

Abgabe der Theorieaufgaben bis **Montag 16.12.2013, 14:15 Uhr** in 2er- oder 3er-Gruppen

### Hausaufgabe 8.1 (3+2+2 Punkte)

Betrachte die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit

$$A := \begin{bmatrix} 1 & & & 1 \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ -1 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- Berechnen Sie die obere Dreiecksmatrix  $R$  der  $LR$ -Zerlegung.
- Berechnen Sie  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_\infty$  von  $A$  und  $R$ .
- Ändern Sie den Eintrag  $a_{1n} := 1 + \varepsilon$ . Wie lautet jetzt  $R$ ?

### Hausaufgabe 8.2 (8+4 Punkte)

Gegeben seien die Matrix und der Vektor

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 11 \\ -1 \\ -18 \end{pmatrix}.$$

- Lösen Sie das Gleichungssystem  $Ax = b$  mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens mit Spaltenpivotierung. Bestimmen Sie dabei die Matrizen  $P$  und  $L$  aus der  $LR$ -Zerlegung  $PA = LR$ .
- Der Vektor  $b$  sei mit einem relativen Fehler  $\|\Delta b\|_\infty / \|b\|_\infty$  von 10 % behaftet. Geben Sie eine obere Schranke für den zu erwartenden Fehler  $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$  der Lösung  $x$  an.  
*Hinweis:* Die Inverse von  $A$  ist gegeben durch:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 9 & -13 & 6 \\ -11 & 17 & -8 \end{pmatrix}$$

### Hausaufgabe 8.3 (8 Punkte)

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wie groß ist der relative Fehler  $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$  höchstens, wenn der relative Fehler in den Matrixelementen höchstens  $\pm 1\%$  und der in den Komponenten der rechten Seite höchstens  $\pm 3\%$  beträgt?