투빅스 18기 정규세션 3주차

Neural Network Basic Assignment

이름: 표 지 원

1. Sigmoid Function을 z에 대해 미분하세요.

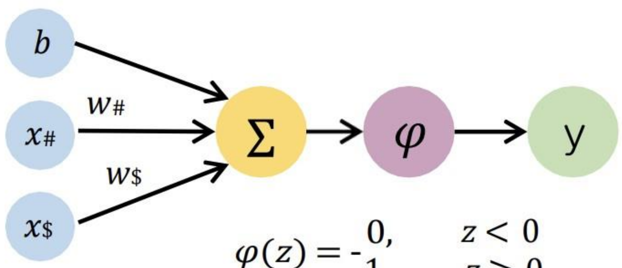
$$\sigma(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$\sigma'(z) = \frac{0-(-e^{-z})}{(1+e^{-z})^2}$$

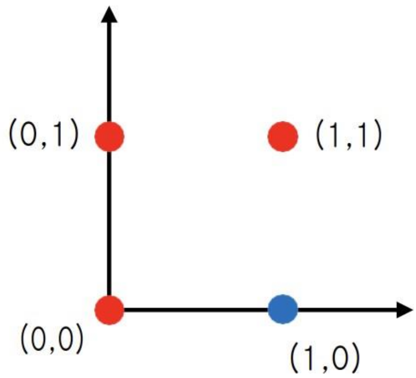
$$= \frac{e^{-z}}{(1+e^{-z})^2} = \frac{1}{1+e^{-z}} \cdot \left(1 - \frac{1}{1+e^{-z}}\right)$$

$$= \underline{\sigma(z)\cdot(1-\sigma(z))}_{\,/\!/}$$

2. 다음과 같은 구조의 Perceptron과 ●(=1), ●(=0)을 평면좌표상에 나타낸 그림이 있습니다.



$$\varphi(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 1, & z \geq 0 \end{cases}$$



2-1. ●, ●을 분류하는 임의의 b, w를 선정하고 분류해보세요.

$$\begin{cases} b = 1 \\ w_\# = 1 \\ w_\$ = -1 \end{cases}$$

$S = w_\# x_\# + w_\$ x_\$ + b$

$y = \varphi(S)$

$x_\#$	$x_\$$	S	y	
0	0	1	1	
0	1	0	0	①
1	0	2	1	
1	1	1	1	②

2-2. Perceptron 학습 규칙에 따라 임의의 학습률을 정하고 b, w를 1회 업데이트 해주세요.

↳ $w_i \leftarrow w_i + \eta(y-o)x_i$

↳ $\eta = 0.1$

i) ① → $(x_\#, x_\$, S, y) = (0, 1, 0, 0)$

before $(w_\#, w_\$, b) = (1, -1, 1)$

$w_\# \leftarrow w_\# + 0.1\cdot(1-0)\cdot x_\# = 1$

$w_\$ \leftarrow w_\$ + 0.1\cdot(1-0)\cdot x_\$ = -0.9$

$b \leftarrow b + 0.1\cdot(1-0)\cdot b = 1.1$

$\Rightarrow (w_\#, w_\$, b) = (1, -0.9, 1.1)$

ii) ② → $(x_\#, x_\$, S, y) = (1, 1, 1, 1)$

before $(w_\#, w_\$, b) = (1, -1, 1)$

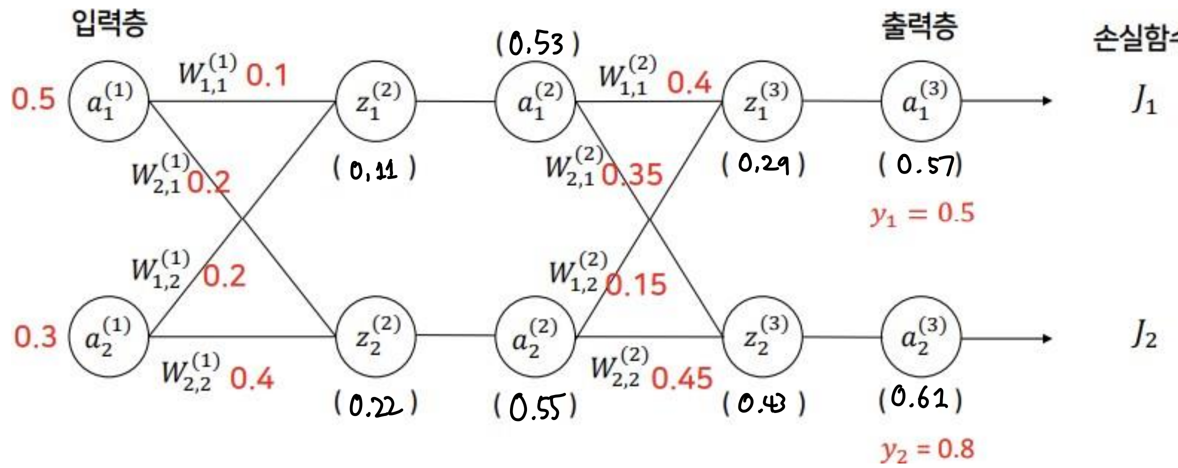
$w_\# \leftarrow w_\# + 0.1\cdot(0-1)\cdot x_\# = 0.9$

