Álgebra

Porcentagem

Taxa percentual ou porcentagem de um número **a** sobre um número **b**, **b** $\neq 0$ é a razão $\frac{x}{100}$ tal que: $\frac{x}{100} = \frac{a}{b}$, e se indica: $\frac{x}{100} = x\%$.
A palavra porcentagem deriva de por (dividido) e centagem (100). Quando se fala x % de um número, significa multiplicar este número por $\frac{x}{100}$.

Exemplo: 15 % de 200 = $\frac{15}{100} \cdot 200 = 30$.

Potenciação

Definições

$\forall\ a \in R \ \Rightarrow\ a^0 = 1$

$\forall\ a \in R$ e $\forall\ n \in N \ \Rightarrow\ a^n = a^{n-1} \cdot a$

Propriedades

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, a \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
5. $(a : b)^n = a^n : b^n$, $b \neq 0$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$

Nota: Em geral $\left(a^m\right)^n \neq a^{m^n}$

Em geral $(a+b)^n \neq a^n + b^n$

Radiciação

Propriedades

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
2. $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$, $b \neq 0$
3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
5. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
6. $\sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{a^m}$

Produtos notáveis

$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc)$

Fatoração

$ab + ac = a \cdot (b + c)$

$ab + ac + db + dc = a \cdot (b + c) + d \cdot (b + c) = (b + c) \cdot (a + d)$

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$ax^2 + bx + c = a.(x - \alpha_1) \cdot (x - \alpha_2)$, onde α_1 e α_2 são as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$

$a^2 + b^2 + c^2 + 2 \cdot (ab + ac + bc) = (a + b + c)^2$

Números naturais

Números primos: Um número natural e maior que 1 é primo se ele tiver apenas dois divisores naturais distintos: 1 e ele mesmo.

Números primos entre si: Dois números naturais são primos entre si se o único divisor natural comum entre eles for 1.

Quantidade de divisores naturais de um número natural

Se $n = a^p.b^q.c^r.d^s...$, então n tem $(p+1) \cdot (q+1) \cdot (r+1)...$ divisores positivos, sendo n um número natural e a, b, c, d, ... fatores primos do número n.

Seqüências

Definições

Seqüência real é toda função $f : I \rightarrow R$, onde $I = N^*$ ou $I = \{1, 2, 3, ... \quad ..., n\}$
Se $I = N^*$, a seqüência é chamada infinita.
Se $I = \{1, 2, 3, ... \quad ..., n\}$, a seqüência é chamada finita.

Progressão Aritmética (PA)

Definição

Progressão aritmética (PA) é toda seqüência numérica onde, a partir do primeiro termo encontramos os demais somando ao anterior um valor fixo r chamado de razão da PA.

Conseqüência da definição: $r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \dots \quad \dots = a_{n+1} - a_n = r$

Classificação das PA´s

Uma PA de números reais pode ser:

I. crescente: (razão positiva): $r > 0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$
II. decrescente (razão negativa): $r < 0 \Rightarrow a_{n+1} < a_n$
III. constante (razão nula): $r = 0 \Rightarrow a_{n+1} = a_n$

Fórmula do termo geral de uma PA

Seja a PA(a_1, a_2, a_3, ... a_n). Então: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r,\ n \in \mathbf{N^*}}$

Conseqüência: Para obtermos um termo qualquer a_n, a partir de um termo de ordem p (a_p), poderemos utilizar a regra:

$$\boxed{a_n = a_p + (n-p) \cdot r,\ n,p \in \mathbf{N^*}}$$

Termos eqüidistantes em PA

Na PA genérica: PA(a_1, a_2, a_3,... ..., a_{p-1}, a_p, a_{p+1},... ...,a_n), tem-se:

$$\boxed{a_p = \frac{a_{p-k} + a_{p+k}}{2} \text{ com } p, k \in \mathbb{N}^*}$$

Soma dos n primeiros termos de uma PA

Seja a PA(a_1, a_2, a_3,... ..., a_n,......) , a soma de seus n primeiros termos é dada por:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}}$$

Progressão Geométrica (PG)

Definição

Progressão geométrica (PG) é toda seqüência em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao produto do termo anterior por uma constante q, que é chamada razão da P.G.

Conseqüência da definição:

Se $a_n \neq 0$, então $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; ou seja, encontramos a razão da PG dividindo um termo qualquer pelo seu antecessor.

Classificação das PG´s:

Uma PG pode ser:

I. Crescente: quando $a_{n+1} > a_n$
Exemplo: PG(1, 2, 4, 8, 16, ...), $q = 2$

II. Decrescente: quando $a_{n+1} < a_n$
Exemplo: PG(81, 27, 9, 3, 1, ...), $q = 1/3$

III. Constante: quando $a_{n+1} = a_n$
Exemplo: PG(2, 2, 2, 2, 2, ...), $q = 1$

IV. Alternante: quando $a_1 \neq 0$ e $q < 0$
Exemplo: PG(2, – 4, 8, – 16, 32, ...), $a_1 = 2$ e $q = -2$

V. Não decrescente: quando $a_1 < 0$ e $q = 0$
Exemplo: PG(– 2, 0, 0, 0, 0, ...), $a_1 = -2$ e $q = 0$

VI. Não crescente: quando $a_1 > 0$ e $q = 0$
Exemplo: PG(5, 0, 0, 0, 0, ...), $a_1 = 5$ e $q = 0$

Fórmula do termo geral da PG

Seja a PG genérica: PG(a_1, a_2, a_3, a_4, ...). Assim: $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1},\ n \in \mathbf{N^*}}$

