Płowiec Jakub MOwNiT Gr. 3 lab2b 29.03.2023

Interpolacja funkcji

$$f(x) = e^{-3sin(x)} + 3sin(x) - 1, \qquad x\ e\ [-3\pi, 4\pi]$$

1. Narzędzia

W zadaniu wykorzystano Python 3.9.0, PyCharm, Windows 10

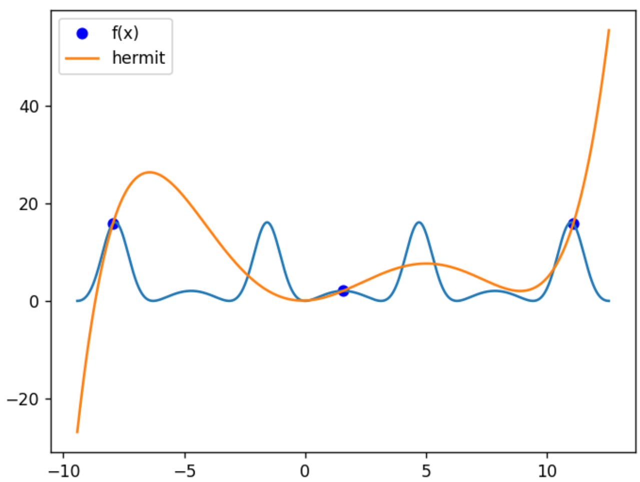
Intel core i5-9600KF

2. Porównanie wyników

W tym zadaniu przy obliczaniu wielomianu interpolacyjnego wykorzystano sposób Hermita. Dodatkowym wykorzystanym zagadnieniem jest sposób na wyznaczenie węzłów. Punkty te mogą występować równomiernie rozłożone od siebie albo na podstawie miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa. Jest to ważna różnica, która zostanie poniżej objaśniona. Niech N będzie oznaczeniem liczby węzłów.

