УДК 517.951:518.33

В. Л. Рвачев, В. Ф. Сенчуков

Связь между дифференциальными операторами метода R-функций

Метод R-функций [1] решения краевых задач с частными производными позволяет строить последовательности приближающих функций, заведомо точно удовлетворяющие граничным условиям, что достигается учетом на аналитическом уровне не только краевых условий задачи, но и геометрии области.

Фундаментальным понятием этого метода является понятие структуры решения краевой задачи [2] как пучка функций, обладающих в точках некоторого геометрического объекта заданными свойствами. Построение таких пучков для областей сложной формы со сложным характером краевых условий основывается на применении аппарата R-функций [1]. Прежде всего, решена задача построения такой функции $\omega = \omega(x)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, которая внутри данной области Ω_i положительна, равна нулю на ее границе $\partial\Omega$ и отрицательна вне Ω. При этом $\omega(x)$ представляется в виде единого аналитического выражения и, если каждый из участков $\partial\Omega_i$ границы $\partial\Omega$ описывается элементарной функцией, то и функция $\omega(x)$ также принадлежит множеству элементарных функций.

Построение структуры решения краевой задачи должно предусматривать ее существование во всех точках рассматриваемой области ($\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$), что вызывает необходимость продолжения внутрь области (с сохранением дифференциальных свойств) заданных краевых условий, которые, вообще говоря, определены лишь на границе $\partial\Omega$ области Ω или на ее участках $\partial\Omega_i$. Оригинальный подход к решению поставленного вопроса осуществлен с помощью дифференциальных операторов D_n, T_n, D_n^l метода R-функций (с переменными коэффициентами, зависящими от формы области), являющихся продолжением «граничных» операторов дифференцирования соответственно по нормали, касательной и направлению l [1, 2]. Конструирование подобных операторов, которые на границе области превращаются в смешанные производные определенного порядка по двум произвольным, но по фиксированным направлениям, рассматривается в работе [3].

Поскольку в краевые условия могут входить производные по дуге граничной кривой (например, в задачах теории пластин и оболочек), то возникает необходимость найти соответствующий оператор продолжения. Построение указанных операторов частично рассматривается в работе [4]. Один из подходов к решению задачи об удобном конструктивном представлении продолжения внутрь области оператора дифференцирования по дуге граничной кривой излагается ниже.

Установим сначала некоторые вспомогательные соотношения.

1. Пусть $x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, $x_3 = x_3(s)$ — естественная параметризация регулярной кривой L, $u = u(x)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ — заданная на L функция. Все рассматриваемые функции будем предполагать непрерывными и непрерывно дифференцируемыми достаточное число раз по своим аргументам.

Лемма 1. *Для любой точки кривой L*

$$\frac{\partial^p}{\partial s^p}\frac{\partial^q u}{\partial x^q}=\frac{\partial^q}{\partial x^q}\frac{\partial^p u}{\partial s^p}, \tag{1}$$

где обозначено: $\dfrac{\partial^q u}{\partial x^q}=\dfrac{\partial^q u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\partial x_3^{\alpha_3}}$; $\sum\limits_{i=1}^{3}\alpha_i=q,\ p,\ q,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\geqslant 0$ — *целые числа.*

Доказательство. Выражение для $\dfrac{\partial^p u}{\partial s^p}$ будет содержать всевозможные частные производные от u по x_i $(i=1,2,3)$ и от x_i по дуге s до p-го порядка включительно, т. е.

$$\frac{\partial^p u}{\partial s^p}=f\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\partial x_3^{\beta_3}},\ x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ x_3^{(k)}\right), \tag{2}$$

где $k=1,\ldots,p$; β_1,β_2,β_3 принимают все неотрицательные целые значения, для которых $\beta_1+\beta_2+\beta_3=k$. (Здесь и далее штрихами и символом $t^{(k)}$, $t=x_1,x_2,x_3$, обозначаются производные по дуге s; индекс i (где это не оговорено) принимает значения $1,2,3$.) Заменим в (2) функцию $u(x)$ на $\dfrac{\partial^q u}{\partial x^q}$, которая, вообще говоря, также является функцией от x. Это вызовет увеличение порядка производных от u по каждому x_i на α_i, оставляя без изменения компоненты $x_i^{(k)}$, т. е.

