Płowiec Jakub MOwNiT Gr. 3 lab2 22.03.2023

Interpolacja funkcji

$$\boldsymbol{f(x) = e^{-3sin(x)} + 3sin(x) - 1, \qquad x\ e\ [-3\pi, 4\pi]}$$

1. Narzędzia

W zadaniu wykorzystano Python 3.9.0, PyCharm, Windows 10
Intel core i5-9600KF

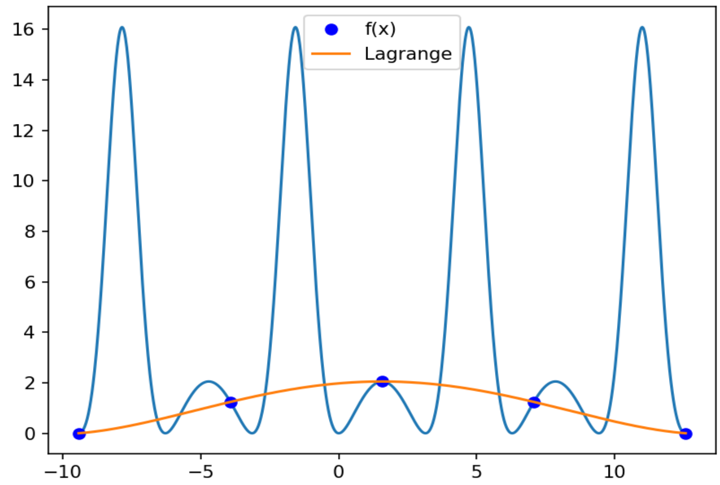
2. Porównanie wyników

W zadaniu można wykorzystać dwa sposoby na obliczenie wielomianu interpolacyjnego m.in.: Newtona oraz Lagrange’a.
W podanych niżej przykładach i wykresach posłużyłem się konkretnie sposobem Lagrange’a, lecz warte jest zauważenie, iż przy małej liczbie węzłów te sposoby dają identyczne rezultaty.
Dodatkowym wykorzystanym zagadnieniem jest sposób na wyznaczenie węzłów. Punkty te mogą występować równomiernie rozłożone od siebie albo na podstawie miejsc zerowych wielomianu Czebyszewa. Jest to ważna różnica, która zostanie poniżej objaśniona.

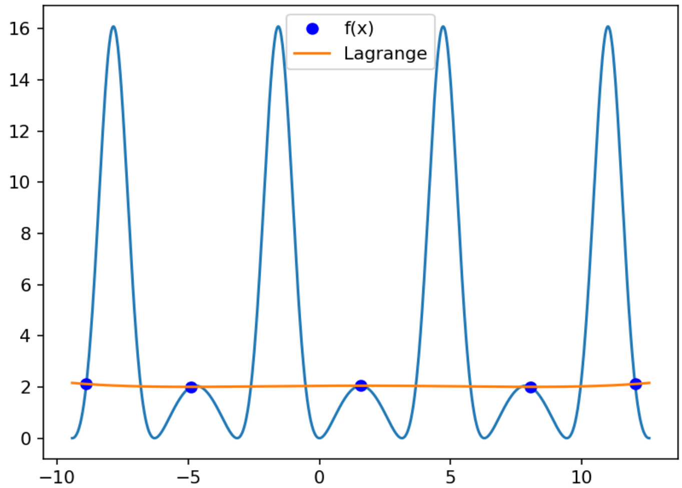
Niech N będzie oznaczeniem liczby węzłów.

