Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Отчёт по исследовательской работе № 1
По предмету: Математический анализ и основы вычислений

Выполнил работу:
Тиганов Вадим Игоревич

Академическая группа:
J3112

Вариант:
18

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1 Цель и задачи

Цель работы: применить навыки, полученные за время второго семестра по предмету Математический анализ для решения практических задач вручную и с помощью программного обеспечения.
Задачи работы:

1. Применить теоретические знания для оперирования интегральными суммами и для приведения выражений к таковым.
2. Решить заданные практические задания вручную и проверить ответ.
3. Визуализировать графики функций, где это требуется.
4. Реализовать решение задачи на ЯП в последней части работы.

2 Ход работы

2.1 Задание 1

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}.$$

Исследовать на равномерную непрерывность на множествах
(a) $X = [3, +\infty)$
(b) $X = (1, 3)$

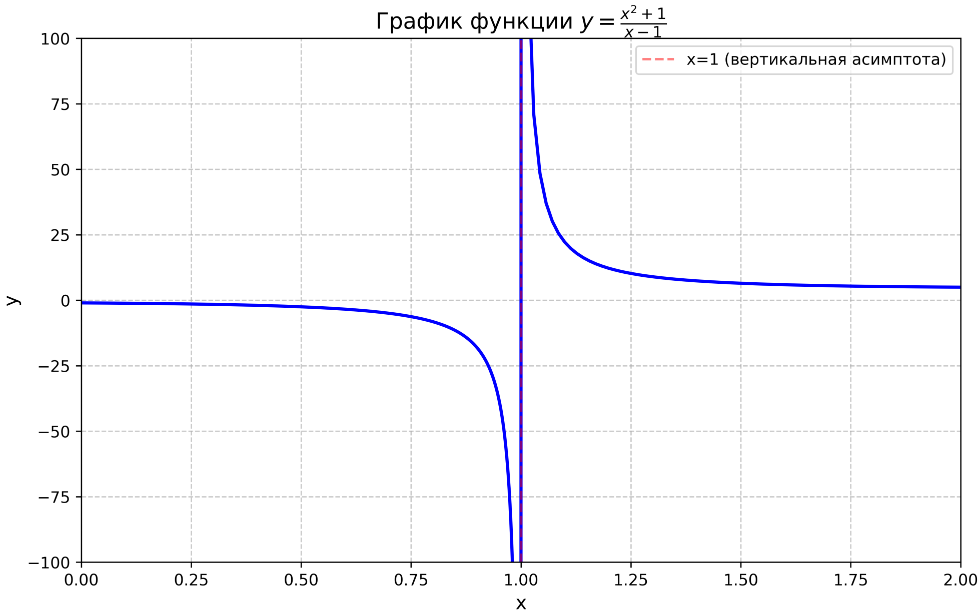
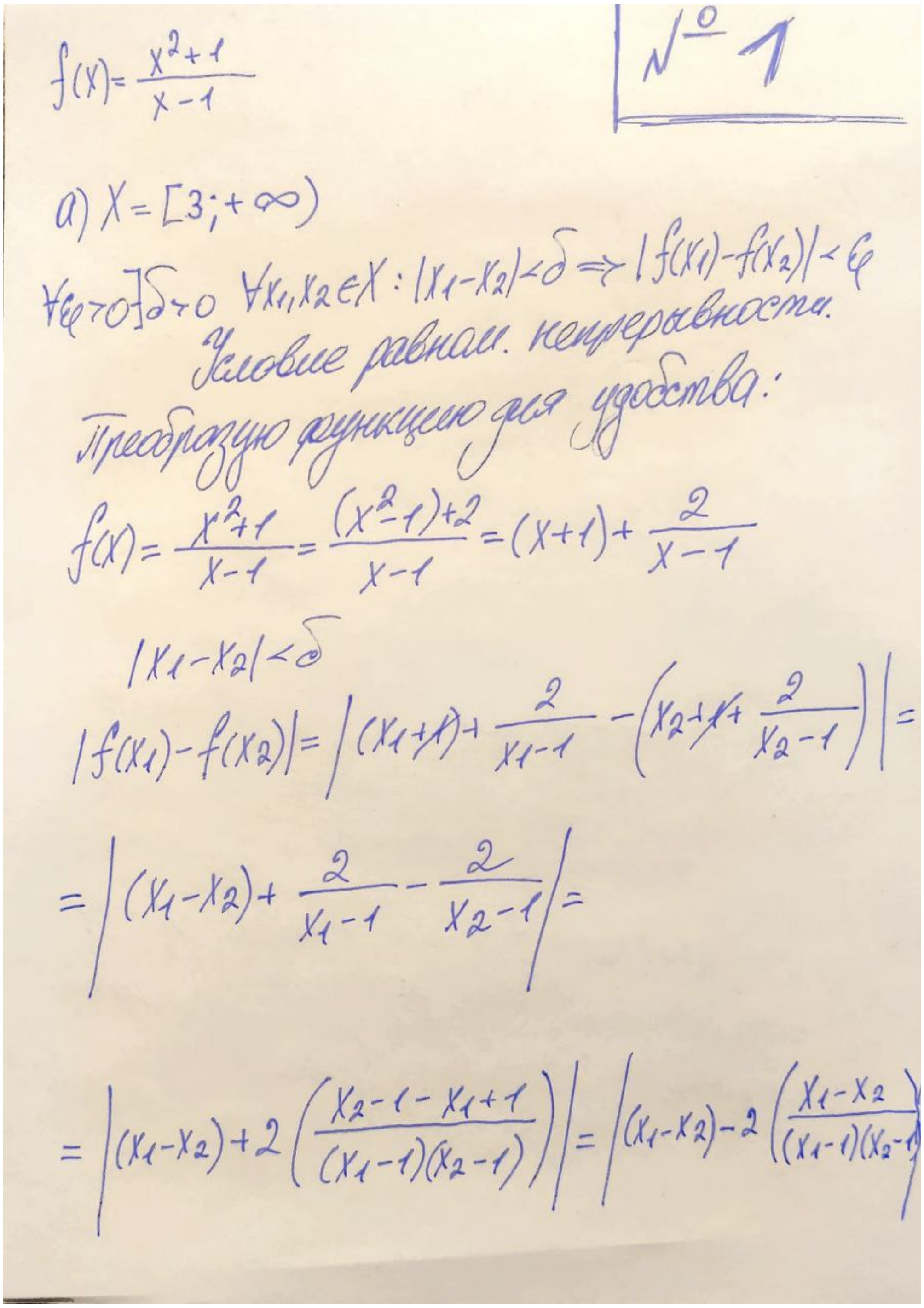