$$\frac{\partial^p}{\partial s^p}\frac{\partial^q u}{\partial x^q}=f\left(\frac{\partial^{k+q} u}{\partial x_1^{\beta_1+\alpha_1}\partial x_2^{\beta_2+\alpha_2}\partial x_3^{\beta_3+\alpha_3}},\ x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ x_3^{(k)}\right).$$

Дифференцирование выражения для $\dfrac{\partial^p u}{\partial s^p}$ q раз по x_i-м (каждому x_i соответствует порядок α_i), как и рассмотренное выше, внесет лишь изменение порядка частных производных u по x_i, что и приводит к равенству (1). Равенства типа (1) можно читать и справа налево.

Лемма 2. *Если* $x_1=x_1(s)$, $x_2=x_2(s)$, $x_3=x_3(s)$ — *уравнения кривой* L, *то*

$$x_i^{(n)}=N_n\nu_i+K_n\tau_i+B_n\beta_i, \tag{3}$$

где

$$N_n=N'_{n-1}+k_1K_{n-1}-k_2B_{n-1},\quad K_n=K'_{n-1}-k_1N_{n-1}, \tag{4}$$

$$B_n=B'_{n-1}+k_2N_{n-1}\ (N_1=0,\quad K_1=1,\quad B_1=0,\quad n\geqslant 2),$$

k_1 — *кривизна;* k_2 — *кручение;* $\bar\nu=(\nu_1,\ \nu_2,\ \nu_3)$, $\bar\tau=(\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3)$, $\bar\beta=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)$ — *единичные векторы главной нормали, положительной касательной, бинормали соответственно, образующие правую систему декартовых прямоугольных осей.*

Доказательство. Описывая кривую векторной функцией $\bar r=\bar r(s)=(x_1(s),\ x_2(s),\ x_3(s))$, имеем

$$\bar r^{(n)}=(x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ x_3^{(n)}). \tag{5}$$

С другой стороны, используя формулы Френе — Серре $(\bar\tau'=k_1\bar\nu,\ \bar\nu'=$

$= -k_1\bar\tau + k_2\bar\beta$, $\bar\beta' = -k_2\bar\nu$), выразим $\bar r^{(n)}$ через $\bar\nu, \bar\tau, \bar\beta$: $\bar r' = \bar\tau$, $\bar r'' = k_1\bar\nu$, $\bar r''' = k_1'\bar\nu + k_1(-k_1\bar\tau + k_2\bar\beta)$ и т. д., т. е.

$$\bar r^{(n)} = N_n\bar\nu + K_n\bar\tau + B_n\bar\beta, \tag{6}$$

где N_n, K_n, B_n — коэффициенты, выражающиеся через $k_1 = k_1(s)$, $k_2 = k_2(s)$, и их производные.

Представим векторы $\bar\nu, \bar\tau, \bar\beta$ в координатной форме и подставим в (6):

$$\bar r^{(n)} = (N_n\nu_1 + K_n\tau_1 + B_n\beta_1,\quad N_n\nu_2 + K_n\tau_2 + B_n\beta_2,\quad N_n\nu_3 + K_n\tau_3 + B_n\beta_3). \tag{7}$$

Сопоставляя (7) и (5), приходим к (3). Далее,

$$r^{(n-1)} = N_{n-1}\bar\nu + K_{n-1}\bar\tau + B_{n-1}\bar\beta,$$

а

$$\bar r^{(n)} = \frac{\partial}{\partial s}\bar r^{(n-1)} = N'_{n-1}\bar\nu + N_{n-1}\bar\nu' + K'_{n-1}\bar\tau + K_{n-1}\bar\tau' + B'_{n-1}\bar\beta +$$
$$+ B_{n-1}\bar\beta' = (N'_{n-1} + k_1K_{n-1} - k_2B_{n-1})\,\bar\nu + (K'_{n-1} - k_1N_{n-1})\,\bar\tau +$$
$$+ (k_2N_{n-1} + B'_{n-1})\,\bar\beta. \tag{8}$$

Из (6) и (8) следует (4). Так как $\bar r' = \bar\tau$, то $N_1 = 0$, $K_1 = 1$, $B_1 = 0$.

