Tarea-Examen II

1. Sea X un conjunto, prueba que las siguientes funciones son métricas.
   a) En $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}$ definimos

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} \mid x_2 - y_2 \mid \text{ si } x_1 = x_2 \\ \mid x_2 \mid + \mid x_1 - y_1 \mid + \mid y_2 \mid \text{ si } x_1 \neq x_2 \end{cases}$$

   b) En $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ si $(k, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $d(k, m) = \mid \frac{1}{k} - \frac{1}{m} \mid$, es una métrica en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
   c) Si $X = \mathbb{R}$, ¿$d(x, y) = \mid sen(x) - sen(y) \mid$ es métrica?.
   d) Sea X un campo completo y ordenado para $0 < \alpha \leq 1$, la función $d(x, y) = \mid x - y \mid^\alpha$ para toda $x, y \in X$.
2. Muestra que $(\mathbb{R}^n, d_l^2)$, donde

$$\begin{aligned} d_{l^2}(\bar{x}, \bar{y}) &= d_{l^2}((x_1, x_2, x_3, ..., x_n), (y_1, y_2, y_3, ..., y_n)) \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \end{aligned}$$

es un espacio métrico.

Demostración.
Sean $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ y $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, notemos que

$$\begin{aligned} d_{l^2}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = 0 &\iff \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 = 0 \\ &\iff x_i = y_i \quad \text{para toda } i = 1, ..., n \\ &\iff \bar{x} = \bar{y} \end{aligned}$$

Luego,

$$d_{l^2}(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2} = d_{l^2}(\bar{y}, \bar{x})$$

Es decir que para todo $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $d_{l^2}(\bar{x}, \bar{y}) = d_{l^2}(\bar{y}, \bar{x})$.

Ahora consideremos $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3, ..., z_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$
\begin{aligned}
d_{l^2}(\bar{x},\bar{y})^2 &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i+z_i-y_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}[(x_i-z_i)+(z_i-y_i)]^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)(z_i-y_i) + \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)} + \sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2 \\
&= d_{l^2}(\bar{x},\bar{z})^2 + 2d_{l^2}(\bar{x},\bar{z})d_{l^2}(\bar{z},\bar{y}) + d_{l^2}(\bar{z},\bar{y})^2 \\
&= [d_{l^2}(\bar{x},\bar{z}) + d_{l^2}(\bar{z},\bar{y})]^2
\end{aligned}
$$

De aquí obtenemos que

$$d_{l^2}(\bar{x},\bar{y})^2 \leq [d_{l^2}(\bar{x},\bar{z}) + d_{l^2}(\bar{z},\bar{y})]^2 \implies d_{l^2}(\bar{x},\bar{y}) \leq d_{l^2}(\bar{x},\bar{z}) + d_{l^2}(\bar{z},\bar{y})$$

$\therefore$ $(\mathbb{R}^n, d_l^2)$ es un espacio métrico.

$\blacksquare$

3. Prueba las siguientes series de desigualdades en $\mathbb{R}^n$:

   a) $d_{l^2}(x,y) \leq d_{l^1}(x,y) \leq \sqrt{n}d_{l^2}(x,y)$
   b) $\frac{1}{\sqrt{n}}d_{l^2}(x,y) \leq d_{l^\infty}(x,y) \leq d_{l^2}(x,y)$

Donde $\quad d_{l^1}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \mid x_i - y_i \mid \quad$ y $\quad d_{l^\infty}(x,y) = \sup\{\mid x_i - y_i \mid : 1 \leq i \leq n\}$.

Demostración.
a). Sea $\bar{z} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$. Notemos que

$$
\begin{aligned}
d_{l^1}(x,y) &= \sum_{i=1}^{n}\mid z_i \mid \\
\implies d_{l^1}(x,y)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n}\mid z_i \mid\right)^2 \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(\mid z_i \mid^2)\sum_{i=1}^{n}(1^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(\mid z_i \mid^2)n
\end{aligned}
$$

