ALOHA
#7주차

Segment/Fenwick Tree

#CH.0

Range Sum Problem

풀어볼까유

#11659

구간 합 구하기4

구간 합 구하는 문제

구간 합 구하기 4

DP에 처음부터 지금까지의 누적합을 저장한다.

Arr	1	3	5	4	2	6	7	1
DP	1	4	9	13	15	21	28	29

Prefix Sum

‘구간 합 구하기4’의 해답이 Prefix Sum

전처리 시간복잡도: O(n), 쿼리당 시간복잡도: O(1)

배열의 값이 바뀌지 않는다면 가장 빠르다.

값이 바뀐다면..?

값이 바뀐다면?

Arr	1	3	5	4	2	6	7	1
DP	1	4	9	13	15	21	28	29

값이 바뀐다면?

바뀐 index 이후의 모든 DP 값이 업데이트되어야 한다!

Arr	1	5	5	4	2	6	7	1
DP	1	6	11	15	17	23	30	31

#CH.1

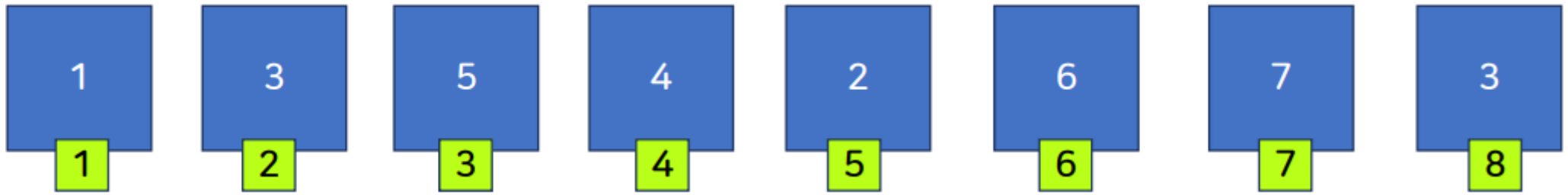
Segment Tree

Segment Tree

앞에서 이용한 방법 말고 구간합을 구하는 방법이 없을까?

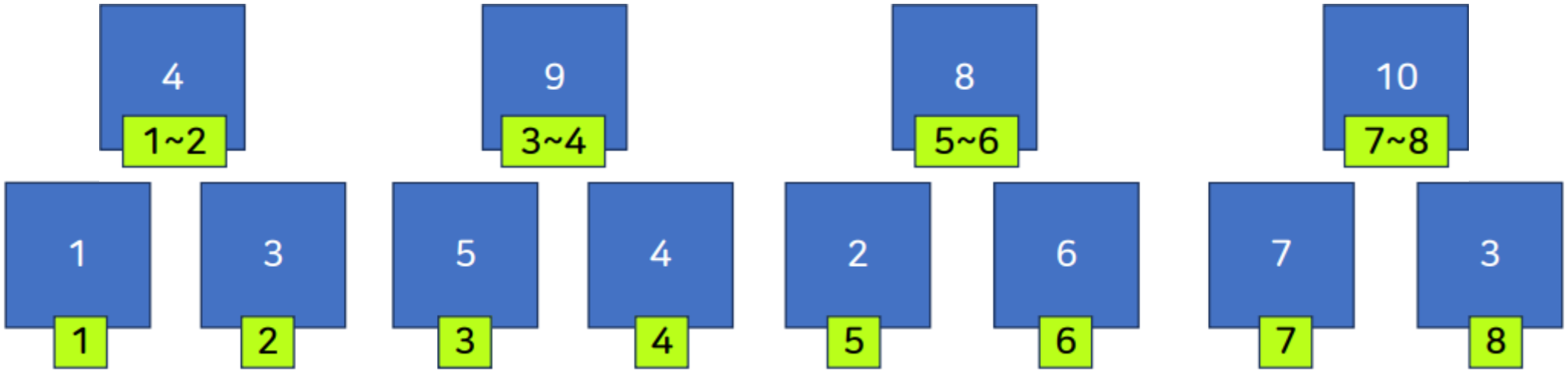
Arr	1	3	5	4	2	6	7	1

Segment Tree



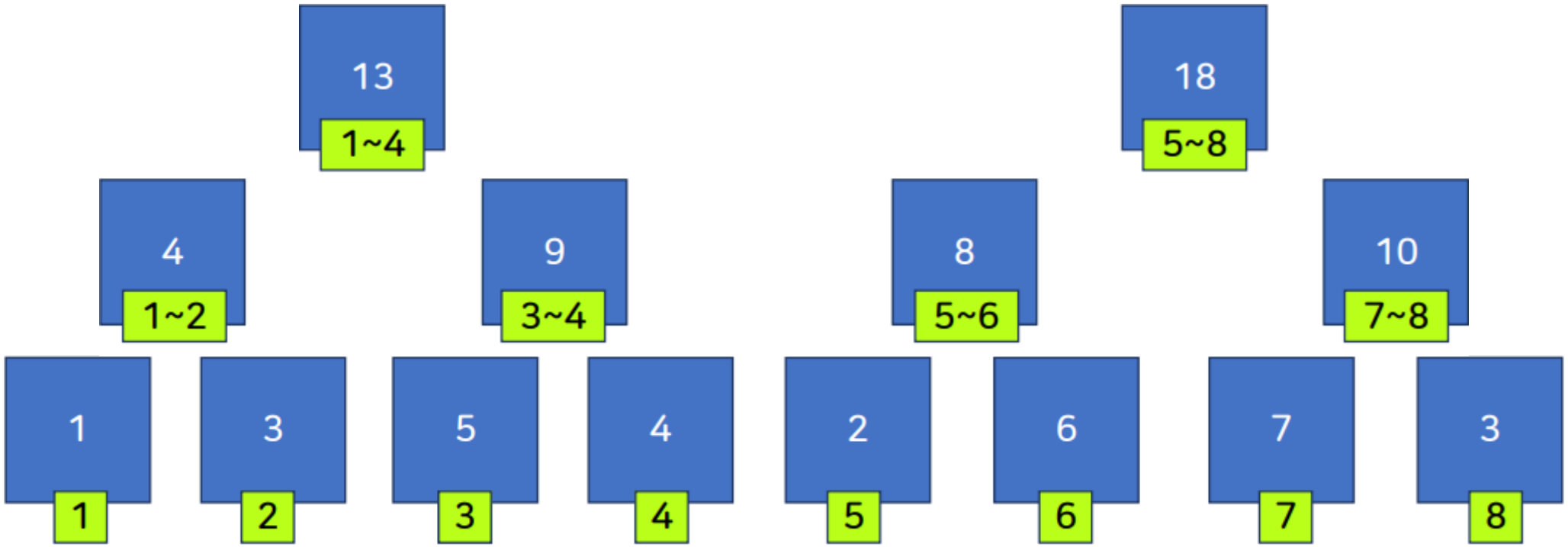
Segment Tree

2개씩 묶어서 더한다!



Segment Tree

2개씩 묶어서 더한다!

