MOwNiT Lab5 - Równania nieliniowe

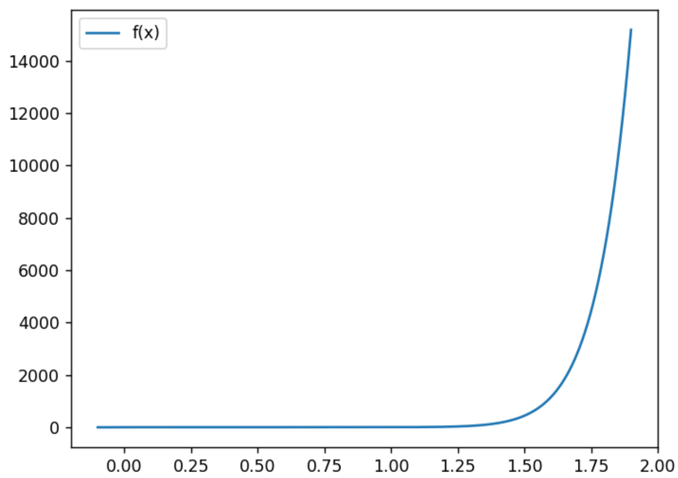
Jakub Płowiec

17 Maja 2023

1 Cel zadania

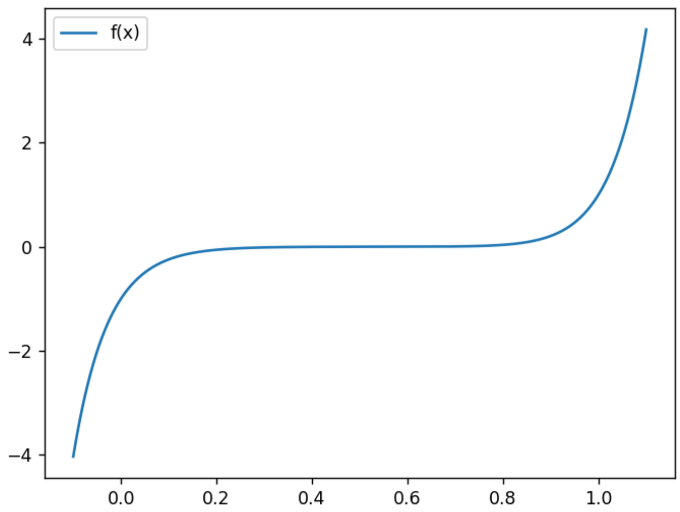
Wyznaczenie pierwiastków równania f(x) = 0 w zadanym przedziale [a, b] dla metody Newtona oraz metody siecznej dla zadanej funkcji:

$$(x-1)e^{-13x} + x^{15}, \quad x \in [-0.1, 1.9]$$



Wykres 1: Wykres funkcji f(x) na całym przedziale

W związku z niedokładnym rysowaniem funkcji na całym przedziale, posłużymy się wykresem funkcji f(x) na zmniejszonym przedziale.



Wykres 2: Wykres funkcji f(x) na przedziale [-0.1, 1.1]

2 Sprzęt

W zadaniu obliczeniowym posłużono się językiem Python 3.9.0 na systemie Windows 10 z procesorem Intel core i5-9600KF

3 Wyprowadzenie i wstęp teoretyczny

W przypadku obu sposobów na obliczenie pierwiastków podanego równania posłużymy się dwoma kryteriami stopu przyjmując różne wartości ρ. Zmniejszając wartość ρ powinniśmy otrzymywać dokładniejsze wyniki, a wraz z tym powinna zwiększać się liczba iteracji wykonywania algorytmu w danym sposobie.

