

Bau eines Doppelpendels als Beispiel für chaotisches Verhalten

PPG8

Udo Beier Leon Brückner Valentin Olpp Marco Zech
Sebastian Ziegler

Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	4
1.1	Strömende Flüssigkeiten und Gase	4
1.1.1	Grundbetrachtungen	4
1.1.2	Die Kontinuitätsgleichung	4
1.1.3	Die Euler-Gleichung	7
1.1.4	Die Bernoulli-Gleichung	8
1.1.5	Die Navier-Stokes-Gleichung	9
1.2	Strömungsmesstechnik	10
1.2.1	Grundsätzliche Betrachtungen	10
1.2.2	Sonden zur Messung des Gesamtdrucks (Pitot Rohre)	10
1.2.3	Sonden zur Messung des statischen Drucks	10
1.2.4	Sonden zur gleichzeitigen Messung des Gesamtdrucks und des statischen Drucks (Prandtl Rohre)	11

Abbildungsverzeichnis

1	(a) Stromlinien und Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u}(\vec{r}, t)$; (b) Strömungsfeld zu einem bestimmten Zeitpunkt t	5
2	Beispiele laminarer Strömungen	6
3	Beispiel einer turbulenten Strömung	7
4	Rohr mit variablem Querschnitt zur Herleitung der Bernoulli-Gleichung .	8
5	Strömung durch ein schräges Rohr	9

Tabellenverzeichnis

1 Vorwort

Das Doppelpendel, ein Pendel, an dessen Pendelmasse ein weiteres Pendel befestigt wird, mag zunächst nicht sonderlich interessant erscheinen. Bei genauerer Betrachtung hat dieser simple mechanische Aufbau jedoch einige faszinierende und sogar für aktuelle Forschung relevante Eigenschaften. Das Doppelpendel ist ein einfaches Beispiel für ein chaotisches System, d.h. ein System, dessen zeitliche Entwicklung sich schon bei kleinen Variationen der Anfangsbedingungen stark ändert. Chaotische Systeme haben eine wichtige Bedeutung in der Natur und sind der Hauptfokus eines Teilgebiets der modernen Physik, der Chaosforschung. Mithilfe der Chaosforschung lassen sich z.B. Bevölkerungsentwicklungen, die Bildung von Verkehrsstaus oder das Wetter untersuchen. In diesem Versuch soll nun ein Doppelpendel gebaut, die Physik dahinter untersucht und die Bedeutung als chaotisches System am praktischen Beispiel nachvollzogen werden.

2 Theorie

2.1 Strömende Flüssigkeiten und Gase

2.1.1 Grundbetrachtungen

Strömende Flüssigkeiten und Gase unterscheiden sich hauptsächlich in zwei Punkten. Zum einen sind die Dichten von Flüssigkeiten um etwa drei Größenordnungen größer als bei Gasen. Zum anderen sind Flüssigkeiten in guter Näherung inkompressibel, was auf Gase nicht zutrifft.

Um die makroskopische Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen beschreiben zu können, ist es nötig alle Kräfte zu kennen, die auf ein Volumenelement ΔV wirken. Als Kräfte kommen dabei Kräfte durch Druckdifferenzen \vec{F}_p , die Schwerkraft \vec{F}_g und Reibungskräfte \vec{F}_R zwischen Schichten des strömenden Mediums in Frage. Dabei gilt:

$$\vec{F}_p = -\mathbf{grad}(p) \cdot \Delta V \quad (1)$$

$$\vec{F}_g = \rho \cdot \vec{g} \cdot \Delta V \quad (2)$$

Die Reibungskraft \vec{F}_R wird weiter unten noch behandelt.

Mit $\vec{F} := \vec{F}_p + \vec{F}_g + \vec{F}_R$ ergibt sich für die Newtonschen Bewegungsgleichungen:

$$\vec{F} = \Delta m \ddot{\vec{r}} = \rho \cdot \Delta V \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (3)$$

Dabei ist $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ die Strömungsgeschwindigkeit des Volumenelements ΔV .

Kennt man die Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u}(\vec{r}, t)$ an allen Orten \vec{r} und zu jedem Zeitpunkt t , so kennt man die makroskopische Bewegung der gesamten Flüssigkeit.

Eine Strömung heißt stationär, wenn $\vec{u}(\vec{r}, t) \equiv \vec{u}(\vec{r})$ nicht von t abhängt. Flüssigkeiten, bei denen $\|\vec{F}_R\| \ll \|\vec{F}_p\| + \|\vec{F}_g\|$, bezeichnet man als ideale Flüssigkeiten, während Flüssigkeiten, bei denen $\|\vec{F}_R\| \gg \|\vec{F}_p\| + \|\vec{F}_g\|$, als viskos oder zäh bezeichnet werden.

Die Kurve $\vec{r}(t)$ eines Flüssigkeitselements ΔV nennt man Stromlinie. Strömungen heißen laminar, wenn sich die Stromlinien nebeneinander bewegen und sich nicht vermischen. Laminare Strömungen liegen immer dann vor, wenn die inneren Reibungskräfte im Vergleich zu den anderen Kräften groß sind. Sind die inneren Reibungskräfte allerdings klein im Vergleich zu Kräften, wie z.B. solche die an Hindernissen auftreten, bilden sich Wirbel. Solche Strömungen bezeichnet man als turbulent.

2.1.2 Die Kontinuitätsgleichung

Sei V ein beliebiges Volumen. V enthält zur Zeit t die Masse:

$$M(t) = \iiint_V \rho(t) dV \quad (4)$$

Aufgrund der Massenerhaltung kann sich die Masse in V nur dann ändern, wenn Masse durch die Oberfläche ∂V ein- oder ausströmt. Sei $\vec{j} = \rho \cdot \vec{u}$ die Massenstromdichte. Dann gilt wegen der Massenerhaltung:

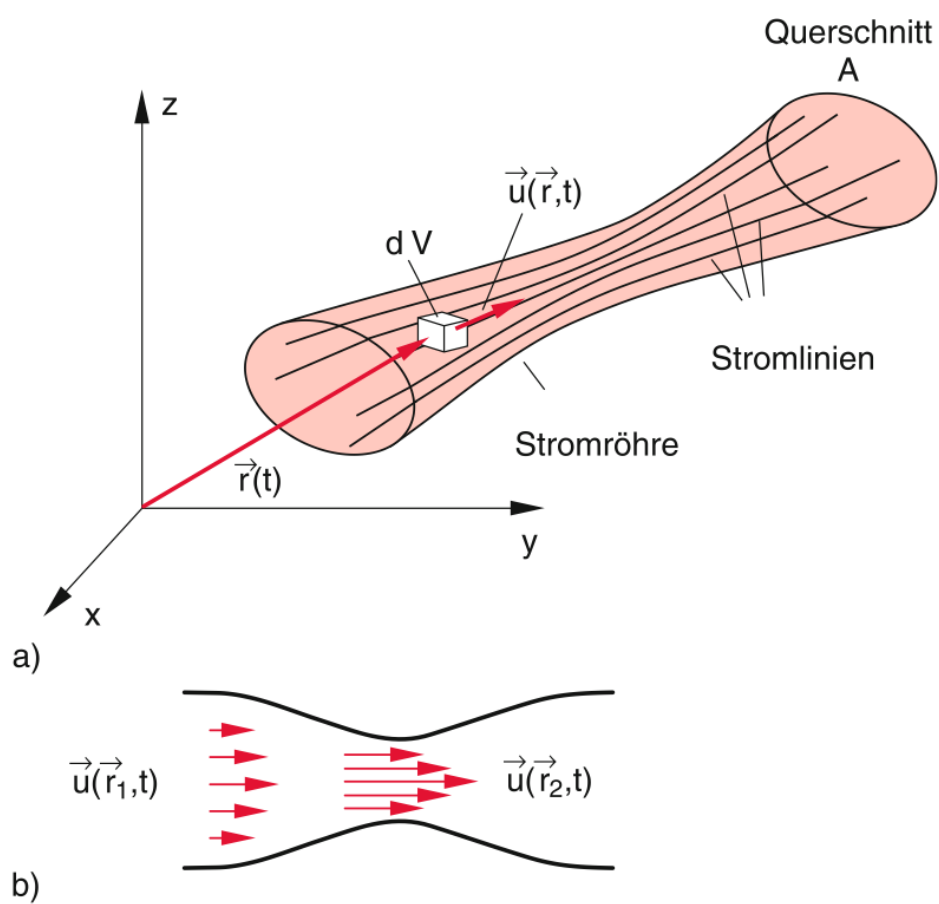


Abbildung 1: (a) Stromlinien und Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u}(\vec{r}, t)$; (b) Strömungsfeld zu einem bestimmten Zeitpunkt t