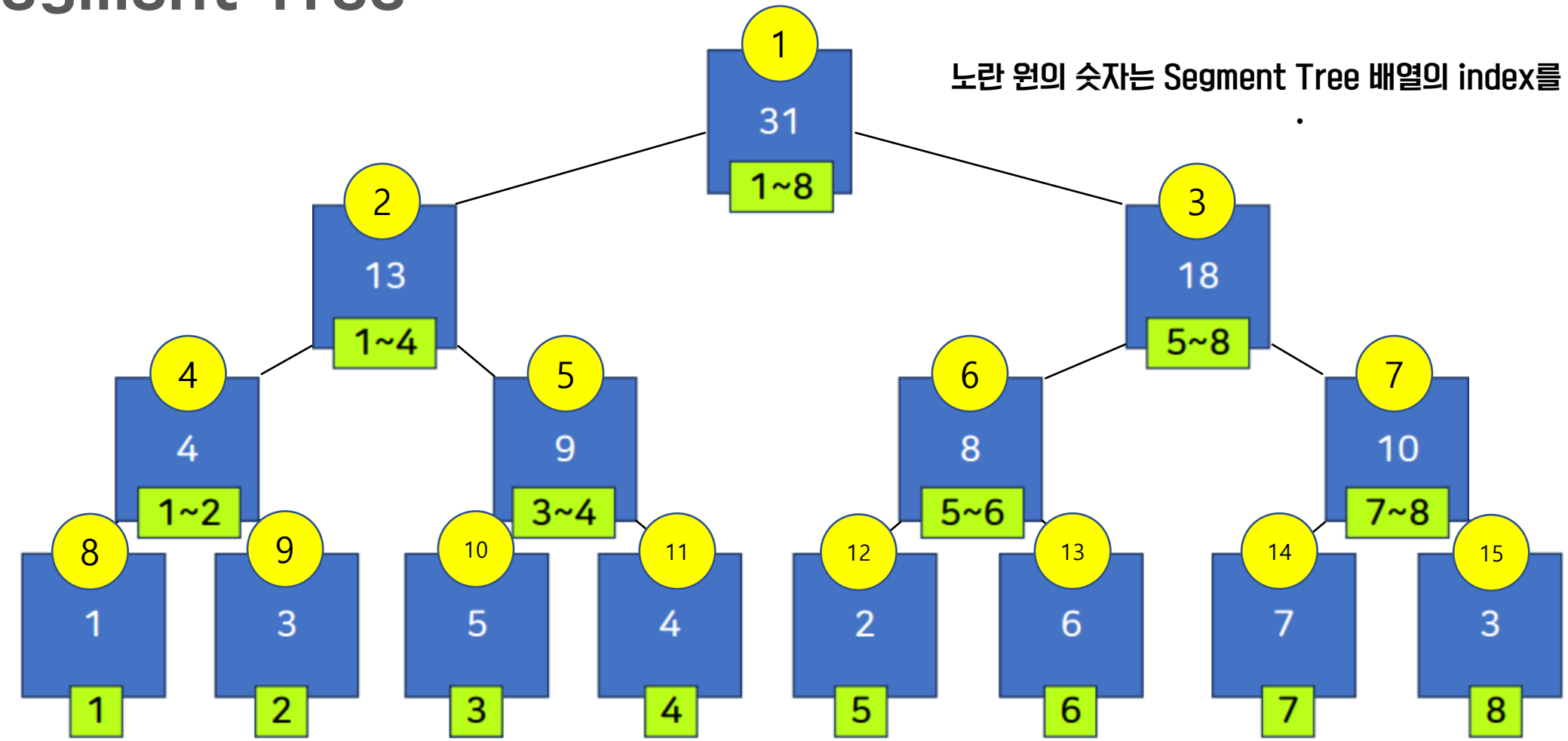


Segment Tree

Segment Tree

Segment Tree

노란 원의 숫자는 Segment Tree 배열의 index를 뜻한다



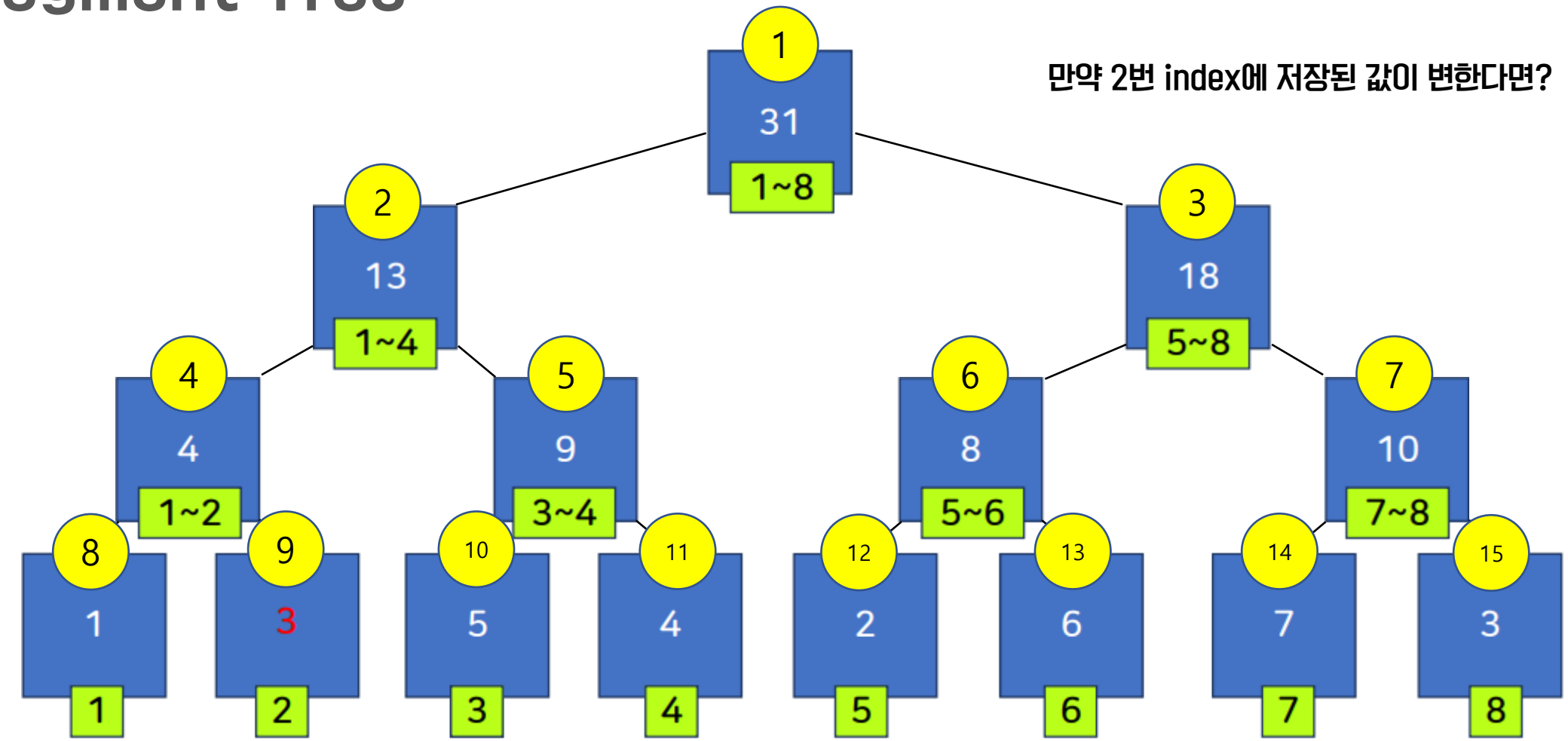
Segment Tree

이런 모양의 배열이 된다

index	1	2	3	4	5	6	7
tree	31	13	18	4	9	8	10

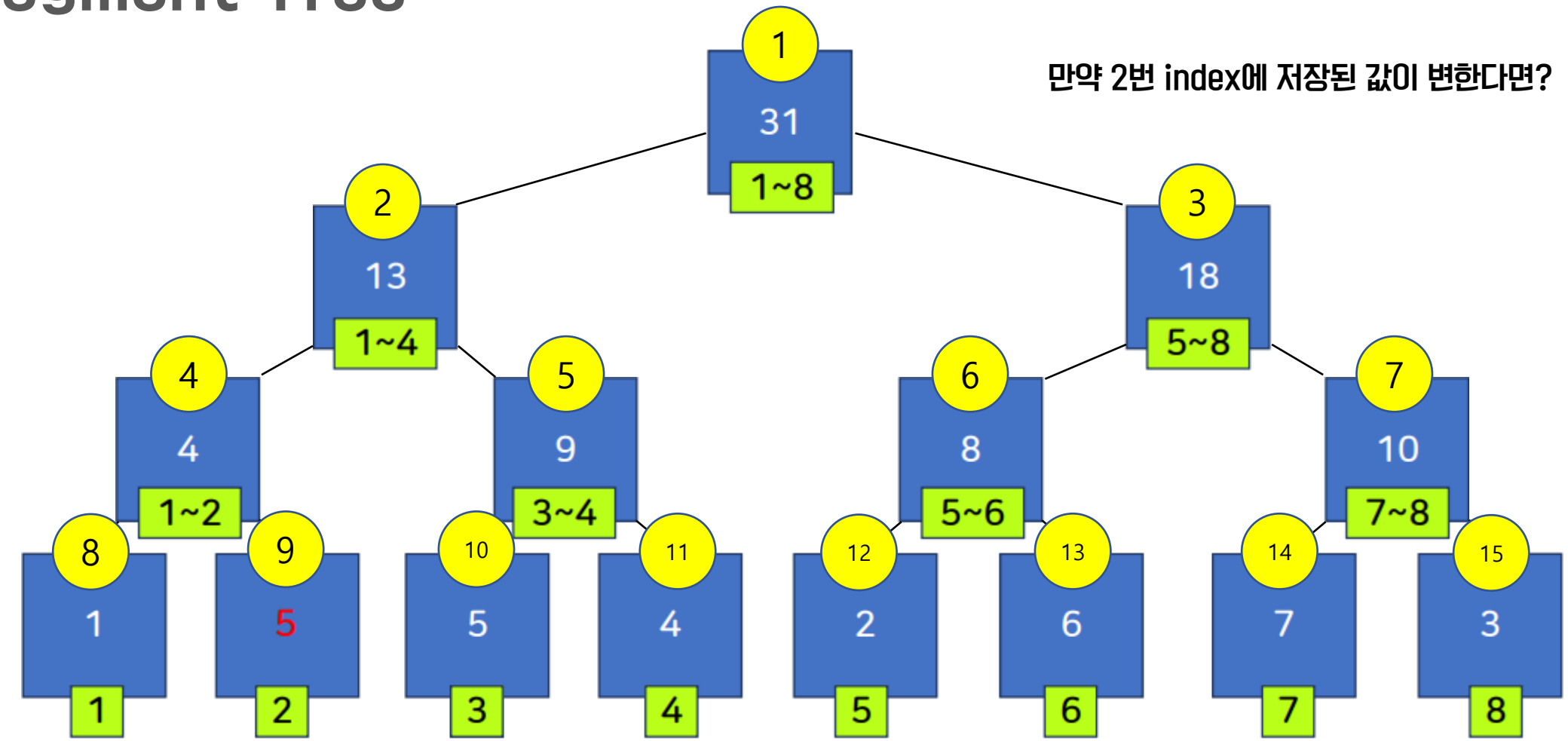
8	9	10	11	12	13	14	15
1	3	5	4	2	6	7	3

Segment Tree



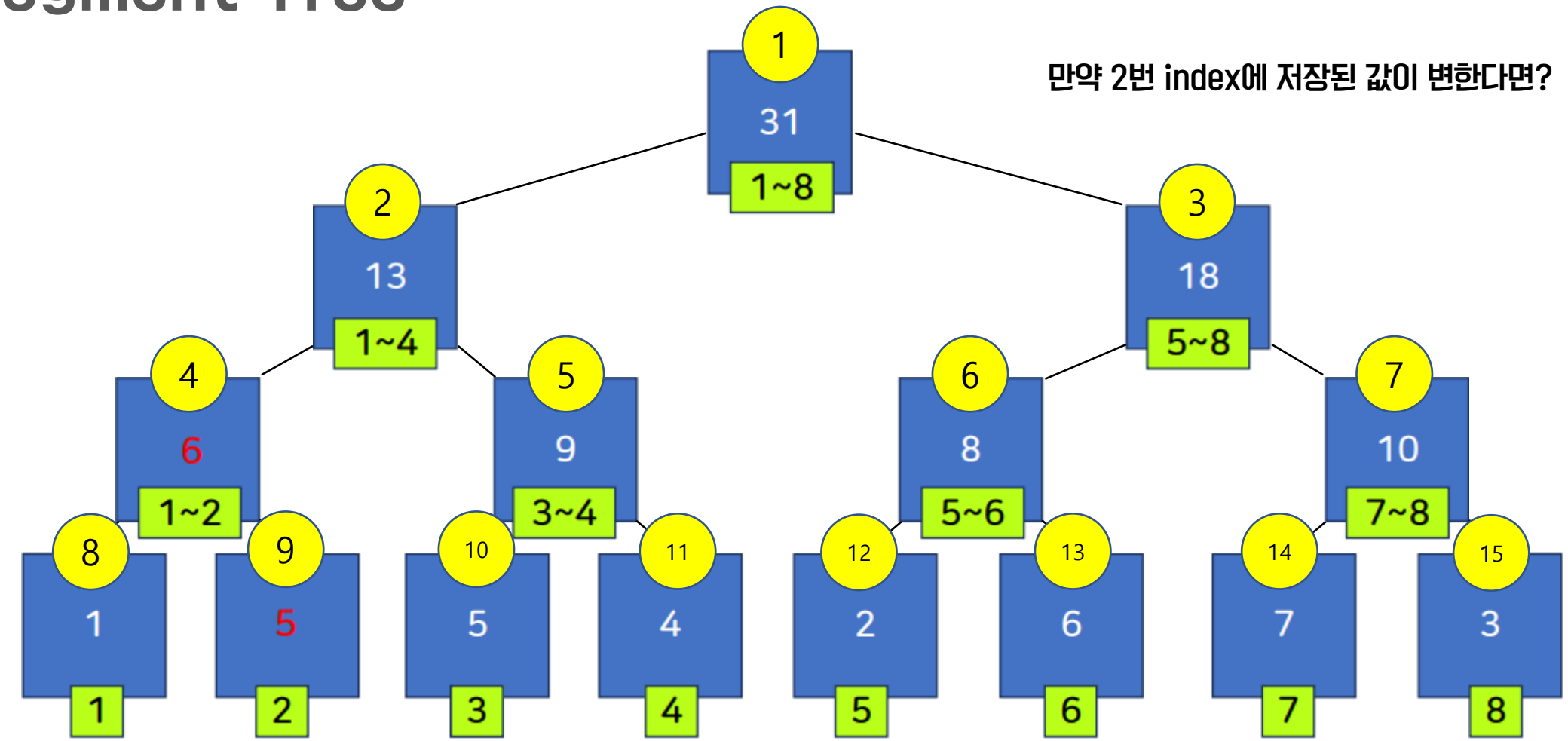
만약 2번 index에 저장된 값이 변한다면?

Segment Tree



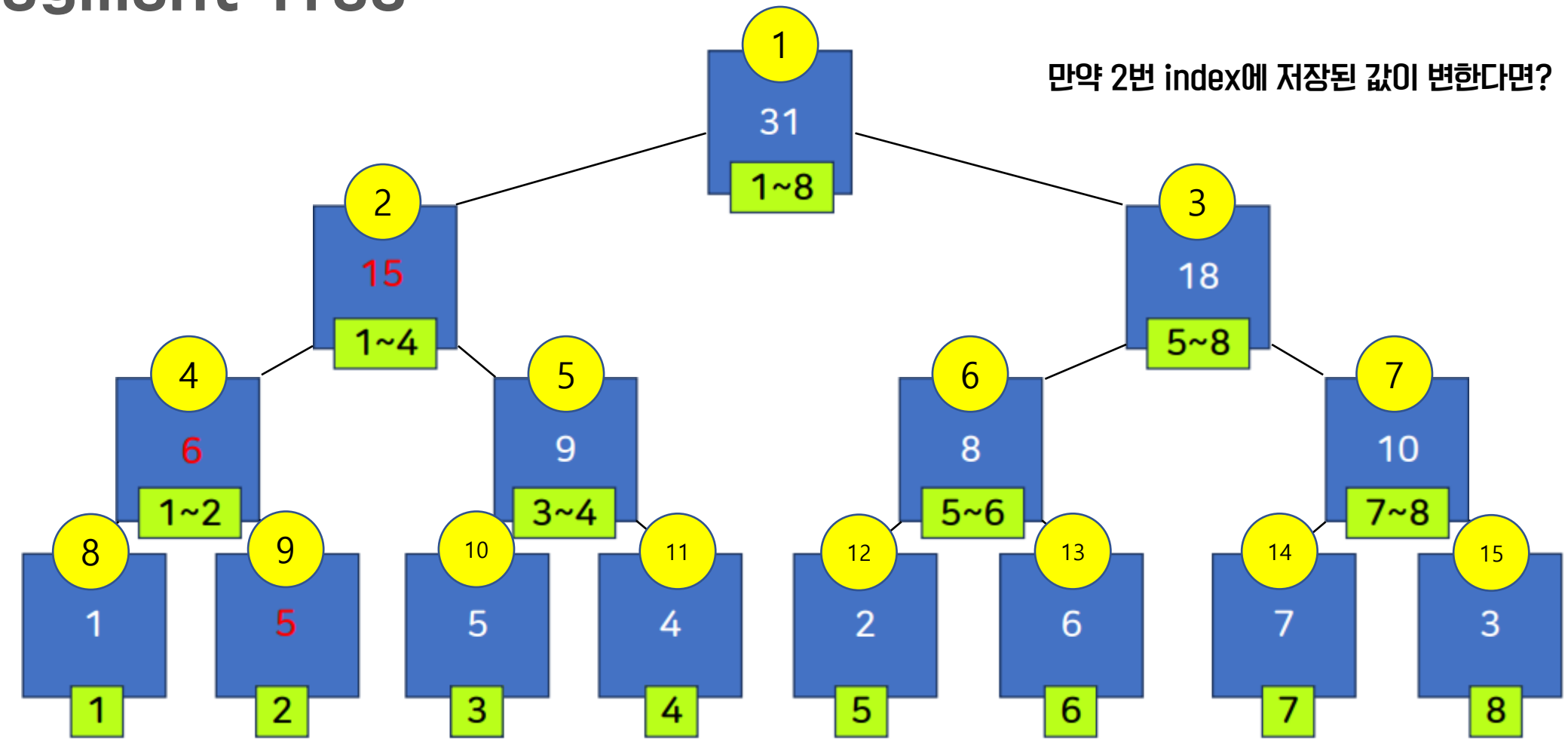
만약 2번 index에 저장된 값이 변한다면?