a. N = 5

Wykres 1.1 Równoległe



Wykres 1.2 Zera Czebyszewa

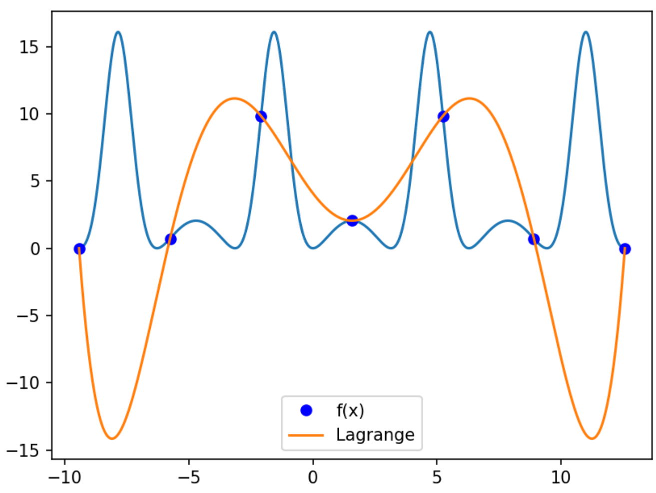


Na **Wykresie 1.2** można zauważyć ciekawe rozłożenie węzłów, które tworzą niemalże linię prostą.

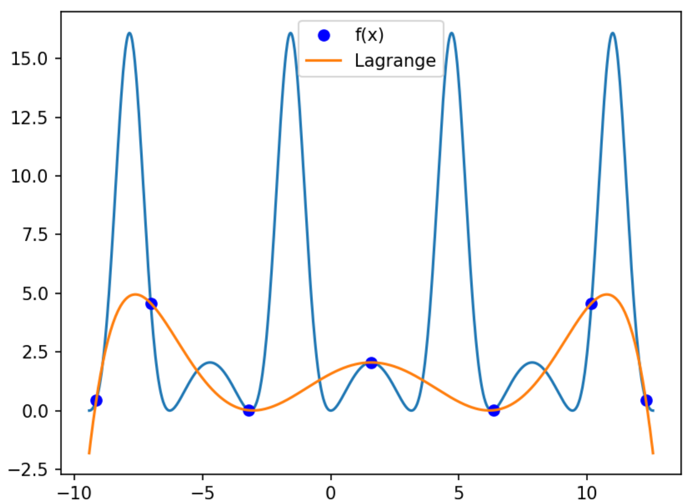
1. Maksymalny błąd przy równoległych: 15.89
2. Maksymalny błąd przy zerach Czebyszewa: 14.05

b. N = 7

Wykres 2.1 Równoległe



Wykres 2.2 Zera Czebyszewa



Ważnym zaobserwowaniem na **Wykresie 2.1** jest tzw. *efekt Rungego*. Polega on na pogorszeniu jakości interpolacji, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Jest to szczególnie widoczne na końcach przedziałów.

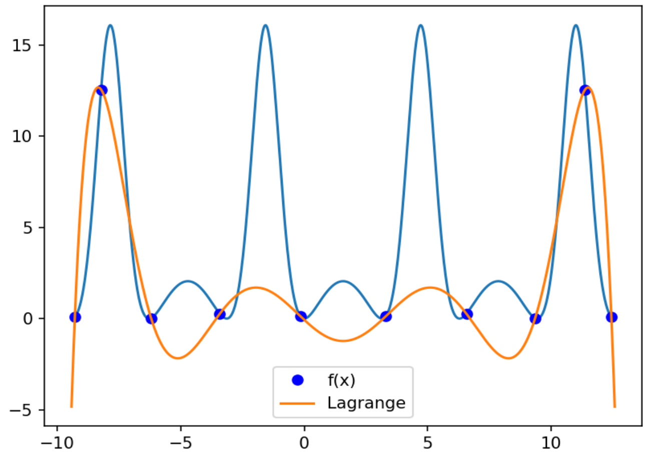
W porównaniu do wielomianu utworzonego na podstawie zer Czebyszewa, różnica jest bardzo zauważalna i jest to ogromna przewaga dla węzłów wyznaczanych w ten sposób.

