Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Отчёт по исследовательской работе № 1
По предмету: Математический анализ и основы вычислений

Выполнил работу:
Тиганов Вадим Игоревич

Академическая группа:
J3112

Вариант:
18

Санкт-Петербург, 2025

1 Ход работы

1.1 Задание 2

Требуется:

1. Преобразовать выражение к интегральной сумме,
2. Доказать существование соответствующего интеграла,
3. Найти предел:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1-n}^{n} \frac{k}{kn + 2n^2}$$

Графическая интерпретация интеграла

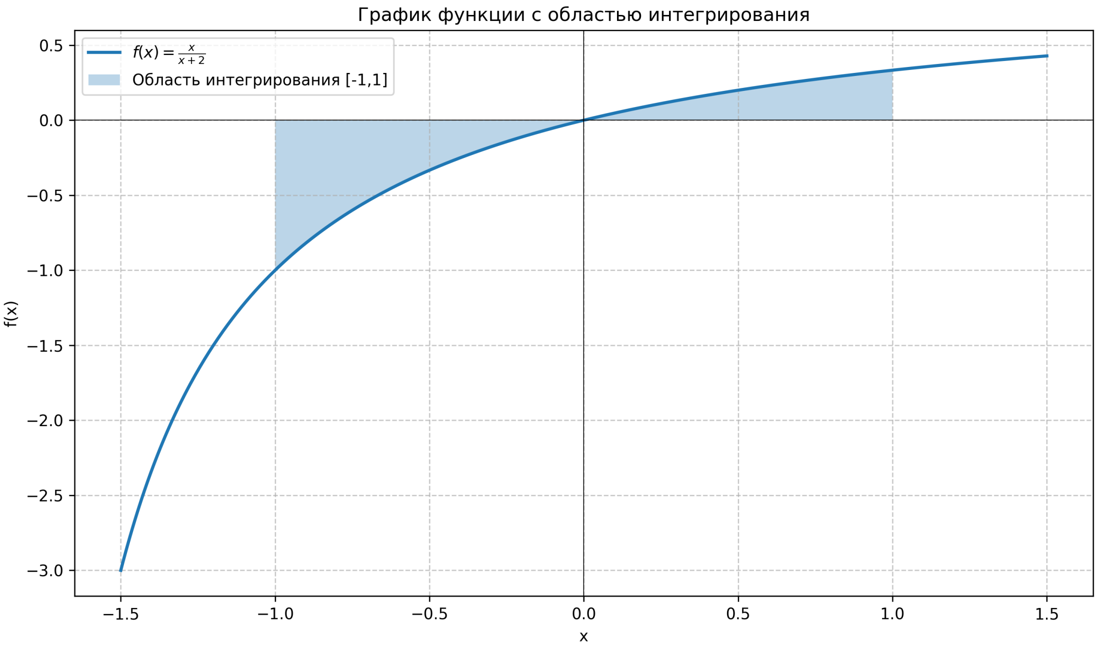
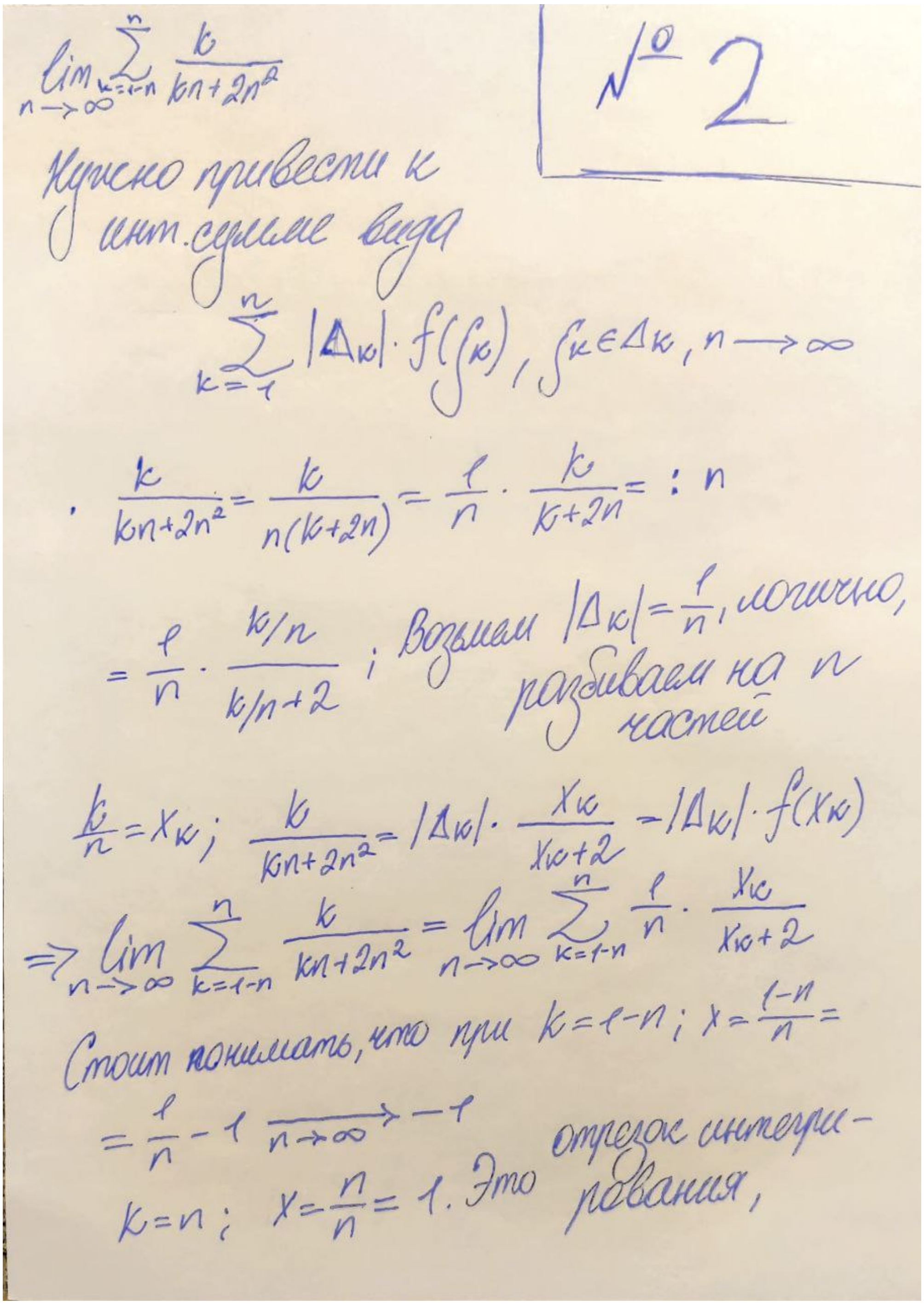