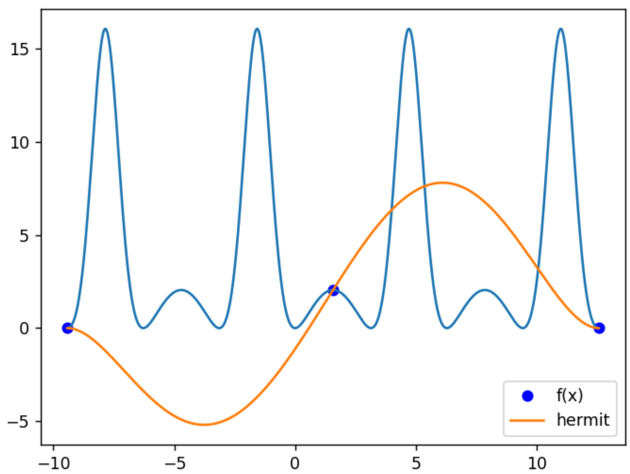
1. N = 3

Wykres 1.1 Zera Czebyszewa



Średni błąd dla zer Czebyszewa: 8.47

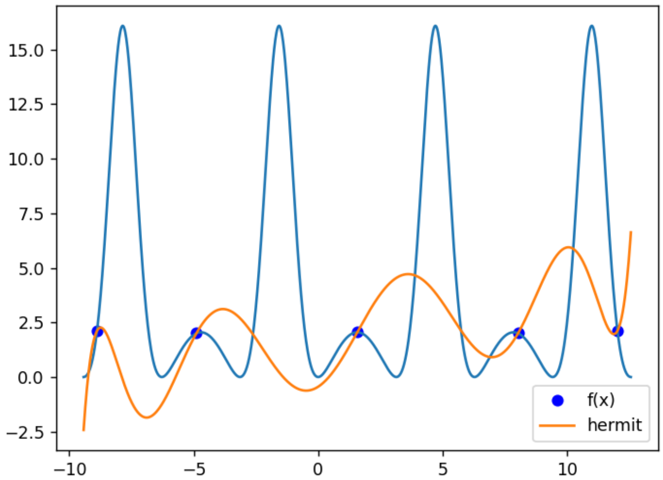
Wykres 1.2 równolegle



Średni błąd dla równoległych: 5.99

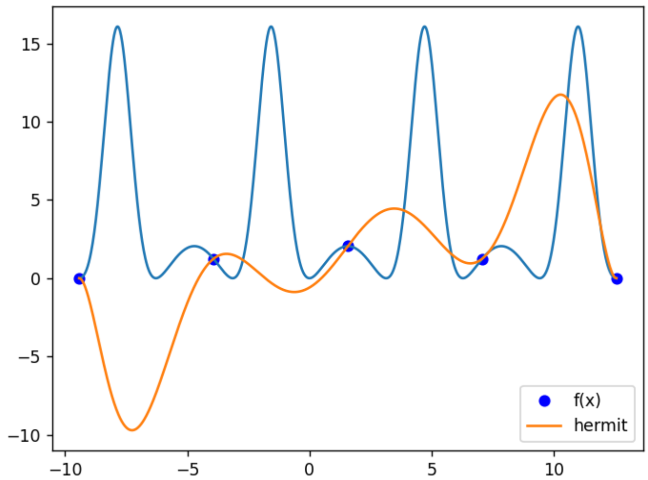
2. N = 5

Wykres 2.1 Zera Czebyszewa



Średni błąd dla zer Czebyszewa: 4.01

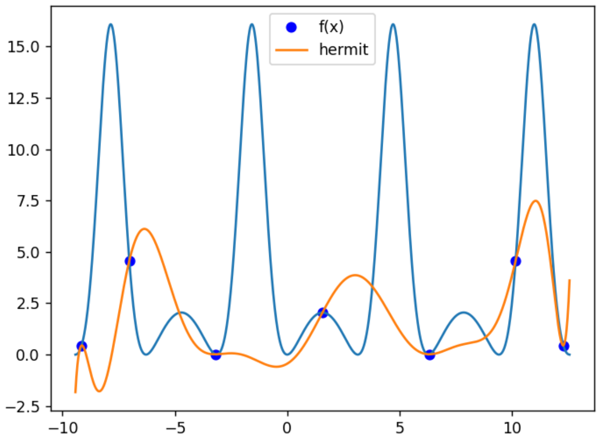
Wykres 2.2 równolegle



Średni błąd dla równoległych: 5.26

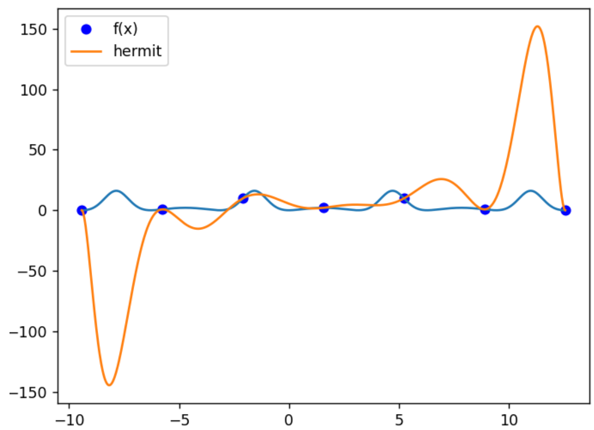
3. N = 7

Wykres 3.1 Zera Czebyszewa



Średni błąd dla zer Czebyszewa: 3.89

Wykres 3.2 równolegle

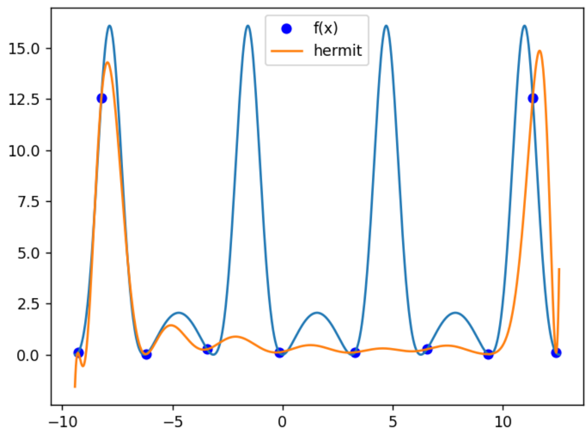


Średni błąd dla równoległych: 28.51

Dla 7 węzłów zaczynamy zauważać rosnące zjawisko na *wykresie 3.2*, jakim jest efekt Rungego. Polega on na tym, iż pomimo zwiększaniu liczby węzłów, które rzekomo mają zwiększać dokładność – to ją jednak tracimy na krańcach przedziału. Jest to wada interpolacji w której to węzły są wyznaczane za pomocą równoległych odcinków między sobą.