1. Maksymalny błąd przy równoległych: 29.98

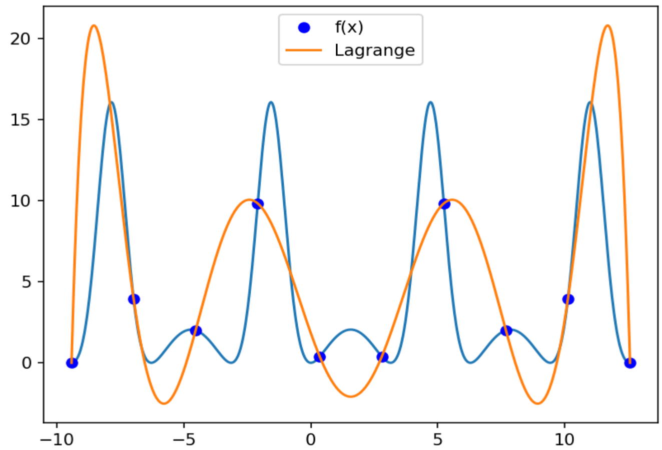
2. Maksymalny błąd przy zerach Czebyszewa: 15.54

c. N = 10

Wykres 3.1 Równoległe



Wykres 3.2 Zera Czebyszewa



Ciekawym zjawiskiem jest, że pomimo dla N = 7 wystąpił już lekki efekt Rungego – tak dla N = 10 wykres zachowuje się w miarę normalnie dla węzłów rozmieszczonych równoległe na **Wykresie 3.1.**

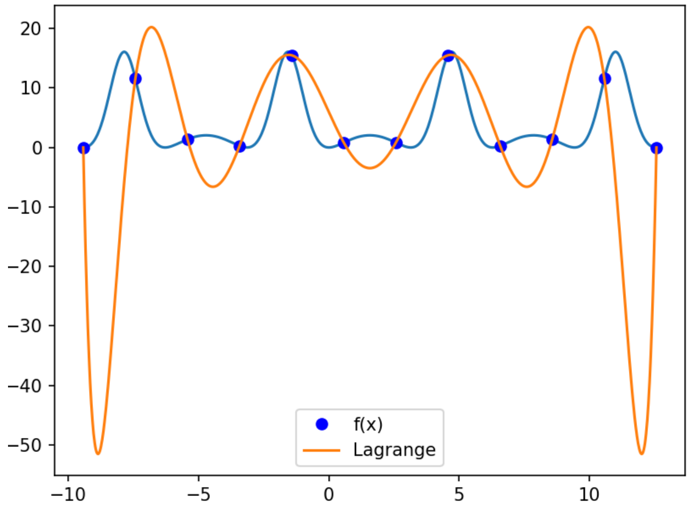
Zauważmy również jak zwiększając liczbę węzłów interpolacja coraz bardziej przypomina naszą główna funkcję.

1. Maksymalny błąd przy równoległych: 16.52

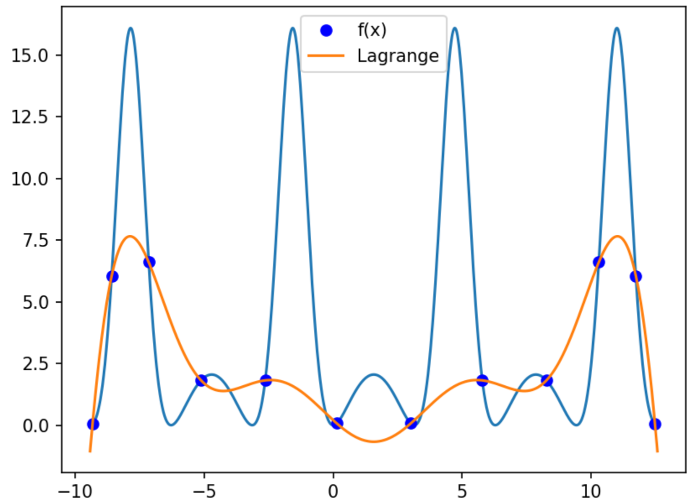
2. Maksymalny błąd przy zerach Czebyszewa: 14.48