2. Теорема. *Имеет место равенство*

$$\left.\frac{\partial^n u}{\partial s^n}\right|_L = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{j}{n-1}\left(N_{n-j}\frac{\partial}{\partial\nu} + K_{n-j}\frac{\partial}{\partial\tau} + B_{n-j}\frac{\partial}{\partial\beta}\right)\left.\frac{\partial^j u}{\partial s^j}\right|_L. \tag{9}$$

Доказательство.

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial u}{\partial x_2}x_2' + \frac{\partial u}{\partial x_3}x_3'.$$

По формуле Лейбница для n-й производной получим

$$\frac{\partial^n u}{\partial s^n} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{j}{n-1}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^j}{\partial s^j}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)x_i^{(n-j)}, \tag{10}$$

$\binom{j}{n-1}$ — биномиальные коэффициенты. Группируя члены под знаком внешней суммы относительно $N_{n-j}, K_{n-j}, B_{n-j}$, применяем в (10) лемму 1 и соотношения (3):

$$\frac{\partial^n u}{\partial s^n} = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{j}{n-1}[N_{n-j}(\nabla,\nu) + K_{n-j}(\nabla,\tau) + B_{n-j}(\nabla,\beta)]\frac{\partial^j u}{\partial s^j}, \tag{11}$$

где $(\nabla, t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}t_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}t_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}t_3\right)$, $t = \nu, \tau, \beta$. Каждый из операторов (∇,ν), (∇,τ), (∇,β) дает соответственно производную по нормали, касательной и бинормали. Теорема доказана.

В случае плоской кривой ($x_1 = x_1(s)$, $x_2 = x_2(s)$, $k_2 = 0$, $k_1 = k$) формулы (4), (9) принимают вид:

$$N_n = N'_{n-1} + kK_{n-1},\quad N_1 = 0;\quad K_n = K'_{n-1} - kN_{n-1},\quad K_1 = 1; \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial^n u}{\partial s^n}\right|_L = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{j}{n-1}\left(N_{n-j}\frac{\partial}{\partial\nu} + K_{n-j}\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\left.\frac{\partial^j u}{\partial s^j}\right|_L. \tag{13}$$

В частности, из (13) получаем:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial \tau}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \left(N_2 \frac{\partial}{\partial \nu} + K_2 \frac{\partial}{\partial \tau}\right) u + \left(N_1 \frac{\partial}{\partial \nu} + K_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial u}{\partial s} = k \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial s^3} = \left(N_3 \frac{\partial}{\partial \nu} + K_3 \frac{\partial}{\partial \tau}\right) u + 2\left(N_2 \frac{\partial}{\partial \nu} + K_2 \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial u}{\partial s} +$$

$$+ \left(N_1 \frac{\partial}{\partial \nu} + K_1 \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = k' \frac{\partial u}{\partial \nu} - k^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} + 3k \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial \tau} + \frac{\partial^3 u}{\partial \tau^3}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial s^4} = (k'' - k^2) \frac{\partial u}{\partial \nu} - 3kk' \frac{\partial u}{\partial \tau} + 4\left(k' \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial \tau} - k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right) +$$

$$+ 6k \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial \tau^2} + 3k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial \tau^4}, \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} N_n &= 0,\ k,\ k',\ k'' - k^3 \\ K_n &= 1,\ 0,\ -k^2,\ -3kk'. \end{aligned} \quad (n = 1, 2, 3, 4),$$

