{p-2}})^{\Delta_{ijl}^{L_{p-2}}}}}$$

або $\Delta_{ijl}^{L_{p-2}} > \dfrac{\ln(w_i^{L_p} / w_j^{L_p})}{\ln\left(\prod\limits_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \left(\dfrac{a_{ij_1}^{L_pL_{p-1}}}{a_{jj_1}^{L_pL_{p-1}}}\right)^{a_{j_1l}^{L_{p-1}L_{p-2}}}\right)}$.

Аналогічно виводиться умова зміни порядку ранжування при зміні елемента L_{p-3}-го рівня:

$$\Delta_{ijl}^{L_{p-3}} > \frac{\ln(w_i^{L_p} / w_j^{L_p})}{\ln\left(\prod\limits_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \left(\frac{a_{ij_1}^{L_pL_{p-1}}}{a_{jj_1}^{L_pL_{p-1}}}\right)^{\prod\limits_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} (a_{j_1j_2}^{L_{p-1}L_{p-2}})^{a_{j_2l}^{L_{p-2}L_{p-3}}}}\right)}.$$

В загальному випадку при зміні l-го елементу L_{p-k}-го рівня, $k \geq 2$ маємо

$$\Delta_{ijl}^{L_{p-k}} > \frac{\ln(w_i^{L_p} / w_j^{L_p})}{\ln\left(\prod\limits_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \left(\frac{a_{ij_1}^{L_pL_{p-1}}}{a_{jj_1}^{L_pL_{p-1}}}\right)^{\prod\limits_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} (a_{j_1j_2}^{L_{p-1}L_{p-2}})^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\prod\limits_{j_{k-1}=1}^{N_{L_{p-k+1}}} (a_{j_{k-2}j_{k-1}}^{L_{p-k+2}L_{p-k+1}})^{a_{j_{k-1}l}^{L_{p-k+1}L_{p-k}}}}}}}}\right)}.$$

Таким чином, отримали наступне твердження.

Твердження 5.5. Величина $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ відносної зміни ваги $\hat{w}_l^{L_k}$, що призводить до зміни порядку ранжування між i-м та j-м елементами L_p-го рівня, $i, j = \overline{1, N_{L_p}}$, $l = \overline{1, N_{L_k}}$, $L_k = \overline{L_1, L_{p-1}}$, для $i < j$, при використанні мультиплікативного синтезу задовольняє нерівності:

$\delta_{i,j,l}^{L_k} < \delta_{i,j,l}^{L_k porog}$, якщо $\hat{w}_{jl}^{L_pL_k} > \hat{w}_{il}^{L_pL_k}$;

$\delta_{i,j,l}^{L_k} > \delta_{i,j,l}^{L_k porog}$, якщо $\hat{w}_{jl}^{L_pL_k} < \hat{w}_{il}^{L_pL_k}$,

де порогове значення $\delta_{i,j,l}^{L_k porog}$ величини $\delta_{i,j,l}^{L_k}$ обчислюється за формулою

$$\delta_{i,j,l}^{L_k porog} = \Delta_{i,j,l}^{L_k porog} \cdot \frac{100}{\hat{w}_l^{L_k}} (\%),$$

$$\text{де } \Delta_{ijl}^{L_{p-k}\text{порог}} = \frac{\ln(w_i^{L_p} / w_j^{L_p})}{\ln\left(\prod_{j_1=1}^{N_{L_{p-1}}} \left(\frac{a_{ij_1}^{L_p L_{p-1}}}{a_{jj_1}^{L_p L_{p-1}}}\right)^{\prod_{j_2=1}^{N_{L_{p-2}}} (a_{j_1 j_2}^{L_{p-1}L_{p-2}})^{\mathrm{N} \prod_{j_{k-1}=1}^{N_{L_{p-k+1}}} (a_{j_{k-2}j_{k-1}}^{L_{p-k+2}L_{p-k+1}})^{a_{j_{k-1}l}^{L_{p-k+1}L_{p-k}}}}} \right)} \qquad (5.6)$$

за умов:

1) $\hat{w}_i^{L_p} \geq \hat{w}_j^{L_p}$ для $i < j$;

2) $\hat{w}_l^{L_k} > \Delta_{i,j,l}^{L_k\, porog}$ (що еквівалентно $\delta_{i,j,l}^{L_k\, porog} < 100\%$).

Розглянемо декілька прикладів, в яких ілюструються описані вище методи і підходи.

5.5. Приклади

5.5.1. Розрахунок інтервалів стійкості елементів МПП при використанні методу RGMM знаходження ваг

Розглянемо МПП [162]:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 3 \\ 1/5 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розрахуємо із цієї МПП вектор ненормованих ваг v, використовуючи метод RGMM: $v = (\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{3/2}, \sqrt[3]{1/15})$. Матриця помилок $E = \{(e_{ij}) \mid i, j = 1,...,n\}$, $e_{ij} = a_{ij}\dfrac{v_j}{v_i}$, дорівнює

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt[3]{6/5} & \sqrt[3]{5/6} \\ \sqrt[3]{5/6} & 1 & \sqrt[3]{6/5} \\ \sqrt[3]{6/5} & \sqrt[3]{5/6} & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо значення геометричного індексу узгодженості *GCI*. Згідно з означенням 2.3 п. 2.1.1, $GCI = \dfrac{2}{(n-1)(n-2)} \sum_{i<j} \ln^2 e_{ij} = \ln^2 \sqrt[3]{6/5} = 0.011$.

При $n=3$ поріг припустимої неузгодженості для *GCI* дорівнює $GCI^{*}=$ $=0.31$ (див. табл. 2.2 п.2.1.1). Тому, узгодженість може бути покращена на $\Delta = GCI^{*} - GCI(A) = 0.30$.

Запишемо нерівність твердження 5.3 для $\Delta = 0.3$:

$$3(\ln^2 \rho_{12} + 2\ln e_{12} \ln \rho_{12}) \le 0.3.$$

Розв'язавши її, отримаємо інтервал *CRSI* для елементу a_{12}:

$[\ln \rho_{\min}, \ln \rho_{\max}] = [-0.383, 0.261]$, $\left[\underline{\delta_{12}}(\Delta), \overline{\delta_{12}}(\Delta)\right] = [0.317, 2.190]$.

Звідси отримаємо діапазон зміни та *індекс стійкості* для елементу a_{12}:

$a'_{12} \in [0.634, 4.380]$, $\delta_{12} = \min\{1/0.317, 2.190\} = 2.190$.

Аналогічно розраховуються інтервали та індекси стійкості для інших елементів МПП A (табл. 5.1).

Таблиця 5.1. Інтервали та індекси стійкості елементів МПП A

Елемент МПП	Значення	*CRSI*	*CSI*	δ_{rs}
a_{12}	2	[0.317, 2.190]	[0.634, 4.380]	2.190
a_{13}	5	[0.457, 3.153]	[2.285, 15.765]	2.190
a_{23}	3	[0.317, 2.190]	[0.951, 6.570]	2.190

Відносний інтервал стійкості та індекс стійкості інтерпретуються як процент зміни початкової оцінки, припустимий при прийнятому рівні неузгодженості. У випадку коли абсолютний інтервал стійкості *CSI* виходить за межі фундаментальної шкали $\{1/9,...,9\}$ (для елементу a_{13}), дозволяється будь-яке збільшення оцінки без втрати припустимої узгодженості.

5.5.2. Оцінювання чутливості розв’язку задачі визначення відносної привабливості альтернативних варіантів інвестицій (розподіл ресурсів)

Нехай задача полягає у визначенні відносної привабливості наступних альтернативних варіантів інвестицій: готівка або готівкові еквіваленти; акції національних компаній; акції зарубіжних компаній; депозити; боргові зобов’язання (облігації); нерухомість; дорогоцінні метали. Ці альтернативи інвестор порівнює у відповідності зі своїми цілями: збереження принципів; зростання (приріст прибутку); захист від інфляції; зусилля на управління інвестиціями.

Ієрархічна структура, що відповідає даній задачі, представлена на рис. 5.3 [3]. Вона складається з трьох рівнів. Рівень L_0 складається з одного елементу – головної цілі *Визначення відносної привабливості альтернатив інвестицій*, останній рівень L_2 складається з наведених вище альтернативних варіантів інвестування.

Рис. 5.3. Ієрархія задачі визначення відносної привабливості альтернатив інвестицій [3]

При порівнянні цілей інвестор відповідає на питання виду: «Що є більш важливою ціллю *Збереження принципів* чи *Зростання*? Яким є ступінь переваги?» Під час порівняння елементів другого рівня (альтернатив) ставляться питання «Яка з двох альтернатив *Готівка або готівкові еквіваленти* чи *Акції національних компаній* більше задовольняє цілі *Збереження принципів* ?». Матриці парних порівнянь елементів ієрархії, побудовані за вподобаннями інвестора, наведені в табл. 5.2 і 5.3.

Таблиця 5.2. Оцінювання цілей інвестора

	Збереж. принцип.	Зростання	Захист від інфляції	Зусилля на управління інвестиціями	Вага
Збереження принципів	1	1/5	1/7	1/2	0.064
Зростання	5	1	1/2	4	0.337
Захист від інфляції	7	2	1	3	0.479
Зусилля на упр. інвест.	2	1/4	1/3	1	0.120
	$\lambda_{\max} = 4.085$, $CR = 0.032$				

Таблиця 5.3. Оцінювання альтернатив відносно цілі інвестора “збереження принципів”

Збереження принципів	Готівка або готівк. еквівал.	Акції нац. компаній	Акції зарубіж. компаній	Депозити	Боргові зобов'язання	Нерухомість	Дорогоцінні метали	Вага
Готівка або готівкові еквіваленти	1	7	7	1	5	4	5	0.337
Акції нац. компаній	1/7	1	1	1/6	1	1/3	1/2	0.046
Акції зарубіжних компаній	1/7	1	1	1/7	1/2	1/3	1/3	0.039
Депозити	1	6	7	1	5	4	5	0.331
Боргові зобов'язання	1/5	1	2	1/5	1	1	1	0.071

Нерухомість	1/4	3	3	1/4	1	1	1	0.094
Дорогоцінні метали	1/5	2	3	1/5	1	1	1	0.083
	$\lambda_{\max} = 7.132$, $CR = 0.016$							

Таблиця 5.4. Ваги альтернатив інвестицій відносно часткових цілей і головної цілі прийняття рішення

	Збереження принципів (0.064)	Зростання (0.337)	Захист від інфляції (0.479)	Зусилля на управління (0.120)	**Вага відносно головної цілі**	
					Дистрибутив. синтез	**Мультипл. синтез**
Готівка або готівкові еквіваленти	0.337	0.026	0.036	0.356	**0.090**	**0.057**
Акції національних компаній	0.046	0.240	0.122	0.059	**0.149**	**0.155**
Акції зарубіжних компаній	0.039	0.173	0.106	0.059	**0.119**	**0.128**
Депозити	0.331	0.061	0.081	0.240	**0.109**	**0.108**
Боргові зобов’язання	0.071	0.061	0.089	0.153	**0.086**	**0.097**
Нерухомість	0.094	0.322	0.356	0.036	**0.289**	**0.282**
Дорогоцінні метали	0.083	0.117	0.210	0.097	**0.158**	**0.174**

Слід зазначити, що відношення узгодженості *CR* всіх оцінок експертів не перевищують своїх порогових значень (табл. 5.2, 5.3), отже, всі надані експертами оцінки відношень ваг елементів мають припустимий рівень неузгодженості і можуть в подальшому використовуватися в процесі прийняття рішення.

Остаточне рішення представляється вектором ваг елементів останнього рівня ієрархії відносно головної цілі. Ці ваги, розраховані за двома різними методами синтезу наведені в табл. 5.4. Ранжування альтернатив інвестицій мають вигляд (в порядку спадання пріоритетності):

- Нерухомість, Дорогоцінні метали, Акції національних компаній, Акції зарубіжних компаній, Депозити, Готівка, Боргові зобов'язання (за методом дистрибутивного синтезу);
- Нерухомість, Дорогоцінні метали, Акції національних компаній, Акції зарубіжних компаній, Депозити, Боргові зобов'язання, Готівка (за методом мультиплікативного синтезу).

Якщо інвестор ставить собі за мету вибрати один оптимальний варіант інвестицій відповідно до своїх пріоритетів, то слід вибрати інвестиції у нерухомість. На другому місці знаходяться вклади у дорогоцінні метали, на третьому – акції національних компаній і т.д (див. табл. 5.4). У випадку задачі розподілу ресурсів інвестору слід розподілити свої заощадження у пропорціях, що задаються знайденими вагами.

Проведемо аналіз чутливості (АЧ) знайдених ваг альтернатив і визначимо діапазони змін ваг цілей інвестора (елементів L_1-го рівня ієрархії), що призводять до зміни порядку ранжування альтернатив інвестицій. Глобальні ваги (ваги відносно головної цілі) елементів L_1-го рівня позначено $w_k^{L_1}$, $k = 1,...,4$. Знайдемо величини $\delta_{i,j,k}^{L_1}$ відносних змін ваг $w_k^{L_1}$, необхідних для зміни порядку ранжування між i-ю та j-ю альтернативами, $i, j \in [1;7]$, $i < j$.

АЧ ваг, знайдених методом дистрибутивного синтезу

Розглянемо зміну ваги $w_1^{L_1}$ першої цілі «Збереження принципів». Умова 2 твердження 5.4 п. 5.4, виконання якої свідчить про можливість зміни порядку ранжування між альтернативами при зміні ваги вибраної цілі, виконується для пар альтернатив $(1,5)$ і $(3,4)$. Зміна порядку ранжування між альтернативами 1 і 5 має місце при зменшенні ваги першої цілі на величину $\frac{\delta_{1,5,1}^{L_1} w_1^{L_1}}{100}$, де $\delta_{1,5,1}^{L_1} \in (23.21\%, 100\%)$. Зміна порядку ранжування між альтернативами 3 і 4 має місце при збільшенні ваги першої цілі на величину $\frac{\delta_{3,4,1}^{L_1} w_1^{L_1}}{100}$, де $\delta_{3,4,1}^{L_1} \in (50.64\%, 100\%)$.

Зміна ваги $w_2^{L_1}$ другої цілі «Зростання» призводить до зміни порядку ранжування між значно більшою кількістю пар альтернатив, а саме, (1,5), (1,2), (2,4), (1,3), (3,4), (3,5) і (2,7) (для них виконується умова 2 твердження 5.4 п. 5.4). Зміна порядку ранжування між альтернативами (i, j) має місце при зміні ваги $w_2^{L_1}$ на величину $\frac{\delta_{i,j,2}^{L_1} w_2^{L_1}}{100}$, де значення $\delta_{i,j,2}^{L_1}$ змінюється в діапазонах, наведених в табл. 5.5.

Таким чином, зміна ранжування між альтернативами 1 і 5 має місце при збільшенні ваги другої цілі на величину $\frac{\delta_{1,5,2}^{L_1} w_2^{L_1}}{100}$, де $\delta_{1,5,2}^{L_1} \in (33.06\%, 100\%)$. Зміна ранжування між альтернативами 1 і 2 має місце при зменшенні ваги другої цілі на величину $\frac{\delta_{1,2,2}^{L_1} w_2^{L_1}}{100}$, де $\delta_{1,2,2}^{L_1} \in (82.28\%, 100\%)$. Зміна ранжування між альтернативами 2 і 4 має місце при зменшенні ваги другої цілі на величину $\frac{\delta_{2,4,2}^{L_1} w_2^{L_1}}{100}$, де $\delta_{2,4,2}^{L_1} \in (66.48\%, 100\%)$. Зміна ранжування між альтернативами 1 і 3 має місце при зменшенні ваги другої цілі на величину $\frac{\delta_{1,3,2}^{L_1} w_2^{L_1}}{100}$, де $\delta_{1,3,2}^{L_1} \in (58.10\%, 100\%)$. Зміна ранжування між альтернативами 3 і 4 має місце при зменшенні ваги другої цілі на величину $\frac{\delta_{3,4,2}^{L_1} w_2^{L_1}}{100}$, де $\delta_{3,4,2}^{L_1} \in (25.06\%, 100\%)$. Зміна ранжування між альтернативами 3 і 5 має місце при зменшенні ваги другої цілі на величину $\frac{\delta_{3,5,2}^{L_1} w_2^{L_1}}{100}$, де $\delta_{3,5,2}^{L_1} \in (86.98\%, 100\%)$. Зміна ранжування між альтернативами 2 і 7 має місце при збільшенні ваги другої цілі на величину $\frac{\delta_{2,7,2}^{L_1} w_2^{L_1}}{100}$, де $\delta_{2,7,2}^{L_1} \in (17.89\%, 100\%)$.

Таблиця 5.5. Діапазони для відносних змін ваги цілі «Зростання» ($\delta_{i,j,2}^{L_1}$), при яких змінюється ранжування між парами альтернатив

Номери альтернатив (i, j), між якими змінюється ранжування	Діапазон величини $\delta_{i,j,2}^{L_1}$ відносних змін ваг	Збільшення чи зменшення ваги $w_2^{L_1}$ призводить до зміни ранжування
(1,5)	$(33.06\%, 100\%)$	збільшення
(1,2)	$(82.28\%, 100\%)$	зменшення
(2,4)	$(66.48\%, 100\%)$	зменшення
(1,3)	$(58.10\%, 100\%)$	зменшення
(3,4)	$(25.06\%, 100\%)$	зменшення
(3,5)	$(86.98\%, 100\%)$	зменшення
(2,7)	$(17.89\%, 100\%)$	збільшення

Аналогічно, зміни ранжувань між альтернативами (i, j) мають місце при змінах ваг $w_3^{L_1}$ і $w_4^{L_1}$ цілей «Захист від інфляції» і «Зусилля на управління» на величини $\frac{\delta_{i,j,3}^{L_1} w_3^{L_1}}{100}$ і $\frac{\delta_{i,j,4}^{L_1} w_4^{L_1}}{100}$ відповідно, де значення $\delta_{i,j,3}^{L_1}$ і $\delta_{i,j,4}^{L_1}$ змінюються в діапазонах, наведених в табл. 5.6, 5.7.

Знайдемо ступінь критичності кожної цілі інвестора. Це буде мінімальне значення відносної зміни ваги цієї цілі, що призводить до зміни порядку ранжування між будь-якою парою альтернатив. Чутливість цілі розраховується як обернена величина до ступеня критичності. Аналізуючи значення $\delta^{L_1}_{i,j,2}$ – $\delta^{L_1}_{i,j,4}$ (див. табл.5.5–5.7), отримуємо ступені критичності і величини чутливості цілей (табл. 5.8).

Таблиця 5.6. Діапазони для відносних змін ваги цілі «Захист від інфляції» ($\delta^{L_1}_{i,j,3}$), при яких змінюється ранжування між парами альтернатив

Номери альтернатив (i,j), між якими змінюється ранжування	Діапазон величини $\delta^{L_1}_{i,j,3}$ відносних змін ваг	Збільшення чи зменшення ваги $w^{L_1}_3$ призводить до зміни ранжування
(1,5)	$(15.39\%, 100\%)$	збільшення
(1,3)	$(84.59\%, 100\%)$	зменшення
(3,4)	$(77.16\%, 100\%)$	зменшення
(1,4)	$(88.75\%, 100\%)$	зменшення
(1,7)	$(79.98\%, 100\%)$	зменшення
(2,7)	$(17.63\%, 100\%)$	зменшення
(3,7)	$(76.83\%, 100\%)$	зменшення
(4,7)	$(76.90\%, 100\%)$	зменшення

Таблиця 5.7. Діапазони для відносних змін ваги цілі «Зусилля на управління» ($\delta^{L_1}_{i,j,4}$), при яких змінюється ранжування між парами альтернатив

Номери альтернатив (i,j), між якими змінюється ранжування	Діапазон величини $\delta^{L_1}_{i,j,4}$ відносних змін ваг	Збільшення чи зменшення ваги $w^{L_1}_4$ призводить до зміни ранжування
(1,5)	$(16.10\%, 100\%)$	зменшення
(1,3)	$(80.50\%, 100\%)$	збільшення
(3,4)	$(43.25\%, 100\%)$	збільшення

Найбільшу чутливість має ціль «Захист від інфляції», при відносному збільшенні ваги цієї цілі на 15.39% відбувається зміна розв'язку, а саме, змінюється порядок ранжування між альтернативами «Готівка» та «Боргові зобов'язання», які мають найменші пріоритети для інвестора. Ранжування між цими альтернативами змінюється при зміні ваг кожної з цілей.

Таблиця 5.8. Ступені критичності і величини чутливості цілей інвестора

Ціль	Ступінь критичності, %	Чутливість
«Збереження принципів»	23.21	0.043
«Зростання»	17.89	0.056
«Захист від інфляції»	15.39	0.065
«Зусилля на управління»	16.10	0.062

Розв'язок задачі знаходження оптимального варіанту інвестицій (див. табл. 5.4) є стійким до збурень в оцінках експерта, оскільки зміни у цілях не призводять до зміни оптимальної альтернативи «Нерухомість». Це пояснюється, насамперед, суттєвою відмінністю її ваги від ваг інших альтернатив.

Проте, розв'язок не можна вважати стійким для задачі розподілу ресурсів, оскільки порядок ранжування між двома наступними варіантами інвестицій «Дорогоцінні метали» і «Акції національних компаній» (їх ваги дорівнюють 0.158 і 0.149 відповідно) змінюється вже при відносному збільшенні ваги цілі «Зростання» на 17.9%.

АЧ ваг, знайдених методом мультиплікативного синтезу

При використанні методу мультиплікативного синтезу знаходження ваг відносно головної цілі виявлено, що два елементи першого рівня ієрархії є стійкими до змін ваг. Ці елементи – цілі інвестора «Збереження принципів» і «Зусилля на управління». Зміни їх ваг не призводять до зміни в ранжуванні альтернатив. Діапазони для відносних змін ваг інших двох цілей приведені в табл. 5.9, 5.10. Критичним елементом першого рівня ієрархії, так само, як і при використанні дистрибутивного синтезу, є ціль «Захист від інфляції» (табл. 5.11).

Таблиця 5.9. Діапазони для відносних змін ваги цілі «Зростання» ($\delta_{i,j,2}^{L_1}$), при яких змінюється ранжування між парами альтернатив

Номери альтернатив (i, j), між якими змінюється ранжування	Діапазон величини $\delta_{i,j,2}^{L_1}$ відносних змін ваг	Збільшення чи зменшення ваги $w_2^{L_1}$ призводить до зміни ранжування
(2,4)	$(78.91\%, 100\%)$	зменшення
(3,4)	$(50.13\%, 100\%)$	зменшення
(3,5)	$(81.04\%, 100\%)$	зменшення
(2,7)	$(46.70\%, 100\%)$	збільшення

Таблиця 5.10. Діапазони для відносних змін ваги цілі «Захист від інфляції» ($\delta_{i,j,3}^{L_1}$), при яких змінюється ранжування між парами альтернатив

Номери альтернатив (i, j), між якими змінюється ранжування	Діапазон величини $\delta_{i,j,3}^{L_1}$ відносних змін ваг	Збільшення чи зменшення ваги $w_3^{L_1}$ призводить до зміни ранжування
(2,7)	$(43.51\%, 100\%)$	зменшення
(3,7)	$(92.62\%, 100\%)$	зменшення

Таблиця 5.11. Ступені критичності і величини чутливості цілей інвестора

Ціль	Ступінь критичності, %	Чутливість
«Збереження принципів»	-	0
«Зростання»	46.70	0.021
«Захист від інфляції»	43.51	0.023
«Зусилля на управління»	-	0

5.5.3. Оцінювання чутливості розв'язку задачі отримання розподілу ймовірності зміни цін акцій (прогнозування)

Нехай інвестор оцінює акції різних компаній і хоче дізнатися, які з них виростуть у ціні, а які впадуть. Він розглядає дві акції і вважає, що вони обидві виростуть у ціні. Питання полягає в тому, чи є ймовірність того, що акції № 1 зростуть на більшу величину ніж акції № 2? Якщо інвестор зможе на базі своїх знань побудувати розподіли ймовірностей цін акцій, тоді він зможе використовувати їх при виборі акцій, чи навіть при прийнятті більш складних рішень вибору серед альтернативних стратегій для опціонів пут і кол.

Звичайно, інвестор не може безпосередньо вказати розподіл ймовірностей ціни акцій. Однак, цілком природно для інвестора висловити свої оцінки щодо цін за допомогою парних порівнянь. Зокрема, інвестор може дати наступну оцінку (табл. 5.12):

Імовірність події, що ціна акцій зросте на 5%, помірно перевищує імовірність події, що ціна акцій залишиться незмінною на протязі визначеного періоду часу.

Використовуючи до МПП з табл. 5.12 метод головного власного вектора отримаємо ймовірності досліджуваних подій: P(Акції впадуть на 20%) = 0.025; P(Акції впадуть на 10%) = 0.067; P(Акції впадуть на 5%) =

0.137; P(Ціна акцій залишиться незмінною) = 0.238; P(Акції зростуть на 5%) = 0.341; P(Акції зростуть на 10%) = 0.138; P(Акції зростуть на 20%) = 0.055.

Таблиця 5.12. МПП задачі отримання розподілу ймовірності зміни цін акцій

	Акції впадуть на 20%;	Акції впадуть на 10%;	Акції впадуть на 5%;	Незмінна ціна	Акції зростуть на 5%;	Акції зростуть на 10%;	Акції зростуть на 20%.
Акції впадуть на 20%;	1	1/7	1/8	1/9	1/5	1/5	1/3
Акції впадуть на 10%;	7	1	1/4	1/5	1/4	1/3	1
Акції впадуть на 5%;	8	4	1	1/3	1/3	1	2
Незмінна ціна;	9	5	3	1	1/3	2	4
Акції зростуть на 5%;	5	4	3	3	1	3	6
Акції зростуть на 10%;	5	3	1	1/2	1/3	1	4
Акції зростуть на 20%.	3	1	1/2	1/4	1/6	1/4	1

Розширення полягає в отриманні об'єднаного прогнозу з різних ракурсів прогнозування (рис. 5.4) [3]:

- фундаментальний аналіз (принципи компанії, відношення ціни акції до прибутку на неї (price earnings ratio), пропозиція, попит тощо),
- технічний аналіз (ранжування, ковзне середнє, рівні підтримки і протидії, хвилі Еліота тощо),
- аналіз циклів,
- аналіз історії (якою є ціна відносно історичних піків (максимальних і мінімальних значень) тощо.

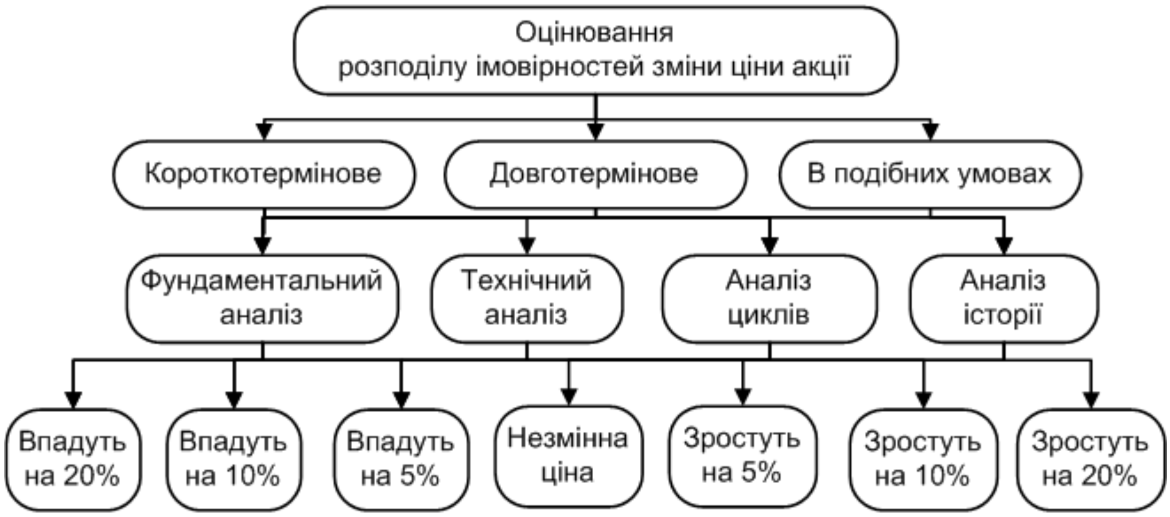


Рис. 5.4. Ієрархія оцінювання розподілу ймовірностей зміни цін акцій [3]

В даному прикладі крім різних ракурсів прогнозування будемо розглядати прогнозування у різних часових масштабах: короткотермінове, довготермінове, в подібних умовах.

При знаходженні розподілу ймовірностей ціни акцій також можна використовувати такі суттєві для інвестора критерії як очікуване значення, стандартне відхилення, імовірність отримання чи втрати більш ніж визначений процент, якість управління компанії. Але в даному прикладі для спрощення ці критерії враховуватися не будуть.

Згідно з МАІ експерти порівняли часові масштаби прогнозування відносно головної цілі і ракурси відносно кожного з часових масштабів (табл. 5.13, 5.14). Питання експерту ставилися наступним чином: «Результати якого прогнозування важливіші при оцінюванні розподілу ймовірностей зміни ціни акцій?» (при порівнянні часових масштабів прогнозування) і «Який з ракурсів важливіший при короткотерміновому/ довготерміновому/в подібних умовах прогнозуванні?» (при порівнянні ракурсів прогнозування). Потім величини змін цін акцій (альтернативи) оцінювалися у відповідності з тим чи іншим ракурсом (табл. 5.15). Використовуючи метод головного власного вектору МАІ, були розраховані ваги елементів ієрархії (табл. 5.13–5.15) і знайдені результуючі глобальні ваги (табл. 5.16), які інтерпретуються як ймовірності подій, що формують останній рівень ієрархії.

Таблиця 5.13. Оцінювання часових масштабів прогнозування

Оцінювання розподілу імовірностей зміни ціни акцій	Коротко-термінове	Довго-термінове	В подібних умовах	Вага
Короткотермінове	1	5	3	0.648
Довготермінове	1/5	1	1/2	0.122
В подібних умовах	1/3	2	1	0.230
	$\lambda_{max} = 3.004$, $CR = 0.004$			

Таблиця 5.14. Оцінювання ракурсів прогнозування при: а)короткотерміновому прогнозуванні; б) довготерміновому; в) в подібних умовах

а)

Коротко-термінове	Фундаментальний аналіз	Технічний аналіз	Аналіз циклів	Аналіз історії	Вага
Фундам. аналіз	1	1	3	4	0.385
Технічний аналіз	1	1	3	4	0.385
Аналіз циклів	1/3	1/3	1	2	0.143
Аналіз історії	1/4	1/4	1/2	1	0.087
	$\lambda_{max} = 4.021$, $CR = 0.008$				

б)

Довго-термінове	Фундаментальний аналіз	Технічний аналіз	Аналіз циклів	Аналіз історії	Вага
Фундам. аналіз	1	2	1/3	1/3	0.139
Технічний аналіз	1/2	1	1/4	1/4	0.086
Аналіз циклів	3	4	1	1/2	0.320
Аналіз історії	3	4	2	1	0.455
	$\lambda_{max} = 4.081$, $CR = 0.03$				

в)

В подібних умовах	Фундаментальний аналіз	Технічний аналіз	Аналіз циклів	Аналіз історії	Вага
Фундам. аналіз	1	1	2	2	0.333
Технічний аналіз	1	1	2	2	0.333
Аналіз циклів	1/2	1/2	1	1	0.167
Аналіз історії	1/2	1/2	1	1	0.167
	$\lambda_{\max} = 4$, $CR = 0$				

Таблиця 5.15 Оцінювання альтернатив при: а) фундаментальному аналізі; б) технічному аналізі; в) аналізі циклів; г) аналізі історії

а)

Фундаментальний аналіз	впадуть на 20%	впадуть на 10%	впадуть на 5%	незмінна ціна	зростуть на 5%	зростуть на 10%	зростуть на 20%	Вага
впадуть на 20%	1	1/7	1/8	1/9	1/5	1/5	1/3	0.025
впадуть на 10%	7	1	1/4	1/5	1/4	1/3	1	0.067
впадуть на 5%	8	4	1	1/3	1/3	1	2	0.137
незмінна ціна	9	5	3	1	1/3	2	4	0.238
зростуть на 5%	5	4	3	3	1	3	6	0.341
зростуть на 10%	5	3	1	1/2	1/3	1	4	0.138
зростуть на 20%	3	1	1/2	1/4	1/6	1/4	1	0.055
	$\lambda_{\max} = 7.633$, $CR = 0.078$							

б)

Технічний аналіз	впадуть на 20%	впадуть на 10%	впадуть на 5%	незмінна ціна	зростуть на 5%	зростуть на 10%	зростуть на 20%	Вага
впадуть на 20%	1	1/5	1/6	1/6	1/5	1/5	1/2	0.030
впадуть на 10%	5	1	1/4	1/5	1/4	1/3	1	0.064
впадуть на 5%	6	4	1	1/3	1/3	1	2	0.135
незмінна ціна	6	5	3	1	1/3	2	4	0.232
зростуть на 5%	5	4	3	3	1	3	6	0.345
зростуть на 10%	5	3	1	1/2	1/3	1	4	0.141
зростуть на 20%	2	1	1/2	1/4	1/6	1/4	1	0.053
	$\lambda_{max} = 7.516$, $CR = 0.064$							

в)

Аналіз циклів	впадуть на 20%	впадуть на 10%	впадуть на 5%	незмінна ціна	зростуть на 5%	зростуть на 10%	зростуть на 20%	Вага
впадуть на 20%	1	1/7	1/7	1/7	1/5	1/5	1/3	0.027
впадуть на 10%	7	1	1	1	1/4	1/3	1	0.104
впадуть на 5%	7	1	1	1	1/3	1	1	0.131
незмінна ціна	7	1	1	1	1/3	1	4	0.149
зростуть на 5%	5	4	3	3	1	3	6	0.350
зростуть на 10%	5	3	1	1	1/3	1	4	0.169
зростуть на 20%	3	1	1	1/4	1/6	1/4	1	0.069
	$\lambda_{max} = 7.617$, $CR = 0.076$							

г)

Аналіз історії	впадуть на 20%	впадуть на 10%	впадуть на 5%	незмінна ціна	зростуть на 5%	зростуть на 10%	зростуть на 20%	Вага
впадуть на 20%	1	1/5	1/5	1/5	1/5	1/3	1	0.040
впадуть на 10%	5	1	1/2	1	1/2	1	1	0.128
впадуть на 5%	5	2	1	1	1/2	1	2	0.165
незмінна ціна	5	1	1	1	1	2	4	0.200
зростуть на 5%	5	2	2	1	1	3	6	0.274
зростуть на 10%	3	1	1	1/2	1/3	1	4	0.133
зростуть на 20%	1	1	1/2	1/4	1/6	1/4	1	0.060
	$\lambda_{max} = 7.361$, $CR = 0.045$							

Таблиця 5.16. Ваги альтернатив відносно головної цілі прийняття рішення (ймовірності змін ціни акції)

	Вага	
	Дистрибутивний синтез	**Мультиплікативний синтез**
Впадуть на 20%	**0.030**	**0.029**
Впадуть на 10%	**0.081**	**0.078**
Впадуть на 5%	**0.138**	**0.138**
Незмінна ціна	**0.216**	**0.215**
Зростуть на 5%	**0.335**	**0.338**
Зростуть на 10%	**0.144**	**0.145**
Зростуть на 20%	**0.057**	**0.057**

Результати, отримані різними методами синтезу співпадають в межах практичної точності. Графічно результати представлені на рис. 5.5.

Знайдемо діапазони змін ваг елементів ієрархії, зображеної на рис. 5.4, що призводять до зміни отриманого розподілу ймовірностей.

АЧ ваг, знайдених методом дистрибутивного та мультиплікативного синтезу

Отримані в табл. 5.16 (рис. 5.5) розв'язки методами дистрибутивного та мультиплікативного синтезу є доволі стійкими до змін ваг елементів ієрархії, оскільки зміна порядку ранжування між альтернативами

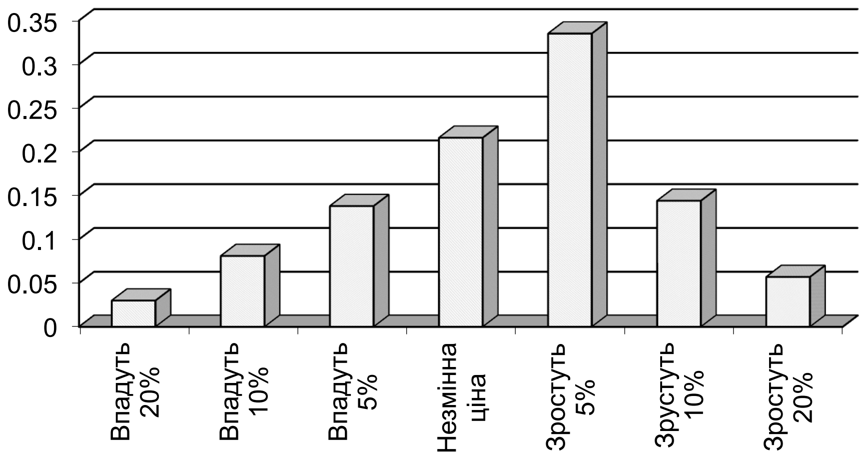


Рис. 5.5. Розподіл ймовірностей зміни ціни акції (при використанні дистрибутивного синтезу)

відбувається лише при зміні одного елементу – третього елементу «Аналіз циклів» другого рівня ієрархії. Результати застосування тверджень 5.4 і 5.5 свідчать про те, що зменшення ваги елементу «Аналіз циклів» на величину $\frac{\delta_{3,6,3}^{L_2} w_3^{L_2}}{100}$, де $\delta_{3,6,3}^{L_2} \in (76.49\%, 100\%)$ для дистрибутивного синтезу і $\delta_{3,6,3}^{L_2} \in (88.39\%, 100\%)$ для мультиплікативного призводить до зміни порядку ранжування між третьою «Впадуть на 5%» і шостою «Зростуть на 10%» альтернативами. Елемент «Аналіз циклів» і є критичним елементом ієрархії.