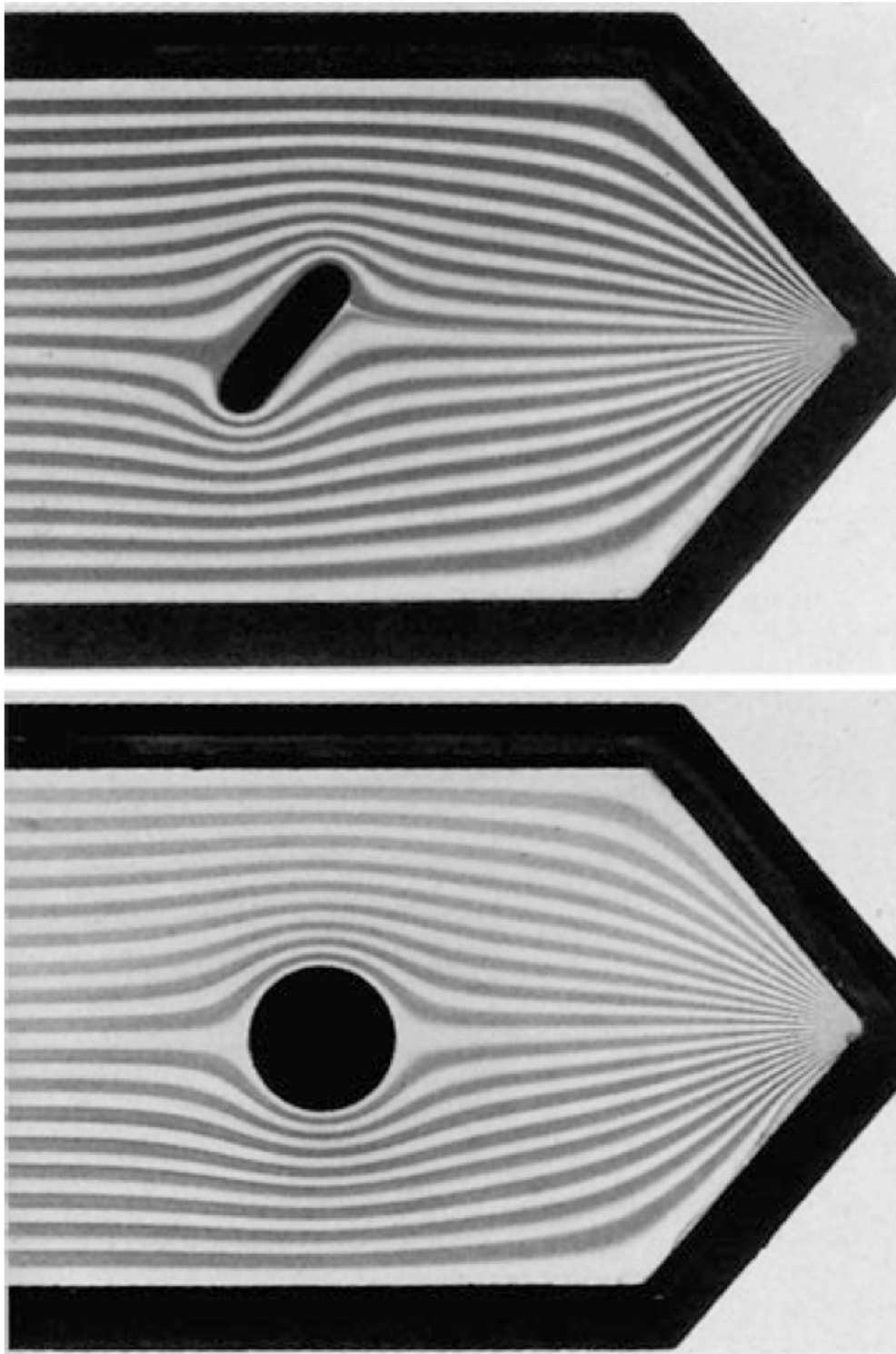


Abbildung 2: Beispiele laminarer Strömungen

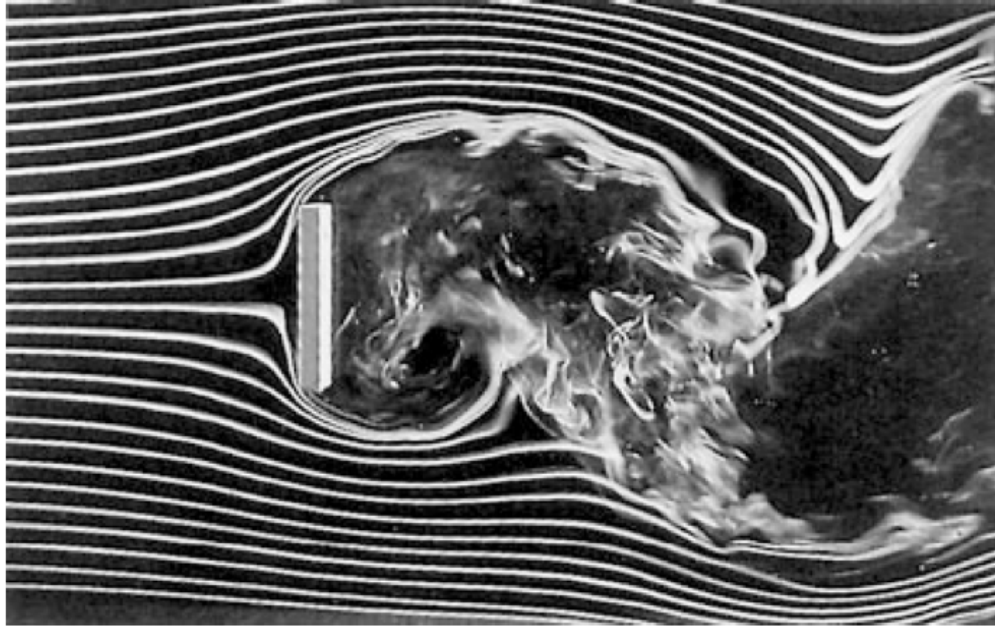


Abbildung 3: Beispiel einer turbulenten Strömung

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = \iint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\partial V} \rho \cdot \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} \quad (5)$$

Dabei ist $d\vec{\sigma}$ der Flächennormalenvektor. Also folgt mit dem Satz von Gauß:

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left(-\frac{\partial}{\partial t} \rho\right) dV = \iiint_V \mathbf{div}(\rho \cdot \vec{u}) dV = \iint_{\partial V} \rho \cdot \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} \quad (6)$$

Da Gleichung 6 für beliebige V gilt, folgt:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \cdot \vec{u}) = 0} \quad (7)$$

Diese Gleichung nennt man die Kontinuitätsgleichung. Sie drückt aus, dass Masse erhalten ist. Im Fall von inkompressiblen Flüssigkeiten gilt: $\rho = \text{const.}$. Deshalb vereinfacht sich 7 zu:

$$\mathbf{div}(\vec{u}) = 0 \quad (8)$$

2.1.3 Die Euler-Gleichung

Für $\frac{d\vec{u}}{dt}$ gilt:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (9)$$

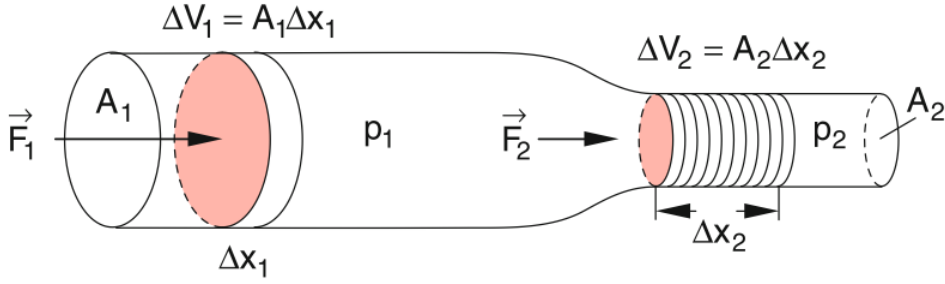


Abbildung 4: Rohr mit variablem Querschnitt zur Herleitung der Bernoulli-Gleichung

Aufgrund von 3 und 9 ergibt sich für die Bewegungsgleichung einer idealen Flüssigkeit:

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad}(p)} \quad (10)$$

Diese Gleichung nennt man die Euler-Gleichung. Sie bildet die Grundlage der Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten.

2.1.4 Die Bernoulli-Gleichung

Hier wird ein Fluid (Flüssigkeit oder Gas) betrachtet, das horizontal durch ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt fließt. Die Bernoulli-Gleichung folgt dann aus der Energieerhaltung. Strömt ein Fluid durch ein Rohr, dessen Querschnitt variabel ist, so muss das Fluid aufgrund der Kontinuitätsgleichung 7 an Stellen mit kleinerem Querschnitt schneller fließen. Ein Volumen $\Delta V_1 = A_1 \cdot \Delta x_1$ hat dort also eine größere kinetische Energie.

Um das Volumen ΔV_1 um Δx_1 gegen p_1 zu verschieben, ist eine Arbeit ΔW_1 nötig. Analoges gilt für ΔV_2 . Es gilt dann:

$$\Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot \Delta V_1 \quad (11)$$

$$\Delta W_2 = F_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot \Delta V_2 \quad (12)$$

Die kinetische Energie des Volumenelements ΔV ist $E_{kin} = \frac{1}{2} \Delta m u^2 = \frac{1}{2} \rho u^2 \Delta V$. Für ideale Flüssigkeiten muss nun die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant sein. Deshalb folgt:

$$p_1 \Delta V_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \Delta V_2 \quad (13)$$

Für inkompressible Flüssigkeiten gilt nun $\Delta V_1 = \Delta V = \Delta V_2$. Damit ergibt sich:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \quad (14)$$

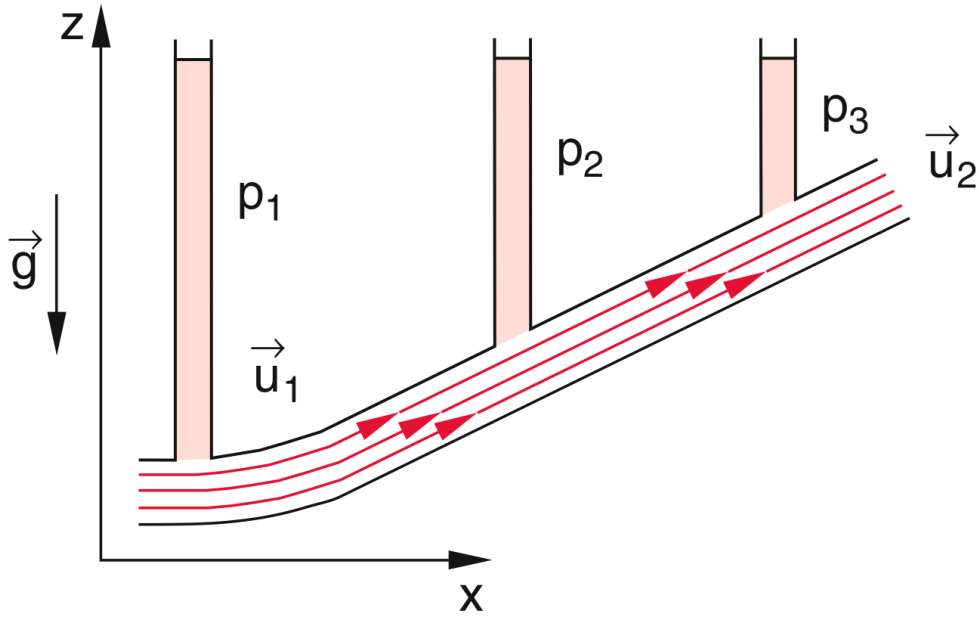


Abbildung 5: Strömung durch ein schräges Rohr

Da 14 für beliebige Querschnitte gilt, folgt die Bernoulli-Gleichung:

$$\boxed{p + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_0 = \text{const.}} \quad (15)$$

p_0 heißt Gesamtdruck, $p_S = \frac{1}{2}\rho u^2$ heißt Staudruck und p ist der statische Druck der strömenden Flüssigkeit.