Segment Tree



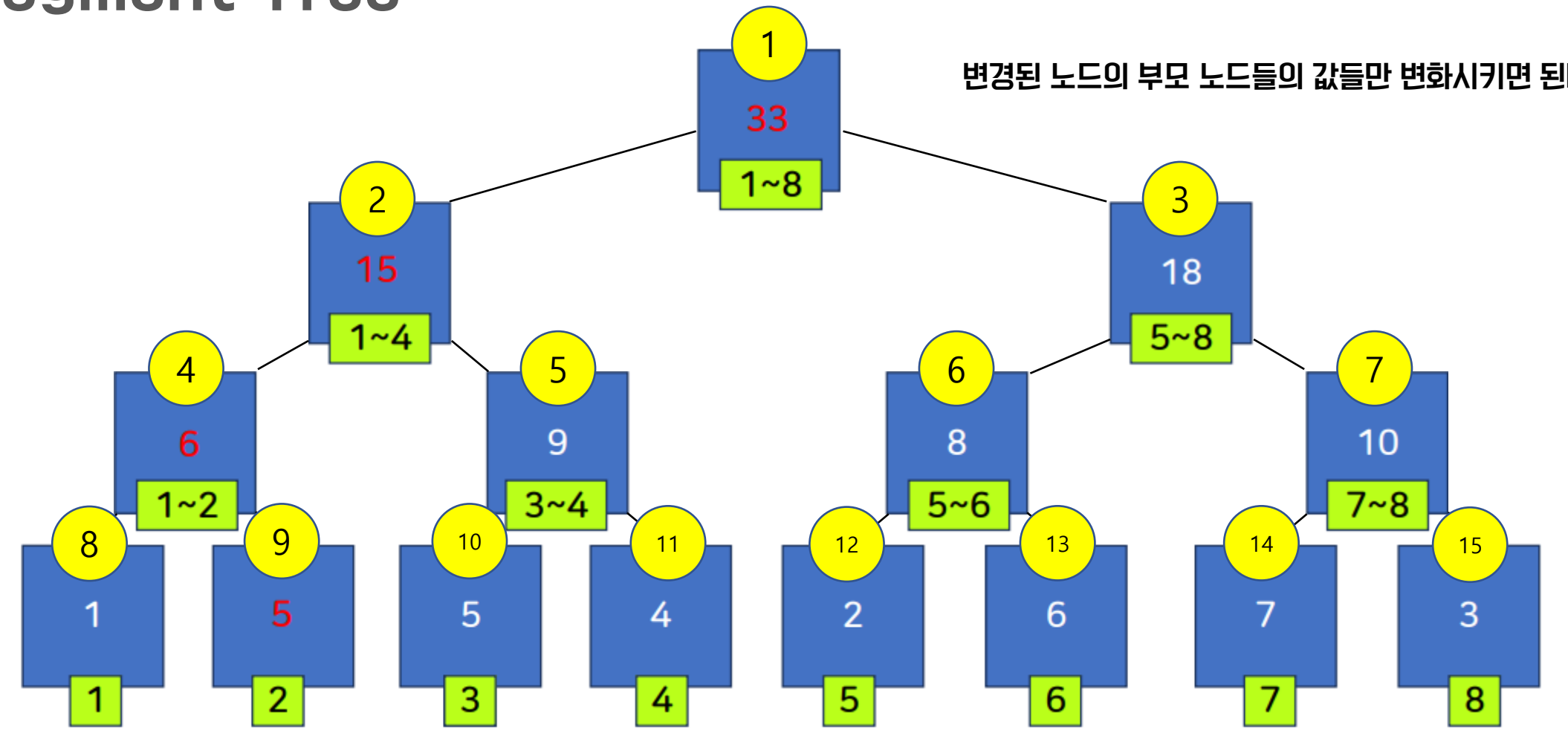
만약 2번 index에 저장된 값이 변한다면?

Segment Tree



만약 2번 index에 저장된 값이 변한다면?

Segment Tree



변경된 노드의 부모 노드들의 값들만 변화시키면 된다!

Segment Tree

class를 이용해서 구현해보자!

먼저 segment tree 배열인 vector<long long> tree를 선언해주고,
배열의 크기인 size를 선언해준다.

```
class segtree {
public:
    vector<ll> tree;
    int size;
```

Segment Tree

생성자를 만들어준다. 여기서 매개변수인 n은 배열의 크기이다.

위의 예제에서는 n=8이 된다.

```
segtree(int n)
{
    for (size = 1;size < n;size *= 2);
    tree.resize(2 * size);
}
```

Segment Tree

for문은 n 이상의 가장 작은 2의 거듭제곱수를 구하는 과정이다.

예제에서 보았듯이 segment tree는 full binary tree이므로,
그만큼의 크기가 필요한데, 그것을 size에 저장해준다.

```
segtree(int n)
{
    for (size = 1;size < n;size *= 2);
    tree.resize(2 * size);
}
```

예를 들어, n이 6이었다면 size는 8이 될 것이고, 7번, 8번 index에 들어가는 값을 0으로 한다.

Segment Tree

그 후 tree의 크기를 넉넉하게 2*size로 해주면
틀은 다 잡히게 된다.

위의 예제에서는 size가 8이고, 16칸 짜리 segment tree
배열이 만들어지므로 충분하다.

왜 2*size인지는 생각해보자!

```
segtree(int n)
{
    for (size = 1;size < n;size *= 2);
    tree.resize(2 * size);
}
```

Segment Tree

update 함수를 만들어 보았다.

위 예제에서 볼 때에는 원래 3이 들어있던 2번째 index의 값을 5로 바꾸어 주는 것이었으므로,
pos는 2가 되고, x는 5가 된다.

```
void update(int pos, ll x)
{
    //원래 index의 tree배열 상의 위치를 pos에 저장한다.
    int index = size + pos - 1;
    //원래 index의 값과 새로 업데이트할 값의 차이를 x에 저장한다.
    int u = x - tree[index];
    //pos의 위치에 있는 값을 포함하는 모든 구간합의 정보를 업데이트한다
    while (index)
    {
        tree[index] += u;
        index /= 2;
    }
}
```

Segment Tree

tree 배열 상에서의 위치를 index에 저장한다.

예제에서는 pos가 2였으므로,
index = 8 + 2 - 1 = 9가 되어
3이 담겨 있는 index를 저장하게 한다.

```
void update(int pos, ll x)
{
    //원래 index의 tree배열 상의 위치를 pos에 저장한다.
    int index = size + pos - 1;
    //원래 index의 값과 새로 업데이트할 값의 차이를 x에 저장한다.
    int u = x - tree[index];
    //pos의 위치에 있는 값을 포함하는 모든 구간합의 정보를 업데이트한다
    while (index)
    {
        tree[index] += u;
        index /= 2;
    }
}
```

Segment Tree

u에 변화되는 값을 저장한다.

예제에서는 3에서 5로 값이 바뀌었으므로,
+2만큼 값이 변화한다.

따라서 u = x - tree[9] = 5 - 3 = 2가 된다.

```
void update(int pos, ll x)
{
    //원래 index의 tree배열 상의 위치를 pos에 저장한다.
    int index = size + pos - 1;
    //원래 index의 값과 새로 업데이트할 값의 차이를 x에 저장한다.
    int u = x - tree[index];
    //pos의 위치에 있는 값을 포함하는 모든 구간합의 정보를 업데이트한다
    while (index)
    {
        tree[index] += u;
        index /= 2;
    }
}
```

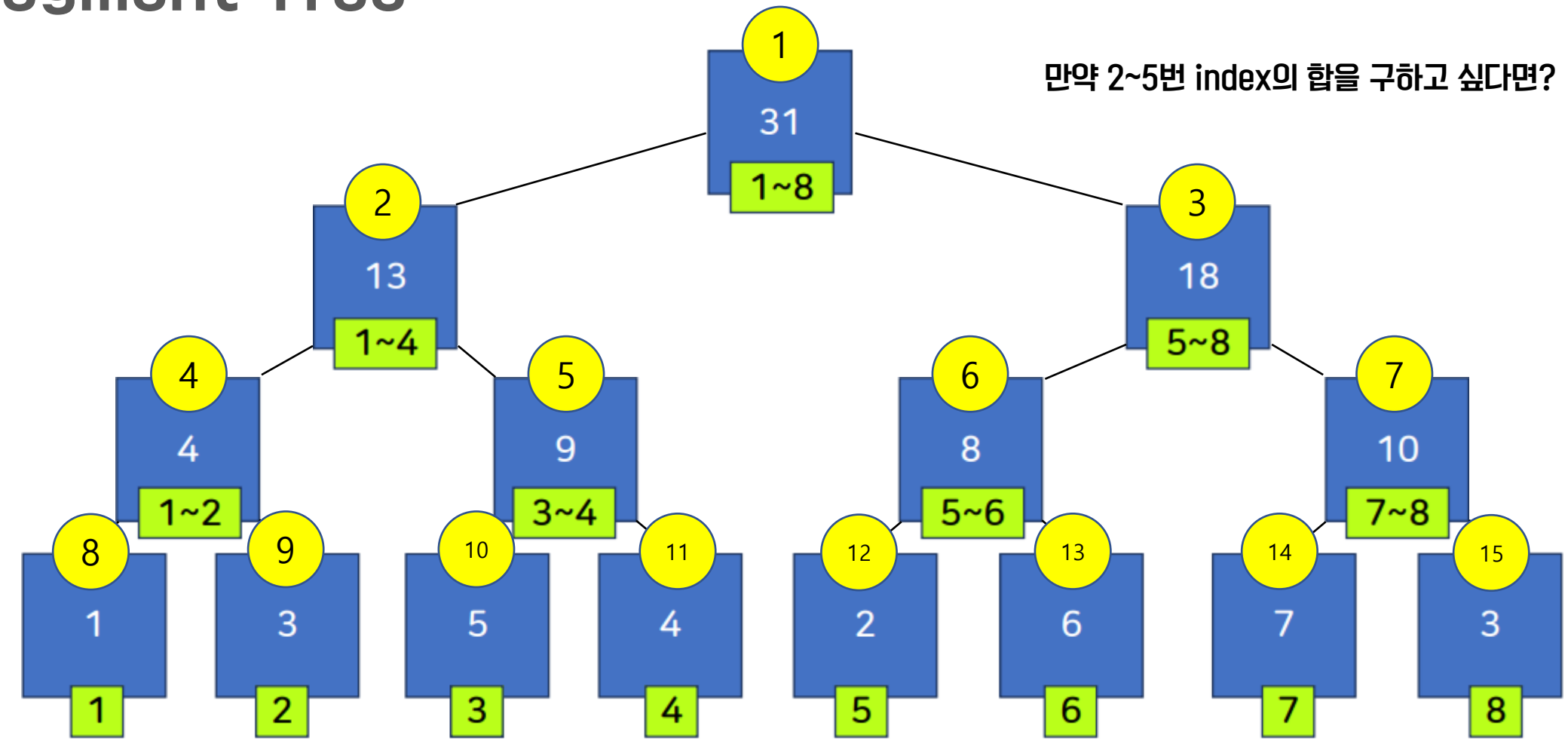
Segment Tree

while문을 돌면서 2번째 index와
그 구간합을 저장한 tree의 원소 값을
모두 update 시킨다.

즉, 9 -> 4 -> 2 -> 1 번째 값에 모두 2를 더해준다.

