Тема 6
Методи аналізу ієрархій при нечітких експертних оцінках

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

6.1. Постановка задачі.
Загальний підхід до розв’язання

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Постановка задачі

Дано:

$A = \{a_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ - множина альтернатив рішень

C - критерій

$D^{fuz} = \{(d_{ij}^{fuz}) \mid i, j = 1,\ldots,n\}$ - нечітка МПП

Знайти:

$w^{fuz} = \{(w_i^{fuz}) \mid i = 1,\ldots,n\}$ - нечіткий вектор ваг альтернатив

$w_i^{fuz} = (x, \mu_i(x))$ - нечітка множина, $x \in R$

Нечітка МПП

Нечітка матриця парних порівнянь (НМПП)

$$D^{fuz} = \{(d_{ij}^{fuz}) \mid i, j = 1, \ldots, n\}$$

$d_{ij}^{fuz} = (x, \mu_{ij}(x))$ - нечітке число

$\mu_{ij}(x)$ - ступінь виконання переваги $a_i \succeq a_j$

- **Нечітке число** – нечітка множина, визначена на $U{=}R$

  $\mu_A : R \rightarrow [0,1]$, яка задовольняє умовам:

- нечітка множина нормована
- нечітка множина випукла

$$\mu_A(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) \geq \min(\mu_A(u_1), \mu_A(u_2)) \qquad \lambda \in [0,1] \quad \forall\, u_1, u_2 \in U$$

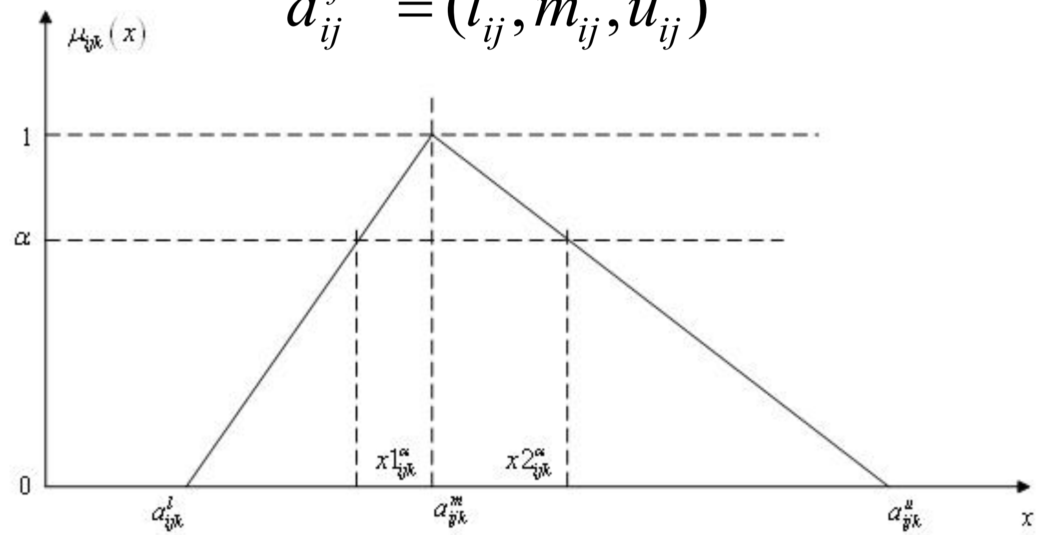
Загальне розв’язання задачі

Розкладемо НМПП $D^{fuz} = \{(d_{ij}^{fuz}) \mid i, j = 1,\dots,n\}$ за множинами рівня:

$$D^{fuz} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha D(\alpha)$$

$$d_{ij}^{fuz} = (l_{ij}, m_{ij}, u_{ij})$$

$$D(\alpha) = \{(d_{ij}(\alpha)) \mid i, j = 1,\dots,n\}$$



$$d_{ij}(\alpha) = \{x : \mu_{ij}(x) \geq \alpha\}$$

$$d_{ij}^{fuz} = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha d_{ij}(\alpha) \quad \forall i, j = \overline{1,n}$$

$$d_{ij}(\alpha) = [l_{ij}(\alpha),\ u_{ij}(\alpha)]$$

$$l_{ij}(\alpha) = \alpha(m_{ij} - l_{ij}) + l_{ij}$$

$$u_{ij}(\alpha) = \alpha(m_{ij} - u_{ij}) + u_{ij}$$

Розкладення нечіткої множини за її множинами рівня

Нечітка множина A на X, множина рівня $A_\alpha = \{x : \mu_A(x) \geq \alpha\}$

$$A = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} \alpha A_\alpha$$ - розкладення за множинами рівня

Приклад. $X = \{1,2,3,4,5\}$

x	1	2	3	4	5
$\mu_A(x)$	0	0.1	0.3	0.8	1.0

$A_{0.1} = \{2,3,4,5\}$ $A_{0.3} = \{3,4,5\}$ $A_{0.8} = \{4,5\}$ $A_{1.0} = \{5\}$

Нечітку множину A можна представити у вигляді:

$$A = 0.1\{2,3,4,5\} \bigcup 0.3\{3,4,5\} \bigcup 0.8\{4,5\} \bigcup 1.0\{5\}$$

Узгоджена ІМПП

$D = \{(d_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}]) \mid 0 < l_{ij} \leq u_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n\}$ - ІМПП

ІМПП - **обернено симетрична інтервальна матриця**:

$$l_{ij} u_{ji} = 1 \qquad \forall\ i = \overline{1,n} \quad j = \overline{1,n}$$

ІМПП A називається **узгодженою**, якщо

$\exists\, w = (w_1, \ldots, w_n), w_i > 0, w_i \in R \quad \sum_i w_i = 1 \quad l_{ij} \leq w_i / w_j \leq u_{ij} \quad i < j$

ІМПП A **узгоджена** т.т.т.к. $\max_k (l_{ik} l_{kj}) \leq \min_k (u_{ik} u_{kj}) \quad \forall i, j = 1, \ldots, n \quad i < j$

1	[2, 5]	[2, 4]	[1, 3]
[1/5, 1/2]	1	[1, 3]	[1, 2]
[1/4, 1/2]	[1/3, 1]	1	[1/2, 1]
[1/3, 1]	[1/2, 1]	[1, 2]	1

$w = (0.4 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.2)$

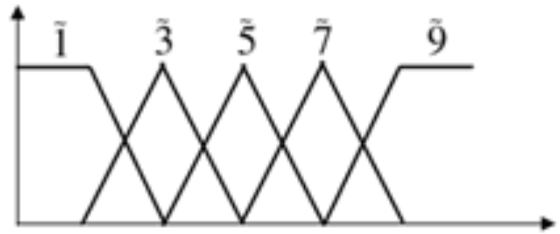
Критерій узгодженості ІМПП
Приклад

1	[2, 5]	[2, 4]	[1, 3]
[1/5, 1/2]	1	[1, 3]	[1, 2]
[1/4, 1/2]	[1/3, 1]	1	[1/2, 1]
[1/3, 1]	[1/2, 1]	[1, 2]	1

$$w = (0.4 \quad 0.2 \quad 0.2 \quad 0.2)$$

i	j	k	$l_{ik} l_{kj}$	$u_{ik} u_{kj}$	$\max_k(l_{ik} l_{kj}) \le \min_k(u_{ik} u_{kj})$
1	2	3	2*1/3	4*1	
		4	1*1/2	3*1	так
1	3	2	2*1	5*3	
		4	1*1	3*2	так
1	4	2	2*1	5*2	
		3	2*1/2	4*1	так
...	...	...			