d. N = 12

Wykres 4.1 Równoległe



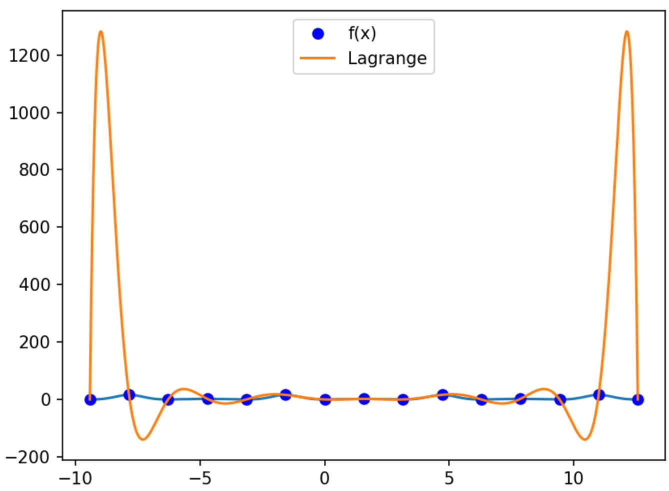
Wykres 4.2 Zera Czebyszewa



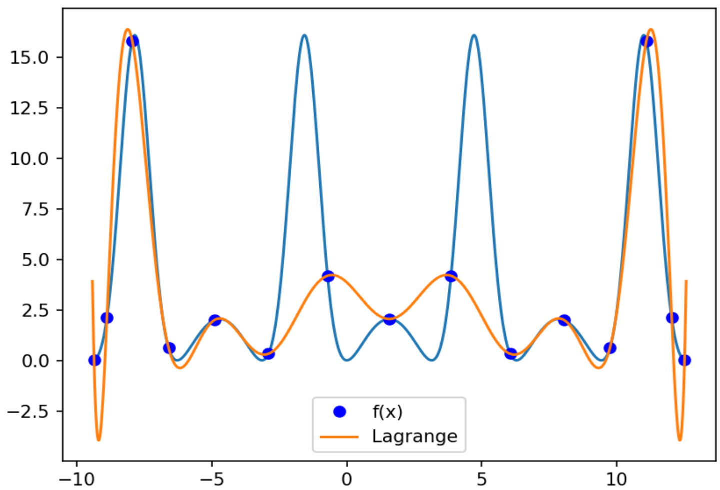
1. Maksymalny błąd przy równoległych: 54.21
2. Maksymalny błąd przy zerach Czebyszewa: 14.50