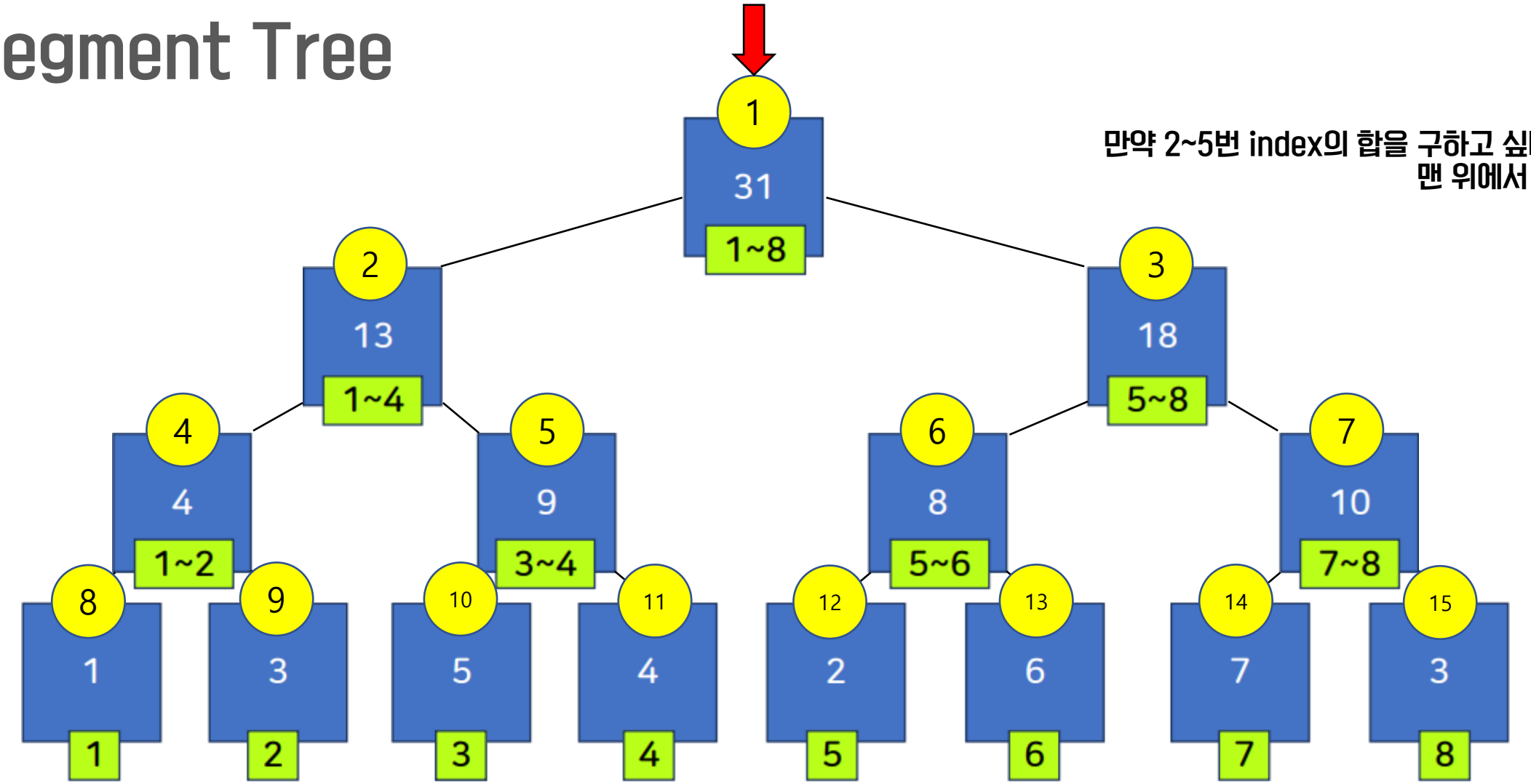
```
void update(int pos, ll x)
{
    //원래 index의 tree배열 상의 위치를 pos에 저장한다.
    int index = size + pos - 1;
    //원래 index의 값과 새로 업데이트할 값의 차이를 x에 저장한다.
    int u = x - tree[index];
    //pos의 위치에 있는 값을 포함하는 모든 구간합의 정보를 업데이트한다
    while (index)
    {
        tree[index] += u;
        index /= 2;
    }
}
```

Segment Tree



만약 2~5번 index의 합을 구하고 싶다면?

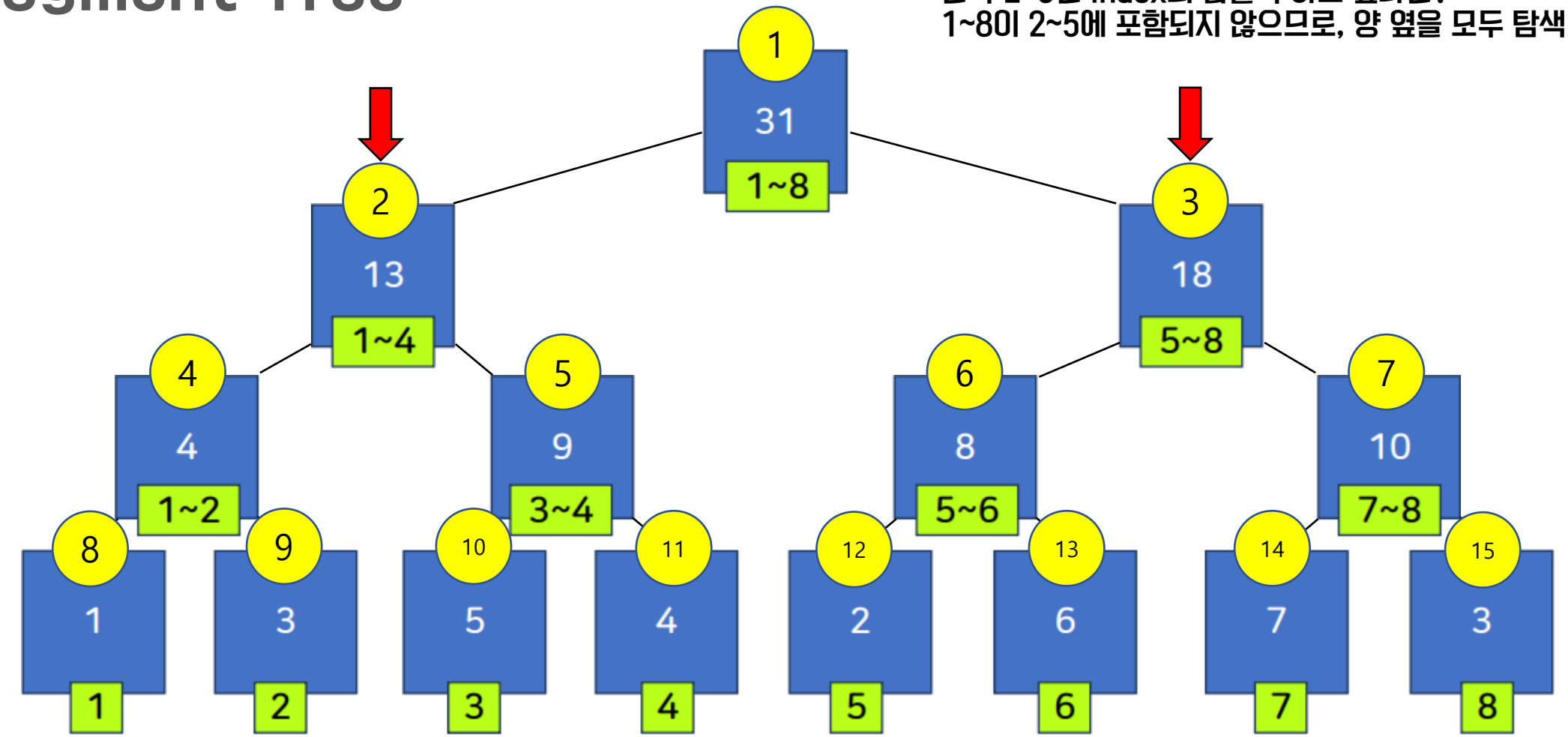
Segment Tree



만약 2~5번 index의 합을 구하고 싶다면?
맨 위에서 시작!

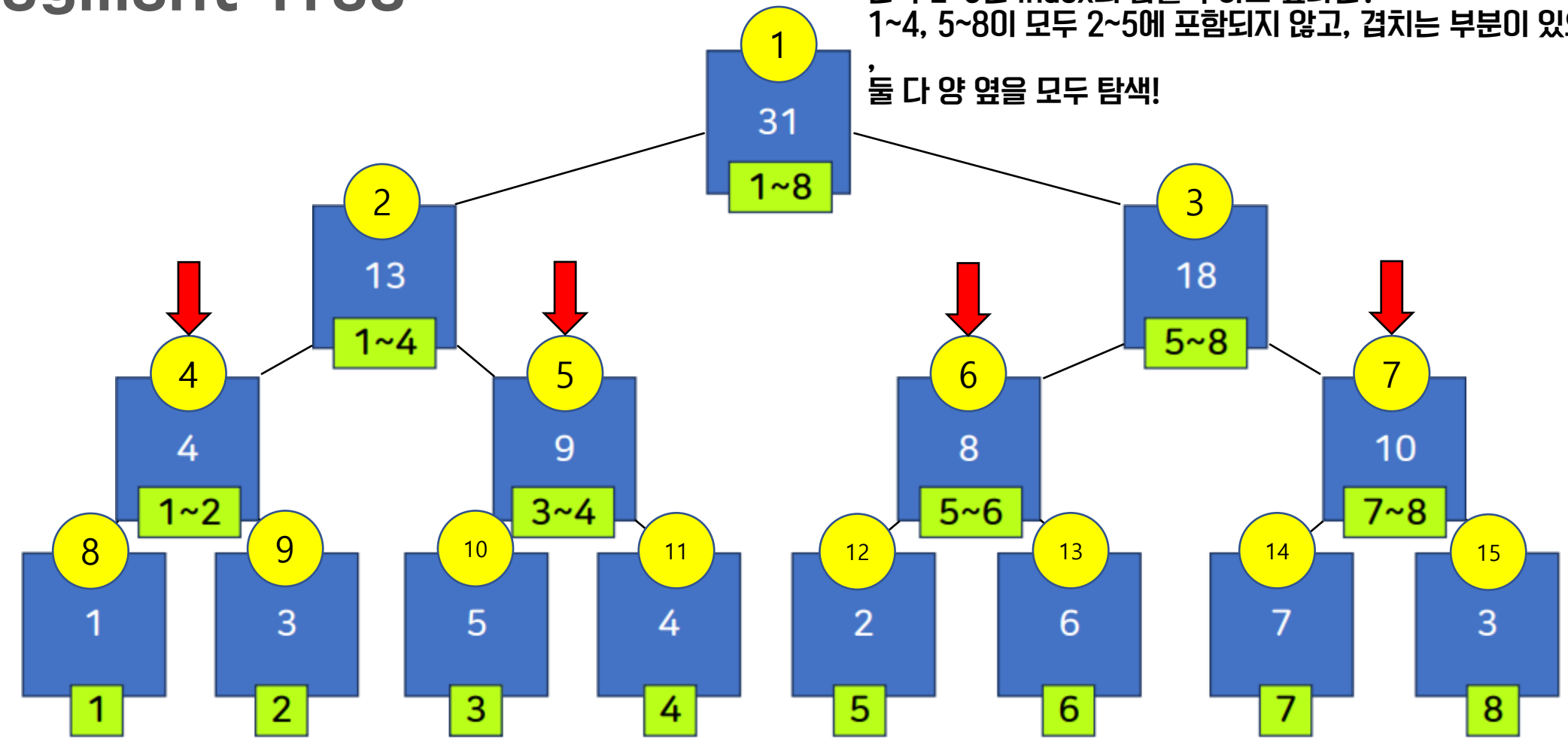
Segment Tree

만약 2~5번 index의 합을 구하고 싶다면?
1~8이 2~5에 포함되지 않으므로, 양 옆을 모두 탐색!



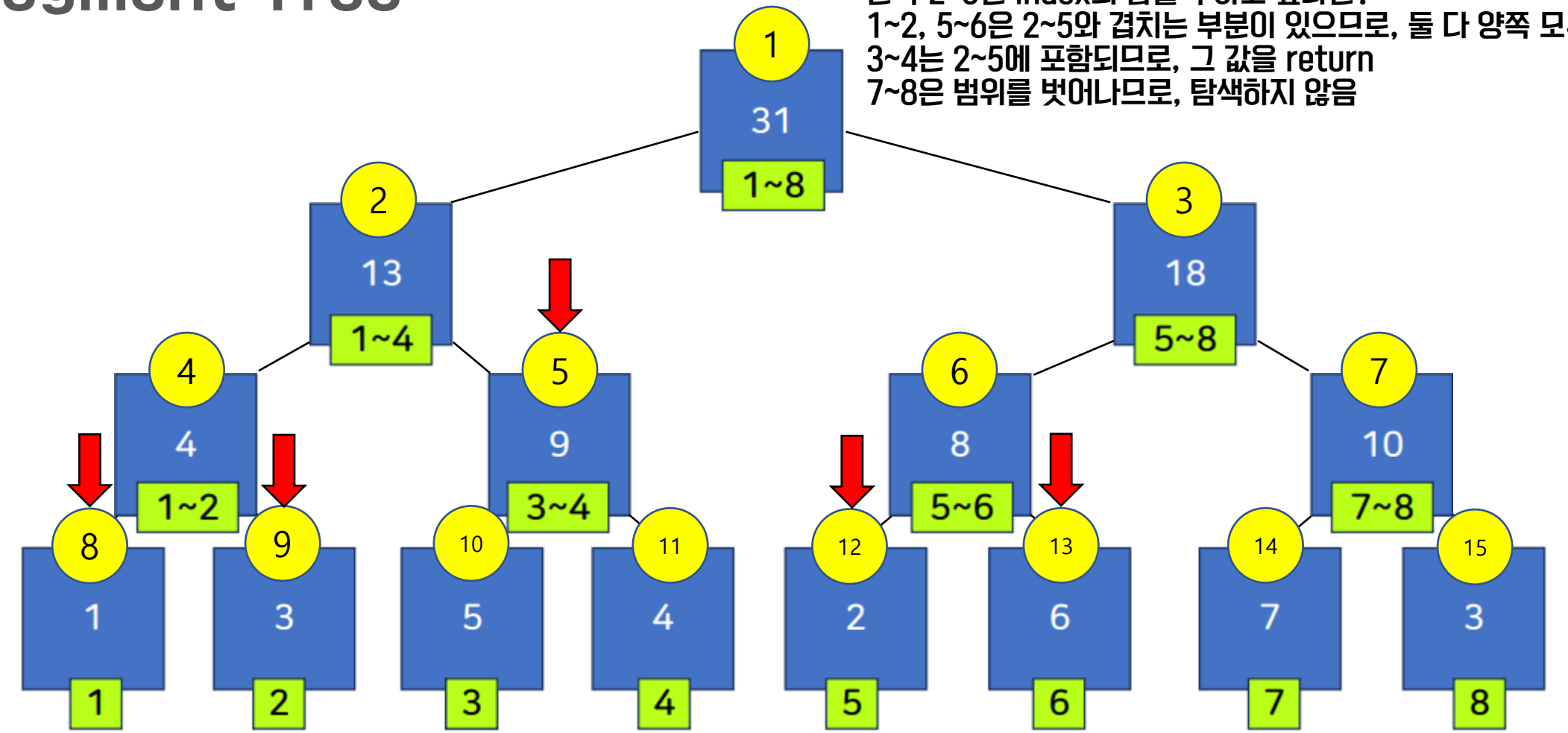
Segment Tree

만약 2~5번 index의 합을 구하고 싶다면?
1~4, 5~8이 모두 2~5에 포함되지 않고, 겹치는 부분이 있으므로
,
둘 다 양 옆을 모두 탐색!



