Definición 1 (Espacio muestral). Consideremos un experimento aleatorio. El conjunto de posibles resultados de ese experimento se conoce como espacio muestral.

Ejemplo: El espacio muestral del lanzamiento de 2 tetraedros está definido por

$$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4) \\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4) \\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4) \\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4) \end{Bmatrix}$$

donde (i,j) representa el registro de que haya caído i en el primer tetraedro y j en el segundo tetraedro, con $i,j = 1,2,3,4$.

Definición 2 (Principio de conteo). Si Ω es un espacio muestral finito y $A \subseteq \Omega$, entonces

$$P(A) = \frac{\#\text{ de casos favorables } (A)}{\#\text{ de casos totales } (\Omega)}$$

Ejemplo 1.1: Para obtener la probabilidad de obtener un 2 en un dado, primero obtenemos el espacio muestral Ω y el evento de nuestros casos favorables A, entonces

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1,2,3,4,5,6\} \\ A &= \{2\} \end{aligned}$$

Así,

$$P(A) = \frac{\#\text{ de casos favorables } (A)}{\#\text{ de casos totales } (\Omega)} = \frac{1}{6}$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener un 2 en un dado es de $\frac{1}{6}$.

Definición 3 (Variable Aleatoria). Es una función cuyo dominio es el espacio muestral y su imágen son los $\mathbb{R}$, es decir, $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ y satisface

$$\{w \in \Omega \mid X(w) \leq x\} \in \mathcal{F} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde $\mathcal{F}$ es una familia de eventos $(A, B, C, \ldots)$.

Ejemplo: En términos más simples, una variable aleatoria es una función que asigna un valor, usualmente numérico, al resultado de un experimento aleatorio, por decir, los posibles resultados de tirar dos tetraedros.

Definición 4 (Función de densidad). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una variable aleatoria discreta. A la función

$$f_X(x) = P[\{w \in \Omega \mid X(w) = x\}] = P(X = x)$$

se le llama función de densidad de la variable aleatoria X.

Ejemplo: Consideremos el lanzamiento de una moneda en donde se quiere contar el número de soles. Tenemos que $\Omega = \{(a,a),(a,s),(s,a),(s,s)\}$, si $w_1 = (a,a), w_2 = (a,s), w_3 = (s,a), w_4 = (s,s)$ entonces

$$X(w) = \begin{cases} 0 & \text{, si } w = w_1 \\ 1 & \text{, si } w = w_2 \ \ o \ \ w = w_3 \\ 2 & \text{, si } w = w_4 \end{cases}$$

Luego,

$$f_X(0) = P[\{w \in \Omega \mid X(w) = 0\}] = P[\{(a,a)\}] = \frac{1}{4}$$
$$f_X(1) = P[\{w \in \Omega \mid X(w) = 1\}] = P[\{(a,s)\},\{(s,a)\}] = \frac{1}{2}$$
$$f_X(2) = P[\{w \in \Omega \mid X(w) = 2\}] = P[\{(s,s)\}] = \frac{1}{4}$$

Por lo tanto,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{, si } x = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{, si } x = 1 \\ \frac{1}{4} & \text{, si } x = 2 \\ 0 & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