e. N = 15

Wykres 5.1 Równoległe



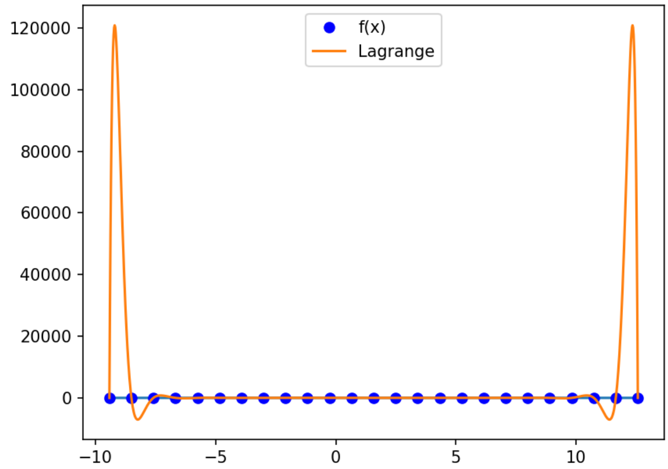
Wykres 5.2 Zera Czebyszewa



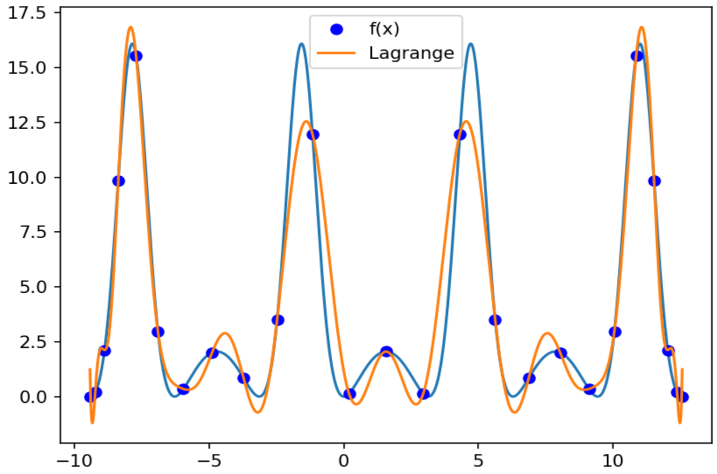
1. Maksymalny błąd przy równoległych: 1280.61
2. Maksymalny błąd przy zerach Czebyszewa: 13.24

f. N = 25

Wykres 6.1 Równoległe



Wykres 6.2 Zera Czebyszewa



1. Maksymalny błąd przy równoległych: 120880.09
2. Maksymalny błąd przy zerach Czebyszewa: 4.21

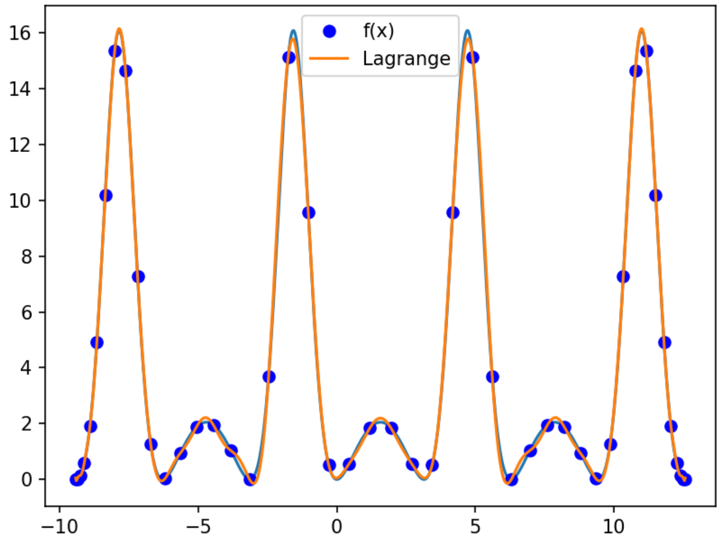
Podsumujmy wyżej zaprezentowane przykłady.

Dla wielomianu interpolacyjnego utworzonego za pomocą węzłów równoległych przybliżanie dość szybko się kończy. Efekt Rungego zapoczątkowany już od siódmego węzła drastycznie się powiększa – co utrudnia dalszy odczyt z wykresu.

W ten sposób zauważamy przewagę rozmieszczenia węzłów za pomocą zer wielomianu Czebyszewa. Wraz z zwiększaniem wykres coraz bardziej przypomina funkcję pierwotną.

g. N = 46

Wykres 7 Zera Czebyszewa



1. Maksymalny błąd przy zerach Czebyszewa: 0.50

Dla N = 46 uzyskujemy przybliżenie godne przedstawienia na **Wykresie 7.** Utworzony wielomian przypomina w niemalże identycznym stopniu podaną funkcję w zadaniu, a występuje tylko lekka rozbieżność w kilku punktach.

