Tarea-Examen II

Alumno: Aarón Aldair García Miranda

1. Sea X un conjunto, prueba que las siguientes funciones son métricas.
   a) En $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ definimos

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} \mid x_2 - y_2 \mid \text{ si } x_1 = x_2 \\ \mid x_2 \mid + \mid x_1 - y_1 \mid + \mid y_2 \mid \text{ si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

   b) En $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $d(k, m) = \mid \frac{1}{k} - \frac{1}{m} \mid$, es una métrica en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
   c) Si $X = \mathbb{R}$, ¿$d(x, y) = \mid sen(x) - sen(y) \mid$ es métrica?.
   d) Sea X un campo completo y ordenado para $0 < \alpha \leq 1$, la función $d(x, y) = \mid x - y \mid^\alpha$ para toda $x, y \in X$.

Demostración.
a). Sean $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2) \in X$.
I.
Si $x_1 \neq y_1$,

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \mid x_2 \mid + \mid x_1 - y_1 \mid + \mid y_2 \mid > 0$$

Si $x_1 = y_1$ y $x_2 \neq y_2$,

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \mid x_2 - y_2 \mid > 0$$

Si $x_1 = y_1$ y $x_2 = y_2$,

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \mid x_2 - y_2 \mid = 0$$

Entonces $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \geq 0$.
II.
Si $x_1 = y_1$,

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \mid x_2 - y_2 \mid \\ &= \mid -(y_2 - x_2) \mid \\ &= \mid -1 \mid \mid y_2 - x_2 \mid \\ &= \mid y_2 - x_2 \mid \\ &= d((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \end{aligned}$$

Si $x_1 \neq y_2$,

$$\begin{aligned} d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) &= \mid x_2 \mid + \mid x_1 - y_1 \mid + \mid y_2 \mid \\ &= \mid y_2 \mid + \mid -(y_1 - x_1) \mid + \mid x_2 \mid \\ &= \mid y_2 \mid + \mid y_1 - x_1 \mid + \mid x_2 \mid \\ &= d((y_1, y_2), (x_1, x_2)) \end{aligned}$$

III.
Si $x_1 = y_1 = z_1$, tenemos que

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \mid x_2 - y_2 \mid$$
$$d((y_1,y_2),(z_1,z_2)) = \mid y_2 - z_2 \mid$$
$$d((x_1,x_2),(z_1,z_2)) = \mid x_2 - z_2 \mid$$

de donde,

$$\mid x_2 - y_2 \mid + \mid y_2 - z_2 \mid \geq \mid x_2 - y_2 + y_2 - z_2 \mid = \mid x_2 - z_2 \mid$$

entonces

$$d((x_1,x_2),(z_1,z_2)) \leq d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + d((y_1,y_2),(z_1,z_2))$$

Luego, si $x_1 \neq y_1$ y $y_1 \neq z_1$,

$$d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = \mid x_2 \mid + \mid x_1 - y_1 \mid + \mid y_2 \mid$$
$$d((y_1,y_2),(z_1,z_2)) = \mid y_2 \mid + \mid y_1 - z_1 \mid + \mid z_2 \mid$$
$$d((x_1,x_2),(z_1,z_2)) = \mid x_2 \mid + \mid x_1 - z_1 \mid + \mid z_2 \mid$$

entonces, $d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + d((y_1,y_2),(z_1,z_2))$ es igual a

$$\begin{aligned}
&\mid x_2 \mid + \mid x_1 - y_1 \mid + \mid y_2 \mid + \mid y_2 \mid + \mid y_1 - z_1 \mid + \mid z_2 \mid \\
&= \mid x_2 \mid + \mid x_1 - y_1 \mid + 2 \mid y_2 \mid + \mid y_1 - z_1 \mid + \mid z_2 \mid \\
&\geq \mid x_2 \mid + \mid x_1 - y_1 + y_1 - z_1 \mid + 2 \mid y_2 \mid + \mid z_2 \mid \\
&= \mid x_2 \mid + \mid x_1 - z_1 \mid + 2 \mid y_2 \mid + \mid z_2 \mid \\
&\geq \mid x_2 \mid + \mid x_1 - z_1 \mid + \mid z_2 \mid \\
&= d((x_1,x_2),(z_1,z_2))
\end{aligned}$$

entonces

$$d((x_1,x_2),(z_1,z_2)) \leq d((x_1,x_2),(y_1,y_2)) + d((y_1,y_2),(z_1,z_2))$$

Por lo tanto es métrica.

