Математический анализ
ИИИ, 2025

Университет ИТМО
Лектор: Ершов А.Р.

Содержание

1 Февраль

1.1 Дифференцируемость функции в точке. Дифференциал.

Определение

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, x — предельная точка E, $(x+h) \in E$.

Если

$$f(x+h) - f(x) = A(x) \cdot h + \alpha(x,h),$$
$$\text{при } h \to 0,$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{\alpha(x,h)}{h} = 0,$$

то функция f называется *дифференцируемой* в точке x, а число $A(x)$ называется *производной* функции f в точке x и обозначается $f'(x)$.

Число $A(x) \cdot h$ называется *дифференциалом* функции f в точке x и обозначается $df(x)$.

Например, для $f(x) = x^2$:

$$f(x+h)-f(x) = (x+h)^2-x^2 = x^2+2xh+h^2-x^2 = 2xh+h^2, \quad h \to 0$$

откуда следует $A(x) = 2x, \quad h^2 = h \cdot h = o(h)$.

1.2 Производная

Определение

Пусть $f : E \to \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, a — предельная точка E.

Если $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, то его называют производной функции в точке a.

N.B. Пусть $x-a=h$, то при $x\to a$, $h\to 0$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

LM (О связи производной и дифференциала)
f дифференцируема в точке $x \iff \exists$ конечная $f'(x)$.

Доказательство. $\implies$ (Если f дифференцируема в точке x, то существует конечная $f'(x)$):

По определению, если функция f дифференцируема в точке x, то существует линейное приближение приращения функции:

$$f(x+h)-f(x)=A(x)\cdot h+\alpha(x,h),$$

где $\alpha(x,h)$ — бесконечно малая функция, то есть $\lim_{h\to 0}\frac{\alpha(x,h)}{h}=0$.

Тогда $A(x)$ является производной f в точке x, то есть $f'(x)=A(x)$. Следовательно, $f'(x)$ существует и конечна.

$\impliedby$ (Если существует конечная $f'(x)$, то f дифференцируема в точке x):

Если существует конечная производная $f'(x)$, то по определению производной:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

Это означает, что приращение функции можно записать в виде:

$$f(x+h)-f(x)=f'(x)\cdot h+o(h).$$

Следовательно, f дифференцируема в точке x. $\square$

LM Если f дифференцируема в x_0, то f непрерывна в x_0.

Доказательство. По определению, если функция f дифференцируема в точке x_0, то существует предел:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0).$$

Это означает, что приращение функции можно записать в виде:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h).$$

Теперь рассмотрим предел $f(x_0 + h)$ при $h \to 0$:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = \lim_{h \to 0} \left(f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h) \right).$$

Поскольку $f'(x_0) \cdot h \to 0$ и $o(h) \to 0$ при $h \to 0$, получаем:

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Следовательно, f непрерывна в точке x_0.
N.B. Не работает в обратную сторону. □

N.B. $\tan(\alpha_{\text{касательной}}) = f'(x_0), \quad x_0$— точка касания.

1.3 Приближение функции, полиномы

Приближение функции $f(x)$ в точке x_0 в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n), \quad x \to x_0,$$

где

$$c_n = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - \big(c_0 + c_1(x - x_0) + \cdots + c_{n-1}(x - x_0)^{n-1}\big)}{(x - x_0)^n}.$$

Является приближением $f(x)$ в полиномиальном виде.

1.4 Уравнение касательной

Касательная к $f(x)$ в точке x_0 определяется уравнением вида

$$k(x) = c_0 + c_1(x - x_0), \text{ что}$$

$f(x) - k(x) = o(x - x_0), x \to x_0$

Из предыдущего пункта:
$c_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,
$c_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$
$k(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ (Если функция дифференцируема в точке x_0)

1.5 Уравнение нормали

Уравнение нормали функции в точке x_0 задается так:

$$n(x) = f(x_0) - \tfrac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

1.6 Правила дифференцирования

Теорема
Пусть f и g дифференцируемы в точке x, тогда:

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$

3. $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, g \neq 0$

Дифференцируемы в x.

1. $(f+g)' = f' + g'$
2. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
3. $(\frac{f}{g})' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Доказательство. 1. Так как f и g дифференцируемы в точке x,
$f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h), h \to 0$
$g(x+h) - g(x) = g'(x) \cdot h + o(h), h \to 0$
Рассмотрим
$(f+g)(x+h) - (f+g)(x) =$
$f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x) = f'(x) \cdot h + o(h) +$
$g'(x) \cdot h + o(h) = h \cdot \mathbf{(f'(x) + g'(x))} + o(h), h \to 0,$
вида $A(x) \cdot h + o(h)$
$\implies$ дифференцируемо в x.

