

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Отчёт по исследовательской работе № 1
По предмету: Математический анализ и основы вычислений

Выполнил работу:
Тиганов Вадим Игоревич

Академическая группа:
J3112

Вариант:
18

Санкт-Петербург, 2025

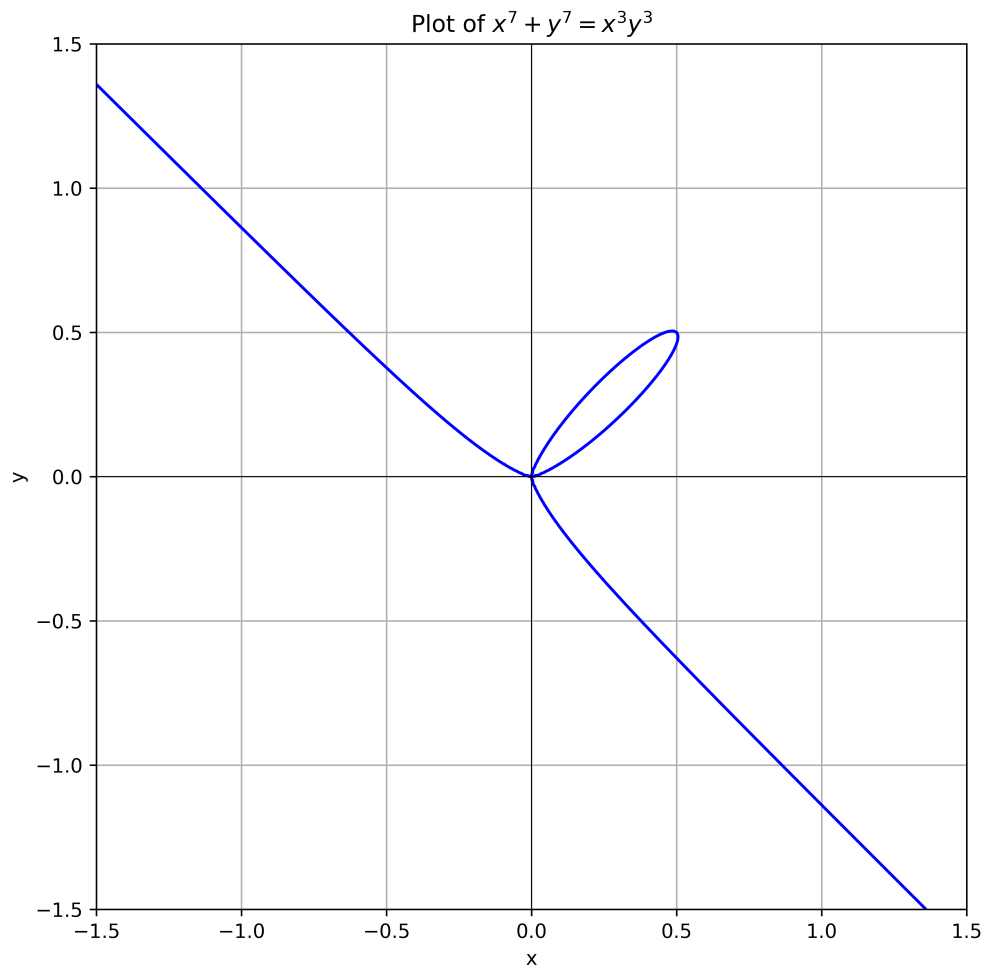
1 Ход работы

1.1 Задание 3

Требуется: Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$x^7 + y^7 = ax^3y^3$$

Графическое изображение фигуры:



Решение задачи:

Найти площадь фиг.,
огранич. кривой:

N4

$$x^4 + y^4 = ax^3y^3$$

Перейдем в полярные координаты

$$x = r \cos \theta; y = r \sin \theta$$

$$(r \cos \theta)^4 + (r \sin \theta)^4 = a (r \cos \theta)^3 (r \sin \theta)^3$$

$$r (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = a \cos^3 \theta \sin^3 \theta$$

$$r = \frac{a \cdot \cos^3 \theta \cdot \sin^3 \theta}{\cos^4 \theta + \sin^4 \theta}$$

График симметричен относительно $\varphi = \frac{\pi}{4}$,

а всл. площадь будет равна удвоенному инт.

$$S = 2 \iint_D r dr d\varphi = 2 \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr = a^2 \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^6 \theta \cdot \cos^6 \theta}{(\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi)^2} d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}^6 \varphi \cdot \cos^{12} \varphi}{\cos^{12} \varphi (1 + \operatorname{tg}^4 \varphi)^2} d\varphi$$

Рис. 1

$$\begin{aligned}
& \ominus a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}^6 \varphi}{\cos^2 \varphi (1 + \operatorname{tg}^4 \varphi)^2} d\varphi = \\
& = a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{tg}^6 \varphi}{(1 + \operatorname{tg}^4 \varphi)^2} d(\operatorname{tg} \varphi) = \\
& = \frac{a^2}{4} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{t^6}{(1 + t^4)^2} d(\operatorname{tg} \varphi) = \\
& = \frac{a^2}{4} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{d(1 + \operatorname{tg}^4 \varphi)}{(1 + \operatorname{tg}^4 \varphi)^2} = \frac{a^2}{4} \left[-\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^4 \varphi} \right]_0^{\pi/4} = \\
& = \frac{a^2}{4} \left(-\frac{1}{2} - (-1) \right) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3a^2}{14}
\end{aligned}$$

Рис. 2

Найденная площадь составила $\frac{3a^2}{14}$ в зависимости от параметра a . Данная фигура относится к классу алгебраических кривых, а при определенных значениях параметра может образовывать подобные петли. Для решения задачи и поиска интеграла пришлось использовать нетривиальные замены и внесение под знак дифференциала, на всех просторах интернета мне удалось найти только единственное решение подобной задачи — поиск площади фигуры, ограниченной кривой

$$x^3 + y^3 = axy$$

Делал по аналогии, и все те же замены сошлись, а без перехода к полярным координатам интеграл не считался. На данный момент была самой сложной задачей, а интеграл проверить я не могу, никакой источник не может посчитать адекватно..