Vérification formelle en Isabelle(HOL) d'un algorithme calculant les composantes fortement connexes d'un graphe

Vincent Trélat, Stephan Merz

École Nationale Supérieure des Mines de Nancy
Département Informatique

June 9, 2022

1. Présentation et intérêt des méthodes formelles
   - Programmation défensive
   - Les méthodes formelles
   - Applications
2. Introduction du projet
   - Définition
   - Motivation du problème
3. Vérification formelle en Isabelle
   - Présentation de l'algorithme
   - Structure de la preuve
4. Conclusion

Comment garantir le fonctionnement continu d'un logiciel dans des conditions imprévues ?

Comment garantir le fonctionnement continu d'un logiciel dans des conditions imprévues ?

- Concepts de Software Engineering (design documents, design patterns, etc.)
- Review de code en équipe (GitHub, etc.)
- Séries de tests (unitaires, d'intégration, fonctionnels, etc.)

Comment garantir le fonctionnement continu d'un logiciel dans des conditions imprévues ?

- Concepts de Software Engineering (design documents, design patterns, etc.)
- Review de code en équipe (GitHub, etc.)
- Séries de tests (unitaires, d'intégration, fonctionnels, etc.)

$\Longrightarrow$ Responsabilité du programmeur !

Probability of human error is considerably higher than that of machine error.

Kenneth Appel

> *Probability of human error is considerably higher than that of machine error.*
>
> *Kenneth Appel*

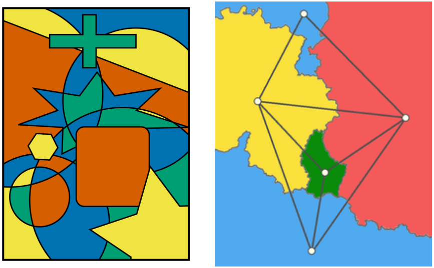


Figure: Illustrations du problème 4-COL

En méthodes formelles, on considère un programme comme une structure mathématique, ce qui permet de raisonner dessus de manière formelle.

- Rigueur
- Concepts de logique
- Validité par rapport à des spécifications
- Sémantique

Preuve papier vs. preuve formelle

- L'utilisateur fournit la structure de la preuve
- Automatisation des preuves
- Différents outils informatiques : assistants à la preuve (Isabelle(HOL), Coq, Why3, B, etc.) et model checkers (TLC, etc.)

Quelles applications ?

Éviter les "bugs" : applications aux systèmes critiques

Ex: Ariane 5, Entreprise Clearsy

CLEARSY Safety Solutions Designer

Application au milieu ferroviaire : Certification du logiciel de pilotage automatique de la ligne 14 de métro à Paris, bientôt la ligne 4

1 Présentation et intérêt des méthodes formelles
- Programmation défensive
- Les méthodes formelles
- Applications

2 Introduction du projet
- Définition
- Motivation du problème

3 Vérification formelle en Isabelle
- Présentation de l'algorithme
- Structure de la preuve

4 Conclusion

Composante fortement connexe

Definition 1 (SCC)

Soient $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe orienté et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$. $\mathcal{C}$ est une SCC de $\mathcal{G}$ si[a]:

$$\forall x, y \in \mathcal{C}, (x \Rightarrow^* y) \wedge (y \Rightarrow^* x)$$

[a] Il suffit de : $\forall x, y \in \mathcal{C}, x \Rightarrow^* y$

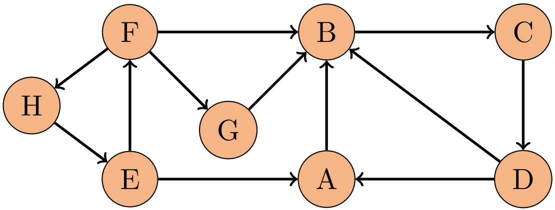
Composante fortement connexe

Definition 1 (SCC)