РОЗДІЛ 6

Оцінювання ризиків за допомогою ММАІ

Для прийняття рішень з урахуванням доходів, витрат, ризиків та можливостей був запропонований метод BOCR (benefits, opportunities, costs, risks) [4, 6, 7]. Цей метод дозволяє визначити вплив вказаних факторів на результативність прийняття рішень, визначити взаємозв'язки між ризиками, які виникають в процесі функціонування складної системи. При цьому під ризиками розуміються ситуаційні ризики, які виникають внаслідок дій неконтрольованих факторів різного походження.

Метод BOCR базується на традиційному МАІ: локальні ваги альтернатив рішень розраховуються за точковими оцінками експертів методом головного власного вектору. Агрегування ваг здійснюється методами дистрибутивного чи ідеального синтезу, використання яких може призвести до реверсів рангів (див. розділ 3). Аналіз чутливості в методі BOCR здійснюється засобами ППП Expert Choice [17], недоліки застосування яких описані в розділі 5. У зв'язку з цим розглянемо модифікацію методу BOCR, яка дозволяє більш повно врахувати ризик шляхом обробки нечітких оцінок експертів, використання комплексного оцінювання чутливості, моделювання мережевої структури факторів і альтернатив рішень.

6.1. Оцінювання ситуаційних ризиків за допомогою ММАІ

<u>Дано</u>:

- $G = \{g\}$ − головна ціль прийняття рішення;
- $A^\tau = \left\{ A_i^\tau \;\middle|\; i = \overline{1, N_a^\tau} \right\}$ − множина альтернативних варіантів рішень в момент часу $T^\tau \in T$;

- $F^{\tau} = \left\{ F_j^{\tau} \;\middle|\; j = \overline{1, N_f^{\tau}} \right\}$ – множина факторів, які впливають на головну ціль $G = \{g\}$ в момент часу $T^{\tau} \in T$;
- T – заданий чи прогнозований період для прийняття рішення.

<u>*Потрібно:*</u>

- виконати оцінювання ситуаційних ризиків при визначенні відносних ваг альтернативних варіантів рішень A_i^{τ}, $i = \overline{1, N_a^{\tau}}$ в момент часу $T^{\tau} \in T$.

Модифікований метод BOCR [148, 165], названий BOCR ММАІ, дозволяє приймати рішення з урахуванням факторів доходів, витрат, можливостей і ситуаційних та форс-мажорних ризиків; включає обробку як точкових, так і нечітких експертних оцінок парних порівнянь; дозволяє моделювати мережеву та ієрархічну структури факторів і альтернатив рішень; включає комплексне оцінювання чутливості рішення (рис. 6.1). Крім того, в BOCR ММАІ використовується нечіткий мультиплікативний синтез, оскільки при його використанні в меншій кількості випадків виникає явище реверсу рангів (див. розділ 3, який присвячено оцінюванню реверсу рангів в різних методах синтезу МАІ). Опишемо BOCR ММАІ для ієрархічної структури факторів і альтернатив, який включає дев'ять етапів [165, 166].

<u>Етап 1.</u> Виконується класифікація факторів на доходи, витрати, можливості та ризики. Будуються чотири окремі ієрархії для оцінювання кожної з вказаних груп факторів.

Нехай F_B^{τ} – фактори доходів, які будуть отримані в результаті прийняття рішення (досягнення головної цілі), $F_B^{\tau} = \left\{ F_{Bj}^{\tau} \;\middle|\; j = \overline{1, N_B^{\tau}} \right\}$; F_C^{τ} – фактори витрат, які будуть здійснені при досягненні головної цілі, $F_C^{\tau} = \left\{ F_{Cj}^{\tau} \;\middle|\; j = \overline{1, N_C^{\tau}} \right\}$; F_O^{τ} – фактори можливостей – невизначених можливих доходів, які будуть отримані в результаті прийняття рішення,

$F_O^\tau = \left\{ F_{Oj}^\tau \;\middle|\; j = \overline{1, N_O^\tau} \right\}$; F_R^τ − фактори ситуаційних і форс-мажорних ризиків, які впливають на процес і результат прийняття рішення, $F_R^\tau = \left\{ F_{Rj}^\tau \;\middle|\; j = \overline{1, N_R^\tau} \right\}$.

За результатами класифікації будуються чотири окремі ієрархії для факторів: доходів (H_B^τ), витрат (H_C^τ), можливостей (H_O^τ) і ризиків (H_R^τ). Перші рівні цих ієрархій утворюють відповідно фактори F_B^τ, F_C^τ, F_O^τ, F_R^τ досліджуваних якостей. Ознаки, якими характеризуються вказані фактори, утворюють наступні рівні відповідних ієрархій. Кількість p_R^τ рівнів в ієрархії ризиків, а $N_{R_k}^\tau$ − кількість елементів k-го рівня ієрархії ризиків, $R_k = \overline{1, p_R^\tau}$. Аналогічно, p_B^τ, p_C^τ і p_O^τ − кількість рівнів відповідно в ієрархіях доходів, витрат і можливостей; N_{B_k}, N_{C_k}, N_{O_k} − кількість елементів k-го рівня ієрархій доходів, витрат і можливостей, де $B_k = \overline{1, p_B^\tau}$, $C_k = \overline{1, p_C^\tau}$, $O_k = \overline{1, p_O^\tau}$.

Етап 2. Проводяться парні порівняння елементів кожної з чотирьох ієрархій доходів, витрат, можливостей і ризиків. Виконується оцінювання узгодженості експертної інформації.

Під час порівняння елементів ієрархій доходів і можливостей питання ставляться наступним чином: «Який з елементів принесе більший дохід (має більше можливостей)?» При порівнянні елементів ієрархій витрат і ризиків питання ставиться відносно того, який з елементів є більш витратним (ризикованим). Передбачається, що експертні оцінки формуються у вигляді нечітких оцінок у фундаментальній шкалі.

Етап 3. Розраховуються нечіткі відносні ваги елементів кожної з ієрархій доходів, витрат, можливостей і ризиків. Проводиться комплексне оцінювання чутливості знайдених ваг.

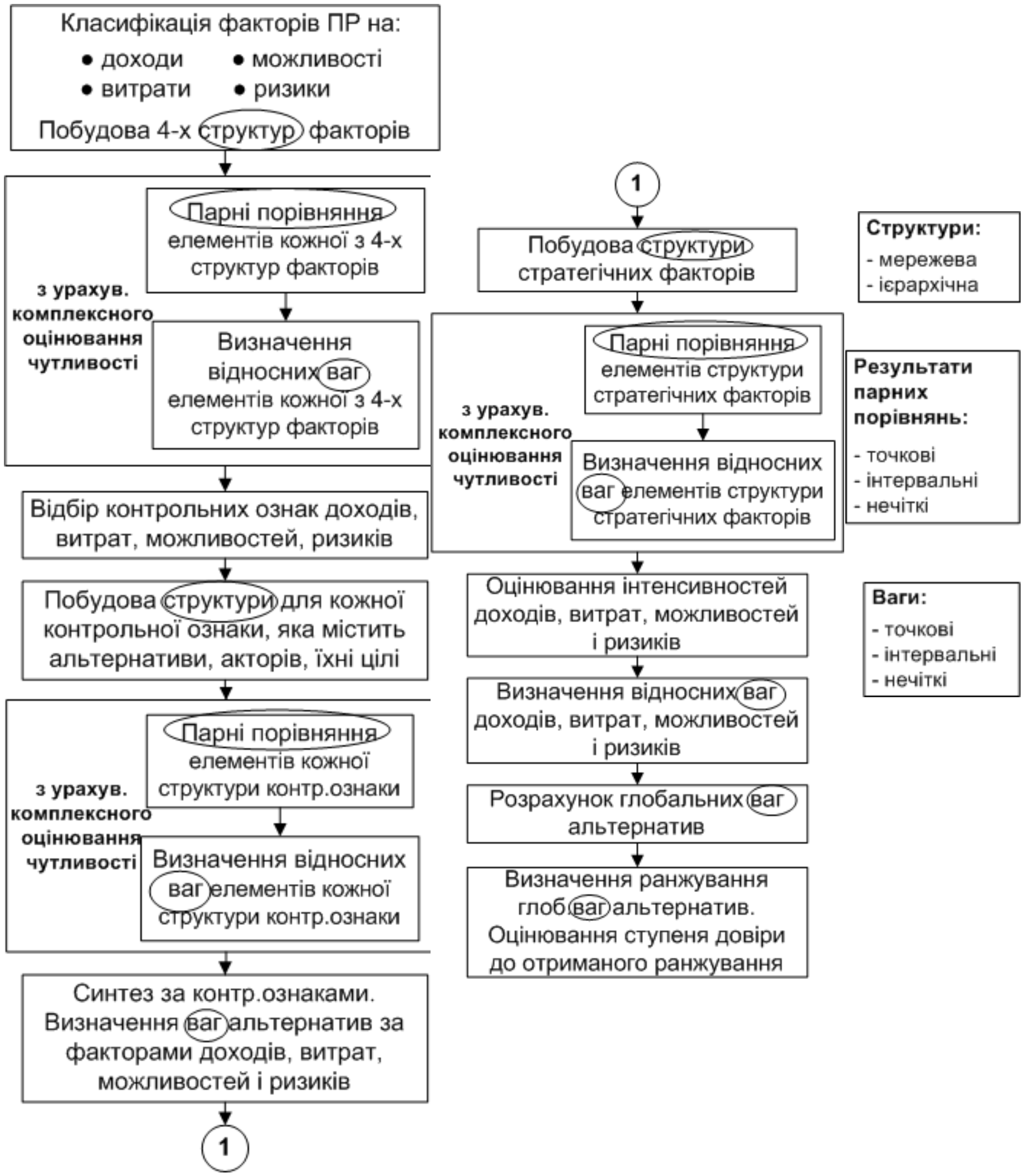


Рис. 6.1. Розв’язання задачі оцінювання ситуаційних і форс-мажорних ризиків за допомогою *BOCR* ММАІ

Нехай $w_{R_k}^{\tau} = \left\{ w_{R_k j}^{\tau} \mid j = \overline{1, N_{R_k}^{\tau}} \right\}$ – вектор ваг елементів k-го рівня ієрархії ризиків в момент часу $T^{\tau} \in T$. $w_{B_k}^{\tau} = \left\{ w_{B_k j}^{\tau} \mid j = \overline{1, N_{B_k}^{\tau}} \right\}$, $w_{C_k}^{\tau} = \left\{ w_{C_k j}^{\tau} \mid j = \overline{1, N_{C_k}^{\tau}} \right\}$, $w_{O_k}^{\tau} = \left\{ w_{O_k j}^{\tau} \mid j = \overline{1, N_{O_k}^{\tau}} \right\}$ – вектори ваг елементів k-го рівня відповідно ієрархій доходів, витрат і можливостей в момент часу $T^{\tau} \in T$. Вектори ваг $w_{B_k}^{\tau}$, $w_{C_k}^{\tau}$, $w_{O_k}^{\tau}$, $w_{R_k}^{\tau}$ є нечіткими величинами і розраховуються за допомогою ММАІ обробки нечітких оцінок (див. розділ 4).

Етап 4. *Відбираються контрольні ознаки – елементи останніх рівнів ієрархій доходів, витрат, можливостей і ризиків, які характеризуються значущими відносними вагами.* Тому з розгляду виключаються ті фактори, якімають незначний вплив на головну ціль. І в подальшому саме контрольні ознаки ієрархій доходів, витрат, можливостей і ризиків будуть розглядатися «представниками» цих чотирьох якостей.

Контрольні ознаки ієрархії ризиків в момент часу $T^{\tau} \in T$ визначаються вектором $e_R^{\tau} = \left\{ e_{Rj}^{\tau} \mid j = \overline{1, N_R^{contr\,\tau}} \right\}$. Аналогічно, $e_B^{\tau} = \left\{ e_{Bj}^{\tau} \mid j = \overline{1, N_B^{contr\,\tau}} \right\}$, $e_C^{\tau} = \left\{ e_{Cj}^{\tau} \mid j = \overline{1, N_C^{contr\,\tau}} \right\}$, $e_O^{\tau} = \left\{ e_{Oj}^{\tau} \mid j = \overline{1, N_O^{contr\,\tau}} \right\}$ – контрольні ознаки ієрархій доходів, витрат і можливостей. Для знаходження контрольних ознак встановлюється поріг значущості відносної ваги: якщо вага елемента останнього рівня ієрархії перевищує встановлений поріг, то цей елемент – контрольна ознака.

Етап 5. *Розраховуються нечіткі ваги альтернативних варіантів рішень відносно доходів, витрат, можливостей і ризиків. Проводиться комплексне оцінювання чутливості знайдених ваг.*

Спочатку визначаються нечіткі відносні ваги альтернативних варіантів за кожною з контрольних ознак. З цією метою для кожної контрольної ознаки експертами будується ієрархія, яка включає альтернативні варіанти рішень $A^{\tau} = \left\{ A_i^{\tau} \mid i = \overline{1, N_a^{\tau}} \right\}$, акторів (зацікавлених осіб) та їхні цілі. Тобто, загальна кількість побудованих на даному етапі ієрархій контрольних ознак дорівнює $N^{contr\,\tau} = N_B^{contr\,\tau} + N_C^{contr\,\tau} + N_O^{contr\,\tau} + N_R^{contr\,\tau}$. Експерти проводять парні порівняння елементів ієрархії і за їх результатами формуються нечіткі оцінки у фундаментальній шкалі. Використовуючи ММАІ обробки нечітких експертних оцінок (див. розділ 4), розраховуються нечіткі відносні ваги альтернативних варіантів за кожною з контрольних ознак та проводиться синтез знайдених нечітких ваг альтернатив за контрольними ознаками доходів, витрат, можливостей і ризиків, що дає можливість визначити нечіткі ваги альтернативних варіантів рішень відносно доходів, витрат, можливостей і ризиків.

Нечіткими відносними вагами альтернатив за контрольними ознаками ризиків в момент часу $T^\tau \in T$ є $w_R^{alt\,\tau} = \left\{ w_{Ri}^{alt\,contr\,\tau} \;\middle|\; i = \overline{1, N_a^\tau} \right\}$, $w_{Ri}^{alt\,contr\,\tau} = \left\{ w_{Rij_R}^{alt\,contr\,\tau} \;\middle|\; j_R = \overline{1, N_R^{contr\,\tau}} \right\}$. $w_B^{alt\,\tau} = \left\{ w_{Bi}^{alt\,contr\,\tau} \;\middle|\; i = \overline{1, N_a^\tau} \right\}$, $w_C^{alt\,\tau} = \left\{ w_{Ci}^{alt\,contr\,\tau} \;\middle|\; i = \overline{1, N_a^\tau} \right\}$ і $w_O^{alt\,\tau} = \left\{ w_{Oi}^{alt\,contr\,\tau} \;\middle|\; i = \overline{1, N_a^\tau} \right\}$ – нечіткі відносні ваги альтернатив за контрольними ознаками доходів, витрат і можливостей. Як зазначалося вище, знаходження локальних ваг $w_{Bij_B}^{alt\,contr\,\tau}$, $w_{Cij_C}^{alt\,contr\,\tau}$, $w_{Oij_O}^{alt\,contr\,\tau}$, $w_{Rij_R}^{alt\,contr\,\tau}$, $i = \overline{1, N_a^\tau}$, $j_B = \overline{1, N_B^{contr\,\tau}}$, $j_C = \overline{1, N_C^{contr\,\tau}}$, $j_O = \overline{1, N_O^{contr\,\tau}}$, $j_R = \overline{1, N_R^{contr\,\tau}}$ має проводитися за ММАІ обробки нечітких експертних оцінок.

Для знаходження нечітких ваг $w_B^{alt\,\tau}$, $w_C^{alt\,\tau}$, $w_O^{alt\,\tau}$, $w_R^{alt\,\tau}$ альтернативних варіантів рішень відносно доходів, витрат, можливостей і ризиків використовується нечіткий мультиплікативний метод синтезу (див. пп. 4.2, 4.4.5), який входить до складу ММАІ обробки нечітких оцінок.

<u>Етап 6.</u> Визначаються стратегічні фактори. Розраховуються нечіткі відносні ваги стратегічних факторів. Проводиться комплексне оцінювання чутливості отриманих ваг.

Стратегічні фактори використовуються для визначення ваг самих якостей (тобто, ваг доходів, витрат, можливостей і ризиків) в даній конкретній задачі прийняття рішень. Будується ієрархія стратегічних факторів і проводяться парні порівняння її елементів. Оцінки експертів формуються у вигляді нечітких величин парних порівнянь у фундаментальній шкалі. Нечіткі відносні ваги стратегічних факторів розраховуються за ММАІ обробки нечітких експертних оцінок.

<u>Етап 7.</u> *Задаються нечіткі інтенсивності доходів, витрат, можливостей і ризиків за елементами останнього рівня ієрархії стратегічних факторів.* *Розраховуються нечіткі відносні ваги доходів, витрат, можливостей і ризиків.*

Під інтенсивністю елементу в даному випадку розуміється ступінь його виконання відносно досліджуваного фактору. Наприклад, інтенсивності можуть приймати значення з множини {дуже висока, висока, середня, низька, дуже низька} і є нечіткими числами. Розрахунок нечітких відносних ваг доходів w_B^τ, витрат w_C^τ, можливостей w_O^τ і ризиків w_R^τ здійснюється за методологію ММАІ обробки нечітких експертних оцінок, $T^\tau \in T$.

<u>Етап 8.</u> *Розраховуються нечіткі глобальні ваги альтернативних варіантів.* *Проводиться комплексне оцінювання чутливості ваг альтернатив.*

Нечіткі глобальні ваги альтернативних варіантів $w^{alt\,\tau} = \left\{ w_i^{alt\,\tau} \;\middle|\; i = \overline{1, N_a^\tau} \right\}$, $T^\tau \in T$ розраховуються за вагами $w_B^{alt\,\tau}$, $w_C^{alt\,\tau}$, $w_O^{alt\,\tau}$, $w_R^{alt\,\tau}$ альтернатив рішень відносно кожної з чотирьох якостей і вагами w_B^τ, w_C^τ, w_O^τ, w_R^τ самих якостей, використовуючи нечіткий мультиплікативний синтез (див. пп. 4.2, 4.4.5).

<u>Етап 9.</u> *Виконується ранжування нечітких глобальних ваг альтернативних варіантів рішень і оцінюється ступінь довіри до отриманого ранжування* (див. п. 4.5).

Таким чином, отримано розв'язання задачі знаходження ваг і ранжування альтернативних варіантів рішень з урахуванням ситуаційних і форс-мажорних ризиків в досліджуваний момент часу $T^{\tau} \in T$.

6.2. Оцінювання ризику суб'єктивності експертної інформації

Означення 6.1. *Ризиком суб'єктивності експертної інформації (інформаційним ризиком)* назвемо ризик, обумовлений недостовірністю (неадекватністю, суперечливістю, викривленням), неоднозначністю (неточністю, частотною чи суб'єктивною випадковістю), неповнотою експертних оцінок.

В традиційному МАІ [1–4] показником цього ризику можна вважати індекс узгодженості експертної інформації, який дозволяє оцінити рівень суперечливості оцінок експерта при порівнянні ним множини об'єктів відносно спільної для них властивості. Для розв'язання задач передбачення, які характеризуються значною складністю об'єктів дослідження, доцільно ввести також інші показники ризику суб'єктивності, пов'язані, насамперед, із чутливістю порядку ранжування альтернатив до відносної зміни ваг елементів ієрархічної структури, а також із ступенями довіри до отриманого на базі нечітких оцінок експертів ранжування. Розглянемо постановку задачі оцінювання ризику суб'єктивності експертної інформації.

Дано:

- ієрархія, яка має p+1 рівень. Нульовий рівень (L_0) складається з одного елементу – головної цілі. Останній рівень (L_p) складається
  з альтернативних варіантів рішень. Рівні ієрархії, які знаходяться між нульовим рівнем і останнім, представляють можливі фактори, які впливають на рішення.

Потрібно:

- визначити показники ризику суб'єктивності експертної інформації при наступних варіантах формування експертних оцінок: точкові оцінки, інтервальні та нечіткі оцінки.

Розглянемо декілька варіантів формування експертих оцінок (рис. 6.2).

1. Формуються точкові оцінки експертів.

2. Формуються інтервальні/ нечіткі оцінки експертів.

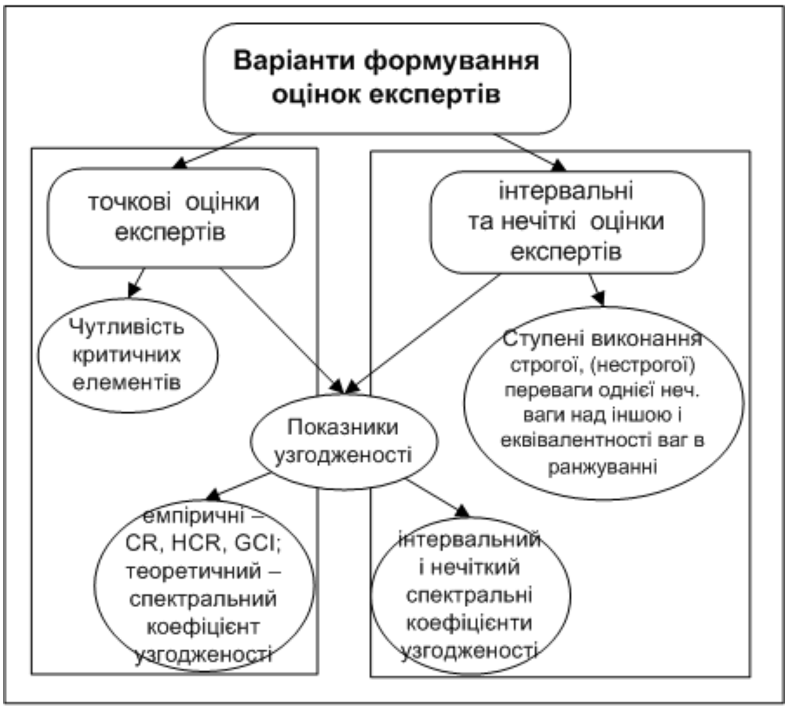


Рис. 6.2. Оцінювання ризику суб'єктивності експертної інформації в ММАІ

6.2.1. Показники ризику суб'єктивності при точкових оцінках експертів

При формуванні точкових оцінок експертів помилки в судженнях вважаються неіснуючими або несуттєвими. Оцінки розглядаються точними і, як наслідок, можуть бути представлені у вигляді скалярних значень. Точкові оцінки обробляються детермінованими методами, і розв'язком також є точкові значення.

Цей варіант формування оцінок експертів є, звичайно, спрощенням реальності, оскільки, як відомо, експерт не в змозі дати точну оцінку у вигляді скалярного значення. Однак, детерміновані методи обробки експертних оцінок є відносно простими в застосуванні.

Одним з показників ризику суб'єктивності експертної інформації при точкових оцінках експертів є *показник узгодженості* оцінок (див. п. 2.1.1). Більші значення емпіричних показників узгодженості *CR*, *HCR*, *GCI* (див. пп. 1.3.4, 2.1.1) свідчать про більшу неузгодженість і, як наслідок, більш високий рівень ризику суб'єктивності. Якщо оцінки узгоджені, то емпіричні показники узгодженості дорівнюють нулю. В цьому випадку ризик суб'єктивності за цим критерієм відсутній. Якщо ж емпіричні показники узгодженості перевищують встановлені для них порогові значення (див. табл. 1.7, 2.1, 2.2), то має місце неприпустимо високий рівень ризику суб'єктивності, експертні оцінки не можуть використовуватися в процесі прийняття рішення і мають бути переглянуті.

Що стосується теоретичного показника – спектрального коефіцієнта узгодженості k_y, то, навпаки, більше його значення свідчить про більший рівень узгодженості експертної інформації. Максимальне своє значення рівне одиниці коефіцієнт k_y приймає у випадку повністю узгоджених експертних оцінок [51].

Іншим показником ризику суб'єктивності при точкових оцінках експертів є *чутливість критичного елементу ієрархії* (див. п. 5.4), тобто величину, обернену до значення найменшої відносної зміни ваги критичного елементу, яка призводить до зміни порядку ранжування альтернатив. Чим вищою є чутливість критичних елементів, тим вищим буде й ризик суб'єктивності. Критичні елементи кожного рівня ієрархії, зміна ваги яких, що призводить до зміни порядку ранжування альтернатив, є найменшою, будемо розглядати чинниками ризику суб'єктивності. Якщо чутливість дорівнює нулю, то ризик суб'єктивності за цим критерієм відсутній, тобто критичний елемент є стійким і ніякі припустимі зміни його ваги не призведуть до зміни рангів альтернатив.

6.2.2. Показники ризику суб'єктивності при нечітких/ інтервальних оцінках експертів

Нехай формуються інтервальні чи нечіткі оцінки експертів. Будемо розглядати ці два варіанти формування експертних оцінок разом, оскільки робота з нечіткими оцінками може бути зведена до розгляду інтервалів шляхом декомпозиції нечіткого числа на множини рівня (див. п. 4.2).

В цих ситуаціях експертна оцінка передбачається неточною і тому не може бути виражена єдиним числом. Якщо експертна оцінка ступеня переваги одного елементу ієрархії над іншим формується у вигляді інтервалу, то припускається, що реальна величина парних порівнянь з однаковим ступенем виконання може прийняти будь-яке значення з цього інтервалу. У випадку нечіткої оцінки відокремлюється значення величини переваги із найбільшим ступенем виконання і задається розподіл відхилень від цього значення.

Одним з показників ризику суб'єктивності при цих варіантах оцінювання так само, як і у випадку точкових оцінок, є *показник узгодженості* інтервальних/нечітких експертних даних, а саме, інтервальний/нечіткий спектральний коефіцієнт узгодженості k_y^{interv} (див. пп. 4.2, 4.4.3). Для оцінювання припустимого рівня неузгодженості введено два інтервальних пороги − пороги виявлення і застосування (див. п. 4.4.3). Якщо значення k_y^{interv} перевищує поріг застосування, то ІМПП має припустимий рівень неузгодженості, а ризик суб'єктивності за цим показником покладається рівним нулю. Значення k_y^{interv}, які є меншими за інтервальний поріг застосування свідчать про присутність деякого ризику, тоді необхідно організовувати зворотній зв'язок з експертом або застосовувати інші методи підвищення узгодженості експертної інформації. Якщо ж значення k_y^{interv} є меншими за інтервальний поріг виявлення, то рівень ризику є неприпустимо високим, експертні оцінки мають бути повністю переглянуті.

Ще одним показником ризику суб'єктивності при даному варіанті формування експертних оцінок є величина, *обернена до ступеня довіри до отриманого ранжування*, де під ступенем довіри розуміється ступінь виконання строгої переваги або еквівалентності однієї нечіткої ваги над іншою в цьому ранжуванні (див. п. 4.5).

6.3. Приклад. Оцінювання ситуаційних ризиків в задачі вибору постачальника

Нехай задача полягає у виборі постачальника за наступними групами критеріїв:

С1: витрати: С11: вартість продукту; С12: вартість перевезення (транспортні витрати, страхові витрати, пакування тощо); С13: митні витрати;

С2: якість продукту: С21: процент браку; С22: збільшений час виробництва пов'язаний з браком; С23: оцінювання якості (частота оцінювання, наявність свідоцтв тощо); С24: заходи щодо вирішення проблем якості;

С3: якість обслуговування постачальником: С31: графік поставок; С32: підтримка технологій і НДР; С33: відповідь на зміни (споживчого попиту, частот замовлень, цін тощо); С34: легкість у спілкуванні;

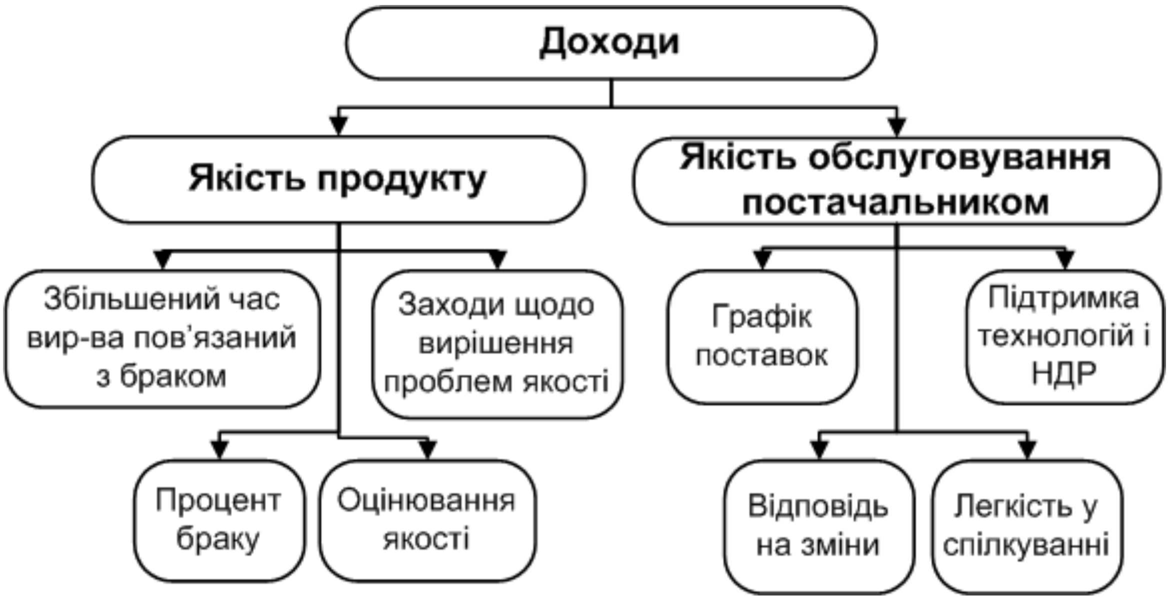
С4: профіль постачальника: С41: фінансовий статус; С42: відгуки споживачів; С43: історія ефективності функціонування; С44: виробниче обладнання і здатність підвищувати продуктивність;

С5: ризик: С51: географічне положення; С52: політична стабільність; С53: економіка; С54: тероризм.

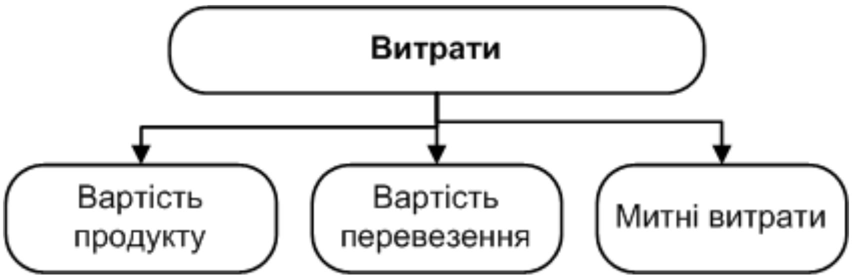
Ієрархії доходів, витрат, можливостей і ризиків наведені на рис. 6.3.

Матриці парних порівнянь елементів наведених вище ієрархій доходів, витрат, можливостей і ризиків представлені в табл. 6.1–6.9. В останніх стовпчиках цих таблиць знаходяться локальні ваги факторів доходів, витрат, можливостей і ризиків (табл. 6.1–6.4), якостей доходів, витрат, можливостей і ризиків відносно головної цілі (табл. 6.5), альтернатив відносно факторів (табл. 6.6.–6.9). Значення відношень узгодженості свідчать про те, що всі надані експертами оцінки мають припустиму неузгодженість.

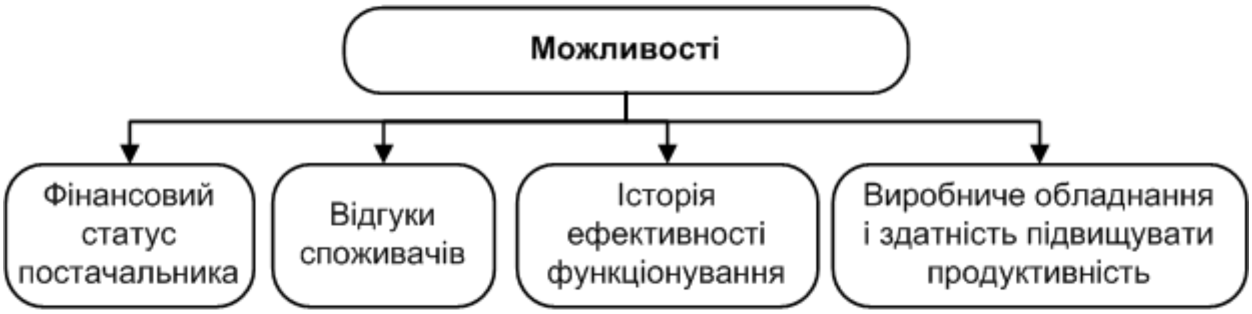
Результуючі ваги альтернатив відносно головної цілі прийняття рішення представлені в табл. 6.10.



