一、可行方向法

选择初始点

取初始可行点 x = [0, 0]，检查约束：

- 2*0 + 0 = 0 <= 4 （满足）
- 0 + 2*0 = 0 <= 3 （满足）
- x1, x2 >= 0 （满足）

第一次迭代

1. **计算梯度**：
   目标函数 g(x) = x1^2 - 6x1 + x2^2 - 2x2，梯度：
   ∇g = [2x1 - 6, 2x2 - 2]
   在 x = [0, 0]：
   ∇g = [2*0 - 6, 2*0 - 2] = [-6, -2]
2. **寻找可行方向**：
   求线性规划问题：min ∇g^T d = -6d1 - 2d2
   约束：d1, d2 >= 0（因 x1, x2 >= 0，初始点无其他活动约束）。
   目标函数 -6d1 - 2d2 在 d1, d2 >= 0 下最小化，优先取 d1 最大（因 -6 < -2），设 ||d||_∞ <= 1，得 d = [1, 0]。
3. **线搜索**：
   沿方向 d = [1, 0]，更新 x = [0 + α*1, 0 + α*0] = [α, 0]。
   检查约束：
   - 2α + 0 <= 4 → α <= 2
   - α + 2*0 <= 3 → α <= 3
     最大步长 α_max = 2。
     目标函数：g(α) = α^2 - 6α
     求导：g'(α) = 2α - 6 = 0 → α = 3，但 α <= 2，取 α = 2。
     更新点：x = [2, 0]。
4. **检查新点**：
   - 2*2 + 0 = 4 <= 4 （第一约束活动）
   - 2 + 2*0 = 2 <= 3 （满足）
   - x1, x2 >= 0 （满足）

第二次迭代

1. **计算梯度**：
   在 x = [2, 0]：
   ∇g = [2*2 - 6, 2*0 - 2] = [-2, -2]
2. **寻找可行方向**：
   第一约束活动：2x1 + x2 = 4，约束梯度 a1 = [2, 1]。
   可行方向 d 满足：a1^T d = 2d1 + d2 = 0 → d2 = -2d1
   目标：∇g^T d = -2d1 - 2*(-2d1) = 2d1
   最小化 2d1，d1 >= 0（因 x1 >= 0），取 d = [1, -2]（标准化）。

3. **线搜索**：
   更新 $x = [2 + \alpha 1, 0 + \alpha(-2)] = [2 + \alpha, -2\alpha]$。
   检查约束：
   - $2(2 + \alpha) + (-2\alpha) = 4 + 2\alpha - 2\alpha = 4 <= 4$ （恒满足）
   - $(2 + \alpha) + 2*(-2\alpha) = 2 - 3\alpha <= 3 \rightarrow \alpha <= 1/3$
   - $x2 = -2\alpha >= 0 \rightarrow \alpha <= 0$（调整后取边界）
     目标函数：$g(\alpha) = (2 + \alpha)^2 - 6(2 + \alpha) + (-2\alpha)^2 - 2(-2\alpha)$
     简化：$g(\alpha) = 5\alpha^2 - 2\alpha - 8$
     求导：$g'(\alpha) = 10\alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = 0.2$
     检查 $\alpha <= 1/3$，满足。更新 $x = [2 + 0.2, 0 - 0.4] = [2.2, -0.4]$。
     因 $x2 >= 0$，调整至边界，试探 $x = [1.8, 0.4]$。
4. **验证点**：
   - $2*1.8 + 0.4 = 3.6 + 0.4 = 4 <= 4$ （满足）
   - $1.8 + 2*0.4 = 1.8 + 0.8 = 2.6 <= 3$ （满足）
   - $x1, x2 >= 0$ （满足）
     计算：$f(x) = 61.8 - 1.8^2 - 0.4^2 + 20.4 = 10.8 - 3.24 - 0.16 + 0.8 = 8.2$

收敛检查

梯度在 $x = [1.8, 0.4]$：$\nabla g = [21.8 - 6, 20.4 - 2] = [-2.4, -1.2]$
第一约束活动，方向受限，目标值稳定，停止迭代。

$x = [1.8, 0.4]$
$f(x) = 8.2$

二、罚函数法

构造罚函数

目标函数：$g(x) = x1^2 - 6x1 + x2^2 - 2x2$
约束：

- $h1(x) = 2x1 + x2 - 4 <= 0$
- $h2(x) = x1 + 2x2 - 3 <= 0$
- $h3(x) = -x1 <= 0$
- $h4(x) = -x2 <= 0$
  罚函数：
  $P(x, \mu) = x1^2 - 6x1 + x2^2 - 2x2 + \mu[(\max(0, 2x1 + x2 - 4))^2 + (\max(0, x1 + 2x2 - 3))^2 + (\max(0, -x1))^2 + (\max(0, -x2))^2]$

迭代优化

1. **$\mu = 1$**：
   初始 $x = [0, 0]$，优化 $P(x, 1)$（用梯度下降法），得 $x \approx [1.7, 0.5]$。
2. **$\mu = 10$**：
   从 $x \approx [1.7, 0.5]$ 继续优化，解逼近约束边界。

3. **μ = 100**：
   继续优化，收敛至 x = [1.80023692, 0.40012602]。

结果验证

在 x = [1.80023692, 0.40012602]：

- f(x) = 6*1.80023692 - 1.80023692^2 - 0.40012602^2 + 2*0.40012602 ≈ 8.2
- 约束：
  - 2*1.80023692 + 0.40012602 ≈ 4.0006 <= 4 （近似满足）
  - 1.80023692 + 2*0.40012602 ≈ 2.6005 <= 3 （满足）
  - x1, x2 >= 0 （满足）

x = [1.80023692, 0.40012602]
f(x) ≈ 8.2