3. $(\frac{f}{g})(x+h) - (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x+h) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{g(x+h) \cdot g(x)}$

$= \frac{f(x)g(x) + f'(x)g(x)h - f(x)g(x) - f(x)g'(x)h + o(h)}{g(x) \cdot g(x+h)} =$

$= \frac{(f'(x)g(x) - f(x)g'x) \cdot h}{g(x) \cdot g(x+h)} = \frac{A(x) \cdot h + o(h)}{g^2(h)}$, так как $h \to 0 \implies$
дифференцируемо в x.

***

$(f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h)) \implies f(x+h) =$
$f(x) + f'(x) \cdot h + o(h)$
2. Доказывается аналогично частному. $\square$

1.7 Следствия

1. $(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot f_k(x))' = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot f_k'(x)$
2. $(\prod_{n=1}^{k} f_n)' = f_1' \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n + f_1 \cdot f_2' \cdot \ldots \cdot f_n + \cdots + f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n'$

1.8 Теорема. Производная композиции функций.

$$(gf)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$f : X \to Y, X \subset Y, f$ дифференцируема в x
$g : Y \to \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}, g$ дифференцируема в $y = f(x)$

Доказательство. $f(x+h) - f(x) = f'(x) \cdot h + o(h), h \to 0$
$g(y+t) - g(y) = g'(y) \cdot t + o(t), t \to 0$

$(gf)(x+h) - gf(x) = g(f(x+h)) - g(f(x)) =$
$= g(f(x) + f'(x) \cdot h + o(h)) - g(f(x))$

***

$f(x) = y$
Возьмем за $t : f'(x) \cdot h + o(h)$, тогда
***

$g(f(x)+t) - g(f(x)) = g(y+t) - g(y) = g'(y) \cdot t + o(t) =$
$= g'(f(x)) \cdot (f'(x) \cdot h + o(h)) + o(f'(x) \cdot h + o(h)) =$
$= g'(x) \cdot f'(x) \cdot h + o(h), h \to 0$
Возьмем за $A(x) \cdot h : g'(x) \cdot f'(x) \cdot h$
$\implies A(x) \cdot h + o(h),$ дифференцируемо. $\square$

1.9 Теорема. Производная обратной функции

f дифференцируема в $x_0, \exists f^{-1}(x)$
$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$

Доказательство. возьмем $y_0 = f(x_0)$
$(f^{-1})' = \lim_{h \to 0} \frac{f^{-1}(y_0+h) - f^{-1}(y_0)}{h} =$
$= \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} =$
$= \lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} =$
$= lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} =$
$= \frac{1}{f'(x)}$ □

Пример нахождения производной

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Рассмотрим определение производной:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}.$$

Вынесем x^n:

$$(x+h)^n = x^n \left(1 + \frac{h}{x}\right)^n.$$

Тогда:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^n \left((1 + \frac{h}{x})^n - 1\right)}{h}.$$

Используем приближенное разложение $(1+u)^n \approx 1 + nu + o(u)$ при малых u:

$$(1 + \frac{h}{x})^n - 1 \approx n\frac{h}{x} + o(h).$$

Подставляем:

$$\lim_{h \to 0} \frac{x^n \left(n\frac{h}{x} + o(h)\right)}{h}.$$

Раскрываем множители:

$$\lim_{h \to 0} \frac{nx^{n-1}h + x^n o(h)}{h}.$$

Разделяем дробь:

$$\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+x^n\frac{o(h)}{h}\right).$$

Так как $\frac{o(h)}{h}\to 0$ при $h\to 0$, остается:

$$nx^{n-1}.$$

Следовательно, производная:

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

1.10 Параметрические функции

$$\begin{cases} x(t)=\cos(t) \\ y(t)=\sin(t) \end{cases}$$

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\cos(t)}{-\sin(t)}=-\operatorname{ctg}(t)$$

1.11 Локальный максимум и минимум функции

Пусть функция:

$$f(x):E\to\mathbb{R},E\subset\mathbb{R},x_0\in E$$

Определим локальный максимум(минимум) функции как:

$$\exists U(x_0)\subset E:\forall x\in U(x_0):$$

$$1.f(x_0)\geq f(x)$$

$$2.f(x_0)\leq f(x)$$

В случаях 1. и 2. соответственно точку x_0 называют локальным максимумом или минимумом.