Рис. 1: График функции $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

Решение задачи:



$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$$

№ 1

а) $X=[3;+\infty)$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x_1,x_2\in X:|x_1-x_2|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

Условие равном. непрерывности.

Преобразую функцию для удобства:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}=\frac{(x^2-1)+2}{x-1}=(x+1)+\frac{2}{x-1}$$

$|x_1-x_2|<\delta$

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|(x_1+\cancel{1})+\frac{2}{x_1-1}-\left(x_2+\cancel{1}+\frac{2}{x_2-1}\right)\right|=$$

$$=\left|(x_1-x_2)+\frac{2}{x_1-1}-\frac{2}{x_2-1}\right|=$$

$$=\left|(x_1-x_2)+2\left(\frac{x_2-1-x_1+1}{(x_1-1)(x_2-1)}\right)\right|=\left|(x_1-x_2)-2\left(\frac{x_1-x_2}{(x_1-1)(x_2-1)}\right)\right|$$

Рис. 2: *(a)*

$$= \left|(x_1-x_2)\left(1-\frac{2}{(x_1-1)(x_2-1)}\right)\right| \leq \delta\cdot\left|1-\frac{2}{(x_1-1)(x_2-1)}\right|$$

Оценим знаменатель

$$X=[3;+\infty)$$

$$x_1-1 \geqslant 2$$

$$x_2-1 \geqslant 2$$

$$(x_1-1)(x_2-1) \geqslant 4$$

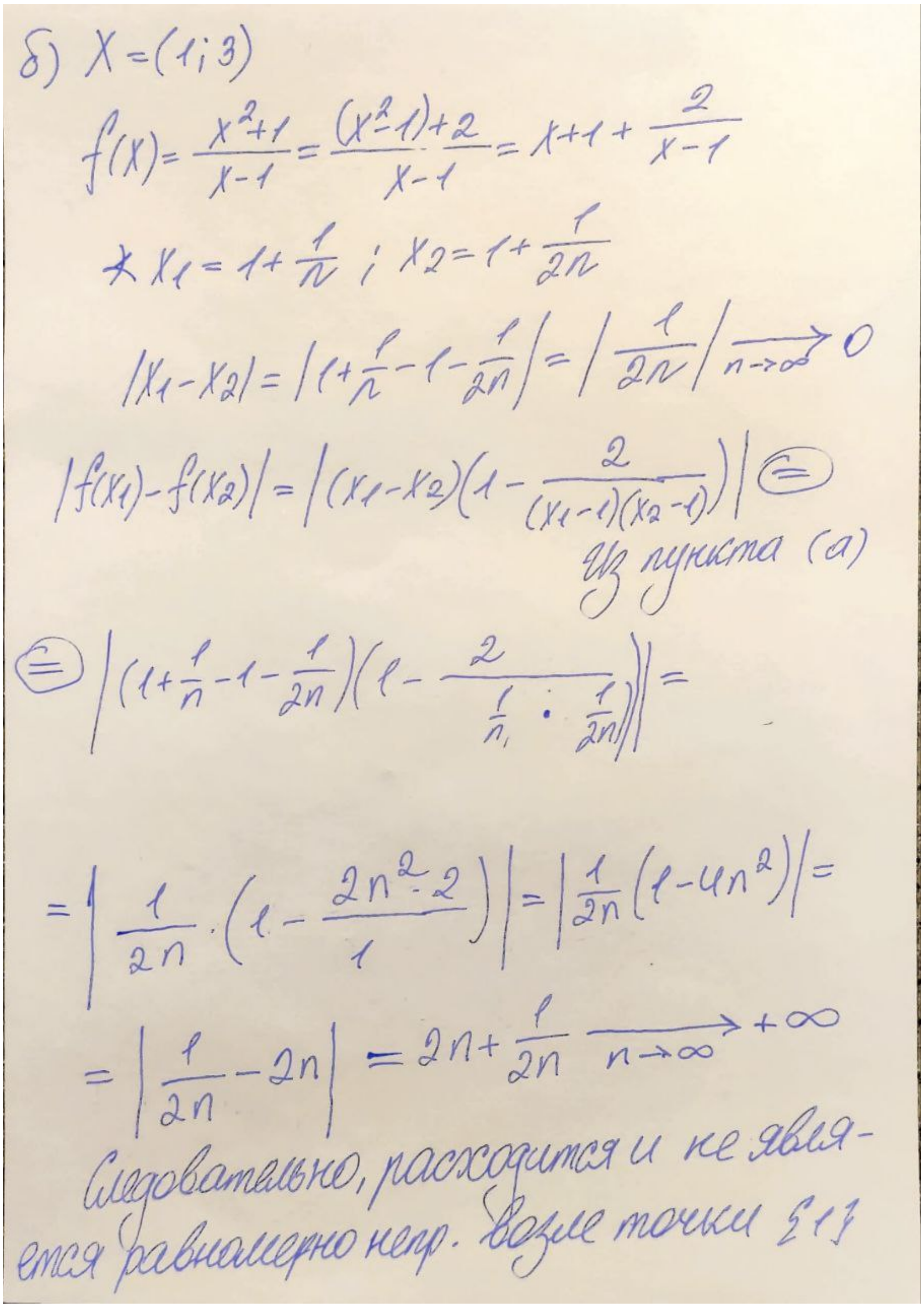
$$\leq \delta\cdot\left|1-\frac{2}{4}\right| \leq \delta\cdot\left|1+\frac{1}{2}\right| = \delta\cdot\frac{3}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists \delta=\frac{2}{3}\varepsilon\ \forall x_1,x_2\in X:$$

$$|x_1-x_2|<\frac{2}{3}\varepsilon \Rightarrow |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

Итак, на $[3;+\infty)$ $f(x)$ равномерно непрерывна.