Нечіткі фундаментальні шкали



	Нечіткі числа					
Лінгвістична змінна	ФП 1 [6, 7]	ФП 2 [8]	ФП 3 [9]	ФП 4 [10]	ФП 5 [11]	ФП 6 [12]
Рівна важливість $\tilde{1}$	$\tilde{1}=(1,1,3)$	$\tilde{1}=(1,1,1)$	$\tilde{1}=(1,1,1)$	$\tilde{1}=(1,1,2)$	$\tilde{1}=(1,1,1)$	$\tilde{1}=(1/2,1,3/2)$
Слабка перевага $\tilde{3}$	$\tilde{3}=(1,3,5)$	$\tilde{3}=(2,3,4)$	$\tilde{3}=(2,3,4)$	$\tilde{3}=(2,3,4)$	$\tilde{3}=(1,3,5)$	$\tilde{3}=(1,3/2,2)$
Сильна перевага $\tilde{5}$	$\tilde{5}=(3,5,7)$	$\tilde{5}=(4,5,6)$	$\tilde{5}=(4,5,6)$	$\tilde{5}=(4,5,6)$	$\tilde{5}=(3,5,7)$	$\tilde{5}=(3/2,2,5/2)$
Дуже сильна перевага $\tilde{7}$	$\tilde{7}=(5,7,9)$	$\tilde{7}=(6,7,8)$	$\tilde{7}=(6,7,8)$	$\tilde{7}=(6,7,8)$	$\tilde{7}=(5,7,9)$	$\tilde{7}=(2,5/2,3)$
Абсолютна перевага $\tilde{9}$	$\tilde{9}=(7,9,9)$	$\tilde{9}=(9,9,9)$	$\tilde{9}=(8,9,10)$	$\tilde{9}=(8,9,9)$	$\tilde{9}=(7,9,11)$	$\tilde{9}=(5/2,3,7/2)$
Проміжні значення між двома сусідніми судженнями: $\tilde{2}$, $\tilde{4}$, $\tilde{6}$, $\tilde{8}$	$\tilde{2}=(1,2,4)$ $\tilde{4}=(2,4,6)$ $\tilde{6}=(4,6,8)$ $\tilde{8}=(6,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,3)$ $\tilde{4}=(3,4,5)$ $\tilde{6}=(5,6,7)$ $\tilde{8}=(7,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,3)$ $\tilde{4}=(3,4,5)$ $\tilde{6}=(5,6,7)$ $\tilde{8}=(7,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,3)$ $\tilde{4}=(3,4,5)$ $\tilde{6}=(5,6,7)$ $\tilde{8}=(7,8,9)$	$\tilde{2}=(1,2,4)$ $\tilde{4}=(2,4,6)$ $\tilde{6}=(4,6,8)$ $\tilde{8}=(6,8,10)$	$\tilde{2}=(3/4,5/4,7/4)$ $\tilde{4}=(5/4,7/4,9/4)$ $\tilde{6}=(7/4,9/4,11/4)$ $\tilde{8}=(9/4,11/4,13/4)$

6.2. Нечіткий метод геометричної середньої

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Постановка задачі

Дано:

$D = \{(d_{ij} = [l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}]) \mid i, j = 1,\ldots,n\}$ - трикутна НМПП

$$0 < l_{ij} \le m_{ij} \le u_{ij}$$

Знайти:

$w = \{w_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ - вектор трикутних нечітких ваг альтернатив

$$w_i = [w_i^l, w_i^m, w_i^u]$$

Нечіткий метод геометричної середньої (Fuzzy Row Geometric Mean Method, FRGMM)

$$x = [x_1, x_2, x_3] \qquad x_i, y_i \in \Re$$

$$y = [y_1, y_2, y_3] \qquad x_1, y_1 > 0$$

$$v_i = \left(\prod_{j=1}^{n} d_{ij} \right)^{1/n} \qquad w_i = \frac{v_i}{\sum_{k=1}^{n} v_k}$$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$

$$x * y = (x_1 y_1, x_2 y_2, x_3 y_3)$$

$$x / y = (x_1 / y_3, x_2 / y_2, x_3 / y_1)$$

$$x^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n)$$

	a1	a2	a3	Ваги
a1	[1,1,3]	[1/5, 1/3, 1]	[1/5, 1/3, 1]	[0.06, 0.22, 1.05]
a2	[1, 3, 5]	[1/5, 1/3, 1]	[1, 3, 5]	[0.10, 0.46, 1.79]
a3	[1, 3, 5]	[1/5, 1/3, 1]	[1/5, 1/3, 1]	[0.08, 0.32, 1.37]

6.3. Метод FAHP

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Метод FAHP. Постановка задачі

Дано:

$D = \{(d_{ij} = [l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}]) \mid i, j = 1,\ldots,n\}$ - трикутна НМПП

$$0 < l_{ij} \leq m_{ij} \leq u_{ij}$$

Знайти:

$w = \{w_i \mid i = 1,\ldots,n\}$ - вектор чітких ваг альтернатив $w_i \in \Re$ $w_i > 0$

Метод FAHP

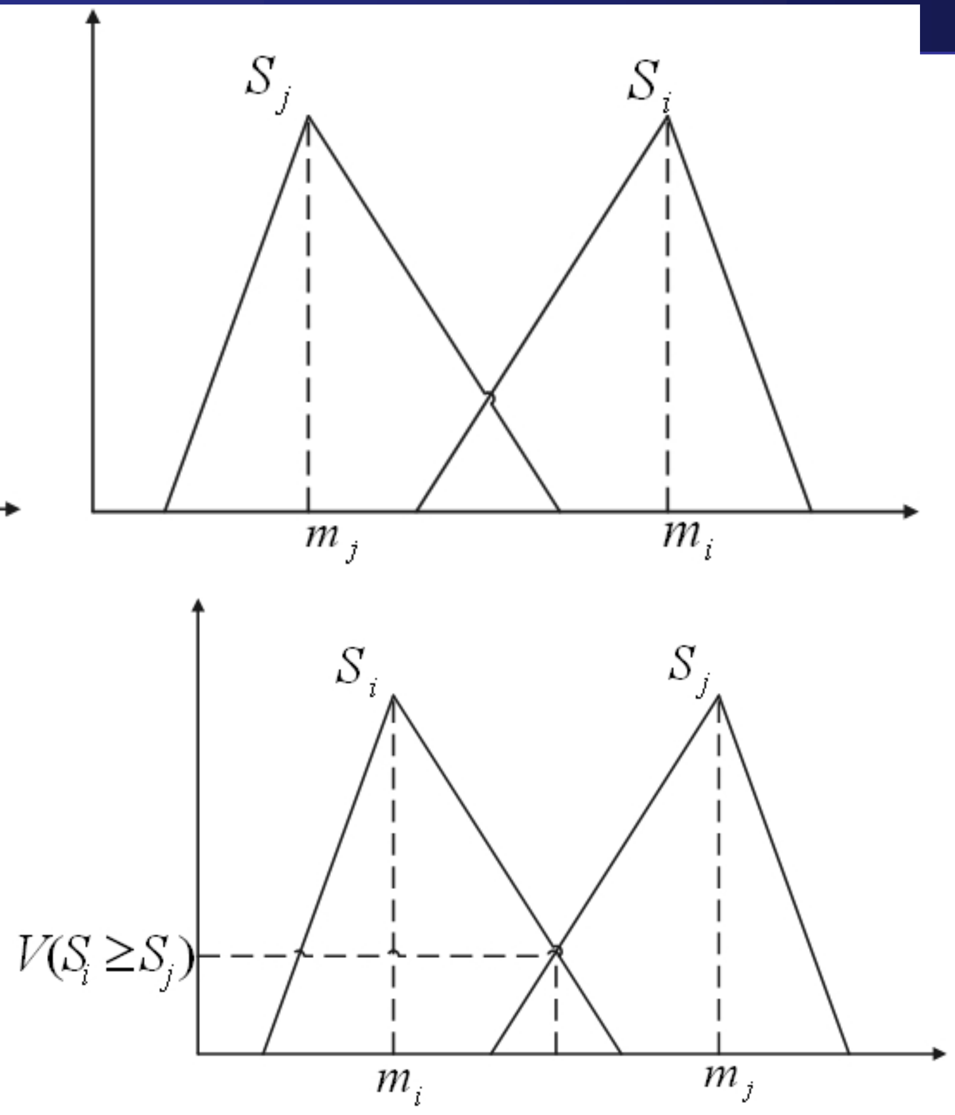
1 етап $$RS_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} = \left[\sum_{j=1}^{n} l_{ij}, \sum_{j=1}^{n} m_{ij}, \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \right] \qquad i = 1,\dots,n$$

