УДК 517.2

В. Л. Рвачев, О. Н. Бобылева

О построении обобщенной формулы Тейлора разностного типа

Предположим, что $\Gamma = \{x \in R^t : \omega(x) = 0\}$ — гладкое H-реализуемое многообразие, а H — алгоритмически полная система

$$H = \{x_1 + x_2,\ x_1 x_2,\ \sqrt{x};\ \varphi_1, \varphi_2, \dots; a \in R^1\}, \tag{1}$$

замкнутая по отношению к операции дифференцирования [1], $\mathfrak{M}(H)$ — множество H-реализуемых функций. Предлагается новый метод разложения функции $f(x) \in C^{m+1}$, $x \in R^t$, в окрестности Γ по степеням $\omega(x) \in C^{m+1} \cap \cap \mathfrak{M}(H)$, если на Γ известны принадлежащие $\mathfrak{M}(H)$ значения $f(x)$ и ее нормальных производных до некоторого порядка. В построении переменных коэффициентов разложения (п.2) используется функция $\omega(x)$, нормализованная до 1-го порядка (в [2] требовалась нормализованность $\omega(x)$ до $(m+1)$-го порядка). Это разложение (п.3) принадлежит $\mathfrak{M}(H)$ и представляет обобщение, в некотором смысле, известной формулы Тейлора. С помощью полученного разложения и результатов работы [3] строятся структуры решения краевых задач [4], имеющие разностный характер, в которые не входят операторы дифференцирования, что существенно влияет на качество структуры.

1. Пусть одним и тем же граничным условиям краевой задачи отвечают две структуры решения

$$u = B(\varphi), \tag{2}$$

$$v = Q(\psi), \tag{3}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in (\Phi_1, \dots, \Phi_n) = \Phi$; $(\psi_1, \dots, \psi_m) \in (\Psi_1, \dots, \Psi_m) = \Psi$; $u, v \in P$; P, Φ, Ψ — некоторые метрические пространства функций, φ_i, ψ_j: $R^t \to R^q$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Будем говорить, что структура Q подчинена (подчинена в смысле метрики ρ_P*) структуре B, если

$$\forall \psi \in \Psi\ \exists \varphi \in \Phi\ B(\varphi) \equiv Q(\psi)\ (\forall \varepsilon > 0\ \forall \psi \in \Psi\ \exists \varphi \in \Phi\ \rho_P[B(\varphi), Q(\psi)] < \varepsilon).$$

Если структура B подчинена (подчинена в смысле метрики ρ_P) структуре Q, а структура Q — структуре B, то структуры B и Q назовем эквивалентными (эквивалентными в смысле метрики ρ_P).

Примеры эквивалентных структур можно найти в [5].

Структуру (1) назовем k-корректной, $k < n$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall \varphi \in \Phi\ \forall \tilde{\varphi}_{i_1} \in \Phi_{i_1} \dots \forall \tilde{\varphi}_{i_k} \in \Phi_{i_k} [\rho_{i_1}(\tilde{\varphi}_{i_1}, \varphi_{i_1}) < \varepsilon \wedge \dots$$

$$\dots \wedge \rho_{i_k}(\tilde{\varphi}_{i_k}, \varphi_{i_k}) < \varepsilon] \to \exists \tilde{\varphi}_{i_{k+1}} \in \Phi_{i_{k+1}} \dots \tilde{\varphi}_{i_n} \in \Phi_{i_n} \rho[B(\tilde{\varphi}), B(\varphi)] < A\varepsilon,$$

где $\tilde{\varphi} = (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_n)$, коэффициент A зависит только от вида структуры,

* ρ_P — метрика в пространстве P.

ρ_i — метрика в пространстве Φ_i. n-Корректные структуры назовем корректными.

Если в построении структуры участвуют операторы дифференцирования, то такие структуры k-корректные, структуры (п. 9), рассматриваемые в данной работе,— корректные.

В данной работе понадобятся следующие обозначения: $U(\Gamma; \varepsilon) = \{x \in R^t : \rho(x, \Gamma) < \varepsilon\}$, т. е. ε-окрестность множества Γ заданного метрического пространства; $O(\omega^\alpha)$ — скалярная бесконечно малая величина порядка α при $\omega \to 0$; $\bar{O}(\omega^\alpha) = (O_1(\omega^\alpha), \ldots, O_t(\omega^\alpha))$ — t-мерная векторная бесконечно малая величина порядка α относительно $\omega \to 0$; A, C — скалярные постоянные; $\bar{A}$, $\bar{C}$ — t-мерные векторные постоянные.

2. Рассмотрим гладкое H-реализуемое $(t-1)$-мерное многообразие $\Gamma \subset R^t$, где H — алгоритмически полная система (1). Через $N(x) = (N_1(x), \ldots, N_t(x))$ обозначим нормаль в точке $x \in \Gamma$. Пусть $\omega(x) \in \mathfrak{M}(H)$

$$\omega(x)|_\Gamma = 0, \qquad (4) \qquad\qquad \left.\frac{\partial \omega(x)}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 1, \qquad (4')$$

последнее условие — условие нормализованности функции $\omega(x)$ до 1-го порядка.