Niżej zostały przedstawione owe 2 kryteria:

- $|f(x_i)| < \rho,$ czyli bezwzględna wartość funkcji w przybliżeniu

- $|x_{i+1} - x_i| < \rho,$ czyli bezwzględna różnica dwóch przybliżeń

3.1 Metoda Newtona

$f(x) = 0, \quad \alpha$ - prosty pierwiastek
x_{i-1} - przybliżenie α
niech $\alpha = x_{i-1} + h$

$$f(\alpha) = 0 = f(x_{i-1} + h) = f(x_{i-1}) + h * f'(x_{i-1}) + \dots \tag{1}$$

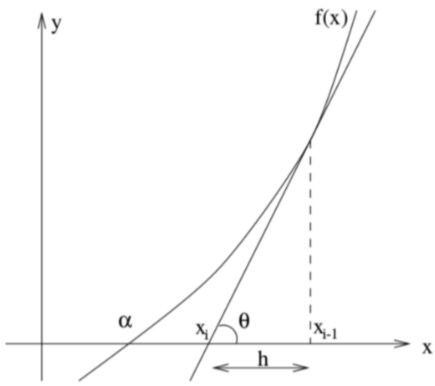
$$h = -\frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \tag{2}$$

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \tag{3}$$

Do metody Newtony potrzebujemy jednak paru założeń prezentujących się następująco:

- $f(x)$ ciągła
- W podanym przedziale występuje miejsce zerowe
- W podanych granicach funkcja ma różne znaki
- $f'(x)$ oraz $f''(x)$ mają stały znak w tym przedziale

Do naszego przybliżania będziemy wykorzystywać wzór 3, gdzie koncepcja algorytmu wygląda następująco:



Wykres 3: Działanie algorytmu Newtona

3.2 Metoda Siecznych

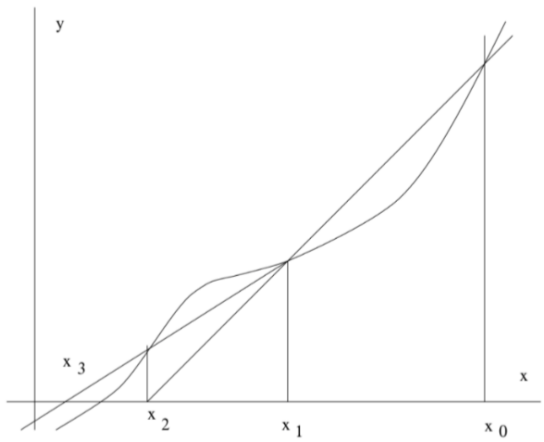
Startujemy z (x_0, x_1)
$f_0 * f_1$ - nie badamy
linie proste $(x_0, f_0), (x_1, f_1), \ldots$

$$x_{i+2} = x_{i+1} - \frac{x_{i+1} - x_i}{f_{i+1} - f_i} f_{i+1} \tag{4}$$

Do metody siecznych potrzebujemy jednak paru założeń prezentujących się następująco:

- $f(x)$ ciągła
- W podanych granicach funkcja ma różne znaki

Do naszego przybliżania będziemy wykorzystywać wzór 4, gdzie koncepcja algorytmu wygląda następująco:



Wykres 4: Działanie algorytmu siecznych

4 Analiza wyników

Do analizy poprawności przygotowanych wyników przyda nam się wyliczona przez program WolframAlpha miejsce zerowe naszej funkcji $f(x)$, które osiągamy dla $x_0 = 0.57427$

4.1 Analiza metody Newtona

4.1.1 Warunek $|f(x_i)| < \rho$

$x_0 \mid \rho$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
1.9	0.72326	0.57432	0.57427	0.57427
1.8	0.73412	0.57442	0.57427	0.57427
1.7	0.69346	0.57461	0.57427	0.57427
1.6	0.69925	0.57484	0.57427	0.57427
1.5	0.70236	0.57500	0.57427	0.57427
1.4	0.70236	0.57500	0.57427	0.57427
1.3	0.69879	0.57481	0.57427	0.57427
1.2	0.69116	0.57427	0.57454	0.57427
1.1	0.72717	0.57435	0.57427	0.57427
1.0	0.70833	0.57428	0.57427	0.57427
0.9	0.73176	0.57439	0.57427	0.57427
0.8	0.69701	0.57474	0.57427	0.57427
0.7	0.7	0.57487	0.57427	0.57427
0.6	0.6	0.57437	0.57427	0.57427
0.5	0.5	0.57501	0.57427	0.57427
0.4	0.4	0.57427	0.57427	0.57427
0.3	0.36930	0.57478	0.57427	0.57427
0.2	0.33976	0.57428	0.57427	0.57427
0.1	0.38029	0.57443	0.57427	0.57427
0.0	0.35259	0.57428	0.57427	0.57427
-0.1	0.32543	0.57428	0.57427	0.57427