$$S_i = \frac{RS_i}{\sum_{k=1}^{n} RS_k} = \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} l_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} u_{kj}}, \frac{\sum_{j=1}^{n} m_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{kj}}, \frac{\sum_{j=1}^{n} u_{ij}}{\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} l_{kj}} \right]$$

2 етап: Задамо нечітке відношення нестрогої переваги $S_i \ge S_j$

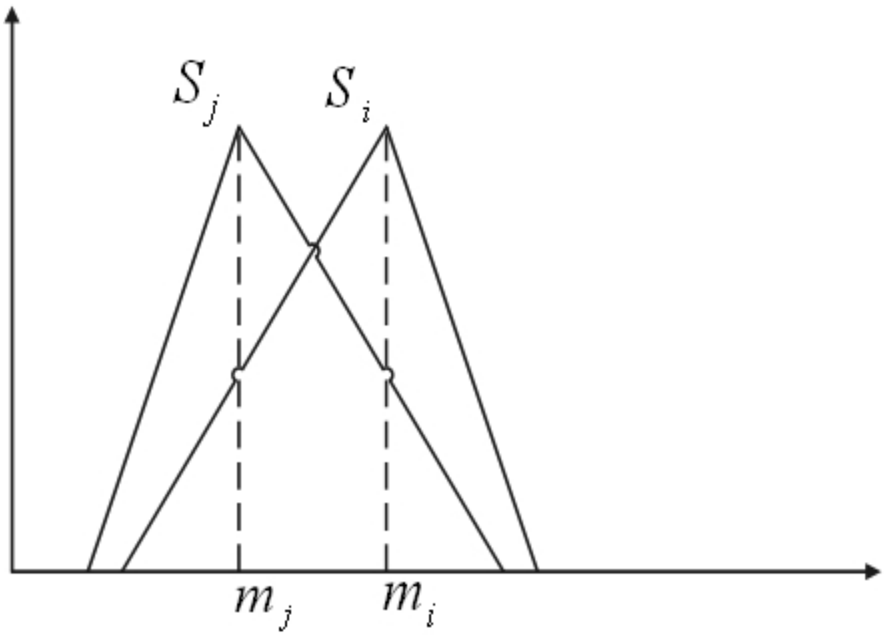
$$S_i = [l_i, m_i, u_i] \qquad S_j = [l_j, m_j, u_j]$$

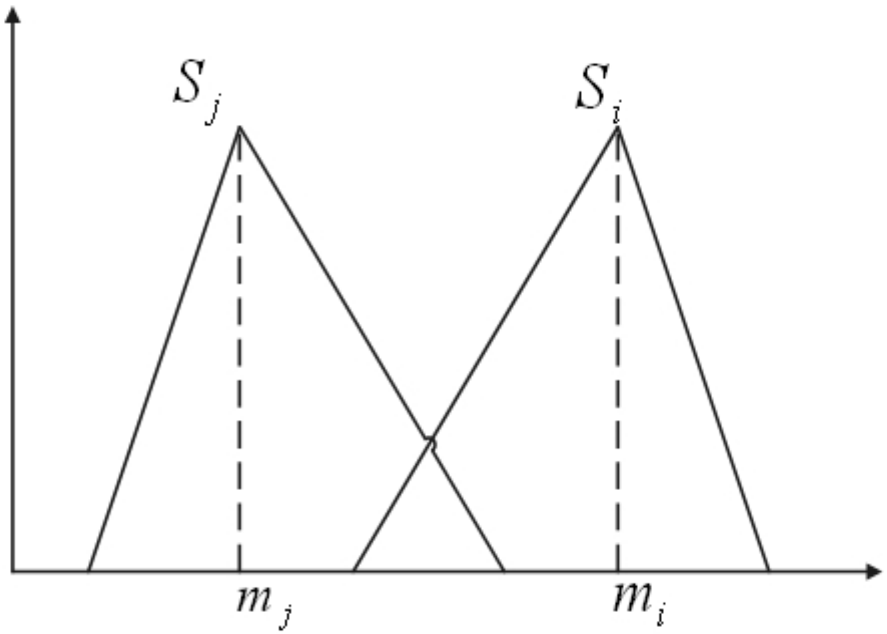
Метод FAHP



Метод FAHP

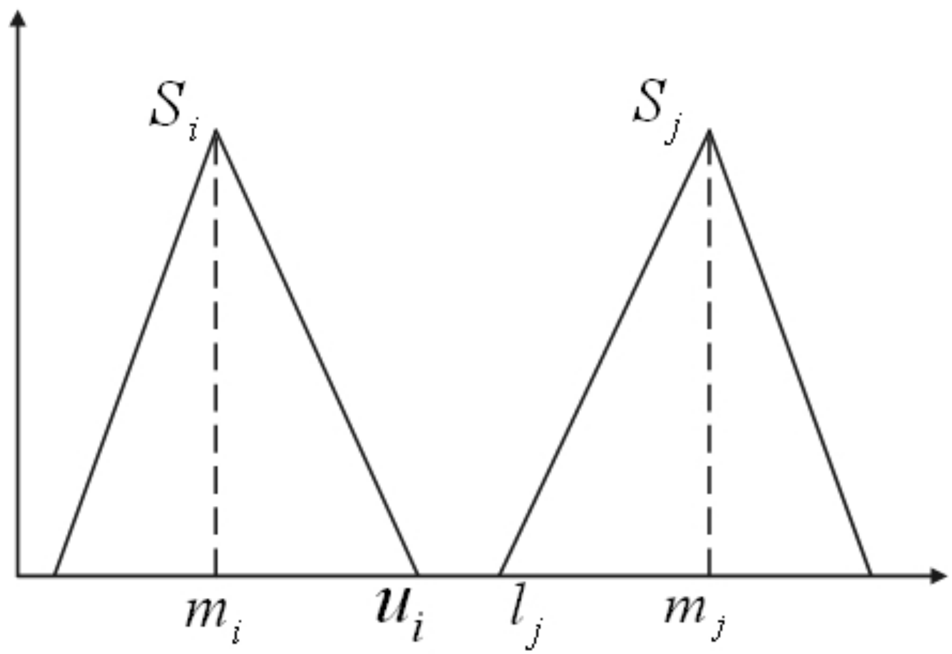
$$V(S_i \geq S_j) = 1 \qquad m_i \geq m_j$$