Conseqüência: Para obtermos um termo qualquer a_n, a partir de um termo de ordem p (a_p), poderemos utilizar a regra: $\boxed{a_n = a_p \cdot q^{n-p},\ n,p \in \mathbf{N^*}}$

Termos eqüidistantes em PG

Na PG genérica: PG(a_1, a_2, a_3,... ..., a_{p-1}, a_p, a_{p+1},... ...,a_n), então:

$\boxed{(a_p)^2 = (a_{p-k}) \cdot (a_{p+k}),\ p,k \in \mathbf{N^*}}$

Produto dos n primeiros termos de uma PG (Pn)

Seja a PG(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ..., ...) indicaremos por P_n o produto de seus n primeiros termos. Assim: $\boxed{P_n = a_1^{\,n} \cdot q^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}}$ ou $\boxed{P_n = (a_1 \cdot a_n)^{\frac{n}{2}}}$

Soma dos n primeiros termos de uma PG (Sn)

Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma PG de razão q e indiquemos por S_n a soma de seus n primeiros termos. Assim:

Se a PG não for constante, ou seja $q \neq 1$ teremos: $\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}}$

Se a PG for constante, ou seja $q = 1$ teremos: $\boxed{S_n = n \cdot a_1}$

Soma dos termos de uma PG infinita (S)

Seja a P.G. $= (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q e a soma de seus infinitos termos

$Sn = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ (série)

Quando $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ existe e é finito, dizemos que a série converge para S.

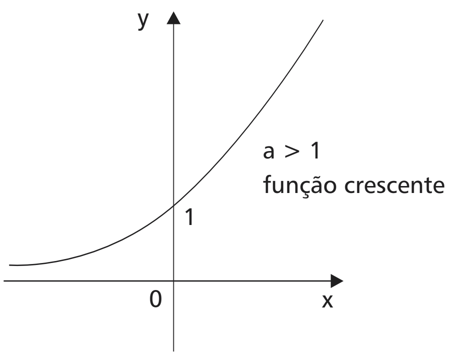
Quando esse limite não existe ou não é finito dizemos que a série diverge (não se pode determinar tal soma). Se $-1 < q < 1$, pode-se demonstrar que: $\boxed{\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S = \frac{a_1}{1 - q}}$

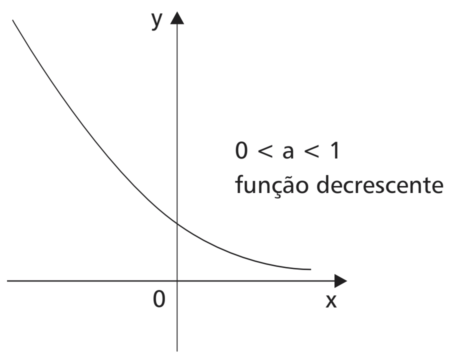
Função Exponencial

$f(x) = a^x$; $a > 0$ e $a \neq 1$

$Im_f = IR_+^*$

$D_f = IR$





Propriedades de potência

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $a \neq 0$
3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
4. $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$, $n \in IN$ / $n > 1$
5. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$

Equação exponencial

$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$

Inequação exponencial

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) > g(x)$, se $a > 1$

$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) < g(x)$, se $0 < a < 1$

Logaritmo

Definição

$\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x$ com $a > 0,\ 0 < b \neq 1$

Propriedade de logaritmo

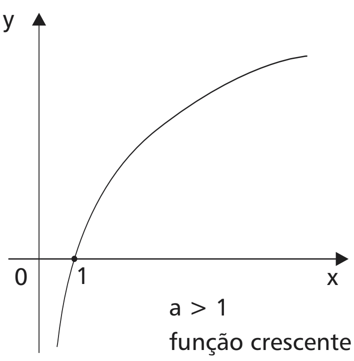
1. $\log_c (a.b) = \log_c a + \log_c b$; $a > 0,\ b > 0,\ 0 < c \neq 1$
2. $\log_c \left(\dfrac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$; $a > 0,\ b > 0,\ 0 < c \neq 1$
3. $\log_c a^m = m \,.\, \log_c a$; $a > 0,\ 0 < c \neq 1$ e $m \in IR$
4. $\log_{c^m} a = \dfrac{1}{m} \,.\, \log_c a$; $a > 0,\ 0 < c \neq 1$ e $m \in IR^*$

Função Logarítmica

$f(x) = \log_a x$, $a > 0$ e $a \neq 1$

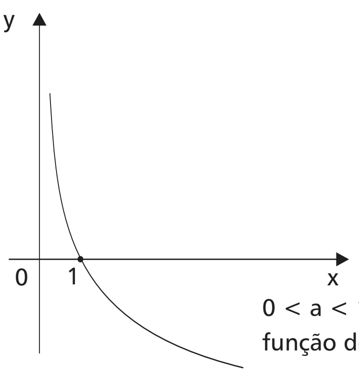
$Im_f = IR$

$D_f = IR_+^*$



$a > 1$

função crescente

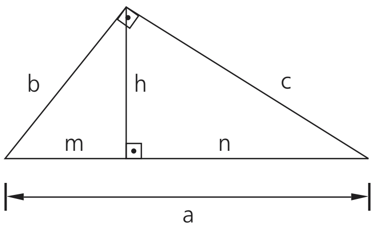


$0 < a < 1$

função decrescente

Geometria Plana

Relações métricas no triângulo retângulo

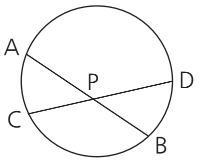


$h^2 = m \cdot n$ $\quad$ $b \cdot c = a \cdot h$

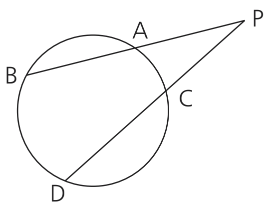
$b^2 = a \cdot m$ $\quad$ $a^2 = b^2 + c^2$ (Pitágoras).