Soient $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe orienté et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$. $\mathcal{C}$ est une SCC de $\mathcal{G}$ si[a]:

$$\forall x, y \in \mathcal{C}, (x \Rightarrow^* y) \wedge (y \Rightarrow^* x)$$

[a] Il suffit de : $\forall x, y \in \mathcal{C}, x \Rightarrow^* y$



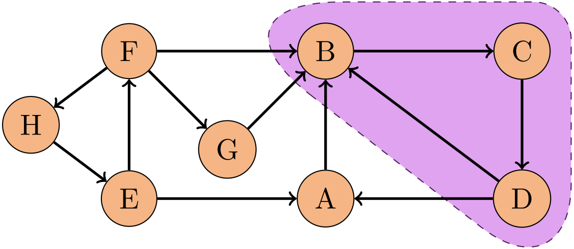
Composante fortement connexe

Definition 1 (SCC)

Soient $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe orienté et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$. $\mathcal{C}$ est une SCC de $\mathcal{G}$ si[a]:

$$\forall x, y \in \mathcal{C}, (x \Rightarrow^* y) \wedge (y \Rightarrow^* x)$$

[a] Il suffit de : $\forall x, y \in \mathcal{C}, x \Rightarrow^* y$



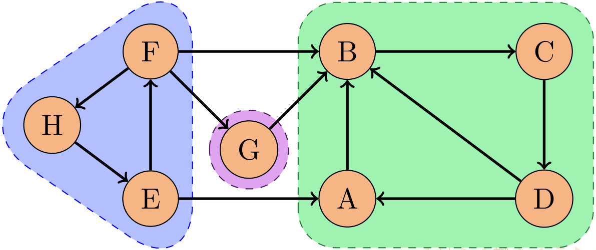
Composante fortement connexe

Definition 1 (SCC)

Soient $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe orienté et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$. $\mathcal{C}$ est une SCC de $\mathcal{G}$ si[a]:

$$\forall x, y \in \mathcal{C}, (x \Rightarrow^* y) \wedge (y \Rightarrow^* x)$$

[a] Il suffit de : $\forall x, y \in \mathcal{C}, x \Rightarrow^* y$



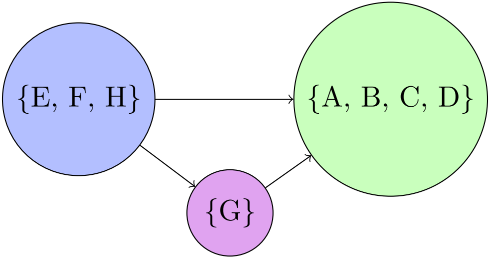
Composante fortement connexe

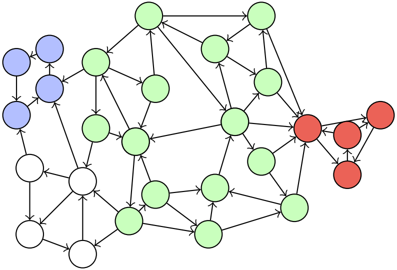
Definition 1 (SCC)

Soient $\mathcal{G} := (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe orienté et $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$. $\mathcal{C}$ est une SCC de $\mathcal{G}$ si[a]:

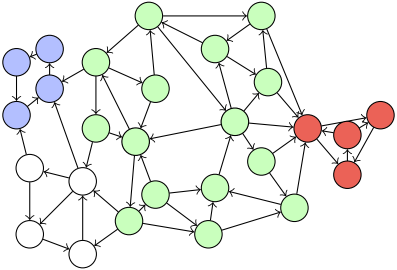
$$\forall x, y \in \mathcal{C}, (x \Rightarrow^* y) \wedge (y \Rightarrow^* x)$$

[a] Il suffit de : $\forall x, y \in \mathcal{C}, x \Rightarrow^* y$





- Réseaux: interconnectivité et partage de données
- Model checking: recherche de contre-exemples



- Réseaux: interconnectivité et partage de données
- Model checking: recherche de contre-exemples

Algorithmes efficaces (ex: Tarjan)

- La vérification formelle de leur correction est utile
- Un autre défi : la parallélisation

1 Présentation et intérêt des méthodes formelles
Programmation défensive
Les méthodes formelles
Applications

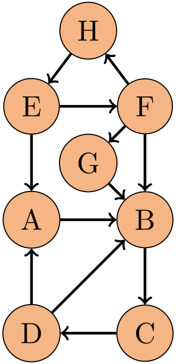
2 Introduction du projet
Définition
Motivation du problème