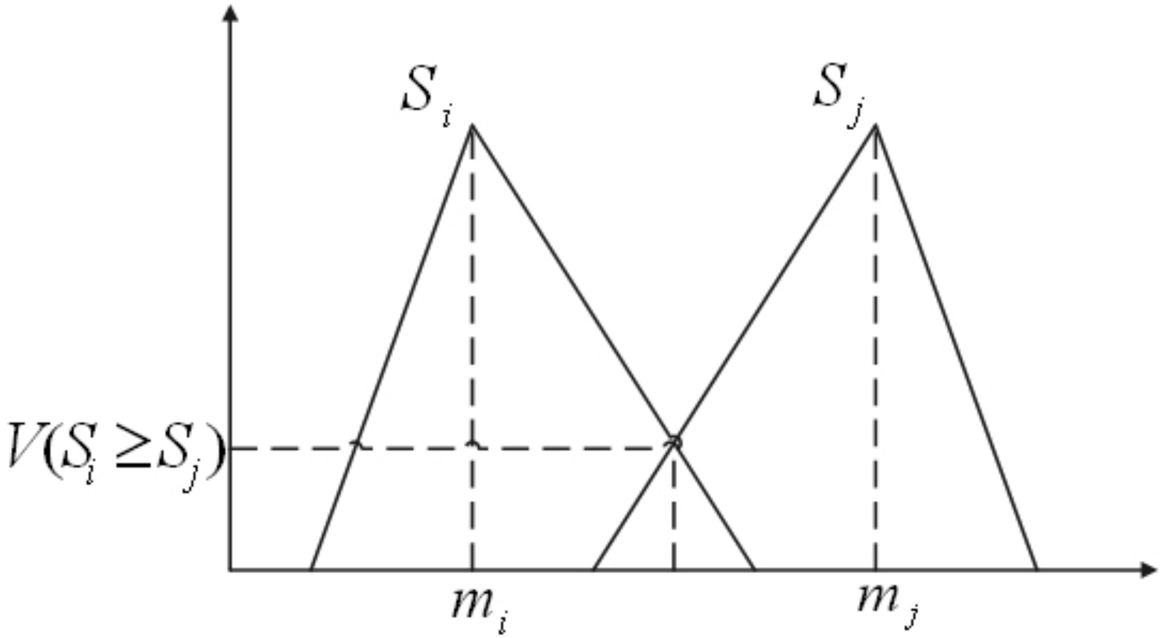


Метод FAHP

$$V(S_i \geq S_j) = 0 \qquad (l_j > u_i)$$



Метод FAHP



Метод FAHP

$$V(S_i \geq S_j) = \begin{cases} 1, & m_i \geq m_j \\ \dfrac{u_i - l_j}{(u_i - m_i) + (m_j - l_j)}, & (l_j \leq u_i) \wedge (m_i < m_j) \\ 0, & l_j > u_i \end{cases}$$

$$i, j = 1, \ldots, n; \quad j \neq i$$

Метод FAHP

3 етап: Розраховується ступінь переваги S_i над усіма $S_j,\ j=1,..,n$

$$V(S_i)=V(S_i \geq S_j \mid j=\overline{1,n})=\min_{j=\overline{1,n}} V(S_i \geq S_j)$$

4 етап: Розраховується нормований вектор ваг

$$w_i=\frac{V(S_i)}{\sum_{k=1}^{n} V(S_k)} \qquad i=\overline{1,n}$$

Метод FAHP
Приклад

<u>Дано:</u>

$A = \{a_i \mid i = 1,\ldots,8\}$ - множина альтернатив рішень

C - критерій

$D = \{(d_{ij} = [l_{ij}, m_{ij}, u_{ij}]) \mid i, j = 1,\ldots, n\}$ - ІМПП

$$L = \{(l_{ij}) \mid i, j = 1,\ldots,8\}$$

$$M = \{(m_{ij}) \mid i, j = 1,\ldots,8\}$$

$$U = \{(u_{ij}) \mid i, j = 1,\ldots,8\}$$

Метод FAHP
Приклад

$$L = \{(l_{ij}) \mid i, j = 1,\dots,8\}$$

1	4	6	1	7	2	5	3
0.167	1	3	0.2	5	0.25	2	0.333
0.125	0.2	1	0.143	2	0.167	0.333	0.2
0.333	3	5	1	6	1	4	2
0.111	0.143	0.25	0.125	1	0.143	0.2	0.143
0.25	2	4	0.333	5	1	3	1
0.143	0.25	1	0.167	3	0.2	1	0.25
0.2	1	3	0.25	5	0.333	2	1

Метод FAHP
Приклад

$$M = \{(m_{ij}) \mid i, j = 1,\ldots,8\}$$

1	5	7	2	8	3	6	4
1/5	1	4	1/4	6	1/3	3	1/2
1/7	1/4	1	1/6	3	1/5	1/2	1/4
1/2	4	6	1	7	2	5	3
1/4	1/6	1/3	1/7	1	1/6	1/4	1/6
1/3	3	5	1/2	6	1	4	2
1/6	1/3	2	1/5	4	1/4	1	1/3
1/4	2	4	1/3	6	1/2	3	1

Метод FAHP
Приклад

$$U = \{(u_{ij}) \mid i, j = 1, \ldots, 8\}$$

1	6	8	3	9	4	7	5
1/4	1	5	1/3	7	1/2	4	1
1/6	1/3	1	1/5	4	1/4	1	1/3
1	5	7	1	8	3	6	4
1/7	1/5	1/2	1/6	1	1/5	1/3	1/5
1/2	4	6	1	7	1	5	3
1/5	1/2	3	1/4	5	1/3	1	1/2
1/3	3	5	1/2	7	1	4	1

Метод FAHP
Приклад

$$S = \{(S_i) \mid i = 1,\ldots,8\}$$

	L	M	U
a1	0.173	0.267	0.410
a2	0.071	0.113	0.182
a3	0.025	0.041	0.069
a4	0.134	0.211	0.334
a5	0.013	0.017	0.026
a6	0.099	0.162	0.262
a7	0.036	0.061	0.103
a8	0.076	0.127	0.208

Метод FAHP
Приклад

$$V = \{(V(S_i \geq S_j)) \mid i, j = 1,\dots,8\}$$

-	1	1	1	1	1	1	1
0.052	-	1	0.330	1	0.630	1	0.888
0	0	-	0	1	0	0.619	0
0.742	1	1	-	1	1	1	1
0	0	0.049	0	-	0	0	0
0.458	1	1	0.722	1	-	1	1
0	0.376	1	0	1	0.034	-	0.287
0.198	1	1	0.468	1	0.756	1	-

$$w = (0.408 \quad 0.021 \quad 0 \quad 0.303 \quad 0 \quad 0.187 \quad 0 \quad 0.081)$$

МЕТОДИ НЕЧІТКОГО МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

ПІДХІД БЕЛМАНА-ЗАДЕ

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Підхід Белмана-Заде (досягнення нечіткої цілі)

X - універсальна множина альтернатив

- Нечітка ціль прийняття рішень G - нечітка підмножина X

  $\mu_G(x)$ - ступінь досягнення цілі при виборі альтернативи x

- Нечітке обмеження C – нечітка підмножина X

- Розв'язок задачі D – нечітка підмножина, $D = G \cap C$

  $\mu_D(x) = \min(\mu_G(x), \mu_C(x))$

Підхід Белмана-Заде (продовження)

- $\mu_D(x) = \min(\mu_{G_1}(x), \ldots, \mu_{G_n}(x), \mu_{C_1}(x), \ldots, \mu_{C_m}(x))$

- $\mu_D(x) = \min(\lambda_1 \mu_{G_1}(x), \ldots, \lambda_n \mu_{G_n}(x), v_1 \mu_{C_1}(x), \ldots, v_m \mu_{C_m}(x))$