Tabela 1: Miejsca zerowe względem punktów startowych i dokładności

W tabeli 1 zauważmy, jak dla początkowej niskiej dokładności wyniki niezależnie od punktu startowego nie przypominają poprawnego miejsca zerowego. Też i występuje spora różnica między wynikami na krańcach przedziałów.
Dla $\rho = 10^{-5}$ otrzymujemy już w większości bardzo bliskie wartości co do wyliczonej przez program Internetowy. Idealną wartość otrzymujemy w tym przypadku dla $x_0 = 1.2$, oraz $x_0 = 0.4$
Natomiast już dla kolejnego stopnia dokładności widzimy jak wszystkie punkty startowe zwracają idealnie przybliżone miejsce zerowe, co pozwala nam zauważyć jak zwiększanie dokładności wpływa na wynik.

$x_0 \mid \rho$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
1.9	14	19	20	21
1.8	13	18	19	20
1.7	13	17	18	19
1.6	12	16	18	18
1.5	11	15	17	17
1.4	10	14	16	16
1.3	9	13	15	15
1.2	8	12	13	14
1.1	6	11	12	13
1.0	5	10	11	11
0.9	3	8	9	10
0.8	2	6	8	8
0.7	0	4	6	6
0.6	0	2	3	4
0.5	0	2	4	4
0.4	0	3	3	4
0.3	1	5	7	7
0.2	2	7	8	8
0.1	4	8	9	10
0.0	5	10	11	11
-0.1	6	11	11	12

Tabela 2: Liczba iteracji algorytmu względem punktów startowych i dokładności

Korzystając z tabeli 2 widzimy jak zwiększanie dokładności dla każdego punktu startowego zwiększa liczbę iteracji algorytmu. Jest to jak najbardziej oczywiste i naturalne wydarzenie z racji, na większe dopracowanie wyników.

4.1.2 Warunek $|x_{i+1} - x_i| < \rho$

$x_0 \mid \rho$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
1.9	0.57432	0.57427	0.57427	0.57427
1.8	0.57442	0.57427	0.57427	0.57427
1.7	0.57461	0.57427	0.57427	0.57427
1.6	0.57484	0.57427	0.57427	0.57427
1.5	0.57428	0.57427	0.57427	0.57427
1.4	0.57428	0.57427	0.57427	0.57427
1.3	0.57481	0.57427	0.57427	0.57427
1.2	0.57454	0.57427	0.57427	0.57427
1.1	0.72717	0.57435	0.57427	0.57427
1.0	0.57428	0.57427	0.57427	0.57427
0.9	0.57439	0.57427	0.57427	0.57427
0.8	0.57474	0.57427	0.57427	0.57427
0.7	0.57487	0.57427	0.57427	0.57427
0.6	0.57437	0.57427	0.57427	0.57427
0.5	0.57428	0.57427	0.57427	0.57427
0.4	0.57427	0.57427	0.57427	0.57427
0.3	0.57428	0.57427	0.57427	0.57427
0.2	0.57428	0.57427	0.57427	0.57427
0.1	0.57443	0.57427	0.57427	0.57427
0.0	0.57428	0.57427	0.57427	0.57427
-0.1	0.57428	0.57427	0.57427	0.57427

Tabela 3: Miejsca zerowe względem punktów startowych i dokładności

W porównaniu do poprzedniego warunku stopu, tutaj otrzymujemy dość zaskakujące wyniki. Już dla niskiej wartości ρ otrzymujemy świetnie przybliżone wyniki, a dla $\rho = 10^{-5}$ wszystkie punkty startowe z wyjątkiem $x_0 = 1.1$ zwracają idealny wynik.

$x_0 \mid \rho$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
1.9	19	21	22	22
1.8	18	20	21	21
1.7	17	19	20	20
1.6	16	18	19	19
1.5	16	17	18	18
1.4	15	16	17	17
1.3	13	15	16	16
1.2	12	14	15	15
1.1	11	13	14	14
1.0	10	11	12	13
0.9	8	10	11	11
0.8	6	8	9	9
0.7	4	6	7	7
0.6	2	4	5	5
0.5	3	4	5	5
0.4	4	4	5	5
0.3	6	7	8	8
0.2	7	8	9	10
0.1	8	10	11	11
0.0	10	11	12	13
-0.1	11	12	13	14

Tabela 4: Liczba iteracji algorytmu względem punktów startowych i dokładności

Porównując Tabelę 2 oraz Tabelę 4 jesteśmy w stanie odnotować, iż w owym kryterium uzyskujemy delikatnie więcej iteracji niż w poprzednim przypadku.