В дальнейшем потребуются операторы D_k и T_k, введенные в [2], которые определены в некоторой окрестности Γ, а на Γ совпадают с производными соответственно по нормали и касательной. В силу условий (4) и (4′) вектор $\nabla\omega(x)$ является на Γ единичным вектором нормали и естественным образом продолжается в $U(\Gamma; \varepsilon)$, следовательно

$$D_k = (\nabla\omega(x), \nabla)^k \qquad (5)$$

определен в окрестности Γ и

$$D_k f(x)|_\Gamma = (\nabla\omega(x), \nabla)^k f(x)|_\Gamma = \left.\frac{\partial^k f(x)}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma.$$

Выражение $(\nabla\omega(x), \nabla)^k$ понимается как формальное произведение k раз дифференциальных операторов $(\nabla\omega(x), \nabla)$.

Пусть вектор $\tau_0(x)$ определен на Γ и $|\tau_0(x)|\,|_\Gamma = 1$. Продолжим этот вектор (обозначим получаемый вектор через $\tau(x)$) в $U(\Gamma; \varepsilon)$ каким-нибудь способом, не обязательно с сохранением свойства $|\tau(x)| = 1$ (см. [1, 4]). Определим оператор T_k в $U(\Gamma; \varepsilon)$ следующим образом:

$$T_k = (\tau(x), \nabla)^k, \qquad (5')$$

причем $T_k f(x)|_\Gamma = (\tau(x), \nabla)^k f(x)|_\Gamma = \left.\frac{\partial^k f(x)}{\partial \tau^k}\right|_\Gamma$.

З а м е ч а н и е 1. Известно, что на поверхностях, диффеоморфных сфере, кроме сфер размерности 0, 1, 3, 7, не существуют непрерывные касательные векторные поля. В этих случаях постановки краевых задач также содержат вырожденные точки, что, естественно, вынуждает предусматривать именно в них вырождение операторов T_k. Простейший пример такого рода — задача об обтекании тела, диффеоморфного сфере, жидкостью. В такой постановке на поверхности есть неизбежно точки с неопределенным направлением скорости (для сферы это точки на концах диаметра, параллельного потоку жидкости). В дальнейшем вся теория переносится на кусочно-гладкие многообразия, для которых касательные векторные поля не существуют на многообразиях меньших размерностей. В этих случаях единичный вектор касательной продолжается внутрь области с помощью «склейки» (см. [1, 6]). Тогда операторы T_k существуют всюду в области, а на поверхности терпят разрыв на множестве меры нуль в тех точках, где не существует векторное поле касательных.

В [1] описаны многие свойства операторов D_k и T_k, из которых в дальнейшем понадобятся следующие:

$$(\nabla\omega(x),\ D_k\nabla\omega(x)) = D_{k+1}\omega(x), \tag{6}$$

$$\nabla D_1\omega(x) = 2D_1\nabla\omega(x), \tag{7}$$

$$D_1x = \nabla\omega(x), \tag{8}$$

а также формулы для оператора D_k над сложной функцией $F(g(x)) = F(g_1(x), \dots, g_t(x))$

$$D_1F(g) = \left[\sum_{i=1}^{t}(D_1g_i)\frac{\partial}{\partial g_i}\right]F(g), \tag{9}$$

$$D_2F(g) = \left[\sum_{i=1}^{t}(D_1g_i)\frac{\partial}{\partial g_i}\right]^2 F(g) + \left[\sum_{i=1}^{t}(D_2g_i)\frac{\partial}{\partial g_i}\right]F(g), \tag{10}$$

$$D_3F(g) = \left[\sum_{i=1}^{t}(D_1g_i)\frac{\partial}{\partial g_i}\right]^3 F(g) +$$

$$+ 3\left[\left(\sum_{i=1}^{t}(D_2g_i)\frac{\partial}{\partial g_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{t}(D_1g_j)\frac{\partial}{\partial g_j}\right)\right]F(g) + \left[\sum_{i=1}^{t}(D_3g_i)\frac{\partial}{\partial g_i}\right]F(g) \tag{11}$$

и т. д.

Полагаем, следуя [2],

$$x^i_{\pm} = \left(x_1, \dots, x_{i-1},\ x_i \pm \frac{1}{2}\omega(x), x_{i+1}, \dots, x_t\right),$$

$$h_i(x) = \omega(x^i_-) - \omega(x^i_+), \qquad h(x) = (h_1(x), \dots, h_t(x)). \tag{12}$$

В дальнейшем потребуются некоторые формулы из [3]

$$(Q_h - 1)^k f(x) = (-1)^k \omega^k(x) D_k f(x) + O(\omega^{k+1}(x)), \tag{13}$$

$$(Q_\tau - 1)^k f(x) = (-1)^k \omega^k(x) T_k f(x) + O(\omega^{k+1}(x)), \tag{14}$$

где $Q^t_l f(x) = f(x + il)$, $\tau(x) = \tau_0(x)\omega(x)$, $\tau_0(x)$ — единичный вектор касательной в точке $x \in \Gamma$, который с помощью функции $\omega(x)$ продолжен на $U(\Gamma; \varepsilon)$. В случае $t = 2$ $\tau(x) = (-h_2(x), h_1(x))$.

