MOwNiT Lab5 - Aproksymacja trygonometryczna

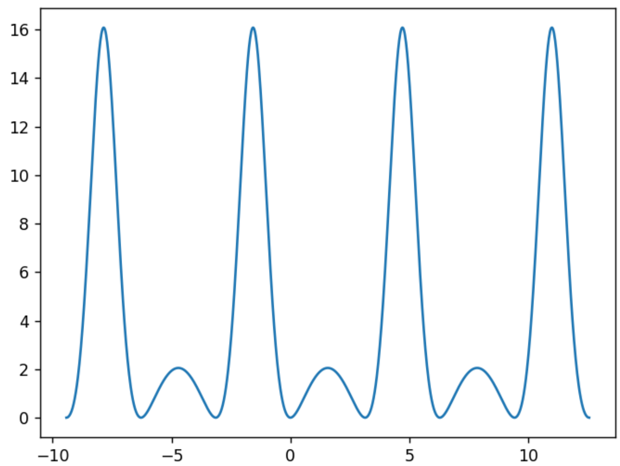
Jakub Płowiec

10 Maja 2023

1 Cel zadania

Wyznaczenie przybliżenia korzystając z aproksymacji średniokwadratowej wielomianami trygonometrycznymi dla zadanej funkcji:

$$e^{-3sin(x)} + 3sin(x) - 1,\ x \in [-3\pi, 4\pi]$$



Wykres 1: Wykres funkcji F(X)

2 Sprzęt

W zadaniu obliczeniowym posłużono się językiem Python 3.9.0 na systemie Windows 10 z procesorem Intel core i5-9600KF

3 Wyprowadzenie i wstęp teoretyczny

Biorąc pod uwagę n węzłów aproksymacji mamy następujące dane:

- $(x_i, y_i) = (x_i, F(x_i)), \quad$ gdzie i $\in [0, 1, \ldots, n-1]$
- Układ m funkcji bazowych za pomocą których będzie składana funkcja aproksymacyjna $\varphi_j(x), \quad$ gdzie j $\in [0, 1, \ldots, m-1]$

Szukamy wielomianu aproksymacyjnego w następującej postaci:

$$f(x) = \Sigma_{j=0}^{m-1} a_j \varphi_j(x) \tag{1}$$

Za funkcje bazowe można przyjąć ciąg postaci:

$$1, sin(x), cos(x), sin(2x), cos(2x), ...$$

Ograniczając funkcję do przedziału $[-\pi, \pi]$ nasza funkcja spełnia następujące warunki Dirichleta:

- Funkcja F jest ciągła
- Funkcja F jest na R ograniczona
- Funkcja F jest kawałkami monotoniczna
- Zachodzi warunek: $F(-\pi) = F(\pi) = \frac{\lim_{x\to\pi^+} F(x) + \lim_{x\to\pi^-} F(x)}{2}$

Korzystając z tej wiedzy jesteśmy w stanie rozwinąć funkcję w szereg Fouriera za pomocą następujących wzorów:

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{m-1}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \tag{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx \tag{3}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos(kx) dx \tag{4}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin(kx) dx \tag{5}$$

Warto natomiast zauważyć, iż nasze funkcje bazowe są do siebie ortogonalne oraz wzory są określone dla problemu ciągłego. W naszym przypadku posiadamy problem dyskretny, przez co przekształcimy te wzory na poniższe:

$$W_m(x) = \frac{a_0}{2} + \Sigma_{k=1}^{m-1}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \tag{6}$$

$$a_k = \frac{2}{n}\Sigma_{i=0}^{n-1} f(x_i)\cos(kx_i) \tag{7}$$

$$b_k = \frac{2}{n}\Sigma_{i=0}^{n-1} f(x_i)\sin(kx_i) \tag{8}$$

Za pomocą przygotowanych wzorów wystarczy wszystkie współczynniki wyliczyć i zacząć generować funkcję aproksymacyjną dla poszczególnych m.