Коэффициенты N_n, K_n можно найти, не прибегая к соотношениям (12). Действительно, основываясь на цепочке равенств

$$\bar{r}^{(n+1)} = \sum_{i_1=0}^{n-1} \binom{i_1}{n-1} k^{(n-i_1-1)} \bar{\nu}^{(i_1)} \quad (n \geqslant 1), \qquad \bar{\nu}^{(i_1)} = -\sum_{i_2=0}^{i_1-1} \binom{i_2}{i_1-1} k^{(i_1-i_2-1)} \bar{\tau}^{(i_2)},$$

$$\bar{\tau}^{(i_2)} = \sum_{i_3=0}^{i_2-1} \binom{i_3}{i_2-1} k^{(i_2-i_3-1)} \bar{\nu}^{(i_3)} \tag{18}$$

и выделяя в каждой из сумм слагаемые, для которых соответственно $i_p = 0$, $p = 1, 2, 3$, находим:

$$\bar{r}^{(n+1)} = k^{(n-1)} \bar{\nu} - \sum_{i_1=1}^{n-1} \binom{i_1}{n-1} k^{(n-i_1-1)} \left\{ k^{(i_1-1)} \bar{\tau} + \sum_{i_2=1}^{i_1-1} \binom{i_2}{i_1-1} k^{(i_1-i_2-1)} \times \right.$$

$$\times \left\{ k^{(i_2-1)} \bar{\nu} - \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{i_{n-1}=1}^{i_{n-2}-1} \binom{i_{n-1}}{i_{n-2}-1} k^{(i_{n-2}-i_{n-1}-1)} \times \right.$$

$$\left. \times \{ k^{(i_{n-1}-1)} \bar{\nu}^{(1-m)} \bar{\tau}^{(m)} \} \ldots \right\}, \tag{19}$$

где $m = \left[\dfrac{\left[\frac{n}{2}\right]}{\frac{n}{2}} \right]$ ($[\cdot]$ — целая часть данного числа), $i_0 = n$. (Если верхний предел суммирования оказывается меньше нижнего, то сумма считается равной нулю). Тогда

$$N_{n+1} = k^{(i_{2q-2}-1)} - \sum_{i_{2q-1}=1}^{i_{2q-2}-1} \binom{i_{2q-1}}{i_{2q-2}-1} k^{(i_{2q-2}-i_{2q-1}-1)} \times$$
$$\times \sum_{i_{2q}=1}^{i_{2q-1}-1} \binom{i_{2q}}{i_{2q-1}-1} k^{(i_{2q-1}-i_{2q}-1)} \mathop{\Big\{}_{q=1}^{p}, \tag{20}$$

где $p = \left[\frac{n+1}{2}\right]$, символ $\mathop{\Big\{}_{q=1}^{p}$ указывает на последовательные вложения впереди стоящего выражения при $q = 1, \ldots, p$;

$$K_{n+1} = -\sum_{i_1=1}^{n-1} \binom{i_1}{n-1} k^{(n-i_1-1)} \Big\{ k^{(i_{2q-1}-1)} - \sum_{i_{2q}=1}^{i_{2q-1}-1} \binom{i_{2q}}{i_{2q-1}-1} \times$$
$$\times k^{(i_{2q-1}-i_{2q}-1)} \sum_{i_{2q+1}=1}^{i_{2q}-1} \binom{i_{2q+1}}{i_{2q}-1} k^{(i_{2q}-i_{2q+1}-1)} \mathop{\Big\{}_{q=1}^{p}, \quad p = \left[\frac{n}{2}\right] \tag{21}$$

(на первую (внешнюю сумму) символ $\mathop{\Big\{}_{q=1}^{p}$ не распространяется).

3. Пусть Ω — ограниченная замкнутая область плоскости x_1Ox_2, $\partial\Omega$ — ее граница, $\omega = \omega(x) \in C^n$, $x = (x_1, x_2)$, причем $\omega > 0$, $x \in \Omega$; $\omega = 0$, $\frac{\partial\omega}{\partial\nu} = 1$, $x \in \partial\Omega$, ν — внутренняя нормаль; $\omega < 0$, $x \bar{\in} \overline{\Omega}$.