$c^2 = a \cdot n$

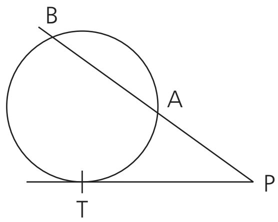
Relações métricas no círculo



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

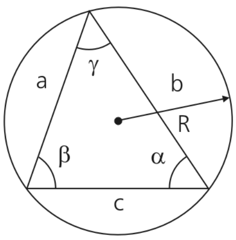


$PA \cdot PB = PC \cdot PD$



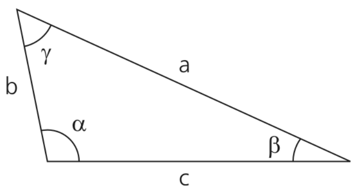
$(PT)^2 = PA \cdot PB$

Lei dos



$$\frac{a}{\text{sen}\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\beta} = \frac{c}{\text{sen}\gamma} = 2R$$

Lei dos cossenos



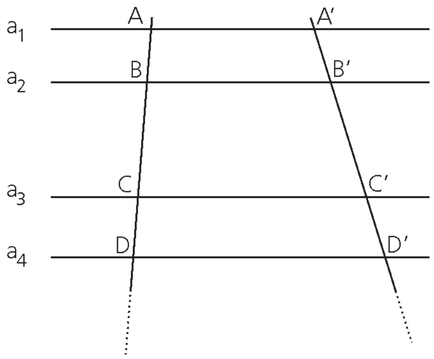
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma$$

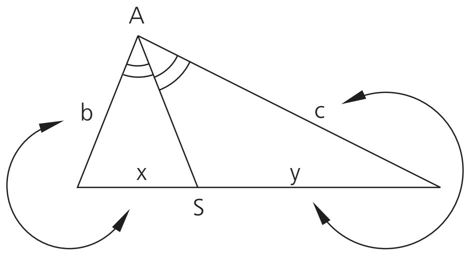
Teorema de Tales

$a_1 \,//\, a_2 \,//\, a_3 \,//\, ...$



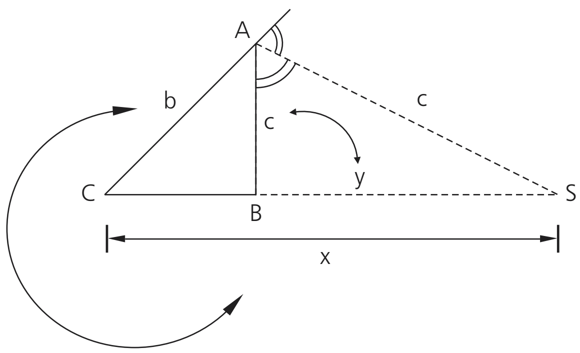
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AD}{A'D'}$$

Teorema da bissetriz interna



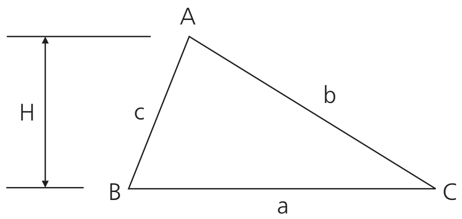
$$\frac{b}{x} = \frac{c}{y}$$

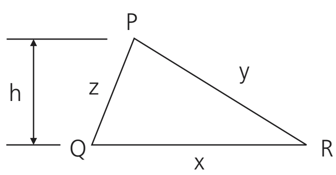
Teorema da bissetriz externa



$$\frac{b}{x} = \frac{c}{y}$$

Semelhança de triângulos

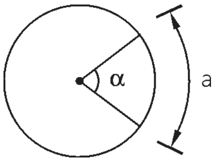




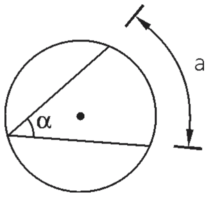
$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{H}{h} = k$$

