Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Отчёт по исследовательской работе № 1
По предмету: Математический анализ и основы вычислений

Выполнил работу:
Тиганов Вадим Игоревич

Академическая группа:
J3112

Вариант:
18

Санкт-Петербург, 2025

1 Ход работы

1.1 Задание 8

Дана функция $f(x) = \cos^2(x)$ на промежутке $[a, b] = [0, \pi]$

Условие задачи

Аналитический этап

В рамках данного задания необходимо:

1. Составить верхнюю и нижнюю суммы Дарбу, вычислить эти суммы. При необходимости разбивать функцию на участки монотонности.

2. Проверить критерий Римана интегрируемости функции.

3. Найти интегралы Дарбу и сделать вывод об интегрируемости функции, в том числе о значении интеграла.

4. Подобрать еще одно достаточное условие интегрируемости данной функции, отличное от упомянутых критериев и проверить его.

5. Сравнить найденное значение интеграла с ответом по формуле Ньютона-Лейбница.

Решение задачи:

№8 $f(x)=\cos^2 x$; $[a;b]=[0;\pi]$

Аналитический этап.

1) • Суммы Дарбу

S^* и S_*

Введем разбиение τ

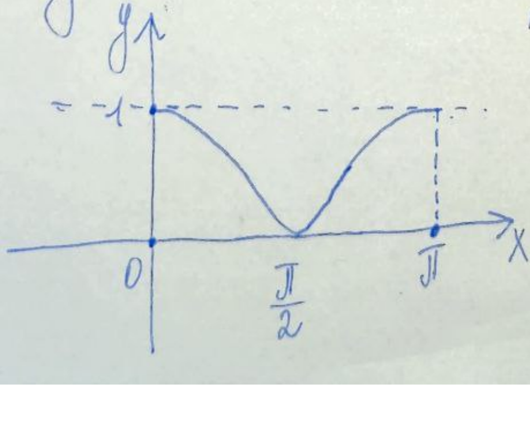
$\tau=\{x_0,\dots,x_n\}$, $a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$

$\Delta_i=[x_{i-1};x_i]$, тогда

$$S_*(f,\tau)=\sum_{i=1}^{n}\inf_{x\in\Delta_i} f(x)\cdot|\Delta_i|;$$

$$S^*(f,\tau)=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x\in\Delta_i} f(x)\cdot|\Delta_i|$$

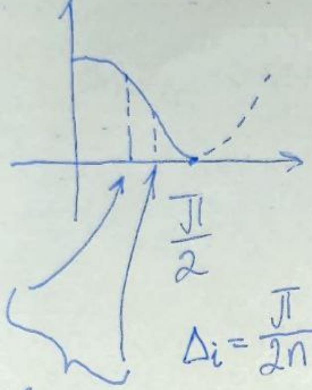
От 0 до π имеем такой график



Будем разбивать от $[0;\frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2};\pi]$

• Разобьем на n частей

$[0; \frac{\pi}{2}]$



$\Delta_i = \frac{\pi}{2n}$

Какие-то отрезки разбиения. Очевидно, что $\sup\limits_{x_i \in \Delta_i} f(x_i)$ будет на левой границе каждого отрезка, т.е.

$x_i = \frac{i\pi}{2n}, i = \overline{0,n}$

Инфинум всегда справа

$\inf\limits_{x_i \in \Delta_i} f(x_i)$; $x_i = \frac{j\pi}{2n}$, но $j = \overline{1,n}$ Важно

$$S_1^* = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

$$S_{*1} = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

См. индексы!

На $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ зеркально:

$$S_2^* = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=n+1}^{2n} f(x_i)$$

$$S_{*2} = \frac{\pi}{2n} \sum_{i=n+1}^{2n} f(x_{i-1})$$

U_n – верхняя сумма

L_n – нижняя сумма

$U_n = S_1^* + S_2^*$

$L_n = S_{*1} + S_{*2}$

$$U_n = \frac{\pi}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n}\cos^2\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right) + \sum_{i=n+1}^{2n}\cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\right)$$

$$L_n = \frac{\pi}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n}\cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right) + \sum_{i=n+1}^{2n}\left(\cos^2\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)\right)\right)$$

Получили запись сумм Дарбу, разбив $[0;\pi]$ на $[0;\frac{\pi}{2}]$ и $[\frac{\pi}{2};\pi]$

Суммы в пределе вычислю в третьем шаге.

- $$U_n = \frac{\pi}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n}\cos^2\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right) + \sum_{i=n+1}^{2n}\cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\right)$$

$* \cos^2\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right),\ i=n$

$$\cos^2\left(\frac{\pi n-\pi}{2n}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2n}\right)$$

$* \cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right),\ i=n+1$

$$\cos^2\left(\frac{\pi n+\pi}{2n}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)$$

Равны, т.к. $\cos^2\alpha \geq 0\ \forall\alpha$, $n \to 0$

$\to$ в сумме получим n таких пар

$$U_n = \frac{\pi}{2n}\left(n\sum_{i=n+1}^{2n}\cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\sum_{i=n+1}^{2n}\cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right) =$$ на бесконечности останется единица

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$L_n = \frac{\pi}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n}\cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right) + \sum_{i=n+1}^{2n}\cos^2\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right)\right)$$

$$\text{а } \cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right),\ i=1$$

$$\cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

Снова получим n пар

$$\text{ж } \cos^2\left(\frac{(i-1)\pi}{2n}\right),\ i=2n$$

$$\cos^2\left(\frac{2\pi n-\pi}{2n}\right) = \cos^2\left(\pi - \frac{\pi}{2n}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$$

$$L_n = \frac{\pi}{2n}\left(n\sum_{i=1}^{n}\cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{n}\cos^2\left(\frac{i\pi}{2n}\right),$$

на беск. снова единица $= \frac{\pi}{2}$

Итак, $U_n = L_n = \frac{\pi}{2}$

В ходе рассуждений получил и ответ на 3-й пункт:

3) $I^* = I_* = \frac{\pi}{2} = I$

и док-во второго

2) Критерий Римана

$$\lim_{\text{rang}\,\tau\to 0} \omega(f,\tau) = 0 \Longleftrightarrow f \in \mathcal{R}(a;b), \text{ т.е. } |S^* - S_*| = 0 \quad \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0\right)$$

Функция ограничена, непрерывна, является инт. на $[0;\pi]$, и

$$\int_0^\pi f(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

5) Посчитаю по Ньютону-Лейбницу

$$\int_0^\pi \cos^2 x\,dx = \int_0^\pi \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int_0^\pi \frac{dx}{2} + \int_0^\pi \frac{\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{x}{2}\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2} + 0 = \boxed{\frac{\pi}{2}}$$ Ответ сошелся.

4) Еще одно дост. условие интегр. моей функции.

$$f(x) = \cos^2 x$$

Можно рассмотреть равенство:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}$$

Тогда

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}\,dx + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$ что считается явно.

В моем случае условие можно сформулировать так: Если функция представима в виде конечной суммы интегрируемых слагаемых, то она интегрируема.

Проверка следует из формулы понижения степени для косинуса.

Ссылка на решение практического этапа работы: link (clickable)