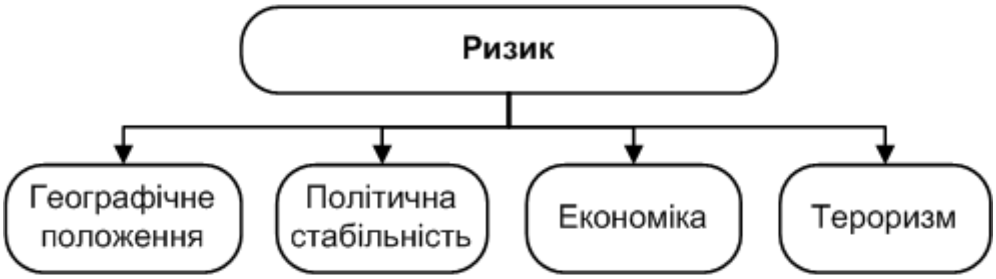
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис.6.3. Ієрархії доходів (а), витрат (б), можливостей (в) і ризиків (г) в задачі вибору постачальника

Таблиця 6.1. Оцінювання елементів ієрархії доходів: а)якості продукту; б)якості обслуговування постачальником

а)

Якість продукту	Процент браку	Збільшений час виробництва пов'язаний з браком	Оцінювання якості	Заходи щодо вирішення проблем якості	Вага
Процент браку	1	2	1	3	0.366
Збільш. час вир-ва пов'язаний з браком	1/2	1	1	2	0.233
Оцінювання якості	1	1	1	2	0.278
Заходи щодо вирішення проблем якості	1/3	1/2	1/2	1	0.124
	$\lambda_{max} = 4.046$, $CR = 0.017$				

б)

Якість обслуговування постачальником	Графік поставок	Підтримка технологій і НДР	Відповідь на зміни	Легкість у спілкуванні	Вага
Графік поставок	1	2	3	4	0.459
Підтримка технол. і НДР	1/2	1	3	3	0.305
Відповідь на зміни	1/3	1/3	1	2	0.143
Легкість у спілкуванні	1/4	1/3	1/2	1	0.093
	$\lambda_{\max} = 4.081$, $CR = 0.030$				

Таблиця 6.2. Оцінювання елементів ієрархії витрат

Витрати	Вартість продукту	Вартість перевезення	Митні витрати	Вага
Вартість продукту	1	2	2	0.493
Вартість перевезення	1/2	1	2	0.311
Митні витрати	1/2	1/2	1	0.196
	$\lambda_{\max} = 3.054$, $CR = 0.052$			

Таблиця 6.3. Оцінювання елементів ієрархії можливостей

Профіль постачальника	Фінансовий статус	Відгуки споживачів	Історія ефективності функціонування	Виробн. облад. і здатн. підвищ. продуктивність	Вага
Фінансовий статус	1	2	2	4	0.430
Відгуки споживачів	1/2	1	1/3	2	0.167
Історія ефективності функціонування	1/2	3	1	2	0.295
Виробниче обладнання і здатність підвищувати продуктивність	1/4	1/2	1/2	1	0.107
	$\lambda_{\max} = 4.155$, $CR = 0.058$				

Таблиця 6.4. Оцінювання елементів ієрархії ризику

Ризик	Географічне положення	Політична стабільність	Економіка	Тероризм	Вага
Географічне положення	1	1	1	2	0.281
Політична стабільність	1	1	2	2	0.340
Економіка	1	1/2	1	2	0.239
Тероризм	1/2	1/2	1/2	1	0.140
	$\lambda_{max} = 4.061$, $CR = 0.023$				

Таблиця 6.5. Оцінювання доходів, витрат, можливостей і ризиків відносно головної цілі

	Витрати	Якість продукту	Якість обслуговув. постачал.	Можливості (профіль постачал.)	Ризик	Вага
Витрати	1	2	2	3	3	0.359
Якість продукту	1/2	1	2	3	3	0.271
Якість обслуговування постачальником	1/2	1/2	1	2	2	0.172
Можливості (профіль постачальника)	1/3	1/3	1/2	1	2	0.113
Ризик	1/3	1/3	1/2	1/2	1	0.085
	$\lambda_{max} = 5.13$, $CR = 0.029$					

Таблиця 6.6. Оцінювання альтернатив відносно елементів ієрархії доходів

а)

Процент браку	П1	П2	П3	Вага
П1	1	2	2	0.500
П2	1/2	1	1	0.250
П3	1/2	1	1	0.250
	$\lambda_{max} = 3$, $CR = 0$			

б)

Збільшення часу вир-ва у зв'язку з браком	П1	П2	П3	Вага
П1	1	2	2	0.500
П2	1/2	1	1	0.250
П3	1/2	1	1	0.250
	$\lambda_{max} = 3$, $CR = 0$			

в)

Оцінювання якості	П1	П2	П3	Вага
П1	1	9	3	0.692
П2	1/9	1	1/3	0.077
П3	1/3	3	1	0.231
	$\lambda_{max} = 3$, $CR = 0$			

г)

Заходи щодо вирішення проблем якості	П1	П2	П3	Вага
П1	1	9	8	0.766
П2	1/9	1	1/9	0.043
П3	1/8	9	1	0.191
	$\lambda_{max} = 3.500$, $CR = 0.481$			

д)

Якість продукту	Процент браку (0.366)	Збільш. час вир-ва (0.233)	Оцінювання якості (0.278)	Заходи по виріш. проблем якості (0.124)	Вага
П1	0.500	0.500	0.692	0.766	0.587
П2	0.250	0.250	0.077	0.043	0.176
П3	0.250	0.250	0.231	0.191	0.237

е)

Графік поставок	П1	П2	П3	Вага
П1	1	2	1/2	0.297
П2	1/2	1	1/3	0.163
П3	2	3	1	0.540
	$\lambda_{max} = 3.009$, $CR = 0.009$			

є)

Підтримка технологій і НДР	П1	П2	П3	Вага
П1	1	9	3	0.692
П2	1/9	1	1/3	0.077
П3	1/3	3	1	0.231
	$\lambda_{max} = 3$, $CR = 0$			

ж)

Відповідь на зміни	П1	П2	П3	Вага
П1	1	1/9	1/6	0.061
П2	9	1	2	0.606
П3	6	1/2	1	0.333
	$\lambda_{max} = 3.009$, $CR = 0.009$			

з)

Легкість у спілкуванні	П1	П2	П3	Вага
П1	1	2	3	0.540
П2	1/2	1	2	0.297
П3	1/3	1/2	1	0.163
	$\lambda_{max} = 3.009$, $CR = 0.009$			

і)

Якість обслуговування постачальником	Графік поставок (0.459)	Підтримка технологій і НДР (0.305)	Відповідь на зміни (0.143)	Легкість у спілкуванні (0.093)	Вага
П1	0.297	0.692	0.061	0.540	0.406
П2	0.163	0.077	0.606	0.297	0.213
П3	0.540	0.231	0.333	0.163	0.381

Таблиця 6.7. Оцінювання альтернатив відносно елементів ієрархії витрат

а)

Вартість продукту	П1	П2	П3	Вага
П1	1	5	4	0.691
П2	1/5	1	1	0.149
П3	1/4	1	1	0.160
	$\lambda_{max} = 3.006$, $CR = 0.005$			

Таблиця 6.8. Оцінювання альтернатив відносно елементів ієрархії можливостей

а)

Фінансовий статус	П1	П2	П3	Вага
П1	1	5	9	0.711
П2	1/5	1	9	0.243
П3	1/9	1/9	1	0.046
	λ_{max} = 3.295, CR = 0.283			

б)

Відгуки споживачів	П1	П2	П3	Вага
П1	1	1	5	0.466
П2	1	1	4	0.433
П3	1/5	1/4	1	0.100
	λ_{max} = 3.006, CR = 0.005			

в)

Історія ефективності функціонування	П1	П2	П3	Вага
П1	1	9	3	0.692
П2	1/9	1	1/3	0.077
П3	1/3	3	1	0.231
	λ_{max} = 3, CR = 0			

г)

Виробниче обладн. і здатність підвищ. продуктив.	П1	П2	П3	Вага
П1	1	1	1	0.333
П2	1	1	1	0.333
П3	1	1	1	0.333
	λ_{max} = 3, CR = 0			

д)

	Фінансовий статус (0.430)	Відгуки споживачів (0.167)	Історія ефективності (0.295)	Виробниче обладн. (0.107)	Вага
П1	0.711	0.466	0.692	0.333	0.625
П2	0.243	0.433	0.077	0.333	0.235
П3	0.046	0.100	0.231	0.334	0.140

Таблиця 6.9. Оцінювання альтернатив відносно елементів ієрархії ризиків

а)

Географічне положення	П1	П2	П3	Вага
П1	1	9	3	0.692
П2	1/9	1	9	0.077
П3	1/3	1/9	1	0.231
	$\lambda_{\max} = 3$, $CR = 0$			

б)

Політична стабільність	П1	П2	П3	Вага
П1	1	2	3	0.540
П2	1/2	1	2	0.297
П3	1/3	1/2	1	0.163
	$\lambda_{\max} = 3.009$, $CR = 0.009$			

в)

	Географ. полож. (0.281)	Політична стабіл. (0.340)	Економіка (0.239)	Тероризм (0.140)	Вага
П1	0.692	0.540	0.711	0.240	0.582
П2	0.077	0.297	0.243	0.210	0.210
П3	0.231	0.163	0.046	0.550	0.208

Таблиця 6.10. Ваги альтернатив відносно загальної цілі

	Витрати (0.359)	Якість продукту (0.271)	Якість обслуг. постачальником (0.172)	Можливості (0.113)	Ризики (0.085)	Вага
П1	0.601	0.587	0.406	0.625	0.582	0.565
П2	0.213	0.176	0.213	0.235	0.210	0.205
П3	0.186	0.237	0.381	0.140	0.208	0.230

Таким чином, враховуючи фактори доходів, витрат, можливостей і ризиків, вибрати слід першого постачальника, оскільки він має найбільшу вагу (див. останній стовпчик в табл. 6.10).

РОЗДІЛ 7

Приклади розв'язання практичних задач

7.1. Побудова і оцінювання сценаріїв майбутнього розвитку систем різної природи за допомогою ММАІ

Під *сценарієм* ми розуміємо одну з альтернатив прийняття рішень. Існує два типи сценаріїв – дослідницький і попереджуючий [2]. В *дослідницькому сценарії* аналізується логічна послідовність подій, породжена компонентами системи, що вивчається. Важливість дослідницького сценарію полягає в тому, що він змушує людей звернути увагу на фактори, які раніше не розглядалися.

Попереджуючий сценарій проходить зворотній шлях, який починається від майбутнього стану і рухається назад до сьогодення з метою виявлення впливів і дій, потрібних для реалізації бажаної мети.

Розрізняють два типи попереджуючого сценарію: нормативний і контрастний. В *нормативному сценарії* спочатку визначається деяка множина цілей, які мають бути досягнуті, а потім – шляхи їх реалізації. В цьому випадку можна ідеалізувати пошук цілі, якщо такий шлях дійсно існує. *Контрастний сценарій* характеризується як бажаним, так і досяжним майбутнім. Основна цінна якість конрастного сценарію полягає в тому, що в ньому вдається точно відокремити твердження, в яких містяться припущення щодо досяжності. Поєднанням нормативного і контрастного сценарію досягається збереження певних властивостей кожного з них, що дозволяє синтезувати більш широкий діапазон ідей.

Для побудови кожного типу сценаріїв існує свій підхід [2, 167]. При *прямому процесі* побудови дослідницького сценарію розглядаються теперішні фактори, впливи і цілі, які призводять до змістовних заключень (сценаріїв). Прямий процесс забезпечує оцінку стану імовірного результату.

Зворотній процес починається з бажаних сценаріїв, потім досліджуються політики і фактори, за допомогою яких можна реалізувати ці сценарії. Кожна ітерація обох процесів зближує бажаний і логічний сценарії.

Розглянемо змістовну постановку задачі оцінювання сценаріїв майбутнього розвитку систем за допомогою ММАІ [167].

Дано:

- головна ціль (фокус);
- множина факторів, що впливають на різні аспекти досліджуваної проблеми в деякий фіксований момент часу;
- попередні сценарії;

Потрібно:

в залежності від головної цілі (фокусу):

- визначити імовірності попередніх сценаріїв (для знаходження «логічного» майбутнього);
- визначити пріоритети політик акторів (для досягнення «бажаного» майбутнього).

Розв'язання

Традиційний МАІ використовувався для знаходження відносних ваг (пріоритетів) елементів ієрархії на базі кількісної і якісної експертної інформації. Пізніше МАІ почав застосовуватися для моделювання зближення «імовірного» і «бажаного» майбітніх, реалізуючи ітераційне повторення прямого і зворотного процесів. Перший полягає у визначенні імовірностей сценаріїв при існуючих на поточний момент часу мотиваціях груп зацікавлених осіб і наявних ресурсах. В результаті проведення другого процесу визначаються ваги політик управління для досягнення бажаного сценарію.

Такий підхід до розв'язання задач передбачення є системним, проблеми постійно уточнюються чи перевизначаються, реалізуючи адаптивне керування. Крім того, при такому підході майбутнє розглядається таким, що в принципі не може бути встановлене, виходячи із сучасних чи минулих умов. Наголос ставиться на *створенні* альтернативних сценаріїв майбутнього, виходячи із сучасних дій, а не просте пристосування до того, що принесе майбутнє.

Розглянемо етапи прямого і зворотного процесів ММАІ (рис. 7.1):

1. Прямий процес ММАІ:
   - 1.1. Побудова ієрархії прямого процесу, в результаті – визначення можливих результатів:
     - 1.1.1. Загальна ціль – фокус.
     - 1.1.2. Фактори, що впливають на досягнення загальної цілі (економічні, технічні, соціальні, політичні тощо).
     - 1.1.3. Актори, які впливають на реалізацію загальної цілі.
     - 1.1.4. Цілі акторів. Політики досягнення цілей акторів.
     - 1.1.5. Можливі результати чи сценарії як результати реалізації цілей акторів.
     - 1.1.6. Узагальнений результат чи сценарій.
   - 1.2. Оцінювання ієрархії прямого процесу, в результаті – визначення імовірностей можливих результатів:
     - 1.2.1. Розрахунок ваг факторів, акторів, їх цілей.
     - 1.2.2. Розрахунок ефективностей політик акторів.
     - 1.2.3. Розрахунок імовірностей можливих результатів/сценаріїв.
2. Зворотній процес ММАІ:
   - 2.1. Побудова ієрархії зворотного процесу, в результаті – визначення політик досягнення бажаного майбутнього:
     - 2.1.1. Узагальнений бажаний сценарій – фокус.
     - 2.1.2. Бажані сценарії.
     - 2.1.3. Проблеми і можливості.
     - 2.1.4. Актори.

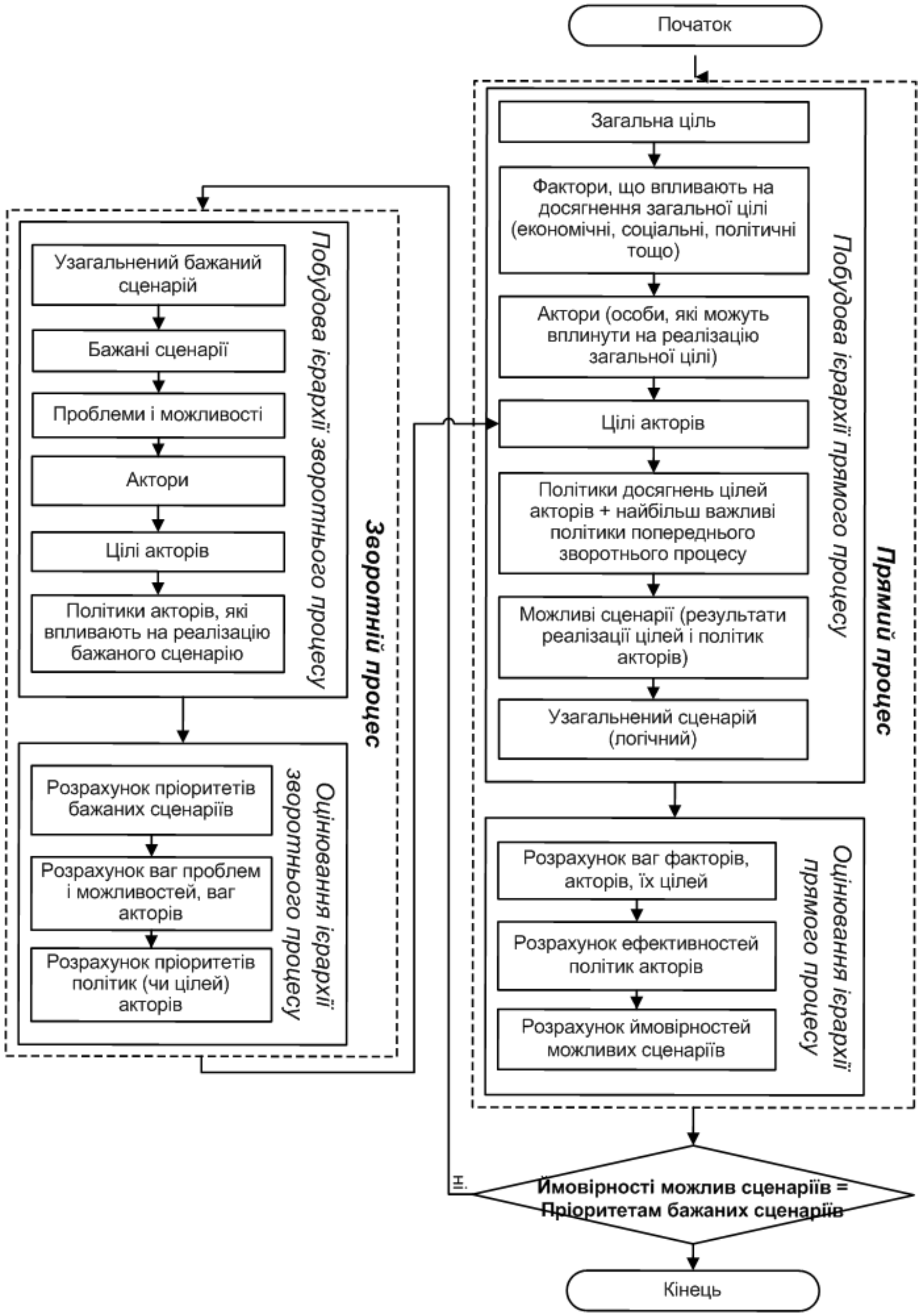


Рис. 7.1. Прямий і зворотній процеси побудови і оцінювання сценаріїв за допомогою ММАІ

2.1.5. Цілі акторів.

2.1.6. Політики акторів, які впливають на реалізацію бажаного майбутнього.

2.2. Оцінювання ієрархії зворотного процесу, в результаті – визначення пріоритетів політик:

2.2.1. Розрахунок пріоритетів бажаних сценаріїв.

2.2.2. Розрахунок ваг проблем і можливостей, ваг акторів.

2.2.3. Розрахунок пріоритетів цілей і політик акторів.

3. Перехід на п.1. Побудова другого прямого процесу:

3.1. Побудова ієрархії другого прямого процесу з додаванням на рівні політик найбільш важливих політик, визначених на етапі 2.2.3 зворотного процесу.

3.2. Оцінювання ієрархії другого прямого процесу, починаючи з рівня цілей:

3.2.1. Розрахунок ефективностей цілей та політик акторів.

3.2.2. Розрахунок імовірностей можливих результатів/сценаріїв.

4. Порівняння імовірностей можливих результатів/сценаріїв другого прямого процесу, отриманих на етапі 3.2.2, і пріоритетів бажаних сценаріїв, отриманих на етапі 2.2.1. Перехід на етап 2 чи кінець.

Розглянемо декілька прикладів застосування методу аналізу ієрархій при розв’язанні практичних задач.

7.2. Виявлення напрямків доцільного використання космічної інформації (КІ) дистанційного зондування землі (ДЗЗ) для геоінформаційних систем (ГІС)

Постановка задачі. Задача полягає у виявленні напрямків доцільного використання КІ ДЗЗ при вирішенні тематичних завдань на основі ГІС.

Для розв’язання цієї задачі слід визначити фактори, які впливають на використання КІ ДЗЗ в різних галузях господарської діяльності. По-перше, за допомогою ГІС виконується структурно-текстурний аналіз, пошук та інтеграція різних даних. Кожний з цих програмних засобів ГІС характеризується з точки зору об'ємів можливого використання КІ ДЗЗ у вигляді електронних планів чи цифрових карт: геологічна будова, гідрографія та гідрологія, природні чи техногенні ландшафти.

По-друге, в межах однієї галузі використовується інформація з космічних апаратів Січ-28 та Січ-30. Важливість КІ ДЗЗ, що використовується в кожній галузі, залежить від інформаційних характеристик КІ, що визначаються параметрами космічних апаратів. До останніх відносяться визначення площ об'єктів у видимому, інфрачервоному (ІЧ) та радіо спектральних діапазонах, отримання зображень з високим розрізненням у видимому, ІЧ та радіо спектральних діапазонах, отримання різночасових зображень об'єктів з високою періодичністю.

Кінцева мета полягає у визначенні відносного попиту КІ ДЗЗ у таких галузях як сільське господарство, екологія і надзвичайні ситуації (НС), природні ресурси, міське господарство, геодезія і картографія.

Розв'язання задачі. Ієрархія, яка відповідає поставленій задачі, наведена на рис. 7.2. Експертні оцінки парних порівнянь елементів цієї ієрархії наведені в додатку В у табл. В.1–В.6.

Оскільки відношення узгодженості та спектральні коефіцієнти узгодженості не перевищують своїх порогових значень (табл. 7.1), то всі надані експертами оцінки мають припустимий рівень неузгодженості і можуть в подальшому використовуватися в процесі прийняття рішення.

Задача розв'язувалася різними методами, а саме, дистрибутивним, ідеальним, мультиплікативним синтезом, ГВБВПА та методом аналізу мереж. Порівняння результатів розв'язання задачі вказаними методами (табл. 7.2, 7.3) дозволяють зробити висновок, що різні методи синтезу

МMAI дають однаковий порядок ранжування альтернативних варіантів рішень (табл. 7.3).

Рис. 7.2. Ієрархічна структура виявлення напрямків доцільного використання КІ ДЗЗ для ГІС

Таблиця 7.1. Відношення узгодженості та спектральні коефіцієнти узгодженості для елементів другого і четвертого рівнів ієрархії

Елементи	Відношення узгодженості CR	Спектральний коефіцієнт узгодженості k_y	Поріг застосування T_u
другого рівня відносно ел-ту 1.1	0.012	0.800	0.790
другого рівня відносно ел-ту 1.2	0.021	<<	<<
четвертого рівня відносно ел-ту 3.1	0.012	<<	<<
четвертого рівня відносно ел-ту 3.2	0.003	<<	<<

Отримані результати свідчать про те, що сільське господарство і екологія та НС мають найбільший попит КІ ДЗЗ в порівнянні з іншими досліджуваними галузями господарської діяльності.

Таблиця 7.2. Глобальні ваги елементів ієрархії, отримані методом дистрибутивного, ідеального, мультиплікативного синтезу та ГВББВПА

Назва елементу	Вага			
	дистрибут синтез	ідеальний синтез	мультипл синтез	ГВББВПА
2.1. Природні та техногенні ландшафти	0.108	0.105	0.114	0.116
2.2. Геологічна будова	0.592	0.585	0.605	0.598
2.3. Гідрографія і гідрологія	0.300	0.309	0.281	0.286
3.1. Січ-28	0.321	0.325	0.320	0.321
3.2. Січ-30	0.679	0.675	0.680	0.679
4.1. Визначення площ об'єктів	0.105	0.105	0.111	0.115
4.2. Отримання зображень з високим розрізненням	0.546	0.539	0.556	0.554
4.3. Отримання різночасових зображень	0.349	0.356	0.333	0.331

Дослідження збереження порядку ранжування при вилученні з розгляду галузей з низьким відносним попитом КІ ДЗЗ. Вилучимо з розгляду галузі з найменшими вагами, а саме галузі *Природні ресурси* та *Геодезія і картографія* (елементи 5.3 і 5.5). Результати показують (див. табл. 7.4), що *після вилучення з розгляду вказаних галузей з низьким рівнем відносного попиту КІ ДЗЗ, не спостерігається зміна ранжування серед* *галузей, які мають найбільший попит КІ. Тобто, після вилучення з розгляду вказаних галузей, такі галузі як сільське господарство, екологія і НС продовжують займати відповідно перше та друге місця в загальному ранжуванні і попит КІ ДЗЗ в них залишається найбільшим. Цей факт підтверджує стійкість отриманого розв'язку, наведеного в табл. 7.3.*

Таблиця 7.3. Порівняння результатів розв'язання задачі різними методами

Назва елементу	Відносний попит КІ ДЗЗ				
	Метод аналізу мереж	Дистрибутивний синтез	Ідеальний синтез	Мультиплікативний синтез	Метод ГВББПА
Сільське господарство	0.33	0.29	0.28	0.29	0.29
Екологія і НС	0.28	0.27	0.27	0.27	0.27
Природні ресурси	0.12	0.11	0.10	0.11	0.11
Міське господарство	0.15	0.18	0.19	0.18	0.18
Геодезія і картографія	0.12	0.15	0.16	0.15	0.15

Комплексне оцінювання чутливості рішення. Розглянемо результати комплексного оцінювання чутливості отриманого в табл. 7.3 рішення задачі виявлення напрямків використання КІ ДЗЗ при вирішенні тематичних завдань на основі ГІС.

Згідно з методологією комплексного оцінювання чутливості ієрархічна структура, що представлена на рис. 7.2, складається з шести рівнів. Рівень L_0 складається з одного елементу – головної цілі *Виявлення напрямків доцільного використання КІ ДЗЗ для ГІС*, останній рівень L_5 складається з альтернатив *Сільське господарство, Екологія і НС, Міське господарство, Геодезія і картографія, Природні ресурси.*

Таблиця 7.4. Величини відносного попиту КІ ДЗЗ у різних галузях після вилучення з розгляду галузей Природні ресурси (елемент 5.3) і Геодезія і картографія (елемент 5.5)

Назва галузі	Величина відносного попиту	
	вилучено елемент 5.3	вилучено елемент 5.5
Сільське господарство	0.330	0.347
Екологія та НС	0.304	0.315
Природні ресурси	-	0.122
Міське господарство	0.202	0.216
Геодезія і картографія	0.164	-

Остаточне рішення, що представлене вектором глобальних ваг елементів L_5-го рівня ієрархії згідно з методом дистрибутивного синтезу (див. табл. 7.3), задає наступне ранжування галузей відносного попиту КІ ДЗЗ (в дужках наведені ваги): 1. Сільське господарство (0.287); 2. Екологія і НС (0.274); 3.Міське господарство (0.184); 4. Геодезія і картографія (0.150); 5. Природні ресурси (0.105).

Визначимо області змін ваг елементів ієрархії, представленної на рис. 7.2, які призводять до змін рангів альтернатив. Для цього розрахуємо значення відносних змін ваг елементів кожного рівня ієрархії, починаючи з

L_1-го рівня і закінчуючи L_4-им рівнем, так що при змінених вагах елементів буде змінюватися порядок ранжування між альтернативами. Наведемо для ілюстрації розрахунки діапазонів величин $\delta_{i,j,k}^{L_1}$, $\delta_{i,j,k}^{L_4}$ відносних змін ваг елементів L_1-го та L_4-го рівнів. Діапазони величин $\delta_{i,j,k}^{L_2}$, $\delta_{i,j,k}^{L_3}$ для елементів L_2-го та L_3-го рівнів представлені в роботі [164].

1. Зміни ваг елементів L_1-го рівня. Нагадаємо, що глобальні ваги відповідно першого та другого елементів L_1-го рівня позначено $w_1^{L_1}$ та $w_2^{L_1}$. Знайдемо величини $\delta_{i,j,1}^{L_1}$ та $\delta_{i,j,2}^{L_1}$ відносних змін ваг $w_1^{L_1}$ та $w_2^{L_1}$, необхідних для зміни порядку ранжування між i-ою та j-ою альтернативами, $i, j \in [1; N_{L_5}]$, $i < j$. Обчислимо ваги $w_{i1}^{L_5 L_1}$ та $w_{i2}^{L_5 L_1}$ альтернатив відносно 1-го і 2-го елементів L_1-го рівня, $i \in [1; N_{L_5}]$.

$$w_{i1}^{L_5 L_1} = \sum_{j_1=1}^{N_{L_4}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_3}} \sum_{j_3=1}^{N_{L_2}} w_{ij_1}^{L_5 L_4} w_{j_1 j_2}^{L_4 L_3} w_{j_2 j_3}^{L_3 L_2} w_{j_3 1}^{L_2 L_1}, \quad w_{i2}^{L_5 L_1} = \sum_{j_1=1}^{N_{L_4}} \sum_{j_2=1}^{N_{L_3}} \sum_{j_3=1}^{N_{L_2}} w_{ij_1}^{L_5 L_4} w_{j_1 j_2}^{L_4 L_3} w_{j_2 j_3}^{L_3 L_2} w_{j_3 2}^{L_2 L_1}.$$

$w_{11}^{L_5 L_1} = w_{12}^{L_5 L_1} = 0.287$, $w_{21}^{L_5 L_1} = w_{22}^{L_5 L_1} = 0.274$, $w_{31}^{L_5 L_1} = w_{32}^{L_5 L_1} = 0.184$, $w_{41}^{L_5 L_1} = w_{42}^{L_5 L_1} = 0.149$, $w_{51}^{L_5 L_1} = w_{52}^{L_5 L_1} = 0.105$.

Ваги альтернатив відносно обох елементів L_1-го рівня співпадають з глобальними вагами альтернатив, тому, за насл.2.1 розділу 2 елементи 1.1 та 1.2 є стійкими, тобто ніякі припустимі зміни ваг елементів 1.1 та 1.2 не призводять до зміни порядку ранжування альтернатив.

2. Зміни ваг елементів L_4-го рівня. Тепер проведемо дослідження можливості зміни порядку ранжування альтернатив при зміні ваг елементів L_4-го рівня. Спочатку розглянемо зміну ваги елементу 4.1. Умова 2 твердження 5.4 розділу 5 виконується для пар альтернатив (1,2), (3,5) і (4,5). Розрахунки показують, що зміна порядку ранжування між альтернативами 5.1 і 5.2 має місце при абсолютній зміні ваги елементу 4.1, що задовольняє $\Delta_{1,2,1}^{L_4} > 0.053$; при $\Delta_{3,5,1}^{L_4} < -0.787$ змінюється порядок ранжування між 5.3 і 5.5; при $\Delta_{4,5,1}^{L_4} < -0.445$ змінюється порядок ранжування між 5.4 і 5.5. Відповідні порогові значення відносної зміни ваги елементу 4.1 дорівнюють $\delta_{1,2,1}^{L_4} = 50.04\%$, $\delta_{3,5,1}^{L_4} = -741\%$ і $\delta_{4,5,1}^{L_4} = -419\%$.

При розгляді $w_2^{L_4}$ умова 2 твердження 5.4 виконується для пар альтернатив (1,2) і (4,5). Зміна порядку ранжування між альтернативами 5.1 і 5.2 відбувається при абсолютній зміні $\Delta_{1,2,2}^{L_4}$ ваги елементу 4.2, що задовольняє $\Delta_{1,2,2}^{L_4} > 0.133$; при $\Delta_{4,5,2}^{L_4} > 0.445$ змінюється порядок ранжування між 5.4 та 5.5. Відповідні порогові значення відносної зміни ваги елементу 4.2 дорівнюють $\delta_{1,2,2}^{L_4} = 24.10\%$ та $\delta_{4,5,2}^{L_4} > 80.73\%$.

Розглядаючи $w_3^{L_4}$, умова 2 твердження 5.4 виконується для пари альтернатив (1,2). Зміна порядку ранжування між альтернативами 5.1 і 5.2 має місце при $\Delta_{1,2,3}^{L_4} < -0.055$, $\delta_{1,2,3}^{L_4} < -19.43\%$. Щодо інших пар альтернатив, то зміни ваг елементів 4.1, 4.2 та 4.3 не впливають на зміну порядку ранжувань між ними.

Критичним елементом L_4-го рівня є елемент 4.3, оскільки він характеризується найменшою за модулем відносною зміною, рівною 19.43%.

Результати дослідження чутливості розв’язку задачі виявлення напрямків доцільного використання КІ ДЗЗ для ГІС дозволяють зробити такі *висновки*:

1) дослідження узгодженості з використанням відношення узгодженості та спектрального коефіцієнту узгодженості свідчить про те, що всі надані експертами оцінки відношень ваг елементів мають припустимий рівень неузгодженості і можуть використовуватися в процесі прийняття рішення;

2) зміна порядку ранжування альтернатив має місце для наступних областей змін глобальних ваг елементів ієрархії:

- між альтернативами 5.1 і 5.2: при збільшенні ваги $w_1^{L_3}$ елементу 3.1 на величину $\delta_{1,2,1}^{L_3} w_1^{L_3}/100$, де $\delta_{1,2,1}^{L_3} \in (72.18\%, 100\%)$; при зменшенні ваги $w_2^{L_3}$ елементу 3.2 на величину $\delta_{1,2,2}^{L_3} w_2^{L_3}/100$, де $\delta_{1,2,2}^{L_3} \in (41.92\%, 100\%)$; при зменшенні ваги $w_1^{L_4}$ елементу 4.1 на величину $\delta_{1,2,1}^{L_4} w_1^{L_4}/100$, де $\delta_{1,2,1}^{L_4} \in (50.04\%; 100\%)$; при зменшенні ваги $w_2^{L_4}$ елементу 4.2 на величину $\delta_{1,2,2}^{L_4} w_2^{L_4}/100$, де $\delta_{1,2,2}^{L_4} \in (24.10\%; 100\%)$; при збільшенні ваги $w_3^{L_4}$ елементу 4.3 на величину $\delta_{1,2,3}^{L_4} w_3^{L_4}/100$, де $\delta_{1,2,3}^{L_4} \in (19.43\%; 100\%)$;
- між альтернативами 5.4 і 5.5: при зменшенні ваги $w_2^{L_4}$ елементу 4.2 на величину $\delta_{4,5,2}^{L_4} w_2^{L_4}/100$, де $\delta_{4,5,2}^{L_4} \in (80.73\%; 100\%)$;

3) зміна ваг елементів 1.1 і 1.2, а також 2.1–2.3 не призводить до зміни порядку ранжування альтернатив;

4) серед елементів третього рівня критичним є елемент 3.2; серед елементів четвертого рівня критичним є елемент 4.3;

5) зміна ваг елементів ієрархії призводить до зміни порядку ранжування в основному між елементами 5.1 і 5.2.

7.3. Вибір пріоритетних заходів вирішення соціальних проблем міста Києва з урахуванням ситуаційних ризиків

Інша задача, яка була розв’язана для КМДА, полягала в оцінюванні заходів з розвитку міста Києва і виборі найбільш пріоритетних із них для першочергової реалізації.

За результатами попередньо проведених мозкових штурмів були виявлені головні проблеми міста Києва (рис. 7.3), до яких насамперед відносяться проблеми соціальної сфери, екології, земельних ресурсів, підприємництва та інвестицій та інновацій.

Для подальшого аналізу було вибрано кластер соціальної сфери, як найбільш проблемний для міста Києва. Було проведено опитування експертів відносно заходів розв'язання проблем цього кластеру і виявлено наступні заходи:

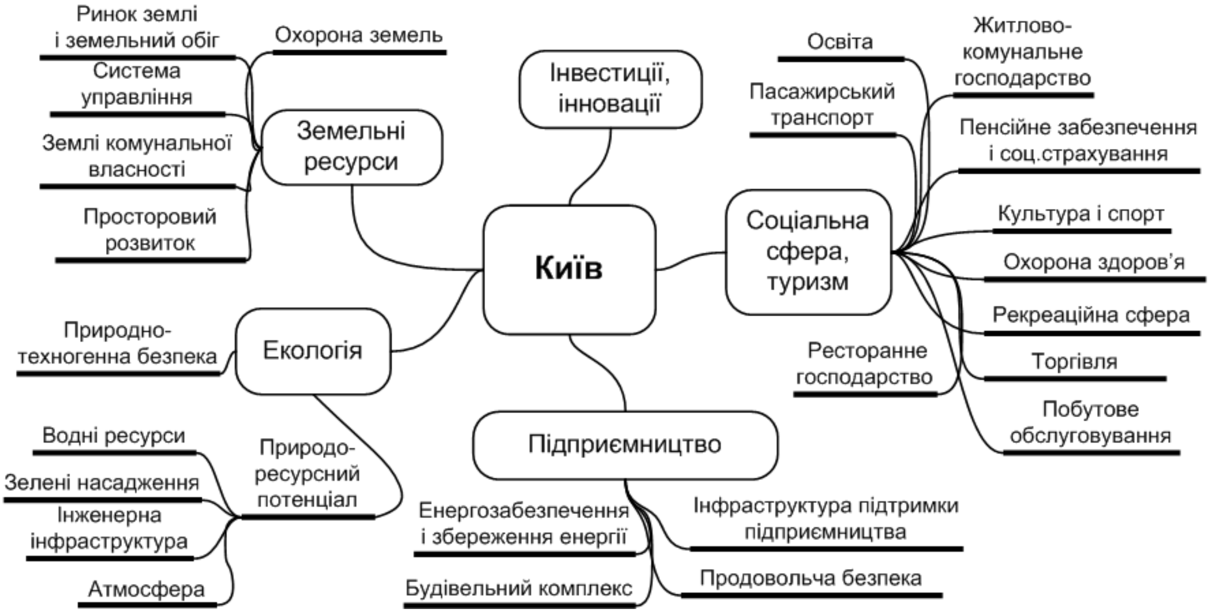


Рис. 7.3. Головні проблеми міста Києва

1) будівництво та реконструкція ліній метрополітену;
2) будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора;
3) реконструкція Бортницької станції аерації;
4) будівництво двох сміттєпереробних заводів;
5) реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою «Турбота»;
6) будівництво лікувально-діагностичного корпусу Київського міського центрального протитуберкульозного диспансеру.

Задача полягала у розрахунку ваг цих заходів та виборі найбільш пріоритетних заходів для першочергової реалізації. Для розв'язання цієї задачі використовувався метод BOCR MMAI, який дозволяє вибрати найкращу альтернативу рішень за доходами, витратами і ситуаційними ризиками (див. п. 6.1).

Згідно з методом BOCR MMAI будуються ієрархії доходів, витрат і ризиків (рис. 7.4–7.6). Далі проводиться оцінювання елементів кожної з ієрархій. Наприклад, при оцінюванні елементів ієрархії доходів експерту ставилися питання виду: «Скажіть, будь-ласка, економічна діяльність чи транспорт приносять більший дохід до бюджету міста Києва?», «Яка складова економічної діяльності приносить більший дохід: фінансова діяльність чи промисловість?» При порівнянні елементів ієрархій витрат, ризиків і загроз питання ставиться відносно того, що є більш витратним/ризикованим.

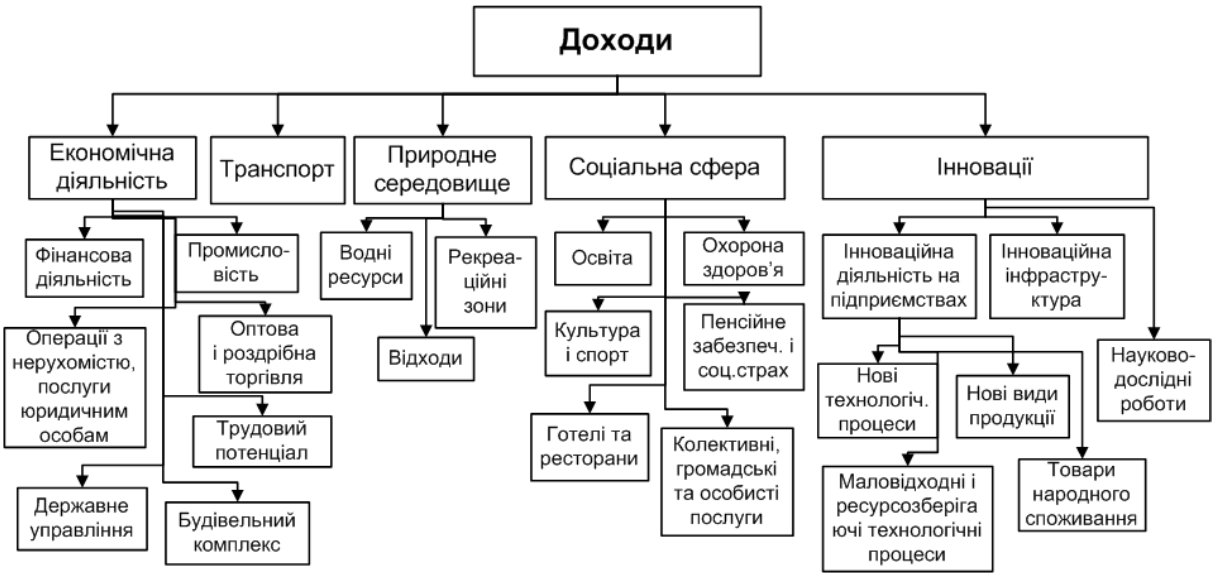


Рис. 7.4. Ієрархія для факторів доходів

Рис. 7.5. Ієрархія для факторів витрат

Рис. 7.6. Ієрархія для факторів ситуаційних ризиків та загроз

Результуючі матриці парних порівнянь та ваги факторів доходів наведені в табл. Г.1–Г.6. Глобальні ваги елементів ієрархії доходів (табл. 7.5) свідчать про те, що найбільш доходними для міста Києва є наступні сфери (в дужках наведені коефіцієнти важливості): оптова і роздрібна торгівля (0.085), освіта (0.062), операції з нерухомістю, послуги юридичним особам (0.044), промисловість (0.041). Ці елементи є контрольними ознаками ієрархії доходів. Щоб зменшити кількість порівнянь, які необхідно зробити експерту, альтернативи рішень будуть оцінюватися лише за цими контрольними ознаками як найбільш важливими елементами ієрархії доходів.