3 Vérification formelle en Isabelle
Présentation de l'algorithme
Structure de la preuve

4 Conclusion

Data: A graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, a starting node v_0;

```
Initialize an empty set VISITED;
Initialize an empty set EXPLORED;
Initialize an empty stack R;
setBased(v0);
function setBased: v ∈ V → None
    VISITED := VISITED ∪ {v};
    R.push(v);
    foreach w ∈ POST(v) do
        if w ∈ EXPLORED then
            continue;
        else if w ∉ VISITED then
            setBased(w);
        else
            while S(v) ≠ S(w) do
                r := R.pop();
                UNITE(S, r, R.top());
    if v = R.top() then
        report SCC S(v);
        EXPLORED := EXPLORED ∪ S(v);
        R.pop();
```



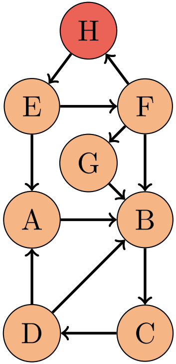
$$\mathrm{R} = []$$

$$\mathrm{VISITED} = \{\}$$

$$\mathrm{EXPLORED} = \{\}$$

$$\mathcal{S} = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} \cup \{D\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{G\} \cup \{H\}$$

```
Data: A graph G = (V , E ), a starting node v0;
Initialize an empty set VISITED;
Initialize an empty set EXPLORED;
Initialize an empty stack R;
setBased(v0);
function setBased: v ∈ V → None
    VISITED := VISITED ∪ {v};
    R.push(v);
    foreach w ∈ POST(v) do
        if w ∈ EXPLORED then
            continue;
        else if w ∉ VISITED then
            setBased(w);
        else
            while S(v) ≠ S(w) do
                r := R.pop();
                UNITE(S, r, R.top());
    if v = R.top() then
        report SCC S(v);
        EXPLORED := EXPLORED ∪ S(v);
        R.pop();
```



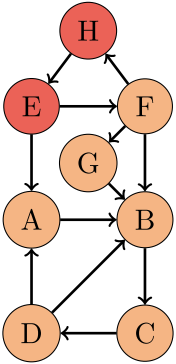
$$R = [H]$$

$$\text{VISITED} = \{H\}$$

$$\text{EXPLORED} = \{\}$$

$$\mathcal{S} = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} \cup \{D\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{G\} \cup \{H\}$$

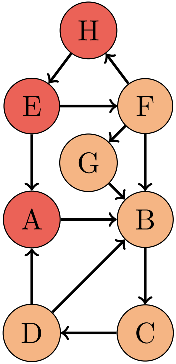
```
Data: A graph 𝒢 = (𝒱 , ℰ ), a starting node v0;
Initialize an empty set VISITED;
Initialize an empty set EXPLORED;
Initialize an empty stack R;
setBased(v0);
function setBased: v ∈ 𝒱 → None
    VISITED := VISITED ∪ {v};
    R.push(v);
    foreach w ∈ POST(v) do
        if w ∈ EXPLORED then
            continue;
        else if w ∉ VISITED then
            setBased(w);
        else
            while 𝒮(v) ≠ 𝒮(w) do
                r := R.pop();
                UNITE(𝒮, r, R.top());
    if v = R.top() then
        report SCC 𝒮(v);
        EXPLORED := EXPLORED ∪ 𝒮(v);
        R.pop();
```



$$R = [H, E]$$
$$VISITED = \{H, E\}$$
$$EXPLORED = \{\}$$

$\mathcal{S} = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} \cup \{D\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{G\} \cup \{H\}$

```
Data: A graph 𝒢 = (𝒱 , ℰ ), a starting node v0;
Initialize an empty set VISITED;
Initialize an empty set EXPLORED;
Initialize an empty stack R;
setBased(v0);
function setBased: v ∈ 𝒱 → None
    VISITED := VISITED ∪ {v};
    R.push(v);
    foreach w ∈ POST(v) do
        if w ∈ EXPLORED then
            continue;
        else if w ∉ VISITED then
            setBased(w);
        else
            while 𝒮(v) ≠ 𝒮(w) do
                r := R.pop();
                UNITE(𝒮, r, R.top());
    if v = R.top() then
        report SCC 𝒮(v);
        EXPLORED := EXPLORED ∪ 𝒮(v);
        R.pop();
```