Dodatkowym ograniczeniem o którym trzeba pamiętać, aby problem był dobrze uwarunkowany jest warunek:

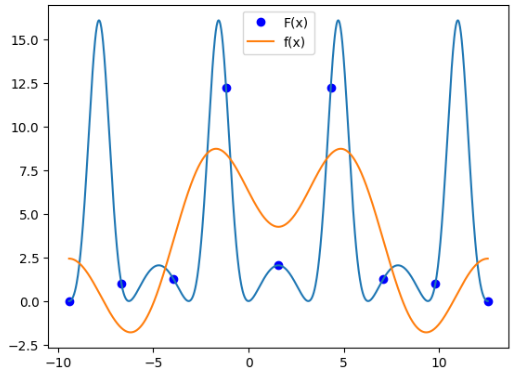
$$m - 1 \leq \lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor, \quad \text{gdzie m to liczba funkcji bazowych} \tag{9}$$

Należy jednak jeszcze pamiętać o odpowiednim przeskalowaniu przedziału na $[-\pi, \pi]$

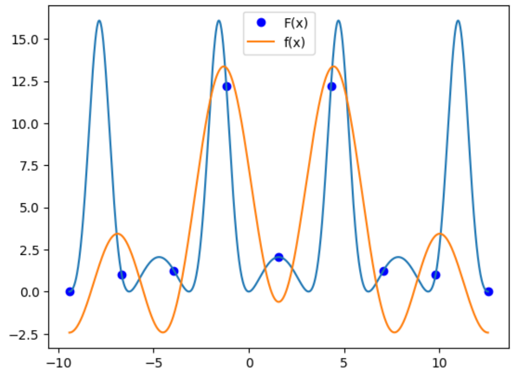
4 Analiza wyników

Całe doświadczenie zostało przeprowadzone na podstawie równoodległych punktów, a wykresy zostały narysowane na podstawie 1000 punktów.

4.1 n = 9 węzłów



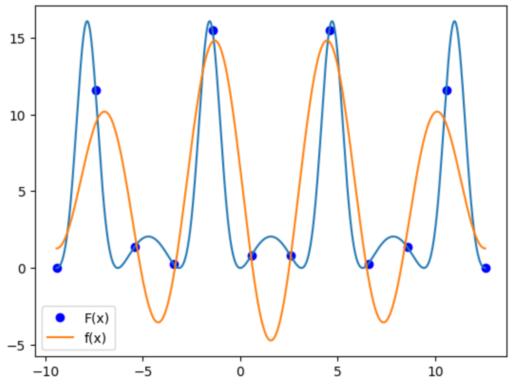
Wykres 2: n = 9, m = 4



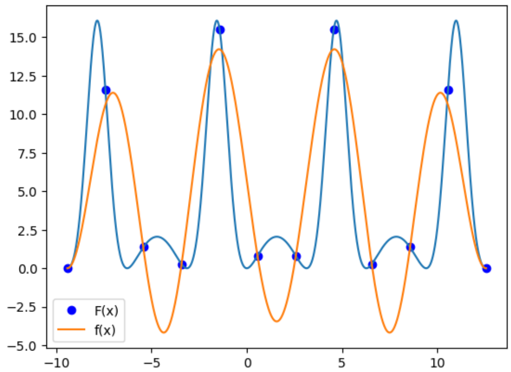
Wykres 3: n = 9, m = 5

Przy małej ilości węzłów jak i stopniu wielomianu zauważamy standardowo dość kiepskie rezultaty.