Аналогічно матриці парних порівнянь та ваги факторів витрат наведені в табл. Г.7–Г.13. Аналізуючи глобальні ваги елементів ієрархії витрат (табл. 7.6), робимо висновок, що найбільш витратними для міста Києва є наступні сфери (в дужках наведені коефіцієнти важливості): відходи (0.177); каналізаційна мережа (0.108); фінансова діяльність (0.101); водні ресурси (0.074); метрополітен (0.064); науково-технічні роботи (0.044); санітарна очистка міста (0.042); охорона здоров’я (0.042); допомога малозабезпеченим і безробітнім (0.041).

Матриці парних порівнянь та ваги факторів ризиків і загроз наведені в табл. Г.14–Г.19. Глобальні ваги елементів ієрархії ризиків і загроз представлені в табл. 7.7. Найбільші глобальні ваги мають такі елементи цієї ієрархії: обмеженість потужностей з переробки та складування відходів (0.326); значне забруднення джерел водопостачання (0.127); погіршення стану здоров’я населення, розгортання епідемій (0.086); низький рівень доходів широких верств населення (0.085); протидія з боку глав районних адміністрацій (0.074); транспорт (0.050). Ці елементи є контрольними ознаками ієрархії ризиків і загроз.

Таблиця 7.5. Глобальні ваги елементів ієрархії доходів

<table>
<tr><td rowspan="7">Економічна діяльність (0.328)</td><td>Будівельний комплекс (0.015)</td></tr>
<tr><td>Промисловість (0.041)</td></tr>
<tr><td>Операції з нерухомістю, послуги юридичним особам (0.044)</td></tr>
<tr><td>Фінансова діяльність (0.030)</td></tr>
<tr><td>Оптова і роздрібна торгівля (0.085)</td></tr>
<tr><td>Трудовий потенціал (0.030)</td></tr>
<tr><td>Державне управління (0.017)</td></tr>
</table>

Транспорт (0.370)	
Природне середовище (0.070)	Водні ресурси (0.033)
	Рекреаційні зони (0.030)
	Відходи (0.007)
Соціальна сфера (0.187)	Освіта (0.062)
	Культура і спорт (0.030)
	Охорона здоров'я (0.020)
	Пенсійне забезпечення і соц.страх (0.020)
	Колективні, громадські та особисті послуги (0.040)
	Готелі та ресторани (0.015)

Інновації (0.110)	Інноваційна діяльність на підприємствах (0.037)	Нові технологічні процеси (0.002)
		Нові види продукції (0.022)
		Товари народного споживання (0.011)
		Маловідходні і ресурсо-зберігаючі технологічні процеси (0.002)
	Інноваційна інфраструктура (0.037)	
	Науково-дослідні роботи (0.038)	

Таблиця 7.6. Глобальні ваги елементів ієрархії витрат

Економічна діяльність (0.330)	Промисловість (0.039)	
	Житлово-комунальне господарство (0.176)	Будівництво об'єктів комунального господарства (0.015)
		Тепло- і водопостачання (0.011)
		Каналізаційна мережа (0.108)
		Санітарна очистка міста (0.042)
	С/г (0.014)	
	Фінансова діяльність (0.101)	

Транспорт (0.110)	Трамваї (0.022)
	Тролейбуси (0.014)
	Автобуси (мікроавтобуси) (0.010)
	Метрополітен (0.064)
Природне середовище (0.330)	Водні ресурси (0.074)
	Рекреаційні зони (0.019)
	Відходи (0.177)
	Зелені насадження, лісове господарство (0.023)
	Потенційно-небезпечні і шкідливі виробництва (0.037)
Соціальна сфера (0.165)	Освіта і наука (0.021)
	Охорона здоров'я (0.042)
	Культура і спорт (0.021)
	Пенсійне забезпечення і соціальне страхування (0.040)
	Допомога малозабезпеченим і безробітнім (0.041)
Інновації (0.065)	Промислові підприємства (0.022)
	Науково-технічні роботи (0.044)

Таблиця 7.7. Глобальні ваги елементів ієрархії загроз та ризиків

Нестабільність економіки (0.199)	Зростання вартості енергоносіїв (0.020)
	Недобросовісна конкуренція (0.014)
	Недостатній вплив міської влади на державні підприємства (0.006)
	Згортання фундаментальних і прикладних досліджень (0.004)
	Несприятливість інвестиційного клімату (0.020)
	Масовий імпорт товарів (0.010)
Виникнення НС (0.597)	Самовільні рубки лісів і зелених насаджень (0.033)
	Значне забруднення джерел водопостачання (0.127)
	Відсутність системності в підтримані екологічної безпеки (0.025)
	Обмеженість потужностей з переробки та складування відходів (0.326)
	Транспорт (0.050)

Політична нестабільність (0.085)	Протидія з боку окремих політичних сил (0.037)
	Протидія з боку глав районних адміністрацій (0.074)
	Позиція ЗМІ на лобіювання певних інтересів (0.012)
Зростання соціальної напруги (0.119)	Зростання обсягів і рівня безробіття (0.017)
	Низький рівень доходів широких верств населення (0.085)
	Недоліки системи оплати праці (0.012)
	Недостатність та несвоєчасність фінансування соціального захисту (0.028)
	Невирішеність житлових проблем (0.014)
	Погіршення стану здоров'я населення, розгортання епідемій (0.086)

Побудова структури стратегічних факторів. Пріоритети для економічних, політичних факторів і факторів безпеки були визначені як показано на рис. 7.7 і використовувалися для ранжування за важливістю доходів, витрат, можливостей, загроз та ризиків. МПП елементів ієрархії стратегічних факторів та їх ваги наведені в табл. Г.20–Г.23.

Рис. 7.7. Ієрархія стратегічних факторів для визначення відносних важливостей якостей доходи, витрати, загрози та ризики

Оцінювання інтенсивностей і визначення відносних ваг доходів, витрат, можливостей, загроз і ризиків. Кожна з чотирьох якостей оцінюється в термінах інтенсивностей у відповідності з кожним із стратегічних факторів останнього рівня ієрархії, представленої на рис. 7.7. Інтенсивності попарно порівнюють між собою і визначаються їх ваги, вони наведені в дужках: дуже висока (0.42), висока (0.26), середня (0.16), низька (0.1), дуже низька (0.06). Після цього експерт назначає інтенсивність кожній якості за кожним із стратегічних факторів. Результат – в останньому рядку табл. 7.8.

Визначення глобальних ваг контрольних ознак ієрархій доходів, витрат, ризиків і загроз. Розглянемо ієрархію, елементами якої є контрольні ознаки факторів доходів, витрат, ризиків і загроз, а також альтернативи рішень (рис. 7.8). Нагадаємо, що контрольні ознаки – це найбільш важливі елементи відповідних ієрархій.

Локальні ваги контрольних ознак доходів, витрат, загроз та ризиків (табл. 7.9) отримані перенормуванням ваг контрольних ознак, отриманих в табл. 7.5–7.7. Глобальні ваги цих контрольних ознак (табл. 7.10) розраховані на базі їх локальних ваг з урахуванням ваг якостей, представлених в табл. 7.8.

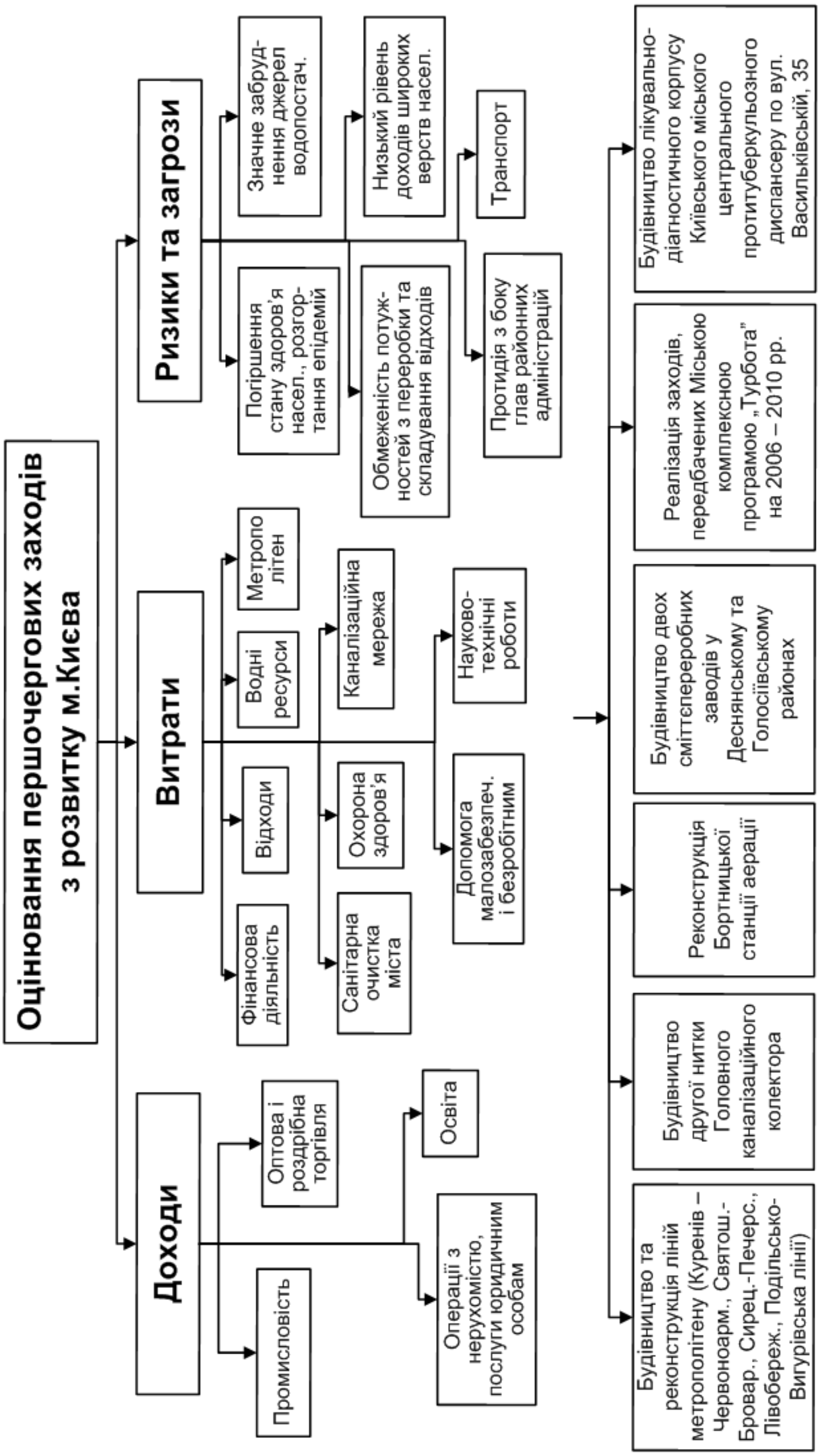


Рис. 7.8. Ієрархія контрольних ознак доходів, витрат, загроз та ризиків при оцінюванні альтернативних варіантів рішень

Таблиця 7.8. Оцінювання інтенсивностей якостей (в дужках – ваги стратегічних факторів)

		Доходи	Витрати	Загрози і ризики
Економічний (0,279)	Зростання (0.5)	Висока	Дуже низька	Дуже низька
	Стабільність (0.25)	Дуже висока	Середня	Дуже низька
	Соціальна орієнтованість (0.25)	Висока	Дуже висока	Середня
Безпека (0,627)	Регіональна (0.25)	Низька	Середня	Висока
	Загрози для Києва (0.75)	Висока	Дуже висока	Дуже висока
Політичний (0.094)	Вітчизняні виборці (0.67)	Висока	Дуже висока	Висока
	Європа і світ (0.33)	Середня	Середня	Середня
Ваги (ненормовані)		**0.7467**	**0.7567**	**0.6917**
Ваги (нормовані)		**0.271**	**0.275**	**0.251**

Таблиця 7.9. Локальні ваги контрольних ознак доходів, витрат, загроз та ризиків

Доходи	Витрати	Загрози та ризики
Оптова і роздрібна торгівля (0.366);	Відходи (0.255);	Обмеженість потужностей з переробки та складування відходів (0.436);

Освіта (0.267);	Каналізаційна мережа (0.156);	Значне забруднення джерел водопостачання (0.170);
Операції з нерухомістю, послуги юридичним особам (0.190);	Фінансова діяльність (0.146);	Погіршення стану здоров'я населення, розгортання епідемій (0.115);
Промисловість (0.177).	Водні ресурси (0.107);	Низький рівень доходів населення (0.114);
	Метрополітен (0.092);	Протидія з боку глав районних адміністрацій (0.099);
	Науково-технічні роботи (0.063);	Транспорт (0.067).
	Санітарна очистка міста (0.061);	
	Охорона здоров'я (0.061);	
	Допомога малозабезпеченим і безробітнім (0.059).	

Таблиця 7.10. Глобальні ваги контрольних ознак доходів, витрат, загроз та ризиків

Доходи (0.340)	Витрати (0.345)	Загрози та ризики (0.315)
Оптова і роздрібна торгівля (0.124);	Відходи (0.088);	Обмеженість потужностей з переробки та складування відходів (0.137);

Освіта (0.091);	Каналізаційна мережа (0.054);	Значне забруднення джерел водопостач. (0.054);
Операції з нерухомістю, послуги юридичним особам (0.065);	Фінансова діяльність (0.050);	Погіршення стану здоров'я населення, розгортання епідемій (0.036);
Промисловість (0.060).	Водні ресурси (0.037);	Низький рівень доходів широких верств населення (0.036);
	Метрополітен (0.032);	Протидія з боку глав районних адміністрацій (0.031);
	Науково-технічні роботи (0.022);	Транспорт (0.021).
	Санітарна очистка міста (0.021);	
	Охорона здоров'я (0.021);	
	Допомога малозабезпеченим і безробітнім (0.020).	

Оцінювання альтернативних варіантів рішень відносно кожної з контрольних ознак доходів, витрат, загроз та ризиків

Оцінювання альтернатив рішень здійснюється за кожним з елементів останнього рівня ієрархії контрольних ознак (див. рис. 7.8). Експерту ставиться питання виду: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на доходи від оптової і роздрібної торгівлі?» МПП, побудовані за результатами експертного оцінювання альтернатив наведені в табл. Г.24–Г.41. В табл. 7.11, 7.12 наведені відповідно локальні і глобальні ваги альтернатив рішень.

Результати розрахунків свідчать про те, що найбільш пріоритетними є наступні заходи: будівництво двох сміттєпереробних заводів, будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора і реконструкція Бортницької станції аерації. На другому місці – будівництво та реконструкція ліній метрополітену. Третє місце поділили заходи, передбачені Міською комплексною програмою «Турбота» і будівництво лікувально-діагностичного корпусу Київського міського центрального протитуберкульозного диспансеру.

Таблиця 7.11. Локальні ваги альтернативних варіантів рішень відносно контрольних ознак доходів, витрат, загроз та ризиків

	Доходи від оптової і роздрібної торгівлі	Доходи від освіти (0.091)	Доходи від операцій з нерухомістю, послуг	Доходи від промисловості (0.060)	Витрати на відходи (0.088)	Витрати на каналізаційну мережу (0.054)	Витрати на фінансову діяльність (0.050)	Витрати на водні ресурси (0.037)	Витрати на метрополітен (0.032)	Витрати на науково-технічні роботи (0.022)
Будівництво та реконструкція ліній метропол.	0.353	0.167	0.167	0.167	0.051	0.046	0.167	0.133	0.643	0.167
Будівництво другої нитки Голов.каналізац. колектора	0.118	0.167	0.167	0.167	0.204	0.409	0.167	0.248	0.071	0.167
Реконструкція Бортницької станції аерації	0.118	0.167	0.167	0.167	0.204	0.409	0.167	0.248	0.071	0.167
Будівництво двох сміттє-перероб. заводів	0.118	0.167	0.167	0.167	0.463	0.046	0.167	0.103	0.071	0.167
Реалізація заходів, Міської компл. програми «Турбота»	0.175	0.166	0.166	0.166	0.039	0.045	0.166	0.134	0.072	0.166
Будівництво лікувал.-діагностич. корпусу міського центр. туберкульоз. диспансеру	0.118	0.166	0.166	0.166	0.039	0.045	0.166	0.134	0.072	0.166

Таблиця 7.11. (продовження)

	Витрати на санітарну очистку міста (0.021)	Витрати на охорону здоров'я (0.021)	Витрати на допомогу малозабезпеч. і безроб.(0.020)	Збільшення потужн. з переробки та складування відходів (0.137)	Зменшення значного забруд-нення джерел водопост.(0.054)	Покращення стану здоров'я населення (0.036)	Покращення низького рівня доходів населення (0.036)	Зменшення протидії (роботі КМДА) з боку глав районних	Зменш. НС на транспорті (0.021)
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	0.042	0.039	0.072	0.033	0.071	0.039	0.167	0.167	0.543
Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	0.292	0.097	0.072	0.300	0.214	0.192	0.167	0.167	0.091
Реконструкція Бортницької станції аерації	0.292	0.097	0.071	0.300	0.214	0.192	0.167	0.167	0.091
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	0.292	0.097	0.071	0.301	0.357	0.192	0.167	0.167	0.091
Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою «Турбота»	0.042	0.062	0.643	0.033	0.071	0.115	0.166	0.166	0.092
Будівництво корпусу міського центрального протитуберкульозного диспансеру	0.042	0.608	0.071	0.033	0.071	0.270	0.166	0.166	0.092

Таблиця 7.12. Глобальні ваги альтернативних варіантів рішень

	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	**0.160**
Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	**0.196**
Реконструкція Бортницької станції аерації	**0.196**

Будівництво двох сміттєпереробних заводів	**0.203**
Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою «Турбота»	**0.123**
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу Київ. міськ. централ. протитуберкульозного диспансеру	**0.122**

7.4. Побудова і оцінювання сценаріїв розвитку транспортної системи міста Києва

Транспортні системи мають ключове значення для руху товарів і населення, обміну інформацією та ідеями, доступу до ринків, робочих місць, освіти та інших послуг. Транспортна система є одним з основних споживачів невідновлювальних видів енергії та користувачем землі, одним з головних джерел забруднення, заторів та аварійних ситуацій. Несприятливі наслідки транспортних систем, що використовуються на сьогоднішній день, можуть бути зменшені шляхом проведення відповідної політики в області транспорту.

Транспортна політика повинна поетапно інтегрувати базові принципи «стійкого розвитку транспорту». Згідно з цими принципами, розв’язання задач задоволення транспортних потреб не вступає у протиріччя з пріоритетами охорони навколишнього середовища і здоров’я населенняя, не порушує інтересів майбутніх поколінь. При прийнятті рішень щодо розв’язання транспортних проблем необхідно виходити з трьох *принципів стійкого розвитку,* які є рівноцінними при реалізації транспортної політики:

1) екологічна сумісність – досягнення цілей в області якості навколишнього середовища та охорони здоров’я;

2) економічна ефективність – забезпечення створення ефективних транспортних систем і гарної доступності;

3) соціальна справедливість – досягається внаслідок безпеки дорожнього руху і транспорту та представленню збалансованих можливостей пересування.

Найбільш ефективні методи розв’язання проблем заторів в мегаполісах включають: будівництво багатоярусних доріг, реверсивних доріг, зонування і введення плати за проїзд в певну частину міста, запровадження коридорів для громадського транспорту, запровадження інтелектуальних транспортних систем (рис. 7.9).

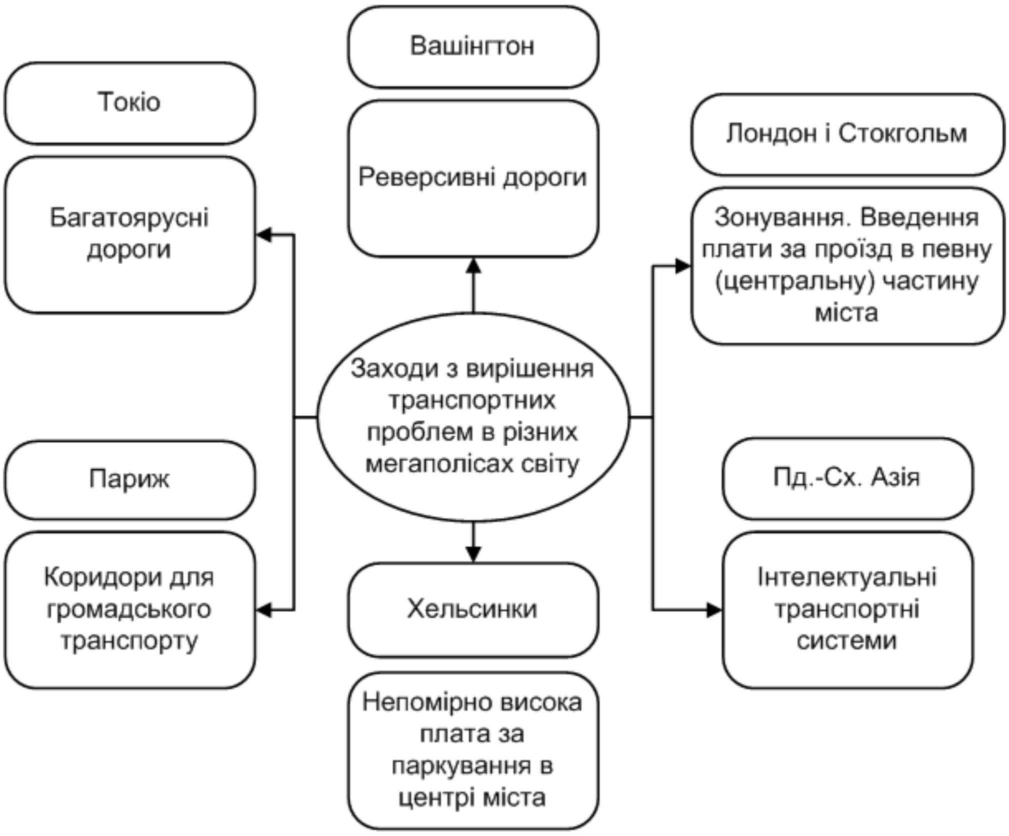


Рис. 7.9. Заходи з вирішення транспортних проблем в різних мегаполісах світу

В даній роботі виконано оцінювання сценаріїв відносно вирішення проблем транспортної системи міста Києва, визначено пріоритетні заходи розв’язання цих проблем, використовуючи розроблений ММАІ (див.п. 7.1).

На прийняття рішення щодо майбутнього розвитку ТС міста Києва впливають такі *групи зацікавлених осіб (акторів):*

- Київська міська державна адміністрація (КМДА);
- бізнес;
- населення (користувачі громадського транспорту, власники транспортних засобів);
- Міжнародний союз громадського транспорту (МСГТ).

Перший прямий процес

Згідно з описаною в п. 7.1 методологією була побудована ієрархія прямого процесу, яка включає принципи розвитку ТС, акторів, їх цілі і загальні контрастні сценарії розвитку ТС (рис. 7.10). Ця ієрархія використовується для оцінювання імовірностей сценаріїв останнього рівня ієрархії при існуючих на поточний момент часу мотиваціях груп зацікавлених осіб і наявних ресурсах.

Рис. 7.10. Ієрархія першого прямого процесу

За результатами опитування були виявлені можливі загальні напрямки розвитку ТС міста Києва:

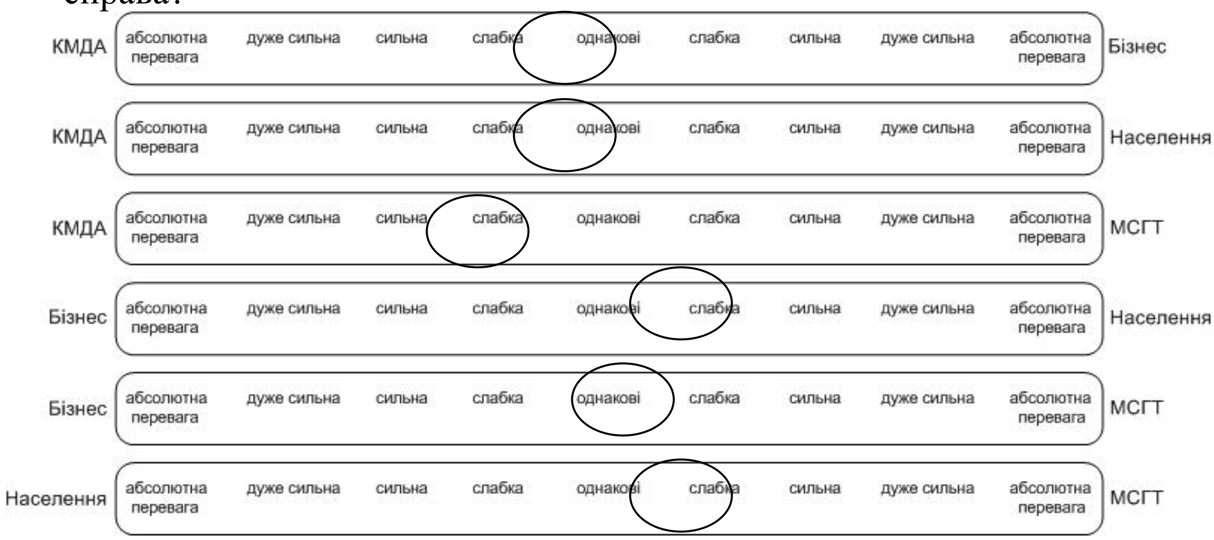
- комплексна реконструкція транспортної системи міста Києва;
- вибіркова реконструкція;
- статус-кво.

Розглянемо опитувальні форми, які пред’являлися акторам для отримання величин переваг елементів наведеної вище ієрархії. Зауважимо, що згідно з концепцією стійкого розвитку всі три принципи: економічний, соціальний та екологічний є однаково важливими.

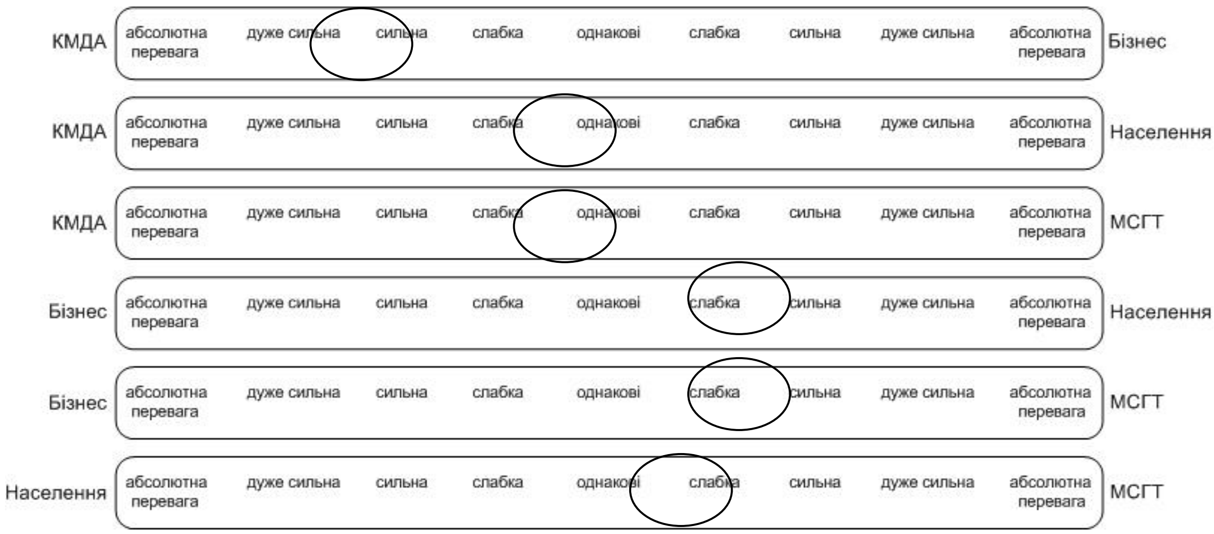
Оцінювання акторів щодо майбутнього розвитку транспортної системи міста Києва

Для визначення коефіцієнтів відносної важливості акторів були задані наступні питання:

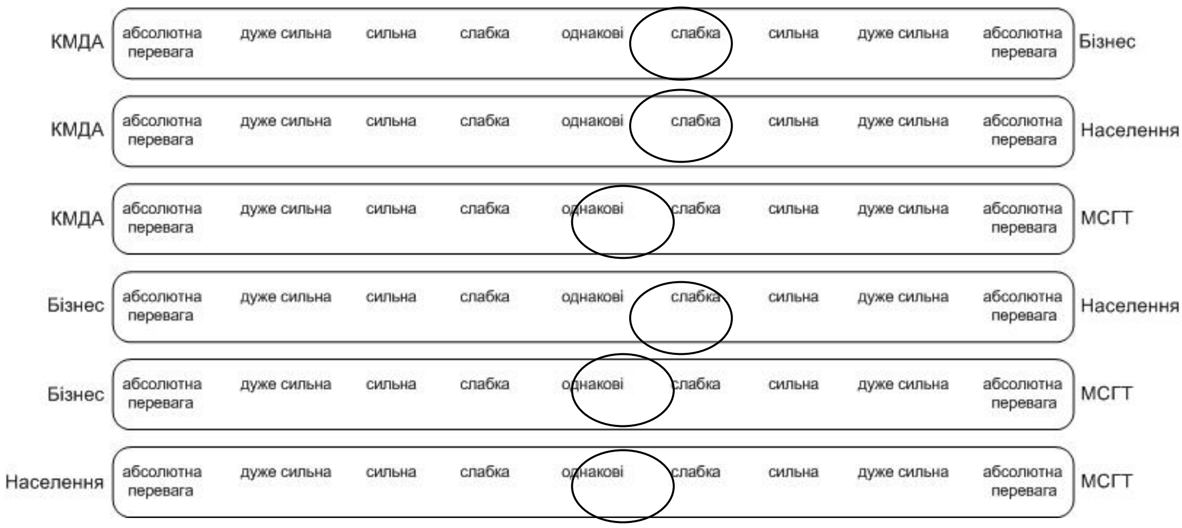
- Який актор має більший вплив на економічну ефективність транспортної системи? Яка ступінь переваги актора зліва над актором справа?



- Який актор має більший вплив на соціальну справедливість транспортної системи? Яка ступінь переваги актора зліва над актором справа?



- Який актор має більший вплив на екологічну сумісність транспортної системи? Яка ступінь переваги актора зліва над актором справа?



Локальні і глобальні коефіцієнти відносної важливості (ваги) акторів наведені в табл. 7.13.

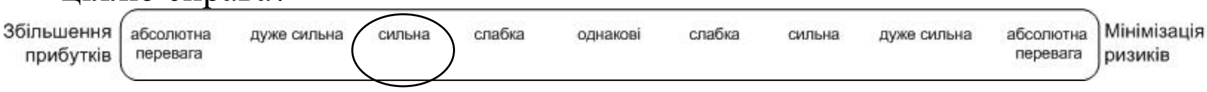
Таблиця 7.13. Локальні і глобальні ваги акторів

	Економічний (0.333)	Соціальний (0.333)	Екологічний (0.333)	**Вага**
КМДА	0.417	0.501	0.286	**0.402**
бізнес	0.250	0.071	0.286	**0.202**
населення	0.250	0.214	0.286	**0.250**
МСГТ	0.083	0.214	0.142	**0.146**

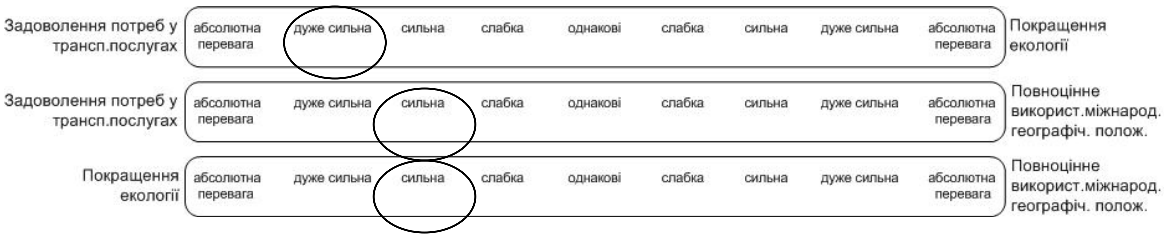
Оцінювання цілей акторів

Для розрахунку величин відносних ваг цілей акторів були побудовані наступні опитувальні форми:

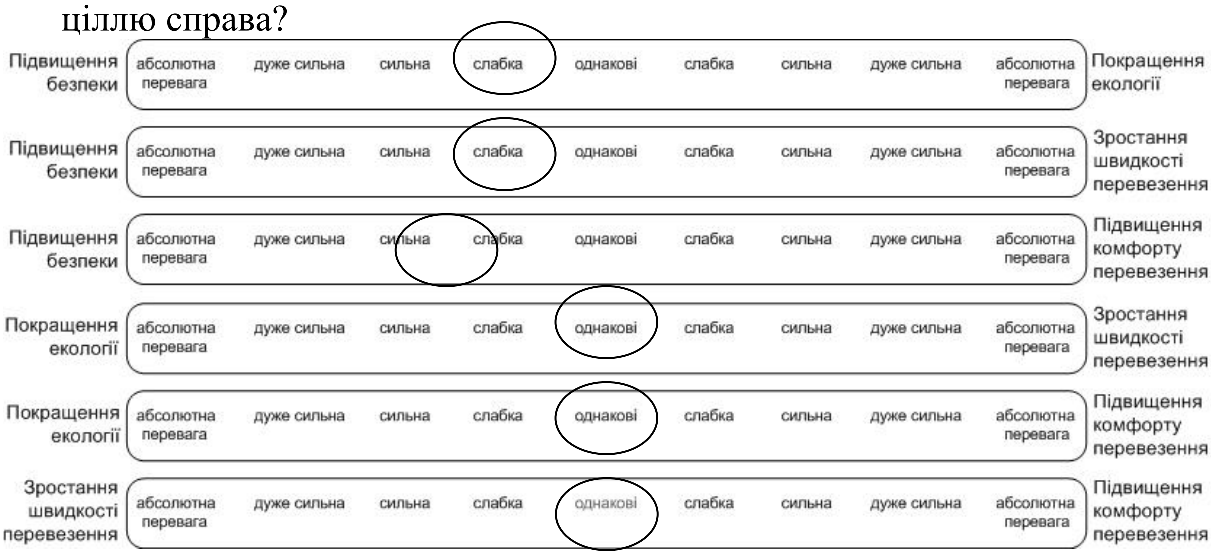
- Яка ціль важливіша для бізнесу? Яка ступінь переваги цілі зліва над ціллю справа?



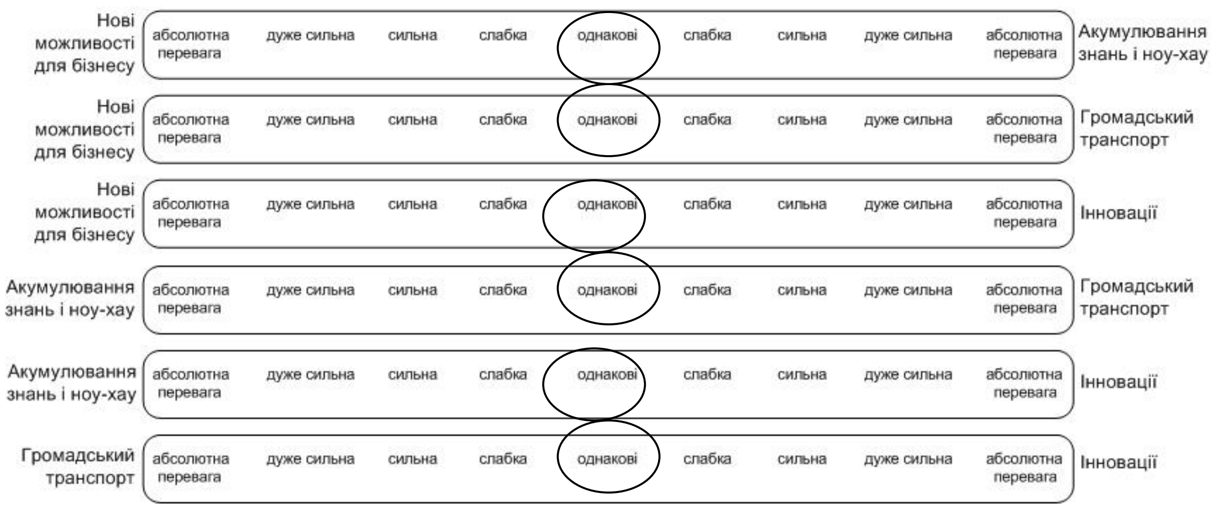
- Яка ціль важливіша для КМДА? Яка ступінь переваги цілі зліва над ціллю справа?



- Яка ціль важливіша для населення? Яка ступінь переваги цілі зліва над ціллю справа?



- Яка ціль важливіша для МСГТ? Яка ступінь переваги цілі зліва над ціллю справа?



Ваги, отримані за наданими вище оцінками, свідчать про те, що *найбільш важливими цілями є “задоволення потреб споживачів у транспортних послугах”, “покращення екологічної ситуації”, “збільшення прибутків бізнесу”, “безпека” і “швидкість перевезення”* (табл. 7.14).

