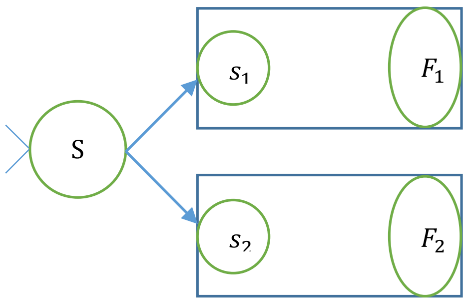
6. Крайни автомати и регулярни езици

Твърдение. Множеството на езиците, които се разпознават от краен детерминиран автомат са затворени относно:

a. Обединение;
b. Конкатенация;
c. Звезда на Клини;
d. Допълнение;
e. Сечение.

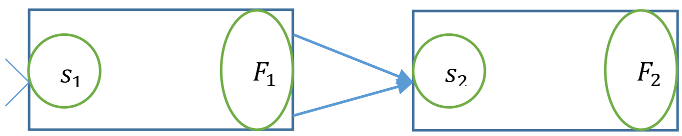
Доказателство:
Нека $M_1 =< K_1, \Sigma, \Delta_1, s_1, F_1 >$ и $M_2 =< K_2, \Sigma, \Delta_2, s_2, F_2 >$ са крайни автомати, такива, че $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, $L_1 = L(M_1)$ и $L_2 = L(M_2)$

a. $L_1 \cup L_2$ се разпознава от краен автомат



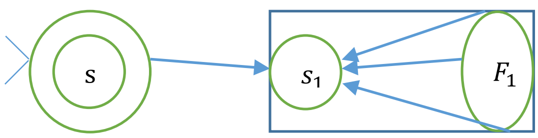
$$M =< K_1 \cup K_2 \cup \{s\},\ \Sigma,\ \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(s, \varepsilon, s_1), (s, \varepsilon, s_2)\},\ s,\ F_1 \cup F_2 >$$

b. $L_1 \circ L_2$ се разпознава от краен автомат



$$M =< K_1 \cup K_2,\ \Sigma,\ \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \{(f_1, \varepsilon, s_2) | f_1 \in F_1\},\ s_1,\ F_2 >$$

c. Звезда на Клини се разпознава от краен автомат



$$M =< K_1 \cup \{s_1\},\ \Sigma,\ \Delta_1 \cup \{(s, \varepsilon, s_1)\} \cup \{(f_1, \varepsilon, s_1) | f_1 \in F_1\},\ s,\ F_1 \cup \{s\} >$$

d. $\Sigma^*\backslash L_1$ се разпознава от краен автомат

$$M = < K_1, \Sigma, \Delta_1, \mathrm{s}_1, K_1\backslash \mathrm{F}_1 >$$

e. Сечението се разпознава от краен автомат

$$\Sigma^*\backslash(L_1 \cap L_2) \xRightarrow{\text{Де Морган}} (\Sigma^*\backslash L_1) \cup (\Sigma^*\backslash L_2)$$

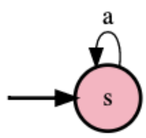
$L_1 \cap L_2 = \Sigma^*\backslash[(\Sigma^*\backslash L_1) \cup (\Sigma^*\backslash L_2)] = \Sigma^*\backslash(\Sigma^*\backslash(L_1 \cap L_2)) \Longrightarrow$ се разпознава от краен (детерминиран) автомат

<u>Теорема.</u> Един език L се разпознава от краен автомат $\Longleftrightarrow$ L е регулярен език.

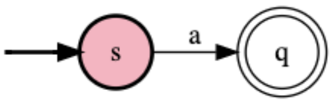
<u>Твърдение 1.</u> Ако L е регулярен, то L се разпознава от краен автомат.

<u>Доказателство на Твърдение 1.</u>
L е регулярен $\Longrightarrow$ съществува регулярен израз α, такъв, че $L = \mathcal{L}[\alpha]$.
Доказателството ще проведем с индукция относно построението на α.

1. $\alpha = \emptyset$, $\mathcal{L}[\alpha] = \emptyset$



2. $\alpha = a \in \Sigma$



3. $\alpha = \alpha_1 \cup \alpha_2$
   $\mathcal{L}[\alpha] = \mathcal{L}[\alpha_1] \cup \mathcal{L}[\alpha_2]$
   Съгласно ИП, $\mathcal{L}[\alpha_1]$ и $\mathcal{L}[\alpha_2]$ се разпознават от краен автомат.
   Съгласно **a.** от предното твърдение $\mathcal{L}[\alpha] = \mathcal{L}[\alpha_1] \cup \mathcal{L}[\alpha_2]$ се разпознава от краен автомат.

4. $\alpha = \alpha_1 \circ \alpha_2$
   Тогава $L = \mathcal{L}[\alpha] = \mathcal{L}[\alpha_1] \circ \mathcal{L}[\alpha_2]$.
   Съгласно ИП, $\mathcal{L}[\alpha_1]$ и $\mathcal{L}[\alpha_2]$ се разпознават от краен автомат.
   Съгласно **b.** от предното твърдение $\mathcal{L}[\alpha] = \mathcal{L}[\alpha_1] \circ \mathcal{L}[\alpha_2]$ се разпознава от краен автомат.