Verläuft die Strömung durch schräge Rohre, ergibt sich die allgemeinere Gleichung:

$$p + \rho g z(x) + \frac{1}{2}\rho u^2(x) = p_0 = \text{const.} \quad (16)$$

Dabei ist $z(x)$ die Höhe am Ort x .

2.1.5 Die Navier-Stokes-Gleichung

Die Bewegungsgleichung für reale viskose strömende Fluide kann angegeben werden, wenn auch \vec{F}_R genauer bestimmt ist. Für viskose Fluide gilt:

$$\vec{F}_R = \eta \Delta \vec{u} \Delta V \quad (17)$$

Dabei ist $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ der Laplace-Operator. Aus 3 folgt nun mit Hilfe von 9 die Navier-Stokes-Gleichung:

$$\boxed{\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = -\text{grad}(p) + \rho \cdot \vec{g} + \eta \Delta \vec{u}} \quad (18)$$

Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichung ist laut dem Clay Mathematics Institute sogar Teil der Millenium-Probleme. Deshalb werden wir uns hier nicht weiter mit der Navier-Stokes-Gleichung befassen.

2.2 Strömungsmesstechnik

2.2.1 Grundsätzliche Betrachtungen

Betrachtet man ein Fluid, ist ihm zunächst nicht anzusehen, ob es strömt oder nicht. Dies wird erst durch Fremdkörper wie z.B. Rauch, Farbstoff, Strömungsfäden oder anderes ermöglicht. Es wird also in der Praxis unmöglich sein tatsächlich $\vec{u}(\vec{r}, t)$ für alle \vec{r} und t zu messen. Deshalb ist man auf indirekte Methoden wie z.B. die Messung von Druckdifferenzen oder die Messung der Kraft auf einen in der Strömung befindlichen Körper angewiesen. Außerdem sind Messinstrumente oft nur dazu in der Lage den Betrag oder die Richtung von \vec{u} zu bestimmen. Dabei ist außerdem zu beachten, dass Instrumente zur Messung des Betrags von \vec{u} oft eine Richtungsempfindlichkeit besitzen, sodass vor der Messung des Betrags die Kenntnis der Richtung von \vec{u} erforderlich ist.

Die Grundlage zur Bestimmung von Strömungsgeschwindigkeiten durch Druckmessung bildet die Bernoulli-Gleichung 15. Stellt man diese nach u um, ergibt sich eine Formel zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit des Fluids:

$$u = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)} = \sqrt{\frac{2}{\rho}p_d} \quad (19)$$

Dabei ist $p_d := p_0 - p$ der dynamische Druck. In der Praxis wird deshalb oft eine Messung des Gesamtdrucks und des statischen Drucks durchgeführt, um aus der Differenz auf die Geschwindigkeit des strömenden Fluids schließen zu können.

2.2.2 Sonden zur Messung des Gesamtdrucks (Pitot Rohre)

Im vorderen Teil eines Körpers stellt sich der Gesamtdruck ein, der dort durch Anbringen einer Bohrung gemessen werden kann. Mit einem parallel zur Strömung ausgerichteten Rohr hat schon Henri Pitot (1732) als erster Strömungsgeschwindigkeiten gemessen. Deshalb bezeichnet man Gesamtdruckrohre als Pitot Rohre. Um die Richtungsempfindlichkeit von Pitot Rohren zu verbessern wurden verschiedene Kopfformen entwickelt. Es wurde auch ein umhülltes Pitot Rohr entwickelt. Der maximale Winkelbereich, um unter 1% Fehler zu bleiben, hängt stark vom jeweiligen Pitot Rohr ab. Er kann bei einer scharfen Vorderkante $\pm 10^\circ$ betragen und reicht beim umhüllten Pitot Rohr bis zu $\pm 60^\circ$. Diese Werte sind jedoch nur Richtwerte.

2.2.3 Sonden zur Messung des statischen Drucks

Zur Messung des statischen Drucks wird ein vorne geschlossenes Rohr mit seitlichen Bohrungen verwendet. Die Bohrungen dürfen dabei keinen Grad oder ähnliches aufweisen, da sonst die Messergebnisse verfälscht werden. Außerdem muss die Bohrung exakt senkrecht zur Wand und damit auch zur Strömung sein.

2.2.4 Sonden zur gleichzeitigen Messung des Gesamtdrucks und des statischen Drucks (Prandtl Rohre)

Ein Prandtl Rohr ist Pitot Rohr und statische Drucksonde in einem und kann daher direkt zur Messung des dynamischen Drucks verwendet werden. Beim Prandtl Rohr ist die Messung des statischen Drucks problematisch, da es wichtig ist, dass sich die Bohrungen hierfür nicht zu weit vorne, aber auch nicht zu weit hinten befindet. Beides führt zu Fehlern bei der Messung des statischen Drucks. Werden diese Bohrungen jedoch korrekt platziert, gleichen sich die Messfehler gerade gegenseitig aus. Hier soll jedoch nicht weiter auf diesen Aspekt eingegangen werden, da bei unseren Messungen ein Pitot Rohr verwendet wurde.

3 Versuchsaufbau

3.1 Aufbau des Pendels

Eine Skizze des Versuchsaufbaus ist auf Seite ?? im Anhang zu finden. Für ein Doppelpendel, das auch Überschlänge des unteren Pendelglieds erlaubt, mussten die Verbindungen der Pendelmassen als Stäbe gebaut werden. Dabei galt es zu beachten, dass ein möglichst geringer Teil der Gesamtmasse in den Pendelstäben liegt. Die Wahl des Materials fiel auf Acryl, da es bei relativ geringem Gewicht die erforderliche Steifigkeit liefern kann. Das obere Pendelglied wurde symmetrisch auf beiden Seiten des Pendels gebaut um Kräfte zu vermeiden, die Schwingungen außerhalb der gewünschten Ebene verursacht hätten. Für den unteren Stab wurde eine Materialstärke von 5mm gewählt, für den oberen Stab, war aufgrund der doppelten Ausführung eine Stärke von 3mm ausreichend. Auch diese dünne Materialstärke liefert ein Gewicht von 70g pro Stab konnte aber aufgrund der Anforderungen an die Steifigkeit und Kosteneffizienz nicht unterschritten werden.