Таблиця 7.14. Локальні і глобальні ваги цілей акторів

а) КМДА

КМДА (0.397)	задоволення потреб у трансп. послугах	покращення екологічної ситуації	повноц. використ. міжнарод. трансп.-географіч. полож.
Локальна вага	0.556	0.333	0.111
Глобальна вага	0.221	0.132	0.044

б) бізнесу

Бізнес (0.189)	збільшення прибутків	мінімізація ризиків
Локальна вага	0.833	0.167
Глобальна вага	0.157	0.032

в) населення

Населення (0.250)	безпека	екологія	швидкість перевезення	комфорт перевезення
Локальна вага	0.364	0.233	0.233	0.170
Глобальна вага	0.091	0.058	0.058	0.043

г) МСГТ

МСГТ (0.164)	нові можливості для бізнесу	акумулювання знань і ноу-хау	громадський транспорт	інновації
Локальна вага	0.250	0.250	0.250	0.250
Глобальна вага	0.041	0.041	0.041	0.041

Оцінювання сценаріїв

Для визначення ймовірностей сценаріїв були задані наступні питання: Реалізація якого з сценаріїв може більше вплинути на покращення задоволення потреб у транспортніх послугах? Реалізація якого з сценаріїв може більше вплинути на покращення екологічної ситуації? Локальні та глобальні імовірності сценаріїв (табл. 7.15) дозволяють зробити висновок, що *лише комплексна реконструкція сприятиме задоволенню цілей акторів транспортної системи.*

Таблиця 7.15. Локальні та глобальні імовірності сценаріїв розвитку транспортної системи

	задовол. потреб у трансп. послугах (0,308)	покращення екологічної ситуац. (0,265)	збільшення прибутків бізнесу (0,219)	безпека (0,126)	швидкість перевезення (0,081)	імовірність
статус-кво	0,083	0,077	0,143	0,072	0,077	0,093
вибіркова реконструкція ТС	0,334	0,385	0,428	0,357	0,385	0,375
комплексна реконструкція ТС	0,583	0,538	0,429	0,571	0,538	0,532

Таким чином, виконано прямий процесс оцінювання розвитку транспортної системи міста Києва. Прямий процес забезпечує оцінку стану імовірного результату при теперішніх цілях зацікавлених осіб. *Зворотний* *процес* починається з бажаних сценаріїв, потім досліджуються політики і фактори, за допомогою яких можна реалізувати ці сценарії.

Виконаємо зворотний процес оцінювання сценаріїв розвитку транспортної системи міста Києва.

Перший зворотний процес

Ієрархія першого зворотного процесу оцінювання сценаріїв розвитку транспортної системи наведена на рис. 7.11.

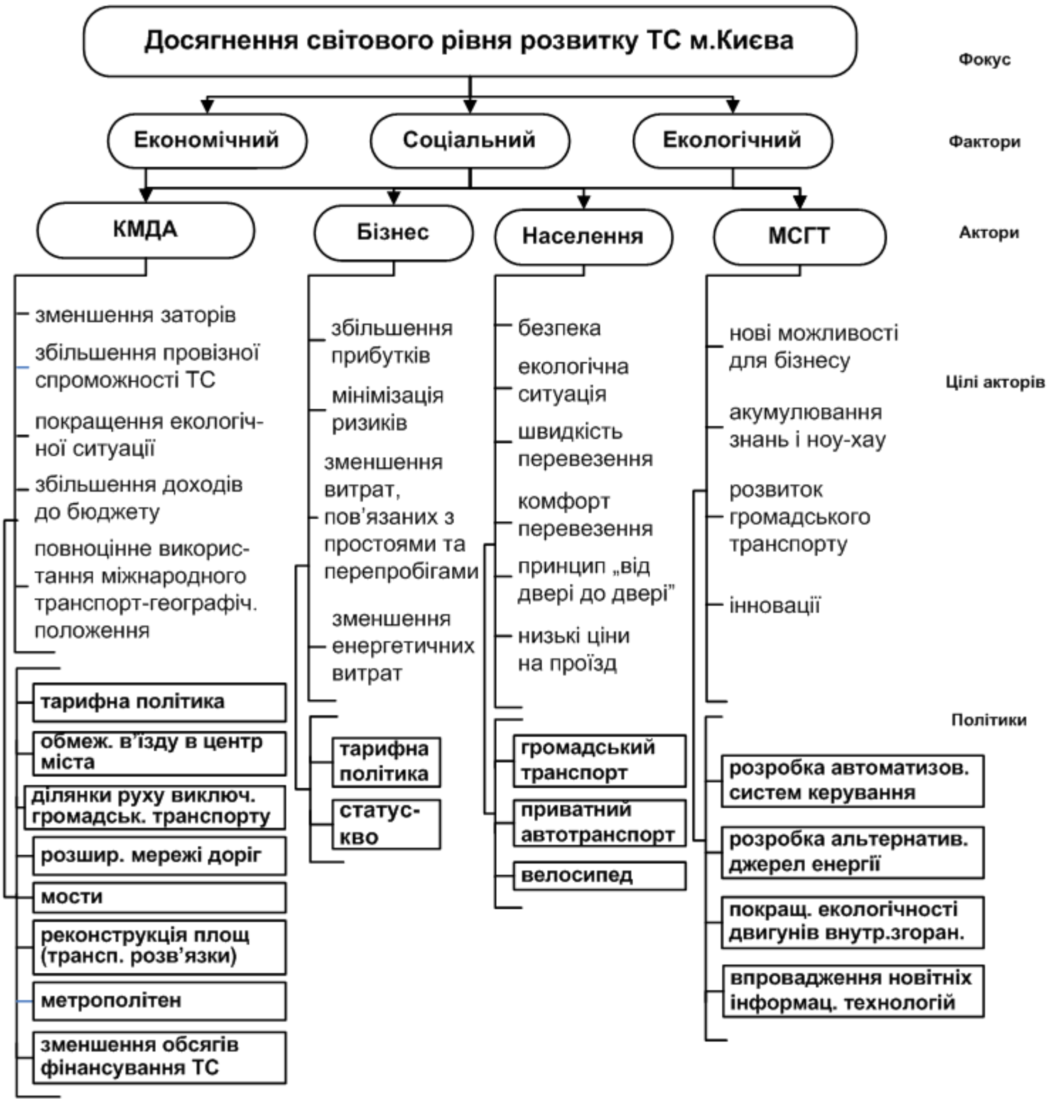


Рис. 7.11. Ієрархія першого зворотного процесу

Вершина цієї ієрархії – отриманий за результатом прямого процесу найбільш імовірний сценарій розвитку. Наступні рівні формують актори та їх цілі. На останньому рівні знаходяться політики акторів, які призводять до реалізації сценарію, що знаходиться у вершині ієрархії.

Задача зворотного процесу полягає у знаходженні ваг політик акторів і виборі пріоритетних політик. Зазначимо, що множини цілей акторів змінилися, оскільки для зворотного процесу характерне більше розуміння проблеми, в порівнянні із попереднім прямим процесом.

Ваги економічного, соціального та екологічного принципів стійкого розвитку дорівнюють по 0.333. Нехай ваги акторів також не змінюються в порівнянні з прямим процесом. В іншому випадку необхідно заново провести оцінювання акторів за відповідними опитувальними формами, що використовувалися при оцінюванні акторів у прямому процесі. Знайдемо ваги цілей акторів.

Оцінювання цілей акторів

Для визначення ваг цілей акторів були задані наступні питання: Яка ціль важливіша для КМДА? Яка ціль важливіша для бізнесу? Яка ціль важливіша для населення? Яка ціль важливіша для МСГТ?

Матриці парних порівнянь і ваги цілей акторів наведені в додатку А. Отримані локальні і глобальні ваги цілей акторів (табл. 7.16) свідчать про те, що *найбільш важливі цілі реконструкції транспортної системи наступні:*

- *покращення екологічної ситуації,*
- *зменшення заторів,*
- *збільшення провізної спроможності транспортної системи,*
- *збільшення доходів до бюджету.*

Опитувальні форми, за якими актори проводили оцінювання, аналогічні до тих, що наведені вище для першого прямого процесу.

Таблиця 7.16. Локальні і глобальні ваги цілей акторів

а) КМДА

КМДА (0.530)	зменшення заторів	збільшення провізної спроможн. ТС	покращення екологічної ситуації	збільшення доходів до бюджету	повноц. використ. міжнарод. тр.-геогр. полож.
Локальні ваги	0.165	0.165	0.498	0.100	0.071
Глобальні ваги	0.087	0.087	0.264	0.053	0.038

б) бізнесу

Бізнес (0.076)	збільшення прибутків	мінімізація ризиків	зменш. витрат, пов'язаних із простоями та перепробігами	зменш енергетич витрат
Локальні ваги	0.625	0.125	0.125	0.125
Глобальні ваги	0.047	0.010	0.010	0.010

в) населення

Населення (0.197)	безпека	екологія	швидкість	комфорт	принцип «від дверей до дверей»	низькі ціни на проїзд
Локальні ваги	0.240	0.120	0.240	0.080	0.240	0.080
Глобальні ваги	0.047	0.024	0.047	0.016	0.047	0.016

г) МСГТ

МСГТ (0.197)	нові можливості для бізнесу	акумулювання знань і ноу-хау	громадський транспорт	інновації
Локальні ваги	0.250	0.250	0.250	0.250
Глобальні ваги	0.049	0.049	0.049	0.049

Оцінювання політик акторів

Для визначення пріоритетів політик акторів були задані питання типу: Реалізація якої з політик може більше вплинути на покращення екологічної ситуації? Реалізація якої з політик може більше вплинути на зменшення заторів?

Опитувальні форми, за якими актори проводили оцінювання, аналогічні до тих, що наведені вище для першого прямого процесу. Матриці парних порівнянь і ваги наведені в додатку А.

За результатами обробки експертних оцінок отримано *найбільш пріоритетні політики КМДА:*

- обмеження проїзду вантажних автомобілів вулицями Києва,

- введення в експлуатацію автоматизованих постів спостереження за станом атмосферного повітря,

- реконструкція Московської і Ленінградської площ,

- будівництво Кільцевої дороги.

Другий прямий процес

В другому прямому процесі (рис. 7.12) ваги акторів та їх цілей визначаються аналогічно до перших прямого і зворотного процесів.

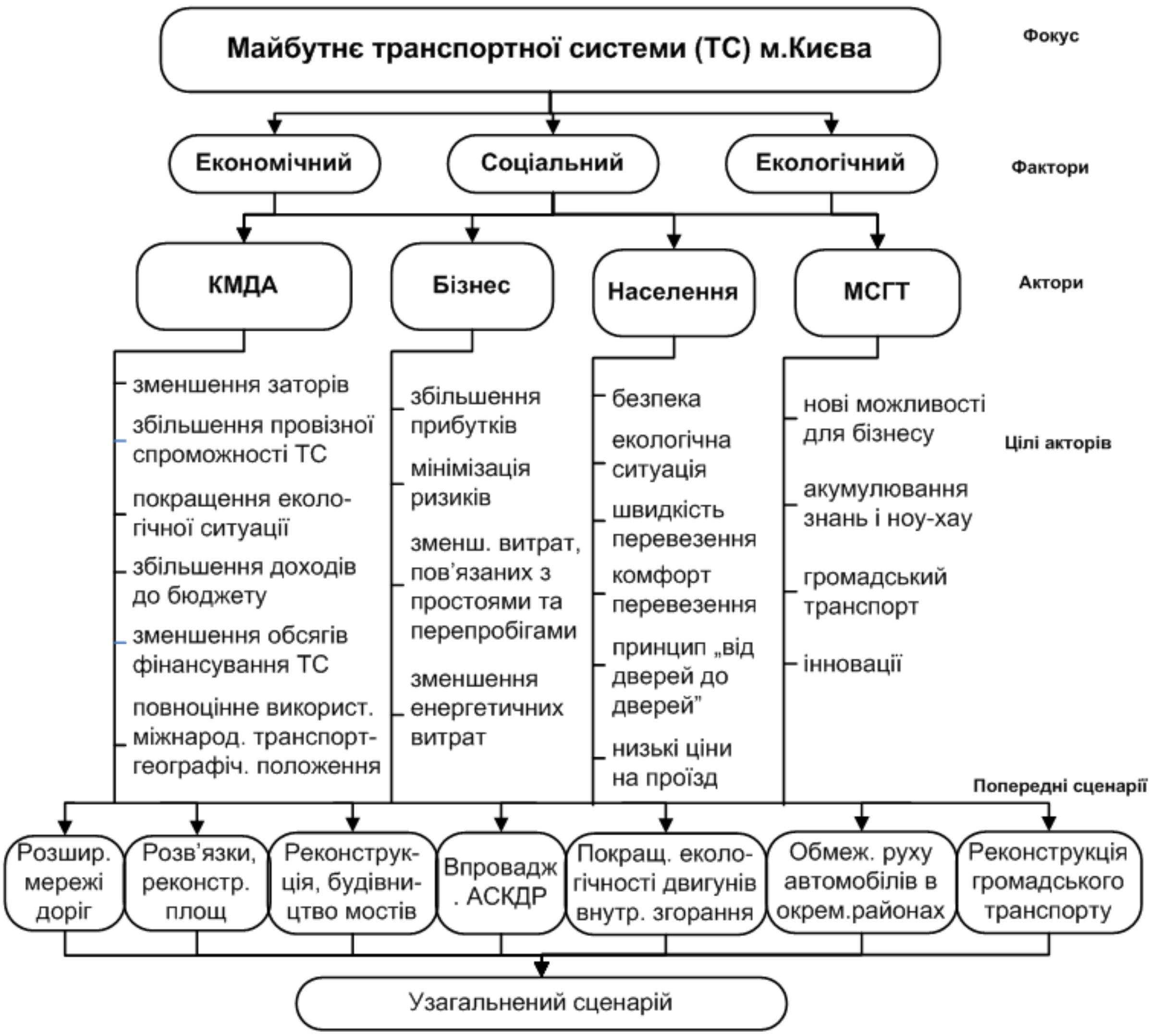


Рис. 7.12. Ієрархія другого прямого процесу

Для визначення ймовірностей сценаріїв були задані питання виду: Реалізація якого з сценаріїв може більше вплинути на збільшення провізної спроможності транспортної системи? Реалізація якого з сценаріїв може більше вплинути на покращення екологічної ситуації? Матриці парних порівнянь і ймовірності сценаріїв наведені в додатку А.

За результатми обробки експертних оцінок отримано наступні пріоритетні сценарії:

- реконструкція громадського транспорту;

- впровадження автоматизованої системи керування дорожнім рухом (АСКДР).

Другий зворотний процес (реконструкція громадського транспорту)

Другий зворотний процес полягає у розрахунку ваг політик акторів для досягнення бажаного сценарію, вибраного на попередньому прямому процесі оцінювання системи.

Розглянемо бажаний сценарій досягнення світового рівня розвитку системи громадського транспорту міста Києва. Ієрархія цієї задачі наведена на рис. 7.13. Основні критерії світового рівня розвитку транспортної системи формують перший рівень цієї ієрархії. Наступний рівень – вид громадського транспорту. На останньому рівні ієрархії знаходяться політики КМДА (заходи) для розвитку кожного виду транспорту.

Для визначення ваг критеріїв були задані наступні питання: Який критерій має більший вплив на досягнення світового рівня розвитку системи громадського транспорту? Питання експертам при знаходженні пріоритетів заходів були наступними: Реалізація якого заходу може більше вплинути на зменшення транспортних заторів? Реалізація якого заходу може більше вплинути на підвищення провізної спроможності?

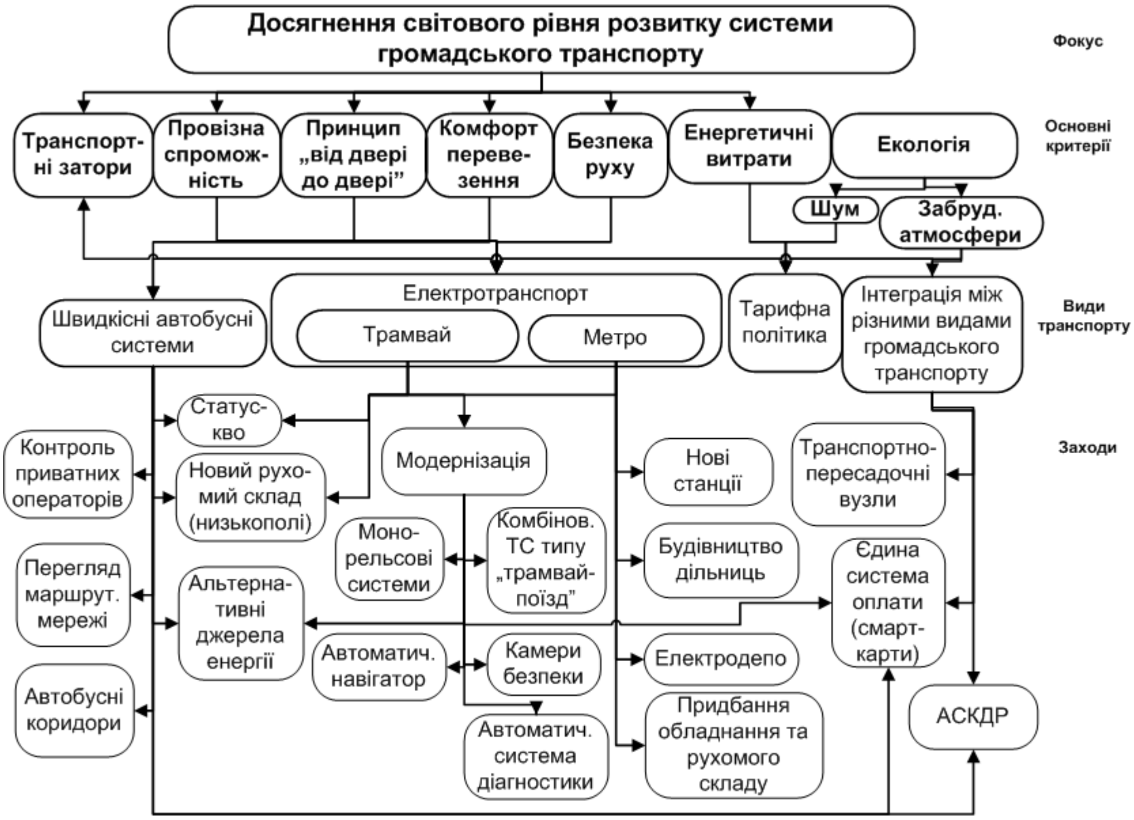


Рис. 7.13. Ієрархія другого зворотного процесу
(розвиток громадського транспорту)

За результатами обробки експертних оцінок були виявлені наступні *першочергові заходи з розвитку системи громадського транспорту:*

- *придбання нового низькополого рухомого складу автобусів;*
- *контроль приватних операторів – скорочення кількості маршрутних таксі;*
- *відкриття нових станцій метро, будівництво дільниць;*
- *впровадження автоматизованої системи керування дорожнім рухом.*

Оцінювання підсистем автоматизованої системи керування дорожнім рухом (АСКДР)

Керівниками КМДА була поставлена задача оцінити доцільність впровадження в місті Києві автоматизованої системи керування дорожнім рухом (АСКДР). Для розв'язання цієї задачі було залучено наступні *групи зацікавлених осіб і експертів (в подальшому – актори)*:

- спеціалісти Головного управління транспорту, зв'язку та інформатизації виконавчого органу Київради (КМДА);
- населення (користувачі пасажирського транспорту, власники транспортних засобів);
- спеціалісти ЗАТ «Мальва», Корпорації «Трансбуд», Комунального підприємства «Київдорсервіс», КП "Київпастранс", КП "Київський Метрополітен", ВАТ "Київпроект", УДАІ ГУМВС України у м. Києві;
- професорсько-викладацький склад Київського автодорожнього університету.

Акторами були встановлені наступні *цілі впровадження АСКДР*:

- підвищення швидкості транспортного сполучення;
- зменшення затримок транспорту;
- підвищення пропускної здатності вулично-дорожньої мережі (ВДМ);
- зменшення витрат пального;
- покращення екологічних показників організації дорожнього руху;
- зниження рівня аварійності на ВДМ міста;
- зростання обсягу пасажирів які користуються транспортними послугами:

– регулярність руху пасажирського транспорту;
– комфорт перевезень в пасажирському транспорті.

Оцінювання вказаних цілей здійснювалося за такими стратегічними факторами (ключовими принципами прийняття рішень щодо розвитку м.Києва) як с*соціальна орієнтованість рішень* і *покращення екологічної ситуації*.

Експерти транспортного господарства вказали наступні *підсистеми АСКДР*, які доцільно було б запровадити в місті Києві:

- *підсистеми адаптивного керування світлофорними об'єктами:*
  - режим з фіксованими планами координації (на початкових стадіях впровадження системи в тих ситуаціях, коли використання адаптивного режиму неможливе (наприклад, через відсутність датчиків руху на перехрестях) , або недоцільне);
  - адаптивний режим;
- *підсистеми інформаційного забезпечення*:
  - підсистема інформування учасників руху про ситуацію на ВДМ міста (включає неперервний моніторинг руху, моніторинг дорожніх умов, фіксуючи аварійні випадки, інформаційні мультимедійні табло перед в'їздом на міст чи в тунель та протягом руху на них, повідомлення можуть подаватися шляхом візуалізації та аудіювання);
  - підсистема інформаційного забезпечення пасажирського транспорту;
  - підсистема надання інформаційно-довідкових послуг населенню;
- *підсистема відео-спостереження* з фотофіксацією порушень правил дорожнього руху;
- *підсистема контролю паркувальної діяльності.*

Задача полягала до оцінювання цих підсистем згідно з цілями впровадження АСКДР і у виборі найбільш пріоритетних підсистем.

Розв'язання задачі

Ієрархія задачі представлена на рис. 7.14.

Для знаходження коефіцієнтів відносної важливості стратегічних факторів акторам з КМДА було задано питання виду: «Який з принципів *соціальна орієнтованість рішень* чи *покращення екологічної ситуації* є більш важливим при прийнятті рішень щодо покращення ситуацій на дорогах м. Києва? Яким є ступінь переваги?»

При порівнянні цілей акторам були задані питання виду «Порівняйте цілі *зменшення затримок транспорту* і *зменшення рівня аварійності на ВДМ міста* з точки зору впливу на реалізацію принципу соціальна орієнтованість рішень».

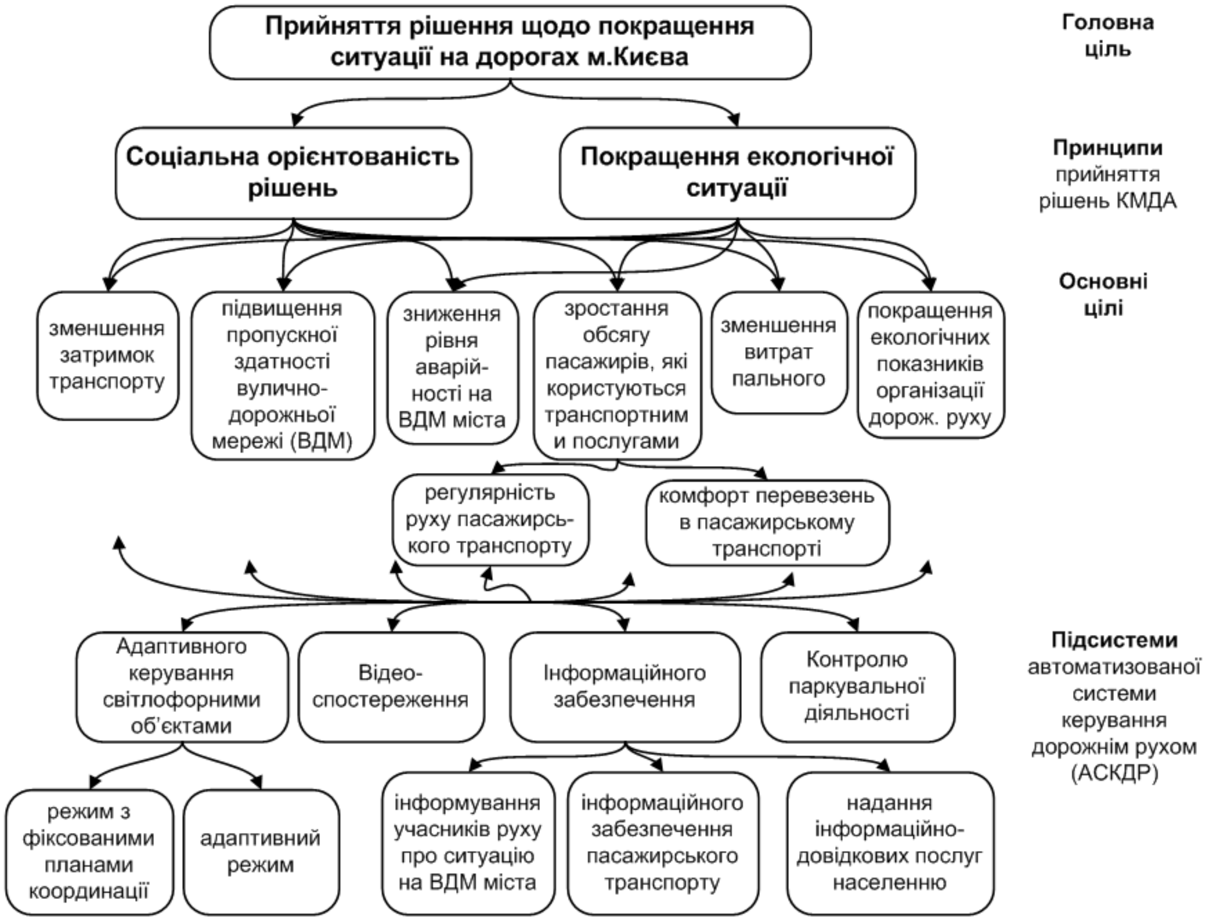


Рис. 7.14. Ієрархія задачі оцінювання підсистем АСКДР

Розрахунок ваг підсистем АСКДР базувався на наданих актором інтенсивностях реалізацій підсистемами цілей створення системи. Актору ставилося питання виду: «Виберіть інтенсивність реалізації *підсистемою адаптивного керування світлофорними об'єктами, режим з фіксованими планами координації* цілі *зменшення затримок транспорту*». Для характеристики підсистеми актор вибирав інтенсивності із множини {дуже висока, висока, середня, низька, дуже низька}.

Додаток А

Контрольні запитання і завдання на самостійну роботу

До розділу 1

1. Розкрийте зміст функцій МАІ.
2. В чому полягають принципи МАІ?
3. На яких аксіомах базується МАІ?
4. Дайте означення впорядкованої множини.
5. Як визначається вектор пріоритетів елементів вибраного рівня ієрархії відносно елементу будь-якого вищого рівня?
6. Поясніть поняття відносної переваги об’єкту i над об’єктом j за k кроків в термінах загальної інтенсивності всіх k-маршрутів від вузла i до вузла j.
7. Дайте означення узгодженої матриці.
8. Сформулюйте теорему Перрона-Фробеніуса.
9. Сформулюйте означення і властивості примітивної матриці.
10. Які властивості власних чисел узгодженої МПП?
11. Як розраховується вектор ваг узгодженої МПП?
12. Проілюструйте поняття узгодженості на мові теорії графів.
13. Опишіть процес побудови індексу узгодженості МПП.
14. Яким чином отримано цілочисельні значення фундаментальної шкали?
15. Опишіть фундаментальну шкалу.
16. Яким чином здійснюється розширення шкали 1-9 до 1-∞?
17. З яких етапів складається МАІ?
18. В чому полягає метод парних порівнянь? Наведіть приклад.
19. Дайте означення МПП. Які її властивості?
20. Як оцінюється узгодженість МПП?
21. Що таке відношення узгодженості?

22. Як визначити припустимість рівня узгодженості МПП?

23. Що таке локальні ваги в МАІ і як вони обчислюються?

24. Проілюструйте чисельні методи знаходження головного власного вектора.

25. Що таке глобальні ваги в МАІ і як вони обчислюються?

26. Опишіть метод дистрибутивного синтезу.

27. Які класи задач розв'язуються за допомогою МАІ?

Задачі

1. Для наступних матриць парних порівнянь D:

   1.1. Розрахувати відношення узгодженості.

   1.2. Оцінити припустимість неузгодженості D.

   1.3. Розрахувати ваги методом головного власного вектора.

а) $D=\begin{pmatrix}1&2&4&4\\ \frac12&1&2&2\\ \frac14&\frac12&1&1\\ \frac14&\frac12&1&1\end{pmatrix}$, б) $D=\begin{pmatrix}1&2&4&8\\ \frac12&1&2&4\\ \frac14&\frac12&1&2\\ \frac18&\frac14&\frac12&1\end{pmatrix}$, в) $D=\begin{pmatrix}1&\frac13&2&1\\ 3&1&6&3\\ \frac12&\frac16&1&\frac12\\ 1&\frac13&2&1\end{pmatrix}$, г) $D=\begin{pmatrix}1&3&3\\ \frac13&1&2\\ \frac13&\frac12&1\end{pmatrix}$,

д) $D=\begin{pmatrix}1&2&7\\ \frac12&1&4\\ \frac17&\frac14&1\end{pmatrix}$, е) $D=\begin{pmatrix}1&2&6\\ \frac12&1&4\\ \frac16&\frac14&1\end{pmatrix}$, є) $D=\begin{pmatrix}1&\frac13&1\\ 3&1&5\\ 1&\frac15&1\end{pmatrix}$, ж) $D=\begin{pmatrix}1&\frac13&1&2\\ 3&1&3&6\\ 1&\frac13&1&4\\ \frac12&\frac16&\frac14&1\end{pmatrix}$,

з) $D=\begin{pmatrix}1&\frac13&2&2\\ 3&1&3&6\\ \frac12&\frac13&1&2\\ \frac12&\frac16&\frac12&1\end{pmatrix}$, і) $D=\begin{pmatrix}1&\frac13&2&2\\ 3&1&4&6\\ \frac12&\frac14&1&2\\ \frac12&\frac16&\frac12&1\end{pmatrix}$, ї) $D=\begin{pmatrix}1&\frac13&3&2\\ 3&1&3&6\\ \frac13&\frac13&1&2\\ \frac12&\frac16&\frac12&1\end{pmatrix}$, к) $D=\begin{pmatrix}1&\frac13&3&1\\ 3&1&3&6\\ \frac13&\frac13&1&2\\ 1&\frac16&\frac12&1\end{pmatrix}$.

2. Знайти глобальні ваги альтернатив методом дистрибутивного синтезу, якщо альтернативи оцінюються за двома критеріями і відповідні МПП дорівнюють D_1 і D_2, ваги критеріїв – p_1 і p_2:

а) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} p_1 = 0.4 \\ p_2 = 0.6 \end{matrix};$

б) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} p_1 = 0.7 \\ p_2 = 0.3 \end{matrix};$

в) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} p_1 = 0.45 \\ p_2 = 0.55 \end{matrix};$

г) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} p_1 = 0.25 \\ p_2 = 0.75 \end{matrix};$

д) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{7} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}, \begin{matrix} p_1 = 0.65 \\ p_2 = 0.35 \end{matrix}.$

До розділу 2

1. Опишіть метод адитивної нормалізації знаходження локальних ваг.
2. Дайте означення гармонічного відношення узгодженості.
3. Яким чином визначається припустимість неузгодженості експертних оцінок при використанні методу адитивної нормалізації знаходження локальних ваг?
4. В чому полягає зв’язок методу адитивної нормалізації з граничним методом знаходження головного власного вектору?
5. В чому полягає зв’язок методу адитивної нормалізації зі степеневим методом знаходження головного власного вектору?
6. Опишіть метод геометричної середньої розрахунку локальних ваг в МАІ.

7. Обґрунтуйте використання методу RGMM з точки зору детермінованого і стохастичного підходів.
8. Як оцінюється узгодженість МПП при використанні методу RGMM знаходження ваг.
9. Дайте означення геометричного індексу узгодженості.
10. Яким чином визначається припустимість неузгодженості експертних оцінок при використанні методу RGMM для розрахунку локальних ваг?
11. Опишіть метод знаходження ваг, стійкий до викидів в МПП, що базується на побудові матриці парних пропорцій.
12. Опишіть методи автоматичного підвищення узгодженості МПП без участі експертів.
13. Опишіть методи знаходження найбільш неузгоджених елементів МПП.
14. Які є методи знаходження групового рішення?
15. Чи еквівалентні методи AIJ і AIP знаходження групового рішення у випадку узгоджених МПП?
16. Розрахувати груповий геометричний індекс узгодженості.
17. Вкажіть підходи до знаходження величин компетентності експертів.

Задачі

1. Для наступних матриць парних порівнянь *D*:
   1.1. розрахувати значення гармонічного відношення узгодженості;
   1.2. оцінити припустимість неузгодженості *D* за гармонічним відношенням узгодженості;
   1.3. розрахувати ваги методом адитивної нормалізації;
   1.4. розрахувати значення геометричного індексу узгодженості;
   1.5. оцінити припустимість неузгодженості *D* за геометричним індексом узгодженості;
   1.6. розрахувати ваги методом геометричної середньої.

а) $D=\begin{pmatrix}1 & \tfrac{1}{5} & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3 & 7\\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{3} & 1 & 4\\ 1 & \tfrac{1}{7} & \tfrac{1}{4} & 1\end{pmatrix}$, б) $D=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5 & 1\\ \tfrac{1}{3} & 1 & 2 & \tfrac{1}{4}\\ \tfrac{1}{5} & \tfrac{1}{2} & 1 & \tfrac{1}{6}\\ 1 & 4 & 6 & 1\end{pmatrix}$, в) $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6 & 3\\ \tfrac{1}{2} & 1 & 3 & \tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{6} & \tfrac{1}{3} & 1 & \tfrac{1}{6}\\ \tfrac{1}{3} & 2 & 6 & 1\end{pmatrix}$, г) $D=\begin{pmatrix}1 & 5 & 6 & 1\\ \tfrac{1}{5} & 1 & 1 & \tfrac{1}{6}\\ \tfrac{1}{6} & 1 & 1 & \tfrac{1}{7}\\ 1 & 6 & 7 & 1\end{pmatrix}$,

д) $D=\begin{pmatrix}1 & \tfrac{1}{3} & 2 & \tfrac{1}{3}\\ 3 & 1 & 5 & 1\\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{5} & 1 & \tfrac{1}{3}\\ 3 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$, е) $D=\begin{pmatrix}1 & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{7} & 1\\ 2 & 1 & \tfrac{1}{3} & 3\\ 7 & 3 & 1 & 7\\ 1 & \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{7} & 1\end{pmatrix}$,

є) $D=\begin{pmatrix}1 & 1 & \tfrac{1}{7} & 1\\ 1 & 1 & \tfrac{1}{3} & 3\\ 7 & 3 & 1 & 7\\ 1 & \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{7} & 1\end{pmatrix}$, ж) $D=\begin{pmatrix}1 & 9 & 4 & 1\\ \tfrac{1}{9} & 1 & \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{5}\\ \tfrac{1}{4} & 3 & 1 & \tfrac{1}{4}\\ 1 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$, з) $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 2 & 3\\ \tfrac{1}{2} & 1 & 3 & 1 & 2\\ \tfrac{1}{4} & \tfrac{1}{3} & 1 & \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{2}\\ \tfrac{1}{2} & 1 & 3 & 1 & 2\\ \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{2} & 2 & \tfrac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$.

2. Визначити найбільш неузгоджені елементи МПП D, використовуючи методи:

– CI для укороченої МПП;

– кореляції між рядками і стовпчиками МПП;

– подібності між емпіричною і теоретичною МПП за критерієм Хі-квадрат.

а) $D=\begin{pmatrix}1 & \tfrac{1}{3} & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3 & 6\\ 1 & \tfrac{1}{3} & 1 & 4\\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{6} & \tfrac{1}{4} & 1\end{pmatrix}$, б) $D=\begin{pmatrix}1 & \tfrac{1}{3} & 2 & 2\\ 3 & 1 & 3 & 6\\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{3} & 1 & 2\\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{6} & \tfrac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$, в) $D=\begin{pmatrix}1 & \tfrac{1}{3} & 2 & 2\\ 3 & 1 & 4 & 6\\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{4} & 1 & 2\\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{6} & \tfrac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$,

г) $D=\begin{pmatrix}1 & \tfrac{1}{3} & 3 & 2\\ 3 & 1 & 3 & 6\\ \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} & 1 & 2\\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{6} & \tfrac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$, д) $D=\begin{pmatrix}1 & \tfrac{1}{3} & 3 & 1\\ 3 & 1 & 3 & 6\\ \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} & 1 & 2\\ 1 & \tfrac{1}{6} & \tfrac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$, е) $D=\begin{pmatrix}1 & \tfrac{1}{5} & 2 & 1\\ 5 & 1 & 3 & 7\\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{3} & 1 & 4\\ 1 & \tfrac{1}{7} & \tfrac{1}{4} & 1\end{pmatrix}$,

є) $D=\begin{pmatrix}1 & 5 & 3 & 2 & 6\\ \tfrac{1}{5} & 1 & \tfrac{1}{3} & 5 & 3\\ \tfrac{1}{3} & 3 & 1 & 6 & 3\\ \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{5} & \tfrac{1}{6} & 1 & \tfrac{1}{3}\\ \tfrac{1}{6} & \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{3} & 3 & 1\end{pmatrix}$, ж) $D=\begin{pmatrix}1 & \tfrac{1}{5} & 1 & \tfrac{1}{4} & 3\\ 5 & 1 & 6 & 1 & 1\\ 1 & \tfrac{1}{6} & 1 & \tfrac{1}{6} & 1\\ 4 & 1 & 6 & 1 & 6\\ \tfrac{1}{3} & 1 & 1 & \tfrac{1}{6} & 1\end{pmatrix}$, з) $D=\begin{pmatrix}1 & 2 & \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{2} & 6\\ \tfrac{1}{2} & 1 & \tfrac{1}{7} & 1 & 3\\ 3 & 7 & 1 & 5 & 2\\ 2 & 1 & \tfrac{1}{5} & 1 & 3\\ \tfrac{1}{6} & \tfrac{1}{3} & \tfrac{1}{2} & \tfrac{1}{3} & 1\end{pmatrix}$.