Donde la desigualdad se da por la Desigualdad de Hölder, entonces

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mid z_i \mid\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (\mid z_i \mid^2) n$$

$$\implies \sum_{i=1}^{n} \mid z_i \mid \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mid z_i \mid^2) n}$$

$$\implies d_{l^1}(x,y) \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

$$\therefore d_{l^1}(x,y) \leq \sqrt{n} d_{l^2}(x,y)$$

Luego, notemos que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \mid z_i \mid\right)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} \mid z_i \mid^2$$

por ser $\mid z_i \mid$ no negativo. Entonces, sacando raíz de ambos lados,

$$\sum_{i=1}^{n} \mid z_i \mid \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid z_i \mid^2}$$

$$\therefore d_{l^2}(x,y) \leq d_{l^1}(x,y)$$

$$\therefore d_{l^2}(x,y) \leq d_{l^1}(x,y) \leq \sqrt{n} d_{l^2}(x,y)$$

$\square$

b). Sea $\bar{z} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$. Notemos que

$$\begin{aligned} \parallel \bar{z} \parallel_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mid z_i \mid^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \max_{i=1,\ldots,n} \mid z_i \mid^2} \\ &= \sqrt{n \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \mid z_i \mid^2} \\ &= \sqrt{n} \cdot \max_{i=1,\ldots,n} \mid z_i \mid \\ &= \sqrt{n} \parallel \bar{z} \parallel_\infty \end{aligned}$$

$$\implies \parallel \bar{z} \parallel_2 \leq \sqrt{n} \parallel \bar{z} \parallel_\infty \qquad ...(1)$$

Por otro lado, tenemos que

$$
\begin{aligned}
\| \bar{z} \|_\infty &= \max_{i=1,\ldots,n} | z_i | \\
&= \sqrt{\max_{i=1,\ldots,n} | z_i |^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} | z_i |^2} \\
&= \| \bar{z} \|_2
\end{aligned}
$$

$$
\Longrightarrow \| \bar{z} \|_\infty \leq \| \bar{z} \|_2 \qquad \ldots(2)
$$

Y de este modo, juntando las desigualdades (1) y (2),

$$
\| \bar{z} \|_2 \leq \sqrt{n} \| \bar{z} \|_\infty \leq \sqrt{n} \| \bar{z} \|_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{n}} \| \bar{z} \|_2 \leq \| \bar{z} \|_\infty \leq \| \bar{z} \|_2
$$

$$
\therefore \frac{1}{\sqrt{n}} d_{l^2}(x, y) \leq d_{l^\infty}(x, y) \leq d_{l^2}(x, y)
$$

■

4. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dos sucesiones en un espacio métrico (X, d). Supongamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ con $a, b \in X$. Muestra que $\lim_{n\to\infty} d(a_n, b_n) = d(a, b)$.
5. Sea $p \geq 1$, $\| (x, y) \| := (| x |^p + | y |^p)^{\frac{1}{p}}$ y sea

$$
d((x, y), (r, s)) = (| x - r |^p + | y - s |^p)^{\frac{1}{p}}
$$

Demuestra que es una norma y por lo tanto $d((x, y), (r, s))$ es una métrica en $\mathbb{R}^2$.

6. Sea $(E, \| \ \|)$ un espacio normado y sea $B(x_0, 1) := \{x \in E : \| x \| < 1\}$.
   a) Demuestra que $B(x_0, 1)$ es un conjunto convexo; es decir que si $x, y \in B(x_0, 1)$, entonces $tx + (1 - t)y \in B(x_0, 1)$ para todo $0 < t < 1$.
   b) Demuestra que el conjunto de todas las métricas definidas en un conjunto X es un conjunto convexo.

Demostración.

a). Sean $x, y \in B(x_0, 1)$, entonces, por definición, $\| x \| < 1$ y $\| y \| < 1$.
Queremos demostrar que $\| tx + (1 - t)y \| < 1$ para todo $0 < t < 1$. Entonces notemos que

$$
\| tx + (1 - t)y \| \leq \| tx \| + \| (1 - t)y \| = t \| x \| + (1 - t) \| y \|
$$

Y dado que $\| x \| < 1$ y $\| y \| < 1$, podemos escribir $\| x \| \leq a$ y $\| y \| \leq b$ con $a, b < 1$. Entonces

$$
\begin{gathered}
\| tx + (1 - t)y \| \leq \| ta + (1 - t)b \| < \| t1 + (1 - t)1 \| = \| 1 \| = 1 \\
\Longrightarrow \| tx + (1 - t)y \| < 1 \\
\therefore tx + (1 - t)y \in B(x_0, 1)
\end{gathered}
$$

