

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Отчёт по исследовательской работе № 1
По предмету: Математический анализ и основы вычислений

Выполнил работу:
Тиганов Вадим Игоревич

Академическая группа:
J3112

Вариант:
18

Санкт-Петербург, 2025

Содержание

1	Цель и задачи	3
2	Ход работы	3
2.1	Задание 1	3
2.2	Задание 2	7
2.3	Задание 3	10
2.4	Задание 4	10
2.5	Задание 5	10
2.6	Задание 6	10
2.7	Задание 7	10
2.8	Задание 8	10
3	Выводы	10

1 Цель и задачи

Цель работы: применить навыки, полученные за время второго семестра по предмету Математический анализ для решения практических задач вручную и с помощью программного обеспечения.

Задачи работы:

1.

2 Ход работы

2.1 Задание 1

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}.$$

Исследовать на равномерную непрерывность на множествах

(a) $X = [3, +\infty)$

(b) $X = (1, 3)$

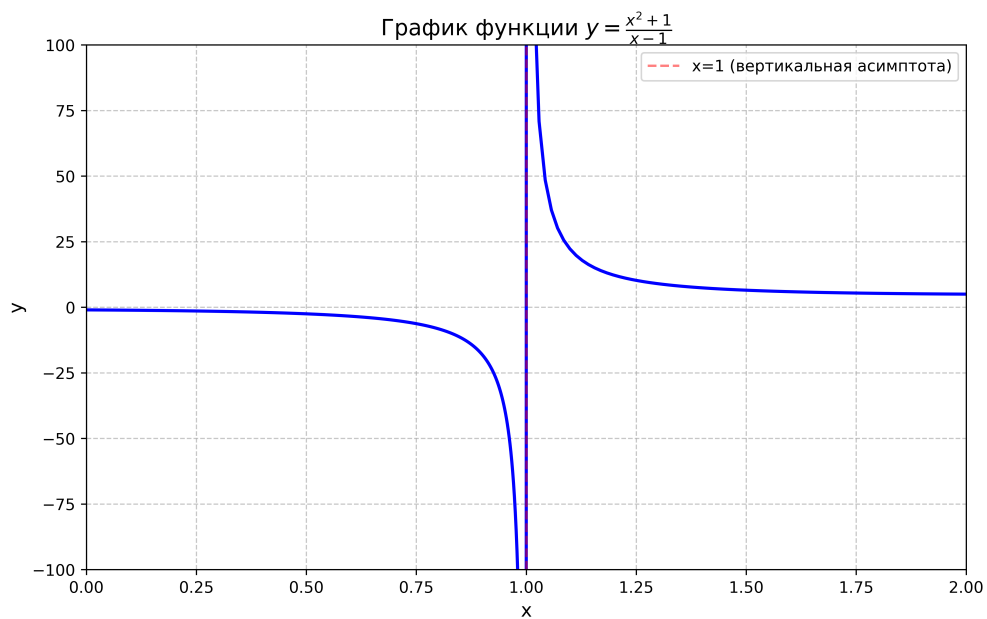


Рис. 1: График функции $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

Решение задачи:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$$

$\sqrt{0} \rightarrow 1$

$$a) X = [3; +\infty)$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x_1, x_2 \in X: |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$$

Условие равенств. непрерывности.

Преобразую функцию для удобства:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \frac{(x^2 - 1) + 2}{x - 1} = (x + 1) + \frac{2}{x - 1}$$

$$|x_1 - x_2| < \delta$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| (x_1 + 1) + \frac{2}{x_1 - 1} - \left(x_2 + 1 + \frac{2}{x_2 - 1} \right) \right| =$$

$$= \left| (x_1 - x_2) + \frac{2}{x_1 - 1} - \frac{2}{x_2 - 1} \right| =$$

$$= \left| (x_1 - x_2) + 2 \left(\frac{x_2 - 1 - x_1 + 1}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} \right) \right| = \left| (x_1 - x_2) - 2 \left(\frac{x_1 - x_2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} \right) \right|$$

Рис. 2: (a)

$$= \left| (x_1 - x_2) \left(1 - \frac{2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} \right) \right| \leq \delta \cdot \left| 1 - \frac{2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} \right|$$

Оценим знаменатель

$$X = [3; +\infty)$$

$$x_1 - 1 \geq 2$$

$$x_2 - 1 \geq 2$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) \geq 4$$

$$\leq \delta \cdot \left| 1 - \frac{2}{4} \right| \leq \delta \cdot \left| 1 + \frac{1}{2} \right| = \delta \cdot \frac{3}{2} = \epsilon$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta = \frac{2}{3}\epsilon \forall x_1, x_2 \in X:$$

$$|x_1 - x_2| < \frac{2}{3}\epsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon.$$

Итак, на $[3; +\infty)$ $f(x)$ равномерно непрерывна.