□

b).
2. Muestra que $(\mathbb{R}^n, d_l^2)$, donde

$$\begin{aligned}
d_{l^2}(\bar{x},\bar{y}) &= d_{l^2}((x_1,x_2,x_3,...,x_n),(y_1,y_2,y_3,...,y_n)) \\
&= \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + ... + (x_n-y_n)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}
\end{aligned}$$

es un espacio métrico.

Demostración.
Sean $\bar{x} = (x_1,x_2,x_3,...,x_n)$ y $\bar{y} = (y_1,y_2,y_3,...,y_n) \in \mathbb{R}^n$, notemos que

$$d_{l^2}(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} = 0 \iff \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 = 0$$
$$\iff x_i = y_i \quad \text{para toda } i = 1,...,n$$
$$\iff \bar{x} = \bar{y}$$

Luego,

$$d_{l^2}(\bar{x},\bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2} = d_{l^2}(\bar{y},\bar{x})$$

Es decir que para todo $\bar{x},\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $d_{l^2}(\bar{x},\bar{y}) = d_{l^2}(\bar{y},\bar{x})$.

Ahora consideremos $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
d_{l^2}(\bar{x},\bar{y})^2 &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i+z_i-y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(x_i-z_i)+(z_i-y_i)]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)} + \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2 \\
&= d_{l^2}(\bar{x},\bar{z})^2 + 2d_{l^2}(\bar{x},\bar{z})d_{l^2}(\bar{z},\bar{y}) + d_{l^2}(\bar{z},\bar{y})^2 \\
&= [d_{l^2}(\bar{x},\bar{z}) + d_{l^2}(\bar{z},\bar{y})]^2
\end{aligned}$$

De aquí obtenemos que

$$d_{l^2}(\bar{x},\bar{y})^2 \leq [d_{l^2}(\bar{x},\bar{z}) + d_{l^2}(\bar{z},\bar{y})]^2 \implies d_{l^2}(\bar{x},\bar{y}) \leq d_{l^2}(\bar{x},\bar{z}) + d_{l^2}(\bar{z},\bar{y})$$

$\therefore$ $(\mathbb{R}^n, d_l^2)$ es un espacio métrico.

$\blacksquare$

3. Prueba las siguientes series de desigualdades en $\mathbb{R}^n$:

   a) $d_{l^2}(x,y) \leq d_{l^1}(x,y) \leq \sqrt{n}d_{l^2}(x,y)$
   b) $\frac{1}{\sqrt{n}}d_{l^2}(x,y) \leq d_{l^\infty}(x,y) \leq d_{l^2}(x,y)$

Donde $d_{l^1}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid$ y $d_{l^\infty}(x,y) = \sup\{\mid x_i - y_i \mid : 1 \leq i \leq n\}$.

Demostración.
a). Sea $\bar{z} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$. Notemos que

$$\begin{aligned} d_{l^1}(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} | \ z_i \ | \\ \implies d_{l^1}(x,y)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n} | \ z_i \ |\right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} (| \ z_i \ |^2) \sum_{i=1}^{n} (1^2) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (| \ z_i \ |^2) n \end{aligned}$$

Donde la desigualdad se da por la Desigualdad de Hölder, entonces

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} | \ z_i \ |\right)^2 &\leq \sum_{i=1}^{n} (| \ z_i \ |^2) n \\ \implies \sum_{i=1}^{n} | \ z_i \ | &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (| \ z_i \ |^2) n} \\ \implies d_{l^1}(x,y) &\leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \\ \therefore d_{l^1}(x,y) &\leq \sqrt{n} d_{l^2}(x,y) \end{aligned}$$

