

Математический анализ

ИИИ, 2025

Университет ИТМО
Лектор: Ершов А.Р.

Содержание

1	Февраль	2
1.1	Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал. . . .	2
1.2	Производная	2
1.3	Приближение функции, полиномы	4
1.4	Уравнение касательной	5
1.5	Уравнение нормали	5
1.6	Правила дифференцирования	5
1.7	Следствия	7
1.8	Теорема. Производная композиции функций.	7
1.9	Теорема. Производная обратной функции	7
1.10	Параметрические функции	9
1.10.1	Локальный максимум и минимум функции	9
1.10.2	Точка внутреннего экстремума	10
1.11	Французские теоремы	10
1.11.1	Теорема Ферма	10
1.11.2	Теорема Ролля	11
1.11.3	Теорема Лагранжа и следствия	11
1.11.4	Теорема Коши	11
1.11.5	Теорема	11
1.12	Теорема Эйлера	11

1 Февраль

1.1 Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал.

Определение

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, x — предельная точка E ,
 $(x + h) \in E$.

Если

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= A(x) \cdot h + \alpha(x, h), \\ \text{при } h \rightarrow 0, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, h)}{h} &= 0, \end{aligned}$$

то функция f называется *дифференцируемой* в точке x , а число $A(x)$ называется *производной* функции f в точке x и обозначается $f'(x)$.

Число $A(x) \cdot h$ называется *дифференциалом* функции f в точке x и обозначается $df(x)$.

Например, для $f(x) = x^2$:

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2, \quad h \rightarrow 0$$

откуда следует $A(x) = 2x$, $h^2 = h \cdot h = o(h)$.

1.2 Производная

Определение

Пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка E .

Если $\exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, то его называют производной функции в точке a .

Н.В. Пусть $x - a = h$, то при $x \rightarrow a$, $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

ЛМ (О связи производной и дифференциала)
 f дифференцируема в точке $x \iff \exists$ конечная $f'(x)$.

Доказательство. \implies (Если f дифференцируема в точке x , то существует конечная $f'(x)$):

По определению, если функция f дифференцируема в точке x , то существует линейное приближение приращения функции:

$$f(x + h) - f(x) = A(x) \cdot h + \alpha(x, h),$$

где $\alpha(x, h)$ — бесконечно малая функция, то есть $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha(x, h)}{h} = 0$.

Тогда $A(x)$ является производной f в точке x , то есть $f'(x) = A(x)$. Следовательно, $f'(x)$ существует и конечна.

\impliedby (Если существует конечная $f'(x)$, то f дифференцируема в точке x):

Если существует конечная производная $f'(x)$, то по определению производной:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Это означает, что приращение функции можно записать в виде:

$$f(x + h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h).$$

Следовательно, f дифференцируема в точке x . □

LM Если f дифференцируема в x_0 , то f непрерывна в x_0 .

Доказательство. По определению, если функция f дифференцируема в точке x_0 , то существует предел:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Это означает, что приращение функции можно записать в виде:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h).$$

Теперь рассмотрим предел $f(x_0 + h)$ при $h \rightarrow 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)).$$

Поскольку $f'(x_0) \cdot h \rightarrow 0$ и $o(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, получаем:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Следовательно, f непрерывна в точке x_0 .

N.B. Не работает в обратную сторону. □

N.B. $\tan(\alpha_{\text{касательной}}) = f'(x_0)$, x_0 — точка касания.

1.3 Приближение функции, полиномы

Приближение функции $f(x)$ в точке x_0 в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0,$$

где

$$c_n = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1})}{(x - x_0)^n}.$$

Является приближением $f(x)$ в полиномиальном виде.

1.4 Уравнение касательной

Касательная к $f(x)$ в точке x_0 определяется уравнением вида

$$k(x) = c_0 + c_1(x - x_0), \text{ что}$$

$$f(x) - k(x) = o(x - x_0), x \rightarrow x_0$$

Из предыдущего пункта:

$$c_0 = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

$$c_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$k(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \text{ (Если функция дифференцируема в точке } x_0)$$

1.5 Уравнение нормали

Уравнение нормали функции в точке x_0 задается так:

$$n(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

1.6 Правила дифференцирования

Теорема

Пусть f и g дифференцируемы в точке x , тогда:

$$1. (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$2. (fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$3. \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g \neq 0$$

Дифференцируемы в x .

$$1. (f + g)' = f' + g'$$

$$2. (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$3. \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

Доказательство. 1. Так как f и g дифференцируемы в точке x ,

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h), h \rightarrow 0$$

$$g(x+h) - g(x) = g'(x) \cdot h + o(h), h \rightarrow 0$$

Рассмотрим

$$(f + g)(x+h) - (f + g)(x) =$$

$$f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x) = f'(x) \cdot h + o(h) +$$

$$g'(x) \cdot h + o(h) = h \cdot (\mathbf{f}'(\mathbf{x}) + \mathbf{g}'(\mathbf{x})) + o(h), h \rightarrow 0,$$

$$\text{вида } A(x) \cdot h + o(h)$$

\implies дифференцируемо в x .