3. Нехай D_1, D_2 і D_3 - МПП, надані трьома експертами, k_1, k_2 і k_3 - компетентності експертів. Знайти групове рішення використовуючи методи:

- агрегації індивідуальних суджень;
- агрегації індивідуальних пріоритетів;
- зваженої середньої арифметичної;
- зваженої середньої геометричної.

а) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 7 \\ \frac{1}{4} & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} k_1 = 0.2 \\ k_2 = 0.5; \\ k_3 = 0.3 \end{matrix}$

б) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 3 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{3} & 2 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 1 \\ \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} k_1 = 0.60 \\ k_2 = 0.25; \\ k_3 = 0.15 \end{matrix}$

в) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 3 \\ \frac{1}{8} & 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} k_1 = 0.45 \\ k_2 = 0.15; \\ k_3 = 0.40 \end{matrix}$

г) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & 4 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & \frac{1}{5} & 1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{1}{4} \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} k_1 = 0.10 \\ k_2 = 0.35; \\ k_3 = 0.55 \end{matrix}$

д) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & \frac{1}{3} & 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{7} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 7 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 4 \\ 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} k_1 = 0.2 \\ k_2 = 0.3; \\ k_3 = 0.5 \end{matrix}$

е) $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ \frac{1}{5} & 1 & 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 1 & 1 & \frac{1}{7} \\ 1 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}, D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 7 \\ \frac{1}{4} & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} k_1 = 0.35 \\ k_2 = 0.30. \\ k_3 = 0.25 \end{matrix}$

До розділу 3

1. Дайте означення явища реверсу рангів. Які є види реверсу?
2. Опишіть метод дистрибутивного синтезу МАІ.
3. Опишіть метод ідеального синтезу МАІ.
4. Опишіть метод мультиплікативного синтезу МАІ.
5. Опишіть метод ГВБВПА МАІ.
6. Наведіть випадки появи РР і зміни оптимальної альтернативи для різних методів синтезу МАІ.

Задачі

1. Нехай n альтернатив оцінюються за двома критеріями, відповідні матриці парних порівнянь дорівнюють D_1, D_2, ваги критеріїв – p_1, p_2. Знайти глобальні ваги альтернатив наступними методами синтезу:
   - дистрибутивним;
   - ідеальним;
   - мультиплікативним;
   - ГВБВПА.

а) $n = 4,\ D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 7 \\ \frac{1}{4} & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} p_1 = 0.4 \\ p_2 = 0.6 \end{matrix};$

б) $n = 4,\ D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 4 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} p_1 = 0.4 \\ p_2 = 0.6 \end{matrix};$

в) $n = 4,\ D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 2 \\ \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 6 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},\ \begin{matrix} p_1 = 0.4 \\ p_2 = 0.6 \end{matrix};$

г) $n=4,\ D_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3} & 2 & 1\\ 3 & 1 & 6 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{3} & 2 & 1\end{pmatrix},\ D_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 8\\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2\\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}p_1=0.7\\ p_2=0.3\end{matrix};$

д) $n=3,\ D_1=\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\ \frac{1}{3} & 1 & 2\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},\ D_2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ \frac{1}{2} & 1 & 4\\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}p_1=0.45\\ p_2=0.55\end{matrix};$

е) $n=3,\ D_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 6\\ \frac{1}{2} & 1 & 4\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix},\ D_2=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3} & 1\\ 3 & 1 & 5\\ 1 & \frac{1}{5} & 1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}p_1=0.25\\ p_2=0.75\end{matrix};$

є) $n=4,\ D_1=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{3} & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3 & 6\\ 1 & \frac{1}{3} & 1 & 4\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 1\end{pmatrix},D_2=\begin{pmatrix}1 & 1 & \frac{1}{7} & 1\\ 1 & 1 & \frac{1}{3} & 3\\ 7 & 3 & 1 & 7\\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{7} & 1\end{pmatrix},\ \begin{matrix}p_1=0.65\\ p_2=0.35\end{matrix}.$

До розділу 4

1. Дайте означення нечіткої матриці парних порівнянь.
2. Наведіть постановку задачі обробки нечітких експертних оцінок за допомогою ММАІ.
3. Опишіть загальний підхід до розв’язання задачі обробки нечітких експертних оцінок за допомогою ММАІ.
4. Дайте означення нечіткого спектрального коефіцієнту узгодженості.
5. Опишіть алгоритм ММАІ обробки нечіткої експертної інформації.
6. Що таке обернено симетрична узгоджена ІМПП?
7. Опишіть двохетапний метод знаходження інтервальних ваг з ІМПП.
8. Як оцінюється узгодженість ІМПП при використанні двохетапного методу розрахунку ваг з ІМПП?
9. Опишіть алгоритм розрахунку інтервальних ваг при використанні двохетапного методу.
10. Опишіть метод побудови інтервального спектрального коефіцієнту узгодженості.

11. Яким чином визначається припустимість рівня неузгодженості ІМПП?
12. Дайте означення інтервальних порогів виявлення і застосування.
13. Опишіть критерії порівняння результатів роботи різних методів знаходження інтервальних ваг.
14. За якими властивостями класифікують ІМПП?
15. Опишіть мультиплікативний метод синтезу інтервальних ваг.
16. Опишіть метод ранжування нечітких ваг.
17. Як розраховуються ступені виконання строгої, нестрогої переваги та еквівалентності нечітких ваг?

Задачі

1. Для наступних ІМПП A:

1.1. Розрахувати інтервальний спектральний коефіцієнт узгодженості k_y^{interv} та індекс узгодженості CI^*.

1.2. Знайти ваги з ІМПП A, використовуючи двохетапний метод.

1.3. Вказати властивості ІМПП A (присутність об'єктів-копій, транзитивність, повнота ранжування, визначеність щодо переваги для пари об'єктів, склад припустимої області).

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & [2,5] & [2,4] & [1,3] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right] & 1 & [1,3] & [1,2] \\ \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{3},1\right] & 1 & \left[\frac{1}{2},1\right] \\ \left[\frac{1}{3},1\right] & \left[\frac{1}{2},1\right] & [1,2] & 1 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \left[\frac{1}{6},\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] \\ 1 & 1 & \left[\frac{1}{6},\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] \\ [5,6] & [5,6] & 1 & [4,5] \\ [3,4] & [3,4] & \left[\frac{1}{5},\frac{1}{4}\right] & 1 \end{pmatrix}$,

$$\text{в) } A=\begin{pmatrix} 1 & [3,4] & 6 & [6,7] \\ \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] & 1 & [3,4] & [3,4] \\ \frac{1}{6} & \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] & 1 & [3,4] \\ \left[\frac{1}{7},\frac{1}{6}\right] & \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] & \left[\frac{1}{4},\frac{1}{3}\right] & 1 \end{pmatrix},\ \text{г) } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{д) } A=\begin{pmatrix} 1 & \left[\frac{1}{2},4\right] & [3,6] & [2,5] & [3,9] \\ \left[\frac{1}{4},2\right] & 1 & [1,5] & [1,5] & [2,6] \\ \left[\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right] & \left[\frac{1}{5},1\right] & 1 & \left[\frac{1}{2},4\right] & \left[\frac{1}{2},5\right] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{5},1\right] & \left[\frac{1}{4},2\right] & 1 & \left[\frac{1}{2},7\right] \\ \left[\frac{1}{9},\frac{1}{3}\right] & \left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{5},2\right] & \left[\frac{1}{7},2\right] & 1 \end{pmatrix},\ \text{е) } A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 7 \\ \frac{1}{2} & 1 & 2 & 2 & 4 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 2 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 9 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{є) } A=\begin{pmatrix} 1 & [1,3] & [3,5] & [5,7] & [5,9] \\ \left[\frac{1}{3},1\right] & 1 & [1,4] & [1,5] & [1,4] \\ \left[\frac{1}{5},\frac{1}{3}\right] & \left[\frac{1}{4},1\right] & 1 & \left[\frac{1}{5},5\right] & [2,4] \\ \left[\frac{1}{7},\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{5},1\right] & \left[\frac{1}{5},5\right] & 1 & [1,2] \\ \left[\frac{1}{9},\frac{1}{5}\right] & \left[\frac{1}{4},1\right] & \left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right] & \left[\frac{1}{2},1\right] & 1 \end{pmatrix},\ \text{ж) } A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 8 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 \\ 2 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти ранжування наступних нечітких ваг

а) w_1=[0.03; 0.10; 0.25], w_2=[0.09; 0.18; 0.30], w_3=[0.20; 0.25; 0.35], w_4= =[0.30; 0.40; 0.45].

б) w_1=[0.1; 0.2; 0.3], w_2=[0.05; 0.18; 0.25], w_3=[0.30; 0.40; 0.45], w_4=[0.30; 0.50; 0.55], .

в) w_1=[0.23; 0.30; 0.36], w_2=[0.1; 0.13; 0.20], w_3=[0.25; 0.35; 0.40], w_4= =[0.30; 0.40; 0.45].

До розділу 5

1. Яким чином аналізується чутливість розв'язку задачі багатокритеріального оцінювання альтернатив за допомогою ППП Expert Choice?
2. Наведіть постановку задачі комплексного оцінювання чутливості розв'язку, отриманого МАІ.
3. Опишіть алгоритм прийняття рішення за допомогою МАІ з урахуванням комплексного оцінювання чутливості.
4. Яким чином здійснюється оцінювання стійкості локальних ваг елементів ієрархії до збурень, викликаних суб'єктивністю експертних оцінок?
5. Що таке імовірність появи зміни рангів k-го ступеня?
6. Як визначаються інтервали стійкості експертних оцінок за критерієм узгодженості при використанні методу RGMM розрахунку ваг?
7. Як розраховується індекс стійкості експертних оцінок за критерієм узгодженості при використанні методу RGMM розрахунку ваг?
8. Чи співпадають індекси стійкості за критерієм узгодженості GCI для МПП розмірності 3x3? Відповідь обґрунтувати.
9. Що таке стійкі та критичні елементи ієрархії?
10. Дайте означення ступеня критичності елементу ієрархії.
11. Опишіть метод знаходження величин відносної зміни ваги елементу ієрархії, що призводить до зміни порядку ранжування між двома альтернативами у випадку використання дистрибутивного синтезу.
12. Опишіть метод знаходження величин відносної зміни ваги елементу ієрархії, що призводить до зміни порядку ранжування між двома альтернативами у випадку використання мультиплікативного синтезу.

13. Якою є умова стійкості елементу ієрархії щодо зміни порядку ранжування між двома альтернативами?
14. Що таке ступінь критичності і чутливість альтернативи?
15. Опишіть метод знаходження величин відносної зміни ваги альтернативи, що призводить до зміни порядку ранжування між двома альтернативами у випадку використання дистрибутивного синтезу.
16. Якою є умова стійкості альтернативи щодо зміни порядку ранжування між двома альтернативами?

Задачі

1. Дослідити чутливість розв'язку задачі оцінювання інформаційних систем аутсорсингу.
2. Дослідити чутливість розв'язку задачі вибору квартири.
3. Дослідити чутливість розв'язку задачі вибору капітального обладнання в галузі охорони здоров'я. Ієрархія складається з трьох рівнів: критерії (безпека, клінічні фактори, біомедична інженерія, витрати), їх підкритерії, альтернативні варіанти.
4. Дослідити чутливість розв'язку задачі вибору веб-сайту. Ієрархія складається з трьох рівнів: критерії якості сайту (якість обслуговування, якість систем та якість, яка залежить від постачальника), їх підкритерії та альтернативи.
5. Дослідити чутливість розв'язку задачі вибору мультимедійних інформаційних систем за критеріями технічних можливостей (інтерфейс, підтримка графіки, підтримка мультимедіа, підтримка файлів даних) та критеріями задоволення очікувань керівництва (ефективність витрат і підтримка постачальників).
6. Дослідити чутливість розв'язку задачі вибору постачальника системи телекомунікацій за критеріями витрат (капітальні та

операційні) і якості (технічна, операційна і якість постачальника). Ієрархія складається з трьох рівнів: підкритерії, альтернативи рішень.

7. Дослідити чутливість розв'язку задачі оцінювання бізнес-договорів за наступними факторами: очікування (заощадження витрат, гнучкість, фокус на основній діяльності), ризик, оточуюче середовище. Ієрархія складається з трьох рівнів: підкритерії, альтернативи рішень.
8. Дослідити чутливість розв'язку задачі оцінювання освітніх інноваційних проектів за критеріями: цілі (обґрунтованість, адаптація, тривалість, план), потреба (зацікавленість, потреба), економіка (регулювання, ресурси щодо відношень/ студенти, прибутковість), масштаб (кількість предметів, студентів, лекторів, синергія, сфера проф. інтересів), інновації.
9. Дослідити чутливість розв'язку задачі оцінювання долі ринку компанії за факторами: споживачі, обслуговуючий персонал, економіка, реклама, якість товарів. Альтернативи – конкуренти.
10. Дослідити чутливість розв'язку задачі планування дій виробника споживчої продукції. Ієрархія складається з декількох рівнів: актори (компанія, торговці, конкуренти), їх цілі, політики (підвищити взаємозв'язки з торговцями, завершити випуск деяких видів продукції, пропонувати стимули торговцям в формі премій, раціоналізувати процедуру розрахунків), сценарії (гнучка бесфактурна система, жорстка бесфактурна система, статус-кво).

До розділу 6

1. Дайте означення ризику.
2. Що таке ситуаційний ризик?
3. Що таке ризик суб'єктивності експертної інформації?

4. Наведіть постановки задач оцінювання ситуаційних ризиків і ризику суб'єктивності експертної інформації.
5. Опишіть метод BOCR MMAI.
6. Яким чином визначаються ваги якостей доходів, витрат, можливостей та ризиків в BOCR MMAI?
7. Якими є показники ризику суб'єктивності при точкових оцінках експертів?
8. Якими є показники ризику суб'єктивності при інтервальних/нечітких оцінках експертів?

Задачі

1. Оцінити ситуаційні ризики в задачі визначення відносних ваг бізнес-договорів.
2. Оцінити ситуаційні ризики в задачі визначення долі ринку компанії.
3. Оцінити ситуаційні ризики в задачі вибору постачальника.
4. Оцінити ситуаційні ризики в задачі прогнозування перспектив використання синтетичного палива для транспортування.
5. Оцінити ситуаційні ризики в задачі вибору оптимальних моделей альянсів між банками і страховими компаніями.
6. Оцінити ситуаційні ризики в задачі вибору системи інформаційного забезпечення підприємства.
7. Оцінити ситуаційні ризики в задачі вибору переправи через річку Дніпро в місті Києві.

До розділу 7

1. Що таке сценарій? Які існують типи сценаріїв?
2. Опишіть прямий і зворотний процеси побудови сценаріїв.
3. Опишіть алгоритм побудови і оцінювання сценаріїв за допомогою MMAI.

Додаток Б

Початкові дані і результати розрахунків для задачі багатокритеріального групового оцінювання інноваційних об’єктів із застосуванням нечітких оцінок експертів

В табл. Б.1–Б.16 наведені оцінки шістнадцяти експертів для об’єктів O_1 – O_4 за показниками ринкової конкурентоспроможності, перспективності ринкового попиту, технологічної складності виробництва і економічної ефективності збуту, надані в семиточковій шкалі S [1].

Таблиця Б.1. Показник K_{11} ринкової конкурентоспроможності виробу O_1

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,05	0,15	0,15	0,15	0,1	0,2	0,2	0,15
2	0,1	0,35	0,2	0,25	0,45	0,35	0,25	0,35
3	0,25	0,65	0,45	0,45	0,55	0,65	0,4	0,45
4	0,45	0,45	0,5	0,55	0,5	0,55	0,55	0,6
5	0,35	0,35	0,35	0,5	0,25	0,45	0,5	0,75
6	0,15	0,25	0,25	0,35	0,15	0,35	0,35	0,25
7	0,05	0,1	0,1	0,25	0,05	0,25	0,15	0,15

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,2	0,15	0,2	0,65	0,35	0,4	0,4	0,25
2	0,4	0,45	0,25	0,85	0,55	0, 5	0,55	0,65
3	0,65	0,75	0,55	0,75	0,85	0,8	0,85	0,95
4	0,6	0,65	0,7	0,7	0,75	0,75	0,8	0,85
5	0,45	0,35	0,35	0,25	0,6	0,55	0,55	0,65
6	0,25	0,25	0,15	0,15	0,35	0,25	0,25	0,45
7	0,1	0,1	0,1	0,1	0,2	0,15	0,1	0,25

Таблиця Б.2. Показник K_{12} перспективності ринкового попиту виробу O_1

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,05	0,1	0,15	0,1	0,05	0,15	0,15
2	0,25	0,15	0,15	0,2	0,45	0,35	0,25	0,3
3	0,55	0,55	0,5	0,45	0,55	0,65	0,55	0,45
4	0,45	0,65	0,55	0,55	0,5	0,55	0,45	0,55
5	0,25	0,25	0,25	0,35	0,45	0,5	0,4	0,45
6	0,1	0,15	0,15	0,1	0,25	0,25	0,15	0,25
7	0,05	0,1	0,05	0,05	0,1	0,1	0,05	0,15

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,25	0,15	0,05	0,25	0,35	0,3	0,4	0,25
2	0,35	0,35	0,15	0,3	0,45	0,35	0,55	0,35
3	0,45	0,55	0,35	0,55	0,75	0,65	0,65	0,55
4	0,65	0,45	0,45	0,5	0,65	0,6	0,8	0,95
5	0,35	0,35	0,25	0,35	0,55	0,4	0,65	0,75
6	0,15	0,25	0,15	0,25	0,25	0,15	0,5	0,35
7	0,1	0,1	0,1	0,15	0,1	0,05	0,1	0,15

Таблиця Б.3. Показник K_{13} технологічної складності виробництва O_1

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,05	0,1	0,15	0,1	0,1	0,15	0,15
2	0,15	0,1	0,2	0,2	0,25	0,15	0,25	0,2
3	0,2	0,15	0,25	0,25	0,3	0,35	0,35	0,35

Продовж. табл. Б.3

4	0,35	0,45	0,35	0,55	0,5	0,55	0,65	0,55
5	0,45	0,55	0,45	0,6	0,55	0,5	0,55	0,65
6	0,35	0,15	0,2	0,35	0,25	0,45	0,35	0,25
7	0,05	0,1	0,1	0,1	0,1	0,25	0,1	0,15

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,25	0,15	0,2	0,25	0,25	0,15	0,2	0,05
2	0,3	0,2	0,25	0,35	0,35	0,2	0,4	0,2
3	0,35	0,25	0,3	0,45	0,4	0,35	0,5	0,45
4	0,65	0,65	0,55	0,5	0,75	0,45	0,7	0,65
5	0,55	0,45	0,6	0,55	0,6	0,55	0,6	0,75
6	0,25	0,25	0,15	0,35	0,35	0,25	0,3	0,35
7	0,15	0,15	0,1	0,25	0,2	0,15	0,2	0,25

Таблиця Б.4. Показник K_{14} економічної ефективності збуту виробу O_1

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,15	0,2	0,25	0,1	0,3	0,2	0,25
2	0,15	0,2	0,25	0,35	0,15	0,35	0,25	0,3
3	0,35	0,65	0,45	0,45	0,35	0,65	0,45	0,35
4	0,45	0,45	0,55	0,35	0,55	0,55	0,5	0,45
5	0,25	0,35	0,35	0,25	0,35	0,45	0,45	0,25
6	0,15	0,15	0,25	0,15	0,25	0,35	0,3	0,15
7	0,1	0,1	0,15	0,05	0,15	0,3	0,2	0,1

Продовж. табл. Б.4

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,25	0,15	0,15	0,35	0,25	0,15	0,25	0,45
2	0,35	0,45	0,35	0,45	0,45	0,25	0,35	0,6
3	0,45	0,75	0,65	0,55	0,65	0,55	0,55	0,75
4	0,55	0,65	0,75	0,65	0,75	0,75	0,65	0,65
5	0,35	0,45	0,45	0,35	0,45	0,35	0,35	0,55
6	0,25	0,35	0,35	0,25	0,35	0,15	0,25	0,45
7	0,15	0,3	0,25	0,15	0,1	0,05	0,1	0,35

Таблиця Б.5. Показник K_{21} ринкової конкурентоспроможності виробу O_2

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,15	0,1	0,05	0,1	0,2	0,2	0,15
2	0,15	0,2	0,25	0,1	0,35	0,35	0,25	0,25
3	0,25	0,65	0,35	0,15	0,55	0,65	0,45	0,35
4	0,45	0,55	0,5	0,55	0,75	0,85	0,75	0,55
5	0,5	0,4	0,25	0,65	0,55	0,65	0,55	0,75
6	0,15	0,1	0,1	0,35	0,25	0,15	0,25	0,15
7	0,1	0,05	0,05	0,05	0,1	0,05	0,15	0,05

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,2	0,1	0,2	0,2	0,25	0,4	0,4	0,15
2	0,25	0,3	0,25	0,3	0,45	0, 5	0,55	0,45
3	0,55	0,55	0,55	0,65	0,65	0,8	0,85	0,95
4	0,85	0,85	0,7	0,75	0,85	0,75	0,75	0,75

Продовж. табл. Б.5

5	0,45	0,35	0,35	0,55	0,45	0,65	0,45	0,55
6	0,25	0,2	0,15	0,15	0,25	0,15	0,15	0,25
7	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,05	0,05	0,15

Таблиця Б.6. Показник K_{22} перспективності ринкового попиту виробу O_2

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,15	0,1	0,05	0,1	0,2	0,15	0,1
2	0,15	0,25	0,2	0,2	0,45	0,35	0,25	0,35
3	0,25	0,65	0,35	0,25	0,55	0,65	0,4	0,45
4	0,45	0,55	0,65	0,55	0,65	0,75	0,65	0,65
5	0,55	0,35	0,35	0,65	0,75	0,8	0,75	0,75
6	0,15	0,1	0,2	0,35	0,15	0,25	0,15	0,15
7	0,05	0,05	0,1	0,1	0,05	0,1	0,1	0,05

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,2	0,1	0,2	0,05	0,05	0,1	0,2	0,1
2	0,4	0,35	0,25	0,1	0,1	0,2	0,35	0,2
3	0,65	0,65	0,55	0,25	0,2	0,4	0,45	0,55
4	0,6	0,75	0,7	0,65	0,75	0,75	0,85	0,85
5	0,25	0,8	0,35	0,75	0,3	0,65	0,55	0,65
6	0,15	0,15	0,15	0,1	0,1	0,15	0,1	0,25
7	0,05	0,05	0,1	0,05	0,05	0,1	0,05	0,15

Таблиця Б.7. Показник K_{23} технологічної складності виробництва O_2

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,25	0,05	0,15	0,1	0,25	0,2	0,15
2	0,15	0,35	0,1	0,2	0,45	0,35	0,25	0,35
3	0,45	0,6	0,55	0,45	0,55	0,45	0,4	0,45
4	0,65	0,65	0,75	0,75	0,65	0,75	0,55	0,65
5	0,75	0,85	0,85	0,65	0,85	0,8	0,75	0,85
6	0,55	0,25	0,45	0,45	0,35	0,45	0,35	0,45
7	0,35	0,15	0,25	0,3	0,1	0,25	0,3	0,35

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,2	0,25	0,2	0,1	0,2	0,05	0,1	0,2
2	0,25	0,4	0,25	0,2	0,35	0,15	0,2	0,35
3	0,65	0,55	0,55	0,35	0,45	0,25	0,55	0,45
4	0,75	0,85	0,7	0,65	0,75	0,65	0,85	0,85
5	0,8	0,65	0,65	0,85	0,95	0,75	0,65	0,55
6	0,55	0,25	0,35	0,5	0,25	0,1	0,25	0,1
7	0,35	0,15	0,2	0,4	0,15	0,05	0,1	0,05

Таблиця Б.8. Показник K_{24} економічної ефективності збуту виробу O_2

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,3	0,1	0,25	0,3	0,2	0,1	0,1
2	0,15	0,45	0,2	0,35	0,45	0,35	0,2	0,15
3	0,25	0,65	0,6	0,45	0,55	0,65	0,35	0,45

Продовж. табл. Б.8

4	0,65	0,45	0,55	0,6	0,65	0,55	0,55	0,6
5	0,45	0,35	0,45	0,65	0,7	0,45	0,45	0,65
6	0,1	0,15	0,2	0,35	0,25	0,25	0,15	0,15
7	0,05	0,1	0,15	0,25	0,1	0,2	0,1	0,05

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,35	0,25	0,1	0,25	0,35	0,4	0,2	0,15
2	0,45	0,45	0,25	0,45	0,55	0, 5	0,45	0,35
3	0,65	0,55	0,55	0,75	0,85	0,8	0,75	0,55
4	0,6	0,75	0,7	0,7	0,75	0,75	0,65	0,75
5	0,35	0,25	0,35	0,35	0,65	0,55	0,5	0,65
6	0,25	0,15	0,25	0,2	0,35	0,35	0,25	0,55
7	0,1	0,05	0,15	0,05	0,2	0,15	0,15	0,25

Таблиця Б.9. Показник K_{31} ринкової конкурентоспроможності виробу O_3

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,05	0,15	0,1	0,25	0,3	0,15	0,25	0,05
2	0,1	0,2	0,25	0,2	0,35	0,25	0,35	0,15
3	0,15	0,35	0,35	0,35	0,45	0,35	0,45	0,25
4	0,35	0,45	0,45	0,4	0,55	0,45	0,5	0,35
5	0,45	0,65	0,55	0,55	0,65	0,55	0,6	0,45
6	0,15	0,45	0,35	0,25	0,25	0,35	0,35	0,35
7	0,05	0,35	0,25	0,1	0,1	0,25	0,2	0,25

Продовж. табл. Б.9

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,15	0,15	0,2	0,2	0,25	0,35	0,4	0,15
2	0,25	0,25	0,25	0,4	0,45	0,45	0,45	0,35
3	0,3	0,35	0,25	0,55	0,55	0,55	0,5	0,45
4	0,45	0,45	0,55	0,65	0,65	0,6	0,65	0,6
5	0,35	0,55	0,5	0,75	0,75	0,65	0,6	0,75
6	0,25	0,3	0,35	0,55	0,45	0,35	0,45	0,35
7	0,15	0,25	0,3	0,35	0,3	0,15	0,25	0,15

Таблиця Б.10. Показник K_{32} перспективності ринкового попиту O_3

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,05	0,15	0,05	0,15	0,35	0,2	0,1	0,1
2	0,15	0,25	0,2	0,2	0,45	0,25	0,15	0,15
3	0,25	0,45	0,45	0,25	0,5	0,65	0,35	0,35
4	0,45	0,65	0,75	0,45	0,55	0,75	0,55	0,65
5	0,55	0,45	0,65	0,65	0,75	0,8	0,75	0,85
6	0,15	0,25	0,4	0,45	0,45	0,65	0,35	0,65
7	0,05	0,15	0,25	0,2	0,35	0,35	0,25	0,35

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,1	0,25	0,15	0,15	0,05	0,2	0,15	0,1
2	0,25	0,35	0,25	0,2	0,1	0,35	0,25	0,2
3	0,45	0,45	0,45	0,35	0,25	0,45	0,45	0,35
4	0,75	0,65	0,55	0,65	0,75	0,5	0,65	0,55

Продовж. табл. Б.10

5	0,65	0,75	0,65	0,55	0,35	0,55	0,85	0,65
6	0,45	0,25	0,4	0,1	0,2	0,35	0,45	0,35
7	0,25	0,15	0,35	0,05	0,15	0,2	0,35	0,15

Таблиця Б.11. Показник K_{33} технологічної складності виробництва O_3

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,15	0,15	0,15	0,1	0,25	0,2	0,15
2	0,15	0,35	0,25	0,2	0,45	0,35	0,25	0,35
3	0,35	0,45	0,25	0,25	0,55	0,45	0,35	0,45
4	0,45	0,55	0,45	0,45	0,65	0,65	0,65	0,65
5	0,55	0,75	0,75	0,65	0,85	0,8	0,55	0,85
6	0,6	0,65	0,45	0,35	0,45	0,55	0,25	0,65
7	0,35	0,45	0,25	0,25	0,1	0,35	0,15	0,45

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,25	0,05	0,2	0,1	0,25	0,05	0,1	0,2
2	0,35	0,15	0,25	0,2	0,35	0,1	0,3	0,35
3	0,55	0,35	0,45	0,35	0,45	0,25	0,45	0,45
4	0,75	0,55	0,65	0,55	0,65	0,55	0,65	0,65
5	0,85	0,6	0,75	0,75	0,85	0,45	0,6	0,75
6	0,65	0,65	0,45	0,45	0,45	0,25	0,35	0,45
7	0,35	0,45	0,3	0,2	0,35	0,15	0,2	0,25

Таблиця Б.12. Показник K_{34} економічної ефективності збуту виробу O_3

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,1	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,1
2	0,15	0,25	0,2	0,2	0,25	0,2	0,15	0,15
3	0,25	0,45	0,4	0,45	0,55	0,35	0,35	0,25
4	0,55	0,55	0,45	0,65	0,65	0,45	0,75	0,75
5	0,65	0,65	0,55	0,6	0,5	0,55	0,55	0,45
6	0,4	0,35	0,2	0,35	0,35	0,25	0,35	0,25
7	0,25	0,15	0,05	0,1	0,2	0,15	0,2	0,05

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,15	0,1	0,1	0,25	0,25	0,4	0,2	0,1
2	0,25	0,45	0,25	0,45	0,35	0,45	0,35	0,35
3	0,45	0,55	0,45	0,55	0,45	0,55	0,65	0,55
4	0,55	0,65	0,65	0,65	0,55	0,65	0,85	0,75
5	0,65	0,75	0,7	0,75	0,65	0,75	0,65	0,55
6	0,35	0,45	0,35	0,35	0,45	0,55	0,45	0,25
7	0,2	0,35	0,15	0,25	0,2	0,25	0,25	0,15

Таблиця Б.13. Показник K_{41} ринкової конкурентоспроможності виробу O_4

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,2	0,2	0,25
2	0,15	0,25	0,25	0,25	0,25	0,35	0,25	0,35
3	0,35	0,35	0,3	0,35	0,45	0,25	0,35	0,45

Продовж. табл. Б.13

4	0,45	0,45	0,35	0,45	0,5	0,55	0,55	0,6
5	0,35	0,55	0,45	0,55	0,55	0,5	0,55	0,75
6	0,25	0,65	0,3	0,25	0,65	0,65	0,4	0,45
7	0,2	0,35	0,2	0,2	0,4	0,35	0,25	0,15

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,2	0,15	0,2	0,25	0,2	0,35	0,3	0,25
2	0,4	0,25	0,25	0,35	0,35	0,45	0,45	0,45
3	0,25	0,35	0,15	0,45	0,45	0,55	0,55	0,55
4	0,45	0,45	0,7	0,55	0,55	0,65	0,65	0,85
5	0,55	0,55	0,55	0,65	0,65	0,6	0,75	0,65
6	0,65	0,75	0,35	0,55	0,75	0,55	0,65	0,45
7	0,45	0,4	0,15	0,3	0,45	0,35	0,45	0,25

Таблиця Б.14. Показник K_{42} економічної ефективності збуту виробу O_4

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,2	0,2	0,15
2	0,25	0,45	0,2	0,35	0,45	0,35	0,25	0,35
3	0,35	0,55	0,3	0,55	0,55	0,45	0,4	0,45
4	0,45	0,45	0,5	0,5	0,5	0,5	0,55	0,6
5	0,55	0,35	0,45	0,6	0,55	0,55	0,55	0,75
6	0,35	0,25	0,2	0,75	0,35	0,65	0,35	0,25
7	0,25	0,15	0,1	0,35	0,2	0,35	0,15	0,15

Продовж. табл. Б.14

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,2	0,15	0,2	0,25	0,35	0,4	0,4	0,25
2	0,4	0,35	0,25	0,45	0,55	0, 5	0,55	0,45
3	0,5	0,55	0,45	0,55	0,65	0,6	0,65	0,55
4	0,55	0,65	0,6	0,65	0,75	0,65	0,75	0,65
5	0,65	0,75	0,55	0,75	0,6	0,55	0,55	0,75
6	0,75	0,45	0,35	0,35	0,35	0,45	0,45	0,85
7	0,35	0,3	0,25	0,3	0,2	0,25	0,35	0,45

Таблиця Б.15. Показник K_{43} економічної ефективності збуту виробу O_4

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,2	0,2	0,15
2	0,15	0,25	0,2	0,25	0,25	0,25	0,35	0,25
3	0,25	0,35	0,3	0,35	0,55	0,35	0,4	0,45
4	0,45	0,45	0,45	0,5	0,5	0,45	0,55	0,5
5	0,35	0,35	0,4	0,55	0,55	0,5	0,55	0,65
6	0,15	0,25	0,25	0,45	0,25	0,65	0,35	0,4
7	0,1	0,15	0,15	0,35	0,1	0,35	0,15	0,25

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,2	0,15	0,2	0,05	0,25	0,2	0,4	0,25
2	0,25	0,25	0,15	0,15	0,35	0,25	0,25	0,45
3	0,5	0,45	0,45	0,45	0,65	0,35	0,65	0,65
4	0,65	0,65	0,7	0,65	0,75	0,45	0,5	0,75

Продовж. табл. Б.15

5	0,45	0,75	0,55	0,55	0,85	0,55	0,45	0,55
6	0,25	0,35	0,35	0,35	0,55	0,65	0,35	0,35
7	0,1	0,25	0,25	0,15	0,3	0,25	0,1	0,25

Таблиця Б.16. Показник K_{44} економічної ефективності збуту виробу O_4

S	Оцінки							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0,1	0,15	0,1	0,15	0,1	0,2	0,2	0,15
2	0,15	0,25	0,2	0,35	0,25	0,25	0,35	0,25
3	0,25	0,65	0,3	0,45	0,55	0,45	0,4	0,45
4	0,45	0,45	0,5	0,5	0,5	0,5	0,65	0,55
5	0,35	0,35	0,45	0,45	0,55	0,6	0,45	0,75
6	0,15	0,25	0,2	0,35	0,35	0,45	0,35	0,45
7	0,1	0,15	0,15	0,2	0,1	0,25	0,25	0,3

S	Оцінки							
	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0,2	0,15	0,2	0,15	0,25	0,2	0,4	0,25
2	0,25	0,25	0,35	0,25	0,35	0,25	0,25	0,45
3	0,55	0,75	0,55	0,35	0,45	0,55	0,65	0,55
4	0,65	0,55	0,75	0,65	0,55	0,75	0,7	0,65
5	0,45	0,35	0,65	0,45	0,45	0,55	0,55	0,6
6	0,35	0,25	0,45	0,25	0,25	0,45	0,35	0,45
7	0,2	0,15	0,35	0,1	0,2	0,35	0,2	0,25

В табл. Б.17–Б.32 наведено локальні нечіткі ваги об’єктів O_1 – O_4 за показниками ринкової конкурентоспроможності K_1, перспективності ринкового попиту K_2, технологічної складності виробництва K_3 і економічної ефективності збуту K_4, отримані за оцінками шістнадцяти експертів при застосуванні ММАІ обробки нечіткої експертної інформації.