Luego, notemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} | \ z_i \ |\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} | \ z_i \ |^2$$

por ser $| \ z_i \ |$ no negativo. Entonces, sacando raíz de ambos lados,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} | \ z_i \ | &\geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | \ z_i \ |^2} \\ \therefore d_{l^2}(x,y) &\leq d_{l^1}(x,y) \\ \therefore d_{l^2}(x,y) \leq d_{l^1}(x,y) &\leq \sqrt{n} d_{l^2}(x,y) \end{aligned}$$

$\square$

b). Sea $\bar{z} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$. Notemos que

$$\| \ \bar{z} \ \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | \ z_i \ |^2}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \max_{i=1,\ldots,n} | \ z_i \ |^2} \\
&= \sqrt{n \cdot \max_{i=1,\ldots,n} | \ z_i \ |^2} \\
&= \sqrt{n} \cdot \max_{i=1,\ldots,n} | \ z_i \ | \\
&= \sqrt{n} \parallel \bar{z} \parallel_\infty
\end{aligned}
$$

$$
\implies \parallel \bar{z} \parallel_2 \leq \sqrt{n} \parallel \bar{z} \parallel_\infty \qquad ...(1)
$$

Por otro lado, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\parallel \bar{z} \parallel_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} | \ z_i \ | \\
&= \sqrt{\max_{i=1,\ldots,n} | \ z_i \ |^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | \ z_i \ |^2} \\
&= \parallel \bar{z} \parallel_2
\end{aligned}
$$

$$
\implies \parallel \bar{z} \parallel_\infty \leq \parallel \bar{z} \parallel_2 \qquad ...(2)
$$

Y de este modo, juntando las desigualdades (1) y (2),

$$
\parallel \bar{z} \parallel_2 \leq \sqrt{n} \parallel \bar{z} \parallel_\infty \leq \sqrt{n} \parallel \bar{z} \parallel_2 \qquad \implies \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \parallel \bar{z} \parallel_2 \leq \parallel \bar{z} \parallel_\infty \leq \parallel \bar{z} \parallel_2
$$

$$
\therefore \frac{1}{\sqrt{n}} d_{l^2}(x, y) \leq d_{l^\infty}(x, y) \leq d_{l^2}(x, y)
$$

■

4. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones en un espacio métrico (X, d). Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ con $a, b \in X$. Muestra que $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(a, b)$.

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n \geq N$, por ser (X, d) un espacio métrico. Luego, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $d(b_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $n \geq N'$.
De este modo, tomemos $n \geq \max\{N, N'\}$, entonces

$$
\begin{aligned}
| \ d(a_n, b_n) - d(a, b) \ | &\leq d(a_n, a) + d(a, b_n) - d(a, b_n) + d(b_n, b) \\
&= d(a_n, a) + d(b_n, b) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(a, b)
$$

$\blacksquare$

5. Sea $p \geq 1$, $\| (x,y) \| := (| x |^p + | y |^p)^{\frac{1}{p}}$ y sea

$$d((x,y),(r,s)) = (| x-r |^p + | y-s |^p)^{\frac{1}{p}}$$

Demuestra que es una norma y por lo tanto $d((x,y),(r,s))$ es una métrica en $\mathbb{R}^2$.
Demostración.
Primero se tiene que

$$\| (x,y) \| = (| 0 |^p + | 0 |^p)^{\frac{1}{p}} = 0$$

si $x, y = 0$. Además,

$$\begin{aligned} \| (\alpha x, \alpha y) \| &= (| \alpha x |^p + | \alpha y |^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= (| \alpha |^p \, | x |^p + | \alpha |^p \, | y |^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= | \alpha | \, (| x |^p + | y |^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= | \alpha | \cdot \| (x,y) \| \end{aligned}$$