Рис. 3: *(a)*



б) $X = (1;3)$

$$f(X) = \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{(x^2-1)+2}{x-1} = x+1+\frac{2}{x-1}$$

$$* \; x_1 = 1+\frac{1}{n}\,;\; x_2 = 1+\frac{1}{2n}$$

$$|x_1-x_2| = \left|1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{2n}\right| = \left|\frac{1}{2n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$|f(x_1)-f(x_2)| = \left|(x_1-x_2)\left(1-\frac{2}{(x_1-1)(x_2-1)}\right)\right| =$$

из пункта (а)

$$= \left|\left(1+\frac{1}{n}-1-\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{2}{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2n}}\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2n}\cdot\left(1-\frac{2n^2\cdot 2}{1}\right)\right| = \left|\frac{1}{2n}\left(1-4n^2\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2n}-2n\right| = 2n+\frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

Следовательно, расходится и не является равномерно непр. вблизи точки $\{1\}$

Рис. 4: *(b)*

Итак, задача решена. Функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на промежутке $X = [3, +\infty)$, и не является таковой на промежутке $X = (1, 3)$

2.2 Задание 2

Требуется:

1. Преобразовать выражение к интегральной сумме,
2. Доказать существование соответствующего интеграла,
3. Найти предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1-n}^{n} \frac{k}{kn + 2n^2}$$

Графическая интерпретация интеграла

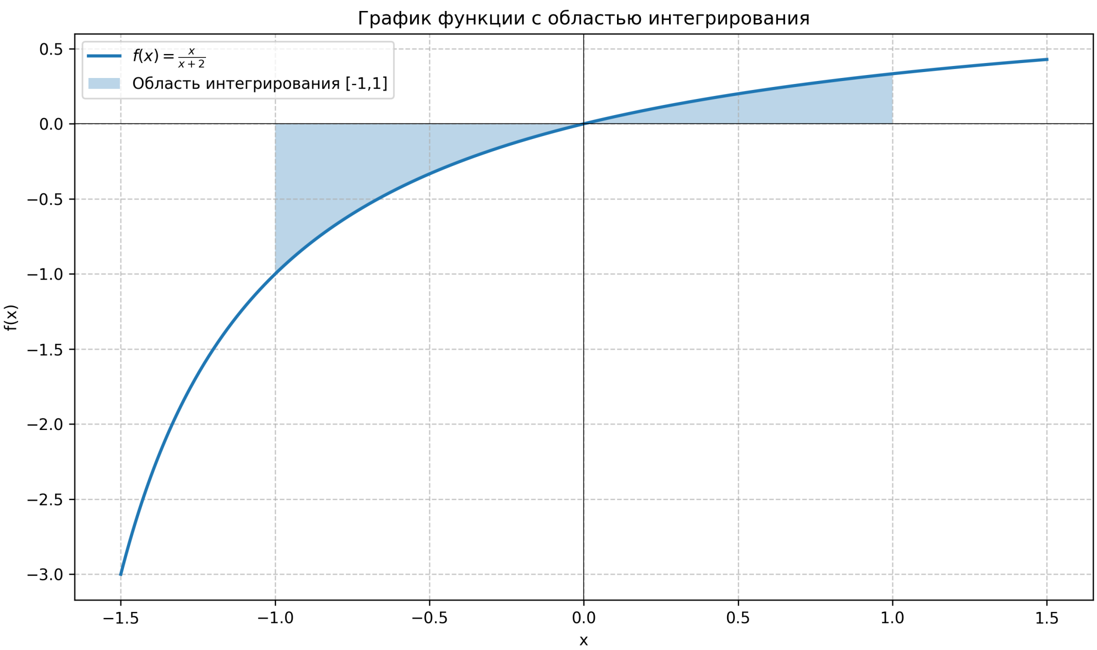
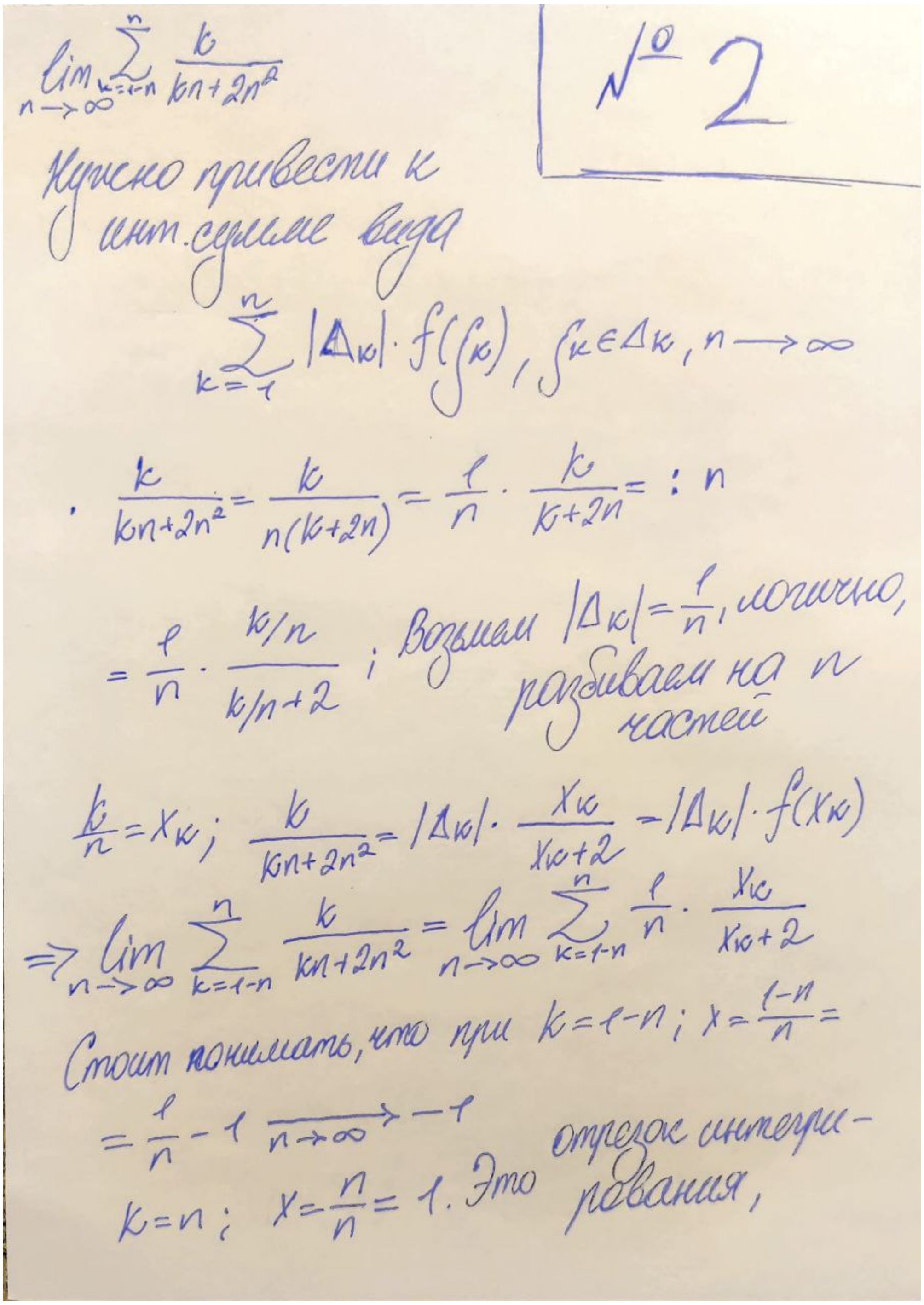