4.2 Analiza metody siecznych

4.2.1 Warunek $|f(x_i)| < \rho$

$[x_0, x_1] \mid \rho$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
[-0.1, 0.0]	0.33097	0.57486	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.1]	0.36720	0.57357	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.2]	0.36448	0.57440	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.3]	0.37000	0.57438	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.4]	0.40041	0.57365	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.5]	0.50010	0.57390	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.6]	0.59994	0.57494	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.7]	0.69906	0.57437	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.8]	0.71260	0.57508	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.9]	0.70473	0.57474	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.0]	0.72687	0.57449	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.1]	0.48969	0.57446	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.2]	0.33589	0.57500	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.3]	0.32738	0.57462	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.4]	0.35984	0.57449	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.5]	0.33095	0.57486	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.6]	0.36664	0.57349	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.7]	0.36158	0.57445	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.8]	0.35945	0.57450	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.9]	0.35852	0.57453	0.57427	0.57427

Tabela 5: Miejsca zerowe względem przedziałów i dokładności

Na tabeli 5 zauważamy podobny efekt jaki występował na tabeli 1 w metodzie Newtona. Dla niskiej wartości przybliżenia wyniki odbiegają od przybliżenia - natomiast już dla $\rho = 10^{-5}$ osiągamy już bardziej satysfakcjonujące wyniki.
Od $\rho = 10^{-18}$ wszystkie przedziały dokładnie szacują.

$[x_0, x_1]$ | ρ	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
[-0.1, 0.0]	7	13	15	16
[-0.1, 0.1]	6	11	13	14
[-0.1, 0.2]	4	10	11	12
[-0.1, 0.3]	2	8	9	10
[-0.1, 0.4]	1	5	7	8
[-0.1, 0.5]	1	3	5	6
[-0.1, 0.6]	1	3	5	6
[-0.1, 0.7]	1	7	8	9
[-0.1, 0.8]	3	9	11	12
[-0.1, 0.9]	5	11	13	14
[-0.1, 1.0]	3	10	12	12
[-0.1, 1.1]	1	5	7	7
[-0.1, 1.2]	5	11	13	14
[-0.1, 1.3]	8	14	16	17
[-0.1, 1.4]	10	16	18	18
[-0.1, 1.5]	10	16	18	19
[-0.1, 1.6]	11	16	18	19
[-0.1, 1.7]	11	17	19	19
[-0.1, 1.8]	11	17	19	19
[-0.1, 1.9]	11	17	19	19

Tabela 6: Liczba iteracji algorytmu względem punktów startowych i dokładności

Tak jak w poprzednim przypadku, logiczne jest, iż zwiększając dokładność - zwiększamy liczbę iteracji. Tak samo wiadome jest, że iteracji będzie mało zbliżając się z przedziałem do miejsca zerowego.

$[x_0, x_1] \mid \rho$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
[-0.1, 1.9]	0.35852	0.57453	0.57427	0.57427
[0.0, 1.9]	0.35831	0.57453	0.57427	0.57427
[0.1, 1.9]	0.35931	0.57451	0.57427	0.57427
[0.2, 1.9]	0.36183	0.57446	0.57427	0.57427
[0.3, 1.9]	0.36930	0.57440	0.57427	0.57427
[0.4, 1.9]	0.40000	0.57361	0.57427	0.57427
[0.5, 1.9]	0.50000	0.57389	0.57427	0.57427
[0.6, 1.9]	0.59999	0.57494	0.57427	0.57427
[0.7, 1.9]	0.69999	0.57437	0.57427	0.57427
[0.8, 1.9]	0.71733	0.57432	0.57427	0.57427
[0.9, 1.9]	0.73198	0.57452	0.57427	0.57427
[1.0, 1.9]	0.70438	0.57473	0.57427	0.57427
[1.1, 1.9]	0.70400	0.57471	0.57427	0.57427
[1.2, 1.9]	0.73160	0.57452	0.57427	0.57427
[1.3, 1.9]	0.71918	0.57434	0.57427	0.57427
[1.4, 1.9]	0.70152	0.57463	0.57427	0.57427
[1.5, 1.9]	0.71176	0.57511	0.57427	0.57427
[1.6, 1.9]	0.71553	0.57432	0.57427	0.57427
[1.7, 1.9]	0.71216	0.57513	0.57427	0.57427
[1.8, 1.9]	0.70176	0.57463	0.57427	0.57427