Вибір альтернативи з максимальним ступенем належності до нечіткого рішення:

$$x^* = \arg\max_x \mu_D(x)$$

Максимізуюча альтернатива

Приклад

X = {1, 2, …, 10} - універсальна множина альтернатив

G – x близьке до 5 C1 – x близьке до 4 C2 – x близьке до 6

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_G(x)$	0	0.1	0.4	0.8	1	0.7	0.4	0.2	0.1	0
$\mu_{C1}(x)$	0.3	0.6	0.7	1	0.9	0.8	0.5	0.3	0.2	0
$\mu_{C2}(x)$	0.2	0.4	0.6	0.7	0.9	1	0.8	0.6	0.4	0.2

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_D(x)$	0	0.1	0.4	0.7	0.9	0.7	0.4	0.2	0.1	0

КЛАСИФІКАЦІЯ ЗАДАЧ НЕЧІТКОГО МАТЕМАТИЧНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Задачі нечіткого математичного програмування

1) Максимізація звичайної функції

$$f(x) \to \max \qquad\qquad f(x) \geq 0$$

на $\mu_C(x)$ - нечіткій множині допустимих альтернатив

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{\sup\limits_x f(x)}$$ - функція належності нечіткій множині цілі

Підхід Белмана-Заде $x_0 = \arg\max\limits_x \min(\tilde{f}(x), \mu_C(x))$

$$\lambda \to \max$$

при обмеженнях $\mu_C(x) \geq \lambda$ та $\tilde{f}(x) \geq \lambda$

Задачі нечіткого математичного програмування

2) **Нечіткий варіант стандартної задачі математичного програмування**

$$f(x) \to \max$$

$$g_i(x) \leq 0 \qquad x \in X \qquad i = 1,\ldots,m$$

$f(x) \underset{\sim}{\geq} z_0$ $\qquad$ z_0 – задане значення

$f(x) < z_0 - a$ - сильне порушення умови $f(x) \geq z_0$

$g_i(x) \underset{\sim}{\leq} 0$ $\qquad$ $x \in X$ $\qquad$ допускаємо можливість порушення обмеження з певним ступенем

$g_i(x) > b_i$ - сильне порушення умови $g_i(x) \leq 0$

Задачі нечіткого математичного програмування

$f(x) < z_0 - a$ - сильне порушення умови $f(x) \ge z_0$

$g_i(x) > b_i$ - сильне порушення умови $g_i(x) \le 0$

$$\mu_G(x) = \begin{cases} 0, & f(x) \le z_0 - a \\ \mu(x,a), & z_0 - a < f(x) < z_0 \\ 1, & f(x) \ge z_0 \end{cases}$$

$$\mu_{C_i}(x) = \begin{cases} 0, & g_i(x) \ge b_i \\ \nu_i(x,b_i), & 0 < g_i(x) < b_i \\ 1, & g_i(x) \le 0 \end{cases}$$

За підходом Белмана-Заде:

$$x^* = \arg\max_x \min(\mu_G(x), \mu_{C_1}(x), \ldots, \mu_{C_m}(x))$$

6.4. Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)

Надія І. Недашківська n.nedashkivska@gmail.com

Інститут прикладного системного аналізу НТУУ “КПІ”

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)

<u>Дано:</u> $D = \{(d_{ij} = [l_{ij}, u_{ij}]) \mid i, j = 1, \ldots, n\}$ $\quad 0 < l_{ij} \le u_{ij}$

- обернено симетрична ІМПП

<u>Знайти:</u> $w = \{w_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ - вектор чітких ваг альтернатив

$$w_i \in \Re \quad w_i > 0$$

ІМПП називається <u>**нечітко узгодженою**</u>, якщо

$$\exists\, w = (w_1, \ldots, w_n),\ w_i > 0,\ w_i \in \Re \qquad \sum_i w_i = 1$$

такий що $l_{ij} \underset{\sim}{\le} w_i / w_j \underset{\sim}{\le} u_{ij}$ для $i < j$

Допускаємо порушення чітких нерівностей з деяким ступенем

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)

$$\begin{cases} w_i - u_{ij} w_j \underset{\sim}{\leq} 0 & i < j \\ -w_i + l_{ij} w_j \underset{\sim}{\leq} 0 \end{cases} \qquad R w \underset{\sim}{\leq} 0 \qquad R \in \Re^{m \times n} \qquad m = n(n-1)$$

k-ий рядок системи: $R_k w \underset{\sim}{\leq} 0 \qquad k = 1,2,\ldots,m$

$$\mu_k(R_k w) = \begin{cases} 1, & R_k w \leq 0, \\ 1 - \dfrac{R_k w}{d_k}, & 0 < R_k w \leq d_k, \\ 0, & R_k w > d_k, \end{cases}$$

d_k - параметр наближеного задоволення чіткої нерівності $R_k w \leq 0$

- функції приналежності нечітких обмежень на множині:

$$T^{n-1} = \left\{ (w_1, \ldots, w_n) \mid w_i > 0, \ \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}$$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)

Нечіткою допустимою областю $\widetilde{A}$ на множині T^{n-1} називається нечітка множина, яка є перетином всіх нечітких обмежень:

$$\tilde{A} = \bigcap_{k=1}^{m} \underset{\sim k}{\leq} \qquad \mu_{\tilde{A}}(w) = \left\{ \min\{\mu_1(R_1 w),\dots,\mu_m(R_m w)\} \mid w_i \in R^+, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}$$

Максимізуючим розв'язком називається вектор

$$w^* = \arg\max_{w} \mu_{\widetilde{A}}(w)$$

$$w^* = \arg\max_{w} \left\{ \min\{\mu_1(R_1 w),\dots,\mu_m(R_m w)\} \mid \sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \right\}$$

$$\min\{\mu_1(R_1 w),\dots,\mu_m(R_m w)\} = \lambda \qquad \lambda \leq \mu_k(R_k w) \qquad k = 1,2,\dots,m$$

$$d_k \lambda + R_k w \leq d_k$$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)

$$\max \lambda$$

при обмеженнях

$$d_k \lambda + R_k w \le d_k \qquad k = 1,2,\ldots,m$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

$$w_i > 0 \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

розв'язок : (w^*, λ^*)

w^* - максимізуючий розв'язок

$\lambda^* = \mu_{\tilde{A}}(w^*)$ - рівень задоволення розв'язком

Індексом узгодженості $CI\ (FPP)$ називається $\lambda^* = \mu_{\tilde{A}}(w^*)$,

де w^* - максимізуючий розв'язок.

$CI = \lambda^* \ge 1$ т.т.т.к. ІМПП узгоджена

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming)
Дослідження властивостей

Твердження. Якщо ІМПП узгоджена, то $\lambda^* \geq 1$

Доведення

ІМПП узгоджена $\Rightarrow \exists w = \{w_i \in R^+\} : l_{ij} \leq w_i / w_j \leq u_{ij} \Rightarrow$

$$\forall k = 1,2,...,2m : R_k w \leq 0 \Rightarrow \forall k = 1,2,...,2m : \mu_k(R_k w) \geq 1 \Rightarrow$$

$$\mu_{\tilde{P}}(w) = \min(\mu_1(R_1 w),...,\mu_{2m}(R_{2m} w) \mid w_i \in R^+, \sum_{i=1}^{n} w_i = 1) \geq 1 \Rightarrow \lambda^* \geq 1,$$ де $w^* = w$

Твердження. Якщо ІМПП неузгоджена, то $\lambda^* \in (0,1)$

Доведення

ІМПП неузгоджена $\Rightarrow \exists w = \{w_i \in R^+\} : l_{ij} \tilde{\leq} w_i / w_j \tilde{\leq} u_{ij} \quad \forall i < j \Rightarrow$

$\exists (i,j) : w_i - w_j u_{ij} > 0$ або $-w_i + w_j l_{ij} > 0 \Rightarrow \exists k \in \{1,2,...,2m\} : R_k w > 0 \Rightarrow$

$$\exists k \in \{1,2,...,2m\} : \mu_k(R_k w) < 1 \Rightarrow \mu_{\tilde{P}}(w) = \min(\mu_1(R_1 w),...,\mu_{2m}(R_{2m} w)) < 1$$