4.2 n = 12 węzłów



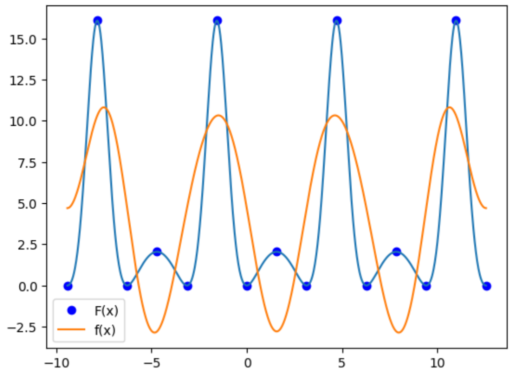
Wykres 4: n = 12, m = 5



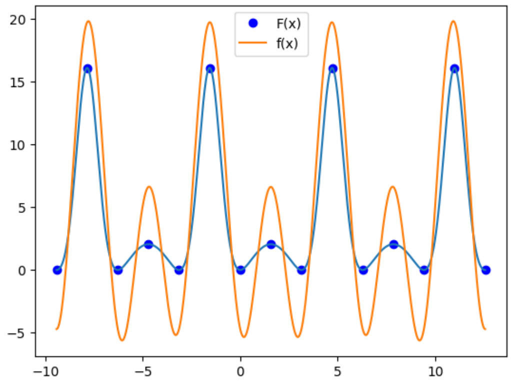
Wykres 5: n = 12, m = 6

Kolejno na wykresach 4 i 5 zaczynamy zauważać naśladowanie funkcji z zadania.

4.3 n = 15 węzłów



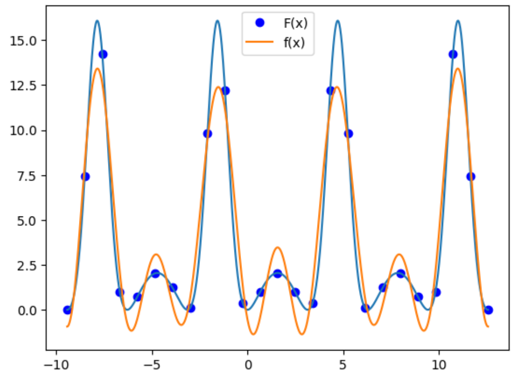
Wykres 6: n = 15, m = 7



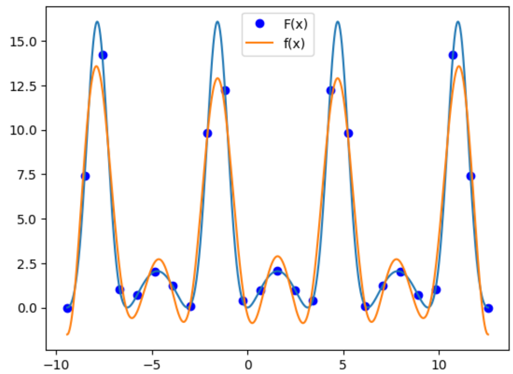
Wykres 7: n = 15, m = 8

W tych przypadkach możemy zauważyć jak na wykresie 7 funkcja stara się naśladować już bardziej funkcję z zadania. Zauważamy też ciekawe oscylacje.

4.4 n = 25 węzłów

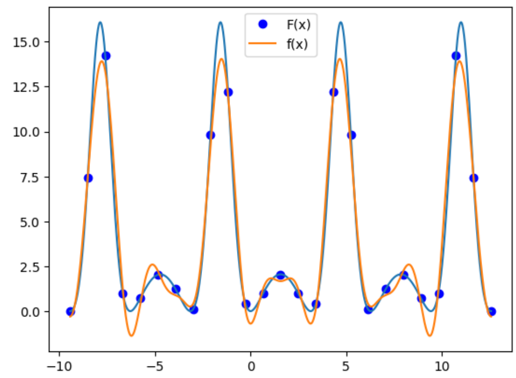


Wykres 8: n = 25, m = 10

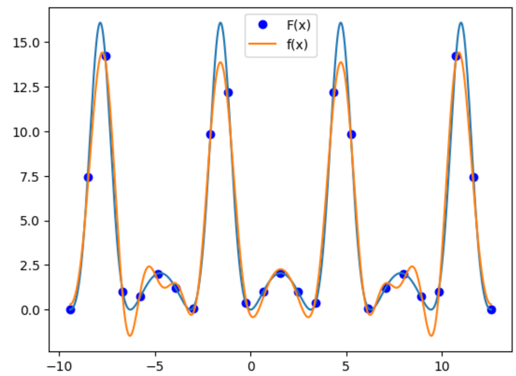


Wykres 9: n = 25, m = 11

Funkcja aproksymacyjna zaczyna coraz lepiej wyglądać.