$$\frac{\text{Área } \Delta ABC}{\text{Área } \Delta PQR} = k^2$$

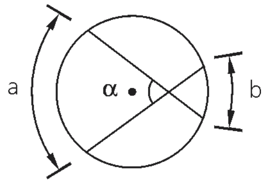
Arcos e ângulos



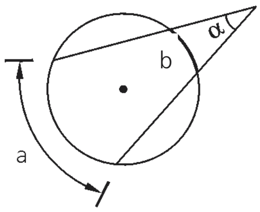
$\alpha = a$



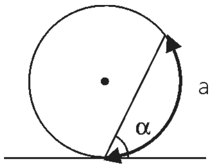
$\alpha = \dfrac{a}{2}$



$\alpha = \dfrac{a+b}{2}$

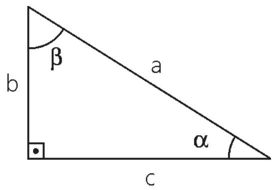


$\alpha = \dfrac{a-b}{2}$



$\alpha = \dfrac{a}{2}$

Razões trigonométricas

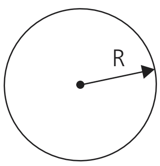


$\text{sen}\ \alpha = \dfrac{b}{a}$ $\qquad$ $\text{sen}\ \beta = \dfrac{c}{a}$

$\cos\ \alpha = \dfrac{c}{a}$ $\qquad$ $\cos\ \beta = \dfrac{b}{a}$

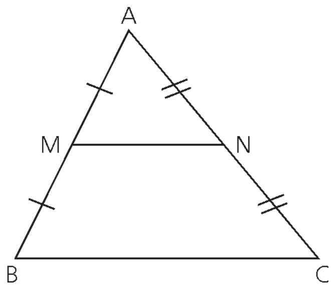
$\text{tg}\ \alpha = \dfrac{b}{c}$ $\qquad$ $\text{tg}\ \beta = \dfrac{c}{b}$

Comprimento da circunferência



$C = 2\pi R$

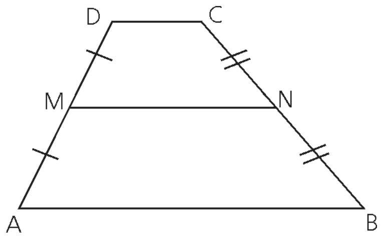
Base média de triângulo



$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$MN = \dfrac{BC}{2}$

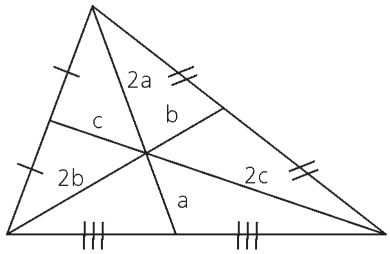
Base média de trapézio



$$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$$

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

Baricentro de triângulo



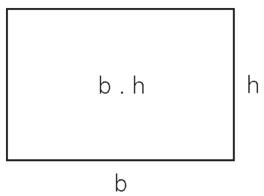
Polígonos convexos

Sendo n = número de lados;
d = número de diagonais;
S_i = soma dos ângulos internos e
S_e = soma dos ângulos externos,

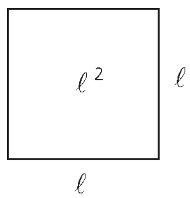
temos: $d = \frac{n(n-3)}{2}$ $\quad S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ$ e $\quad S_e = 360^\circ$

Áreas

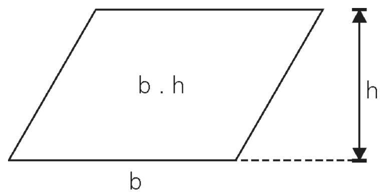
Retângulo



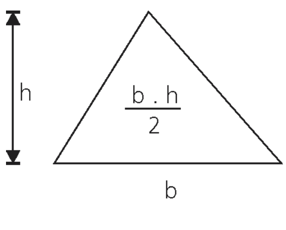
Quadrado



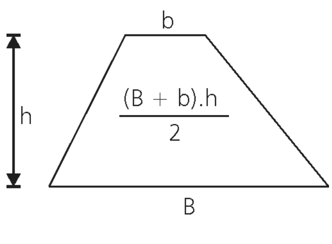
Paralelogramo



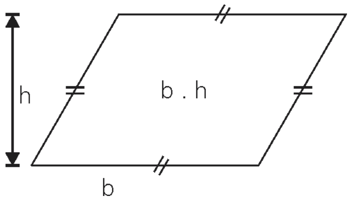
Triângulo



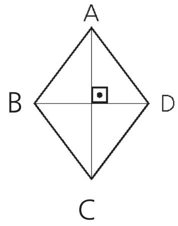
Trapézio



Losango 1

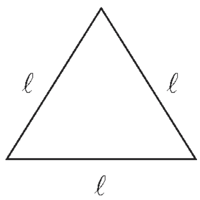


Losango 2

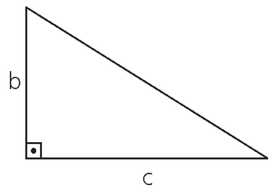


$$A_{Los} = \frac{(AC) \cdot (BD)}{2}$$

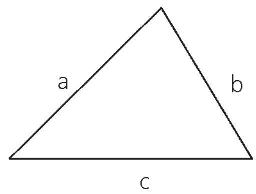
Fórmulas especiais para área do triângulo



$$A = \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4}$$

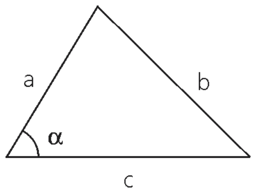


$$A = \frac{b \cdot c}{2}$$

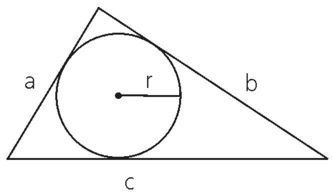


$$A = \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b)(p-c)}$$

em que $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

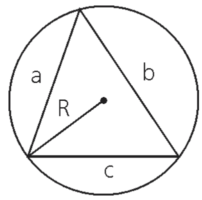


$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \text{sen}\alpha$$



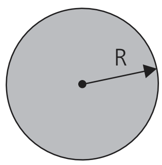
$$A = r\,p$$

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$



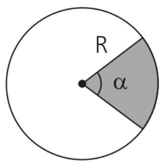
$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