Введем в рассмотрение функцию

$$u(x) = x + h(x) \tag{15}$$

и определим с помощью рекуррентных соотношений

$$v_1(x) = u(x), \quad v_2(x) = v_1(u(x)), \dots, v_m = v_{m-1}(u(x)), \dots \tag{16}$$

Нормализантой m-го уровня, $m = 1, 2, \dots$, функции $f(x)$ по функции $\omega(x)$ назовем функцию $f^{(*m)}(x)$, определяемую соотношением

$$f^{(*m)}(x) = f(v_m(x)). \tag{17}$$

Если $f(x)$ и $\omega(x) \in \mathfrak{M}(H)$, где базисная система H определена формулой (1), то $f^{(*m)}(x) \in \mathfrak{M}(H)$.

3. Вычислим $D_1 h_i(x)$, $i=1,\dots,t$ (см. п. 2), используя (9) и свойство (8)

$$D_1 h_i(x) = D_1\omega(x^i_-) - D_1\omega(x)^i_+) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t}\left[\frac{\partial\omega(x^i_-)}{\partial x_j} - \frac{\partial\omega(x^i_+)}{\partial x_j}\right] D_1 x_j + \frac{\partial\omega(x^i_-)}{\partial x_i} D_1\left[x_i - \frac{1}{2}\omega(x)\right] -$$

$$- \frac{\partial\omega(x^i_+)}{\partial x_i} D_1\left[x_i + \frac{1}{2}\omega(x)\right] = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t}\left[\frac{\partial\omega(x^i_-)}{\partial x_j} - \frac{\partial\omega(x^i_+)}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j} +$$

$$+ \frac{\partial\omega(x^i_-)}{\partial x_i}\left[\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} - \frac{1}{2} D_1\omega(x)\right] - \frac{\partial\omega(x^i_+)}{\partial x_i}\left[\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} D_1\omega(x)\right] =$$

$$= \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t}\left[\frac{\partial\omega(x^i_-)}{\partial x_j} - \frac{\partial\omega(x^i_+)}{\partial x_j}\right]\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j} + \left[\frac{\partial\omega(x^i_-)}{\partial x_i} - \frac{\partial\omega(x^i_+)}{\partial x_i}\right]\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} -$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{\partial\omega(x^i_-)}{\partial x_i} + \frac{\partial\omega(x^i_+)}{\partial x_i}\right] D_1\omega(x). \tag{18}$$

Путем аналогичных вычислений, используя (10) и свойство $D_2 x_j = 0$, $j=1,\dots,t$, получаем

$$D_2 h_i(x) = \left[\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t}\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 + 2\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{t}\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j}\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_i} +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{1}{4}(D_1\omega(x))^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right](\omega(x^i_-) - \omega(x^i_+)) -$$

$$- (D_1\omega(x))\left[\sum_{j=1}^{t}\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\right](\omega(x^i_-) + \omega(x^i_+)) -$$

$$- \frac{1}{2}(D_2\omega(x))^2\frac{\partial}{\partial x_i}[\omega(x^i_-) + \omega(x^i_+)]. \tag{19}$$

В равенствах (18) и (19) под производными $\dfrac{\partial\omega(x^i_\pm)}{\partial x_j}$, $j=1,\dots,t$, подразумеваются соответствующие частные производные от $\omega(x)$ в точках $x^i_\pm$.

4. Лемма 1. *Пусть* $\omega(x)\in C^2(U(\Gamma;\varepsilon))$ *удовлетворяет условиям* (4) *и* (4′), *тогда*

a) $D_1 h(x)|_\Gamma = -\nabla\omega(x)|_\Gamma$; (20)

b) *если* $\mathrm{N}(x) = D_2 h(x)|_\Gamma$, *то скалярное произведение* $(\mathrm{N}(x), \tau_0(x)) = 0$ (*см.* (14)).

Доказательство. а) Переходя в (18) к пределу при $\omega(x)\to 0$, учитывая (4′) и непрерывность производных от $\omega(x)$, получаем

$$D_1 h_i(x)|_\Gamma = \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i}\Big|_\Gamma, \qquad i=1,\dots,t, \qquad \text{или} \qquad D_1 h(x)|_\Gamma = -\nabla\omega(x)|_\Gamma.$$

b) Переходя в (19) к пределу при $\omega(x) \to 0$, учитывая (4′) и непрерывность производных функции $\omega(x)$, получаем

$$D_2 h_i(x)|_\Gamma = -2\left(\sum_{j=1}^{t} \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} D_2\omega(x)|_\Gamma =$$

$$= -2D_1\left(\frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial\omega(x)}{\partial x_i} D_2\omega(x)|_\Gamma, \qquad i = 1, \ldots, t,$$

или

$$D_2 h(x)|_\Gamma = -2D_1\nabla\omega(x) - D_2\omega(x)\nabla\omega(x)|_\Gamma = -\nabla D_1\omega(x) - D_2\omega(x)\nabla\omega(x), \tag{21}$$

последнее равенство записано на основе свойства (7). Рассмотрим

$$(\mathrm{N}(x), \tau^0(x)) = (D_2 h(x), \tau^0(x))|_\Gamma = -(\tau^0(x), \nabla D_1\omega(x)) -$$

$$- D_2\omega(x)(\tau^0(x), \nabla\omega(x))|_\Gamma = -[(\tau^0(x), \nabla) D_1\omega(x) +$$

$$+ D_2\omega(x)(\tau^0(x), \nabla)\omega(x)|_\Gamma = -[T_1(D_1\omega(x)) + D_2\omega(x) T_1\omega(x)|_\Gamma,$$