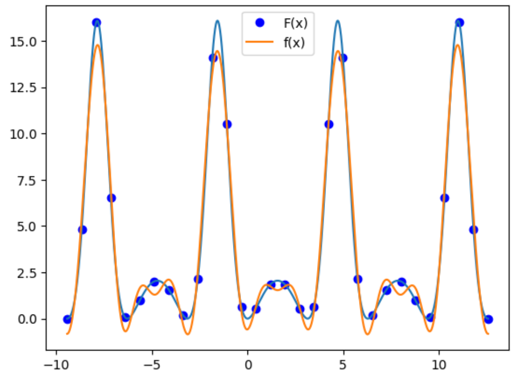
Wykres 10: n = 25, m = 12



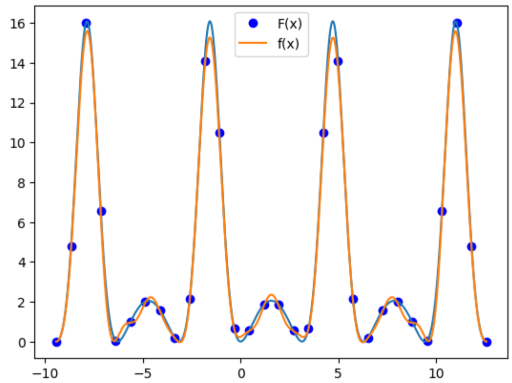
Wykres 11: n = 25, m = 13

Powyżej zestawiono 4 wykresy przedstawiające zmianę funkcji aproksymującej za pomocą zwiększania liczby funkcji bazowych. Efekty stają się coraz bardziej zadowalające na wykresach 10 i 11.

4.5 n = 30 węzłów



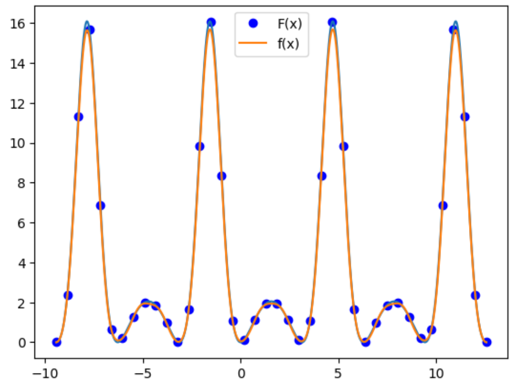
Wykres 12: n = 30, m = 14



Wykres 13: n = 30, m = 15

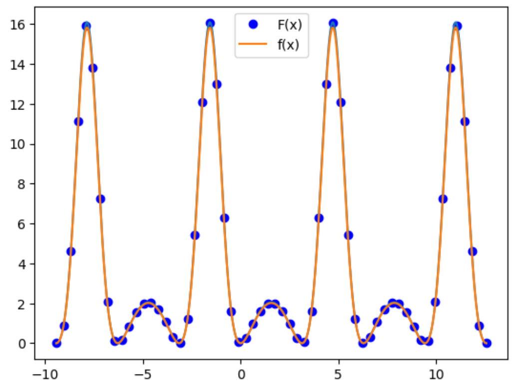
Zerkając na powyższe wykresy nr. 12 oraz 13 można śmiało uznać, że aproksymacja wygląda już niemal identycznie.

4.6 n = 40 węzłów



Wykres 14: n = 40, m = 20

4.7 n = 60 węzłów



Wykres 15: n = 60, m = 30

Zauważmy jak mała jest różnica między wykresami 14, a 15. Zwiększając coraz bardziej liczbę węzłów jak i stopień wielomianu nie dostrzegamy jakiejkolwiek różnicy. Można uznać, że na wykresie 14 prezentującym 40 węzłów i wielomian 19-go stopnia osiągamy najlepszą aproksymację.