$$3. \left(\frac{f}{g}\right)(x+h) - \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)}$$

$$= \frac{f(x)g(x) + f'(x)g(x)h - f(x)g(x) - f(x)g'(x)h + o(h)}{g(x) \cdot g(x+h)} =$$

$$= \frac{(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) \cdot h}{g(x) \cdot g(x+h)} = \frac{A(x) \cdot h + o(h)}{g^2(h)}, \text{ так как } h \rightarrow 0 \implies$$

дифференцируемо в x .

$$(f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h)) \implies f(x+h) = f(x) + f'(x) \cdot h + o(h)$$

2. Доказывается аналогично частному. \square

1.7 Следствия

1. $(\sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot f_k(x))' = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot f_k'(x)$
2. $(\prod_{n=1}^k f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \dots \cdot f_n + \dots + f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n'$

1.8 Теорема. Производная композиции функций.

$$(gf)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$f : X \rightarrow Y, X \subset Y, f$ дифференцируема в x

$g : Y \rightarrow \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}, g$ дифференцируема в $y = f(x)$

Доказательство. $f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h), h \rightarrow 0$
 $g(y+t) - g(y) = g'(y) \cdot t + o(t), t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} (gf)(x+h) - gf(x) &= g(f(x+h)) - g(f(x)) = \\ &= g(f(x) + f'(x) \cdot h + o(h)) - g(f(x)) \end{aligned}$$

$$f(x) = y$$

Возьмем за $t : f'(x) \cdot h + o(h)$, тогда

$$\begin{aligned} g(f(x)+t) - g(f(x)) &= g(y+t) - g(y) = g'(y) \cdot t + o(t) = \\ &= g'(f(x)) \cdot (f'(x) \cdot h + o(h)) + o(f'(x) \cdot h + o(h)) = \\ &= g'(x) \cdot f'(x) \cdot h + o(h), h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Возьмем за $A(x) \cdot h : g'(x) \cdot f'(x) \cdot h$

$\Rightarrow A(x) \cdot h + o(h)$, дифференцируемо.

□

1.9 Теорема. Производная обратной функции

f дифференцируема в $x_0, \exists f^{-1}(x)$

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Доказательство. Возьмем $y_0 = f(x_0)$

$$\begin{aligned}
 (f^{-1})' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} = \\
 &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \\
 &= \frac{1}{f'(x)}
 \end{aligned}$$

□

Пример нахождения производной

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Рассмотрим определение производной:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Вынесем x^n :

$$(x+h)^n = x^n \left(1 + \frac{h}{x}\right)^n.$$

Тогда:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n \left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^n - 1 \right)}{h}.$$

Используем приближенное разложение $(1+u)^n \approx 1 + nu + o(u)$ при малых u :

$$\left(1 + \frac{h}{x}\right)^n - 1 \approx n \frac{h}{x} + o(h).$$

Подставляем:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n \left(n \frac{h}{x} + o(h) \right)}{h}.$$

Раскрываем множители:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + x^n o(h)}{h}.$$

Разделяем дробь:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + x^n \frac{o(h)}{h} \right).$$

Так как $\frac{o(h)}{h} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, остается:

$$nx^{n-1}.$$

Следовательно, производная:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

1.10 Параметрические функции

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cos(t)}{-\sin(t)} = -\operatorname{ctg}(t)$$

1.10.1 Локальный максимум и минимум функции

Пусть функция:

$$f(x) : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0 \in E$$

Определим локальный максимум(минимум) функции как:

$$\exists U(x_0) \subset E : \forall x \in U(x_0) :$$

$$1. f(x_0) \geq f(x)$$

$$2. f(x_0) \leq f(x)$$

В случаях 1. и 2. соответственно точку x_0 называют локальным максимумом или минимумом.

NB

$f(x_0)$ — локальный максимум или минимум соответственно.

Точка экстремума — точка локального максимума или минимума. (x_0)

1.10.2 Точка внутреннего экстремума

Точка x_0 будет называться точкой внутреннего экстремума если она является экстремумом, а также:

$$f(x) : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0 \in E$$

x_0 - предельная точка E_+ и E_-

$$E_+ = \{x \in E | x > x_0\}$$

$$E_- = \{x \in E | x < x_0\}$$

E_+, E_- — неформально, множества, где всё либо больше, либо меньше E .

1.11 Французские теоремы

1.11.1 Теорема Ферма

Рассмотрим $f(x) : E \rightarrow \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0$ — точка внутреннего экстремума, $f(x)$ дифференцируема в $x_0 \implies f'(x_0) = 0$

Доказательство.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

1. x_0 — точка локального максимума $\implies f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$

Рассмотрим случаи $h \rightarrow 0_+, h \rightarrow 0_-$:

$$1. h \rightarrow 0_+, f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0_+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0$$

Author: Vadim Tiganov

$$2.h \rightarrow 0_-, f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \\ \implies f'(x_0) = 0$$

Для локального минимума доказывается аналогично, оставим на усмотрение внимательному читателю. \square

NB

Обратное неверно.

1.11.2 Теорема Ролля

$f(x) : E \rightarrow \mathbb{R}, f \in C[a, b]$ и f — дифференцируема на (a, b) , и $f(a) = f(b) \implies \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

Доказательство. \square

1.11.3 Теорема Лагранжа и следствия

Теорема

Следствия

- 1.
- 2.

1.11.4 Теорема Коши

1.11.5 Теорема

1.12 Теорема Эйлера