последнее равенство получено на основе (5′). Многообразие Γ для функций $D_1\omega(x)$ и $\omega(x)$ является линией уровня (на основании (4) и (4′)), поэтому $(\mathrm{N}(x), \tau^0(x)) = -\frac{\partial}{\partial\tau}(D_1\omega(x)) + D_2\omega(x)\left.\frac{\partial\omega(x)}{\partial\tau}\right|_\Gamma = 0$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть $x^0 \in \Gamma$ и $\omega(x)$ удовлетворяет условиям леммы* 1. *Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и для точек $x \in \mathrm{N}(x^0) \cap U(\Gamma; \varepsilon)$ имеют место эквивалентные представления*

$$u(x) = x + h(x) = x^0 + \frac{\rho^2}{2} D_2 h(x^0) + \overline{O}(\rho^3), \tag{22}$$

$$u(x) = v_1(x) = x^0 + \frac{1}{2}\omega^2(x) D_2 h(x^0) + \overline{O}(\omega^3(x)), \tag{22′}$$

в первом равенстве ρ — расстояние между точками x и x^0.

Действительно, разложим функцию $u(x)$ в ряд Тейлора на $\mathrm{N}(x^0)$ в окрестности точки x^0

$$u(x) = u(x^0) \pm \rho D_1 u(x^0) + \frac{1}{2!}\rho^2 D_2 u(x^0) + \overline{O}(\rho^3).$$

В силу того, что $x^0 \in \Gamma$, равенств (12) и (15) получаем $u(x^0) = x^0$. На основании (8) и части а) леммы 1 $D_1 u(x^0) = (D_1 x + D_1 h(x))|_{x=x^0\in\Gamma} = 0$. Так как $D_2 x = 0$, то $D_2 u(x)|_{x=x^0\in\Gamma} = D_2 h(x^0)$. На основании этих вычислений получаем разложение (22). Так как $\omega(x)$ удовлетворяет условию (4) и (4′), то $\rho = \omega(x) + O(\omega^2(x))$, $x \in U(\Gamma; \varepsilon)$ (см. [1]), следовательно, равенство (22) можно записать в виде (22′), что и требовалось доказать.

5. Лемма 2. *Пусть $\omega(x) \in C^n(U(\Gamma; \varepsilon))$ и удовлетворяет условиям* (4) *и* (4′), *а вектор-функция $v_k(x)$ определяется соотношениями* (16), *тогда*

$$D_j v_k(x)|_\Gamma = 0 \qquad (j = 1, \ldots, 2^{k-1}), \tag{23}$$

где $n = 2^k - 1$.

Доказательство. Рассмотрим разложение (22′) и вспомогательную функцию $\hat{u}(x) = x^0 + \omega^2(x) D_2 h(x^0)$, $x \in \mathrm{N}(x^0) \cap U(\Gamma; \varepsilon)$ (см. п. 4). В силу утверждения b) леммы 1 $\hat{u}(x) \in \mathrm{N}(x^0)$. Исходя из того, что $\omega(x) \to 0$, когда $x \to x^0$, соотношений (4) и (4′), можно найти такое $\varepsilon_1 < \varepsilon$, при котором для всех $x \in \mathrm{N}(x^0) \cap U(\Gamma; \varepsilon_1)$ $\hat{u}(x) \in \mathrm{N}(x^0) \cap U(\Gamma; \varepsilon)$. Кроме того, из (22′) следует, что

$$u(x) = \hat{u}(x) + \overline{O}(\omega^3(x)). \tag{24}$$

Покажем, что $\omega(\hat{u}(x)) = O(\omega^2(x))$. Для этого применим формулу Тейлора к функции $\omega(x)$ в окрестности точки x^0

$$\omega(\hat{u}(x)) = \omega\left(x^0 + \frac{1}{2}\omega^2(x) D_2 h(x^0)\right) = \omega(x^0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\omega^2(x)(\nabla\omega(x^0),\ D_2 h(x^0)) + O(\omega^4(x)) = C\omega^2(x) + O(\omega^4(x)); \tag{25}$$

здесь $\omega(x^0) = 0$, так как $x^0 \in \Gamma$, а $C = \frac{1}{2}(\nabla\omega, D_2 h(x))$.

Установим справедливость следующих равенств:

$$v_k(x) = x^0 + \overline{A}_k \omega^{2^k}(x) + \overline{O}(\omega^{2^k+1}(x)), \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{26}$$

где $x \in \mathrm{N}(x^0) \cap U(\Gamma; \varepsilon_1)$. При $k = 1$ равенство (26) имеет место на основании следствия п. 4 (равенство (22′)). Пусть (26) верно при $k = r$, докажем, что это равенство имеет место и при $k = r + 1$.