Y para la desigualdad del triángulo se tiene que

$$\begin{aligned} \| (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \| &= (| x_1 + x_2 |^p + | y_1 + y_2 |^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (| x_1 |^p + | x_2 |^p)^{\frac{1}{p}} + (| y_1 |^p + | y_2 |^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \| (x_1, y_1) \| + \| (x_2, y_2) \| \end{aligned}$$

Donde la desigualdad se da por la Desigualdad de Minkowski. Ahora, para probar que $d((x,y),(r,s)) = (| x-r |^p + | y-s |^p)^{\frac{1}{p}}$ es métrica, notemos que

$$d((x,y),(r,s)) = 0 \iff (| x-r |^p + | y-s |^p)^{\frac{1}{p}} = 0 \iff x = r \quad \text{y} \quad y = s$$

Luego,

$$\begin{aligned} d((x,y),(r,s)) &= (| x-r |^p + | y-s |^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= (| r-x |^p + | s-y |^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= d((r,s),(x,y)) \end{aligned}$$

Y finalmente,

$$\begin{aligned} d((x,y),(r,s)) &= (| x-r |^p + | y-s |^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (| x-u |^p + | y-v |^p)^{\frac{1}{p}} + (| u-r |^p + | v-s |^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= d((x,y),(u,v)) + d((u,v),(r,s)) \end{aligned}$$

Donde la desigualdad se da, nuevamente por la Desigualdad de Minkowski. y operaciones aitméticas en $\mathbb{R}$.
Por lo tanto, $\| (x,y) \|$ es una norma y $d((x,y),(r,s))$ es una métrica en $\mathbb{R}^2$.

$\blacksquare$

6. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio normado y sea $B(x_0, 1) := \{x \in E : \| \ x \ \| < 1\}$.
   a) Demuestra que $B(x_0, 1)$ es un conjunto convexo; es decir que si $x, y \in B(x_0, 1)$, entonces $tx + (1-t)y \in B(x_0, 1)$ para todo $0 < t < 1$.
   b) Demuestra que el conjunto de todas las métricas definidas en un conjunto X es un conjunto convexo.

Demostración.
a). Sean $x, y \in B(x_0, 1)$, entonces, por definición, $\| \ x \ \| < 1$ y $\| \ y \ \| < 1$.
Queremos demostrar que $\| \ tx + (1-t)y \ \| < 1$ para todo $0 < t < 1$. Entonces notemos que

$$\| \ tx + (1-t)y \ \| \leq \| \ tx \ \| + \| \ (1-t)y \ \| = t \ \| \ x \ \| + (1-t)\| \ y \ \|$$

Y dado que $\| \ x \ \| < 1$ y $\| \ y \ \| < 1$, podemos escribir $\| \ x \ \| \leq a$ y $\| \ y \ \| \leq b$ con $a, b < 1$.
Entonces

$$\begin{aligned} \| \ tx + (1-t)y \ \| \leq \| \ ta + (1-t)b \ \| < \| \ t1 + (1-t)1 \ \| = \| \ 1 \ \| = 1 \\ \implies \| \ tx + (1-t)y \ \| < 1 \\ \therefore tx + (1-t)y \in B(x_0, 1) \end{aligned}$$

$\square$

b). Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las métricas definidas en un conjunto X. Debemos demostrar que si d_1 y d_2 son métricas en X, entonces $d_t = td_1 + (1-t)d_2$ para $0 < t < 1$ es también una métrica en X. Así, observemos que

$$d_t(x, y) = td_1(x, y) + (1-t)d_2(x, y) \geq 0$$

ya que $d_1(x, y) \geq 0$ y $d_2(x, y) \geq 0$.
Luego,

$$\begin{aligned} d_t(x, y) = 0 &\iff td_1(x, y) + (1-t)d_2(x, y) = 0 \\ &\implies d_1(x, y) = 0 \quad \text{y} \quad d_2(x, y) = 0 \end{aligned}$$