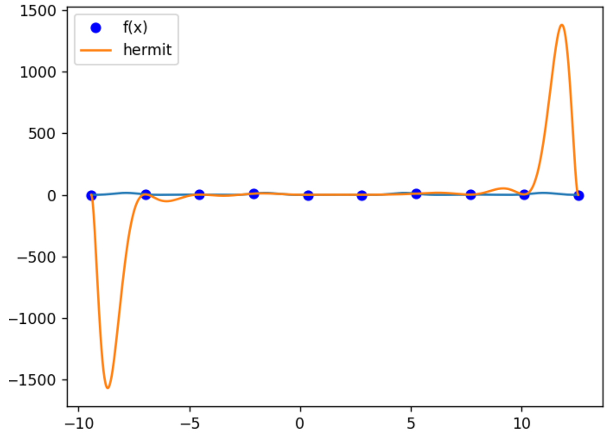
4. N = 10

Wykres 4.1 Zera Czebyszewa



Średni błąd dla zer Czebyszewa: 2.94

Wykres 4.2 równolegle



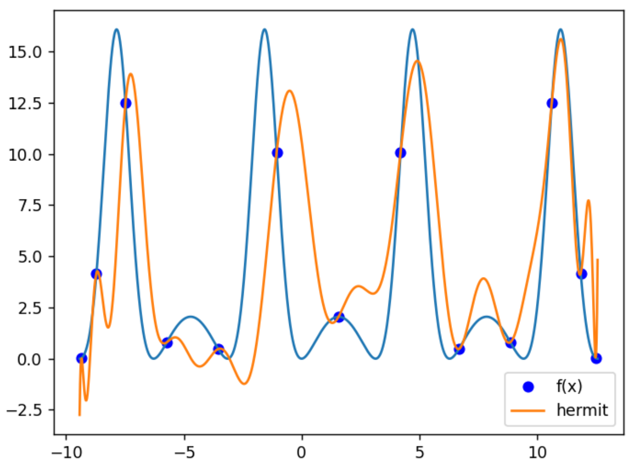
Średni błąd dla równoległych: 154.52

Tak jak widać, niestety wykres na podstawie równoległych węzłów staję się coraz bardziej nieczytelny poprzez zwiększanie efektu Rungego. W związku z tym w niższych przykładach kontynuowane będą tylko wykresy dla węzłów utworzonych na podstawie miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa.

Dla 10 węzłów jesteśmy w stanie na *wykresie 4.1* zauważyć iż wykres interpolacyjny coraz bardziej naśladuje funkcję pierwotną na pierwszych wzniesieniach.

5. N = 13

Wykres 5 Zera Czebyszewa

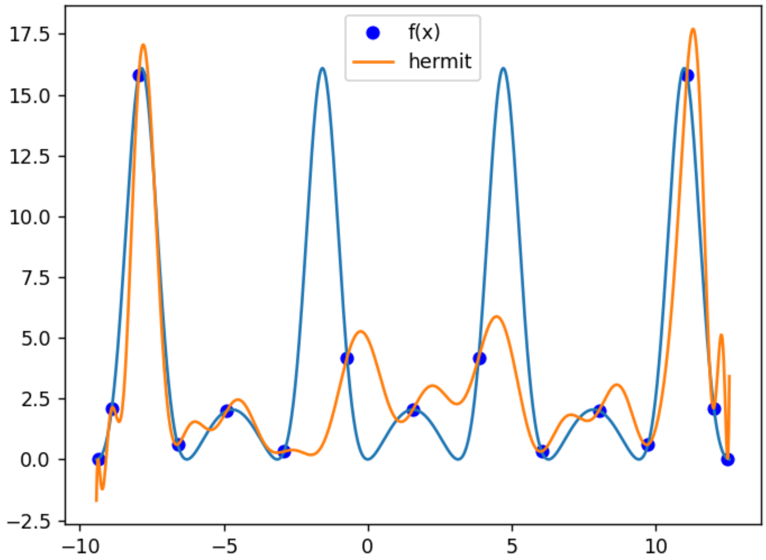


Średni błąd zer Czebyszewa: 3.06

Dla 13 węzłów zauważamy jak wielomian interpolacyjny swoim kształtem w prawie idealny sposób zachowuje się jak funkcja pierwotna

6. N = 15

Wykres 6 Zera Czebyszewa

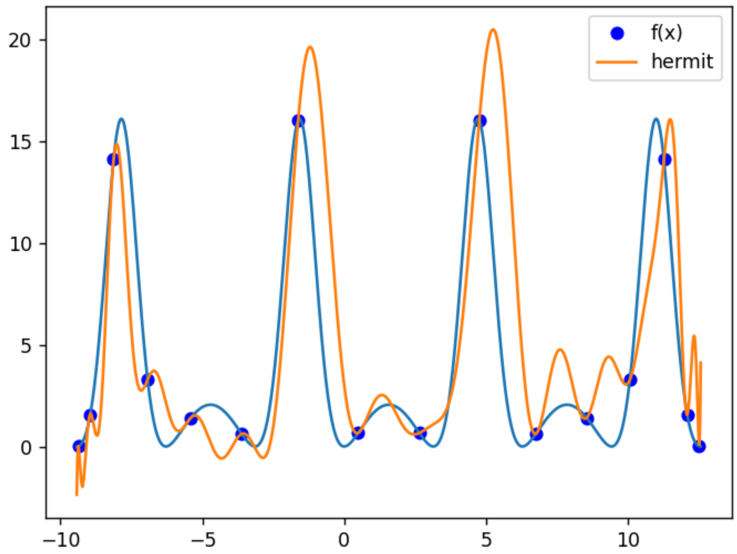


Średni błąd zer Czebyszewa: 2.52

Warto zauważyć jak na *wykresie 5* funkcja swoim kształtem bardzo przypominała, tak jak dla zwiększonej liczbie węzłów o 2 – znowu wygląda gorzej.