Таблиця Б.17. Локальні нечіткі ваги об’єктів за критеріями на основі оцінок експерта 1

Об’єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.125; 0.125; 0.167]	[0.045; 0.053; 0.069]	[0.091; 0.167; 0.185]	[0.143; 0.167; 0.167]
O_2	[0.333; 0.375; 0.375]	[0.226; 0.316; 0.412]	[0.182; 0.250; 0.370]	[0.143; 0.167; 0.250]
O_3	[0.333; 0.375; 0.375]	[0.226; 0.316; 0.412]	[0.455; 0.500; 0.556]	[0.429; 0.500; 0.500]
O_4	[0.125; 0.125; 0.167]	[0.271; 0.316; 0.412]	[0.091; 0.083; 0.111]	[0.143; 0.167; 0.250]

Таблиця Б.18. Локальні нечіткі ваги об’єктів за критеріями на основі оцінок експерта 2

Об’єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.057; 0.071; 0.096]	[0.333; 0.375; 0.375]	[0.200; 0.222; 0.429]	[0.112; 0.125; 0.156]
O_2	[0.057; 0.071; 0.096]	[0.125; 0.125; 0.167]	[0.100; 0.222; 0.429]	[0.112; 0.125; 0.125]
O_3	[0.286; 0.357; 0.577]	[0.333; 0.375; 0.375]	[0.300; 0.444; 0.444]	[0.561; 0.625; 0.625]
O_4	[0.343; 0.500; 0.577]	[0.125; 0.125; 0.167]	[0.100; 0.111; 0.143]	[0.112; 0.125; 0.208]

Таблиця Б.19. Локальні нечіткі ваги об'єктів за критеріями на основі оцінок експерта 3

Об'єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.094; 0.131; 0.167]	[0.091; 0.091; 0.118]	[0.143; 0.300; 0.333]	[0.130; 0.130; 0.182]
O_2	[0.094; 0.131; 0.167]	[0.167; 0.182; 0.235]	[0.286; 0.300; 0.333]	[0.077; 0.087; 0.091]
O_3	[0.281; 0.391; 0.500]	[0.333; 0.364; 0.364]	[0.286; 0.300; 0.333]	[0.462; 0.522; 0.545]
O_4	[0.281; 0.391; 0.500]	[0.333; 0.364; 0.364]	[0.100; 0.100; 0.167]	[0.154; 0.261; 0.364]

Таблиця Б.20. Локальні нечіткі ваги об'єктів за критеріями на основі оцінок експерта 4

Об'єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.100; 0.100; 0.144]	[0.040; 0.040; 0.062]	[0.200; 0.300; 0.400]	[0.051; 0.077; 0.150]
O_2	[0.286; 0.300; 0.300]	[0.160; 0.160; 0.187]	[0.074; 0.100; 0.148]	[0.205; 0.462; 0.600]
O_3	[0.286; 0.300; 0.300]	[0.160; 0.160; 0.250]	[0.200; 0.300; 0.400]	[0.154; 0.231; 0.600]
O_4	[0.286; 0.300; 0.300]	[0.529; 0.640; 0.640]	[0.200; 0.300; 0.400]	[0.103; 0.231; 0.600]

Таблиця Б.21. Локальні нечіткі ваги об’єктів за критеріями на основі оцінок експерта 5

Об’єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.060; 0.063; 0.063]	[0.051; 0.071; 0.115]	[0.250; 0.286; 0.286]	[0.097; 0.100; 0.125]
O_2	[0.104; 0.104; 0.134]	[0.205; 0.357; 0.462]	[0.250; 0.286; 0.286]	[0.387; 0.500; 0.500]
O_3	[0.269; 0.313; 0.313]	[0.205; 0.357; 0.462]	[0.250; 0.286; 0.286]	[0.097; 0.100; 0.167]
O_4	[0.521; 0.521; 0.537]	[0.205; 0.214; 0.462]	[0.143; 0.143; 0.250]	[0.194; 0.300; 0.500]

Таблиця Б.22. Локальні нечіткі ваги об’єктів за критеріями на основі оцінок експерта 6

Об’єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.063; 0.063; 0.067]	[0.038; 0.038; 0.059]	[0.063; 0.063; 0.091]	[0.063; 0.080; 0.111]
O_2	[0.104; 0.104; 0.133]	[0.162; 0.192; 0.235]	[0.154; 0.188; 0.273]	[0.063; 0.080; 0.111]
O_3	[0.267; 0.313; 0.313]	[0.192; 0.192; 0.265]	[0.154; 0.188; 0.273]	[0.250; 0.280; 0.444]
O_4	[0.521; 0.521; 0.533]	[0.486; 0.577; 0.577]	[0.462; 0.563; 0.563]	[0.375; 0.560; 0.667]

Таблиця Б.23. Локальні нечіткі ваги об’єктів за критеріями на основі оцінок експерта 7

Об’єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.200; 0.200; 0.250]	[0.053; 0.053; 0.063]	[0.118; 0.118; 0.167]	[0.250; 0.250; 0.250]
O_2	[0.200; 0.200; 0.250]	[0.313; 0.316; 0.316]	[0.286; 0.353; 0.353]	[0.250; 0.250; 0.250]
O_3	[0.250; 0.400; 0.400]	[0.313; 0.316; 0.316]	[0.143; 0.176; 0.333]	[0.250; 0.250; 0.250]
O_4	[0.200; 0.200; 0.250]	[0.313; 0.316; 0.316]	[0.286; 0.353; 0.353]	[0.250; 0.250; 0.250]

Таблиця Б.24. Локальні нечіткі ваги об’єктів за критеріями на основі оцінок експерта 8

Об’єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.205; 0.250; 0.250]	[0.100; 0.100; 0.125]	[0.250; 0.250; 0.250]	[0.094; 0.111; 0.190]
O_2	[0.250; 0.250; 0.250]	[0.200; 0.300; 0.375]	[0. 250; 0.250; 0. 250]	[0.188; 0.333; 0.571]
O_3	[0.250; 0.250; 0.250]	[0.300; 0.300; 0.375]	[0. 250; 0.250; 0. 250]	[0.094; 0.111; 0.190]
O_4	[0.250; 0.250; 0.250]	[0.200; 0.300; 0.375]	[0. 250; 0.250; 0. 250]	[0.281; 0.444; 0.571]

Таблиця Б.25. Локальні нечіткі ваги об'єктів за критеріями на основі оцінок експерта 9

Об'єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.067; 0.067; 0.097]	[0.076; 0.105; 0.126]	[0.091; 0.129; 0.222]	[0.120; 0.189; 0.189]
O_2	[0.101; 0.133; 0.169]	[0.053; 0.053; 0.084]	[0.273; 0.387; 0.444]	[0.095; 0.095; 0.125]
O_3	[0.101; 0.133; 0.169]	[0.152; 0.211; 0.253]	[0.364; 0.387; 0.444]	[0.480; 0.568; 0.568]
O_4	[0.609; 0.667; 0.677]	[0.532; 0.632; 0.758]	[0.091; 0.097; 0.111]	[0.189; 0.189; 0.250]

Таблиця Б.26. Локальні нечіткі ваги об'єктів за критеріями на основі оцінок експерта 10

Об'єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.048; 0.048; 0.056]	[0.053; 0.053; 0.063]	[0.091; 0.091; 0.111]	[0.091; 0.091; 0.111]
O_2	[0.095; 0.095; 0.111]	[0.313; 0.316; 0.316]	[0.091; 0.091; 0.139]	[0.211; 0.273; 0.278]
O_3	[0.278; 0.286; 0.286]	[0.313; 0.316; 0.316]	[0.513; 0.545; 0.556]	[0.526; 0.545; 0.556]
O_4	[0.556; 0.571; 0.571]	[0.313; 0.316; 0.316]	[0.205; 0.273; 0.278]	[0.091; 0.091; 0.111]

Таблиця Б.27. Локальні нечіткі ваги об'єктів за критеріями на основі оцінок експерта 11

Об'єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.167; 0.167; 0.250]	[0.167; 0.167; 0.200]	[0.250; 0.333; 0.333]	[0.143; 0.143; 0.167]
O_2	[0.167; 0.167; 0.250]	[0.167; 0.167; 0.200]	[0.167; 0.167; 0.250]	[0.143; 0.143; 0.167]
O_3	[0.250; 0.333; 0.333]	[0.400; 0.500; 0.500]	[0.250; 0.333; 0.333]	[0.429; 0.571; 0.571]
O_4	[0.250; 0.333; 0.333]	[0.167; 0.167; 0.200]	[0.167; 0.167; 0.250]	[0.143; 0.143; 0.333]

Таблиця Б.28. Локальні нечіткі ваги об'єктів за критеріями на основі оцінок експерта 12

Об'єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.043; 0.051; 0.051]	[0.056; 0.062; 0.092]	[0.250; 0.286; 0.286]	[0.111; 0.182; 0.250]
O_2	[0.136; 0.136; 0.191]	[0.278; 0.375; 0.462]	[0.250; 0.286; 0.286]	[0.091; 0.091; 0.125]
O_3	[0.383; 0.407; 0.407]	[0.111; 0.187; 0.369]	[0.250; 0.286; 0.286]	[0.444; 0.545; 0.545]
O_4	[0.383; 0.407; 0.407]	[0.278; 0.375; 0.462]	[0.143; 0.143; 0.250]	[0.182; 0.182; 0.250]

Таблиця Б.29. Локальні нечіткі ваги об’єктів за критеріями на основі оцінок експерта 13

Об’єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.052; 0.053; 0.067]	[0.143; 0.143; 0.200]	[0.100; 0.100; 0.143]	[0.114; 0.182; 0.270]
O_2	[0.104; 0.105; 0.152]	[0.143; 0.286; 0.400]	[0.286; 0.300; 0.300]	[0.091; 0.091; 0.108]
O_3	[0.235; 0.316; 0.337]	[0.143; 0.286; 0.400]	[0.286; 0.300; 0.300]	[0.455; 0.545; 0.545]
O_4	[0.470; 0.526; 0.606]	[0.286; 0.286; 0.400]	[0.286; 0.300; 0.300]	[0.182; 0.182; 0.270]

Таблиця Б.30. Локальні нечіткі ваги об’єктів за критеріями на основі оцінок експерта 14

Об’єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.083; 0.083; 0.100]	[0.077; 0.077; 0.111]	[0.123; 0.182; 0.303]	[0.111; 0.194; 0.194]
O_2	[0.083; 0.083; 0.100]	[0.182; 0.231; 0.444]	[0.098; 0.182; 0.202]	[0.097; 0.097; 0.125]
O_3	[0.417; 0.500; 0.500]	[0.364; 0.462; 0.462]	[0.091; 0.091; 0.121]	[0.444; 0.484; 0.500]
O_4	[0.250; 0.333; 0.500]	[0.182; 0.231; 0.231]	[0.492; 0.545; 0.606]	[0.222; 0.242; 0.333]

Таблиця Б.31. Локальні нечіткі ваги об'єктів за критеріями на основі оцінок експерта 15

Об'єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.077; 0.077; 0.091]	[0.167; 0.167; 0.200]	[0.300; 0.308; 0.333]	[0.286; 0.300; 0.300]
O_2	[0.070; 0.077; 0.091]	[0.167; 0.167; 0.400]	[0.200; 0.308; 0.333]	[0.100; 0.100; 0.143]
O_3	[0.273; 0.308; 0.308]	[0.333; 0.500; 0.500]	[0.300; 0.308; 0.333]	[0.286; 0.300; 0.300]
O_4	[0.538; 0.538; 0.545]	[0.167; 0.167; 0.200]	[0.077; 0.077; 0.111]	[0.286; 0.300; 0.300]

Таблиця Б.32. Локальні нечіткі ваги об'єктів за критеріями на основі оцінок експерта 16

Об'єкт	Вага			
	K_1	K_2	K_3	K_4
O_1	[0.091; 0.091; 0.105]	[0.091; 0.091; 0.111]	[0.167; 0.286; 0.400]	[0.077; 0.077; 0.111]
O_2	[0.091; 0.091; 0.105]	[0.091; 0.091; 0.111]	[0.143; 0.143; 0.200]	[0.300; 0.308; 0.333]
O_3	[0.500; 0.545; 0.545]	[0.211; 0.273; 0.278]	[0.333; 0.429; 0.429]	[0.200; 0.308; 0.333]
O_4	[0.250; 0.273; 0.316]	[0.526; 0.545; 0.556]	[0.143; 0.143; 0.200]	[0.300; 0.308; 0.333]

Додаток В
Початкові дані для задачі виявлення напрямків доцільного використання космічної інформації (КІ) дистанційного зондування землі (ДЗЗ) для геоінформаційних систем (ГІС)

Таблиця В.1. МПП та локальні ваги елементів першого рівня відносно елементу 0.1

0.1	1.1	1.2	Ваги
1.1	1	1/3	0.25
1.2	3	1	0.75

Таблиця В.2. МПП та локальні ваги елементів другого рівня відносно елементу 1.1

1.1	2.1	2.2	2.3	Ваги
2.1	1	1/5	1/7	0.075
2.2	5	1	1/2	0.364
2.3	7	2	1	0.560

Таблиця В.3. МПП та локальні ваги елементів другого рівня відносно елементу 1.2.

1.2	2.1	2.2	2.3	Ваги
2.1	1	1/5	1/2	0.114
2.2	5	1	4	0.669
2.3	2	1/4	1	0.217

Таблиця В.4. МПП та локальні ваги елементів третього рівня відносно елементу 2.1

2.1	3.1	3.2	Ваги
3.1	1	1/3	0.25
3.2	3	1	0.75

Таблиця В.5. МПП та локальні ваги елементів третього рівня відносно елементу 2.2

2.2	3.1	3.2	Ваги
3.1	1	1/2	0.33
3.2	2	1	0.67

Таблиця В.6. МПП та локальні ваги елементів третього рівня відносно елементу 2.3

2.3	3.1	3.2	Ваги
3.1	1	1/2	0.33
3.2	2	1	0.67

Таблиця В.7. МПП та локальні ваги елементів четвертого рівня відносно елементу 3.1

3.1	4.1	4.2	4.3	Ваги
4.1	1	1/5	1/7	0.075
4.2	5	1	1/2	0.364
4.3	7	2	1	0.560

Таблиця В.8. МПП та локальні ваги елементів четвертого рівня відносно елементу 3.2

3.2	4.1	4.2	4.3	Ваги
4.1	1	1/5	1/2	0.121
4.2	5	1	3	0.641
4.3	2	1/3	1	0.238

Таблиця В.9. Ваги елементів п'ятого рівня відносно елементів 4.1, 4.2 та 4.3

	Ваги				
	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5
4.1	0.50	0.25	0.05	0.05	0.15
4.2	0.30	0.20	0.20	0.20	0.10
4.3	0.20	0.40	0.20	0.10	0.10

Додаток Г
Початкові дані і результати розрахунків для задачі вибору пріоритетних заходів вирішення соціальних проблем міста Києва з урахуванням ситуаційних ризиків

Таблиця Г.1. МПП елементів ієрархії доходів та їх ваги

Доходи	Економіч. діяльність	Транспорт	Природне середовище	Соціальна сфера	Інновації	Вага
Економіч. діяльність	1	1	5	2	3	0.328
Транспорт	1	1	4	2	3	0.314
Природне середовище	1/5	1/4	1	1/2	1/2	0.070
Соціальна сфера	1/2	1/2	2	1	3	0.187
Інновації	1/3	1/3	2	1/3	1	0.101

Таблиця Г.2. МПП факторів доходів від економічної діяльності та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на економічну діяльність з точки зору отримання доходів?» (на основі статистичного матеріалу)

Економічна діяльність	Будівельний комплекс	Промисловість	Операц. з нерухом., послуги юр.особам	Фінансова діяльність	Оптова і роздрібна торгівля	Транспорт	Трудовий потенціал	Державне управління	Інновації	Вага
Будівельний комплекс	1	1/3	1/3	1/2	1/6	1/4	1/2	2/3	2	0.045
Промисло-вість	3	1	1	3/2	1/2	3/4	3/2	2	3	0.126

Операції з нерухомістю, послуги юридичним особам	3	1	1	3/2	1/2	3/4	3/2	2	6	0.135
Фінансова діяльність	2	2/3	2/3	1	1/3	1/2	1	4/3	4	0.090
Оптова і роздрібна торгівля	6	2	2	3	1	3/2	3	4	9	0.260
Транспорт	4	4/3	4/3	2	2/3	1	2	8/3	8	0.177
Трудовий потенціал	2	2/3	2/3	1	1/3	1/2	1	4/3	4	0.090
Державне управління	3/2	1/3	1/3	1/2	1/6	1/4	1/2	1	3	0.052
Інновації	1/2	1/3	1/6	1/4	1/9	1/8	1/4	1/3	1	0.026

Таблиця Г.3. МПП факторів доходів від природного середовища та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на природне середовище з точки зору отримання доходів?»

Природне середовище	Водні ресурси	Рекреаційні зони	Відходи	Вага
Водні ресурси	1	1	5	0.466
Рекреаційні зони	1	1	4	0.433
Відходи	1/5	1/4	1	0.101

Таблиця Г.4. МПП факторів доходів від соціальної сфери та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на соціальну сферу з точки зору отримання доходів?» (з використанням статистичного матеріалу)

Соціальна сфера	Освіта	Культура і спорт	Охорона здоров'я	Пенсійне забезпечення і соц.страх	Колективні, громадські та особисті послуги	Готелі та ресторани	Вага
Освіта	1	2	3	3	3/2	4	0.324
Культура і спорт	1/2	1	3/2	3/2	3/4	2	0.162
Охорона здоров'я	1/3	2/3	1	1	1/2	4/3	0.108
Пенсійне забезпечення і соц.страх	1/3	2/3	1	1	1/2	4/3	0.108
Колективні, громадські та особисті послуги	2/3	4/3	2	2	1	8/3	0.216
Готелі та ресторани	1/4	1/2	3/4	3/4	3/8	1	0.082

Таблиця Г.5. МПП факторів доходів від інновацій та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на інновації з точки зору отримання доходів?»

Інновації	Інноваційна діяльність на підприємствах	Інноваційна інфраструктура	Науково-дослідні роботи	Вага
Інноваційна діяльність на підприємствах	1	1	1	0.333
Інноваційна інфраструктура	1	1	1	0.333
Науково-дослідні роботи	1	1	1	0.334

Таблиця Г.6. МПП факторів доходів від інноваційної діяльності на підприємствах та їх ваги

Питання експерту: «Які складові інноваційної діяльності на підприємствах приносять більший дохід?» (на основі статистичного матеріалу)

Інноваційна діяльність на підприємствах	Нові технологічні процеси	Нові види продукції	Товари народного споживання	Маловідходні і ресурсозберігаючі технологічні процеси	Вага
Нові технологічні процеси	1	1/8	1/7	3/2	0.060
Нові види продукції	8	1	3	9	0.587
Товари народного споживання	7	1/3	1	7	0.305
Маловідходні і ресурсозберігаючі технологічні процеси	2/3	1/9	1/7	1	0.048

Таблиця Г.7. МПП елементів ієрархії витрат та їх ваги

Витрати	Економіч. діяльність	Транспорт	Природне середовище	Соціальна сфера	Інновації	Вага
Економіч. діяльність	1	3	1	2	5	0.330
Транспорт	1/3	1	1/3	2/3	5/3	0.110
Природне середовище	1	3	1	2	5	0.330
Соціальна сфера	1/2	3/2	1/2	1	5/2	0.165
Інновації	1/5	3/5	1/5	2/5	1	0.066

Таблиця Г.8. МПП факторів витрат на економічну діяльність та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на економічну діяльність з точки зору необхідних витрат?»

Економічна діяльність	Промисловість	Житлово-комунальне господарство	С/г	Фінансова діяльність	Вага
Промисловість	1	1/7	5	1/3	0.119
Житлово-комунальне господарство	7	1	7	2	0.534
С/г	1/5	1/7	1	1/9	0.041
Фінансова діяльність	3	1/2	9	1	0.306

Таблиця Г.9. МПП факторів витрат на житлово-комунальне господарство та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на житлово-комунальне господарство з точки зору необхідних витрат?»

Житлово-комунальне господарство	Будівництво об'єктів комунального господарства	Тепло- і водо-постачання	Каналізаційна мережа	Санітарна очистка міста	Вага
Будівництво об'єктів комунального господарства	1	2	1/7	1/4	0.088
Тепло- і водо-постачання	1/2	1	1/9	1/3	0.062
Каналізаційна мережа	7	9	1	3	0.611
Санітарна очистка міста	4	3	1/3	1	0.239

Таблиця Г.10. МПП факторів витрат на транспорт та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на транспорт з точки зору необхідних витрат?»

Транспорт	Трамваї	Тролейбуси	Автобуси (мікроавтобуси)	Метрополітен	Вага
Трамваї	1	5/4	7/4	1/4	0.196
Тролейбуси	4/5	1	7/5	1/5	0.126
Автобуси (мікроавтобуси)	4/7	5/7	1	1/7	0.090
Метрополітен	4	5	7	1	0.588

Таблиця Г.11. МПП факторів витрат на природне середовище та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на природне середовище з точки зору необхідних витрат?»

Природне середовище	Водні ресурси	Рекреаційні зони	Відходи	Зелені насадження, лісове господарство	Потенційно-небезпечні та шкідливі виробництва	Вага
Водні ресурси	1	3	1/2	5/2	2	0.225
Рекреаційні зони	1/3	1	1/6	5/6	2/3	0.057
Відходи	2	6	1	5	4	0.535
Зелені насадження, лісове господарство	2/5	6/5	1/5	1	4/5	0.071
Потенційно-небезпечні та шкідливі виробництва	1/2	3/2	1/4	5/4	1	0.112

Таблиця Г.12. МПП факторів витрат на соціальну сферу та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на соціальну сферу з точки зору необхідних витрат?»

Соціальна сфера	Освіта і наука	Охорона здоров'я	Культура і спорт	Пенсійне забезпечення і соц. страх.	Допомога малозабезпеч. і безробітнім	Вага
Освіта і наука	1	1/2	1	1/2	1/2	0.125
Охорона здоров'я	2	1	2	1	1	0.250
Культура і спорт	1	1/2	1	1/2	1/2	0.125
Пенсійне забезпечення і соц. страх.	2	1	2	1	1	0.250
Допомога малозабезпече-ним, безробітним	2	1	2	1	1	0.250

Таблиця Г.13. МПП факторів витрат на інновації та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на інновації з точки зору необхідних витрат?»

Інновації	Промислові підприємства	Науково-технічні роботи	Вага
Промислові підприємства	1	1/2	0.333
Науково-технічні роботи	2	1	0.667

Таблиця Г.14. МПП елементів ієрархії ризиків і загроз та їх ваги

Ризики та загрози	Нестабільність економіки	Виникнення НС	Політична нестабільність	Зростання соціальної напруги	Вага
Нестабільність економіки	1	1/3	7/3	5/3	0.199
Виникнення НС	3	1	7	5	0.597

Політична нестабільність	3/7	1/7	1	5/7	0.085
Зростання соціальної напруги	3/5	1/5	7/5	1	0.119

Таблиця Г.15. МПП факторів ризиків і загроз від нестабільності економіки та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на нестабільність економіки?»

Нестабільність економіки	Зростання вартості енергоносіїв	Недобросовісна конкуренція	Недостатній вплив міської влади на держ. підпр-ва.	Згортання фундаментальних і прикладних досліджень	Несприятлив. інвестиційного клімату	Масовий імпорт товарів	Виникнення НС	Політична нестабільність	Зростання соц. напруги	Вага
Зростання вартості енергоносіїв	1	3	3	5	1	2	1/3	1/2	1/3	0.101
Недобросовісна конкуренція	1/3	1	1	5/3	1/3	2/3	1	1	1/7	0.071
Недостат. вплив міської влади на державні підпр.	1/3	1/5	1	5/3	1/3	2/3	1/7	1/6	1/7	0.029
Згортання фундаментал. і прикладн. дослідж.	1/5	3/5	3/5	1	1/5	2/5	1/9	1/9	1/9	0.022
Несприятливість інвестиц. клімату	1	3	3	5	1	2	1/3	1/2	1/3	0.101
Масовий імпорт товарів	1/2	3/2	3/2	5/2	1/2	1	1/5	1/4	1/5	0.052
Виникнення НС	3	1	7	9	3	5	1	3/2	1	0.216
Політична нестабільність	2	5	6	9	2	4	2/3	1	2/3	0.191
Зростання соц. напруги	3	1	7	9	3	5	1	3/2	1	0.216

Таблиця Г.16. МПП факторів ризиків і загроз від надзвичайних ситуацій та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на виникнення надзвичайних ситуацій?»

Надзвичайні ситуації	Самовільні рубки лісів і зелених насаджень	Значне забруднення джерел водопостачання	Відсутність системності в підтриманні екологічної безпеки	Обмеженість потужностей з переробки та складування відходів	Транспорт	Вага
Самовільні рубки лісів і зелених насаджень	1	2/7	9/7	1/7	5/7	0.052
Значне забруднення джерел водопостачання	7/2	1	9/2	1/2	5/2	0.246
Відсутність системності в підтриманні екологічної безпеки	7/9	2/9	1	1/9	5/9	0.038
Обмеженість потужностей з переробки та складування відходів	7	2	9	1	5	0.586
Транспорт	7/5	2/5	9/5	1/5	1	0.078

Таблиця Г.17. МПП факторів ризиків і загроз на транспорті та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на транспорт з точки зору загроз і ризиків?»

Транспорт	Недостатня підтримка пасажир. транспорту	Нерозвиненість мережі доріг	Вага
Недостатня підтримка пасажир. транспорту	1	4	0.8
Нерозвиненість мережі доріг	1/4	1	0.2

Таблиця Г.18. МПП факторів ризиків і загроз від політичної нестабільності та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на політичну нестабільність?»

Політична нестабільність	Протидія з боку окремих політич. сил	Протидія з боку глав районних адміністр.	Позиція ЗМІ на лобіювання певних інтересів	Вага
Протидія з боку окремих політич. сил	1	1/2	3	0.3
Протидія з боку глав районних адміністр.	2	1	6	0.6
Позиція ЗМІ на лобіювання інтересів	1/3	1/6	1	0.1

Таблиця Г.19. МПП факторів ризиків і загроз від зростання соціальної напруги та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив на зростання соціальної напруги?»

Зростання соціальної напруги	Зростання обсягів і рівня безробіття	Низький рівень доходів широких верств населення	Недоліки системи оплати праці	Недостатність та несвоєчасність фінансування соц. захисту	Невирішеність житлових проблем	Погіршення стану здоров'я населення, розгортання	Вага
Зростання обсягів і рівня безробіття	1	1/5	7/5	3/5	6/5	1/5	0.070
Низький рівень доходів широких верств насел.	5	1	7	3	6	1	0.352
Недоліки системи оплати праці	5/7	1/7	1	3/7	6/7	1/7	0.050
Недостатність та несвоєчасн. фінан-сув. соц.захисту	5/3	1/3	7/3	1	2	1/3	0.117
Невирішеність житлових проблем	5/6	1/6	7/6	1/2	1	1/6	0.059

Погіршення стану здоров'я насел., епідемії	5	1	7	3	6	1	0.352

Таблиця Г.20. МПП елементів першого рівня ієрархії стратегічних факторів та їх ваги

Питання експерту: «Який з факторів має більший вплив при оцінюванні якості рішення?»

Оцінювання якості рішення	Економічний	Безпека	Політичний	Вага
Економічний	1	1/3	4	0.279
Безпека	3	1	5	0.627
Політичний	1/4	1/5	1	0.094

Таблиця Г.21. МПП економічних факторів ієрархії стратегічних факторів та їх ваги

Питання експерту: «Який з підфакторів має більший вплив на економічний фактор?»

Економічний	Зростання	Стабільність	Соціальна орієнтованість	Вага
Зростання	1	2	2	0.50
Стабільність	1/2	1	1	0.25
Соціальна орієнтованість	1/2	1	1	0.25

Таблиця Г.22. МПП факторів безпеки ієрархії стратегічних факторів та їх ваги

Питання експерту: «Який з підфакторів має більший вплив на фактор безпеки?»

Безпека	Регіональна	Загрози для Києва	Вага
Регіональна	1	1/3	0.25
Загрози для Києва	3	1	0.75

Таблиця Г.23. МПП політичних факторів ієрархії стратегічних факторів та їх ваги

Питання експерту: «Який з підфакторів має більший вплив на політичний фактор?»

Політичний	Вітчизняні виборці	Європа і світ	Вага
Вітчизняні виборці	1	2	0.667
Європа і світ	1/2	1	0.333

Оцінювання альтернативних варіантів рішень відносно кожної з контрольних ознак доходів, витрат, загроз та ризиків

Таблиця Г.24. МПП альтернатив відносно доходів від оптової і роздрібної торгівлі

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на доходи від оптової і роздрібної торгівлі?»

Оптова і роздрібна торгівля	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	3	3	3	2	3	0.353
Будівництво другої нитки Головного каналізац. колектора	1/3	1	1	1	2/3	1	0.118
Реконструкція Бортниць-кої станції аерації	1/3	1	1	1	2/3	1	0.118
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1/3	1	1	1	2/3	1	0.118
Реалізація заходів, програми «Турбота»	1/2	3/2	3/2	3/2	1	3/2	0.175
Будівництво корпусу протитуберкульозного диспансеру	1/3	1	1	1	2/3	1	0.118

Таблиця Г.25. МПП альтернатив відносно доходів від освіти

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на доходи від освіти?»

Освіта	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	1	1	1	1	1	1	0.167
Реконструкція Бортницької станції аерації	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1	1	1	1	1	1	0.167
Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою «Турбота»	1	1	1	1	1	1	0.166
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу Київ. міськ. централ. протитуберкульозного диспансеру	1	1	1	1	1	1	0.166

Таблиця Г.26. МПП альтернатив відносно доходів від операцій з нерухомістю, послуг юридичним особам

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на доходи з операцій з нерухомістю, послуг юридичним особам?»

Операції з нерухомістю, послуги юридичним особам	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво другої нитки Головного каналізац. колектора	1	1	1	1	1	1	0.167
Реконструкція Бортницької станції аерації	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1	1	1	1	1	1	0.167
Реалізація заходів, Міської комплексної програми «Турбота»	1	1	1	1	1	1	0.166
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	1	1	1	1	1	1	0.166

Таблиця Г.27. МПП альтернатив відносно доходів від промисловості

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на доходи на промисловість?»

Промисловість	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво другої нитки каналізац. колектора	1	1	1	1	1	1	0.167

Реконструкція Бортниць-кої станції аерації	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1	1	1	1	1	1	0.167
Реалізація заходів, Міської комплексної програми «Турбота»	1	1	1	1	1	1	0.166
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	1	1	1	1	1	1	0.166

Таблиця Г.28. МПП альтернатив відносно витрат на відходи

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на витрати на відходи?»

Відходи	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1/3	1/3	1/9	1	1	0.051
Друга нитка Головного каналізац. колектора	3	1	1	1/3	7	7	0.204
Реконструкція Бортницької станції аерації	3	1	1	1/3	7	7	0.204
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	9	3	3	1	9	9	0.463
Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою «Турбота»	1	1/7	1/7	1/9	1	1	0.039
Лікувально-діагност. корпус Київ. міськ. централ. протитуберку-льозного диспансеру	1	1/7	1/7	1/9	1	1	0.039

Таблиця Г.29. МПП альтернатив відносно витрат на каналізаційну мережу

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на витрати на каналізаційну мережу?»

Каналізаційна мережа	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1/9	1/9	1	1	1	0.046
Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	9	1	1	9	9	9	0.409
Реконструкція Бортницької станції аерації	9	1	1	9	9	9	0.409
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1	1/9	1/9	1	1	1	0.046
Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою «Турбота»	1	1/9	1/9	1	1	1	0.045
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу Київ. міськ. централ. протитуберкульозного диспансеру	1	1/9	1/9	1	1	1	0.045

Таблиця Г.30. МПП альтернатив відносно витрат на фінансову діяльність

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на витрати на фінансову діяльність?»

Фінансова діяльність	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво другої нитки Головного каналізац. колектора	1	1	1	1	1	1	0.167
Реконструкція Бортниць-кої станції аерації	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1	1	1	1	1	1	0.167
Реалізація заходів, Міської комплексної програми «Турбота»	1	1	1	1	1	1	0.166
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	1	1	1	1	1	1	0.166

Таблиця Г.31. МПП альтернатив відносно витрат на метрополітен

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на витрати на метрополітен?»

Метрополітен	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	9	9	9	9	9	0.643
Будівництво другої нитки каналізац. колектора	1/9	1	1	1	1	1	0.071

Реконструкція Бортниць-кої станції аерації	1/9	1	1	1	1	1	0.071
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1/9	1	1	1	1	1	0.071
Реалізація заходів, Міської комплексної програми «Турбота»	1/9	1	1	1	1	1	0.072
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	1/9	1	1	1	1	1	0.072

Таблиця Г.32. МПП альтернатив відносно витрат на науково-технічні роботи

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на витрати на науково-технічні роботи?»

Науково-технічні роботи	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	1	1	1	1	1	1	0.167
Реконструкція Бортницької станції аерації	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1	1	1	1	1	1	0.167
Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою «Турбота»	1	1	1	1	1	1	0.166
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу Київ. міськ. централ. протитуберкульозного диспансеру	1	1	1	1	1	1	0.166

Таблиця Г.33. МПП альтернатив відносно витрат на санітарну очистку міста

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на витрати на санітарну очистку міста?»

Санітарна очистка міста	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1/7	1/7	1/7	1	1	0.042
Друга нитка Головного каналізац. колектора	7	1	1	1	7	7	0.292
Реконструкція Бортницької станції аерації	7	1	1	1	7	7	0.292
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	7	1	1	1	7	7	0.292
Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою «Турбота»	1	1/7	1/7	1/7	1	1	0.042
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу Київ. міськ. централ. протитуберкульозного диспансеру	1	1/7	1/7	1/7	1	1	0.042

Таблиця Г.34. МПП альтернатив відносно витрат на охорону здоров’я

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на витрати на охорону здоров’я?»

Охорона здоров'я	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1/5	1/5	1/5	5/3	1/9	0.039
Будівництво другої нитки Головного каналізац. колектора	5	1	1	1	5/3	1/9	0.097
Реконструкція Бортниць-кої станції аерації	5	1	1	1	5/3	1/9	0.097
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	5	1	1	1	5/3	1/9	0.097
Реалізація заходів, Міської комплексної програми «Турбота»	3	3/5	3/5	3/5	1	1/9	0.062
Будівництво протитуберкульозного диспансеру	9	9	9	9	9	1	0.608

Таблиця Г.35. МПП альтернатив відносно витрат на допомогу малозабезпеченим і безробітним

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на витрати на допомогу малозабезпеченим і безробітнім?»

Допомога малозабезпеченим і безробітнім	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво ліній метрополітену	1	1	1	1	1|9	1	0.072

Будівництво другої нитки Головного каналізац. колектора	1	1	1	1	1|9	1	0.072
Реконструкція Бортниць-кої станції аерації	1	1	1	1	1|9	1	0.071
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1	1	1	1	1|9	1	0.071
Реалізація заходів, Міської комплексної програми «Турбота»	9	9	9	9	1	9	0.643
Будівництво протитуберкульозного диспансеру	1	1	1	1	1|9	1	0.071

Таблиця Г.36. МПП альтернатив відносно збільшення потужностей з переробки і складування відходів

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на збільшення потужностей з переробки та складування відходів?»

Збільшення потужностей з переробки та складування відходів	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1/9	1/9	1/9	1	1	0.033
Будівництво другої нитки Головного каналізац. колектора	9	1	1	1	9	9	0.300
Реконструкція Бортниць-кої станції аерації	9	1	1	1	9	9	0.300
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	9	1	1	1	9	9	0.301
Реалізація заходів, програми «Турбота»	1	1/9	1/9	1/9	1	1	0.033
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	1	1/9	1/9	1/9	1	1	0.033

Таблиця Г.37. МПП альтернатив відносно зменшення забруднення джерел водопостачання

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на зменшення значного забруднення джерел водопостачання?»

Зменшення значного забруднення джерел водопостачання	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1/3	1/3	1/5	1	1	0.071
Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	3	1	1	3/5	3	3	0.214
Реконструкція Бортницької станції аерації	3	1	1	3/5	3	3	0.214
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	5	5/3	5/3	1	5	5	0.357
Реалізація заходів, комплексною програмою «Турбота»	1	1/3	1/3	1/5	1	1	0.071
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу Київ. міськ. централ. протитуберкульозного диспансеру	1	1/3	1/3	1/5	1	1	0.071

Таблиця Г.38. МПП альтернатив відносно покращення стану здоров’я населення, згортання епідемій

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на покращення стану здоров’я населення, згортання епідемій?»

Покращення стану здоров'я населення, згортання епідемій	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1/5	1/5	1/5	1/3	1/7	0.039
Будівництво другої нитки Головного каналізац. колектора	5	1	1	1	5/3	5/7	0.192
Реконструкція Бортницької станції аерації	5	1	1	1	5/3	5/7	0.192
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	5	1	1	1	5/3	5/7	0.192
Реалізація заходів, Міської комплексної програми «Турбота»	3	3/5	3/5	3/5	1	3/7	0.115
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	7	7/5	7/5	7/5	7/3	1	0.270

Таблиця Г.39. МПП альтернатив відносно покращення низького рівня доходів широких верств населення

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на покращення низького рівня доходів широких верств населення?»

Покращення низького рівня доходів широких верств населення	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво ліній метрополітену	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво другої нитки	1	1	1	1	1	1	0.167

Головного каналізац. колектора							
Реконструкція Бортницької станції аерації	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1	1	1	1	1	1	0.167
Реалізація заходів, Міської комплексної програми «Турбота»	1	1	1	1	1	1	0.166
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	1	1	1	1	1	1	0.166

Таблиця Г.40. МПП альтернатив відносно зменшення протидії роботі КМДА з боку глав районних адміністрацій

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на зменшення протидії (роботі КМДА) з боку глав районних адміністрацій?»

Зменшення протидії (роботі КМДА) з боку глав районних адміністрацій	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	1	1	1	1	1	0.167
Друга нитка Головного каналізац. колектора	1	1	1	1	1	1	0.167
Реконструкція Бортницької станції аерації	1	1	1	1	1	1	0.167
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1	1	1	1	1	1	0.167
Реалізація заходів, програмою «Турбота»	1	1	1	1	1	1	0.166
Лікувально-діагностич. корпус Київ. міськ. централ. протитуберкульозного диспансеру	1	1	1	1	1	1	0.166

Таблиця Г.41. МПП альтернатив відносно зменшень НС на транспорті

Питання експерту: «Реалізація якого з варіантів рішень може в більшій мірі вплинути на зменшення НС на транспорті?»