Lo cual es cierto siempre que $x = y$, pues d_1 y d_2 son métricas.
Ahora,

$$\begin{aligned} d_t(x, y) = td_1(x, y) + (1-t)d_2(x, y) = td_1(y, x) + (1-t)d_2(y, x) = d_t(y, x) \\ \implies d_t(x, y) = d_t(y, x) \end{aligned}$$

Y finalmente,

$$\begin{aligned} d_t(x, z) &= td_1(x, z) + (1-t)d_2(x, z) \\ &\leq t(d_1(x, y) + d_1(y, z)) + (1-t)(d_2(x, y) + d_2(y, z)) \\ &= td_1(x, y) + td_1(y, z) + (1-t)d_2(x, y) + (1-t)d_2(y, z) \\ &= (td_1(x, y) + (1-t)d_2(x, y)) + (td_1(y, z) + (1-t)d_2(y, z)) \\ &= d_t(x, y) + d_t(y, z) \\ &\implies d_t(x, z) \leq d_t(x, y) + d_t(y, z) \end{aligned}$$

Así, d_t cumple las tres propiedades para ser métrica en X, por lo tanto, hemos demostrado que el conjunto $\mathcal{M}$ es un conjunto convexo.

$\blacksquare$

7. Demuestra el siguiente resultado. Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, con $x_{2n} \leq x_{2n+2} \leq x_{2n+1} \leq x_{2n-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty}(x_{2n-1} - x_{2n}) = 0$. Entonces $\{x_n\}$ converge a alguna $x \in \mathbb{R}$ y $x_{2n} \leq x \leq x_{2n-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Después usa ese resultado para probar que la siguiente sucesión:

$$\{a_n\} = \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \end{cases}$$

Converge a $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.

8. Para toda $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, verifica que
   a) $\{a_n\}$ es estrictamente creciente.
   b) $\{b_n\}$ es estrictamente decreciente.
   c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ el límite de estas dos sucesiones es denotado por e. Tenemos que $2 < e < 4$.

Solución.

a). Consideremos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ y notemos que

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right) - \ln\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right) \\ &= (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Y por la expansión de Taylor respecto al logaritmo natural $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ nos queda que

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \approx \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2}$$

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) - n\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) &= (n+1)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2}\right) - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} - 1 + \frac{1}{2n} \\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} > 0 \Longrightarrow \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 0 \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$$

$\therefore \{a_n\}$ es estrictamente creciente.

$\square$

b). Consideremos $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}$ y notemos que

$$\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) = (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - (n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Y por la expansión de Taylor mencionada previamente,

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$$
$$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) \approx \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - (n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) &= (n+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) - (n+2)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2}\right) \\
&= \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{n+1}{2n^2}\right) - \left(1 + \frac{1}{n+1} - \frac{n+2}{2(n+1)^2}\right) \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{n+1}{2n^2} + \frac{n+2}{2(n+1)^2} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \left(\frac{n+1}{2n^2} - \frac{n+2}{2(n+1)^2}\right)
\end{aligned}$$

Luego,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} > 0$$

Y $\left(\frac{n+1}{2n^2} - \frac{n+2}{2(n+1)^2}\right)$ es siempre negativa, en particular decreciente, afectada por la diferencia con $\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$, por lo que $\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) > 0$, entonces $\frac{b_n}{b_{n+1}} > 0$ y por lo tanto, $\{b_n\}$ es estrictamente decreciente.

$\square$

c). Consideremos a la sucesión $b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Podemos reescribir a b_n en términos de la sucesión a_n como:

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Y se sabe que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

Entonces,

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

■

9. Sea $a, z \in \mathbb{C}$. Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a\cdot z^n$ converge y su suma es $\frac{a}{1-z}$ si $\parallel z \parallel < 1$. Si $a \neq 0$ y $\parallel z \parallel \geq 1$, entonces esta serie diverge.