NB

$f(x_0)$ — локальный максимум или минимум соответственно.
Точка экстремума — точка локального максимума или минимума. (x_0)

1.12 Точка внутреннего экстремума

Точка x_0 будет называться точкой внутреннего экстремума если она является экстремумом, а также:

$$f(x) : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0 \in E$$

x_0 - предельная точка E_+ и E_-
$E_+ = \{x \in E | x > x_0\}$
$E_- = \{x \in E | x < x_0\}$
E_+, E_- — неформально, множества, где всё либо больше, либо меньше E.

1.13 Французские теоремы

1.13.1 Теорема Ферма

Рассмотрим $f(x) : E \to \mathbb{R}, E \subset \mathbb{R}, x_0$ — точка внутреннего экстремума, $f(x)$ дифференцируема в $x_0 \implies f'(x_0) = 0$

Доказательство.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0) \cdot h + o(h)$$

1. x_0 — точка локального максимума $\implies f(x_0+h) - f(x_0) \leq 0$
Рассмотрим случаи $h \to 0_+, h \to 0_-$:
$1. h \to 0_+, f'(x_0) = \lim_{h \to 0_+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0$

$2. h \to 0_-, f'(x_0) = \lim_{h\to 0_-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0$
$\implies f'(x_0) = 0$
Для локального минимума доказывается аналогично, оставим на усмотрение внимательному читателю. $\square$

NB

Обратное неверно.

1.13.2 Теорема Ролля

$f(x) : E \to \mathbb{R}, f \in C[a,b]$ и f —дифференцируема на (a,b), и $f(a) = f(b) \implies \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$

Доказательство. Поскольку $f \in C[a,b]$, то по теореме Вейерштрасса f достигает своего наибольшего и наименьшего значений на отрезке $[a,b]$. Обозначим $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$ и $m = \min_{x\in[a,b]} f(x)$.

Рассмотрим два случая:

1. **Случай 1:** $M = m$. В этом случае $f(x) = const$ на $[a,b]$. Следовательно, $f'(x) = 0$ для всех $x \in (a,b)$. Тогда любое $\xi \in (a,b)$ удовлетворяет условию $f'(\xi) = 0$.

2. **Случай 2:** $M > m$. Так как $f(a) = f(b)$, то либо M , либо m достигается во внутренней точке интервала (a,b).

   - Пусть M достигается в точке $\xi \in (a,b)$, то есть $f(\xi) = M$. Тогда ξ - точка локального максимума функции f. Поскольку f дифференцируема в точке ξ, то по необходимому условию экстремума $f'(\xi) = 0$.

- Пусть m достигается в точке $\xi \in (a, b)$, то есть $f(\xi) = m$. Тогда ξ - точка локального минимума функции f. Поскольку f дифференцируема в точке ξ, то по необходимому условию экстремума $f'(\xi) = 0$.

В любом случае, существует $\xi \in (a, b)$ такое, что $f'(\xi) = 0$.

Что и требовалось доказать. □

1.13.3 Теорема Лагранжа и следствия

Теорема

Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, и f дифференцируема на открытом интервале (a, b). Тогда существует такая точка $\xi \in (a, b)$, что

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $g(x)$ на отрезке $[a, b]$, определённую как:

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Поскольку $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), а $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$ также непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $g(x)$ также непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b).

Теперь вычислим значения $g(a)$ и $g(b)$:

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = f(a).$$

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a).$$

Таким образом, $g(a) = g(b)$.

Теперь можно применить теорему Ролля к функции $g(x)$ на отрезке $[a, b]$. Согласно теореме Ролля, существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $g'(\xi) = 0$.

Вычислим производную $g'(x)$:

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Теперь подставим ξ в $g'(x)$:

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

Следствия

1. Если $f(a) = f(b)$, то $\exists \xi \in (a, b)$ такое, что $f'(\xi) = 0$.

Доказательство. Пусть $f(a) = f(b)$. Применим теорему Лагранжа:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(a)}{b - a} = \frac{0}{b - a} = 0.$$

Таким образом, существует $\xi \in (a, b)$ такое, что $f'(\xi) = 0$. $\square$

2. Если функция f монотонна на $[a, b]$, то её производная f' не меняет знака на (a, b).

Доказательство. Пусть f монотонна на $[a, b]$. Если f не убывает, то $f(a) \leq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$. Если бы производная f' меняла знак на (a, b), это означало бы, что существует такая точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f'(\xi) > 0$ и $f'(\eta) < 0$ для какой-то $\eta \in (a, \xi)$. Это противоречит тому, что f монотонна. Аналогично можно показать, что если f не возрастает, то её производная также не меняет знак.