$\lambda^* \in (0,1)$, де $w^* = w$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

$A=\{a_1,a_2\}$ $\tilde{d}_{12}=[l_{12},m_{12},u_{12}]$ – трикутне нечітке число (ТНЧ)

$l_{12}(\alpha)\le w_1/w_2\le u_{12}(\alpha)$ $l_{12}(\alpha)=\alpha(m_{12}-l_{12})+l_{12}$

$u_{12}(\alpha)=\alpha(m_{12}-u_{12})+u_{12}$

Задача розрахунку ваг на кожному α - рівні:

$$\begin{cases}\lambda\to\max\\ d_1\lambda+R_1w\le d_1\\ d_2\lambda-R_2w\le d_2\\ w_1+w_2=1\\ w_1,w_2>0\end{cases}\qquad R=\begin{pmatrix}1 & -u_{12}(\alpha)\\ -1 & l_{12}(\alpha)\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow\qquad\begin{cases}\lambda\to\max\\ d_1\lambda+w_1-u_{12}(\alpha)w_2\le d_1\\ d_2\lambda-w_1+l_{12}(\alpha)w_2\le d_2\\ w_1+w_2=1\\ w_1,w_2>0\end{cases}\quad(*)$$

Твердження. Якщо $\tilde{d}_{12}=(l_{12},m_{12},u_{12})$ - симетричне ТНЧ і параметри $d_1=d_2=d$, то розв’язок задачі (*) не залежить від значення d.

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

Твердження. Нехай $\tilde{d}_{12} = (l_{12}, m_{12}, u_{12})$ - симетричне ТНЧ і параметри $d_1 = d_2 = d$. Розв'язок задачі (*) не залежить від значення d.

Доведення.

$$\lambda \to \max; \quad d_1\lambda + w_1 - u_{12}w_2 \le d; \quad d_2\lambda - w_1 + l_{12}w_2 \le d; \quad w_1 + w_2 = 1, w_1, w_2 > 0$$

$$2d\lambda + l_{12}w_2 - u_{12}w_2 \le 2d; \qquad \lambda \to \max \Rightarrow \lambda = \frac{u_{12} - l_{12}}{2d} w_2 + 1$$

$$1. d + w_2 \frac{u_{12} - l_{12}}{2d} + w_1 - u_{12}w_2 \le d \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} \le \frac{u_{12} - l_{12}}{2}$$

$$2. d + w_2 \frac{u_{12} - l_{12}}{2d} - w_1 + l_{12}w_2 \le d \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} \ge \frac{u_{12} - l_{12}}{2} \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{u_{12} - l_{12}}{2}$$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

$A = \{a_1, a_2\}$ $\tilde{d}_{12} = [1,2,3]$ - симетричне ТНЧ

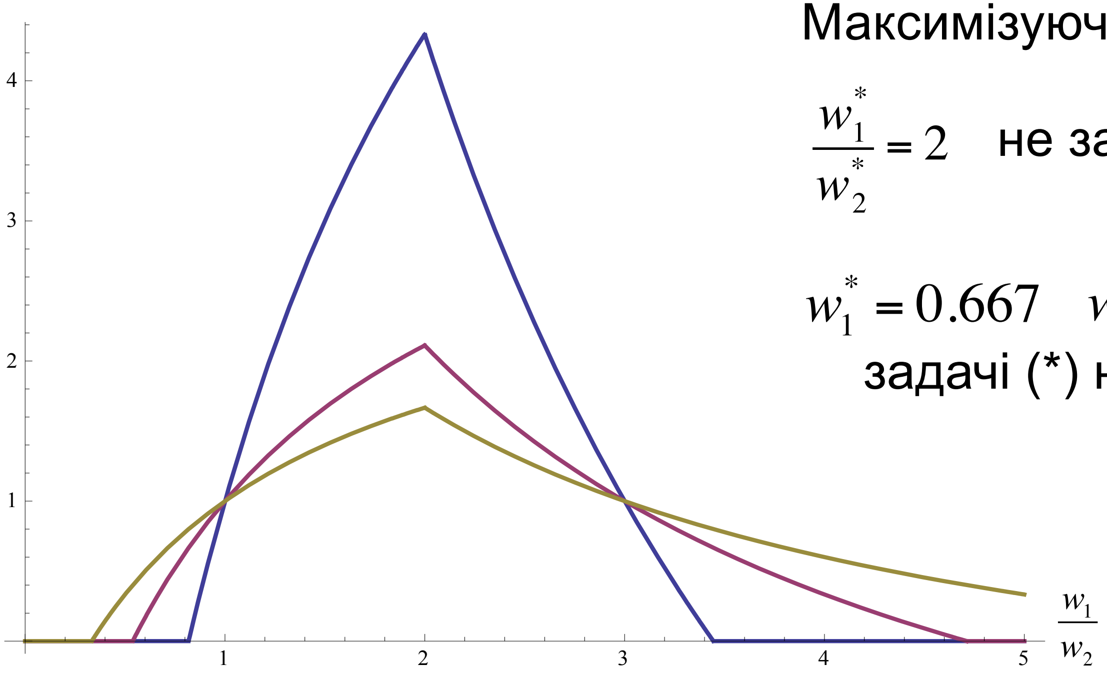
$\alpha = 0$ $d_{12}(\alpha) = [1,3]$ параметри $d_1 = d_2 = d$

$\mu_{\tilde{A}}(w) = \lambda$

$d = 0.1$

$d = 0.3$

$d = 0.5$



Максимізуючий розв'язок w^* :

$\frac{w_1^*}{w_2^*} = 2$ не залежить від значення d.

$w_1^* = 0.667$ $w_2^* = 0.333$ - розв'язок задачі (*) на кожному α - рівні

$w_1^* / w_2^* = 2$ задовольняє обмеженням $l_{ij} \leq w_i / w_j \leq u_{ij}$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

Твердження. Нехай $\tilde{d}_{12} = (l_{12}, m_{12}, u_{12})$ - несиметричне ТНЧ, $d_1 = d_2 = d$.
Відношення w_1^* / w_2^* дорівнюють середнім значенням інтервалів α – рівнів .

Доведення.

$$\lambda \to \max; \ \ d_1\lambda + w_1 - u_{12}(\alpha)w_2 \le d; \ \ d_2\lambda - w_1 + l_{12}(\alpha)w_2 \le d; \ \ w_1 + w_2 = 1, w_1, w_2 > 0$$

$$2d\lambda + l_{12}(\alpha)w_2 - u_{12}(\alpha)w_2 \le 2d; \qquad \lambda \to \max \Rightarrow \lambda = \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2d} w_2 + 1$$

$$1.\, d + w_2 \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2d} + w_1 - u_{12}(\alpha)w_2 \le d \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} \le \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2}$$

$$2.\, d + w_2 \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2d} - w_1 + l_{12}(\alpha)w_2 \le d \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} \ge \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2} \Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{u_{12}(\alpha) - l_{12}(\alpha)}{2}$$

Розв’язок задачі (*) не залежить від значення d.