Demostración.
Primero notemos que

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1-z}-\frac{z^{n+1}}{1-z}\right)\\ &= \frac{1}{1-z}-\left(\frac{z}{1-z}\lim_{n\to\infty} z^n\right)\end{aligned}$$

De donde, si tenemos que $\parallel z \parallel < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$, de modo que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \Longrightarrow a\sum_{n=0}^{\infty} z^n = a\frac{1}{1-z}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} az^n = \frac{a}{1-z} \quad \text{para} \quad \parallel z \parallel < 1$$

Ahora, si $\lim_{n\to\infty} z^n = \infty$ dado que $\parallel z \parallel \geq 1$ y $a \neq 0$, tendría que suceder lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} z^n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k \\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1-z^{n+1}}{1-z} \\ &= \infty\end{aligned}$$

Es decir que $\sum_{n=0}^{\infty} az^n$ diverge.

■

10. Sea $b > 1$ y $b \in \mathbb{N}$ y sea $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de naturales con $0 \leq x_j < b$ para toda j. Entonces la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j b^{-j}$ converge y su suma x satisface que $0 \leq x \leq 1$.
11. Sea $p \in \mathbb{N}$, $a \in [0, \infty)$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Demostración.
$\Leftarrow$]. Sea $\varepsilon > 0$. Dado que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, se cumple que $\mid a_n - a \mid < \varepsilon$.
Consideremos $a > 0$, se tiene que

$$\mid (a_n)^{\frac{1}{p}} - a^{\frac{1}{p}} \mid = \mid \left((a + (a_n - a))^{\frac{1}{p}} - a^{\frac{1}{p}}\right) \mid < \varepsilon$$

lo cual implica que para $\varepsilon > 0$, existe N tal que para $n \geq N$, $\mid (a_n)^{\frac{1}{p}} - a^{\frac{1}{p}} \mid < \varepsilon$.
El caso en donde $a = 0$ es simple;

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

lo cual implica la definición de que $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N, 0 \leq a_n < \varepsilon$. Entonces para $n \in \mathbb{N}$, $(a_n)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$.
$\Rightarrow$]. Sea $\varepsilon > 0$, para $a > 0$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[p]{a_n}\right)^p = \left(a^{\frac{1}{p}}\right)^p \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

Para $a = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[p]{a_n}\right)^p = 0$$

lo cual implica la definición de que $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq N, 0 \leq (a_n)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$.
Entonces $a_n < \varepsilon_1 = \varepsilon^p$.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a} \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

■

12. Evalúa
    a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2 + 2n} - n$
    b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n}{3^n-n}$
    c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}+1}{\sqrt{n^4+n^3}}$

Solución.

a)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - n\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}+n}{\sqrt{n^2+2n}+n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+n\sqrt{n^2+2n}-n\sqrt{n^2+2n}-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}+n} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{\sqrt{n^2+2n}}{n}+\frac{n}{n}} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2(1+2(\frac{1}{n}))}}{n}+1} \\
&= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+2(\frac{1}{n})}+1} \\
&= 2\frac{1}{\sqrt{1}+1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n}{3^n-n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^n+n}{3^n}}{\frac{3^n-n}{3^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{n}{3^n}}{1-\frac{n}{3^n}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n+n\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-n\left(\frac{1}{3}\right)^n} \\
&= \frac{0+0}{1+0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}+1}{\sqrt{n^4+n^3}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n^2}}{2^{n^2}} + \frac{1}{2^{n^2}}}{\frac{\sqrt{n^4+n^3}}{2^{n^2}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}\sqrt{n^2(n^2+n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} n\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} n^2\sqrt{1+\frac{1}{n}}}
\end{aligned}
$$

Aquí notemos que $\lim_{n\to\infty} n^2\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} x^n$ para $\mid x \mid < 1$ es igual a 0, entonces

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1+\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2} n^2\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1+0}{0+0} = \infty
$$

Por lo tanto esta sucesión diverge.

13. Sea $0 < a < b < \infty$. Define $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$. Determine si $\{x_n\}$ converge y de ser así, calcule su límite.