5 Błędy aproksymacji

W celu wyliczenia błędu aproksymacji posłużymy się wyliczeniami na podstawie ponownych 1000 punktów. Pierwsze zestawienie będzie polegało na ukazaniu największego błędu między wielomianem aproksymacyjnym, a funkcją z zadania obliczanego ze wzoru:

$$max|F(x_i) - f(x_i)|,$$

gdzie x_i to równoodległe od siebie punkty

m | n	9	12	15	18	20	25	30	40	60
4	15.64	10.27	11.44	9.96	10.00	10.00	9.91	9.85	9.80
6		9.84	6.74	8.56	9.13	8.58	8.52	8.46	8.39
8			5.81	3.44	4.30	3.36	3.17	3.07	2.96
9				3.97	4.85	3.60	3.35	3.21	3.10
10					4.69	3.71	3.48	3.34	3.23
12						2.37	1.82	1.72	1.60
14							1.63	1.40	1.27
19								0.46	0.34
29									0.26

Tabela 1: Maksymalne błędy bezwzględne

Korzystając z zestawienia widać, jak przy ustalonym m zwiększając kolejno liczbę węzłów błąd w większości przypadków na początku dość szybko maleje, a następnie różnice w wartościach następnych są coraz mniejsze.
To samo, gdy spojrzymy na otrzymywany błąd przy ustalonym n. Ciekawym zjawiskiem jest, że dla $m = 8$ uzyskujemy największe polepszenie aproksymacji względem poprzedniej ilości funkcji bazowych.
Można na podstawie Tabeli 1 wywnioskować iż początkowe zwiększanie liczby węzłów/ funkcji bazowych polepsza dość dobrze aproksymację - natomiast szybko jakość polepszania maleje, a wyniki przestają różnić się drastycznie.

Do wyliczenia średniego błędu aproksymacji potrzeba jedynie będzie zsumować błąd bezwzględny w każdym testowanym punkcie, a następnie podzielić przez ich ilość. Wzór wygląda tak:

$$\frac{\sum_{k=0}^{p-1} |F(x_k) - f(x_k)|}{p},$$

gdzie x_k to równoodległe od siebie punkty, a p to ich liczba.

m | n	9	12	15	18	20	25	30	40	60
4	4.54	3.63	3.46	3.39	3.34	3.34	3.34	3.34	3.34
6		4.25	3.60	3.33	3.28	3.28	3.29	3.29	3.30
8			3.34	1.63	1.38	1.27	1.28	1.28	1.28
9				1.58	1.48	1.24	1.24	1.24	1.24
10					1.37	1.19	1.19	1.19	1.19
12						0.68	0.51	0.51	0.50
14							0.51	0.49	0.49
19								0.12	0.08
29									0.07

Tabela 2: Średnie błędy bezwzględne

Analizując wyniki w Tabeli 2 jesteśmy w stanie określić podobne stwierdzenia co w Tabeli 1.
Aproksymacja funkcji wraz ze zwiększaniem liczby węzłów/ funkcji bazowych na początku polepsza wyniki, a następnie zaczynamy nie zauważać polepszenia aproksymacji. Wartości zaczynają wyglądać identycznie i nie jesteśmy w stanie osiągnąć lepszych rezultatów dla rozsądnego stopnia wielomianu.

6 Podsumowanie

Korzystając z aproksymacji trygonometrycznej jesteśmy w stanie przybliżyć funkcję z zadania dość w szybkim tempie. Minusem jest, że niestety nie jesteśmy w stanie osiągnąć idealnych wyników.
Aproksymacja trygonometryczna jest dobrym sposobem na przybliżanie funkcji, gdy funkcja pierwotna składa się z funkcji trygonometrycznych tak jak widać w tym przypadku.