$w_\$ \leftarrow w_\$ + 0.1\cdot(0-1)\cdot x_\$ = -1.1$

$b \leftarrow b + 0.1\cdot(0-1)\cdot b = 0.9$

$\Rightarrow (w_\#, w_\$, b) = (0.9, -1.1, 0.9)$

3. **다음과 같이 입력과 가중치가 주어진 퍼셉트론이 있을 때, 아래의 물음에 답해주세요. 모든 문제는 풀이과정을 자세하게 적어주세요! (3-3까지 있습니다.)**



3-1. FeedForward가 일어날 때, 각 노드가 갖는 값을 빈칸에 써주세요. 단, 활성화함수는 sigmoid 함수입니다. (모든 계산의 결과는 소수점 셋째자리에서 반올림하여 둘째자리까지만 써주세요.)

$a = \varphi(z) = \text{Sigmoid}(z)$

$(w_{1,1}, w_{1,2}) = (0.1, 0.2)$, $(a_1, a_2) = (0.5, 0.3)$

$z_1^{(2)} = a_1 \cdot w_{1,1} + a_2 \cdot w_{1,2} = 0.05 + 0.06 = \underline{0.11}$

$\therefore a_1^{(2)} = \frac{1}{1+e^{-z}} \simeq \underline{0.53}$

$(w_{2,1}, w_{2,2}) = (0.2, 0.4)$, $(a_1, a_2) = (0.5, 03)$

$z_2^{(2)} = a_1 \cdot w_{2,1} + a_2 \cdot w_{2,2} = 0.1 + 0.12 = \underline{0.22}$

$\therefore a_2^{(2)} = \frac{1}{1+e^{-0.22}} \simeq \underline{0.55}$

$(w_{1,1}^{(2)}, w_{1,2}^{(2)}) = (0.4, 0.15)$, $(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}) = (0.53, 0.55)$

$z_1^{(3)} = a_1^{(2)} \cdot w_{1,1}^{(2)} + a_2 \cdot w_{1,2}^{(2)} = 0.21 + 0.08 = \underline{0.29}$

$\therefore a_1^{(3)} = \frac{1}{1+e^{-0.29}} \simeq \underline{0.57}$

$(w_{2,1}^{(2)}, w_{2,2}^{(2)}) = (0.35, 0.45)$, $(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}) = (0.53, 0.55)$

$z_2^{(3)} = a_1^{(2)} \cdot w_{2,1}^{(2)} + a_2^{(2)} \cdot w_{2,2}^{(2)} = 0.185 + 0.247 = \underline{0.43}$

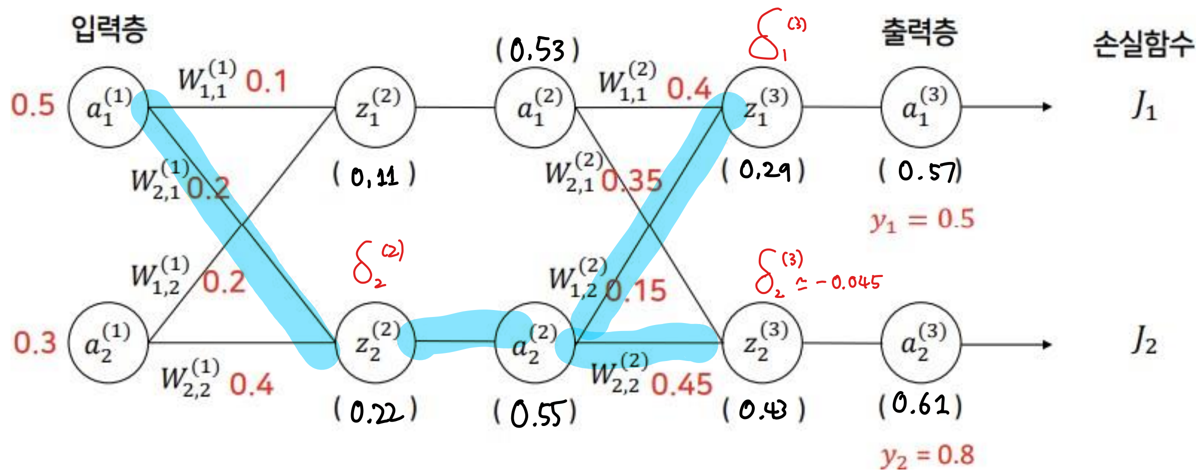
$\therefore a_2^{(3)} = \frac{1}{1+e^{-0.43}} \simeq \underline{0.61}$

3-2. 3-1에서 구한 값을 이용하여 손실함수 J_1과 J_2의 값을 구해주세요. (J_1과 J_2는 반올림하지 말고 써주세요.)