Segment Tree

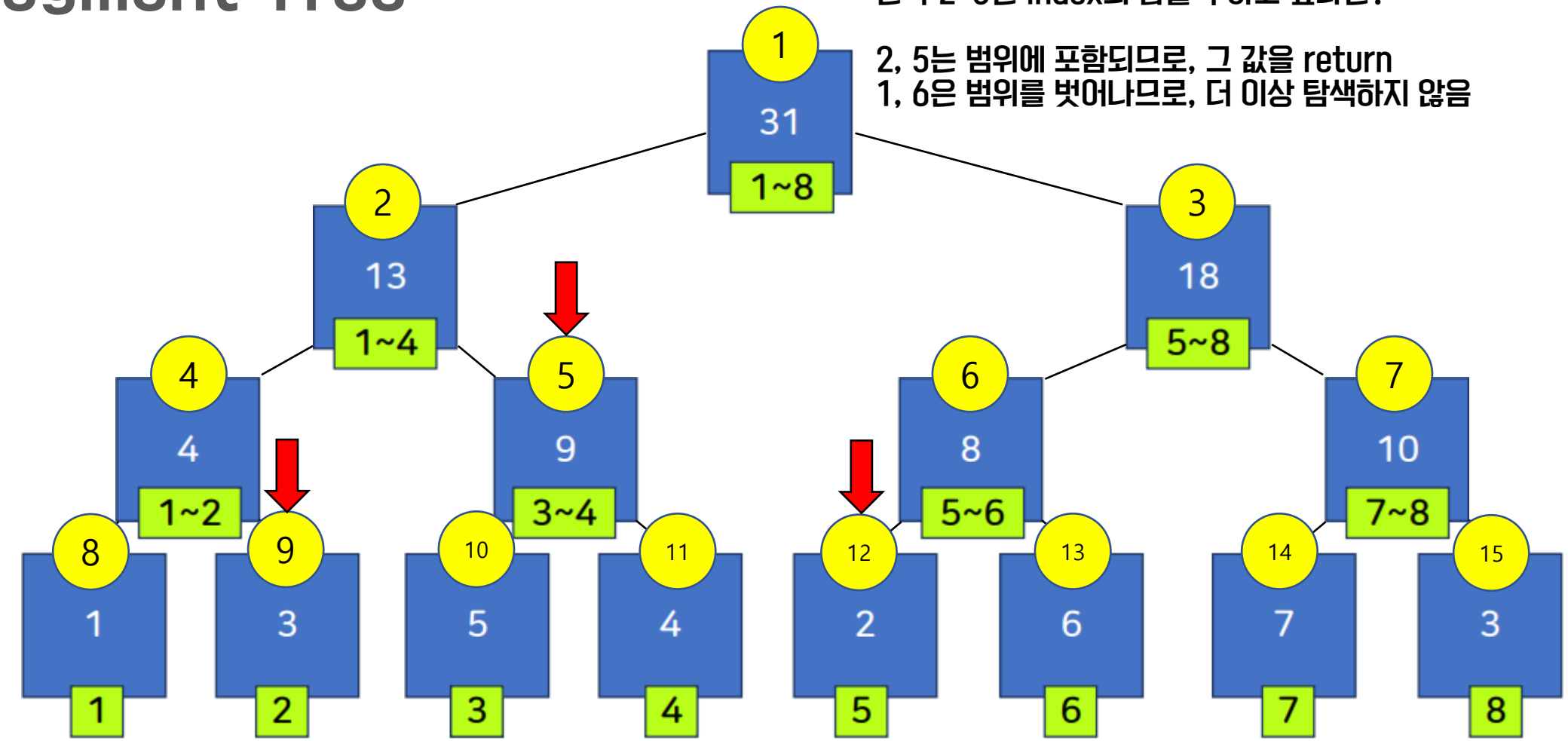
만약 2~5번 index의 합을 구하고 싶다면?
1~2, 5~6은 2~5와 겹치는 부분이 있으므로, 둘 다 양쪽 모두 탐색
3~4는 2~5에 포함되므로, 그 값을 return
7~8은 범위를 벗어나므로, 탐색하지 않음



Segment Tree

만약 2~5번 index의 합을 구하고 싶다면?

2, 5는 범위에 포함되므로, 그 값을 return
1, 6은 범위를 벗어나므로, 더 이상 탐색하지 않음



Segment Tree

```
ll getsum(int pos, int left, int right, int start, int end)
{
    //left, right가 내가 찾고자 하는 범위, pos가 내가 탐색중인 tree의 index, start, end가 이 index에서의 범위
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자하는 left~right 범위를 벗어난다면, 0을 return해준다.
    if (right < start || left > end)
        return 0;
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위 내에 포함되어있으면, 이 값을 return해준다.
    if (start >= left && end <= right)
        return tree[pos];
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위와 겹치지만 포함되지는 않으면,
    //자식 index를 둘 다 탐색한 후 return값을 더해준다
    int mid = (start + end) / 2;
    return getsum(pos * 2, left, right, start, mid) + getsum(pos * 2 + 1, left, right, mid + 1, end);
}
```

left, right는 내가 찾고자 하는 범위, pos는 내가 탐색중인 tree의 index,
start, end는 이 index에서의 범위를 나타낸다.

기본적으로 top-down으로 탐색하므로, pos는 1, start와 end는 시작과 끝 index로 시작한다.

즉, 예시로 본다면 pos=1, start=1, end=8, left=2, right=5가 된다.

Segment Tree

```
ll getsum(int pos, int left, int right, int start, int end)
{
    //left, right가 내가 찾고자 하는 범위, pos가 내가 탐색중인 tree의 index, start, end가 이 index에서의 범위
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자하는 left~right 범위를 벗어난다면, 0을 return해준다.
    if (right < start || left > end)
        return 0;
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위 내에 포함되어있으면, 이 값을 return해준다.
    if (start >= left && end <= right)
        return tree[pos];
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위와 겹치지만 포함되지는 않으면,
    //자식 index를 둘 다 탐색한 후 return값을 더해준다
    int mid = (start + end) / 2;
    return getsum(pos * 2, left, right, start, mid) + getsum(pos * 2 + 1, left, right, mid + 1, end);
}
```

탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위를 벗어난다면,
0을 return하고 탐색을 종료한다.

예를 들면, 2~5 구간합을 구하는데, 7~8을 탐색중이라면, 0을 return하고 탐색을 종료한다.

Segment Tree

```
ll getsum(int pos, int left, int right, int start, int end)
{
    //left, right가 내가 찾고자 하는 범위, pos가 내가 탐색중인 tree의 index, start, end가 이 index에서의 범위
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자하는 left~right 범위를 벗어난다면, 0을 return해준다.
    if (right < start || left > end)
        return 0;
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위 내에 포함되어있으면, 이 값을 return해준다.
    if (start >= left && end <= right)
        return tree[pos];
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위와 겹치지만 포함되지는 않으면,
    //자식 index를 둘 다 탐색한 후 return값을 더해준다
    int mid = (start + end) / 2;
    return getsum(pos * 2, left, right, start, mid) + getsum(pos * 2 + 1, left, right, mid + 1, end);
}
```

탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위에 **포함된다면**,
이 tree의 index에 저장된 값을 return한다.

예를 들어 2~5의 구간합을 구할 때 3~4구간을 탐색중이라면, **이 값을 return**해준 뒤 탐색을 종료한다.

Segment Tree

```
ll getsum(int pos, int left, int right, int start, int end)
{
    //left, right가 내가 찾고자 하는 범위, pos가 내가 탐색중인 tree의 index, start, end가 이 index에서의 범위
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자하는 left~right 범위를 벗어난다면, 0을 return해준다.
    if (right < start || left > end)
        return 0;
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위 내에 포함되어있으면, 이 값을 return해준다.
    if (start >= left && end <= right)
        return tree[pos];
    //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위와 겹치지만 포함되지는 않으면,
    //자식 index를 둘 다 탐색한 후 return값을 더해준다
    int mid = (start + end) / 2;
    return getsum(pos * 2, left, right, start, mid) + getsum(pos * 2 + 1, left, right, mid + 1, end);
}
```

탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위에 겹치지만 포함되진 않으면,
자식 index를 둘 다 탐색한 후 더해준 값을 retur해준다.

예를 들어, 2~5 구간합을 구하는데 1~4 구간을 탐색한다면 1~2, 3~4를 모두 탐색한 후 더해서 return한다.

Segment Tree

전체 코드

```
class segtree {
public:
    vector<ll> tree;
    int size;
    segtree(int n)
    {
        for (size = 1;size < n;size *= 2);
        tree.resize(2 * size);
    }
    void update(int pos, ll x)
    {
        //원래 index의 tree배열 상의 위치를 pos에 저장한다.
        int index = size + pos - 1;
        //원래 index의 값과 새로 업데이트할 값의 차이를 x에 저장한다.
        int u = x - tree[index];
        //pos의 위치에 있는 값을 포함하는 모든 구간합의 정보를 업데이트한다
        while (index)
        {
            tree[index] += u;
            index /= 2;
        }
    }
```

Segment Tree

전체 코드

```
    ll getsum(int pos, int left, int right, int start, int end)
    {
        //left, right가 내가 찾고자 하는 범위, pos가 내가 탐색중인 tree의 index, start, end가 이 index에서의 범위
        //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자하는 left~right 범위를 벗어난다면, 0을 return해준다.
        if (right < start || left > end)
            return 0;
        //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위 내에 포함되어있으면, 이 값을 return해준다.
        if (start >= left && end <= right)
            return tree[pos];
        //만약 지금 탐색중인 위치가 내가 탐색하고자 하는 left~right 범위와 겹치지만 포함되지는 않으면,
        //자식 index를 둘 다 탐색한 후 return값을 더해준다
        int mid = (start + end) / 2;
        return getsum(pos * 2, left, right, start, mid) + getsum(pos * 2 + 1, left, right, mid + 1, end);
    }
};
```

풀어볼까유

#2042

구간 합 구하기

seg-tree 기초

풀어볼까유

#1275 커피숍2

seg-tree 기초

풀어볼까유

#2357

최솟값과 최댓값

더하는 게 아니다!

풀어볼까유

#11505

구간 곱 구하기

더하는 게 아니다!

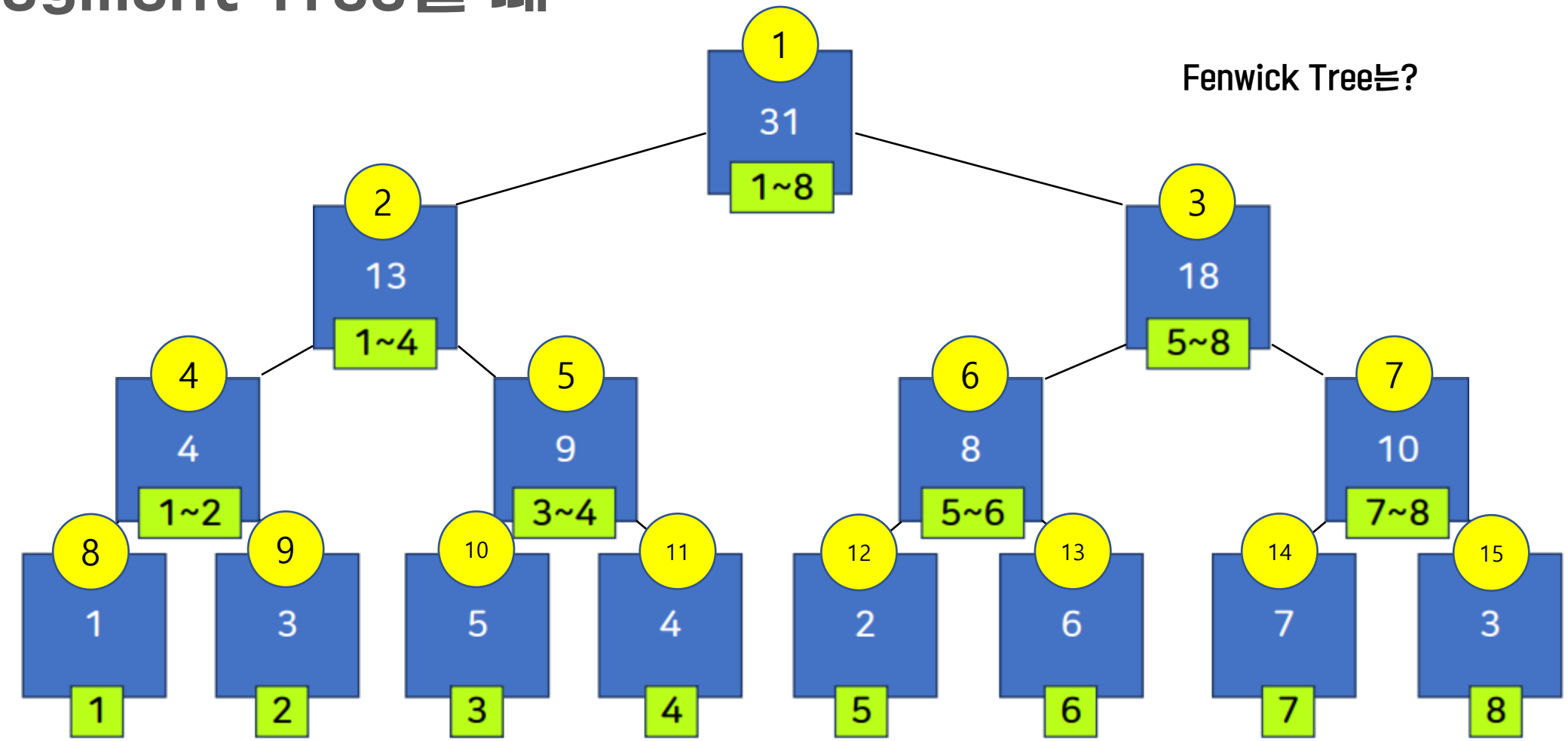
#CH.2

Fenwick Tree

Fenwick Tree

Segment tree와 비슷한데, 배열의 크기가 Segment tree의 절반이라 메모리를 아낄 수 있다!