Зменшення НС на транспорті	Будівництво та реконструкція ліній	Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	Реконструкція Бортницької станції аерації	Будівництво двох сміттєпереробних заводів	Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою	Будівництво лікувально-діагностичного корпусу протитуберкульозного диспансеру	Вага
Будівництво та реконструкція ліній метрополітену	1	9	9	9	9	9	0.643
Будівництво другої нитки Головного каналізаційного колектора	1/9	1	1	1	1	1	0.071
Реконструкція Бортницької станції аерації	1/9	1	1	1	1	1	0.071
Будівництво двох сміттєпереробних заводів	1/9	1	1	1	1	1	0.071
Реалізація заходів, передбачених Міською комплексною програмою «Турбота»	1/9	1	1	1	1	1	0.072
Будівництво лікувально-діагностичного корпусу Київ. міськ. централ. протитуберкульозного диспансеру	1/9	1	1	1	1	1	0.072

Додаток Д
Початкові дані і результати розрахунків для задачі побудови і оцінювання сценаріїв розвитку транспортної системи міста Києва

Таблиця Д.1. Матриці парних порівнянь і ваги акторів відносно принципів: а)економічного. б) соціального. в)екологічного. г) всіх принципів

а)

Економічний	КМДА	бізнес	населення	МСГТ	Вага
КМДА	1	3	3	5	0.417
бізнес	1/3	1	1	2	0.250
населення	1/3	1	1	1	0.250
МСГТ	1/5	1/2	1	1	0.083

б)

Соціальний	КМДА	бізнес	населення	МСГТ	Вага
КМДА	1	7	3	3	0.501
бізнес	1/7	1	1/2	1/2	0.071
населення	1/3	2	1	1	0.214
МСГТ	1/3	2	1	1	0.214

в)

Екологічний	КМДА	бізнес	населення	МСГТ	Вага
КМДА	1	1	1	2	0.286
бізнес	1	1	1	2	0.286
населення	1	1	1	2	0.286
МСГТ	1/2	1/2	1/2	1	0.142

Таблиця Д.2. Матриці парних порівнянь цілей і ваги цілей акторів

а) КМДА

КМДА (0.397)	задовол. потреб у трансп. послугах	покращення екологічної ситуац.	повноц. використ. міжнарод. трансп.-географіч. полож.	Локальна вага	Глобальна вага
задовол. потреб у трансп. послугах	1	3	5	0.556	0.221
покращення екологічної ситуац.	1/3	1	5	0.333	0.132
повноц. використ. міжнарод. трансп.-географіч. полож.	1/5	1/5	1	0.111	0.044

б) бізнесу

Бізнес (0.189)	збільшення прибутків	мінімізація ризиків	Локальна вага	Глобальна вага
збільшення прибутків	1	5	0.833	0.157
мінімізація ризиків	1/5	1	0.167	0.032

в) населення

Населення (0.250)	безпека	екологія	швидкість перевезення	комфорт перевезення	Локальна вага	Глобальна вага
безпека	1	3	3	4	0.364	0.091
екологія	1/3	1	1	1	0.233	0.058
швидкість перевезення	1/3	1	1	1	0.233	0.058
комфорт перевезення	1/4	1	1	1	0.170	0.043

г) МСГТ

МСГТ (0.164)	нові можливості для бізнесу	акумулювання знань і ноу-хау	громад. транспорт	інновації	Локальна вага	Глобальна вага
нові можливості для бізнесу	1	1	1	1	0.250	0.041
знання і ноу-хау	1	1	1	1	0.250	0.041
громадський транспорт	1	1	1	1	0.250	0.041
інновації	1	1	1	1	0.250	0.041

Таблиця Д.3. Матриці парних порівнянь цілей та ймовірності сценаріїв відносно цілей акторів

а) задоволення потреб у транспортних послугах

задовол. потреб у трансп. послугах (0.308)	статус-кво	вибіркова реконструкція ТС	комплексна реконструкція ТС	Ймовірність
статус-кво	1	1/4	1/7	0.083
вибіркова реконструкція ТС	4	1	1/3	0.334
комплексна реконструкція ТС	7	3	1	0.583

б) покращення екологічної ситуації

покращ. екологіч. ситуац. (0.265)	статус-кво	вибіркова реконструкція ТС	комплексна реконструкція ТС	Ймовірність
статус-кво	1	1/5	1/7	0.077
вибіркова реконструкція ТС	5	1	1/4	0.385
комплексна реконструкція ТС	7	4	1	0.538

в) збільшення прибутків бізнесу

збільш. прибутків бізнесу (0.219)	статус-кво	вибіркова реконструкція ТС	комплексна реконструкція ТС	Ймовірність
статус-кво	1	1/3	1/3	0.143
вибіркова реконструкція ТС	3	1	1	0.428
комплексна реконструкція ТС	3	1	1	0.429

г) безпека

безпека (0.126)	статус-кво	вибіркова реконструкція ТС	комплексна реконструкція ТС	Ймовірність
статус-кво	1	1/5	1/8	0.072
вибіркова реконструкція ТС	5	1	1/5	0.357
комплексна реконструкція ТС	8	5	1	0.571

д) швидкість перевезення

швидкість перевезення (0.081)	статус-кво	вибіркова реконструкція ТС	комплексна реконструкція ТС	Ймовірність
статус-кво	1	1/5	1/7	0.077
вибіркова реконструкція ТС	5	1	1/4	0.385
комплексна реконструкція ТС	7	4	1	0.538

Таблиця Д.4. Матриці парних порівнянь цілей і ваги цілей акторів

а) КМДА

КМДА (0.530)	зменшення заторів	збільшення провізної спроможності ТС	покращення екологічної ситуації	збільшення доходів до бюджету	міжнародне транспортно-географічне положення	Локальна вага	Глобальна вага
зменшення заторів	1		1/3			0.165	0.087
збільшення провізної спроможності ТС		1	1/3			0.165	0.087
покращення екологічної ситуації	3	3	1	5	7	0.498	0.264
збільшення доходів до бюджету			1/5	1		0.100	0.053
повноцінне використання міжнародного транспортно-географічного положення			1/7		1	0.071	0.038

б) бізнесу

Бізнес (0.076)	збільшення прибутків	мінімізація ризиків	зменш. витрат. пов'язаних із простоями та перепробігами	зменшення енергетичних витрат	Локальна вага	Глобальна вага
збільшення прибутків	1	5	5	5	0.625	0.047
мінімізація ризиків	1/5	1	1	1	0.125	0.010
зменшення витрат. пов'язаних із простоями та перепробігами	1/5	1	1	1	0.125	0.010
зменш енергетич витрат	1/5	1	1	1	0.125	0.010

Список скорочень

МАІ	Метод аналізу ієрархій
ММАІ	Модифікований метод аналізу ієрархій
МПП	Матриця парних порівнянь
ІМПП	Інтервальна матриця парних порівнянь
НМПП	Нечітка матриця парних порівнянь
ОПР	Особа, що приймає рішення
BOCR	Benefits, Opportunities, Costs, Risks – Метод поєднання факторів доходів, можливостей, витрат і ризиків в одній структурі прийняття рішень
ГВББВПА	Групове врахування бінарних відношень переваг альтернатив
РР	Реверс рангів
АЧ	Аналіз чутливості
EM	Eigenvector method – Метод головного власного вектору
AN	Additive Normalization – Метод адитивної нормалізації
WAMM	Weighted Arithmetic Mean Method – Метод зваженої арифметичної середньої
GMM/ RGMM	Geometric Mean Method – Метод геометричної середньої
WGMM	Weighted Geometric Mean Method – Метод зваженої геометричної середньої

CI	Consistency Index – Індекс узгодженості
CR	Consistency Ratio – Відношення узгодженості
MRCI	Mean Random Consistency Index – Індекс випадкової узгодженості
HCI	Harmonic Consistency Index – Гармонічний індекс узгодженості
HCR	Harmonic Consistency Ratio – Гармонічне відношення узгодженості
GCI	Geometric Consistency Index – Геометричний індекс узгодженості
AIJ	Aggregating Individual Judgments – Агрегування індивідуальних оцінок
AIP	Aggregating Individual Priorities – Агрегування індивідуальних пріоритетів

Література

1) Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. - М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.
2) Саати Т., Кернс К. Аналитическое планирование. Организация систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 224 с.
3) Forman E., Selly M.A. Decision By Objectives. – http://www.expertchoice.com.
4) Saaty Thomas L. Theory of the Analytic Hierarchy Process, Part 2.1. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. - №1. – С.48 – 72.
5) Saaty T.L. Decision-making with the AHP: Why is the principal eigenvector necessary // European Journal of Operational Research. – 2003. – Vol.145, №1. – P.85 – 91.
6) Saaty Thomas L. Theory of the Analytic Hierarchy and Analytic Network Processes- Examples, Part 2.2. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. - №2. – С.7 – 34.
7) Saaty Thomas L. The Analytic Network Process, Examples, Part 2.3. // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2003. - №4. – С.7 – 23.
8) Оре О. Теория графов.– 2-е изд. – М.Наука, Главная редакция физ.-мат.лит., 1980, 336 с.
9) Ланкастер П. Теория матриц: Пер.с англ. – М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. – 272 с.
10) Lane E.F., Verdini W.A. A consistency test for AHP decision makers // Decision Sciences. – 1989. – No.20. – P.575 – 590.
11) Forman E.H. Random indices for incomplete pairwise comparison matrices // European Journal of Operational Research. – 1990. – No.48. – P.153 – 155.

12) Noble E.E., Sanchez P.P. A note on the information content of a consistent pairwise comparison judgment matrix of an AHP decision maker // Theory and Decision. – 1990. – Vol.34. – P.99 – 108.
13) Tummala V.M.R., Wan Y.W. On the mean random inconsistency index of analytic hierarchy process (AHP) // Computers and Industrial Engineering. – 1994. – No.27. – P.401 – 404.
14) Tummala V.M.R., Ling H.A note on the computation of the mean random inconsistency index of the analytic hierarchy process (AHP) // Theory and Decision. – 1998. – No.44. – P.221 – 230.
15) Golden B.L., Wang Q. An alternative measure of consistency, in B.L.Golden, E.A.Wasil and P.T.Harker (eds), Analytic Hierarchy Process: Applications and Studies. – 1990. pp.68 – 81. New York: Springer Verlag.
16) Omkarprasad S. Vaidya, Sushil Kumar. Analytic hierarchy process: An overview of applications // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol. 169, № 1. –P. 1–29.
17) ППП ExpertChoice 2000 на сайті www.expertchoice.com
18) Elliot B. Sloane, Matthew J. Liberatore, Robert L. Nydick, Wenhong Luo, Q.B. Chung. Using the analytic hierarchy process as a clinical engineering tool to facilitate an iterative, multidisciplinary, microeconomic health technology assessment // Computers & Operations Research 30 (2003) 1447–1465.
19) Younghwa Lee, Kenneth A. Kozar. Investigating the effect of website quality on e-business success: An analytic hierarchy process (AHP) approach // Decision Support Systems 42 (2006) 1383–1401.
20) M.C. Carnero. Selection of diagnostic techniques and instrumentation in a predictive maintenance program. A case study // Decision Support Systems 38 (2005) 539– 555.

21) Vincent S.Lai, Bo K.Wong, Waiman Cheung. Group decision making in a multiple criteria environment: A case using the AHP in software selection //European Journal of Operational Research 137(2002) 134-144.
22) Pekka Korhonen, Raimo Voutilainen. Finding the most preferred alliance structure between banks and insurance companies // European Journal of Operational Research 175 (2006) 1285 – 1299.
23) Maggie C.Y. Tam, V.M. Rao Tummala. An application of the AHP in vendor selection of a telecommunications system // Omega 29 (2001) 171 – 182.
24) K. Hafeez, N. Malak, Y.B. Zhang. Outsourcing non-core assets and competences of a firm using analytic hierarchy process // Computers & Operations Research 34 (2007) 3592 – 3608.
25) Fariborz Y. Partovi, Rafael A. Corredoira. Quality function deployment for the good of soccer // European Journal of Operational Research 137 (2002) 642–656.
26) Guisseppi A. Forgionne, Rajiv Kohli, Darniet Jennings. An AHP analysis of quality in AI and DSS journals // Omega 30 (2002) 171 – 183.
27) Madjid Tavana, JamesW. Smither, Ralph V. Anderson. *D-side*: A facility and workforce planning group multi-criteria decision support system for Johnson Space Center // Computers & Operations Research 34 (2007) 1646–1673.
28) Madjid Tavana. A subjective assessment of alternative mission architectures for the human exploration of Mars at NASA using multicriteria decision making // Computers & Operations Research 31 (2004) 1147–1164.
29) Dong-HoonYang, Seongcheol Kim, Changi Nam, Ja-Won Min. Developing a decision model for business process outsourcing // Computers & Operations Research 34 (2007) 3769 – 3778.

30) F. Tunç Bozbura, Ahmet Beskese. Prioritization of organizational capital measurement indicators using fuzzy AHP // International Journal of Approximate Reasoning 44 (2007) 124–147.
31) Mónica García Melón, Pablo Aragonés Beltran, M. Carmen Gonzez Cruz. An AHP-based evaluation procedure for Innovative Educational Projects: A face-to-face vs. computer-mediated case study // Omega 36 (2008) 754 – 765.
32) Qing Li, Hanif D. Sherali. An approach for analyzing foreign direct investment projects with application to China's Tumen River Area development //Computers & Operations Research 30 (2003) 1467–1485.
33) Fariborz Y. Partovi. An analytic model for locating facilities strategically // Omega 34 (2006) 41 – 55.
34) Michael Crary, L.K.Nozick, L.R.Whitaker. Sizing the US destroyer fleet // European Journal of Operational Research 136 (2002) 680 – 695.
35) Weijun Xia, Zhiming Wu. Supplier selection with multiple criteria in volume discount environments // Omega 35 (2007) 494 – 504.
36) Yi Sun, Shaoyi He, Jack Y. Leu. Syndicating Web Services: A QoS and user-driven approach // Decision Support Systems 43 (2007) 243–255.
37) Cengiz Kahraman, Tijen Ertay, Gülçin Büyüközkan. A fuzzy optimization model for QFD planning process using analytic network approach //European Journal of Operational Research 171(2006) 390-411.
38) An-Chin Cheng, Chung-Jen Chen, Chia-Yon Chen. A fuzzy multiple criteria comparison of technology forecasting methods for predicting the new materials development // Technological Forecasting & Social Change 75 (2008) 131 – 141.
39) James J. Winebrake, Brian P. Creswick. The future of hydrogen fueling systems for transportation: An application of perspective-based scenario analysis using the analytic hierarchy process // Technological Forecasting & Social Change 70 (2003) 359–384.

40) Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. - М.:Наука, 1974.–256 с.
41) Бешелев С.Д., Гурвич Ф.Г. Математико-статистические методы экспертных оценок. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Статистика, 1980. – 263 с.
42) Harold A. Linstone, Murray Turoff. The Delphi Method: Techniques and Applications. – http://www.is.njit.edu/pubs/delphibook/.
43) Vincent S.Lai, Bo K.Wong, Waiman Cheung. Group decision making in a multiple criteria environment: A case using the AHP in software selection //European Journal of Operational Research 137(2002) 134- 144.
44) Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978. - 352 с.
45) Фишберн П. Методы оценки аддитивных ценностей // Статистическое измерение качественных характеристик. – М.: Статистика, 1972. – С.8-34.
46) Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. – М.: Наука, 1990. – 256 с.
47) Ларичев О.И., Зуев Ю.А., Гнеденко Л.С. Метод ЗАПРОС (Замкнутые Процедуры у Опорных Ситуаций) решения слабо структурированных проблем выбора при многих критериях / М., 1979. – 75 с. (Препр. / АН СССР. ВНИИСИ).
48) Kangas A., Kangas J., Pykäläinen J. Outranking methods as tools in stragegic natural resources planning // Silva Fennica – 2001. – Vol. 35, №2. – P. 215 – 227.
49) Sanchez R.L. A comparative study on input requirement and information management of five decision support systems: ELECTRE, PROMETHEE, AHP, MacBeth and Naiade // PaperVarennaUlt. Draft version. – 2002.
50) Macharis C., Springael J., Brucker K.D., Verbeke A.. PROMETHEE and AHP: The design of operational synergies in multicriteria analysis.

Strenhthening PROMETHEE with ideas of AHP // European Journal of Operational Research. – 2004. – Vol. 153, №2. – P. 307 – 317.

51) Тоценко В.Г. Методы и системы поддержки принятия решений. Алгоритмический аспект. - К.: Наукова думка, 2002. – 381 с.

52) Тоценко В.Г. Експертні системи діагностики і підтримки рішень. – К.: Наукова думка, 2004. – 124 с.

53) M.T. Escobar, J.M. Moreno-Jiménez. A linkage between the Analytic Hierarchy Process and the Compromise Programming Models // Omega. – 2002. – Vol. 30, №5. – P. 359 – 365.

54) J-J. Wang, D-L Yang. Using a hybrid multi-criteria decision aid method for information system outsourcing // Computers & Operations Research. – 2007. – Vol. 34, №12. – P. 3691 – 3700.

55) Згуровський М.З., Панкратова Н.Д. Основи системного аналізу. – Київ, BHV. – 2007. – 543 с.

56) Zgurovsky M.Z., Pankratova N.D. System analysis: Theory and Applications. Springer. – 2007. – 475 p.

57) Згуровский М.З., Панкратова Н.Д. Системный анализ: проблемы, методология, приложения. – К.:Наукова думка, 2005.– 743с.

58) Згуровский М.З., Панкратова Н.Д. Технологическое предвидение. – К.: ІВЦ "Видавництво "Політехніка", 2005. – 155 с.

59) Bourgeois P. Technology Foresight for Strategic Decision-Making // The proceedings of the UNIDO Technology Foresight Conference for Central and Eastern Europe and the Newly Independent States. – Vienna, 2001. – P.24.

60) Havas A. Evolving Foresight in a Small Transition Economy // Journal of Forecasting. – 2003. – Vol.22, №2-3. – P.179 – 20.

61) Kováts F. Enlargement Seen From the Other Side (Foresight in a Pre-Accession Country) // The proceedings of the UNIDO Technology

Foresight Conference for Central and Eastern Europe and the Newly Independent States. – Vienna, 2001. – P.48 – 59.

62) Loveridge D. Technology forecasting and foresight: pedantry or disciplined vision // Ideas in Progress Paper. - 1997. - №2; 5)Martin B. Technology Foresight in a Rapidly Globalizing Economy // The proceedings of the UNIDO Technology Foresight Conference for Central and Eastern Europe and the Newly Independent States. – Vienna, 2001. – P.1 – 17.
63) Morales Jesus E.A. The Most Commonly Applied Methodologies in Technology Foresight // The proceedings of the UNIDO Technology Foresight Conference for Central and Eastern Europe and the Newly Independent States. – Vienna, 2001. – P.170 – 178.
64) Панкратова Н.Д. Рациональный компромисс в системной задаче концептуальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. –2002. –№ 4. – С.162–180.
65) Srdjevic B. Combining different prioritization methods in the analytic hierarchy process synthesis // Computers & Operations Research. - 2005. – Vol.32. – P. 1897 – 1919.
66) Stein W.E., Mizzi P.J. The harmonic consistency index for the analytic hierarchy process // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol.177, №1. – P.488 – 497.
67) Crawford G., Williams C. A note on the analysis of subjective judgment matrices // Journal of Mathematical Psychology. – 1985. – Vol.29, №4. – P.387 – 405.
68) Barzilai J. Deriving weights from pairwise comparison matrices // Journal of Operational Research Society. – 1997. – Vol.48, №12. – P.1226 – 1232.

69) Chandran B., Golden B., Wasil E. Linear programming models for estimating weights in the analytic hierarchy process // Computers & Operations Research. – 2005. – Vol. 32, №9. - P. 2235 – 2254.
70) Lipovetsky S., Conklin W.M. Robust estimation of priorities in the AHP // European Journal of Operational Research. – 2002. – Vol. 137, №1. – P.110 – 122.
71) Aupetit B., Genest C. On some useful properties of the Perron eigenvalue of a positive reciprocal matrix in the context of the analytic hierarchy process // European Journal of Operational Research. – 1993. – Vol. 70. – P. 263 – 268.
72) Aguarón J., Moreno-Jiménez J.M. Local stability intervals in the analytic hierarchy process // European Journal of Operational Research. – 2000. -Vol.125 (1). – P.114 – 133.
73) Escobar M.T., Moreno-Jiménez J.M. Reciprocal distributions in the analytic hierarchy process // European Journal of Operational Research. – 2000. -Vol.123 (1). – P.154 – 174.
74) Brugha C.M. Relative measurement and the power function // European Journal of Operational Research. – 2000. -Vol.121. – P.627 – 640.
75) Barzilai J., Lootsma F.A. Power Relations and Group Aggregation in Multiplicative AHP and SMART // Proceedings of the 3rd International Symposium on The Analytic Hierarchy Process. – Washington, DC, 1994. – P.157-168.
76) Genest C., Rivest L.P. A statistical look at Saaty's method of estimating pairwise preferences expressed on a ratio scale // Journal of Mathematical Psychology. – 1994. – No.38. – P.477 – 496.
77) Aguaron J., Moreno-Jimenez J.M. The geometric consistency index: Approximated thresholds // European Journal of Operational Research. – 2003. – Vol.147, №1. – P.137 – 145.

78) Xu Z., Da Q. An approach to Improving Consistency of Fuzzy Preference Matrix // Fuzzy Optimization and Decision Making. – 2003. – Vol. 2, №1. – P. 3 – 12.
79) Salo A.A., Hämäläinen R.P. On the measurement of preferences in the analytic hierarchy process // Journal of Multi-criteria Decision Analysis. – 1997. – Vol.6, №6. – P. 309 – 319.
80) Kwiesielewicz M., van Uden E. Inconsistent and contradictory judgments in pairwise comparison method in the AHP // Computers & Operations Research. – 2004. – Vol.31, №5. – P. 713 – 719.
81) Stam A., Silva P.D. Stochastic judgements in the AHP: The measurement of rank reversal probabilities // Decision Sciences. — 1997. — Vol. 28, №3. — P. 655–688.
82) Тоценко В.Г. Групповые ранжирования с обратной связью с экспертнами и учетом их компетентности // Проблемы управления и информатики. – 2006. - №5. – С. 92 – 99.
83) Кендалл М., Стюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды /Пер. с англ. Под ред. А.Н.Колмагорова и Ю.В. Прохорова. – М.:Наука, 1976. – 736с.
84) Bañuelas R., Antony J. Six sigma or design for six sigma // The TQM magazine. – 2004. – Vol.16, №4. – P. 250 – 263.
85) Laininen P., Hämäläinen R.P. Analyzing AHP-matrices by regression // European Journal of Operational Research. – 2003. – Vol.148, №3. – P.514 – 524.
86) De Jong P. A statistical approach to Saaty's scaling method for priorities //Journal of Mathematical Psychology.–1984.–Vol.28, №4.–P.467– 478.
87) Hahn E.D. Decision making with uncertain judgments: a stochastic formulation of the analytic hierarchy process // Decision Sciences. – 2003. – Vol.34, №3. – P.443 – 466.

88) Hahn E.D. Link function selection in stochastic multicriteria decision making models // European Journal of Operational Research. – 2006. – Vol.172, №1. – P.86 – 100.
89) Phillips-Wren G.E., Hahn E.D., Forgionne G.A. A multiple-criteria framework for evaluation of decision support systems // Omega. – 2004. – Vol. 32, №4. – P. 323 – 332.
90) Зайченко Ю.П.Исследование операций: Учебник. – К.: «Слово», 2003. –688 с.
91) Chang D.Y. Applications of the extent analysis method on fuzzy AHP // European Journal of Operational Research. – 1996. – Vol.95, №3. – P.649 – 655.
92) Tran L., Duckstein L. Comparison of fuzzy numbers using fuzzy distance measure //Fuzzy sets and systems. – 2002. – Vol.130, №3. – P.331–341.
93) Modarres M., Sadi-Nezhad S. Ranking fuzzy numbers by preference ratio // Fuzzy Sets and Systems. – 2001. – Vol.118, №3. – P.429 – 436.
94) Wang X., Kerre E.E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (I) // Fuzzy Sets and Systems. – 2001. – Vol.118, №3. – P.375–385.
95) Wang X., Kerre E.E. Reasonable properties for the ordering of fuzzy quantities (II) // Fuzzy Sets and Systems. – 2001. – Vol.118, №3. – P.387– 405.
96) Xu Z. A direct approach to group decision making with uncertain additive linguistic preference relations // Fuzzy optimization and decision making. – 2006. – Vol.5, №1. – P.21 – 32.
97) Sugihara K., Ishii H., Tanaka H. Interval priorities in AHP by interval regression analysis // European Journal of operational research. – 2004. – Vol.158, №3. – P. 745 – 754.

98) Ishibuchi H., Tanaka H. Multiobjective programming in optimization of the interval objective function // European Journal of operational research. – 1990. – Vol.48, №2. – P. 219 – 225.

99) Xu Z. On method for uncertain multiple attribute decision making problems with uncertain multiplicative preference information on alternatives // Fuzzy optimization and decision making. – 2005. – Vol.4, №2. – P.131 – 139.

100) Sengupta A., Pal T. On comparing interval numbers // European Journal of operational research. – 2000. – Vol.127, №1. – P. 28 – 43.

101) Wang Y.-M., Yang J.-B., Xu D.-L. Mathematical programming methods for generating weights from interval comparison matrices. – http://www.sm.umist.ac.uk/wp/papers/wp0205.htm.

102) Wang Y.-M., Elhag T.M.S. A goal programming method for obtaining interval weights from an interval comparison matrix // European Journal of operational research. – 2007. – Vol.177, №1. – P. 458 – 471.

103) Mikhailov L. A fuzzy approach to deriving priorities from interval pairwise comparison judgements // European Journal of Operational Research. – 2004. – Vol.159, №3. – P. 687 – 704.

104) Mikhailov L. Deriving priorities from fuzzy pairwise comparison judgements //Fuzzy Sets and Systems. – 2003. –Vol.134, № 3. – P.365 – 385.

105) Wang Y.-M., Yang J.-B., Xu D.-L. A two-stage logarithmic goal programming method for generating weights from interval comparison matrices //Fuzzy Sets and Systems. –2005. –Vol.152, №3. –P.475 – 498.

106) Saaty T.L., Vargas L.Uncertainty and rank order in the analytic hierarchy process // European Journal of Operational Research. – 1987. – Vol.32, №1. – P. 107 – 117.

107) Islam R., Biswal M., Alam S. Preference programming and inconsistent interval judgements // European Journal of Operational Research. – 1997. – Vol.97, №1. – P. 53 – 62.

108) Arbel A. Approximate articulation of preference and priority derivation // European Journal of Operational Research. – 1989. – Vol. 43, №3. – P. 317 – 326.
109) Salo A., Hämäläinen R. Preference programming through approximate ratio comparisons // European Journal of operational research. – 1995. – Vol.82, №3. – P. 458 – 475.
110) Osman Kulak, Cengiz Kahraman. Fuzzy multi-attribute selection among transportation companies using axiomatic design and analytic hierarchy process // Information Sciences. – 2005. –Vol.170,№2 – 4. – P.191–210.
111) Victor B. Kreng, Chao-Yi Wu. Evaluation of knowledge portal development tools using a fuzzy AHP approach: The case of Taiwanese stone industry // European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 176, №3. – P. 1795–1810.
112) Yasemin Claire Erensal, Temel Öncan, Murat Levent Demircan. Determining key capabilities in technology management using fuzzy analytic hierarchy process: A case study of Turkey // Information Sciences. – 2006. – Vol. 176, №18. – P. 2755–2770.
113) F. Tunç Bozbura, Ahmet Beskese. Prioritization of organizational capital measurement indicators using fuzzy AHP // International Journal of Approximate Reasoning. – 2007. – Vol. 44, №2. – P. 124–147.
114) Felix T.S. Chan, Niraj Kumar. Global supplier development considering risk factors using fuzzy extended AHP-based approach // Omega. – 2007. – Vol. 35, №4. – P. 417 – 431.
115) Vikas Kapoor, Shyam Singh Tak. Fuzzy application to the analytic hierarchy process for robot selection // Fuzzy Optimization and Decision Making. – 2005. – Vol. 4, №2. – P. 209 – 234.
116) An-Chin Cheng, Chung-Jen Chen, Chia-Yon Chen. A fuzzy multiple criteria comparison of technology forecasting methods for predicting the

new materials development // Technological Forecasting & Social Change. – http://www.sciencedirect.com.

117) Hua-Kai Chiou, Gwo-Hshiung Tzeng, Ding-Chou Cheng. Evaluating sustainable fishing development strategies using fizzy MCDM approach // Omega. – 2005. – Vol. 33, №3. – P. 223 – 234.

118) Ramanathan R., Ganesh L.S. Group preference aggregation methods employed in AHP: An evaluation and an intrinsic process for deriving members' weightages // European Journal of Operational Research. – 1994. – Vol.79. – p.249 – 265.

119) Forman E., Peniwati K. Aggregating individual judgments and priorities with the analytic hierarchy process // European Journal of Operational Research. – 1998. – Vol.108. – p.131 – 145.

120) Van Den Honert R.C., Lootsma F.A. Group preference aggregation in the multiplicative AHP, the model of the group decision process and Pareto optimality // European Journal of Operational Research. – 1996. – Vol.96. – p.363 – 370.

121) Escobar M.T., Aguaron J., Moreno-Jimenez J.M. A note on AHP group consistency for the row geomantic mean prioritization procedure // European Journal of Operational Research. – 2004. – Vol.153, №2. – P.318 – 322.

122) Bolloju N. Aggregation of analytic hierarchy process models based on similarities in decision makers' preferences // European Journal of Operational Research. – 2001. – Vol.128. – p.499 – 508.

123) Herrera F., Herrera-Viedma E., Chiclana F. Multiperson decision-making based on multiplicative preference relations // European Journal of Operational Research. – 2001. – Vol.129. – p.372 – 385.

124) Yager R.R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics. – 1988. – Vol.8. – p.183 – 190.

125) Yager R.R. Generalized OWA aggregation operators // Fuzzy Optimization And Decision Making. – 2004. – Vol.3. – p. 93 – 107.
126) Xu Z. On consistency of the weighted geometric mean complex judgement matrix in AHP // EJOR. – 2000. – Vol.126. – P.683 – 687.
127) Triantaphyllou E., Mann S.H. An Examination of the Effectiveness of Multi-Dimensional Decision-Making Methods: A Decision-Making Paradox // International Journal of Decision Support Systems. – 1989. – Vol.5, №3. – P.303-312.
128) Triantaphyllou E. Two New Cases of Rank Reversals when the AHP and Some of its Additive Variants are Used that do not Occur with the Multiplicative AHP //Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. – 2001. – Vol. 10, №1. – P.11-25.
129) Самохвалов Ю.Я. Особенности применения метода анализа иерархий при оценке проблем по метрическим критериям // Кибернетика и системный анализ. – 2004. - №5. – С.15-20.
130) Belton V., Gear T. On a Short-coming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies // Omega. – 1983. - Vol.11, №3. - P.228-230.
131) Forman, E.H. Relative vs Absolute Worth // Mathematical Modelling. – 1987. – Vol.9, №3-5. – P.195-202.
132) Saaty, T.L. An Exposition of the AHP in Reply to the Paper "Remarks on the Analytic Hierarchy Process"// Management Science. – 1990. - Vol.36, №3. – P.259-268.
133) Saaty T.L. Rank generation, preservation and reversal in the analytic hierarchy process // Decision Sciences.–1987.–Vol.18, №2. –P.157-177.
134) Saaty T.L. Rank from comparisons and from ratings in the analytic hierarchy/ network processes // European Journal of Operational Research – 2006. – Vol.168, №2. – pp.557 – 570.

135) Тоценко В.Г. О проблеме реверса рангов альтернатив при мультикритериальном оценивании // Проблемы управления и информатики. – 2006. - №3. – С. 65 – 74.
136) Льюис Р.Т., Райфа Х. Игры и решения.–М.:Иностр.лит.,1961.–642 с.
137) Недашківська Н.І. Оцінювання реверсу рангів в методі аналізу ієрархій // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2005. - №4. - С. 120 – 130.
138) Недашковская Н.И. Оценивание реверса рангов в методе анализа иерархий // Системний аналіз та інформаційні технології: Матеріали VII Міжнародної науково-технічної конференції (28 червня – 2 липня 2005 р., м. Київ). – К.: НТУУ «КПІ», 2005. – С. 56.
139) Dyer J.S. Remarks on the analytic hierarchy process // Management Science. – 1990. – Vol.36, №3. – P.249-258.
140) N.Vinod Kumar, L.S.Ganesh. An empirical analysis of the use of the Analytic Hierarchy Process for estimating membership values in a fuzzy set // Fuzzy Sets and Systems. – 1996. – Vol.82, №1. - P.1-16.
141) Ramanathan R. Data envelopment analysis for weight derivation and aggregation in the analytic hierarchy process // Computers & Operations Research. – 2006. – Vol.33, №5. – p.1289 – 1307.
142) Stam A., Duarte Silva A.P. On multiplicative priority rating methods for the AHP // European Journal of Operational Research. – 2003. – Vol.145, №1. – P.92 – 108.
143) Grzegorzewski P. Nearest interval approximation of a fuzzy number // Fuzzy Sets and Systems. – 2002. – Vol. 130, №3. – P. 321 – 330.
144) Nasibov E.N., Baskan O., Mert A. A learning algorithm for level sets weights in weighted level-based averaging method // Fuzzy optimization and decision making. – 2005. – Vol.4, №4. – P.279 – 291.

145) Насибов Э.Н. К вопросу агрегации нечеткой информации на базе декомпозиционного представления // Кибернетика и системный анализ. – 2005. - №2. – С.176 – 186.
146) Salo A. Inconsistency analysis by approximately specified priorities // Mathematical and Computer Modeling. – 1993. – Vol.17, №4 – 5. – P.123 – 133.
147) Leung L., Cao D. On consistency and ranking of alternatives in fuzzy AHP // European Journal of Operational Research. – 2000. – Vol.124, №1. – P. 102 – 113.
148) Панкратова Н.Д., Недашковская Н.И. Методология обработки нечеткой экспертной информации в задачах предвидения. Часть 1 // Проблемы управления и информатики. – 2007. - №2 - С. 40 – 55.
149) Панкратова Н.Д., Недашковская Н.И. Экспертное оценивание многофакторных рисков в технологическом предвидении // Доповіді НАНУ. – 2007. - №11. – С.48 – 53.
150) Панкратова Н.Д., Недашковская Н.И. Методология обработки нечеткой экспертной информации в задачах предвидения. Часть 2 // Проблемы управления и информатики. – 2007. - №3 - С. 49 – 63.
151) Tran L., Duckstein L. Comparison of fuzzy numbers using fuzzy distance measure //Fuzzy sets and systems. – 2002. – Vol.130, №3. – P.331–341.
152) Bryson N., Mobolurin A. An action learning evaluation procedure for multicriteria decision making problems // European Journal of operational research. – 1997. – Vol.96, №2. – P. 379 – 386.
153) Bayazit O. Use of AHP in decision-making for flexible manufacturing systems // Journal of Manufacturing Technology Management. — 2005. — Vol.16, №7. — P. 808–819.

154) Akomode O.J., Lees B., Irgens C. Constructing customized models and providing information to support IT outsourcing decisions // Logistics Information Management. — 1998. — Vol.11, №2. — P. 114–127.
155) Godwin G. Udo. Using analytic hierarchy process to analyze the information technology outsourcing decision // Industrial Management & Data Systems. — 2000. — Vol. 100, №9. — P. 421–429.
156) Masood A.Badri, Mohamed H. Abdulla. Awards of excellence in institutions of higher education: an AHP approach // International Journal of Educational Management. — 2004. — Vol.18, №4. — P. 224–242.
157) Braglia M. MAFMA: multi-attribute failure mode analysis // International Journal of Quality&Reliability Management. — 2000. — Vol.17, №9. — P. 1017–1033.
158) Partovi F.Y. Determining what to benchmark: an analytic hierarchy process approach // International Journal of Operations &Production Management. — 1994. — Vol. 14, №6. —P. 25–39.
159) Bevilacqua M. and Braglia M. The analytic hierarchy process applied to maintenance strategy selection// Reliability Engineering & System Safety. — 2000. — Vol.70, №1. — P. 71–83.
160) Triantaphyllou E., Sanchez A. A sensitivity analysis approach for some deterministic multi-criteria decision making methods // Decision Sciences. — 1997. — Vol.28, №1. — P. 151–194.
161) Недашківська Н.І. Оцінювання узгодженості експертної інформації в методі аналізу ієрархій // Системний аналіз та інформаційні технології: Матеріали VIII Міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих науковців (13 – 16 вересня 2006 р., м. Київ). – К.: НТУУ «КПІ», 2006. – С. 43.

162) Aguarón J., Escobar M.T., Moreno-Jiménez J.M. Consistency stability intervals for a judgements in AHP decision support systems // European Journal of Operational Research. – 2003. – Vol.145. – P.382 – 393.
163) Панкратова Н.Д., Недашківська Н.І. Комплексне оцінювання чутливості рішення на основі методу аналізу ієрархій // Системні дослідження та інформаційні технології.–2006. - №3. - С.7 – 25.
164) Недашківська Н.І. Оцінювання чутливості розв’язку задачі прийняття рішень із застосуванням методу аналізу ієрархій // Наукові вісті НТУУ «КПІ». – 2006. - №2. – С.27 – 36.
165) Панкратова Н.Д., Недашковская Н.И. Экспертное оценивание многофакторных рисков в технологическом предвидении // Доповіді НАНУ. – 2007. - №11. – С.48 – 53.
166) Панкратова Н.Д., Недашковская Н.И. Оценивание многофакторных рисков в условиях концептуальной неопределенности // Кибернетика и системный анализ. – 2009. - №2. – С.72 – 82.
167) Natalia D.Pankratova, Nadezhda I.Nedashkovskaya. Estimation of Scenarious of Innovation Projects Using Fuzzy Experts’ Judgments. – 21st International CODATA Conference, Kyiv, Ukraine, 5-8 October 2008. – P.89.