Рис. 5: График функции $f(x) = \frac{x}{x+2}$ с выделенной областью интегрирования $[-1, 1]$

Решение задачи:



№ 2

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1-n}^{n}\frac{k}{kn+2n^2}$$

Нужно привести к инт. сумме вида

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta_k|\cdot f(\xi_k),\ \xi_k\in\Delta_k,\ n\to\infty$$

$$\frac{k}{kn+2n^2}=\frac{k}{n(k+2n)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{k+2n}=\ :n$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{k/n}{k/n+2};$$ Возьмем $|\Delta_k|=\frac{1}{n}$, логично, разбиваем на n частей

$\frac{k}{n}=x_k$; $\frac{k}{kn+2n^2}=|\Delta_k|\cdot\frac{x_k}{x_k+2}=|\Delta_k|\cdot f(x_k)$

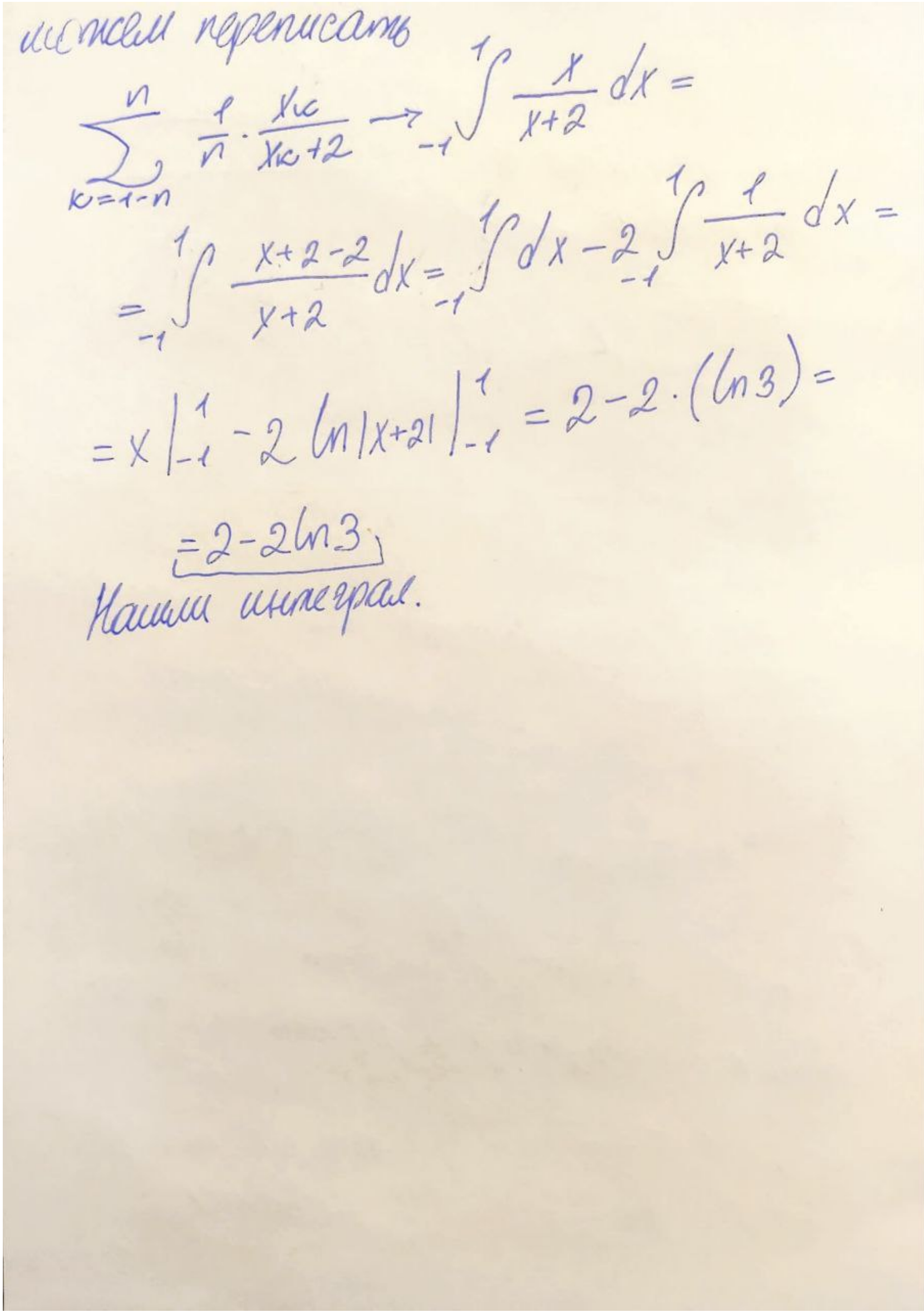
$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1-n}^{n}\frac{k}{kn+2n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1-n}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{x_k}{x_k+2}$$

Стоит понимать, что при $k=1-n$; $x=\frac{1-n}{n}=$

$=\frac{1}{n}-1\xrightarrow[n\to\infty]{}-1$

$k=n$; $x=\frac{n}{n}=1$. Это отрезок интегрирования,

Рис. 6


можем переписать

$$\sum_{k=1-n}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{x_k}{x_k+2} \to \int_{-1}^{1}\frac{x}{x+2}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x+2-2}{x+2}\,dx = \int_{-1}^{1} dx - 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= x\Big|_{-1}^{1} - 2\ln|x+2|\Big|_{-1}^{1} = 2-2\cdot(\ln 3) =$$

$$\underline{= 2-2\ln 3}$$

Нашли интеграл.

Рис. 7

Таким образом, легко выделилось количество промежутков интегрирования, сама функция от x, рассмотрел края и пришел к формуле Ньютона-Лейбница, вычислив определенный интеграл.

Задача решена

2.3 Задание 3

2.4 Задание 4

2.5 Задание 5

2.6 Задание 6

2.7 Задание 7

2.8 Задание 8

3 Выводы