Математический анализ
ИИИ, 2025

Университет ИТМО
Лектор: Ершов А.Р.

## Содержание

# 1 Февраль

## 1.1 Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал.

*Определение*

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $x$ — предельная точка $E$, $(x+h) \in E$.

Если

$$f(x+h) - f(x) = A(x) \cdot h + \alpha(x,h),$$
при $h \to 0$,
$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x,h)}{h} = 0,$$

то функция $f$ называется *дифференцируемой* в точке $x$, а число $A(x)$ называется *производной* функции $f$ в точке $x$ и обозначается $f'(x)$.

Число $A(x) \cdot h$ называется *дифференциалом* функции $f$ в точке $x$ и обозначается $df(x)$.

Например, для $f(x) = x^2$:

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = 2xh + h^2, \quad h \to 0$$

откуда следует $A(x) = 2x, \quad h^2 = h \cdot h = o(h)$.

## 1.2 Производная

*Определение*

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $a$ — предельная точка $E$.

Если $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, то его называют производной функции в точке $a$.

**N.B.** Пусть $x - a = h$, то при $x \to a$, $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

**LM** (О связи производной и дифференциала)
$f$ дифференцируема в точке $x \iff \exists$ конечная $f'(x)$.

*Доказательство.* $\Longrightarrow$ (Если $f$ дифференцируема в точке $x$, то существует конечная $f'(x)$):

По определению, если функция $f$ дифференцируема в точке $x$, то существует линейное приближение приращения функции:

$$f(x+h) - f(x) = A(x) \cdot h + \alpha(x,h),$$

где $\alpha(x,h)$ — бесконечно малая функция, то есть $\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x,h)}{h} = 0$.

Тогда $A(x)$ является производной $f$ в точке $x$, то есть $f'(x) = A(x)$. Следовательно, $f'(x)$ существует и конечна.

$\Longleftarrow$ (Если существует конечная $f'(x)$, то $f$ дифференцируема в точке $x$):

Если существует конечная производная $f'(x)$, то по определению производной:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Это означает, что приращение функции можно записать в виде:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h).$$

Следовательно, $f$ дифференцируема в точке $x$. □

*Author: Vadim Tiganov*

**LM** Если $f$ дифференцируема в $x_0$, то $f$ непрерывна в $x_0$.

*Доказательство.* По определению, если функция $f$ дифференцируема в точке $x_0$, то существует предел:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0).$$

Это означает, что приращение функции можно записать в виде:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot h+o(h).$$

Теперь рассмотрим предел $f(x_0+h)$ при $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left(f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+o(h)\right).$$

Поскольку $f'(x_0)\cdot h\to 0$ и $o(h)\to 0$ при $h\to 0$, получаем:

$$\lim_{h\to 0}f(x_0+h)=f(x_0).$$

Следовательно, $f$ непрерывна в точке $x_0$.
*N.B.* Не работает в обратную сторону. □

**N.B.** $\tan(\alpha_{\text{касательной}})=f'(x_0),\quad x_0$— точка касания.

### 1.3 Приближение функции, полиномы

Приближение функции $f(x)$ в точке $x_0$ в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n),\quad x\to x_0,$$

где

$$c_n = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \big(c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1}\big)}{(x - x_0)^n}.$$

Является приближением $f(x)$ в полиномиальном виде.

### 1.4 Уравнение касательной

Касательная к $f(x)$ в точке $x_0$ определяется уравнением вида

$$k(x) = c_0 + c_1(x - x_0), \text{ что}$$

$f(x) - k(x) = o(x - x_0), x \to x_0$

Из предыдущего пункта:
$c_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,
$c_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
$k(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ (Если функция дифференцируема в точке $x_0$)

### 1.5 Уравнение нормали

Уравнение нормали функции в точке $x_0$ задается так:

$$n(x) = f(x_0) - \tfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

### 1.6 Правила дифференцирования

**Теорема**
Пусть $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $x$, тогда:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

3. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g \neq 0$

Дифференцируемы в $x$.

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
3. $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

*Доказательство.* 1. Так как $f$ и $g$ дифференцируемы в точке $x$,
$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h), h \to 0$
$g(x+h) - g(x) = g'(x) \cdot h + o(h), h \to 0$
Рассмотрим
$(f+g)(x+h) - (f+g)(x) =$
$f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x) = f'(x) \cdot h + o(h) +$
$g'(x) \cdot h + o(h) = h \cdot \mathbf{(f'(x) + g'(x))} + o(h), h \to 0,$
вида $A(x) \cdot h + o(h)$
$\implies$ дифференцируемо в $x$.

