Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Отчёт по исследовательской работе № 1
По предмету: Математический анализ и основы вычислений

Выполнил работу:
Тиганов Вадим Игоревич

Академическая группа:
J3112

Вариант:
18

Санкт-Петербург, 2025

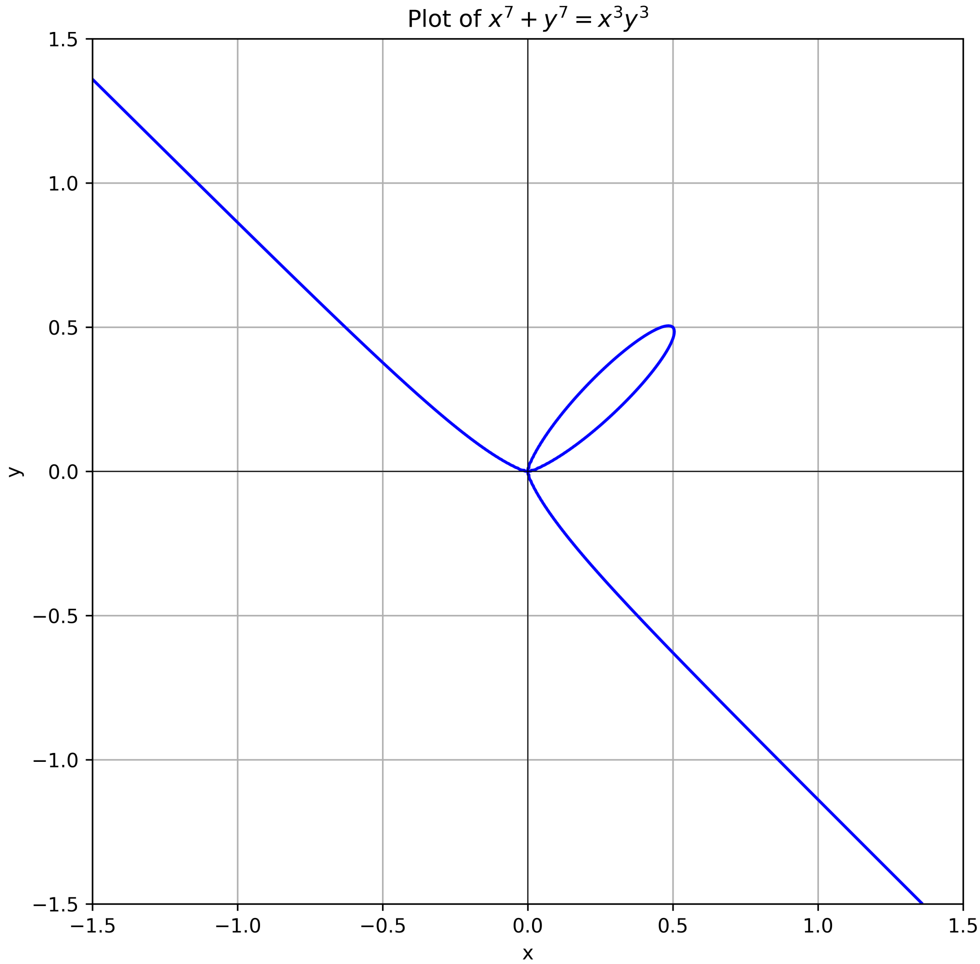
1 Ход работы

1.1 Задание 4

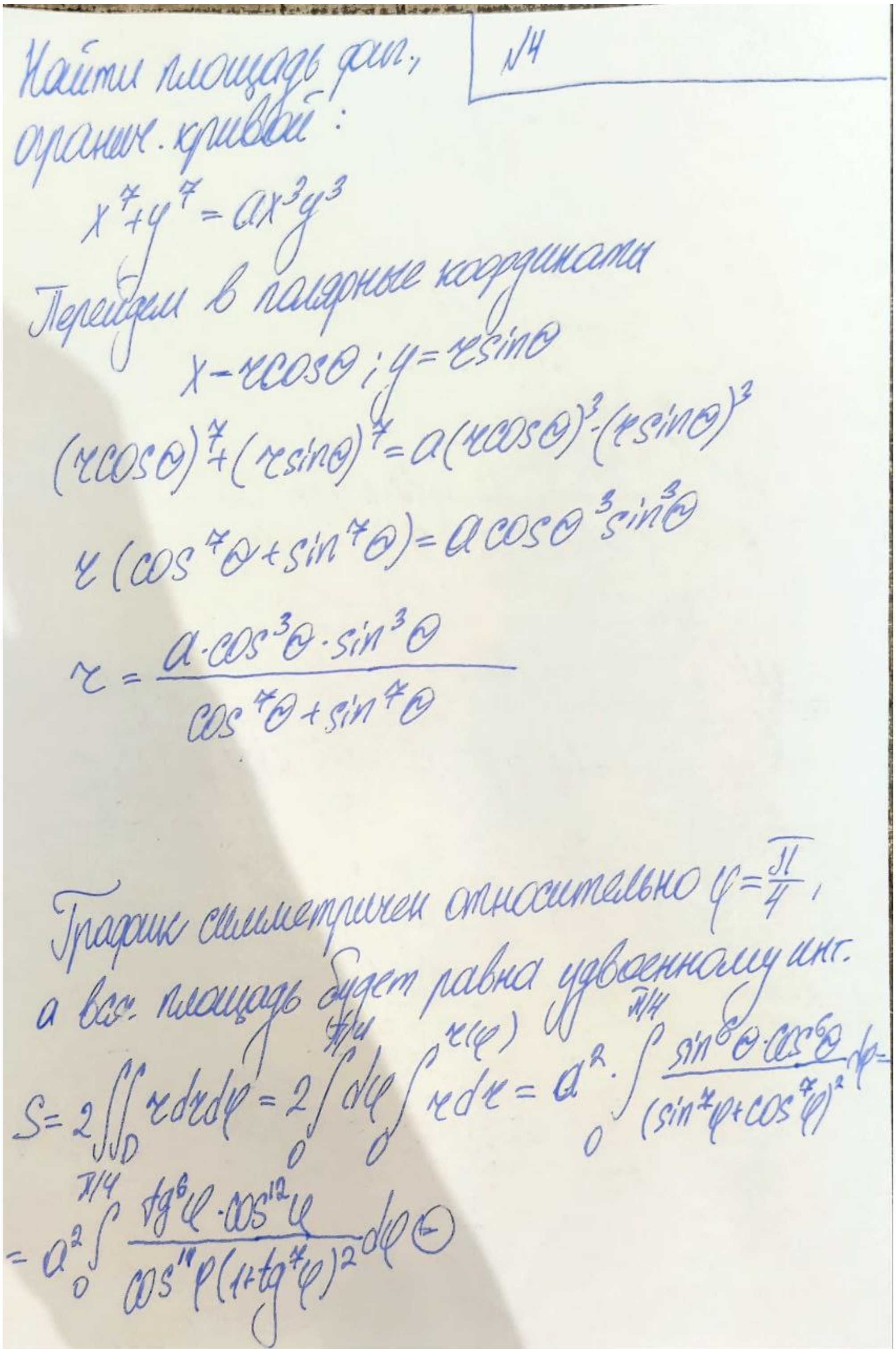
Требуется: Найти площадь фигуры, ограниченной кривой

$$x^7 + y^7 = ax^3y^3$$

Графическое изображение фигуры:



Решение задачи:



Найти площадь фиг., огранич. кривой:

№4

$$x^7+y^7=ax^3y^3$$

Перейдем в полярные координаты

$$x=r\cos\theta;\ y=r\sin\theta$$

$$(r\cos\theta)^7+(r\sin\theta)^7=a(r\cos\theta)^3\cdot(r\sin\theta)^3$$

$$r(\cos^7\theta+\sin^7\theta)=a\cos^3\theta\sin^3\theta$$

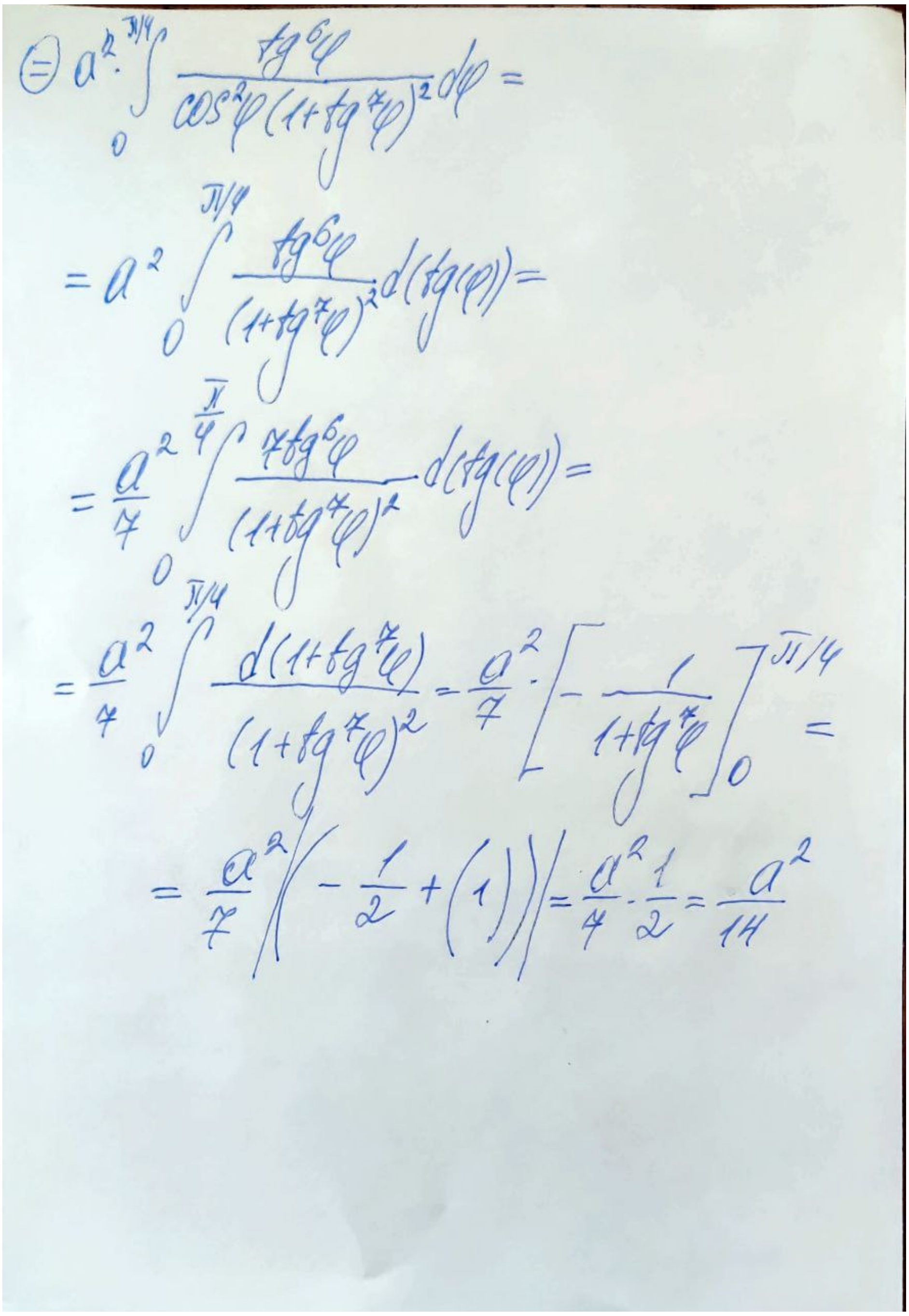
$$r=\frac{a\cdot\cos^3\theta\cdot\sin^3\theta}{\cos^7\theta+\sin^7\theta}$$

График симметричен относительно $\varphi=\frac{\pi}{4}$, а вся площадь будет равна удвоенному инт.

$$S=2\iint_D r\,dr\,d\varphi=2\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{r(\varphi)}r\,dr=a^2\cdot\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^6\theta\cdot\cos^6\theta}{(\sin^7\varphi+\cos^7\varphi)^2}d\varphi=$$

$$=a^2\int_0^{\pi/4}\frac{tg^6\varphi\cdot\cos^{12}\varphi}{\cos^{14}\varphi(1+tg^7\varphi)^2}d\varphi=$$

Рис. 1



$$= a^2 \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{tg^6\varphi}{\cos^2\varphi(1+tg^7\varphi)^2} d\varphi =$$

$$= a^2 \int_0^{\pi/4} \frac{tg^6\varphi}{(1+tg^7\varphi)^2} d(tg(\varphi)) =$$

$$= \frac{a^2}{7} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{7tg^6\varphi}{(1+tg^7\varphi)^2} d(tg(\varphi)) =$$

$$= \frac{a^2}{7} \int_0^{\pi/4} \frac{d(1+tg^7\varphi)}{(1+tg^7\varphi)^2} = \frac{a^2}{7} \cdot \left[-\frac{1}{1+tg^7\varphi}\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{a^2}{7}\left|\left(-\frac{1}{2}+(1)\right)\right| = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{14}$$

Рис. 2

Найденная площадь составила $\frac{a^2}{14}$ в зависимости от параметра a.
Данная фигура относится к классу алгебраических кривых, а при определенных значениях параметра может образовывать подобные петли.
Для решения задачи и поиска интеграла пришлось использовать нетривиальные замены и внесение под знак дифференциала, на всех просторах интернета мне удалось найти только единственное решение подобной задачи — поиск площади фигуры, ограниченной кривой

$$x^3 + y^3 = axy$$

Делал по аналогии, и все те же замены сошлись, а без перехода к полярным координатам интеграл не считался. На данный момент была самой сложной задачей, а интеграл проверить я не могу, никакой источник не может посчитать адекватно..