Um ein möglichst einfaches Modell zu erhalten, wurde versucht, die Reibung in den Achsen des Pendels zu minimieren. Die Lagerung wurde durch Kugellager der Firma FAG realisiert. Es wurden zwei Lager in der Aufhängung des Pendels integriert sowie ein weiteres Kugellager in der oberen Masse. Die Gewindestange, das Kugellager sowie die sechs Schrauben und Muttern der oberen Masse kommen zu einer Masse m_1 von 301g zusammen. Um das Modell zu vereinfachen wurde versucht, eine möglichst gleiche Masse für m_2 zu finden. Hier kam ein Gewicht aus dem Lager des Projektpraktikums mit einer Masse von 297g zum Einsatz.

3.2 Messung der Pendelbewegung

Um den Aufenthaltsort der Massen in der Pendelebene mit einem geringen zeitlichen Intervall aufzunehmen wurde eine Kamera eingesetzt. Um nach dem Versuch die X, Y Daten in einer Tabelle zu erhalten, wurde die Videotracking Software „Tracker“ von Open Source Physics ¹ eingesetzt. Bei Testaufnahmen stellte sich heraus, dass das Programm dazu neigte, sofern kein optimaler Kontrast des Objekts zum Hintergrund herrschte, in einigen Frames Punkte im Hintergrund statt dem Objekt zu fokussieren. Als eine Weitere Hürde stellte sich die Bewegungsunschärfe dar, besonders in Phasen mit hoher Geschwindigkeit verschwamm der Trackingpunkt mehr zu einer Linie, die die Software dann nicht mehr zuordnen kann. Um einen hohen Kontrast zum Hintergrund zu erhalten, wurden die Massen mit LED markiert und der Versuch wurde in einem sonst dunklen Raum durchgeführt. Um die Bewegungsunschärfe zu minimieren wurde eine Kamera mit möglichst geringer Minimalverschlusszeit bei gleichzeitig guter Lichtausbeute gesucht. Diese Anforderungen konnten von einer Spiegelreflexkamera mit Videomodus erreicht werden. Auf den Einzelbildern des Videos erschienen die Marker des Pendels bei einer Verschlusszeit von $\frac{1}{2000}\text{s}$ zu allen Zeiten als Punkte. Die Punkte ließen sich im Allgemeinen gut durch die Video Tracking Software analysieren, abgesehen von Spezialfällen in denen

¹<http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/>

Abbildung 6: Versuchsaufbau mit Kamera

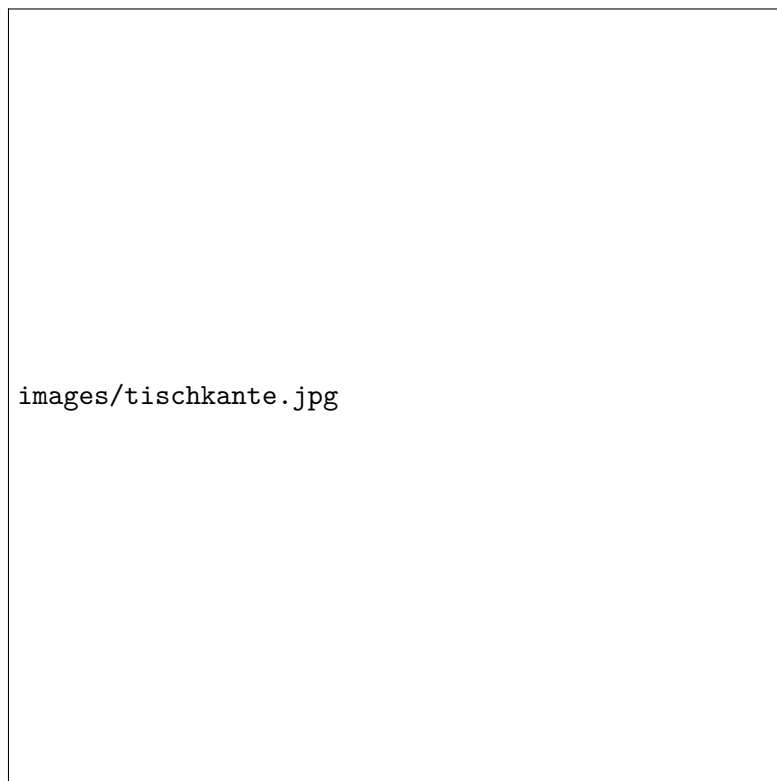


Abbildung 7: Tischkante verdeckt LED

sich eine der Massen über der Tischkante und damit außerhalb des für die Kamera sichtbaren Bereichs befand.(siehe Abb. ??) Als Nachteil der Spiegelreflexkamera kann gesehen werden, dass eine Aufnahme von 30 Bilder pro Sekunde die maximale Framerate der Kamera darstellt.