Círculo

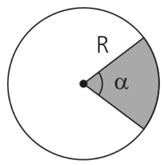


$$A = \pi \cdot R^2$$

Setor circular

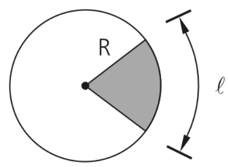


$$A = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot R^2}{360^o}$$



$$A = \frac{\alpha \cdot R^2}{2}$$

α em radianos



$$A = \frac{\ell \cdot R}{2}$$

Análise Combinatória / Probabilidades

Número binomial: $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} = C_{n,\,p} = \left(\begin{array}{l}\text{combinação de n objetos distintos}\\ \text{agrupados de p em p}\end{array}\right)$

Teorema binomial: $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{i=o}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}\,b^i$

Arranjo: $A_{n,\,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!} \Rightarrow$ n objetos distintos seqüenciados (enfileirados) de p em p

Permutação de n objetos distintos: $P_n = n!$

Permutação de elementos repetidos: $P_n^{\alpha,\beta,\gamma} = \dfrac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!}$, α objetos iguais entre si
β objetos iguais entre si
γ objetos iguais entre si

Probabilidade de ocorrer um evento $= \dfrac{\text{n.o de elementos do conjunto evento}}{\text{n.o de elementos do espaço amostral}} = \dfrac{n(A)}{n(E)} = P(A)$

$\left(\begin{array}{l}\text{probabilidade de ocorrer}\\ \text{o evento A}\end{array}\right)$ e em seguida $\left(\begin{array}{l}\text{ocorrer o}\\ \text{evento B}\end{array}\right) =$

$= \left(\begin{array}{l}\text{probabilidade de}\\ \text{ocorrer o evento A}\end{array}\right) \times \left(\begin{array}{l}\text{probabilidade de}\\ \text{ocorrer o evento B}\\ \textbf{sabendo}\text{ que A ocorreu}\end{array}\right) \Rightarrow$ Teorema da multiplicação

Exemplo:

2 bolas azuis 5 bolas verdes

$P\left(\begin{array}{l}\text{tirar uma bola azul e em}\\ \text{seguida uma bola azul}\end{array}\right) = \dfrac{2}{7} \times \dfrac{1}{6}$

chance de retirar uma bola azul sabendo que já saiu uma azul

Conjuntos, Funções e Inequações

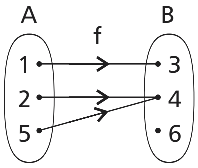
Relação

Considerando dois conjuntos A e B, não-vazios, chamamos relação (binária) de A e B a qualquer subconjunto do produto cartesiano ($A \times B = \{(x;\, y) \,/\, x \in A \wedge x \in B\}$).

Definição

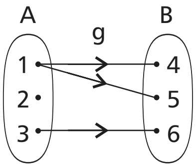
Uma relação f de A em B é uma função de A em B, se, para todo $x \in A$, existe um único y $\in B$ tal que $(x;\, y) \in f$. (Indica-se: $f : A \rightarrow B$).

Exemplo



f é função

Contra-exemplo



g não é função

- Domínio de f = D(f) = A = {1, 2, 5}
- Conjunto Imagem de f = Im(f) = {3, 4}
- Contradomínio = CD(f) = B = {3, 4, 6}
- 4 é imagem de 5, isto é, 4 = f(5)
- 4 é imagem de 2, isto é, 4 = f(2)

Tipos de função

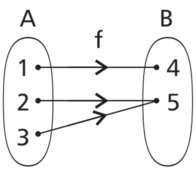
Função crescente e decrescente

- Uma função f é crescente em $A \subset D_f \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \forall\, x_1, x_2 \in A)$.
- Uma função f é decrescente em $A \subset D_f \Leftrightarrow (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \forall\, x_1, x_2 \in A)$.

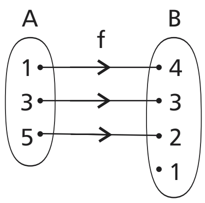
Função injetora, sobrejetora e bijetora

- Uma $f : A \rightarrow B$ é injetora se todos os elementos distintos em A têm imagens distintas em B $(\forall\, x_1, x_2 \in A,\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.
- Uma $f : A \rightarrow B$ é sobrejetora se todos os elementos de B são imagens de elementos de A $(\mathrm{Im}(f) = \mathrm{CD}(f)$ ou $\forall\, y \in B, \exists\, x \in A \,/\, f(x) = y)$
- Uma função de $f : A \rightarrow B$ é bijetora se é injetora e sobrejetora.

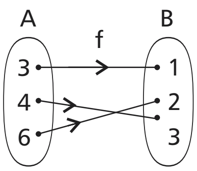
Exemplos:



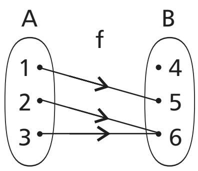
f é sobrejetora
e não é injetora



f é injetora
e não é sobrejetora



f é bijetora



f não é injetora
e nem sobrejetora

Função par e ímpar

- Uma função $f : A \rightarrow B$ é par $\Leftrightarrow \forall\, x \in A,\ f(x) = f(-x)$.
- Uma função $f : A \rightarrow B$ é ímpar $\Leftrightarrow \forall\, x \in A,\ f(x) = -f(-x)$.

Função periódica

- Uma função $f : A \rightarrow B$ é periódica de período $p \Leftrightarrow \forall\, x \in A,\ f(x + p) = f(x),\ p > 0$.

Função composta

- Dadas duas funções f e g, podemos obter uma outra função fog, tal que fog(x) = f(g(x)), chamada função composta de f com g.