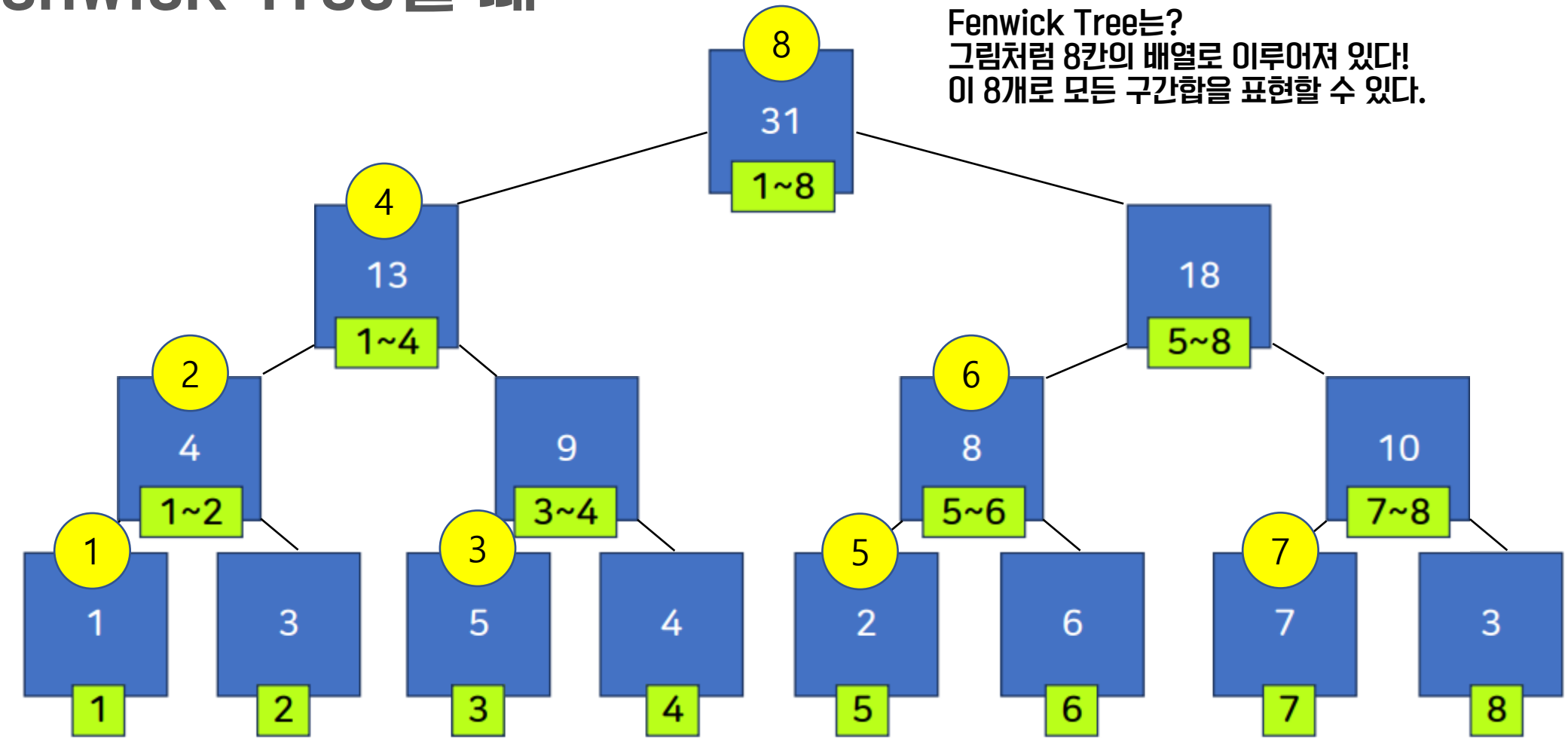
Segment Tree일 때



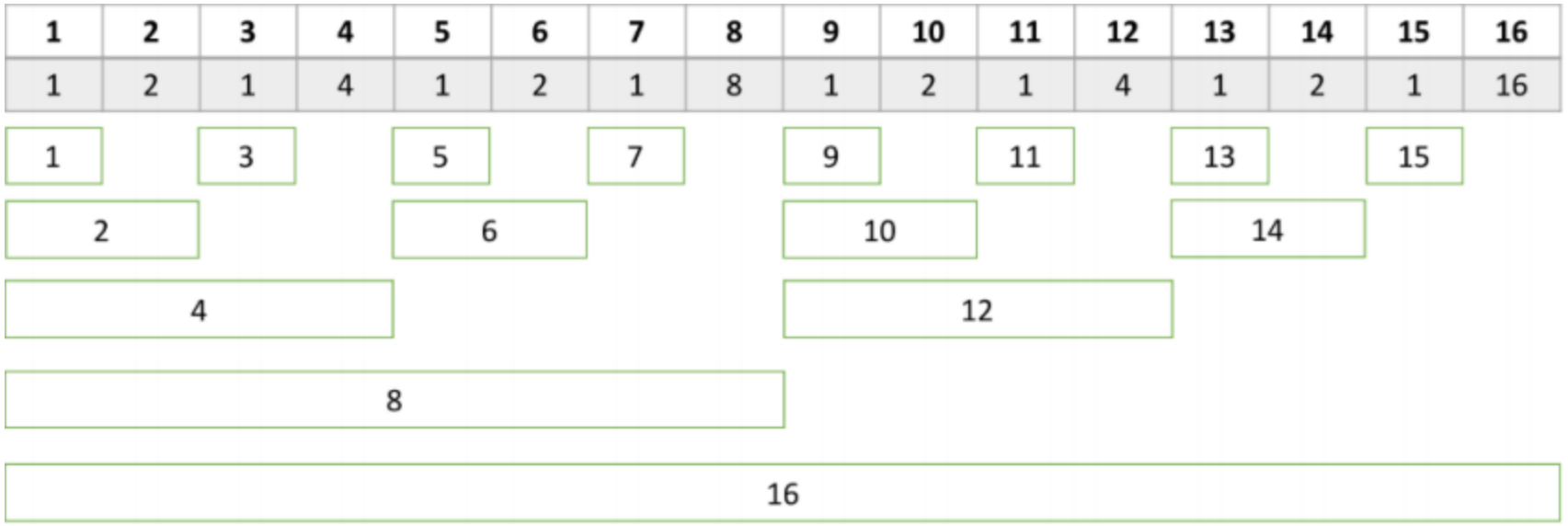
Fenwick Tree는?

Fenwick Tree일 때

Fenwick Tree는?
그림처럼 8칸의 배열로 이루어져 있다!
이 8개로 모든 구간합을 표현할 수 있다.

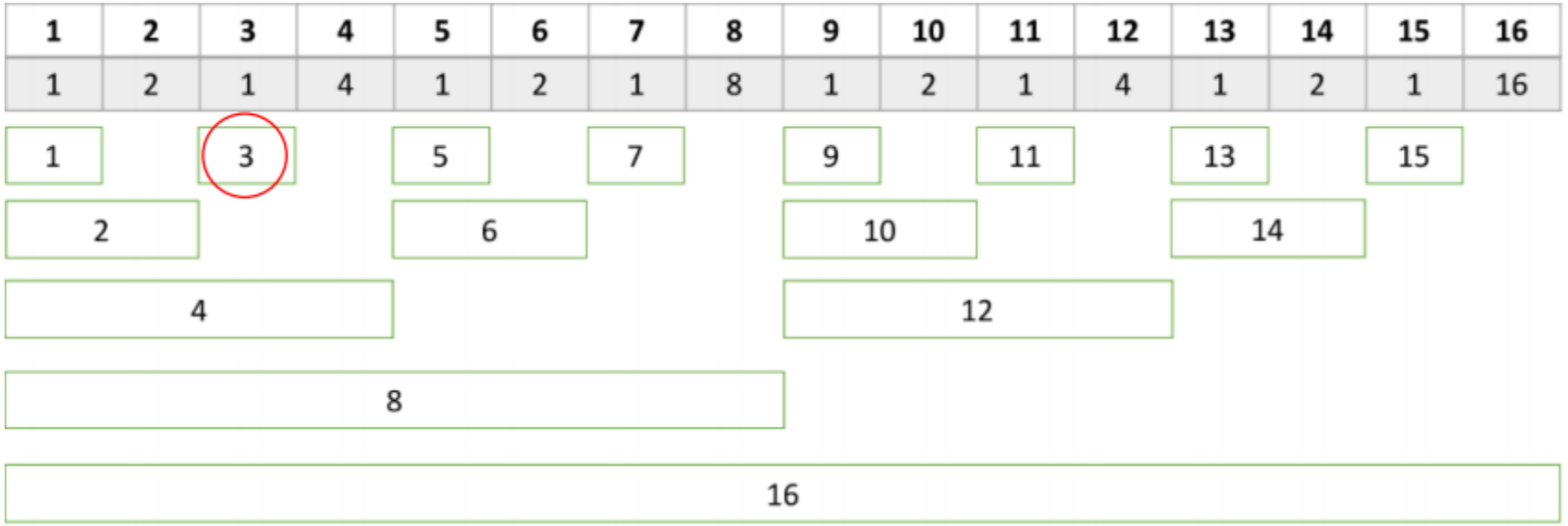


Fenwick Tree



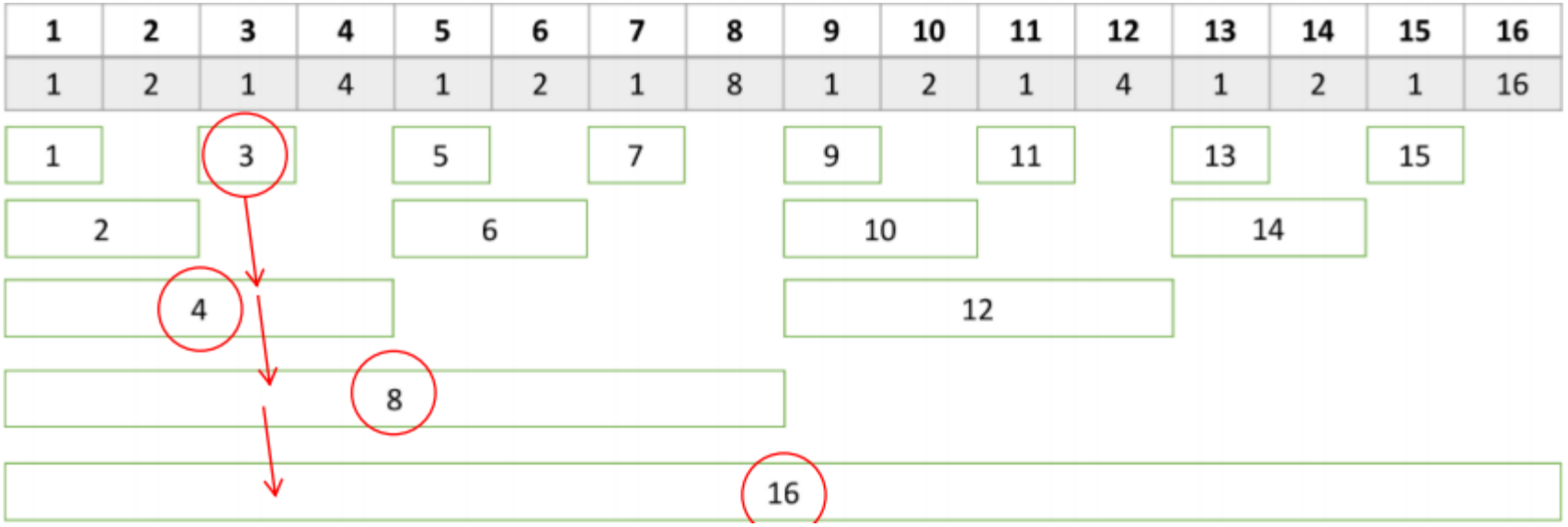
Fenwick Tree는 이와 같은 형태를 이루고 있다!

