Численные методы анализа
ИИИ, 2025

Университет ИТМО
Лектор: Хитров Е.Г.

Содержание

1 Февраль

1.1 Аппроксимация функции и смежные вопросы

Пусть имеем $f(x)$ — функцию. Заменять или приближать ее будем в случае, если исходная $f(x)$ неудобна для нужных операций (дифференцирование, интегрирование и другие)
Самый распространенный способ приближения - с помощью полиномов, так как они достаточно простые и имеют понятное поведение.

$f(x)$ задана значениями:

$$x_1 \dots x_i$$

для них известны

$$f(x_1) \dots f(x_i)$$

будем приближать обобщенным многочленом вида:

$$Q_m(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_m\varphi_m(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k\varphi_k(x)$$

При этом $\{\varphi_k\}$ — заданный набор ЛНЗ функций, а a_k подлежат определению.

$$Q_m(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, \dots, m. \tag{1}$$

Тогда $Q_m(x)$ называется интерполяционным многочленом, а x_k — узлами интерполирования.

1.1.1 Интерполяционный полином Лагранжа. Остаточный член полинома Лагранжа

Будем рассматривать полиномиальную аппроксимацию, а именно с помощью полинома Лагранжа.

Однако, не будем брать в качестве $\varphi_k(x) = x^k$ так как это сильно затруднит решение системы (1).

Выберем полиномы $\omega_0(x), \omega_1(), ..., \omega_m(x)$ такие, что они обращаются в нуль во всех узлах, кроме одного, когда индекс полинома совпадает с индексом узла:

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_m)$$

$$\omega_k(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_k)} = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_m)$$

И запишем следующий полином:

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(x_k)} f(x_k)$$

Полученный полином называют *интерполяционным полиномом Лагранжа.*

Author: Vadim Tiganov