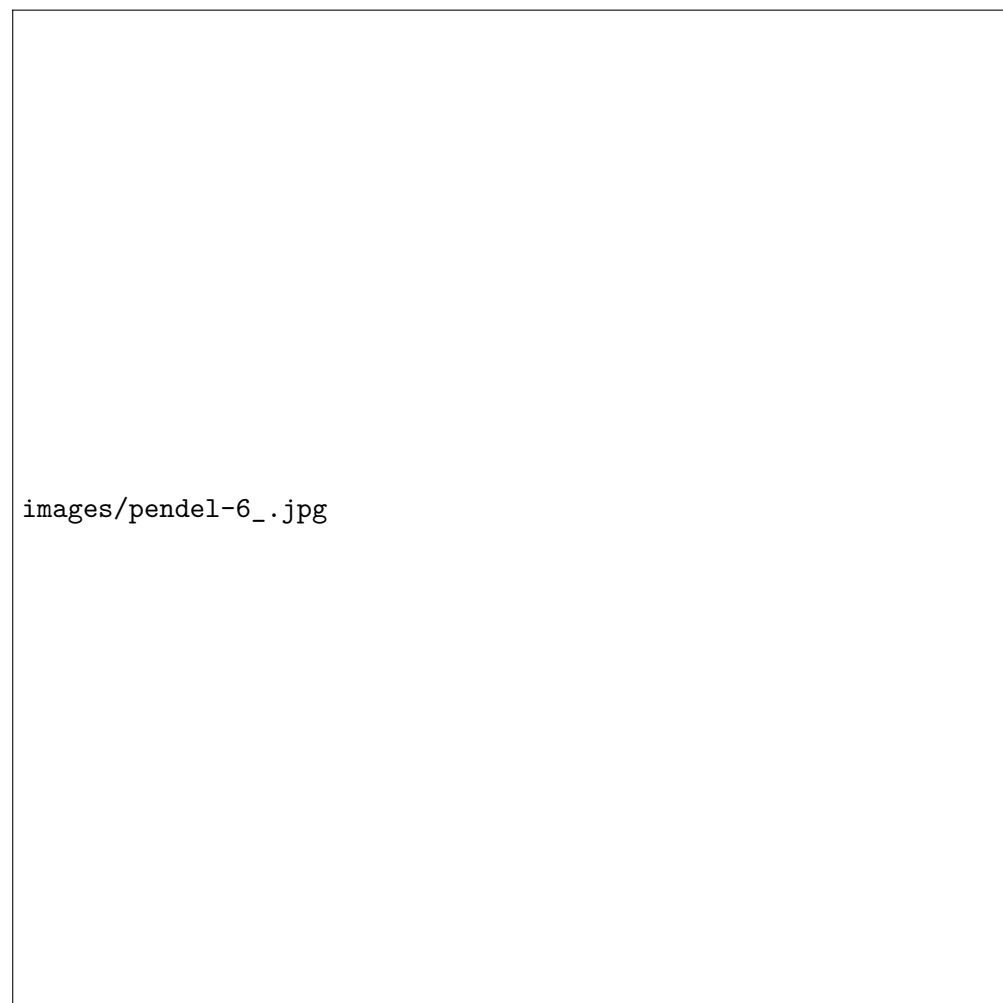
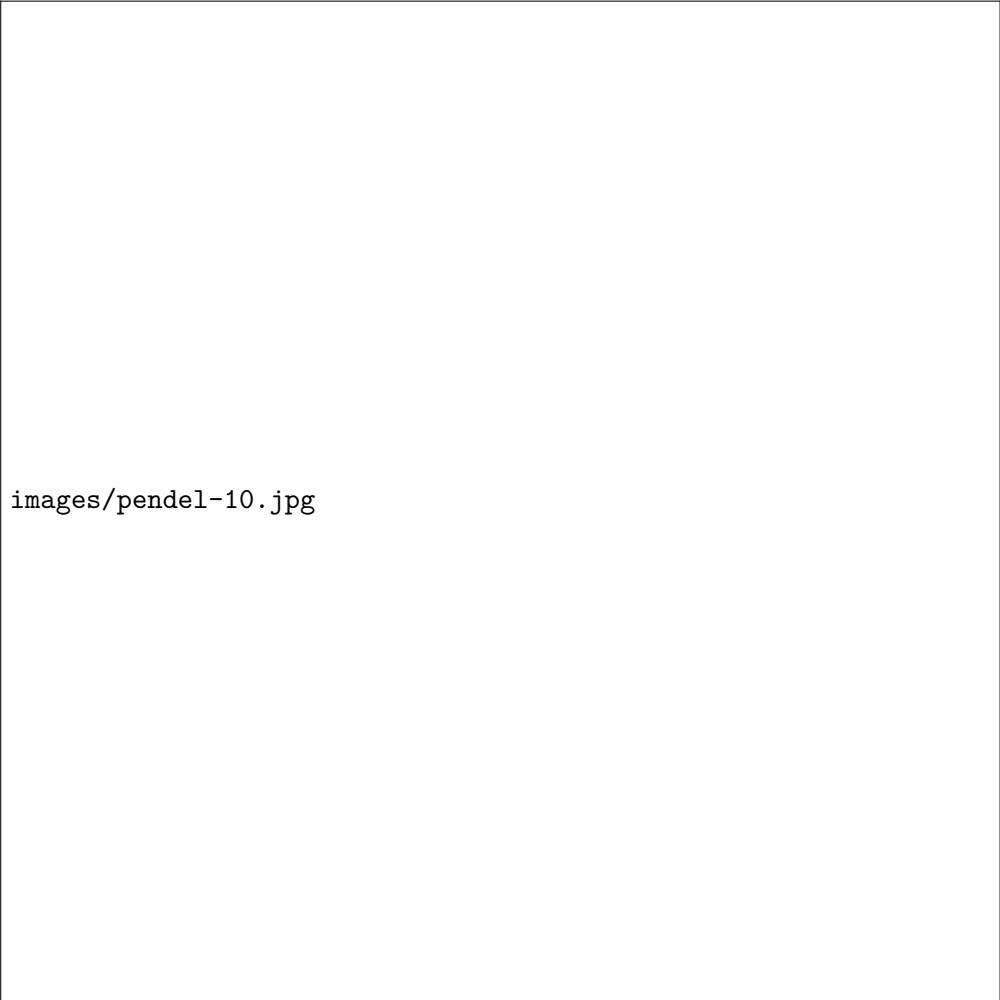


Abbildung 8: 1. Verlauf



images/pendel-10.jpg

Abbildung 9: 2. Verlauf

4 Darstellung der Ergebnisse und Auswertung

4.1 Untersuchung des chaotischen Verhaltens

Zunächst wurde das Pendel aus, soweit händisch möglich, gleichen Anfangsbedingungen gestartet. Der Startpunkt wurde hier mittels einer an einem der beiden Tische befestigten Gewindestange festgehalten. Das Pendel wurde dann in Ruhe so gestartet, dass sich die obere Masse(m_1) direkt neben der Gewindestange befand. Aufgrund dieser Anordnung kann ein geschätzter Fehler von $5mm$ für den Ort der oberen Masse und dementsprechend auch für den Ort der unteren Masse angenommen werden.

Vergleicht man drei exemplarisch ausgewählte Aufnahmen (??, ??, ??) (Belichtungszeit jeweils $3.2s$), so zeigt sich, dass der Verlauf der grünen Leuchtspur des unteren Pendels zumindest der groben Form nach gleich ist bis zu dem mit einem roten Pfeil markierten

Abbildung 10: 3. Verlauf

Punkt. Danach differierten die Wege der unteren Masse deutlich, bis nach etwa einer halben weiteren Schwingung überhaupt kein sichtbarer Zusammenhang mehr zwischen den Leuchtspuren besteht. Während in ?? und ?? die Spur von dem markierten Punkt ausgehend einen Bogen nach rechts beschreibt, wird in ?? die untere Masse abgebremst, sodass sie, wie an der deutlich helleren Färbung der Leuchtspur zu erkennen, fast zum Stehen kommt und danach annähernd senkrecht nach unten weiterführt. Der Grund für die hellere Färbung bei langsameren Geschwindigkeiten und insbesondere Punkten, bei denen sich die Geschwindigkeitsrichtung umkehrt, ist, dass ein Punkt auf der Leuchtspur umso heller ist, je länger sich die an der Masse befestigte Diode im Abstand der halben Breite der Leuchtspur (des „optischen Radius“ der Diode) von diesem Punkt befindet. Weiter divergiert auch der Verlauf von ?? und ?? bald, wie in den Abbildung gut zu erkennen ist. Dieses Verhalten entspricht dem in der Theorie dargestellten chaotischen Verhalten, sodass das Doppelpendel als ein chaotisches System bezeichnet werden kann.