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

$A = \{a_1, a_2\}$ $\tilde{d}_{12} = [0.5, 1, 3]$ - несиметричне ТНЧ

параметри $d_1 = d_2 = d = 1$

α	l_{12}	u_{12}	w_1^*	w_2^*	w_1^* / w_2^*	λ^*
0	0.50	3.0	0.636	0.364	1.75	1.455
0.3	0.65	2.4	0.604	0.396	1.525	1.347
0.5	0.75	2.0	0.579	0.421	1.375	1.263
0.5 ($d_1 = 1$, $d_2 = 0.5$)	0.75	2.0	0.579	0.421	1.375	1.132
0.8	0.90	1.4	0.535	0.465	1.150	1.116
1.0	1.00	1.0	0.5	0.5	1	1

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

$A = \{a_1, a_2, a_3\}$ $\quad d_{12} = [1.5, 2, 2.5]$ $\quad d_{13} = [4, 5, 6]$ $\quad d_{23} = [2.5, 3, 3.5]$

Задача розрахунку ваг на α - рівні:

$$\begin{cases} \lambda \to \max \\ d_1\lambda + w_1 - u_{12}(\alpha)w_2 \le d_1 \\ d_2\lambda - w_1 + l_{12}(\alpha)w_2 \le d_2 \\ d_3\lambda + w_2 - u_{23}(\alpha)w_3 \le d_3 \\ d_4\lambda - w_2 + l_{23}(\alpha)w_3 \le d_4 \\ d_5\lambda + w_1 - u_{13}(\alpha)w_3 \le d_5 \\ d_6\lambda - w_1 + l_{13}(\alpha)w_3 \le d_6 \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \\ w_1, w_2, w_3 > 0 \end{cases}$$

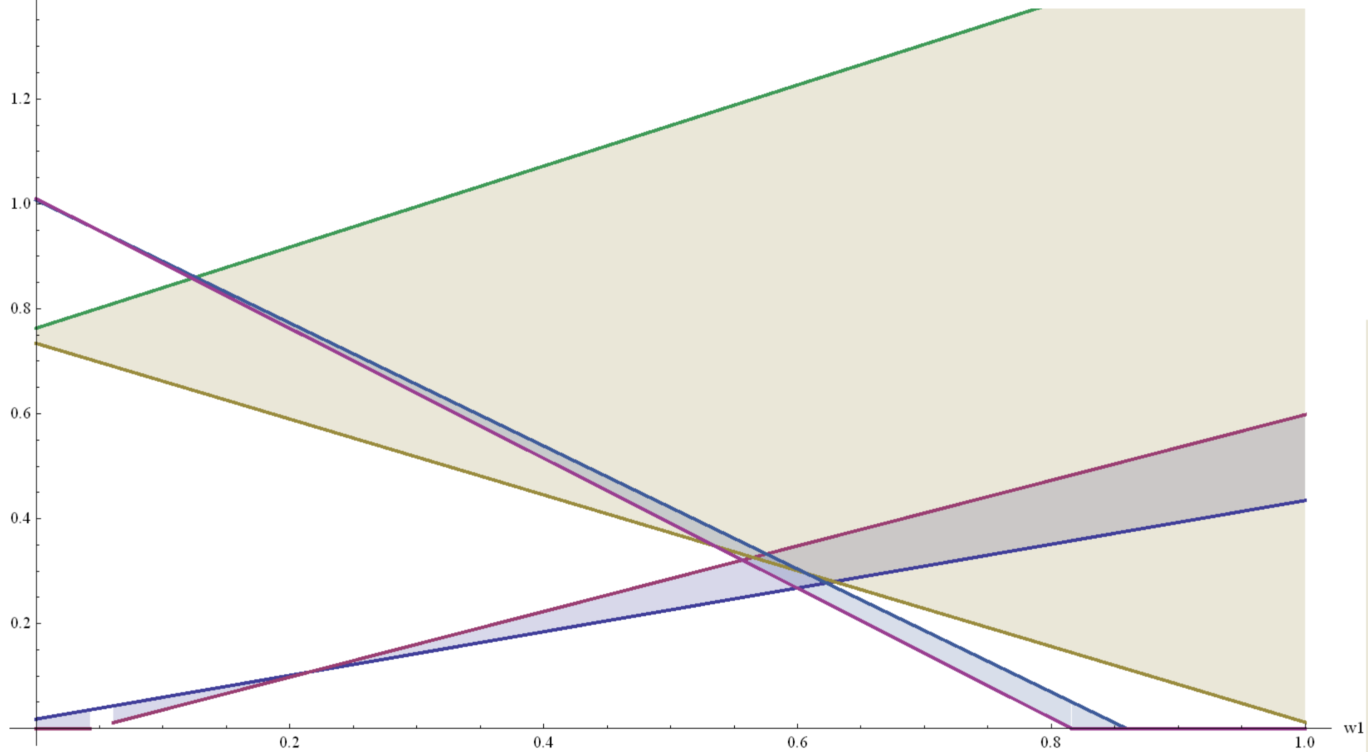
Максимізуючий розв'язок :

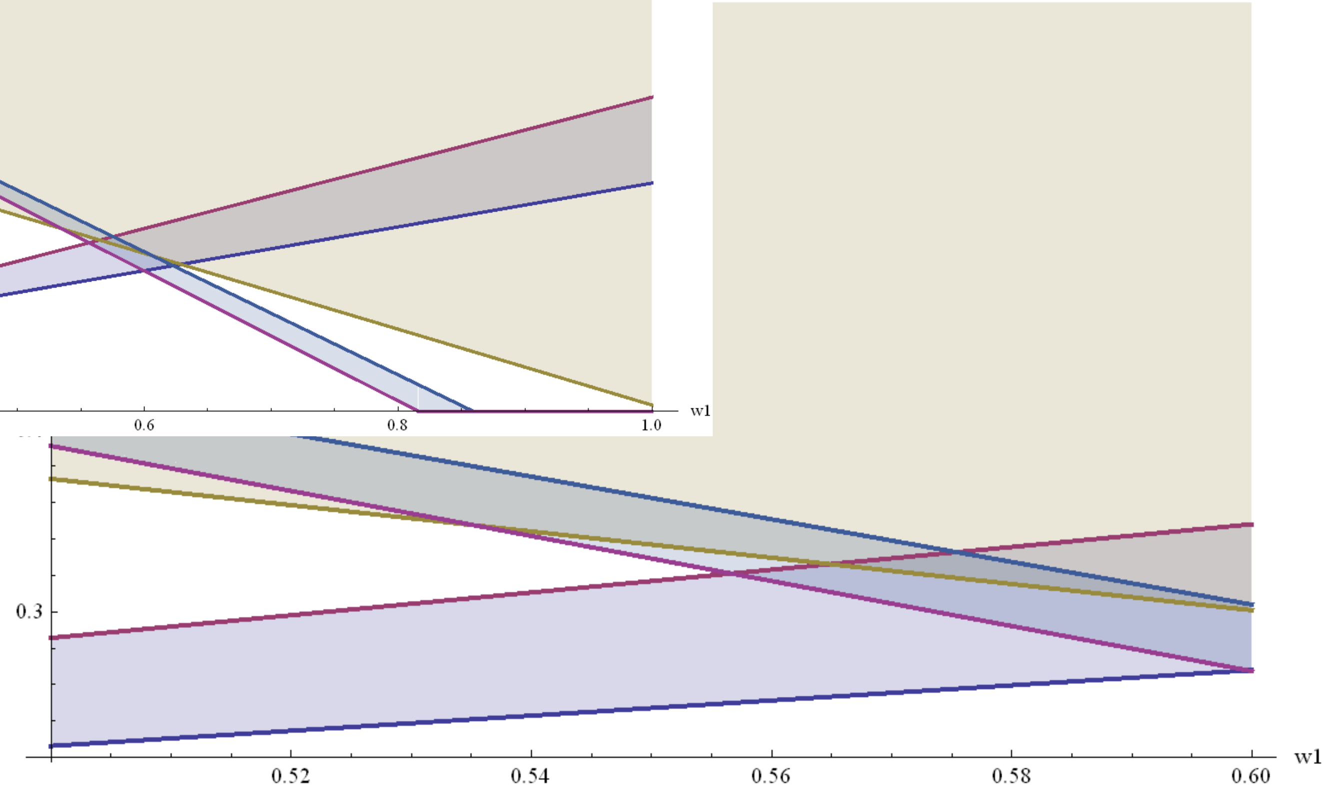
α	w_1^*	w_2^*	w_3^*	λ^*
0	0.5556	0.3333	0.1111	1.056
0.3	0.5699	0.3226	0.1075	1.038
0.5	0.5748	0.3171	0.1081	1.020
0.8	0.5802	0.3099	0.1099	0.991
1.0	0.5833	0.3056	0.1111	0.972