Tabela 7: Miejsca zerowe względem przedziałów i dokładności

$[x_0, x_1] \mid \rho$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
[-0.1, 1.9]	11	17	19	19
[0.0, 1.9]	9	15	17	17
[0.1, 1.9]	7	13	15	15
[0.2, 1.9]	5	11	13	13
[0.3, 1.9]	3	9	10	11
[0.4, 1.9]	2	6	8	9
[0.5, 1.9]	2	4	6	7
[0.6, 1.9]	2	4	6	7
[0.7, 1.9]	2	8	9	10
[0.8, 1.9]	4	11	12	13
[0.9, 1.9]	6	13	15	15
[1.0, 1.9]	9	15	17	18
[1.1, 1.9]	11	17	19	20
[1.2, 1.9]	12	19	21	21
[1.3, 1.9]	14	21	22	23
[1.4, 1.9]	16	22	24	25
[1.5, 1.9]	17	23	25	26
[1.6, 1.9]	18	25	26	27
[1.7, 1.9]	19	25	27	28
[1.8, 1.9]	20	26	28	29

Tabela 8: Liczba iteracji względem przedziałów i dokładności

4.2.2 Warunek $|x_{i+1} - x_i| < \rho$

$[x_0, x_1]$ | ρ	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
[-0.1, 0.0]	0.57424	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.1]	0.57433	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.2]	0.57440	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.3]	0.57438	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.4]	0.57433	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.5]	0.57430	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.6]	0.57494	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.7]	0.57601	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.8]	0.57508	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 0.9]	0.57474	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.0]	0.77602	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.1]	0.48982	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.2]	0.17593	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.3]	0.57425	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.4]	0.57449	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.5]	0.57424	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.6]	-0.08862	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.7]	-0.09502	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.8]	-0.097746	0.57427	0.57427	0.57427
[-0.1, 1.9]	-0.09894	0.57427	0.57427	0.57427

Tabela 9: Miejsca zerowe względem przedziałów i dokładności

Na tabeli 9 widzimy jak od już drugiego stopnia dokładności wszystkie przedziały zwracają poprawną wartość. Ciekawe jednak może być iż dla najniższej dokładności wkrótce zaczynamy uzyskiwać ujemne wartości zbliżające się do krańca przedziału.

$[x_0, x_1] \mid \rho$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
[-0.1, 0.0]	14	16	17	17
[-0.1, 0.1]	12	14	15	15
[-0.1, 0.2]	10	12	13	14
[-0.1, 0.3]	8	10	11	12
[-0.1, 0.4]	6	8	9	9
[-0.1, 0.5]	4	6	7	7
[-0.1, 0.6]	3	6	7	7
[-0.1, 0.7]	6	9	10	11
[-0.1, 0.8]	9	12	13	13
[-0.1, 0.9]	11	14	15	15
[-0.1, 1.0]	2	12	13	14
[-0.1, 1.1]	2	7	8	9
[-0.1, 1.2]	2	14	15	15
[-0.1, 1.3]	15	17	18	18
[-0.1, 1.4]	16	18	19	20
[-0.1, 1.5]	17	19	20	20
[-0.1, 1.6]	2	19	20	20
[-0.1, 1.7]	2	19	20	21
[-0.1, 1.8]	2	19	20	21
[-0.1, 1.9]	2	19	20	21

Tabela 10: Liczba iteracji algorytmu względem punktów startowych i dokładności

W tym zestawieniu ciężko domyślić się ile iteracji wykona nasz program. Analizując przygotowane wartości widzimy, że są one można rzec losowe.