3. $(\frac{f}{g})(x+h) - (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)}$

$= \frac{f(x)g(x) + f'(x)g(x)h - f(x)g(x) - f(x)g'(x)h + o(h)}{g(x) \cdot g(x+h)} =$

$= \frac{(f'(x)g(x) - f(x)g'x) \cdot h}{g(x) \cdot g(x+h)} = \frac{A(x) \cdot h + o(h)}{g^2(h)}$, так как $h \to 0 \implies$
дифференцируемо в $x$.

***

$(f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h)) \implies f(x+h) =$
$f(x) + f'(x) \cdot h + o(h)$
2. Доказывается аналогично частному. $\square$

### 1.7 Следствия

1. $(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot f_k(x))' = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot f_k'(x)$
2. $(\prod_{n=1}^{k} f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_n + \cdots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n'$

### 1.8 Теорема. Производная композиции функций.

$$(gf)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$f : X \to Y, X \subset Y, f$ дифференцируема в $x$
$g : Y \to \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}, g$ дифференцируема в $y = f(x)$

*Доказательство.* $f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h), h \to 0$
$g(y+t) - g(y) = g'(y) \cdot t + o(t), t \to 0$

$(gf)(x+h) - gf(x) = g(f(x+h)) - g(f(x)) =$
$= g(f(x) + f'(x) \cdot h + o(h)) - g(f(x))$

***

$f(x) = y$
Возьмем за $t : f'(x) \cdot h + o(h)$, тогда
***

$g(f(x)+t) - g(f(x)) = g(y+t) - g(y) = g'(y) \cdot t + o(t) =$
$= g'(f(x)) \cdot (f'(x) \cdot h + o(h)) + o(f'(x) \cdot h + o(h)) =$
$= g'(x) \cdot f'(x) \cdot h + o(h), h \to 0$
Возьмем за $A(x) \cdot h : g'(x) \cdot f'(x) \cdot h$
$\implies A(x) \cdot h + o(h),$ дифференцируемо. $\square$

### 1.9 Теорема. Производная обратной функции

$f$ дифференцируема в $x_0, \exists f^{-1}(x)$
$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

*Author: Vadim Tiganov*

*Доказательство.* возьмем $y_0 = f(x_0)$
$(f^{-1})' = \lim_{h\to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h)-f^{-1}(y_0)}{h} =$
$= \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} =$
$= \lim_{x\to x_0} \frac{f^{-1}(f(x))-f^{-1}(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} =$
$= lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} =$
$= \frac{1}{f'(x)}$ $\square$

**Пример нахождения производной**

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Рассмотрим определение производной:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Вынесем $x^n$:

$$(x+h)^n = x^n \left(1 + \frac{h}{x}\right)^n.$$

Тогда:

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^n \left((1+\frac{h}{x})^n - 1\right)}{h}.$$

Используем приближенное разложение $(1+u)^n \approx 1 + nu + o(u)$ при малых $u$:

$$(1+\frac{h}{x})^n - 1 \approx n\frac{h}{x} + o(h).$$

Подставляем:

$$\lim_{h\to 0} \frac{x^n \left(n\frac{h}{x} + o(h)\right)}{h}.$$

Раскрываем множители:

$$\lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + x^n o(h)}{h}.$$

Разделяем дробь:

$$\lim_{h \to 0} \left( nx^{n-1} + x^n \frac{o(h)}{h} \right).$$

Так как $\frac{o(h)}{h} \to 0$ при $h \to 0$, остается:

$$nx^{n-1}.$$

Следовательно, производная:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

### 1.10 Параметрические функции

$$\begin{cases} x(t) = \cos(t) \\ y(t) = \sin(t) \end{cases}$$

$$y'_x = \tfrac{y'_t}{x'_t} = \tfrac{\cos(t)}{-\sin(t)} = -\operatorname{ctg}(t)$$

#### 1.10.1 Локальный максимум и минимум функции

Пусть функция:

$$f(x) : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0 \in E$$

Определим локальный максимум(минимум) функции как:

$$\exists U(x_0) \subset E : \forall x \in U(x_0) :$$

$$1. f(x_0) \geq f(x)$$

$$2. f(x_0) \leq f(x)$$

В случаях 1. и 2. соответственно точку $x_0$ называют локальным максимумом или минимумом.