$J_2 = \frac{1}{2}(y_2 - \hat{y}_2)^2$, $(y_1, y_2) = (0.5, 0.8)$

$J_1 = \frac{1}{2}(a_1^{(3)} - y_1)^2 = \frac{1}{2}(0.07)^2 = \underline{0.00245}$

$J_2 = \frac{1}{2}(a_2^{(3)} - y_2)^2 = \frac{1}{2}(0.19)^2 = \underline{0.01805}$



3-3. 위에서 구한 값을 토대로, BackPropagation이 일어날 때 $W_{2,2}^{(2)}$과 $W_{2,1}^{(1)}$의 조정된 값을 구해주세요. 단, learning rate는 0.1입니다. (계산 과정에서 소수점 넷째자리에서 반올림하여 셋째자리까지만 써주시고, 마지막 결과인 $W_{2,1}^{(1)}$과 $W_{2,2}^{(2)}$의 값만 반올림하지 말고 써주세요.)

$$W_{2,2}^{(2)} \leftarrow w_{2,2}^{(2)} - \eta \cdot \frac{\partial J_{total}}{\partial w_{2,2}} \quad , \quad J_i = \frac{1}{2}(a_i - y_i)^2$$

①
$$\frac{\partial J_{total}}{\partial w_{2,2}^{(2)}} = \frac{\partial J_2}{\partial a_2^{(3)}} \times \frac{\partial a_2^{(3)}}{\partial z_2^{(3)}} \times \frac{\partial z_2^{(3)}}{\partial w_{2,2}^{(2)}} = (a_2^{(3)} - y_2) \times a_2^{(3)} \cdot (1 - a_2^{(3)}) \times a_2^{(2)}$$

$$\simeq (-0.19) \times 0.61 \cdot 0.39 \times 0.55 = -0.02486055$$

↳ $\delta_2^{(3)} \simeq -0.045$

$$\therefore w_{2,2}^{(2)} \leftarrow 0.45 - 0.1 \cdot (-0.025) = \boxed{0.4525}$$

$$w_{2,1}^{(1)} \leftarrow w_{2,1}^{(1)} - \eta \cdot \frac{\partial J_{total}}{\partial w_{2,1}^{(1)}} = w_{2,1}^{(1)} - \eta \left(\frac{\partial J_1}{\partial w_{2,1}^{(1)}} + \frac{\partial J_2}{\partial w_{2,1}^{(1)}} \right)$$

②
$$\frac{\partial J_1}{\partial w_{2,1}^{(1)}} = \frac{\partial J_1}{\partial a_1^{(3)}} \times \frac{\partial a_1^{(3)}}{\partial z_1^{(3)}} \times \frac{\partial z_1^{(3)}}{\partial a_2^{(2)}} \times \frac{\partial a_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}} \times \frac{\partial z_2^{(2)}}{\partial w_{2,1}^{(1)}}$$

$$= (a_1^{(3)} - y_1) \times a_1^{(3)} \cdot (1 - a_1^{(3)}) \times w_{2,1}^{(2)} \times a_2^{(2)} \cdot (1 - a_2^{(2)}) \times a_1^{(1)} \simeq 0.07 \times 0.57 \cdot 0.43 \times 0.35 \times 0.55 \cdot 0.45 \times 0.5$$

$$\simeq 0.0007$$

③
$$\frac{\partial J_2}{\partial w_{2,1}^{(1)}} = \frac{\partial J_2}{\partial z_2^{(3)}} \times \frac{\partial z_2^{(3)}}{\partial a_2^{(2)}} \times \frac{\partial a_2^{(2)}}{\partial z_2^{(2)}} \times \frac{\partial z_2^{(2)}}{\partial w_{2,1}^{(1)}}$$

$$= \delta_2^{(3)} \times w_{1,2}^{(2)} \times a_2^{(2)} \cdot (1 - a_2^{(2)}) \times a_1^{(1)} \simeq (-0.045) \times 0.35 \times 0.55 \cdot 0.45 \times 0.5 \simeq -0.0019$$

$$\therefore w_{2,1}^{(1)} \leftarrow 0.2 - 0.1 \cdot (0.0007 - 0.0019) = \boxed{0.20012}$$