$[x_0, x_1] \mid \rho$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
[-0.1, 1.9]	-0.09894	0.57427	0.57427	0.57427
[0.0, 1.9]	0.00025	0.57427	0.57427	0.57427
[0.1, 1.9]	0.10005	0.57427	0.57427	0.57427
[0.2, 1.9]	0.20001	0.20001	0.57427	0.57427
[0.3, 1.9]	0.30000	0.30000	0.57427	0.57427
[0.4, 1.9]	0.40000	0.40000	0.57427	0.57427
[0.5, 1.9]	0.50000	0.50000	0.57427	0.57427
[0.6, 1.9]	0.59999	0.599999	0.57427	0.57427
[0.7, 1.9]	0.69999	0.69999	0.57427	0.57427
[0.8, 1.9]	0.79999	0.79999	0.57427	0.57427
[0.9, 1.9]	0.89997	0.57427	0.57427	0.57427
[1.0, 1.9]	0.99988	0.57427	0.57427	0.57427
[1.1, 1.9]	1.09956	0.57427	0.57427	0.57427
[1.2, 1.9]	1.19858	0.57427	0.57427	0.57427
[1.3, 1.9]	1.29598	0.57427	0.57427	0.57427
[1.4, 1.9]	1.38987	0.57427	0.57427	0.57427
[1.5, 1.9]	0.57511	0.57427	0.57427	0.57427
[1.6, 1.9]	0.57538	0.57427	0.57427	0.57427
[1.7, 1.9]	0.57513	0.57427	0.57427	0.57427
[1.8, 1.9]	0.57463	0.57427	0.57427	0.57427

Tabela 11: Miejsca zerowe względem przedziałów i dokładności

$[x_0, x_1] \mid \rho$	10^{-2}	10^{-5}	10^{-8}	10^{-10}
[-0.1, 1.9]	2	19	20	21
[0.0, 1.9]	2	17	18	19
[0.1, 1.9]	2	15	16	17
[0.2, 1.9]	2	2	14	15
[0.3, 1.9]	2	2	12	13
[0.4, 1.9]	2	2	10	10
[0.5, 1.9]	2	2	8	8
[0.6, 1.9]	2	2	8	8
[0.7, 1.9]	2	2	11	12
[0.8, 1.9]	2	2	14	14
[0.9, 1.9]	2	15	16	17
[1.0, 1.9]	2	8	19	19
[1.1, 1.9]	2	19	21	21
[1.2, 1.9]	2	21	22	23
[1.3, 1.9]	2	23	24	25
[1.4, 1.9]	2	24	26	26
[1.5, 1.9]	23	26	27	27
[1.6, 1.9]	24	27	28	28
[1.7, 1.9]	25	28	29	29
[1.8, 1.9]	26	28	30	30

Tabela 12: Liczba iteracji względem przedziałów i dokładności

5 Wnioski

W sposobie Newtona korzystając z warunku $|f(x_i)| < \rho$ pierwsza dokładność nie zachwyca, a druga już proponuje porządne przybliżenia. Liczba iteracji nie jest zaskakująca, gdyż zwiększając dokładność to zwiększamy liczbę iteracji oraz wybierając punkt startowy bliżej miejsca zerowego to iteracje algorytmu zmniejszamy drastycznie.
Korzystając natomiast z drugiego warunku tj. $|x_{i+1} - x_i| < \rho$ wyniki z pierwszej dokładności prezentują się prawie idealne i wystarczają śmiało jako przybliżanie. Już od drugiej dokładności wszystkie wartości wyglądają identycznie. Kwestia liczby iteracji pozostaje taka sama bez znaczenia na warunek.

W sposobie wykorzystującym sieczne otrzymujemy gorsze rezultaty. Niestety zależnie od podanego przedziału jesteśmy w stanie otrzymywać różne wyniki w taki sposób, że nawet druga dokładność nie gwarantuje nam często poprawnych wyników.

Słowem podsumowania szukania miejsca zerowego funkcji podanej w zadaniu: W tym przypadku lepszym sposobem jest zdecydowanie sposób Newtona z warunkiem $|x_{i+1} - x_i| < \rho$, który pozwala wygenerować dokładniejsze wyniki, pomimo podobnych iteracji w porównaniu do pierwszego warunku.