$$R = [H, E, A]$$

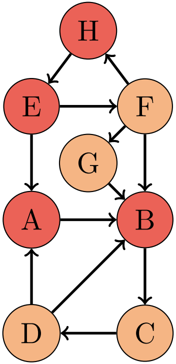
$$VISITED = \{H, E, A\}$$

$$EXPLORED = \{\}$$

$$\mathcal{S} = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} \cup \{D\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{G\} \cup \{H\}$$

Data: A graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, a starting node v_0;

```
Initialize an empty set VISITED;
Initialize an empty set EXPLORED;
Initialize an empty stack R;
setBased(v0);
function setBased: v ∈ 𝒱 → None
    VISITED := VISITED ∪ {v};
    R.push(v);
    foreach w ∈ POST(v) do
        if w ∈ EXPLORED then
            continue;
        else if w ∉ VISITED then
            setBased(w);
        else
            while 𝒮(v) ≠ 𝒮(w) do
                r := R.pop();
                UNITE(𝒮, r, R.top());
    if v = R.top() then
        report SCC 𝒮(v);
        EXPLORED := EXPLORED ∪ 𝒮(v);
        R.pop();
```



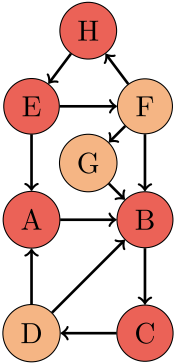
$$R = [H, E, A, B]$$

$$VISITED = \{H, E, A, B\}$$

$$EXPLORED = \{\}$$

$$\mathcal{S} = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} \cup \{D\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{G\} \cup \{H\}$$

```
Data: A graph 𝒢 = (𝒱 , ℰ ), a starting node v0;
Initialize an empty set VISITED;
Initialize an empty set EXPLORED;
Initialize an empty stack R;
setBased(v0);
function setBased: v ∈ 𝒱 → None
    VISITED := VISITED ∪ {v};
    R.push(v);
    foreach w ∈ POST(v) do
        if w ∈ EXPLORED then
            continue;
        else if w ∉ VISITED then
            setBased(w);
        else
            while 𝒮(v) ≠ 𝒮(w) do
                r := R.pop();
                UNITE(𝒮, r, R.top());
    if v = R.top() then
        report SCC 𝒮(v);
        EXPLORED := EXPLORED ∪ 𝒮(v);
        R.pop();
```



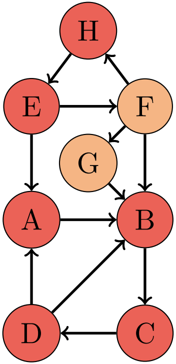
$$R = [\text{H, E, A, B, C}]$$

$$\text{VISITED} = \{\text{H, E, A, B, C}\}$$

$$\text{EXPLORED} = \{\}$$

$$\mathcal{S} = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} \cup \{D\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{G\} \cup \{H\}$$

```
Data: A graph 𝒢 = (𝒱 , ℰ ), a starting node v0;
Initialize an empty set VISITED;
Initialize an empty set EXPLORED;
Initialize an empty stack R;
setBased(v0);
function setBased: v ∈ 𝒱 → None
    VISITED := VISITED ∪ {v};
    R.push(v);
    foreach w ∈ POST(v) do
        if w ∈ EXPLORED then
            continue;
        else if w ∉ VISITED then
            setBased(w);
        else
            while 𝒮(v) ≠ 𝒮(w) do
                r := R.pop();
                UNITE(𝒮, r, R.top());
    if v = R.top() then
        report SCC 𝒮(v);
        EXPLORED := EXPLORED ∪ 𝒮(v);
        R.pop();
```



$$R = [H, E, A, B, C, D]$$
$$VISITED = \{H, E, A, B, C, D\}$$
$$EXPLORED = \{\}$$
$$\mathcal{S} = \{A\} \cup \{B\} \cup \{C\} \cup \{D\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{G\} \cup \{H\}$$