4.2 Betrachtung der Reibung

4.2.1 Allgemeines zur Auswertung

Gewählt wurde für die Auswertung ein Fall mit kleiner Auslenkung, weil die Messpunkte so durch numerische Berechnung in Näherung nachvollzogen werden konnten. Für die Betrachtung der Reibung wurde ein Video aufgenommen und mittels eines Tracking-Programms nachträglich ausgewertet. Da aus den Tracking-Daten nur die einzelnen Koordinaten der Massepunkte hervor gehen, aber nicht die Koordinaten des Ursprungs, muss dieser noch separat ermittelt werden. Dies wurde mittels einer Berechnung in python erreicht, wobei ein Algorithmus implementiert wurde, der für jeden Punkt (x, y) eines Rasters die Abstände d_1, d_2, \dots zu den Messpunkten des oberen Pendels $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots$ ermittelt und die stochastische Varianz dieser Abstände berechnet. Als Koordinatenursprung wird dann der Punkt mit minimaler Varianz des Abstandes verwendet, d.h. der Punkt, an dem die Abstände zu allem Messpunkten des oberen Pendels ungefähr gleich sind, sodass sich die „Länge“ des ersten Pendels im Rahmen der Messgenauigkeit als konstant ergibt.

4.2.2 Betrachtung der Messergebnisse

Zunächst fällt auf, dass die Energiewerte (Abb. ??) deutlich streuen und vom einem monotonen Verlauf abweichen. Der Grund hierfür besteht darin, dass das ausgewertete Video lediglich mit einer Aufnahme rate von 30 Bildern pro Sekunde aufgezeichnet wurde. Aus diesem Grund tritt der Effekt auf, dass die Spitzen der Geschwindigkeit bei der Auswertung „abgeflacht“ werden. Dies ist insbesondere dann sichtbar, wenn das Pendel ein Minimum der Höhe durchläuft und ein Bild vor und das darauffolgende nach dem Durchlauf aufgenommen wird. Die errechnete Geschwindigkeit ist dann kleiner als die tatsächliche (Abb. ??).

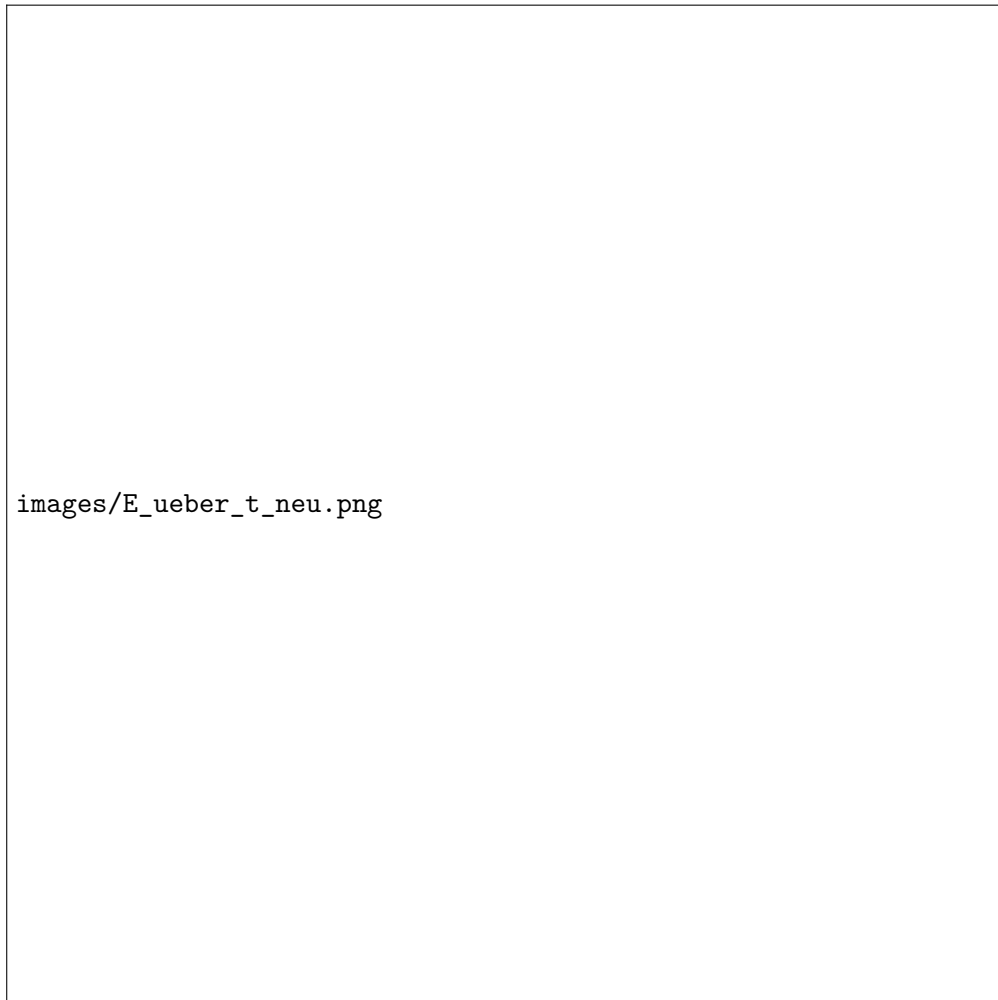


Abbildung 11: Energie des Pendels über der Zeit



Abbildung 12: Schematische Darstellung der fehlerhaften Auswertung

Verstärkt wird dies dadurch, dass bei der Auswertung die Geschwindigkeit zur Zeit t mittels $|\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t - \Delta t)|$ bestimmt wurde. Somit verhindert man die „Verschiebung“ zwischen den Ortskoordinaten $\vec{x}(t)$ und \vec{v} , die sich ergeben würde, wenn man nur das Intervall $[t - \Delta t, t]$ betrachtet. Hier würde man einem Ort (und der damit verbundenen kinetischen Energie) eine „frühere“ und damit falsche Geschwindigkeit zuordnen. Dieser Fehler ist schwer abzuschätzen, da korrekterweise eine stochastische Betrachtung nötig wäre, die aber insbesondere aufgrund des chaotischen Verhalten des Doppelpendels problematisch ist. Es soll deshalb angenommen werden, dass die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 jeweils mit einem Fehler von $0.1 \frac{m}{s}$ bestimmt werden kann. Mittels einer Fehlerfortpflanzung ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial v_1} \cdot \Delta v_1\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial v_2} \cdot \Delta v_2\right)^2} = \sqrt{(m_1 |v_1| \cdot \Delta v_1)^2 + (m_2 |v_2| \cdot \Delta v_2)^2} = \\ &= \sqrt{(\Delta v)^2 \cdot (m_1^2 |v_1|^2 + m_2^2 |v_2|^2)} \end{aligned} \quad (20)$$

Damit ergeben sich die eingezeichneten Fehlerbalken.