Solución.
Definimos $y_n = x_{2n-1}$ y $z_n = x_{2n}$. Entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= x_{2(n+1)-1} \\
&= x_{2n+1} \\
&= \frac{1}{2}(x_{2n-1} + x_{2n}) \\
&= \frac{1}{2}(y_n + z_n)
\end{aligned}
$$

Y por otro lado,

$$
\begin{aligned}
z_{n+1} &= x_{2(n+1)} \\
&= x_{2n+2} \\
&= \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2n+1}) \\
&= \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{2}(y_n + z_n)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}z_n\right) \\
&= \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{4}z_n \\
&= \frac{3}{4}z_n + \frac{1}{4}y_n
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= \frac{1}{2}(y_n + z_n) \\
z_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}z_n + \frac{1}{2}y_n\right)
\end{aligned}
$$

De modo que tanto y_n como z_n son medias ponderadas de los términos anteriores, lo que sugiere que las diferencias entre términos consecutivos disminuye en n y la relación entre y_{n+1} y z_{n+1} asegura que la sucesión promedie valores.

Para el límite, supongamos que y_n y z_n tienden a L cuando n tiende a infinito, entonces

$$
L = \frac{1}{2}(L + L) = L
$$

Y

$$
L = \frac{3}{4}L + \frac{1}{4}L = L
$$

Como ambas expresiones son válidas y consistentes, la sucesión $\{x_n\}$ debe converger a un único valor L, y notemos que las $\{y_n\}$ y las $\{z_n\}$ deben promediar los valores iniciales en cada paso, a saber, los valores a y b, entonces

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{a+b}{2} \\
\therefore \{x_n\} &\to \frac{a+b}{2}
\end{aligned}
$$

■

15. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$ y $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, entonces la sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida como $c_n = \frac{(a_1+\ldots+a_n)}{b_1+\ldots+b_n}$, es también monótona.

Sugerencia: Si $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} \leq \frac{a+c}{b+d} \leq \frac{c}{d}$.

Demostración.
Analicemos que ocurre cuando la sucesión es creciente; para $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$, entonces, dados $a_1 \leq a_2$ y $b_1 \leq b_2$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} &\Longrightarrow \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \leq \frac{a_2}{b_2} \\
&\Longrightarrow \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_2+a_3}{b_2+b_3} \leq \frac{a_3}{b_3} \\
&\Longrightarrow \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} \leq \frac{a_3}{b_3} \\
&\Longrightarrow \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \leq \frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} \leq \frac{a_2}{b_2} \leq \frac{a_3}{b_3}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{a_1}{b_1} \leq \underbrace{\frac{a_1+...+a_n}{b_1+...+b_n}}_{c_n} \leq \underbrace{\frac{a_1+...+a_{n+1}}{b_1+...+b_{n+1}}}_{c_{n+1}} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

Por lo que $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente.
Ahora, cuando la sucesión es decreciente; $a_{n+1} \leq a_n$, entonces, análogamente al caso creciente,

$$\begin{aligned}
\frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_2}{b_2} &\Longrightarrow \frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \geq \frac{a_2}{b_2} \\
&\Longrightarrow \frac{a_2}{b_2} \geq \frac{a_2+a_3}{b_2+b_3} \geq \frac{a_3}{b_3} \\
&\Longrightarrow \frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} \geq \frac{a_3}{b_3} \\
&\Longrightarrow \frac{a_1}{b_1} \geq \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \geq \frac{a_1+a_2+a_3}{b_1+b_2+b_3} \geq \frac{a_2}{b_2} \geq \frac{a_3}{b_3}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{a_1}{b_1} \geq \underbrace{\frac{a_1+...+a_n}{b_1+...+b_n}}_{c_n} \geq \underbrace{\frac{a_1+...+a_{n+1}}{b_1+...+b_{n+1}}}_{c_{n+1}} \geq \frac{a_n}{b_n} \geq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

Por lo que $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente.

$\blacksquare$