5. $\alpha = (\alpha_1)^*$ и $L = \mathcal{L}[\alpha] = (\mathcal{L}[\alpha_1])^*$
   Съгласно ИП, $\mathcal{L}[\alpha_1]$ се разпознава от краен автомат.
   Съгласно **c.** от предното твърдение L се разпознава от краен автомат.

<u>Твърдение 2.</u> Ако L се разпознава от краен автомат, то L е регулярен.

<u>Доказателство на Твърдение 2.</u>
Нека $L = L(M)$,
$M =< K, \Sigma, \Delta, \mathrm{s}, \mathrm{F} >$,
$K = \{q_1, \dots, q_n\}, s = q_1$,
$R(i, j, k) -$ езици, зависещи от i, j, k, където $i, j = \overline{1, n},\ \ k = \overline{0, n}$
$w \in \Sigma^*$, такава, че $(q_i, w) \vdash_M{}^* \left(q_j, \varepsilon\right)$ и не съществуват в този преход състояния, които да имат индекси $\geq k + 1$.
$(q_i, w) \vdash_M \left(q_{l_1}, w_1\right) \vdash_M \dots \vdash_M \left(q_{l_p}, w_p\right) \vdash_M \left(q_j, \varepsilon\right)$, където $l_1, \dots, l_p \leq k$.

Поставяме си за цел да докажеме, че $R(i, j, k)$ са регулярни езици за
$i, j = \overline{1, n}$ и $k = \overline{0, n}$.

$\cup \left\{R(1, j, n) \middle| q_j \in F\right\} = L(M)$
$R(1, j, n) = \{w | (q_1, w)\} \vdash_M{}^* (q_j, \varepsilon)\}$, където $q_j \in F$.

Ще го докажеме с индукция относно $k, 0 \leq k \leq n$.

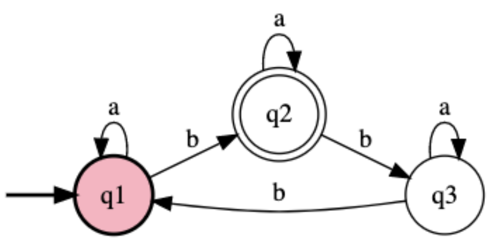
За $k = 0$
$R(i, j, 0) \subseteq \Sigma \cup \{\varepsilon\}$.
$$R(i, j, 0) = \begin{cases} \emptyset \\ \varepsilon \\ \{a, b\} \\ \dots \end{cases}$$

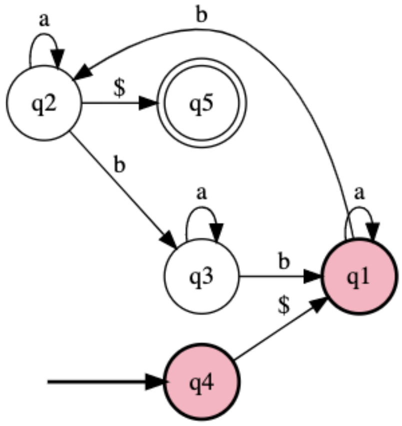
Допускаме, че твърдението е вярно за $R(i, j, k - 1)$, за произволни i, j.
Ще докажем за $R(i, j, k)$ (т.е. че е регулярен език).

$R(i, j, k) = R(i, j, k - 1) \cup \left(R(i, k, k - 1) \circ (R(k, k, k - 1))^* \circ R(k, j, k - 1)\right)$
$(q_i, w) \vdash_M{}^* \left(q_j, \varepsilon\right)$
$(q_i, w) \vdash_M{}^* (q_k, w_1) \vdash_M{}^* (q_k, w_2) \vdash_M{}^* \dots \vdash_M{}^* \left(q_k, w_p\right) \vdash_M{}^* \left(q_j, \varepsilon\right)$

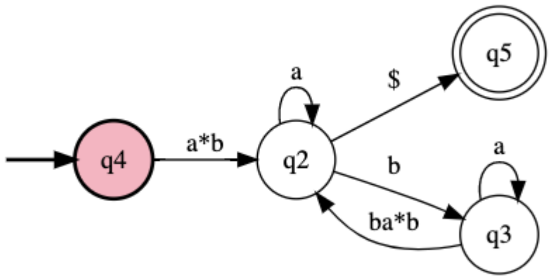
<u>Заб.</u> $(q_i, w) \vdash_M{}^* (q_k, w_1)$ и тн. са междинни преходи с индекс $\leq k - 1$.

Нека $M = < K, \Sigma, \Delta, \mathrm{s}, \mathrm{F} >$ – краен автомат.
Ще разгледаме автомати, такива, че ако $(q, u, p) \in \Delta$, то $p \neq s$ и $q \neq f$.
$F = \{f\}$
$K = \{q_1, \dots, q_n\}$,
$q_{n-1} = s, q_n = f$.

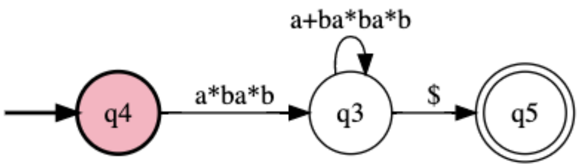




1.



2.



3.