**NB**

$f(x_0)$ — локальный максимум или минимум соответственно.
Точка экстремума — точка локального максимума или минимума. $(x_0)$

#### 1.10.2 Точка внутреннего экстремума

Точка $x_0$ будет называться точкой внутреннего экстремума если она является экстремумом, а также:

$$f(x) : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0 \in E$$

$x_0$ - предельная точка $E_+$ и $E_-$
$E_+ = \{x \in E | x > x_0\}$
$E_- = \{x \in E | x < x_0\}$
$E_+, E_-$ — неформально, множества, где всё либо больше, либо меньше $E$.

### 1.11 Французские теоремы

#### 1.11.1 Теорема Ферма

Рассмотрим $f(x) : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0$ — точка внутреннего экстремума, $f(x)$ дифференцируема в $x_0 \implies f'(x_0) = 0$

*Доказательство.*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

1. $x_0$ — точка локального максимума $\implies f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$
Рассмотрим случаи $h \to 0_+, h \to 0_-$:
$1. h \to 0_+, f'(x_0) = \lim_{h\to 0_+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0$

$2. h \to 0_-, f'(x_0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$
$\implies f'(x_0) = 0$
Для локального минимума доказывается аналогично, оставим на усмотрение внимательному читателю. □

**NB**

Обратное неверно.

#### 1.11.2 Теорема Ролля

$f(x) : E \to \mathbb{R}, f \in C[a, b]$ и $f$ —дифференцируема на $(a, b)$, и $f(a) = f(b) \implies \exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$

*Доказательство.* Поскольку $f \in C[a, b]$, то по теореме Вейерштрасса $f$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений на отрезке $[a, b]$. Обозначим $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$.

Рассмотрим два случая:

1. **Случай 1:** $M = m$. В этом случае $f(x) = const$ на $[a, b]$. Следовательно, $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда любое $\xi \in (a, b)$ удовлетворяет условию $f'(\xi) = 0$.

2. **Случай 2:** $M > m$. Так как $f(a) = f(b)$, то либо $M$ , либо $m$ достигается во внутренней точке интервала $(a, b)$.

   - Пусть $M$ достигается в точке $\xi \in (a, b)$, то есть $f(\xi) = M$. Тогда $\xi$ - точка локального максимума функции $f$. Поскольку $f$ дифференцируема в точке $\xi$, то по необходимому условию экстремума $f'(\xi) = 0$.

- Пусть $m$ достигается в точке $\xi \in (a, b)$, то есть $f(\xi) = m$. Тогда $\xi$ - точка локального минимума функции $f$. Поскольку $f$ дифференцируема в точке $\xi$, то по необходимому условию экстремума $f'(\xi) = 0$.

В любом случае, существует $\xi \in (a, b)$ такое, что $f'(\xi) = 0$.

Что и требовалось доказать. □

#### 1.11.3 Теорема Лагранжа и следствия

**Теорема**

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, и $f$ дифференцируема на открытом интервале $(a, b)$. Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию $g(x)$ на отрезке $[a, b]$, определённую как:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Поскольку $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$, а $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ также непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$, то $g(x)$ также непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$.

Теперь вычислим значения $g(a)$ и $g(b)$:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a).$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Таким образом, $g(a) = g(b)$.

Теперь можно применить теорему Ролля к функции $g(x)$ на отрезке $[a, b]$. Согласно теореме Ролля, существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $g'(\xi) = 0$.

Вычислим производную $g'(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Теперь подставим $\xi$ в $g'(x)$:

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

**Следствия**

1. Если $f(a) = f(b)$, то $\exists \xi \in (a, b)$ такое, что $f'(\xi) = 0$.

*Доказательство.* Пусть $f(a) = f(b)$. Применим теорему Лагранжа:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a)-f(a)}{b-a} = \frac{0}{b-a} = 0.$$

Таким образом, существует $\xi \in (a, b)$ такое, что $f'(\xi) = 0$. $\square$

2. Если функция $f$ монотонна на $[a, b]$, то её производная $f'$ не меняет знака на $(a, b)$.

*Доказательство.* Пусть $f$ монотонна на $[a, b]$. Если $f$ не убывает, то $f(a) \leq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Если бы производная $f'$ меняла знак на $(a, b)$, это означало бы, что существует такая точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f'(\xi) > 0$ и $f'(\eta) < 0$ для какой-то $\eta \in (a, \xi)$. Это противоречит тому, что $f$ монотонна. Аналогично можно показать, что если $f$ не возрастает, то её производная также не меняет знак.