Função inversa

- Denomina-se inversa da função bijetora $y = f(x)$, $f : A \to B$ a função $f^{-1}: B \to A$, tal que $f^{-1}(y) = x$.

  Observação:
  Para se obter a inversa de uma função f (bijetora) definida por uma sentença matemática $y = f(x)$
  a. troca-se x por y e y por x;
  b. coloca-se o novo y em função do novo x.

Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares

Propriedades dos determinantes

a. $\det(A^t) = \det(A)$.

b. Se uma linha (ou coluna) é formada só de zeros, o determinante é igual a zero.

c. Quando trocamos de lugar duas linhas (ou colunas) paralelas, o determinante fica multiplicado por –1.

d. Se duas linhas (ou colunas) paralelas são iguais (ou proporcionais), o determinante é igual a zero.

e. Se os elementos de uma linha (ou coluna) apresentam um fator comum k, este pode ser colocado em "evidência".

f. Se A é uma matriz quadrada de ordem n, então $\det(k.A) = k^n.\det(A)$

g. Teorema de Binet: $\det(A.B) = \det(A).\det(B)$
Atenção: em geral, $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

h. Teorema de Jacobi (importante para obtenção de zeros). O determinante de uma matriz não se altera quando somamos a uma linha (ou coluna) outra linha (ou coluna) paralela multiplicada por uma constante.

i. Matriz Triangular: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot 4(-5) \cdot 8$

Multiplicação de matrizes

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bw \\ cx+dz & cy+dw \end{pmatrix}$$

a. Todo sistema de equações lineares apresenta apenas uma solução, ou seja, é um sistema possível e determinado (s. p. d.), quando $D \neq 0$, onde D é o determinante da matriz dos coeficientes de tal sistema.

b. Para os casos onde $D = 0$, para analisar o sistema, ou seja, dizer se o mesmo é impossível (s. i.) ou indeterminado (s. p. i.), deve-se escalonar tal sistema, eliminando ordenadamente as incógnitas das equações.
A equação, na incógnita x, $ax = b$ tem apenas uma solução para $a \neq 0$; tem infinitas soluções para $a = 0$ e $b = 0$ e não tem solução para $a = 0$ e $b \neq 0$.

Trigonometria

Relações Fundamentais

$\text{sen}^2x + \cos^2x = 1, \forall x \in R$

$$tgx = \frac{\text{sen}x}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\text{cotg}x = \frac{\cos x}{\text{sen}x} \quad (x \neq k\pi)$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$\text{cossec}x = \frac{1}{\text{sen}x} \quad (x \neq k\pi)$$

Conseqüências $\left(x \neq \frac{k\pi}{2}\right)$

$$\text{cotg}x = \frac{1}{tgx}$$

$1 + tg^2x = \sec^2x$

$1 + \text{cotg}^2x = \text{cossec}^2x$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + tg^2 x}$$

$$\text{sen}^2 x = \frac{tg^2 x}{1 + tg^2 x}$$

Fórmulas de adição

$\cos(a + b) = \cos a \,.\, \cos b - \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b$

$\cos(a - b) = \cos a \,.\, \cos b + \text{sen}\, a \,.\, \text{sen}\, b$

$\text{sen}(a + b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b + \text{sen}\, b \,.\, \cos a$

$\text{sen}(a - b) = \text{sen}\, a \,.\, \cos b - \text{sen}\, b \,.\, \cos a$

$$tg(a + b) = \frac{tg\, a + tg\, b}{1 - tg\, a \cdot tg\, b}$$

$$tg(a - b) = \frac{tg\, a - tg\, b}{1 + tg\, a \cdot tg\, b}$$

Fórmulas de multiplicação

Arcos duplos

$\text{sen}\, 2a = 2\, \text{sen}\, a \cos a$

$$\cos 2a = \begin{cases} \cos^2 a - \text{sen}^2 a \\ \text{ou} \\ 2\cos^2 a - 1 \\ \text{ou} \\ 1 - 2\text{sen}^2 a \end{cases}$$

$$tg\, 2a = \frac{2\, tg\, a}{1 - tg^2 a}$$

Arcos Triplos

$\text{sen}\, 3a = 3\, \text{sen}\, a - 4\, \text{sen}^3\, a$

$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$

$$tg\, 3a = \frac{3\, tga\ -\ tg^3 a}{1 - 3tg^2 a}$$

Fórmulas de divisão

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \qquad \cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

Fórmulas de transformação em produto

$$\cos p + \cos q = 2\cdot\cos\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\cdot\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{p+q}{2}\cdot\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2\cdot\operatorname{sen}\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{tg} p + \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p+q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

$$\operatorname{tg} p - \operatorname{tg} q = \frac{\operatorname{sen}(p-q)}{\cos p\cdot\cos q}$$

Equações trigonométricas fundamentais

$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta \Rightarrow \alpha = \beta + 2k\pi$ ou $\alpha = (\pi - \beta) + 2k\pi$

$\cos\alpha = \cos\beta \Rightarrow \alpha = \pm\beta + 2k\pi$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta \Rightarrow \alpha = \beta + k\pi$