Рис. 3: (a)

$$\delta) X = (1; 3)$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} = \frac{(x^2-1)+2}{x-1} = x+1 + \frac{2}{x-1}$$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{n} ; x_2 = 1 + \frac{1}{2n}$$

$$|x_1 - x_2| = \left| 1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{2n} \right| = \left| \frac{1}{2n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| (x_1 - x_2) \left(1 - \frac{2}{(x_1-1)(x_2-1)} \right) \right| \stackrel{\text{из пункта (а)}}{=} 0$$

$$\stackrel{\text{с}}{=} \left| \left(1 + \frac{1}{n} - 1 - \frac{1}{2n} \right) \left(1 - \frac{2}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2n}} \right) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2n} \cdot \left(1 - \frac{2n^2 \cdot 2}{1} \right) \right| = \left| \frac{1}{2n} (1 - 4n^2) \right| =$$

$$= \left| \frac{1}{2n} - 2n \right| = 2n + \frac{1}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

Следовательно, расходится и не является равномерно непр. Возьмем точки $\{1\}$

Рис. 4: (b)

Итак, задача решена. Функция $f(x)$ является равномерно непрерывной на промежутке $X = [3, +\infty)$, и не является таковой на промежутке $X = (1, 3)$

2.2 Задание 2

Требуется:

1. Преобразовать выражение к интегральной сумме,
2. Доказать существование соответствующего интеграла,
3. Найти предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1-n}^n \frac{k}{kn + 2n^2}$$

Графическая интерпретация интеграла

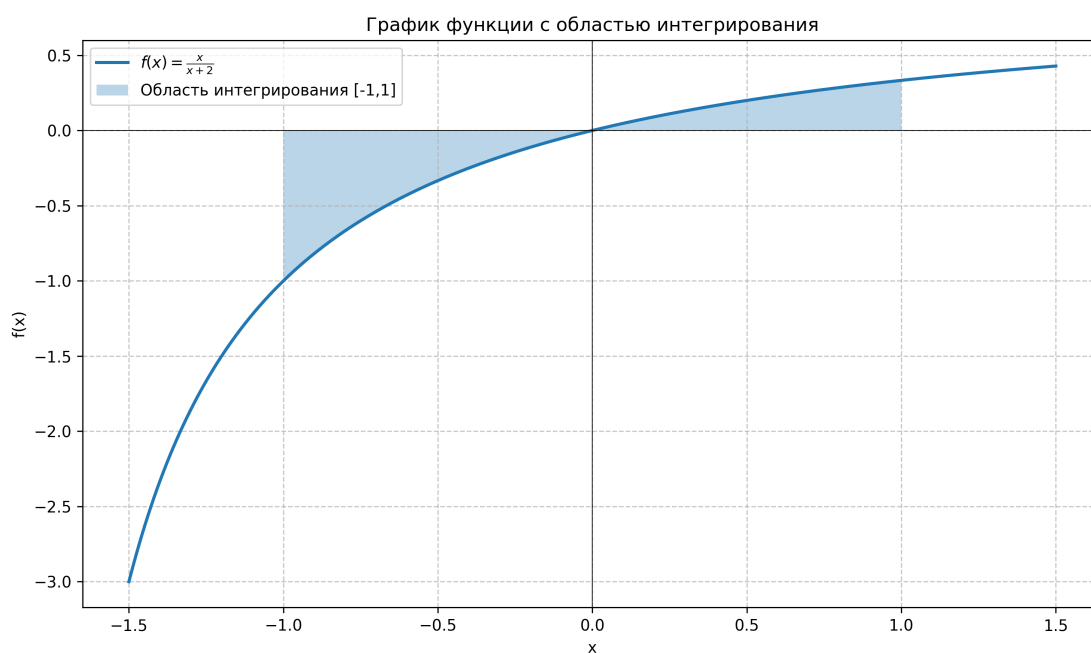


Рис. 5: График функции $f(x) = \frac{x}{x+2}$ с выделенной областью интегрирования $[-1, 1]$

Решение задачи:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1-n}^n \frac{k}{kn+2n^2}$$

$$\sqrt[0]{2}$$

можно привести к
инт.сумме вида

$$\sum_{k=1}^n |\Delta_k| \cdot f(\xi_k), \xi_k \in \Delta_k, n \rightarrow \infty$$

$$\frac{k}{kn+2n^2} = \frac{k}{n(k+2n)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{k+2n} = : n$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{k/n}{k/n+2}; \text{ Возьмем } |\Delta_k| = \frac{1}{n}, \text{ логично,}$$

разбиваем на n
частей

$$\frac{k}{n} = x_k; \frac{k}{kn+2n^2} = |\Delta_k| \cdot \frac{x_k}{x_k+2} = |\Delta_k| \cdot f(x_k)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1-n}^n \frac{k}{kn+2n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1-n}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{x_k}{x_k+2}$$

$$\text{Стоит заметить, что при } k=1-n; x = \frac{1-n}{n} =$$

$$= \frac{1}{n} - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$$

$$k=n; x = \frac{n}{n} = 1. \text{ Это } \text{отрезок интегри-}$$

рования,

Рис. 6

давайте переписать

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{x_k}{x_k+2} \rightarrow \int_{-1}^1 \frac{x}{x+2} dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{x+2-2}{x+2} dx = \int_{-1}^1 dx - 2 \int_{-1}^1 \frac{1}{x+2} dx =$$

$$= x \Big|_{-1}^1 - 2 \ln|x+2| \Big|_{-1}^1 = 2 - 2 \cdot (\ln 3) =$$

$$= 2 - 2 \ln 3$$

Нашин интеграл.

Рис. 7

Таким образом, легко выделилось количество промежутков интегрирования, сама функция от x , рассмотрел края и пришел к формуле Ньютона-Лейбница, вычислив определенный интеграл.

Задача решена

2.3 Задание 3

2.4 Задание 4

2.5 Задание 5

2.6 Задание 6

2.7 Задание 7

2.8 Задание 8

3 Выводы