7. Лема за разрастването

<u>Теорема.</u> Нека L е регулярен език в азбуката Σ. Тогава съществува естествено число $n \geq 1$, такова, че за всяко $w \in L$ и $|w| \geq n$
съществуват $x, y, z -$ думи в азбуката Σ: $w = xyz,\ \ y \neq \varepsilon, |xy| \leq n$
и за всяко естествено i е изпълнено, че $xy^i z \in L$.

<u>Доказателство.</u>
Нека $M =< K, \Sigma, \delta, \mathrm{s}, \mathrm{F} >$ е краен детерминиран автомат, който разпознава езика L.
$|K| = n$

Нека $w \in L$,
$|w| \geq n$,
$w = a_1 \dots a_n \dots a_m$,
$m = |w| \geq n$

$(s, w) \vdash_M (q_1, a_2 \dots a_m) \vdash_M \dots \vdash_M (q_n, a_n \dots a_m) \vdash_M{}^* (f, \varepsilon), f \in F.$
$s, q_1, \dots, q_n = n + 1$

$\xRightarrow{\text{Дирихле}}$ $\exists$ поне 2 състояния от $s, q_1, \dots, q_n$, които съвпадат.
С q_i и q_j означаваме тези две състояния в редицата, които съвпадат, като $i < j$.
И те са първите две с това свойство.

$(s, w) \vdash_M{}^* (q_i, a_{i+1} \dots a_j) \vdash_M{}^* (q_j, a_{j+1} \dots a_m) \vdash_M{}^* (f, \varepsilon)$

$x = a_1 \dots a_i$
$y = a_{i+1} \dots a_j$
$z = a_{j+1} \dots a_m$
$|xy| \leq n, \qquad y \neq \varepsilon$

$xy^0 z \in L$?
$(xy^0 z) = xz$

$(s, xz) \vdash_M{}^* \left(q_i = q_j, z = a_{j+1} \dots a_m\right) \vdash_M{}^* (f, \varepsilon), f \in F.$

$\left(s, xy^i z\right) \vdash_M{}^* \left(q_i, y^i z\right) \vdash_M{}^* \left(q_i, y^{i-1} z\right) \vdash_M{}^* \left(q_i, y^{i-2} z\right) \vdash_M{}^* \dots \vdash_M{}^* (q_i, z) \vdash_M{}^* (f, \varepsilon),$
$x, y^i \in L.$