параметри $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 1$

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

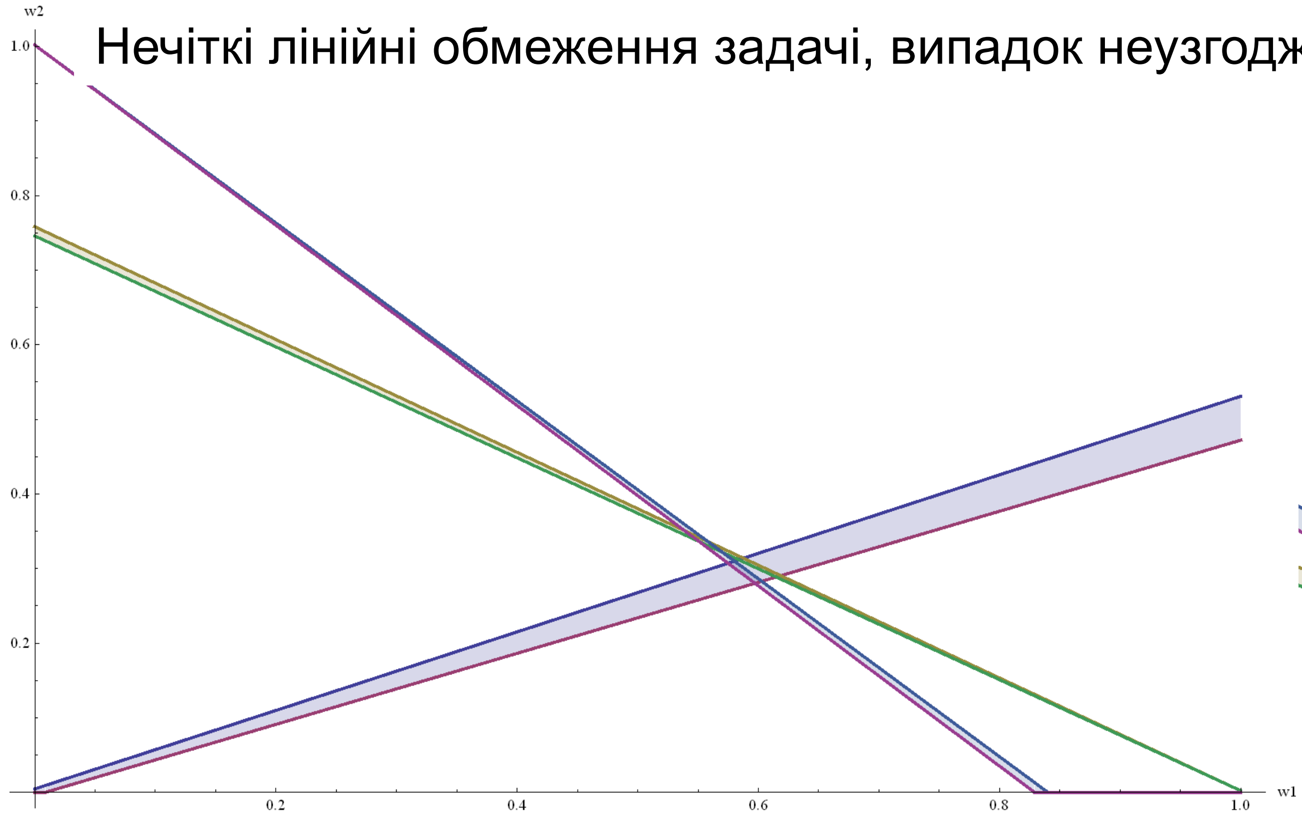
Нечіткі лінійні обмеження задачі, випадок узгодженої ІМПП, $\alpha = 0.2$

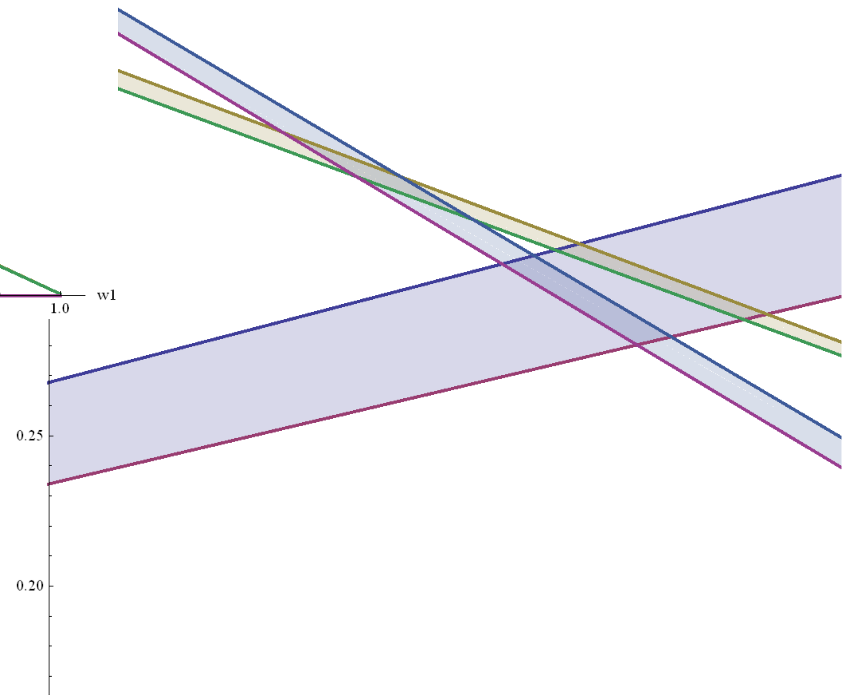




Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Дослідження властивостей

Нечіткі лінійні обмеження задачі, випадок неузгодженої ІМПП, $\alpha = 0.8$





Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Приклад 1

$d_{12} = [1, 2, 3]$ - симетричне трикутне нечітке число

$\alpha = 0$ параметри $d_1 = d_2 = d$ 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 10

	a1	a2	Ваги
a1	1	[1, 3]	0.667
a2		1	0.333

$\alpha = 1$ параметри $d_1 = d_2 = d$ 0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 10

	a1	a2	Ваги
a1	1	2	0.667
a2		1	0.333

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Приклад 1 (продовження)

$d_{12} = [1, 2, 3]$ - симетричне трикутне нечітке число

$\alpha = 0.5$ параметри $d_1 = d_2 = d$ =0.1, 0.3, 0.5, 1.0, 10

	a1	a2	Ваги
a1	1	[1.5, 2.5]	0.667
a2		1	0.333

Метод FPP (Fuzzy Preference Programming) Приклад 2

$d_{12} = [1.5, 2, 2.5]$ симетричні трикутні нечіткі числа

$d_{23} = [2.5, 3, 3.5]$ $d_{13} = [4, 5, 6]$

$\alpha = 0$ ІМПС узгоджена

параметри $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 1$

	a1	a2	a3	Ваги (максимізуючий розв'язок)
a1	1	[1.5, 2.5]	[4, 6]	0.5556
a2		1	[2.5, 3.5]	0.3333
a3			1	0.1111