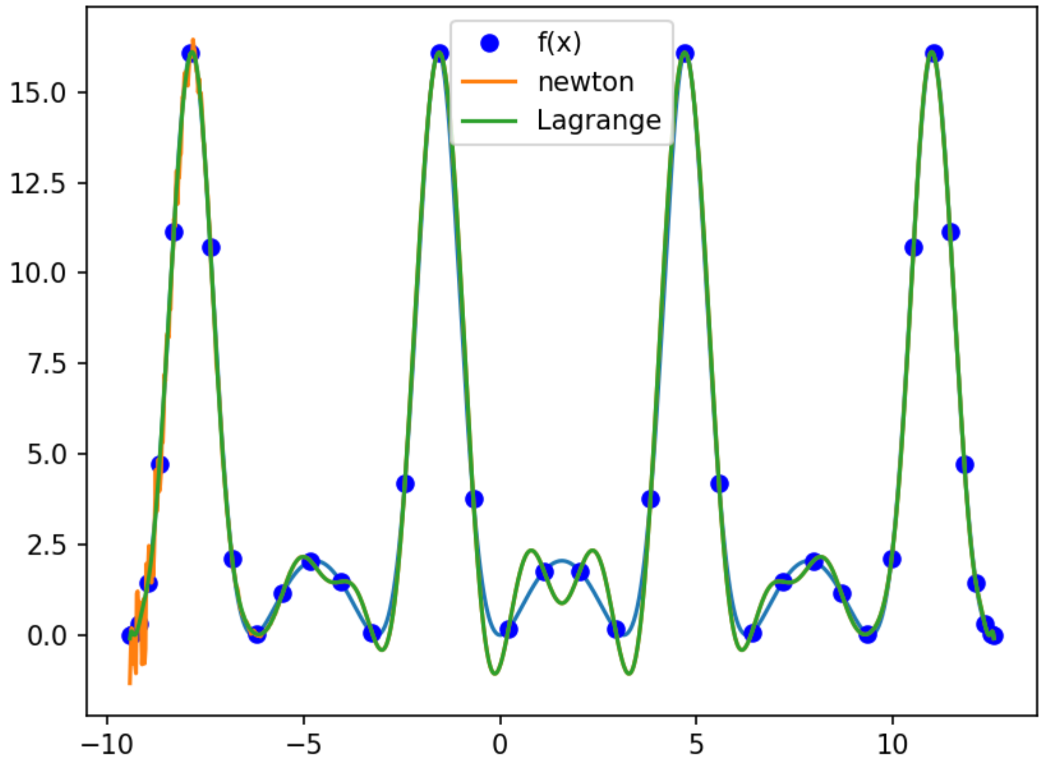
Można śmiało uznać, iż jest to najmniejsza liczba węzłów dla których wielomian interpolacyjny przyjmuje postać funkcji z zadania.

Porównanie sposobu Newtona i Lagrange'a

Wielomiany interpolacyjne wytworzone poprzez dwa sposoby wyglądają identycznie, aż do 37 węzła włącznie. Dla N = 38, gdzie węzły zostały utworzone na podstawie zer Czebyszewa zaczynamy zauważać rozbieżność dwóch sposobów. Zwiększając kolejno liczbę węzłów różnica zacznie nam się powiększać. Zaczyna się ona pojawiać stopniowo od początku przedziału.

Można więc śmiało uznać, iż dla tej funkcji obliczanie wielomianu sposobem Lagrange'a daje dokładniejsze rezultaty dla większej ilości węzłów.

Wykres 8 Porównanie sposobów interpolacyjnych (Zera Czebyszewa)



Porównanie średnich błędów przy interpolacji

Tabela 1

Liczba węzłów	Równoległe węzły	Zera Czebyszewa
5	3.76	3.54
7	8.07	3.45
10	4.20	3.47
12	11.29	3.19
15	120.77	2.37
25	5595.38	1.01
46	2559740.36	0.11

3. Wnioski

Przeprowadzając szereg obliczeń dla przykładowej funkcji jesteśmy w stanie zauważyć różnicę między dwoma sposobami wyznaczenia wielomianu interpolacyjnego oraz jak on się zachowuje na podstawie ilości oraz sposobu wyznaczanych węzłów.

Efekt Rungego jest zauważalny już dość szybko dla małej liczby węzłów, dlatego więc można uznać, iż najlepszym wyborem jest interpolacja za pomocą węzłów wyznaczonych dzięki zerom wielomianu Czebyszewa. Dzięki temu całkowicie unikamy tego zjawiska zwiększając dokładność przybliżenia.

W prostych przybliżeniach nie ma różnicy jakie podejście do wyliczenia wielomianu zastosujemy. Dopiero od N = 38 zauważamy, że sposób Newtona lekko się rozsypuje, a zwiększając stopniowo liczbę węzłów – niestety tracimy na przybliżeniu.