Так как $\hat{u}(x) \in \mathrm{N}(x^0) \cap U(\Gamma; \varepsilon)$ при $x \in \mathrm{N}(x^0) \cap U(\Gamma; \varepsilon_1)$, то равенство (26) при $k = r$ можно рассмотреть в точке $\hat{u}(x)$

$$v_r(\hat{u}(x)) = x^0 + \overline{A}_r \omega^{2^r}(\hat{u}(x)) + \overline{O}(\omega^{2^r+1}(x)).$$

С помощью (25) полученное выражение приводится к виду

$$v_r(\hat{u}(x)) = x^0 + \overline{A}_r C^{2^r} \omega^{2^{r+1}}(x) + \overline{O}(\omega^{2^{r+1}+2}(x)) =$$

$$= x_0 + \overline{A}_{r+1}\omega^{2^{r+1}}(x) + \overline{O}(\omega^{2^{r+1}+2}(x)). \tag{27}$$

Теперь рассмотрим $v_{r+1}(x) = v_r(u(x)) = v_r(\hat{u}(x) + \overline{O}(\omega^3(x)))$ (на основании (24)) и применим формулу Тейлора к функции $v_r(x)$ в окрестности точки $\hat{u}(x)$

$$v_{r+1}(x) = v_r(\hat{u}(x) + \overline{O}(\omega^3(x))) = v_r(\hat{u}(x)) +$$

$$+ (\overline{O}(\omega^3(x)), \nabla) v_r(\hat{u}(x)) + \overline{O}((\overline{O}(\omega^3(x)), \nabla)^2 v_r(\hat{u}(x))).$$

Рассмотрим

$$(\overline{O}(\omega^3(x)), \nabla) v_r(\hat{u}(x)) = (\overline{O}(\omega^3(x)), \nabla)[x^0 + \overline{A}_{r+1}\omega^{2^{r+1}}(x) +$$

$$+ \overline{O}(\omega^{2^{r+1}+2}(x))] = \overline{A}_{r+1}(\overline{O}(\omega^3(x)), \nabla)\omega^{2^{r+1}}(x) + \overline{O}(\omega^{2^{r+1}+4}(x)) =$$

$$= \overline{A}_{r+1} O(\omega^{2^{r+1}+2}(x)) + \overline{O}(\omega^{2^{r+1}+4}(x)) = \overline{O}(\omega^{2^{r+1}+2}(x)).$$

Аналогично $\overline{O}((\overline{O}(\omega^3(x)), \nabla)^2 v_r(\hat{u}(x))) = \overline{O}(\omega^{2^{r+1}+4}(x))$.

Таким образом, получаем $v_{r+1}(x) = v_r(\hat{u}(x)) + \overline{O}(\omega^{2^{r+1}+2}(x))$, а применив формулу (27) $v_{r+1}(x) = x^0 + \overline{A}_{r+1}\omega^{2^{r+1}}(x) + \overline{O}(\omega^{2^{r+1}+2}(x))$, получим (26) при $k = r + 1$.

Справедливость (26) доказана. Отсюда легко вытекает утверждение леммы

$$D_j v_k(x)|_\Gamma = D_j[x^0 + \overline{A}_k\omega^{2^k}(x) + \overline{O}(\omega^{2^k+1}(x))]|_\Gamma = [\overline{A}_k \cdot 2^k \cdot (2^k - 1) \cdot \ldots$$

$$\ldots \cdot (2^k - j + 1)\,\omega^{2^k - j}(x)\, D_j\omega(x) + \overline{O}(\omega^{2^k+1-j}(x))]|_\Gamma = 0 \qquad (j = 1, \ldots, 2^k - 1).$$

Лемма доказана.

6. Теорема 1. *Если* $f(x)$ *и* $\omega(x) \in C^n(U(\Gamma;\varepsilon))$ *и* $\omega(x)$ *удовлетворяет условиям* (4) *и* (4′), *то нормализанта* $f^{(*m)}(x)$ *m-го уровня функции* $f(x)$ *по функции* $\omega(x)$, *определенная формулой* (17), *удовлетворяет условиям*

$$f^{(*m)}(x)|_\Gamma = f(x)|_\Gamma, \quad \left.\frac{\partial^k f^{(*m)}(x)}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma = 0, \tag{28}$$

где $1 \leqslant k \leqslant 2^m - 1 = n$.

Доказательство. В силу определения (см. п. 2, формула (12)) $h(x)|_\Gamma = 0$, поэтому $v_k(x)|_\Gamma = x$ для любых натуральных k. Следовательно $f^{(*m)}(x)|_\Gamma = f(v_m(x))|_\Gamma = f(x)|_\Gamma$.

Применяя операторы D_k к $f^{(*m)}(x)$, используя формулы (9)—(11) и (23), получаем

$$D_k f^{(*m)}(x)|_\Gamma = \frac{\partial^k}{\partial \nu^k} f^{(*m)}(x)|_\Gamma = 0 \qquad (k = 1, \dots, 2^m - 1).$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Если равенство (28) требуется выполнить при $k = 1, \dots, p$, то уровень нормализанты $f(x)$ по функции $\omega(x)$ определяется соотношением

$$m = [\log_2 p] + 1, \tag{29}$$

где $[a]$ — целая часть числа a. Это легко вытекает из формулы (23).