Введем в рассмотрение оператор $S_n : C^n(\partial\Omega) \to C^n(\overline{\Omega})$ такой, что функция $S_n u$ определена везде в области Ω, а на границе превращается в производную n-го порядка по дуге s:

$$S_n u\,|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n u}{\partial s^n} \quad (S_0 u = u). \tag{22}$$

Располагая операторами метода R-функций [2]

$$D_n = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^n, \qquad D_n\,|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n}{\partial\nu^n},$$
$$T_n = \left(-\frac{\partial\omega}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial\omega}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^n, \qquad T_n\,|_{\partial\Omega} = \frac{\partial^n}{\partial\tau^n}, \tag{23}$$

и формулой (13), заключаем, что S_n представим в виде

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{j}{n-1} [-N_{n-j}(D_1 \times S_j) + K_{n-j}(T_1 \times S_j)]; \tag{24}$$

здесь знак «$\times$» указывает на формальное произведение соответствующих операторов. На границе $\partial\Omega$ (24) переходит в (13). По поводу «обращения» с операторами D_n, T_n отметим, что:

1) $A_i(A_j f) \neq (A_i \times A_j) f \equiv A_{i+j} f, \quad A = D, T;$

2) $D_i(T_j f) \neq (D_i \times T_j) f \equiv (T_j \times D_i) f \neq T_j(D_i f),$

в дальнейшем вместо $(D_i \times T_j) f$ будем писать $D_i T_j f$, $f = f(x) \in C^n$;

3) по установившейся традиции для D_n, T_n в качестве положительного направления нормали ν к $\partial\Omega$ принято направление внутрь области Ω, а направление касательной определяется соотношением $\bar{\nu} \times \bar{\tau} = \bar{i} \times \bar{j}$, где $\bar{i}$, $\bar{j}$ — единичные векторы, имеющие направления осей x_1, x_2. В формуле (13) и в краевых условиях (в естественных координатах) предполагается часто внешнее направление нормали и $\bar{\tau} \times \bar{\nu} = \bar{i} \times \bar{j}$, а потому в таких случаях

$$D_n|_{\partial\Omega} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \nu^n}$$

или, что то же,

$$\frac{\partial^n}{\partial \nu^n} = (-1)^n D_n|_{\partial\Omega}.$$

Рекуррентное соотношение (24), как видно, устанавливает связь между D_n, T_n, S_n и тем самым позволяет наряду с продолжением внутрь области Ω заданных на ее границе $\partial\Omega$ производных по нормали и касательной осуществить указанное продолжение для производных по дуге граничной кривой. В частных случаях, в соответствии с (14)—(16) и условием 3), имеем

$$S_1 = T_1, \quad S_2 = -kD_1 + T_2, \quad S_3 = -k' D_1 - k^2 T_1 - 3kD_1 T_1 + T_3. \tag{25}$$

Кроме того, S_n на $\partial\Omega$ можно использовать для преобразования краевых условий к эквивалентному, но более удобному в определенном смысле, виду, или — чтобы показать равносильность условий, полученных различными путями. Рассмотрим, например, одно из граничных условий теории тонких пластин (см. [1]):

$$\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right)\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{26}$$

σ — коэффициент Пуассона. С учетом (15), оно запишется следующим образом:

$$\left.\left[\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\right]\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{27}$$

ρ — радиус кривизны. (В таком виде (26) встречается, к примеру, в [5].) Если рассматривать (27) в сочетании с условием $u|_{\partial\Omega} = 0$ (условия свободного опирания), то получаем

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{28}$$

$$\left.\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} - \frac{\sigma}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\right|_{\partial\Omega} = 0. \tag{29}$$

С точки зрения построения структуры решения (см. [1]) соответствующей краевой задачи условие (29) более приемлемо, нежели (26), ибо порядок оператора для второго слагаемого в нем нужен на единицу меньше; это тем более существенно при высоких порядках производных.