Funções circulares inversas

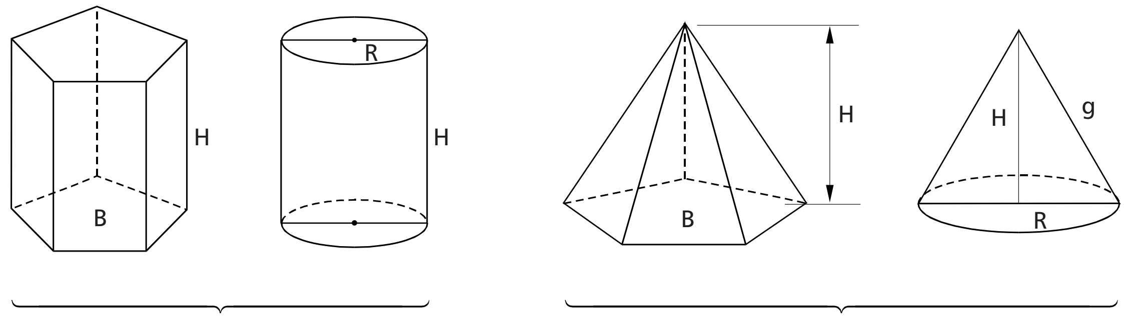
$$y = \text{arc sen}x \Leftrightarrow \text{sen}y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

$$y = \text{arc cos}x \Leftrightarrow \text{cos}y = x \text{ e } 0 \le y \le \pi$$

$$y = \text{arc tg}x \Leftrightarrow \text{tg}y = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

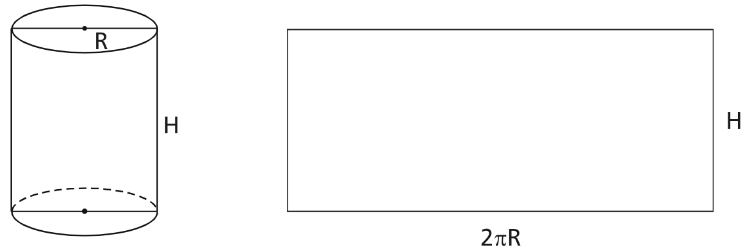
Geometria Espacial

- O volume de um prisma e o de um cilindro (retos ou oblíquos) é igual ao produto da área da base **(B)** pela altura **(H)**. E o volume de uma pirâmide e o de um cone reto (ou oblíquo) é igual a 1/3 do produto da área da base pela altura.



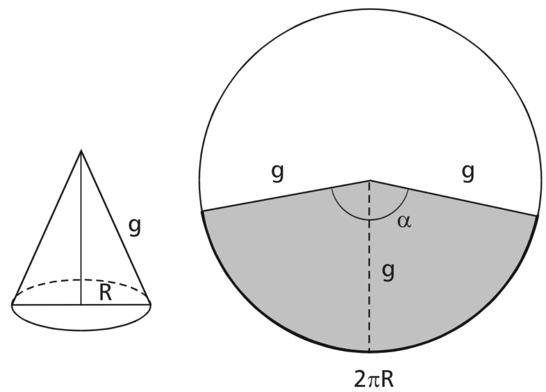
$V = BH$ $\qquad\qquad$ $V = \frac{1}{3} BH$

- Planificando a superfície lateral de um cilindro reto de raio **R** e altura **H** obtemos um retângulo de lados $2\pi R$ e H. Então a área lateral (A_L) do cilindro reto é:



$$A_L = 2\pi RH$$

- Planificando a superfície lateral de um cone reto de raio **R** e geratriz **g** obtemos um setor circular de raio **g** e arco **2πR**. Então a área lateral do cone reto é.

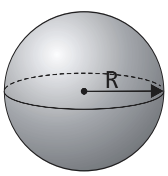


$$A_L = \text{Asetor} \Rightarrow A_L = \frac{2\pi R \cdot g}{2} \Rightarrow \boxed{A_L = \pi Rg}$$

Sendo α a medida, em graus, do setor, temos:

$$A_{setor} = \frac{2\pi R \cdot g}{2} = \frac{\alpha}{360^o}\pi g^2 \Rightarrow \boxed{R = \frac{\alpha}{360^o} g}$$

- O volume **V** e a área **A** de uma esfera de raio **R** são dados por:



$$A = 4\,\pi R^2 \quad \text{e} \quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Números Complexos

Forma algébrica

Nomenclatura

$z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$
i = unidade imaginária
$a = \text{Re}(z)$ = parte real de z
$b = \text{Im}(z)$ = coeficiente da parte imaginária de z

Exemplos de números complexos

$z = 3i = 0 + 3i$ = número imaginário puro.
$z = -6 = -6 + 0i$ = número real.
$z = a + bi$ $(b \neq 0)$ = número imaginário ou número complexo não real.

Potências inteiras de i (i^k, $k \in \mathbb{Z}$)

$i^0 = 1$ e $i^{4k} = 1$
$i^1 = i$ e $i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i^1 = i$
$i^2 = -1$ e $i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -i$
$i^3 = -i$ e $i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$

Conjugado de z = a + bi (a, b ∈ IR)

$\overline{z} = a - bi$

Propriedades

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}$
4. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ $(n \in \mathbb{Z})$
5. $\overline{(\overline{z})} = z$

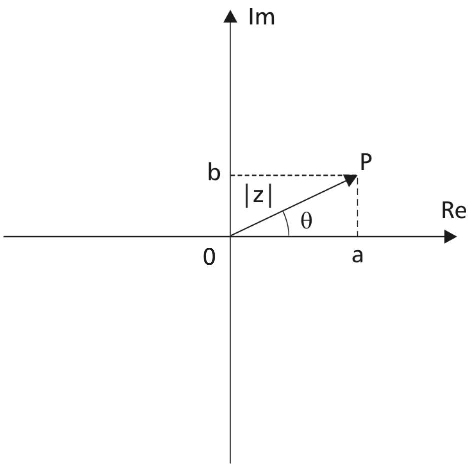
Produtos e divisões notáveis

1. $(1 + i)^2 = 2i$
2. $(1 - i)^2 = -2i$
3. $(1 + i)(1 - i) = 2$
4. $\dfrac{1+i}{1-i} = i$
5. $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$