7. В этом пункте указан один из способов построения функции $P_m(x)$, приближающей известную функцию $f(x)$ в окрестности некоторого $(t-1)$-мерного гладкого многообразия Γ, на котором известны значения функции $f(x)$ — $f_0(x)$ и ее нормальных производных — $f_k(x)$ до m-го порядка. Γ — H-реализованное многообразие (см. п. 2), $f_k \in \mathfrak{M}(H)$ $(k = 0, 1, \dots, m)$, причем $\mathfrak{M}(H)$ — замкнутое по отношению к операции дифференцирования множество функций.

Обозначим через $\omega_m(x)$ функцию, удовлетворяющую условиям (4), (4′) и $\left.\frac{\partial^k \omega(x)}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma = 0$ $(k = 2, \dots, m)$ (т. е. $\omega_m(x) = 0$ — уравнение Γ, нормализованное до m-го порядка [2]), а через $\varkappa$ — величину, определяемую формулой (29) при $p = m$.

Теорема 2. *Если* $\omega_1(x)$, $\omega_m(x)$ *и* $f_k(x) \in C^m(U(\Gamma;\varepsilon))$ $(k=0, 1, \dots, m)$, *то функция*

$$P_m(x) = f_0^{(*\varkappa)}(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!} f_i^{(*\varkappa)}(x)\,\omega_m^i(x) \tag{30}$$

удовлетворяет условиям

$$P_m(x)|_\Gamma = f_0(x)|_\Gamma, \quad \left.\frac{\partial^k P_m(x)}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma = f_k(x)|_\Gamma \qquad (k = 1, \dots, m). \tag{31}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 и того, что $\omega(x)|_\Gamma = 0$, получаем $P_m(x)|_\Gamma = f_0(x)|_\Gamma$. Рассмотрим

$$\left.\frac{\partial^k P_m(x)}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma = D_k P_m(x)|_\Gamma = D_k f^{(*\varkappa)}(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{k} C_k^j D_{k-j} f_i^{(*\varkappa)}(x)\, D_j \omega_m^i(x)|_\Gamma.$$

В силу нормализованности $\omega_m(x)$ до m-го порядка

$$D_j \omega_m^i(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq i,\ j \leqslant m, \\ i! \text{ при } j = i. \end{cases}$$

В силу теоремы 1

$$D_{k-j} f_i^{(*\varkappa)}(x)|_\Gamma = \begin{cases} f_i(x)|_\Gamma & \text{при } k=j, \\ 0 & \text{при } k \neq j,\ m \geqslant k > j. \end{cases}$$

Следовательно, отличным от нуля получится член при $i=j=k$, т. е. $D_k P_m(x)|_\Gamma = \frac{1}{k!} f_k(x)\, k!|_\Gamma = f_k(x)|_\Gamma$. Теорема доказана.

Замечание 3. Если рассматривать $\omega_i = 0$ как уравнения Γ, нормализованные до i-го порядка, а через $\varkappa_i$ обозначать число, равное $[\log_2(m-i)]+1$ $(i=0,1,\dots,m-1)$, то формулу (28) можно записать в виде

$$P_m(x) = f_0^{(*\varkappa_0)}(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i!} f_i^{(*\varkappa_i)}(x)\, \omega_{m-i+1}^i(x) + \frac{1}{m!} f_m(x)\, \omega_1^m(x). \tag{32}$$

Теорема 3. *Пусть* $f(x) \in C^{m+1}$ *и такова, что* $f(x)|_\Gamma = f_0(x)|_\Gamma$, $\left.\frac{\partial^k f(x)}{\partial \nu^k}\right|_\Gamma = f_k(x)|_\Gamma$ $(k=1,\dots,m)$, *тогда при выполнении условий теоремы* 2 *имеет место равенство* $f(x) = P_m(x) + O(\omega^{m+1}(x))$.

Доказательство. Пусть $x^0 \in \Gamma$, рассмотрим поведение $f(x)$ на нормали $\mathrm{N}(x^0)$ (см. п. 2). В силу условия (4′) любую точку $x \in \mathrm{N}(x^0) \cap U(\Gamma; \varepsilon)$ можно представить в виде $x = x^0 \pm \rho\nabla\omega_1(x)$, где ρ — расстояние между x и x^0 и $\rho < \varepsilon$. Разложим функцию $f(x) = f(x^0 + \rho\nabla\omega_1(x^0))$ по степеням ρ в окрестности x^0

$$f(x^0 + \rho\nabla\omega_1(x^0)) = f(x^0) + \rho(\nabla\omega_1(x^0), \nabla) f(x^0) +$$

$$+ \frac{1}{2!}(\nabla\omega_1(x^0), \nabla)^2 f(x^0)\rho^2 + \dots + \frac{1}{m!}\rho^m (\nabla\omega_1(x^0), \nabla)^m f(x^0) +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!}(\nabla\omega_1(x^0), \nabla)^{m+1} f(x^0 + \Theta\rho\nabla\omega_1(x_0))\rho^{m+1} =$$

$$= f(x^0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f(x^0)}{\partial \nu^k}\rho^k + \frac{\rho^{m+1}}{(m+1)!} \frac{\partial^{m+1} f(x^0 + \Theta\rho\nabla\omega_1(x^0))}{\partial \nu^{m+1}}. \tag{33}$$