□

b). Sea $\mathcal{M}$ el conjunto de todas las métricas definidas en un conjunto X. Debemos demostrar que si d_1 y d_2 son métricas en X, entonces $d_t = td_1 + (1-t)d_2$ para $0 < t < 1$ es también una métrica en X. Así, observemos que

$$d_t(x,y) = td_1(x,y) + (1-t)d_2(x,y) \geq 0$$

ya que $d_1(x,y) \geq 0$ y $d_2(x,y) \geq 0$.
Luego,

$$\begin{aligned} d_t(x,y) = 0 &\iff td_1(x,y) + (1-t)d_2(x,y) = 0 \\ &\implies d_1(x,y) = 0 \quad \text{y} \quad d_2(x,y) = 0 \end{aligned}$$

Lo cual es cierto siempre que $x = y$, pues d_1 y d_2 son métricas.
Ahora,

$$\begin{aligned} d_t(x,y) = td_1(x,y) + (1-t)d_2(x,y) &= td_1(y,x) + (1-t)d_2(y,x) = d_t(y,x) \\ &\implies d_t(x,y) = d_t(y,x) \end{aligned}$$

Y finalmente,

$$\begin{aligned} d_t(x,z) &= td_1(x,z) + (1-t)d_2(x,z) \\ &\leq t(d_1(x,y) + d_1(y,z)) + (1-t)(d_2(x,y) + d_2(y,z)) \\ &= td_1(x,y) + td_1(y,z) + (1-t)d_2(x,y) + (1-t)d_2(y,z) \\ &= (td_1(x,y) + (1-t)d_2(x,y)) + (td_1(y,z) + (1-t)d_2(y,z)) \\ &= d_t(x,y) + d_t(y,z) \\ &\implies d_t(x,z) \leq d_t(x,y) + d_t(y,z) \end{aligned}$$

Así, d_t cumple las tres propiedades para ser métrica en X, por lo tanto, hemos demostrado que el conjunto $\mathcal{M}$ es un conjunto convexo.

$\blacksquare$

7. Demuestra el siguiente resultado. Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$, con $x_{2n} \leq x_{2n+2} \leq x_{2n+1} \leq x_{2n-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty}(x_{2n-1} - x_{2n}) = 0$. Entonces $\{x_n\}$ converge a alguna $x \in \mathbb{R}$ y $x_{2n} \leq x \leq x_{2n-1}$ para toda $n \in \mathbb{N}$. Después usa ese resultado para probar que la siguiente sucesión:

$$\{a_n\} = \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \end{cases}$$

Converge a $\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$.
8. Para toda $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ y $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, verifica que
   a) $\{a_n\}$ es estrictamente creciente.
   b) $\{b_n\}$ es estrictamente decreciente.
   c) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ el límite de estas dos sucesiones es denotado por e. Tenemos que $2 < e < 4$.

Solución.

a). Consideremos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$ y notemos que

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= \ln\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right) - \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\\ &= (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Y por la expansión de Taylor respecto al logaritmo natural $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$ nos queda que

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) &\approx \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2}\\ \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &= (n+1)\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2}\right) - n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right)\\ &= 1 - \frac{1}{2(n+1)^2} - 1 + \frac{1}{2n}\\ &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)}\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} > 0 \Longrightarrow \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > 0 \Longrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$$

$\therefore \{a_n\}$ es estrictamente creciente.

$\square$

b). Consideremos $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}$ y notemos que

$$\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right) = (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - (n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

Y por la expansión de Taylor mencionada previamente,

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) &\approx \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\\ \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) &\approx \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2}\end{aligned}$$

Entonces

$$(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-(n+2)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=(n+1)\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)-(n+2)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2(n+1)^2}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{n}-\frac{n+1}{2n^2}\right)-\left(1+\frac{1}{n+1}-\frac{n+2}{2(n+1)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{n+1}{2n^2}+\frac{n+2}{2(n+1)^2}$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\left(\frac{n+1}{2n^2}-\frac{n+2}{2(n+1)^2}\right)$$

Luego,

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}>0$$

Y $\left(\frac{n+1}{2n^2}-\frac{n+2}{2(n+1)^2}\right)$ es siempre negativa, en particular decreciente, afectada por la diferencia con $\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$, por lo que $\ln\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)>0$, entonces $\frac{b_n}{b_{n+1}}>0$ y por lo tanto, $\{b_n\}$ es estrictamente decreciente.

