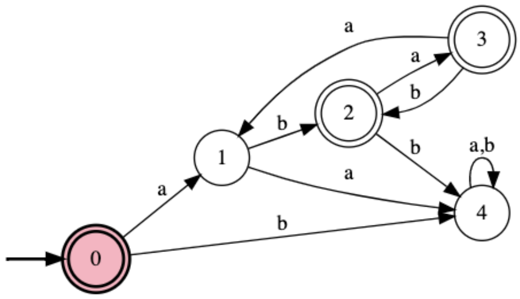
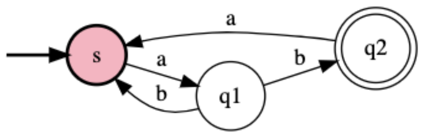
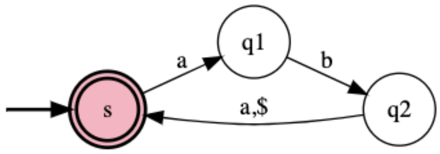
5. Краен недетерминиран автомат

$L = (ab \cup aba)^*$



краен детерминиран автомат на L





<u>Заб.</u> Където $\$ = \varepsilon$

<u>Def.</u> Краен недетерминиран автомат (КНА) се нарича петорката $M =< K, \Sigma, \Delta, \mathrm{s}, \mathrm{F} >$, където K - крайно множество (крайна азбука) от състояния,
Σ - крайна основна азбука,
$\mathrm{s} \in K$, s - начално състояние,
$\mathrm{F} \subseteq \mathrm{K}$, F- множество на заключителните състояния,
$\Delta \subseteq \mathrm{K} \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \mathrm{K}$, Δ – релация на преходите.

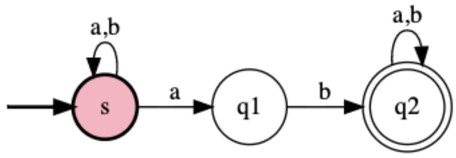
$$(q, u, q') \in \Delta \Rightarrow q, q' \in K, u \in \Sigma \text{ или } u = \varepsilon$$

<u>Def.</u> Конфигурация за автомата $M =< K, \Sigma, \Delta, \mathrm{s}, \mathrm{F} >$, се нарича всеки елемент от $K \times \Sigma^*$.
$(q, w) \in K \times \Sigma^* \Rightarrow q \in K, w \in \Sigma^*$.

<u>Def.</u> Ще определиме релацията (бинарна) $\vdash_M$ в $K \times \Sigma^*$. Нека $M =< K, \Sigma, \Delta, \mathrm{s}, \mathrm{F} >$ е КНА. Казваме, че конфигурацията (q, w) се преработва за една стъпка в (q', w') и пишем $(q, w) \vdash_M (q', w')$ т.т.к. $\exists\, u \in \Sigma^* \cup \{\varepsilon\}$: $w = uw'$ и $(q, u, q') \in \Delta$.

$\vdash_M$ – бинарна релация в множеството на конфигурациите.
$\vdash_M{}^*$- рефлексивно и транзитивно затваряне на $\vdash_M$.

<u>Def.</u> Нека $M =< K, \Sigma, \Delta, \mathrm{s}, \mathrm{F} >$ е КНА. Казваме, че w се разпознава(приема) от автомата M, ако съществува $(f, \varepsilon), f \in F$, такова, че $(s, w) \vdash_M{}^* (f, \varepsilon)$.



$ababa$ – дума
$(s, ababa) \vdash_M (s, baba) \vdash_M (s, aba) \vdash_M (s, ba) \vdash_M (s, a) \vdash_M (s, \varepsilon)$
$(s, ababa) \vdash_M (q_1, baba) \vdash_M (q_2, aba) \vdash_M{}^* (q_2, \varepsilon)$

Def. Нека $M =< K, \Sigma, \Delta, \mathrm{s}, \mathrm{F} >$ е КНА.
С $L(M) = \{w | w \in \Sigma^* \text{ и } w \text{ се разпознава от } M\}$.

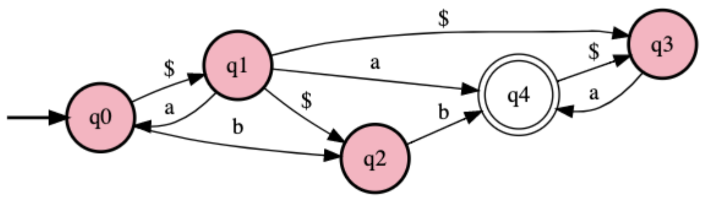
Def. Нека M_1 и M_2 са два автомата. Казваме, че M_1 и M_2 са еквивалентни, ако $L(M_1) = L(M_2)$.