7. N = 16

Wykres 7 Zera Czebyszewa

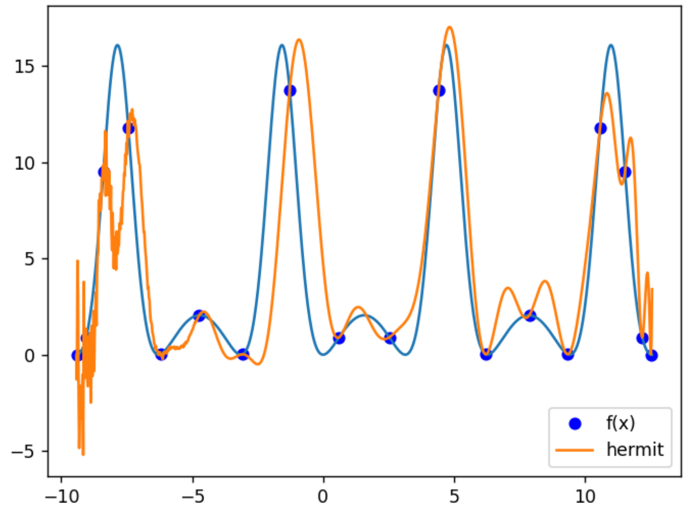


Średni błąd zer Czebyszewa: 2.73

Zauważmy, jak wielomian interpolacyjny co zwiększenie liczby węzłów zmienia za każdym razem swój kształt. Kolejno na *wykresach 5, 6, 7*

Wielomian ten można uznać za najdokładniejsze przybliżenie funkcji pierwotnej.

8. N = 18



Dla 18 węzłów niestety zaczynamy już zauważać niedokładność, która występuje dla sposobu Hermita. Zwiększając kolejno liczbę węzłów doświadczymy coraz większego efektu, który będzie powodował nieczytelność wykresu i niedokładność wielomianu interpolacyjnego.

3. Błędy interpolacyjne:

Tabela 1. Średnia różnica funkcji pierwotnej od wielomianu interpolacyjnego

Ilość węzłów	Zera Czebyszewa	Równoległe
3	8.47	5.99
5	4.01	5.26
7	3.89	28.51
10	2.94	154.52
13	3.06	
15	2.52	
16	2.73	

Analizując *Tabele 1* zauważmy, iż nie jesteśmy w stanie znacząco zbliżyć się do funkcji pierwotnej jeżeli badamy średni błąd wielomianu interpolacyjnego. Również stwierdzam, iż nie ma sensu powoływać się na dokładność wielomianu tylko i wyłącznie na podstawie liczb, bo jak widać dla N=15 uzyskujemy lepsze przybliżenie niż dla N=16, natomiast wykres interpolacyjny całkowicie inaczej wygląda.

Dla N=16 jednak wizualnie otrzymujemy lepszy wynik pomimo lekko większego błędu.

Tabela 2. Maksymalna różnica funkcji pierwotnej od wielomianu interpolacyjnego

Ilość węzłów	Zera Czebyszewa	Równoległe
3	55.43	19.80
5	16.30	24.78
7	16.55	158.39
10	15.78	1575.52
13	12.99	
15	15.52	
16	14.04	

Analizując *Tabele 2* widzimy, że pomimo różnej liczbie węzłów za każdym razem w pewnych miejscach nie jesteśmy w stanie osiągnąć upragnionego kształtu. Maksymalny błąd prawie zawsze wynosi tyle samo.

3. Podsumowanie i wnioski

Wyliczając wielomian interpolacyjny korzystając z metody Hermita nie jesteśmy w stanie dokładnie uzyskać funkcji pierwotnej. Tak jak w przypadku Lagrange'a oraz Newtona uzyskujemy efekt Rungego dla N=7 dla węzłów równoległych, który uniemożliwia dalszą interpolację. W ten sposób jesteśmy zauważyć przewagę jaką dysponują węzły utworzone na podstawie zer wielomianu Czebyszewa.

Wielomian interpolacyjny dość często zmienia swój kształt drastycznie zwiększając pojedynczo liczbę węzłów. Pomimo ich zwiększania nie jesteśmy końcowo uzyskać docelowej funkcji, co jest dość słabym wynikiem – gdyż dla poprzednich sposobów wielomian interpolacyjny potrafił osiągnąć upragniony kształt.

Interpolację dla sposobu Hermita kończymy już dla 18 węzłów z powodu występowania niedokładności, która wiąże się z problemami obliczeniowymi.