В заключение приведем соотношения для смешанного дифференцирования:

$$\frac{\partial^p}{\partial \nu^p}\frac{\partial^n u}{\partial s^n} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{i}{n-1}\left(N_{n-i}\frac{\partial^{p+1}}{\partial \nu^{p+1}} + K_{n-i}\frac{\partial^{p+1}}{\partial \nu^p \partial \tau}\right)\frac{\partial^i u}{\partial s^i}, \tag{30}$$

$$\frac{\partial^p}{\partial \tau^p}\frac{\partial^n u}{\partial s^n} = \sum_{i=0}^{n-1}\binom{i}{n-1}\left(N_{n-i}\frac{\partial^{p+1}}{\partial \nu \partial \tau^p} + K_{n-i}\frac{\partial^{p+1}}{\partial \tau^{p+1}}\right)\frac{\partial^i u}{\partial s^i}, \tag{31}$$

$\frac{\partial^p}{\partial \nu^p}\frac{\partial^n u}{\partial s^n} \neq \frac{\partial^n}{\partial s^n}\frac{\partial^p u}{\partial \nu^p}$, а алогично для $\frac{\partial^p}{\partial \tau^p}$. Легко показать, что

$$\frac{\partial^n}{\partial s^n}\frac{\partial^p u}{\partial t^p} = \frac{\partial^p}{\partial t^p}\frac{\partial^n u}{\partial s^n} + \sum_{i=0}^{n}\binom{i}{n}\frac{\partial^p u}{\partial x_1^{p-i}\partial x_2^i}\frac{\partial^n}{\partial s^n}(t_1^{p-i}\cdot t_2^i), \tag{32}$$

где $t = t(s) = (t_1(s),\ t_2(s))$, $t = \nu, \tau$. В частности ($k = n = 1$, ν — внешняя нормаль, $\bar{\nu}\times\bar{\tau} = \bar{i}\times\bar{j}$):

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial \tau} + k\frac{\partial u}{\partial \tau}, \quad \text{но} \quad \frac{\partial}{\partial \nu}\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial \nu \partial \tau}.$$

В случае трехмерного пространства, когда граница области V (поверхность) описывается векторным уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ или уравнениями $x_1 = x_1(u, v)$, $x_2 = x_2(u, v)$, $x_3 = x_3(u, v)$ (u, v, x_i ($i = 1, 2, 3$) — регулярные достаточное число раз непрерывно дифференцируемые функции) для заданной области изменения параметров (криволинейных координат на поверхности) u, v, представляется возможным осуществить (аналогичным образом) продолжение внутрь области V определенных на ее границе производных по координатным линиям $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$. При этом координаты u, v, вообще говоря, могут быть выбраны различным образом, но в большинстве случаев исходят из конкретных физических или геометрических условий. Например, в теории тонких упругих оболочек в качестве координатных линий на срединной поверхности принимают линии главных кривизн.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рвачев В. Л. Методы алгебры логики в математической физике. К., «Наук. думка», 1974. 260 с.
2. Рвачев В. Л. К вопросу о построении координатных последовательностей.— Дифференц. уравнения, 1970, 6, № 6, с. 1034—1047.
3. Жихарь Н. А. О некоторых свойствах дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, зависящими от формы области.— Дифференц. уравнения, 1972, 8, № 4, с. 645—651.
4. Литвин О. Н. О функционалах, аннулирующихся на заданных последовательностях обобщенных полиномов. Препринт-71-22, К., изд. Ин-та кибернетики АН УССР, 1971. 12 с.
5. Фикера Г. Теоремы существования теории упругости. М., «Мир», 1974. 159 с.
6. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М., «Наука», 1974. 176 с.
7. Прочность. Устойчивость. Колебания. Справочник под редакцией И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. Т. 3, М., «Машиностроение», 1968, 567 с.

Институт проблем машиностроения
АН УССР

Поступила в редакцию 7.VII. 1975 г.,
после переработки — 6.II. 1977 г.