Data: A graph $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, a starting node v_0;

Initialize an empty set `VISITED`;

Initialize an empty set `EXPLORED`;

Initialize an empty stack `R`;

setBased(v_0);

function *setBased*: $v \in \mathcal{V} \to$ *None*

  `VISITED` := `VISITED` $\cup \{v\}$;

  `R.push`(v);

  foreach $w \in$ *POST(v)* **do**

    if $w \in$ *EXPLORED* **then**

      continue;

    else if $w \notin$ *VISITED* **then**

      setBased(w);

    else

      while $\mathcal{S}(v) \neq \mathcal{S}(w)$ **do**

        r := `R.pop()`;

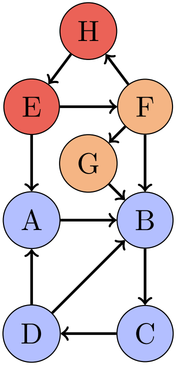
        `UNITE`($\mathcal{S}$, r, `R.top()`);

  if v = *R.top()* **then**

    report SCC $\mathcal{S}(v)$;

    `EXPLORED` := `EXPLORED` $\cup \mathcal{S}(v)$;

    `R.pop()`;



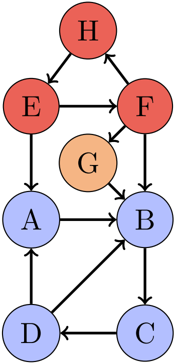
$$R = [H, E]$$

$$VISITED = \{H, E, A, B, C, D\}$$

$$EXPLORED = \{A, B, C, D\}$$

$$\mathcal{S} = \{A, B, C, D\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{G\} \cup \{H\}$$

```
Data: A graph 𝒢 = (𝒱 , ℰ ), a starting node v0;
Initialize an empty set VISITED;
Initialize an empty set EXPLORED;
Initialize an empty stack R;
setBased(v0);
function setBased: v ∈ 𝒱 → None
    VISITED := VISITED ∪ {v};
    R.push(v);
    foreach w ∈ POST(v) do
        if w ∈ EXPLORED then
            continue;
        else if w ∉ VISITED then
            setBased(w);
        else
            while 𝒮(v) ≠ 𝒮(w) do
                r := R.pop();
                UNITE(𝒮, r, R.top());
    if v = R.top() then
        report SCC 𝒮(v);
        EXPLORED := EXPLORED ∪ 𝒮(v);
        R.pop();
```



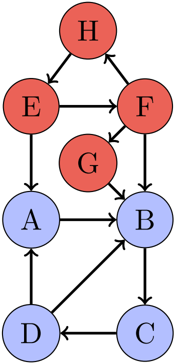
$$R = [H, E, F]$$

$$VISITED = \{H, E, A, B, C, D, F\}$$

$$EXPLORED = \{A, B, C, D\}$$

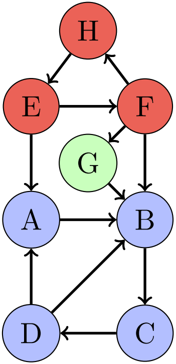
$$\mathcal{S} = \{A, B, C, D\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{G\} \cup \{H\}$$

```
Data: A graph 𝒢 = (𝒱 , ℰ ), a starting node v0;
Initialize an empty set VISITED;
Initialize an empty set EXPLORED;
Initialize an empty stack R;
setBased(v0);
function setBased: v ∈ 𝒱 → None
    VISITED := VISITED ∪ {v};
    R.push(v);
    foreach w ∈ POST(v) do
        if w ∈ EXPLORED then
            continue;
        else if w ∉ VISITED then
            setBased(w);
        else
            while 𝒮(v) ≠ 𝒮(w) do
                r := R.pop();
                UNITE(𝒮, r, R.top());
    if v = R.top() then
        report SCC 𝒮(v);
        EXPLORED := EXPLORED ∪ 𝒮(v);
        R.pop();
```