В силу (28), (29) и условия теоремы имеем

$$\frac{\partial^k f(x^0)}{\partial \nu^k} = f_k(x^0) = f_k^{(*\varkappa)}(x) + O(\rho^{m+1}) \qquad (k=0,1,\dots,m). \tag{34}$$

а в силу нормализованности функций $\omega_1(x)$ и $\omega_m(x)$ (см. (4′) и п. 7) получаем соотношения $\rho = \omega_1(x) + O(\omega_1^{\cdot}(x))$, $\rho = \omega_m(x) + O(\omega_1^{m+1}(x))$, поэтому (34) преобразуем в равенство

$$\frac{\partial^k f(x^0)}{\partial \nu^k} = f_k(x^0) = f_k^{(*\varkappa)}(x) + O(\omega_1^{m+1}(x)) \qquad (k=0,1,\dots,m).$$

Вследствие полученных соотношений разложение (33) принимает вид

$$f(x^0 + \rho\nabla\omega_1(x^0)) = f_0^{(*\varkappa)}(x) + O(\omega_1^{m+1}(x)) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}(f_k^{(*\varkappa)}(x) + O(\omega_1^{m+1}(x)))(\omega_m^k(x) + O(\omega_1^{m+k}(x))) +$$

$$+\frac{1}{(m+1)!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial\nu^{m+1}}f(x^0+\Theta\rho\nabla\omega_1(x^0))(\omega_m^{m+1}(x)+O(\omega_m^{2m+1}(x)))=$$

$$=P_m(x)+O(\omega_1^{m+1}(x)),$$

что и требовалось доказать.

Замечание 4. Проводя аналогичные рассуждения, можно показать, что такая же оценка остаточного члена получается для разложения (32).

8. В этом пункте будет указан способ построения нормализованной до 2-го порядка функции $\omega(x)$ (п. 2) без применения оператора D_2 (см. [1]).

Лемма 3. *Пусть функция $\omega_1(x)$ удовлетворяет условиям* (4) *и* (4′), *т. е. $\omega_1(x)$ нормализована до 1-го порядка, тогда функция*

$$\omega_2(x)=\omega_1(x)+\frac{1}{3}\omega_1(x+h(x)) \tag{35}$$

удовлетворяет условиям (4), (4′), *а также условию* $\left.\frac{\partial^2\omega(x)}{\partial\nu^2}\right|_\Gamma=0$, *т. е. $\omega_2(x)$ нормализована на Γ до 2-го порядка.*

Доказательство. $h(x)|_\Gamma=0$, поэтому $\omega_2(x)|_\Gamma=0$.

Рассмотрим $D_1\omega_2(x)|_\Gamma$, используя формулы (9), (23) при $j=k=1$:

$$D_1\omega_2(x)|_\Gamma=D_1\omega_1(x)+\frac{1}{3}D_1\omega_1(x+h(x))|_\Gamma=$$

$$=D_1\omega_1(x)+\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{t}\frac{\partial\omega_1(x+h(x))}{\partial x_i}D_1(x_i+h_i(x))|_\Gamma=1.$$

Докажем, что $D_2\omega_2(x)|_\Gamma=0$. Для этого воспользуемся формулами (10), (23) при $j=k=1$, (6), (7) и (21)

$$D_2\omega_2(x)|_\Gamma=D_2\omega_1(x)+\frac{1}{3}D_2\omega_1(x+h(x))|_\Gamma=$$

$$=D_2\omega_1(x)+\frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{t}D_1(x_i+h_i(x))\frac{\partial}{\partial x_i}\right]^2\omega_1(x+h(x))+$$

$$+\frac{1}{3}\left[\sum_{i=1}^{t}D_2(x_i+h_i(x))\frac{\partial}{\partial x_i}\right]\omega_1(x+h(x))|_\Gamma=D_2\omega_1(x)-$$

$$-\frac{1}{3}(\nabla\omega_1(x),\nabla D_1\omega_1(x))-\frac{1}{3}D_2\omega_1(x)(\nabla\omega_1(x),\nabla\omega_1(x))|_\Gamma=D_2\omega_1(x)-$$

$$-\frac{2}{3}(\nabla\omega_1(x),D_1\nabla\omega_1(x))-\frac{1}{3}D_2\omega_1(x)|_\Gamma=D_2\omega_1(x)-$$

$$-\frac{2}{3}D_2\omega_1(x)-\frac{1}{3}D_2\omega_1(x)|_\Gamma=0.$$

Лемма доказана.

9. Приведенные выше результаты могут быть использованы при построении координатных последовательностей для задач с различными типами краевых условий, а опираясь на результаты работы [3], можно заменить разностными формами операторы T_k и D_k, тем самым исключив из структуры решения краевой задачи производные.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть функция прогибов $W(x, y)$ на границе $\partial\Omega$ области Ω удовлетворяет условиям упругого закрепления

$$W(x,y)|_{\partial\Omega}=0, \tag{36}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}+\left(\frac{1-\nu}{\rho}+k\right)\frac{\partial W}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0, \tag{37}$$

где ν — коэффициент Пуассона; k — величина, характеризующая жесткость заделки; ρ — радиус границы $\partial\Omega$ [5]. При составлении структуры решения используем формулу (32) при $m=2$:

$$W(x, y)=f_0^{(*2)}+f_1^{(*1)}\omega_2+\frac{1}{2!}f_2\omega_1^2+\psi_0\omega_1^3. \tag{38}$$