Igualdade na forma algébrica

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \quad e \quad b = d \qquad (a, b, c, d \in IR)$$

Representação no plano de Argand-Gauss



$z = a + bi = (a, b) = P\ (a, b \in IR)$

P = afixo de z

$d_{op} = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ = módulo de z

$\theta + k \,.\, 2\pi = \arg(z)$ = argumento de z

$(0 \leq \theta < 2\pi)$

θ = argumento principal de z

Propriedades

1. $|\,z\,|^2 = z \,.\, \bar{z}$
2. $|z \,.\, w\,| = |\,z\,| \,.\, |\,w\,|$
3. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|} \qquad (w \neq 0)$
4. $|\,z^n\,| = |\,z\,|^n, \quad n \in \mathbb{Z}$
5. $|\,z + w\,| \leq |\,z\,| + |\,w\,|$
6. $|\,z\,| = |\,\bar{z}\,|$

Forma trigonométrica de $z \in C^*$

$z = a + bi = |\,z\,|\,(\cos\theta + i \,\text{sen}\, \theta)$

$$|\,z\,| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad e \quad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} \\ \text{sen}\,\theta = \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

Igualdade na forma trigonométrica

$$\underbrace{|z|(\cos\theta + i \,\text{sen}\,\theta)}_{z} = \underbrace{|w|(\cos\alpha + i \,\text{sen}\,\alpha)}_{w}$$

$$\boxed{z = w} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} |z| = |w| \quad e \\ \theta = \alpha + k \,.\, 2\pi \end{array}} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Operações na forma trigonométrica

Sejam $z = |z|\,(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

$z_1 = |z_1|\,(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)$

$z_2 = |z_2|\,(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)$

- **Multiplicação**

$$z_1 \,.\, z_2 = |z_1| \,.\, |z_2| \,.\, [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 + \theta_2)]$$

- **Divisão**

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}\,(\theta_1 - \theta_2)]$$

- **Potenciação**

$$z^n = |z|^n \,.\, [\cos(n\,\theta) + i\,\text{sen}\,(n\theta)]$$

- **Radiciação**

$$\sqrt[n]{z}^{\,C} = w_k = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right], \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Propriedades

1. $w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_{n-1} = 0$
2. A raiz enésima de z divide a circunferência em n partes iguais.
3. O raio dessa circunferência é $\sqrt[n]{|\ z\ |}$.
4. O "ponto de partida" (w_o) é o arco $\frac{\theta}{n}$ e o "pulo' de uma raiz para outra é de $\frac{2\pi}{n}$.

Equação binômia em C

$ax^n + b = 0 \qquad (a \neq 0)$

$$ax^n = -b \Rightarrow x^n = \frac{-b}{a} \Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{-b}{a}}^{\,C} = w_k, \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Geometria Analítica

Distâncias

De dois pontos A e B

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Do ponto P à reta (r) ax + by + c = 0

$$d = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Pontos especiais

a.

M divide AB na razão $\dfrac{AM}{MB} = r$

$$r = \frac{x_M - x_A}{x_B - x_M} = \frac{y_M - y_A}{y_B - y_M}$$

Se M é ponto médio de AB, $M = \left(\dfrac{x_A + x_B}{2}, \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$

b. Ponto do eixo x: A = (a, 0)

Ponto do eixo y: B = (0, b)

Ponto da bissetriz dos quadrantes pares: C = (k, k)

Ponto da bissetriz dos quadrantes ímpares: D = (k, – k)

Baricentro do ΔABC: $G = \left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}, \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

Área do ΔABC

$$S = \frac{|D|}{2} \text{ onde } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

Observação: Se A, B e C são colineares, D = 0.

Equação de circunferência

$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 = r^2$

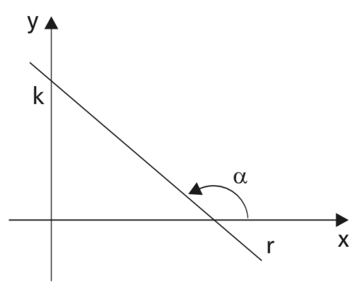
Centro C e raio r, equação reduzida.

Equação de reta

- Geral: $ax + by + c = 0$ (r)

  Conhecendo 2 pontos A e B de r: $\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$

- Reduzida: $y = mx + k$



m... coeficiente angular de r

k.... coeficiente linear de r

$m = tg\alpha$ (não existe, se m é vertical)

Conhecendo 2 pontos A e B da reta, $m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Paralelas / perpendiculares

- $r \,//\, s \Leftrightarrow m_r = m_s$

  Exemplos:

  Paralela a $y = 2x - 3$ é $y = 2x + k$

  Paralela a $2x + 5y - 3$ é $2x + 5y + k = 0$

- $r \perp s \Leftrightarrow m_r \,.\, m_s = -1$

  Exemplos:

  Perpendicular a $y = \frac{2}{3}x - 3$ é $y = -\frac{3}{2}x + k$

  Perpendicular a $2x + 5y - 6 = 0$ é $5x - 2y + k = 0$

  Observação:

  Se P pertence a $ax + by + c = 0$, então $ax_P + by_P + c = 0$.