Следовательно, если $f$ монотонна, то её производная $f'$ не меняет знака на $(a, b)$. □

#### 1.11.4 Теорема Коши

**Теорема**

Пусть функции $f$ и $g$ непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале $(a, b)$. Пусть $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

*Доказательство.* Во-первых, заметим, что $g(b)-g(a) \neq 0$. Если бы $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля существовала бы точка $c \in (a, b)$ такая, что $g'(c) = 0$, что противоречит условию $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Рассмотрим функцию $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, определенную как:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Функция $h(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на $(a, b)$ как комбинация непрерывных и дифференцируемых функций. Кроме того, вычислим $h(a)$ и $h(b)$:

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = 0.$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0.$$

Таким образом, $h(a) = h(b) = 0$. По теореме Ролля существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $h'(\xi) = 0$.

Теперь вычислим производную $h'(x)$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x).$$

Подставим $\xi$ в $h'(x)$:

$$h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi).$$

Поскольку $g'(\xi) \neq 0$ (по условию), можно разделить обе части на $g'(\xi)$:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

### 1.12 Многочлен Тейлора

#### 1.12.1 Определение

Пусть $f(x)$ — функция, имеющая $n$ производных в точке $a$. Тогда многочленом Тейлора $n$-ой степени для функции $f(x)$ в точке $a$ называется многочлен вида:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

#### 1.12.2 Теорема об общем виде остатка многочлена Тейлора

**Формулировка теоремы**

Пусть функция $f(x)$ имеет $n+1$ производную на отрезке $[a, x]$. Тогда для любого $x$ из этого отрезка существует такое число $\xi$ между $a$ и $x$, что остаточный член $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ можно представить в виде:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Это называется формулой Лагранжа для остаточного члена.

**Доказательство**

Для доказательства используем формулу интеграла для $[a, x]$:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

*Author: Vadim Tiganov*

где $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Для начала определим функцию $g(t)$:

$$g(t) = f(t) - T_n(t), \quad t \in [a, x].$$

Функция $g(t)$ будет иметь $n + 1$ производную. По теореме о среднем значении для дифференцируемых функций, мы можем записать:

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - T_n^{(n)}(t),$$

где $T_n^{(n)}(t)$ — $n$-я производная многочлена Тейлора.

По теореме о среднем значении, существует такое $\xi$ в пределах $(a, x)$ такое, что

$$g(x) - g(a) = g'(\xi)(x - a).$$

Применяя это n раз (для $g', g'', \ldots, g^{(n)}$), мы можем выразить $R_n(x)$ как:

$$R_n(x) = \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^{n+1} \text{ для некоторого } \xi \in (a, x),$$

откуда

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - a)^{n+1}.$$

Таким образом, теорема доказана.

#### 1.12.3 Остаток в форме Лагранжа

**Формулировка:** Пусть функция $f(x)$ имеет $n+1$ производную на отрезке $[a, x]$. Тогда для любого $x$ из этого отрезка существует такое число $\xi$ между $a$ и $x$, что остаточный член $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ можно представить в виде:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

**Доказательство:**

Рассмотрим функцию:

$$g(t) = f(t) - T_n(t),$$

где $T_n(t)$ — многочлен Тейлора $n$-ой степени в точке $a$. Мы знаем, что $g(a) = 0$ и $g^{(k)}(a) = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, n$. Это приводит нас к выводу о том, что можно использовать теорему о среднем значении.

Применяя теорему о среднем значении $n$-ого порядка, мы можем выразить остаточный член $R_n(x)$ как:

$$g(x) = g(a) + g'(\xi_1)(x-a) + \frac{g''(\xi_2)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{g^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x-a)^n,$$

где $\xi_i$ находятся в интервале $(a, x)$.

Таким образом, окончательно мы запишем:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где $\xi$ — некоторая точка на интервале $(a, x)$. Тем самым, теорема о остатке в форме Лагранжа доказана.

#### 1.12.4 Остаток в форме Пеано

**Формулировка:** Оставшийся член $R_n(x)$ можно выразить в форме

$$R_n(x) = o((x-a)^n),$$

когда $x \to a$. Здесь $o((x-a)^n)$ означает, что остаток стремится к нулю быстрее, чем $(x-a)^n$.

**Доказательство:**

Для доказательства этой формы также будем использовать выражение для остатка:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Как мы уже показали в предыдущем разделе, остаток можно записать как:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где $\xi$ находится между $a$ и $x$.

Теперь, учитывая, что $f^{(n+1)}(x)$ остается ограниченной на отрезке $[a, x]$:

$$\lim_{x \to a} R_n(x) = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

С учетом того, что $(x-a)^{n+1}$ стремится к нулю быстрее, чем $(x-a)^n$, можно утверждать, что

$$R_n(x) = o((x-a)^n) \quad \text{при } x \to a.$$

Таким образом, остаток в форме Пеано также доказан.