Fenwick Tree



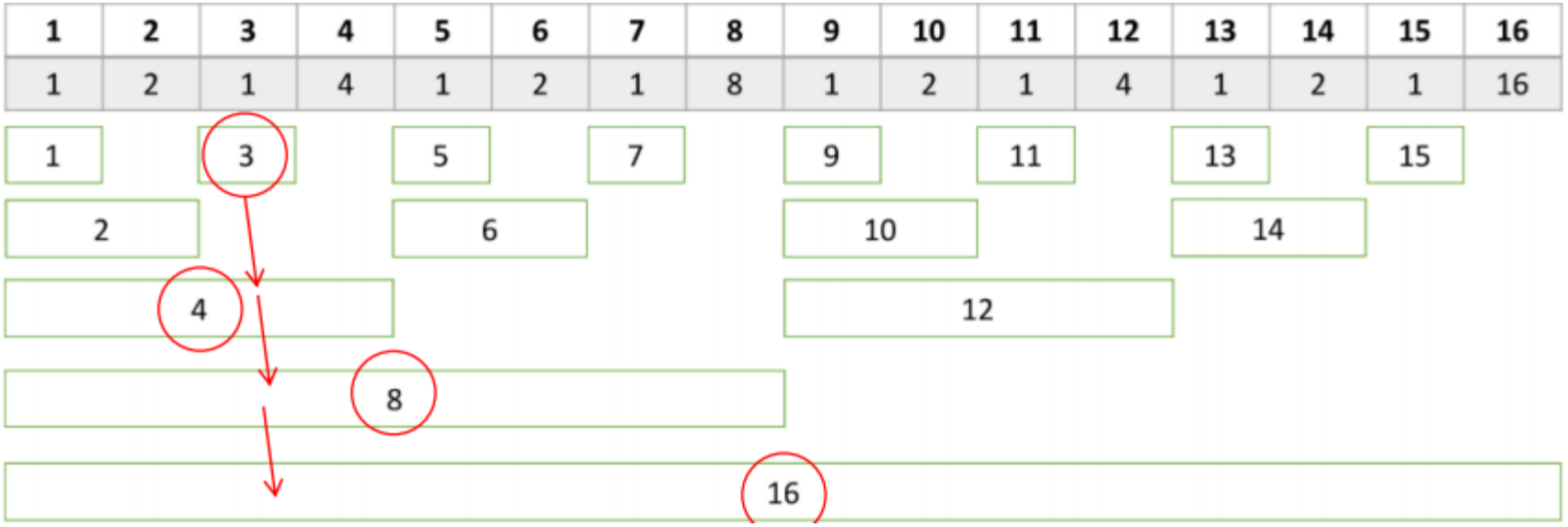
만약 3번 index를 update한다면, 몇 번 index들을 update해야 할까?

Fenwick Tree



3, 4, 8, 16번 index를 update해야 한다.

Fenwick Tree



3, 4, 8, 16이 어떻게 나올까?

Fenwick Tree

2진수로 표현해보자!

3 : 00011
+ 00001
4 : 00100

4 : 00100
+ 00100
8 : 01000

8 : 01000
+ 01000
16:10000

공통점은?

Fenwick Tree

2진수로 표현해보자!

3 : 00011
+ 00001
4 : 00100

4 : 00100
+ 00100
8 : 01000

8 : 01000
+ 01000
16:10000

공통점은?
최하위 비트를 계속 더해준다!

Fenwick Tree - 최하위 비트 구하는 방법

3을 예로 들어보자. x = 0011, -x = 1101 (2의 보수)

x & -x를 하면,

```
  0011
& 1011
  0001
```

최하위 비트가 나온다!

```
int f(int x)
{
    return (x & -x);
}
```

Fenwick Tree

```
class fwtree {
public:
    vector<ll> tree;
    vector<ll> numbers;
    int size;
```

Segment tree처럼 class를 만들자.
vector<long long> tree, numbers와 int size를 변수로 선언해준다.

tree는 구간합들을 저장하고 있는 Fenwick tree 배열이고,
numbers는 원래 값들을 저장하는 배열이다.

Fenwick Tree

```
fwtree(int n)
{
    for (size = 1;size < n;size *= 2);
    tree.resize(size + 1);
    numbers.resize(size + 1);
}
```

생성자를 만들어준다. segment tree와 같은 방법을 사용하지만,
tree와 numbers vector의 크기를 2*size가 아닌, size+1이어도 충분하다.

Fenwick Tree

```
void update(int pos, ll x)
{
    //pos가 update하고자 하는 index, x가 바꾸고자 하는 값을 나타낸다
    //원래 저장되어 있는 값과 바꾸고자하는 값과의 차이를 u라는 변수에 담는다.
    int u = x - numbers[pos];
    //numbers 배열에서 pos index 위치의 값을 x로 바꾸어준다.
    numbers[pos] = x;
    //pos가 size 이하일 동안 최하위비트를 더해주면서 update해준다
    while (pos <= size)
    {
        tree[pos] += u;
        pos += (pos&(-pos));
    }
}
```

pos는 update하고자 하는 index, x는 바꾸고자 하는 값을 나타낸다.

Fenwick Tree

```
void update(int pos, ll x)
{
    //pos가 update하고자 하는 index, x가 바꾸고자 하는 값을 나타낸다
    //원래 저장되어 있는 값과 바꾸고자하는 값과의 차이를 u라는 변수에 담는다.
    int u = x - numbers[pos];
    //numbers 배열에서 pos index 위치의 값을 x로 바꾸어준다.
    numbers[pos] = x;
    //pos가 size 이하일 동안 최하위비트를 더해주면서 update해준다
    while (pos <= size)
    {
        tree[pos] += u;
        pos += (pos&(-pos));
    }
}
```

3번 index에 원래 있던 값이 3이고, 바꾸고자 하는 값이 5라면
pos = 3, x = 5, u = 5 - 3 = 2가 된다.

그리고 numbers[pos]값을 바꾸고자 하는 값인 x로 바꾸어준다.

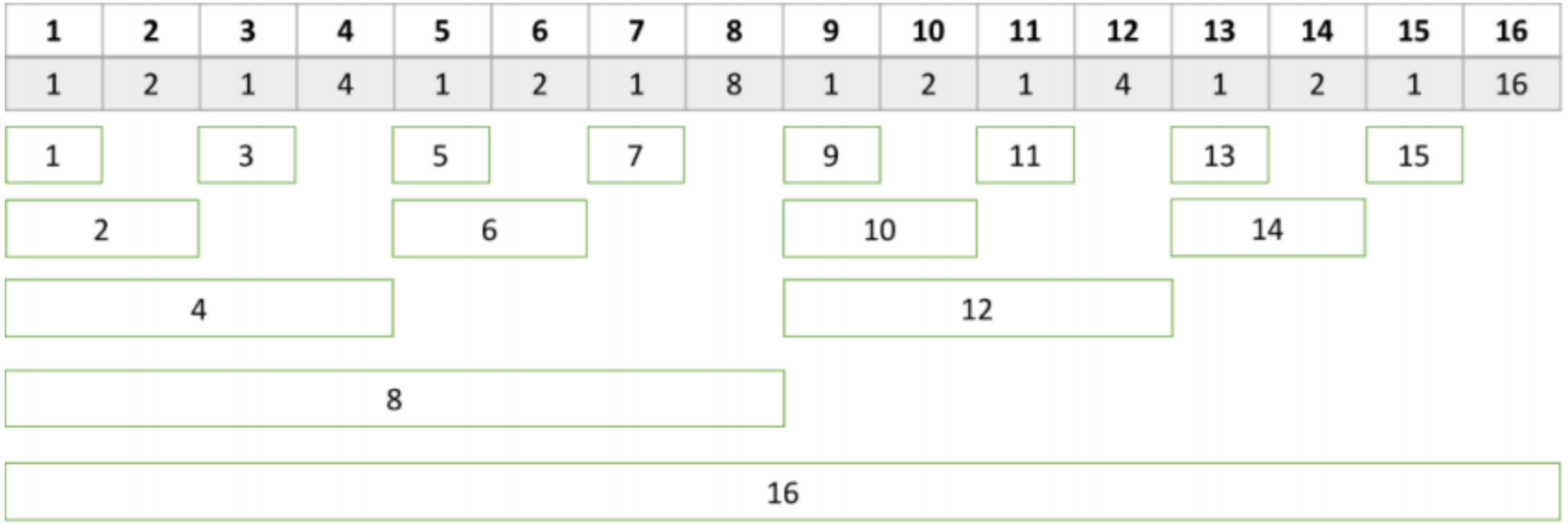
Fenwick Tree

```
void update(int pos, ll x)
{
    //pos가 update하고자 하는 index, x가 바꾸고자 하는 값을 나타낸다
    //원래 저장되어 있는 값과 바꾸고자하는 값과의 차이를 u라는 변수에 담는다.
    int u = x - numbers[pos];
    //numbers 배열에서 pos index 위치의 값을 x로 바꾸어준다.
    numbers[pos] = x;
    //pos가 size 이하일 동안 최하위비트를 더해주면서 update해준다
    while (pos <= size)
    {
        tree[pos] += u;
        pos += (pos&(-pos));
    }
}
```

pos가 size 이하인 동안에는 pos에 최하위비트를 계속 더해주면서 해당 tree의 값을 updat해준다.

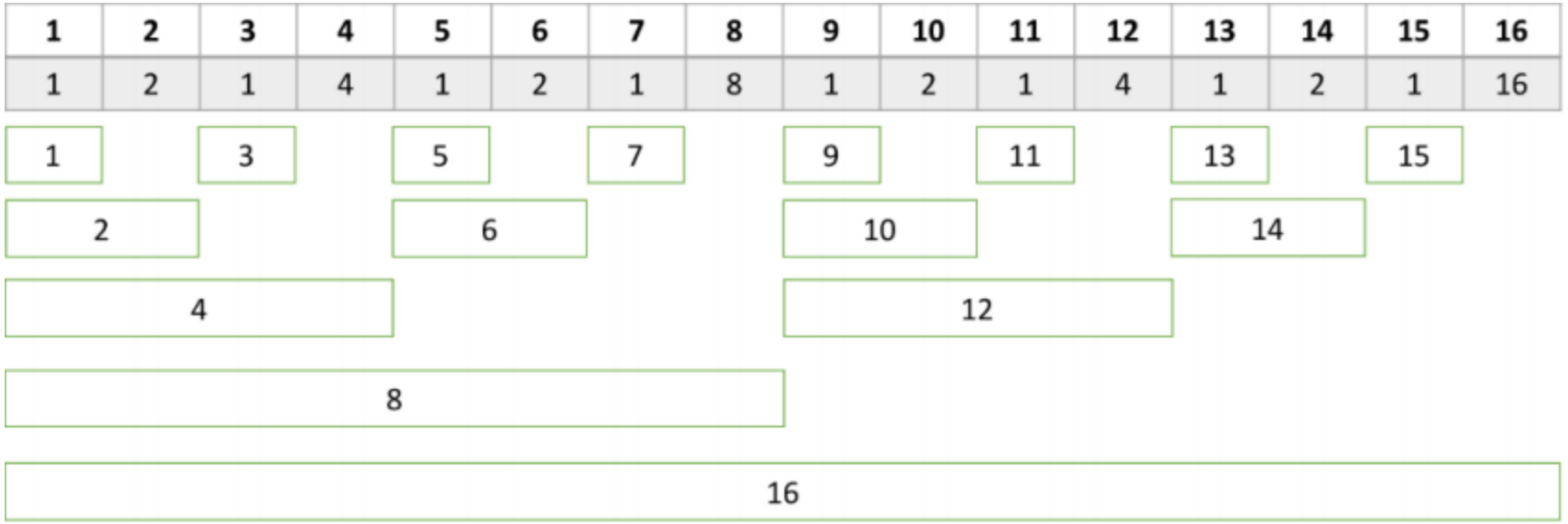
예를 들어 size가 16이고 pos가 3이라면 3->4->8->16번째 값을 바꾸게 된다.

Fenwick Tree



그렇다면 구간합은 어떤 식으로 구할까?