$$\mathrm{R} = [\mathrm{H, E, F, G}]$$
$$\mathrm{VISITED} = \{\mathrm{H, E, A, B, C, D, F, G}\}$$
$$\mathrm{EXPLORED} = \{\mathrm{A, B, C, D}\}$$
$$\mathcal{S} = \{A, B, C, D\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{G\} \cup \{H\}$$

```
Data: A graph G = (V , E ), a starting node v0;
Initialize an empty set VISITED;
Initialize an empty set EXPLORED;
Initialize an empty stack R;
setBased(v0);
function setBased: v ∈ V → None
    VISITED := VISITED ∪ {v};
    R.push(v);
    foreach w ∈ POST(v) do
        if w ∈ EXPLORED then
            continue;
        else if w ∉ VISITED then
            setBased(w);
        else
            while S(v) ≠ S(w) do
                r := R.pop();
                UNITE(S, r, R.top());
    if v = R.top() then
        report SCC S(v);
        EXPLORED := EXPLORED ∪ S(v);
        R.pop();
```



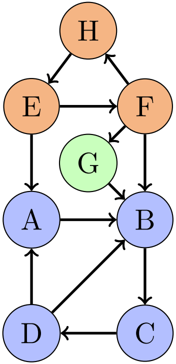
R = [H, E, F]

VISITED = {H, E, A, B, C, D, F, G}

EXPLORED = {A, B, C, D, G}

$\mathcal{S} = \{A, B, C, D\} \cup \{E\} \cup \{F\} \cup \{G\} \cup \{H\}$

```
Data: A graph 𝒢 = (𝒱 , ℰ ), a starting node v0;
Initialize an empty set VISITED;
Initialize an empty set EXPLORED;
Initialize an empty stack R;
setBased(v0);
function setBased: v ∈ 𝒱 → None
    VISITED := VISITED ∪ {v};
    R.push(v);
    foreach w ∈ POST(v) do
        if w ∈ EXPLORED then
            continue;
        else if w ∉ VISITED then
            setBased(w);
        else
            while 𝒮(v) ≠ 𝒮(w) do
                r := R.pop();
                UNITE(𝒮, r, R.top());
    if v = R.top() then
        report SCC 𝒮(v);
        EXPLORED := EXPLORED ∪ 𝒮(v);
        R.pop();
```



$$\mathrm{R} = []$$

$$\mathrm{VISITED} = \{\mathrm{H, E, A, B, C, D, F, G}\}$$

$$\mathrm{EXPLORED} = \{\mathrm{A, B, C, D, G, E, F, H}$$

$$\mathcal{S} = \{A, B, C, D\} \cup \{E, F, H\} \cup \{G\}$$

1 Présentation et intérêt des méthodes formelles
- Programmation défensive
- Les méthodes formelles
- Applications

2 Introduction du projet
- Définition
- Motivation du problème

3 Vérification formelle en Isabelle
- Présentation de l'algorithme
- Structure de la preuve

4 Conclusion

- Modélisation et implémentation de l'algorithme
  - Définition de l'environnement
  - Fonctions `unite`, `dfs` et `dfss`

- Définition des invariants
  - définitions : `reachable` et `is_scc`
  - well-formed environment
  - pré-conditions et post-conditions sur `dfs` et `dfss`

- Écriture et preuve des lemmes
  - `pre_dfs` $\Longrightarrow$ `pre_dfss`
  - `pre_dfss` $\Longrightarrow$ `pre_dfs`
  - `pre_dfs` $\Longrightarrow$ `post_dfs`
  - `pre_dfss` $\Longrightarrow$ `post_dfss`
  - théorème final

1. Présentation et intérêt des méthodes formelles
   - Programmation défensive
   - Les méthodes formelles
   - Applications
2. Introduction du projet
   - Définition
   - Motivation du problème
3. Vérification formelle en Isabelle
   - Présentation de l'algorithme
   - Structure de la preuve
4. Conclusion

- Ce qui a été fait :
  - Modèle cohérent et stable
  - Preuve de tous les lemmes intermédiaires (ou presque)

- Ce qu'il manque :
  - Quelques propriétés intermédiaires sont à démontrer
  - Théorème final
  - Montrer la terminaison