На основании (36) получаем $W(x, y)|_{\partial\Omega}=f_0^{(*2)}|_{\partial\Omega}=f_0|_{\partial\Omega}=0$. Теперь используем граничное условие (37), для чего вычислим

$$D_1 W(x, y)|_{\partial\Omega}=D_1(f_1^{(*1)}\omega_2)+\frac{1}{2!}D_1(f_2\omega_1^2)+D_1(\psi_0\omega_1^3)|_{\partial\Omega}=$$

$$=f_1^{(*1)}D_1\omega_2+O(\omega_1)|_{\partial\Omega}=f_1^{(*1)}+\psi_1\omega_1|_{\partial\Omega},$$

$$D_2 W(x, y)|_{\partial\Omega}=D_2(f_1^{(*1)}\omega_2)+\frac{1}{2!}D_2(f_2\omega_1^2)+D_2(\psi_0\omega_1^3)|_{\partial\Omega}=$$

$$=O(\omega_1)+\frac{1}{2!}f_2D_2\omega_1^2+O(\omega_1)|_{\partial\Omega}=\frac{1}{2!}f_2\cdot 2!+\psi_2\omega_1|_{\partial\Omega}=f_2+\psi_2\omega_1|_{\partial\Omega},$$

$$T_2 W(x, y)|_{\partial\Omega}=T_2(f_1^{(*1)}\omega_2)+\frac{1}{2!}T_2(f_2\omega_1^2)+T_2(\psi_0\omega_1^3)|_{\partial\Omega}=$$

$$=f_1^{(*1)}T_2\omega_2+O(\omega_1)+O(\omega_1)|_{\partial\Omega}=f_1^{(*1)}T_2\omega_2+\psi_3\omega_1|_{\partial\Omega}.$$

Полученные величины подставим в (37)

$$f_2+\psi_2\omega_1+f_1^{(*1)}T_2\omega_2+\psi_3\omega_1+\left(\frac{1-\nu}{\rho}+k\right)(f_1^{(*1)}+\psi_1\omega_1)=\psi_4\omega_1$$

и определим f_2

$$f_2=\omega_1\left[\psi_4-\psi_2-\psi_3-\left(\frac{1-\nu}{\rho}+k\right)\psi_1\right]-$$

$$-f_1^{(*1)}\left(T_2\omega_2+\frac{1-\nu}{\rho}+k\right)=\omega_1\psi_5-f_1^{(*1)}\left(T_2\omega_2+\frac{1-\nu}{\rho}+k\right),$$

где $\psi_5=-\left(\frac{1-\nu}{\rho}+k\right)\psi_1-\psi_2-\psi_3+\psi_4$ — произвольная функция. Подставим найденные $f_0^{(*2)}$ и f_2 в (38)

$$W(x, y)=f_1^{(*1)}\omega_2+\frac{1}{2!}\omega_1^2\left[\omega_1\psi_5-f_1^{(*1)}\left(T_2\omega_2+\frac{1-\nu}{\rho}+k\right)+\psi_0\omega_1^3=\right.$$

$$=f_1^{(*1)}\left[\omega_2-\frac{1}{2!}\omega_1^2\left(T_2\omega_2+\frac{1-\nu}{\rho}+k\right)\right]+\psi\omega_1^3, \tag{39}$$

где $\psi=\psi_0+\frac{1}{2!}\psi_5$ — произвольная функция.

С помощью формулы (35) можно определить ω_2, а затем $T_2\omega_2(x, y)$ заменить выражением $(Q_\tau-1)^2\omega_2(x, y)$, как в (14), тогда в (39) будут отсутствовать операторы дифференцирования. Структура (39) может быть использована для решения задач об изгибе и колебаниях упруго закрепленных пластин.

Структуры решения для данной задачи, построенные в [5], эквивалентны приведенной выше. Структура (39) корректна, что существенно при получении дифференциальных характеристик решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р в а ч е в В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. К., «Наук. думка», 1974. 260 с.
2. Р в а ч е в В. Л. К вопросу о построении координатных последовательностей.— Дифференц. уравнения, 1970, **6**, № 6, с. 1034—1047.
3. Р в а ч е в В. Л. Метод R-функций в краевых задачах.— Прикладная механика, 1975, **11**, вып. 4, с. 3—14.
4. Р в а ч е в В. Л. О понятии структуры решения краевой задачи.— Вестник Харьк. политехн. ин-та, Краевые задачи мат. физики, 1973, **72**, вып. 1, с. 3—9.
5. Р в а ч е в В. Л., К у р п а Л. В., С к л е п у с Н. Г., У ч и ш в и л и Л. А. Метод R-функций в задачах об изгибе и колебаниях пластин сложной формы. К., «Наук. думка», 1973. 124 с.
6. Р в а ч е в В. Л., С л е с а р е н к о А. П. Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. К., «Наук. думка», 1976. 288 с.
7. Л и т в и н О. М., Р в а ч о в В. Л. Класична формула Тейлора, її узагальнення та застосування. К., «Наук. думка», 1973. 124 с.

Институт проблем машиностроения
АН УССР

Поступила в редакцию 29.VII. 1977 г.,
после переработки — 10.IV. 1978 г.