$\square$

c). Consideremos a la sucesión $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Podemos reescribir a b_n en términos de la sucesión a_n como:

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Y se sabe que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$$

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$

Entonces,

$$b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n$$

$\blacksquare$

9. Sea $a, z \in \mathbb{C}$. Entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a \cdot z^n$ converge y su suma es $\frac{a}{1-z}$ si $\| z \| < 1$. Si $a \neq 0$ y $\| z \| \geq 1$, entonces esta serie diverge.
10. Sea $b > 1$ y $b \in \mathbb{N}$ y sea $\left\{x_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ una sucesión de naturales con $0 \leq x_j < b$ para toda j. Entonces la serie $\sum_{j=1}^{\infty} x_j b^{-j}$ converge y su suma x satisface que $0 \leq x \leq 1$.
11. Sea $p \in \mathbb{N}$, $a \in [0, \infty)$ y $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [0, \infty)$. Entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[p]{a_n} = \sqrt[p]{a}$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.
12. Evalúa
    a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+2n} - n$
    b) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n}{3^n-n}$
    c) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}+1}{\sqrt{n^4+n^3}}$
13. Sea $0 < a < b < \infty$. Define $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$. Determine si $\{x_n\}$ converge y de ser así, calcule su límite.

Solución.

Definimos $y_n = x_{2n-1}$ y $z_n = x_{2n}$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{2(n+1)-1} \\ &= x_{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}(x_{2n-1} + x_{2n}) \\ &= \frac{1}{2}(y_n + z_n) \end{aligned}$$

Y por otro lado,

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= x_{2(n+1)} \\ &= x_{2n+2} \\ &= \frac{1}{2}(x_{2n} + x_{2n+1}) \\ &= \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{2}(y_n + z_n)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}z_n\right) \\ &= \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{1}{4}z_n \\ &= \frac{3}{4}z_n + \frac{1}{4}y_n \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{2}(y_n + z_n) \\ z_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}z_n + \frac{1}{2}y_n\right) \end{aligned}$$

De modo que tanto y_n como z_n son medias ponderadas de los términos anteriores, lo que sugiere que las diferencias entre términos consecutivos disminuye en n y la relación entre y_{n+1} y z_{n+1} asegura que la sucesión promedie valores.

Para el límite, supongamos que y_n y z_n tienden a L cuando n tiende a infinito, entonces

$$L = \frac{1}{2}(L + L) = L$$

Y

$$L = \frac{3}{4}L + \frac{1}{4}L = L$$

Como ambas expresiones son válidas y consistentes, la sucesión $\{x_n\}$ debe converger a un único valor L, y notemos que las $\{y_n\}$ y las $\{z_n\}$ deben promediar los valores iniciales en cada paso, a saber, los valores a y b, entonces

$$L = \frac{a+b}{2}$$

$$\therefore \{x_n\} \to \frac{a+b}{2}$$

■

14. Sea $0 < a < b < \infty$. Define $x_1 = a, x_2 = b, x_{2n+1} = \sqrt{x_{2n} \cdot x_{2n-1}}$. Entonces la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

Sugerencia: Para $0 < \alpha < \beta$, tenemos que $\alpha < \sqrt{\alpha\beta} < \frac{1}{2}(\alpha + \beta) < \beta$ (Usa las desigualdades de media geométrica y media aritmética) y $\left(\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}\right)^2 < \beta - \alpha$.

15. Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (0, \infty)$ y $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona, entonces la sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida como $c_n = \frac{(a_1+\ldots+a_n)}{b_1+\ldots+b_n}$, es también monótona.

Sugerencia: Si $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} \le \frac{a+c}{b+d} \le \frac{c}{d}$.