Забележка. Ако $M =< K, \Sigma, \delta, \mathrm{s}, \mathrm{F} >$ е КДА, то можем да го разглеждаме като КНА по следния начин:
$M_1 =< K_1, \Sigma, G_\delta, \mathrm{s}, \mathrm{F} >$, където $G_\delta = \{(q, a, q') | \delta(\mathrm{q}, \mathrm{a}) = q'\}$.

Теорема. Нека $M =< K, \Sigma, \Delta, \mathrm{s}, \mathrm{F} >$ е КНА. Тогава съществува КДА $M' =< K', \Sigma, \delta', \mathrm{s}', \mathrm{F}' >$, такъв, че M и M' са еквивалентни.

Доказателство:
$M' =< K', \Sigma, \delta', \mathrm{s}', \mathrm{F}' >$
$K' = 2^K = \mathcal{P}(K)$ – съвкупността на всички подмножества на K.
$\mathrm{F}' = \{Q | Q \subseteq \mathrm{K}: \mathrm{Q} \cap \mathrm{F} \neq \emptyset\}$
Дефинираме $E(q) = \{p | (q, \varepsilon) \vdash_M{}^* (p, \varepsilon)\}$
$R = \{(p_1, p_2) | \, p_1, p_2 \in K \text{ и } (p_1, \varepsilon, p_2) \in, \Delta\}$
$E(q)$ – затв. на $\{q\}$ относно релацията R

Пример за E:



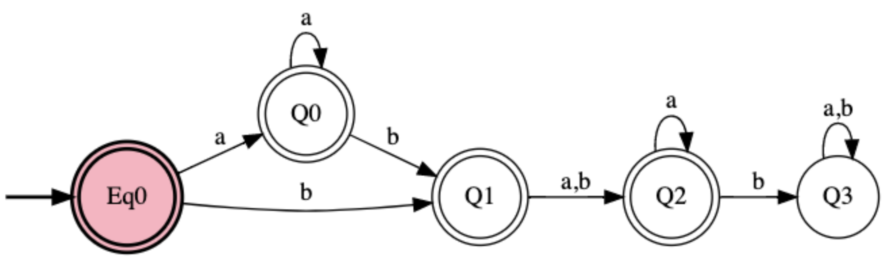
$E(q_0) = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
$E(q_1) = \{q_1, q_2, q_3\}$
$E(q_2) = \{q_2\}$
$E(q_3) = \{ q_3\}$
$E(q_4) = \{ q_3, q_4\}$

$s' = E(s)$
$\delta'(Q, \sigma) = \cup \{E(p) | \text{Съществува } q \in Q, p \in K: (q, \sigma, p) \in \Delta\}$

<u>Помощно твърдение:</u>
$(q, w) \vdash_M{}^* (p, \varepsilon)$ т. т. к $(E(q), w) \vdash_M{}^* (P, \varepsilon)$, такова, че $p \in P$.

Тогава
$w \in L(M) \Leftrightarrow \exists (s, w) \vdash_M{}^* (f, \varepsilon), f \in F$
$\Leftrightarrow (E(s), w) \vdash_M{}^* (P, \varepsilon)$, където $f \in P$
$P \cap F \neq \emptyset; P \in F'$
$\Leftrightarrow w \in L(M')$
Следователно $L(M) = L(M')$.

$s' = E(q_0)$
$\delta'(E(q_0), a) = E(q_0) \cup E(q_4) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} = Q_0$
$\delta'(E(q_0), b) = E(q_2) \cup E(q_4) = \{q_2, q_3, q_4\} = Q_1$
$\delta'(Q_0, a) = E(q_0) \cup E(q_4) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\} = Q_0$
$\delta'(Q_0, b) = E(q_2) \cup E(q_4) = \{q_2, q_3, q_4\} = Q_1$
$\delta'(Q_1, a) = E(q_4) = \{q_3, q_4\} = Q_2$
$\delta'(Q_1, b) = E(q_4) = \{q_3, q_4\} = Q_2$
$\delta'(Q_2, a) = E(q_4) = \{q_3, q_4\} = Q_2$
$\delta'(Q_2, b) = \emptyset = Q_3$
$\delta'(Q_3, a) = \emptyset = Q_3$
$\delta'(Q_3, b) = \emptyset = Q_3$



Забележка. Eq0 = $E(q_0)$
