Математический анализ
ИИИ, 2025

Университет ИТМО
Лектор: Ершов А.Р.

Содержание

1 Февраль

1.1 Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал.

Определение

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, x — предельная точка E,
$(x + h) \in E$.

Если

$$f(x+h) - f(x) = A(x) \cdot h + \alpha(x,h),$$
при $h \to 0$,
$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x,h)}{h} = 0,$$

то функция f называется *дифференцируемой* в точке x, а число $A(x)$ называется *производной* функции f в точке x и обозначается $f'(x)$.

Число $A(x) \cdot h$ называется *дифференциалом* функции f в точке x и обозначается $df(x)$.

Например, для $f(x) = x^2$:

$$f(x+h)-f(x) = (x+h)^2-x^2 = x^2+2xh+h^2-x^2 = 2xh+h^2, \quad h \to 0$$

откуда следует $A(x) = 2x, \quad h^2 = h \cdot h = o(h)$.

1.2 Производная

Определение

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка E.

Если $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, то его называют производной функции в точке a.

N.B. Пусть $x - a = h$, то при $x \to a$, $h \to 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

LM (О связи производной и дифференциала)
f дифференцируема в точке $x \iff \exists$ конечная $f'(x)$.

Доказательство. $\implies$ (Если f дифференцируема в точке x, то существует конечная $f'(x)$):

По определению, если функция f дифференцируема в точке x, то существует линейное приближение приращения функции:

$$f(x+h) - f(x) = A(x) \cdot h + \alpha(x,h),$$

где $\alpha(x,h)$ — бесконечно малая функция, то есть $\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x,h)}{h} = 0$.

Тогда $A(x)$ является производной f в точке x, то есть $f'(x) = A(x)$. Следовательно, $f'(x)$ существует и конечна.

$\impliedby$ (Если существует конечная $f'(x)$, то f дифференцируема в точке x):

Если существует конечная производная $f'(x)$, то по определению производной:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Это означает, что приращение функции можно записать в виде:

$$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h).$$

Следовательно, f дифференцируема в точке x. $\square$

LM Если f дифференцируема в x_0, то f непрерывна в x_0.

Доказательство. По определению, если функция f дифференцируема в точке x_0, то существует предел:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0).$$

Это означает, что приращение функции можно записать в виде:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot h+o(h).$$

Теперь рассмотрим предел $f(x_0+h)$ при $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=\lim_{h\to 0}\left(f(x_0)+f'(x_0)\cdot h+o(h)\right).$$

Поскольку $f'(x_0)\cdot h\to 0$ и $o(h)\to 0$ при $h\to 0$, получаем:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h)=f(x_0).$$

Следовательно, f непрерывна в точке x_0.
N.B. Не работает в обратную сторону. □

N.B. $\tan(\alpha_{\text{касательной}})=f'(x_0), \quad x_0$— точка касания.

1.3 Приближение функции, полиномы

Приближение функции $f(x)$ в точке x_0 в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n), \quad x\to x_0,$$

где

$$c_n = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \big(c_0 + c_1(x - x_0) + \dots + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1}\big)}{(x - x_0)^n}.$$

Является приближением $f(x)$ в полиномиальном виде.

1.4 Уравнение касательной

Касательная к $f(x)$ в точке x_0 определяется уравнением вида

$$k(x) = c_0 + c_1(x - x_0), \text{ что}$$

$f(x) - k(x) = o(x - x_0), x \to x_0$

Из предыдущего пункта:
$c_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,
$c_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
$k(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ (Если функция дифференцируема в точке x_0)

1.5 Уравнение нормали

Уравнение нормали функции в точке x_0 задается так:

$$n(x) = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

1.6 Правила дифференцирования

Теорема
Пусть f и g дифференцируемы в точке x, тогда:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

3. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g \neq 0$

Дифференцируемы в x.

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
3. $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Доказательство. 1. Так как f и g дифференцируемы в точке x,
$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h), h \to 0$
$g(x+h) - g(x) = g'(x) \cdot h + o(h), h \to 0$
Рассмотрим
$(f+g)(x+h) - (f+g)(x) =$
$f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x) = f'(x) \cdot h + o(h) +$
$g'(x) \cdot h + o(h) = h \cdot \mathbf{(f'(x) + g'(x))} + o(h), h \to 0,$
вида $A(x) \cdot h + o(h)$
$\implies$ дифференцируемо в x.

3. $(\frac{f}{g})(x+h) - (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)}$

$= \frac{f(x)g(x) + f'(x)g(x)h - f(x)g(x) - f(x)g'(x)h + o(h)}{g(x) \cdot g(x+h)} =$

$= \frac{(f'(x)g(x) - f(x)g'x) \cdot h}{g(x) \cdot g(x+h)} = \frac{A(x) \cdot h + o(h)}{g^2(h)}$, так как $h \to 0 \implies$
дифференцируемо в x.

***

$(f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h)) \implies f(x+h) =$
$f(x) + f'(x) \cdot h + o(h)$
2. Доказывается аналогично частному. $\square$

1.7 Следствия

1. $(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot f_k(x))' = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot f_k'(x)$
2. $(\prod_{n=1}^{k} f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_n + \cdots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n'$

Author: Vadim Tiganov