FRIEDRICH-ALEXANDER UNIVERSITÄT ERLANGEN-NÜRNBERG
NATURWISSENSCHAFTLICHE FAKULTÄT

Prof. Dr. Dmitri Kuzmin
Dipl.-Technomath. Christopher Basting
Dipl.-Math. Stephan Weller

Abgabe der Theorieaufgaben bis **Montag 9.12.2013, 14:15 Uhr** in 2er- oder 3er-Gruppen

Hausaufgabe 7.1 (5+3 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Für jede Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{K}^n$ ist durch

$$\|A\| := \sup\{\frac{\|Ax\|}{\|x\|}, x \in \mathbb{K}^n, x \neq 0\} = \sup\{\|Ax\|, x \in \mathbb{K}^n, \|x\| = 1\}$$

eine mit der Vektornorm verträgliche Matrixnorm erklärt (diese nennt man auch natürliche Matrixnorm oder von $\|\cdot\|$ induzierte Matrixnorm).

b) Die Frobeniusnorm $\|A\|_{FR} = \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ kann keine solche induzierte Matrixnorm sein.

Hausaufgabe 7.2 (8 Punkte)

Sei $A \in Gl(n)$. Zeigen Sie: Für $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die Abbildung

$$\Phi(t) := (A + tC)^{-1}$$

für kleine $|t|$ wohldefiniert und differenzierbar. Weiterhin gilt:

$$\Phi'(0) = -A^{-1}CA^{-1}$$

Hinweis: Leiten Sie $I = (A + tC)(A + tC)^{-1}$ nach t ab.

Hausaufgabe 7.3 (12 Punkte)

Für eine vektor- oder matrixvertige Funktion f ist die *absolute Kondition* in einem Punkt x (bezüglich einer Vektornorm $\|\cdot\|$ und davon induzierten Matrixnorm, die wir ebenfalls mit $\|\cdot\|$ bezeichnen) gegeben durch

$$\kappa_{abs} = \limsup_{x\to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

und die *relative Kondition* ist

$$\kappa_{rel} = \frac{\|x\|}{\|f(x)\|}\kappa_{abs}$$

Zeigen Sie: Für die Funktion $\Phi : Gl(n) \to \mathbb{R}^n, A \mapsto A^{-1}b$ (für gegebenes $b \in \mathbb{R}^n$) gilt für die relative Kondition:

$$\kappa_{rel} \leq \|A\|\|A^{-1}\|$$

Hinweis: Zur Auswertung des $\limsup$ betrachten Sie eine kleine matrixwertige Störung. Diese kann z.B. als $A + \varepsilon C$ mit $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dargestellt werden. Die Störung wird also gerade durch die Abbildung aus der vorhergehenden Aufgabe beschrieben.

Programmieraufgabe 7.1 (LU-Zerlegung, Teil von Programmiertestat 2)

Implementieren Sie die LU-Zerlegung (ohne Pivotisierung) mit Vorwärts- und Rückwärtssubstitution. Schreiben Sie dazu die folgenden Routinen:

a) `function LU = LU_decompose(A)`
Diese Funktion soll die Matrix $A \in GL(n)$ in $A = L*U$ zerlegen, wobei L eine untere Dreiecksmatrix ist, bei der die Diagonaleinträge immer 1 sind und U eine obere Dreiecksmatrix ist. Die Matrizen L und U sollen platzsparend in der Matrix LU gespeichert werden (die Diagonale von L soll nicht mit abgespeichert werden, sie ist ja sowieso bekannt).

b) `function z = forward_solve(LU,b)`
Diese Funktion soll das Gleichungssystem $Lz = b$ lösen, wobei LU die oben beschriebene Matrix ist. Die Struktur von L soll dabei natürlich ausgenutzt werden.

c) `function x = backward_solve(LU,z)`
Diese Funktion soll das Gleichungssystem $Ux = z$ lösen.

d) Schreiben Sie eine Datei `LU_test.m`, die die implementierten Routinen mit verschiedenen Zufallsmatrizen testet.

Die Routinen sollen Schleifen möglichst vermeiden und natürlich nicht die in Matlab bereits vorhandene LU-Zerlegung benutzen.