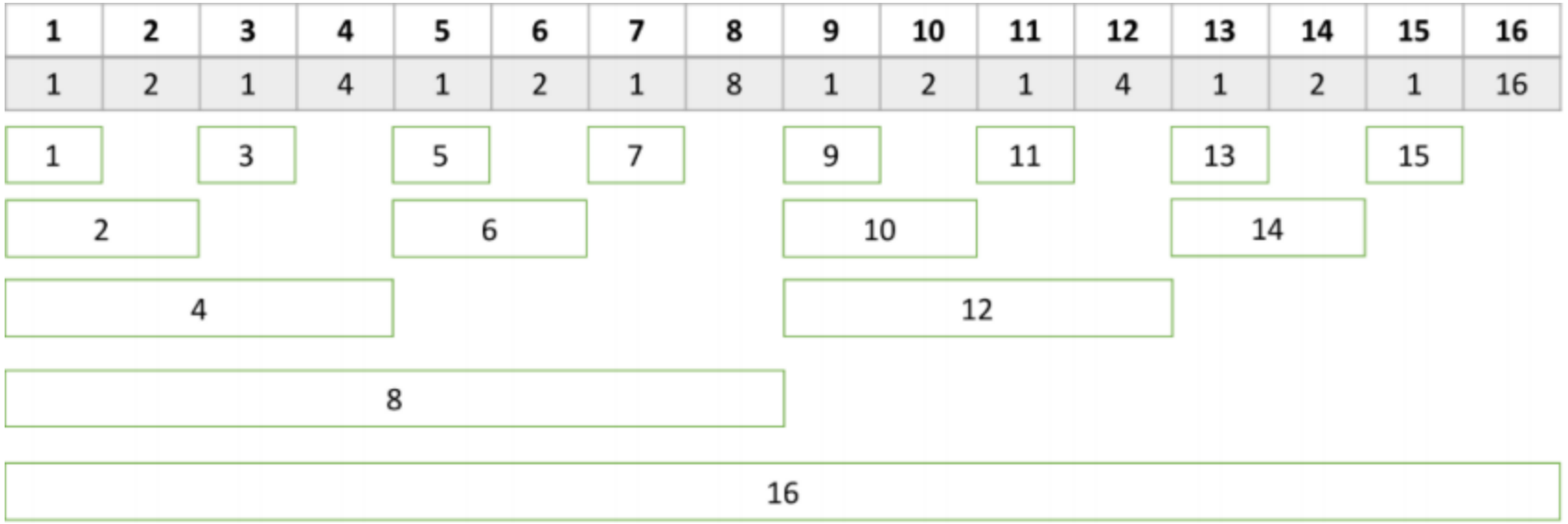
Fenwick Tree



Fenwick Tree는 Segment Tree처럼
a~b까지의 구간합을 구하는 함수를 구현하지 않고,

처음부터 b까지, 즉 1~b까지의 구간합을 구하는 함수를 구현한다.

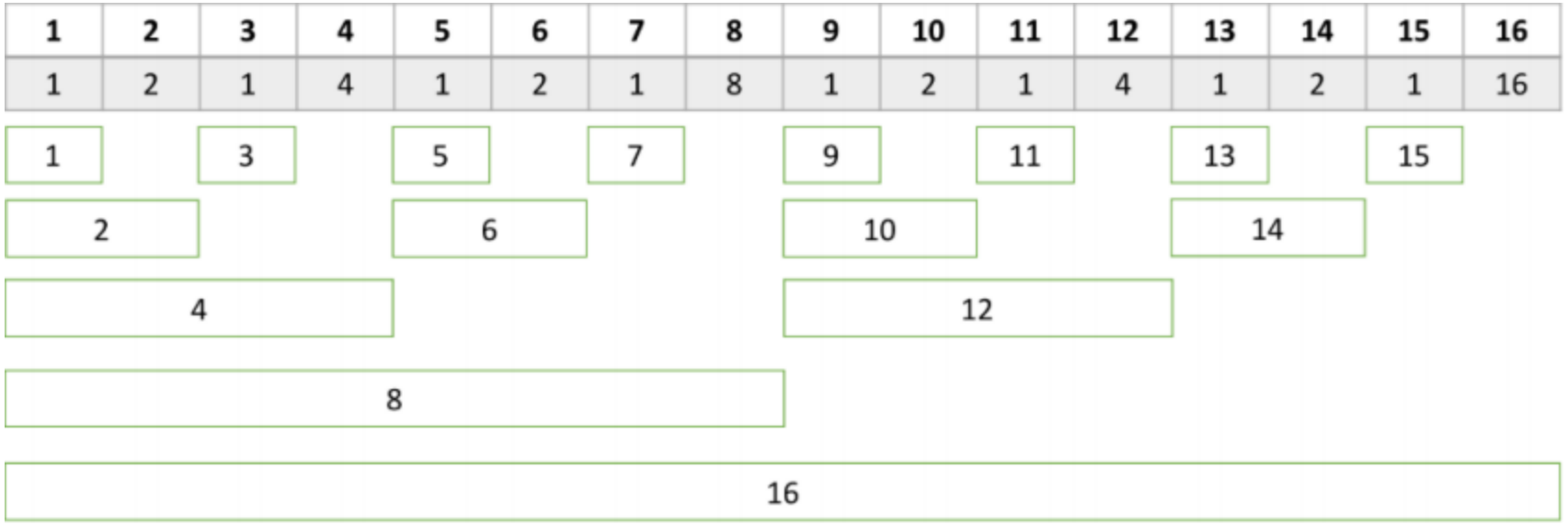
Fenwick Tree



그렇다면 a~b 구간합을 구하려면
1~b까지의 구간합에서 1~(a-1)까지의 구간합을 빼주면 된다.

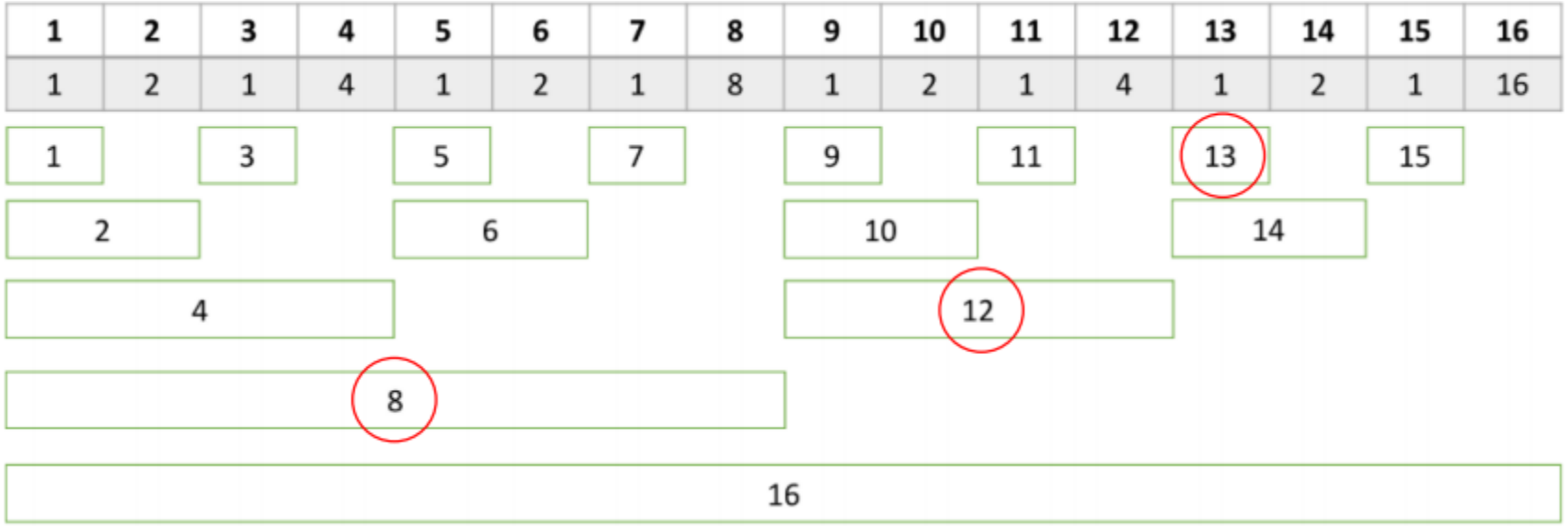
즉, sum(b)-sum(a-1)이다.

Fenwick Tree



만약 13까지의 구간합을 구하려면 어느 index를 더해야 하는가?

Fenwick Tree



8, 12, 13번 index의 값들을 더해주면 된다!
여기에는 어떤 규칙이 있을까?

Fenwick Tree

2진수로 표현해보자!

13: 1101
- 0001
12: 1100

12: 1100
- 0100
8 : 1000

8 : 1000
- 1000
0 : 0000

공통점은?

Fenwick Tree

2진수로 표현해보자!

13: 1101
- 0001
12: 1100

12: 1100
- 0100
8 : 1000

8 : 1000
- 1000
0 : 0000

공통점은?
최하위 비트를 계속 빼준다!

Fenwick Tree

```
ll sum(int pos)
{
    //구간합을 저장할 변수 ret를 0으로 초기화시켜준다.
    ll ret = 0;
    //pos가 즉, index가 0이 되기 전까지 tree에 저장된 구간합의 값을 ret에 계속 더해준다
    while (pos > 0)
    {
        ret += tree[pos];
        pos -= (pos&(-pos));
    }
    //ret 값을 return해준다
    return ret;
}
```

pos를 인자로 받고, 1~pos까지의 구간합을 return하는 함수이다.
먼저 return해줄 구간합을 담을 변수 ret를 0으로 초기화한다.

Fenwick Tree

```
ll sum(int pos)
{
    //구간합을 저장할 변수 ret를 0으로 초기화시켜준다.
    ll ret = 0;
    //pos가 즉, index가 0이 되기 전까지 tree에 저장된 구간합의 값을 ret에 계속 더해준다
    while (pos > 0)
    {
        ret += tree[pos];
        pos -= (pos&(-pos));
    }
    //ret 값을 return해준다
    return ret;
}
```

그 후 pos가 0이 될 때까지 최하위비트를 계속 빼 주며 ret에 더해나간다.

예를 들어 pos가 13이면 13, 12, 8에 담겨 있는 값들을 ret에 더해준다.
그 후 ret의 값을 return한다.

Fenwick Tree

```
class fwtree {
public:
    vector<ll> tree;
    vector<ll> numbers;
    int size;
    fwtree(int n)
    {
        for (size = 1;size < n;size *= 2);
        tree.resize(size + 1);
        numbers.resize(size + 1);
    }
```

Fenwick Tree

```
void update(int pos, ll x)
{
    //pos가 update하고자 하는 index, x가 바꾸고자 하는 값을 나타낸다
    //원래 저장되어 있는 값과 바꾸고자하는 값과의 차이를 u라는 변수에 담는다.
    int u = x - numbers[pos];
    //numbers 배열에서 pos index 위치의 값을 x로 바꾸어준다.
    numbers[pos] = x;
    //pos가 size 이하일 동안 최하위비트를 더해주면서 update해준다
    while (pos <= size)
    {
        tree[pos] += u;
        pos += (pos&(-pos));
    }
}
```

Fenwick Tree

```
    }
    ll sum(int pos)
    {
        //구간합을 저장할 변수 ret를 0으로 초기화시켜준다.
        ll ret = 0;
        //pos가 즉, index가 0이 되기 전까지 tree에 저장된 구간합의 값을 ret에 계속 더해준다
        while (pos > 0)
        {
            ret += tree[pos];
            pos -= (pos&(-pos));
        }
        //ret 값을 return해준다
        return ret;
    }
};
```

풀어볼까유

#2042

구간 합 구하기

Fenwick Tree로
다시 풀어보자!

풀어볼까유

#12837

가계부 (Hard)

구간 합 구하기랑 비슷

풀어볼까유

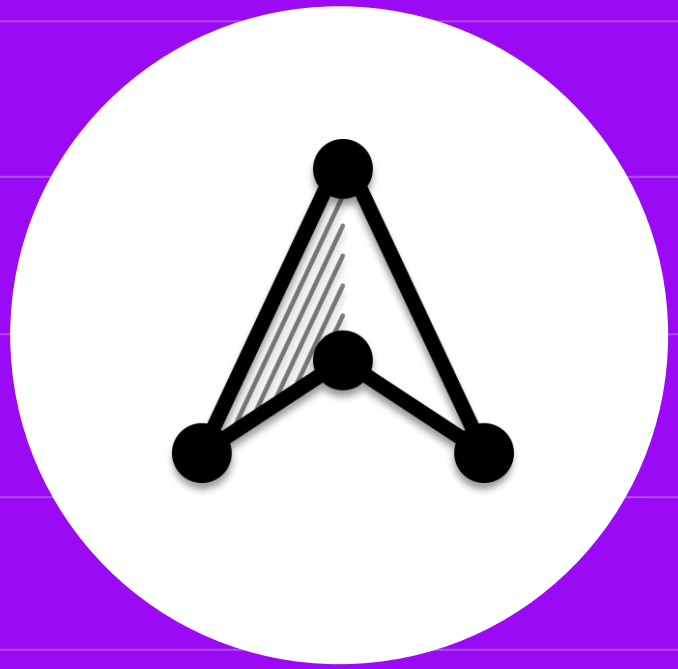
#3653 영화수집

와! 플래티넘! 아시는구나!
참고로 겁.나.어.렵.습.니.다

풀어볼까유

#3006 영화수집

와! 플래티넘! 아시는구나!
참고로 겁.나.어.렵.습.니.다



다음 시간에 만나요~