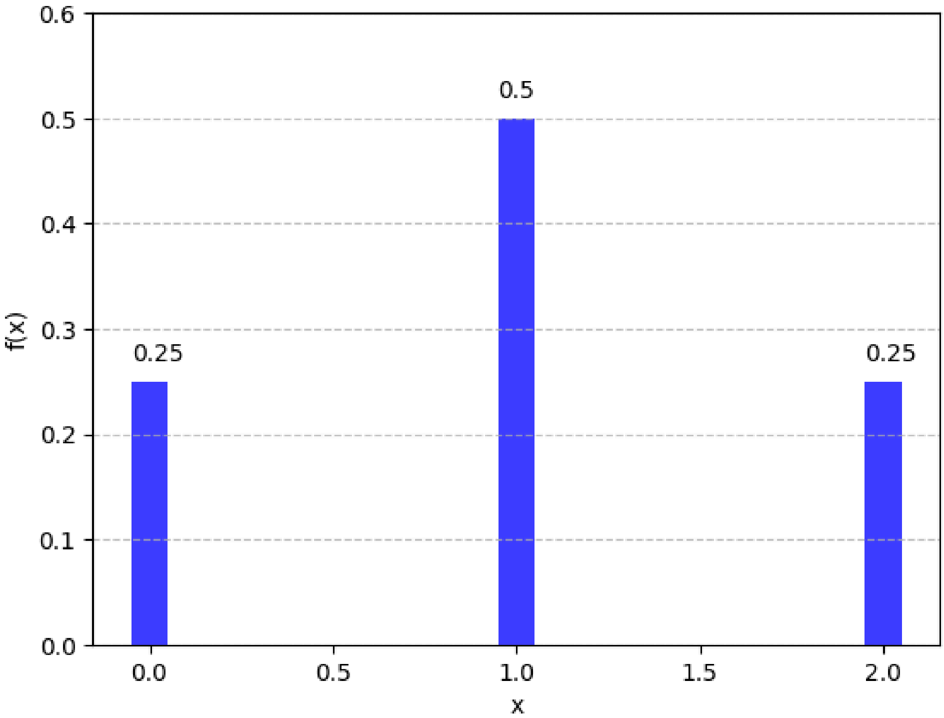

Figure 1: Gráfica de $f_X(x)$.

Definición 5 (Función de distribución). La función de distribución o función de distribución acumulativa $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ de una variable aleatoria X se define por

$$F_X(x) = P[X \leq x], \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: En el lanzamiento de un dado se tiene que $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, y sabemos por el **ejemplo 1.1** que la probabilidad de obtener alguno de los elementos de Ω es de $\frac{1}{6}$. Entonces

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & ,\text{si } x < 1 \\ \frac{1}{6} & ,\text{si } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{6} & ,\text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{3}{6} & ,\text{si } 3 \leq x < 4 \\ \frac{4}{6} & ,\text{si } 4 \leq x < 5 \\ \frac{5}{6} & ,\text{si } 5 \leq x < 6 \\ 1 & ,\text{si } x \geq 6 \end{cases}$$

En la figura 2 se muestra la gráfica de la función de distribución de la variable aleatoria, donde es más sencillo notar la **acumulación de probabilidad** entre los diferentes valores que puede tomar tal función.

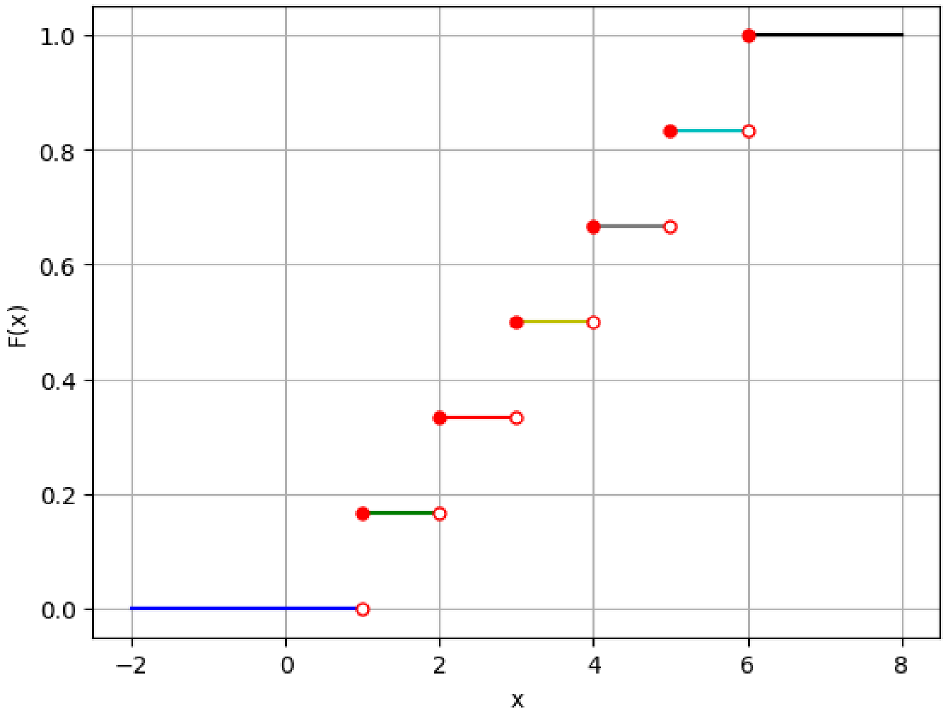

Figure 2: Gráfica de $F_X(x)$.