Рис. 1: График функции $f(x) = \frac{x}{x+2}$ с выделенной областью интегрирования $[-1, 1]$

Решение задачи:



$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1-n}^{n}\frac{k}{kn+2n^2}$$

№ 2

Нужно привести к инт. сумме вида

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta_k|\cdot f(\xi_k),\ \xi_k\in\Delta_k,\ n\to\infty$$

$$\frac{k}{kn+2n^2}=\frac{k}{n(k+2n)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{k+2n}=:n$$

$=\frac{1}{n}\cdot\frac{k/n}{k/n+2}$; Возьмем $|\Delta_k|=\frac{1}{n}$, логично, разбиваем на n частей

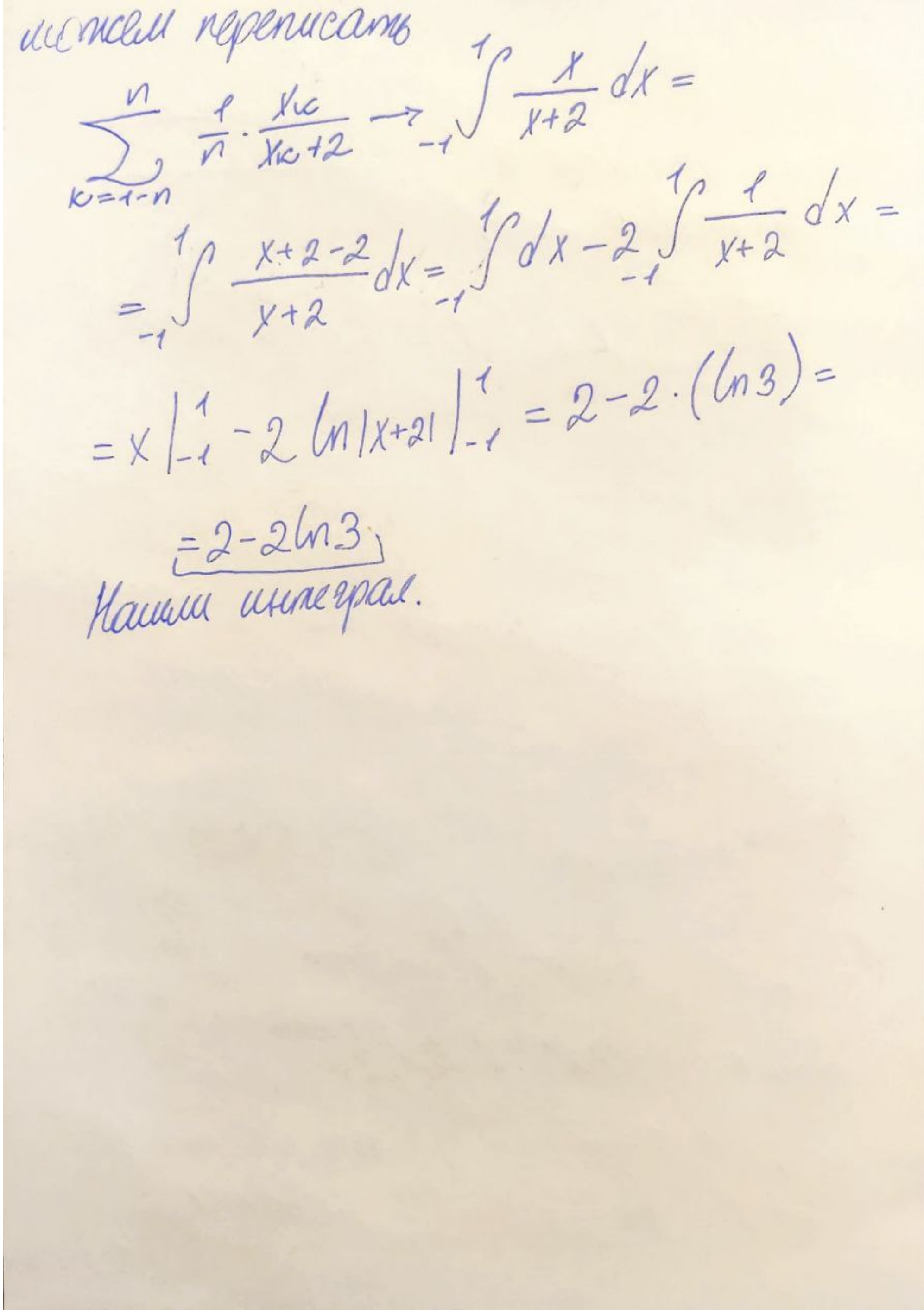
$\frac{k}{n}=x_k$; $\frac{k}{kn+2n^2}=|\Delta_k|\cdot\frac{x_k}{x_k+2}=|\Delta_k|\cdot f(x_k)$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1-n}^{n}\frac{k}{kn+2n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1-n}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{x_k}{x_k+2}$$

Стоит понимать, что при $k=1-n$; $x=\frac{1-n}{n}=\frac{1}{n}-1\xrightarrow[n\to\infty]{}-1$

$k=n$; $x=\frac{n}{n}=1$. Это отрезок интегрирования,

Рис. 2



можем переписать

$$\sum_{k=1-n}^{n} \frac{1}{n}\cdot\frac{x_k}{x_k+2} \to \int_{-1}^{1}\frac{x}{x+2}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1}\frac{x+2-2}{x+2}\,dx = \int_{-1}^{1}dx - 2\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}\,dx =$$

$$= x\Big|_{-1}^{1} - 2\ln|x+2|\Big|_{-1}^{1} = 2-2\cdot(\ln 3) =$$

$$\underline{= 2-2\ln 3}$$

Нашли интеграл.

Рис. 3

Таким образом, легко выделилось количество промежутков интегрирования, сама функция от x, рассмотрел края и пришел к формуле Ньютона-Лейбница, вычислив определенный интеграл.
Задача решена