Следовательно, если f монотонна, то её производная f' не меняет знака на (a, b). □

1.13.4 Теорема Коши

Теорема

Пусть функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$ и дифференцируемы на интервале (a, b). Пусть $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$. Тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Доказательство. Во-первых, заметим, что $g(b) - g(a) \neq 0$. Если бы $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля существовала бы точка $c \in (a, b)$ такая, что $g'(c) = 0$, что противоречит условию $g'(x) \neq 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Рассмотрим функцию $h(x)$ на отрезке $[a, b]$, определенную как:

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Функция $h(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) как комбинация непрерывных и дифференцируемых функций. Кроме того, вычислим $h(a)$ и $h(b)$:

$$h(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(a) - g(a)) = 0.$$

$$h(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a)) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0.$$

Таким образом, $h(a) = h(b) = 0$. По теореме Ролля существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $h'(\xi) = 0$.

Теперь вычислим производную $h'(x)$:

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x).$$

Подставим ξ в $h'(x)$:

$$h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi).$$

Поскольку $g'(\xi) \neq 0$ (по условию), можно разделить обе части на $g'(\xi)$:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Что и требовалось доказать. $\square$

1.14 Многочлен Тейлора

1.14.1 Определение

Пусть $f(x)$ — функция, имеющая n производных в точке a. Тогда многочленом Тейлора n-ой степени для функции $f(x)$ в точке a называется многочлен вида:

$$T_n(x) = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \\ = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

1.14.2 Теорема об общем виде остатка многочлена Тейлора

Формулировка теоремы

Пусть функция $f(x)$ имеет $n+1$ производную на отрезке $[a, x]$. Тогда для любого x из этого отрезка существует такое число ξ между a и x, что остаточный член $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ можно представить в виде:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Это называется формулой Лагранжа для остаточного члена.

Доказательство

Для доказательства используем формулу интеграла для $[a, x]$:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

где $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$.

Для начала определим функцию $g(t)$:

$$g(t) = f(t) - T_n(t), \quad t \in [a, x].$$

Функция $g(t)$ будет иметь $n + 1$ производную. По теореме о среднем значении для дифференцируемых функций, мы можем записать:

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - T_n^{(n)}(t),$$

где $T_n^{(n)}(t)$ — n-я производная многочлена Тейлора.

По теореме о среднем значении, существует такое ξ в пределах (a, x) такое, что

$$g(x) - g(a) = g'(\xi)(x - a).$$

Применяя это n раз (для $g', g'', \ldots, g^{(n)}$), мы можем выразить $R_n(x)$ как:

$$R_n(x) = \frac{g^{(n)}(\xi)}{n!}(x - a)^{n+1} \text{ для некоторого } \xi \in (a, x),$$

откуда

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}.$$

Таким образом, теорема доказана.

1.14.3 Остаток в форме Лагранжа

Формулировка: Пусть функция $f(x)$ имеет $n+1$ производную на отрезке $[a, x]$. Тогда для любого x из этого отрезка существует такое число ξ между a и x, что остаточный член $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ можно представить в виде:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Доказательство:

Рассмотрим функцию:

$$g(t) = f(t) - T_n(t),$$

где $T_n(t)$ — многочлен Тейлора n-ой степени в точке a. Мы знаем, что $g(a) = 0$ и $g^{(k)}(a) = 0$ для $k = 1, 2, \ldots, n$. Это приводит нас к выводу о том, что можно использовать теорему о среднем значении.

Применяя теорему о среднем значении n-ого порядка, мы можем выразить остаточный член $R_n(x)$ как:

$$g(x) = g(a) + g'(\xi_1)(x-a) + \frac{g''(\xi_2)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{g^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x-a)^n,$$

где ξ_i находятся в интервале (a, x).

Таким образом, окончательно мы запишем:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где ξ — некоторая точка на интервале (a, x). Тем самым, теорема о остатке в форме Лагранжа доказана.

1.14.4 Остаток в форме Пеано

Формулировка: Оставшийся член $R_n(x)$ можно выразить в форме

$$R_n(x) = o((x-a)^n),$$

когда $x \to a$. Здесь $o((x-a)^n)$ означает, что остаток стремится к нулю быстрее, чем $(x-a)^n$.

Доказательство:

Для доказательства этой формы также будем использовать выражение для остатка:

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x).$$

Как мы уже показали в предыдущем разделе, остаток можно записать как:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где ξ находится между a и x.

Теперь, учитывая, что $f^{(n+1)}(x)$ остается ограниченной на отрезке $[a, x]$:

$$\lim_{x\to a} R_n(x) = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

С учетом того, что $(x-a)^{n+1}$ стремится к нулю быстрее, чем $(x-a)^n$, можно утверждать, что

$$R_n(x) = o((x-a)^n) \quad \text{при } x \to a.$$

Таким образом, остаток в форме Пеано также доказан.