4.2.3 Luftreibung

Da sich die Geschwindigkeit im Bereich von etwa null bis zwei Metern pro Sekunde bewegt, siehe Abb. ??, eine der verwendeten Acrylplatten eine Projektionsfläche von $1.5 \cdot 10^{-3} m^2$ (unten: 25 cm Länge, 6 mm Stärke) bzw. $1.4 \cdot 10^{-3} m^2$ (oben: 35 cm Länge, 4 mm Stärke) hat, ergibt sich bei einer Luftdichte von $1.2 \frac{kg}{m^3}$ eine abbremssende Kraft von $1.8 \cdot 10^{-3} N$ (mit $v = 1 \frac{m}{s}$, $c_W = 2$, $A_S = 1.5 \cdot 10^{-3} m^2$).

Für die drei verwendeten Platten ergibt sich somit, mit der stark vereinfachten Annahme, dass die gesamte Fläche sich mit gleicher Geschwindigkeit bewegt und die Beschleunigung über längere Zeit konstant ist, was zur Abschätzung der Größenordnung aber ausreichend ist, eine Kraft von $5.4 \cdot 10^{-3} N$. Mit einer Gesamtmasse von $0.7 kg$ inklusive der Acrylplatten folgt eine durchschnittliche Beschleunigung von etwa $7.7 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2}$. Bei einer Dauer der Messung von 20s ergibt sich hiermit also eine Geschwindigkeitsänderung von etwa $0.15 \frac{m}{s}$, die also einen wesentlichen Teil des Energieverlusts darstellt.

4.2.4 Reibung in den Kugellagern

Laut [?] liegt c_R für Kugellager im Bereich von etwa 0.5 bis $1 \cdot 10^{-3}$. Damit ergäbe sich bei einer Gesamtmasse von etwa $0.7 kg$ eine abbremssende Kraft von der Größenordnung 10^{-3} bis $10^{-2} N$.

4.2.5 Energieübertrag auf die Aufhängung

Neben dem Energieverlust durch die Luftreibung tritt ein der Energieübertrag auf die Aufhängung als weiterer Effekt auf. Dieser sollte zwar durch eine möglichst starre und unbewegliche Befestigung des Pendels zwischen zwei Tischen minimiert werden, trotzdem

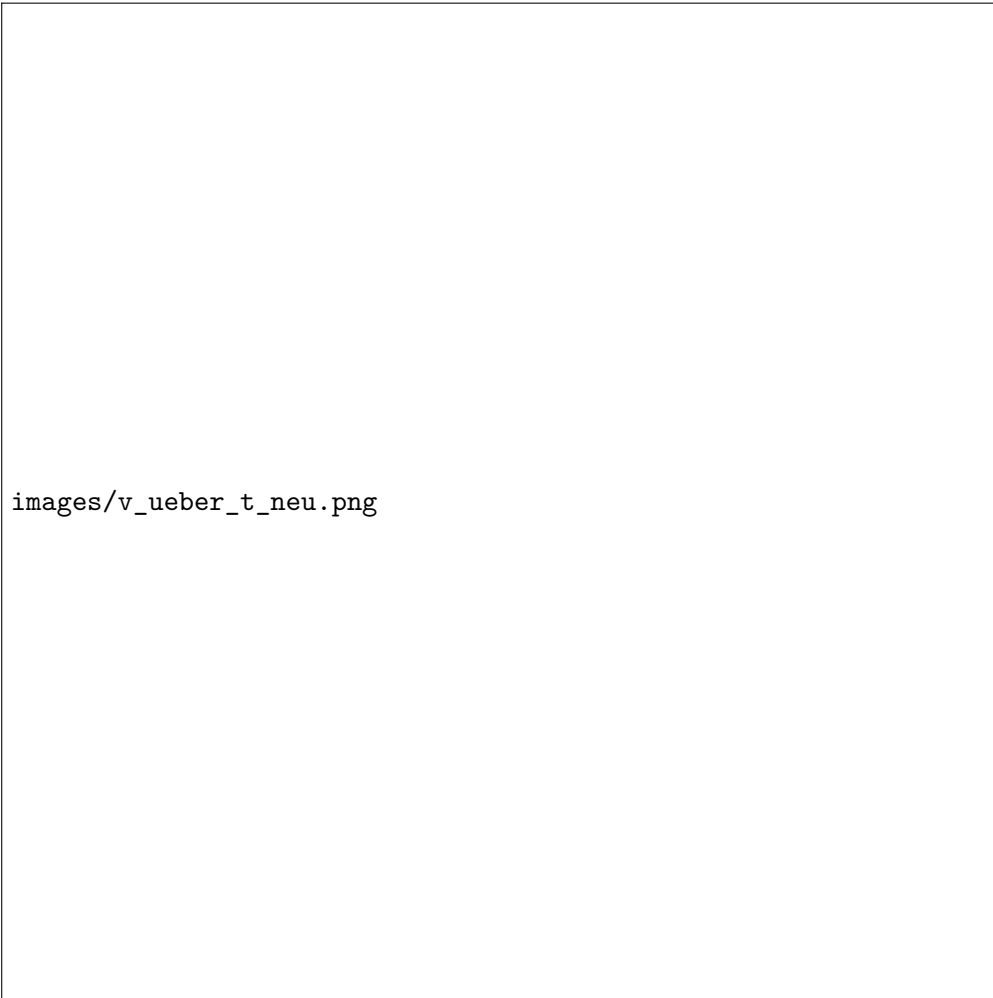


Abbildung 13: Geschwindigkeit der beiden Massepunkte über der Zeit

fangen vor allem bei Überschlagen des Pendels die Tische deutlich sichtbar zu wackeln an. Es bietet sich hier an, in grober Näherung eine lineare Abhängigkeit des Energieverlustes des Systems von der momentanen Energie anzunehmen.

Nimmt man einen exponentiellen Abfall der Energie $E(t) = a \cdot e^{b \cdot t}$ an, so ergibt sich mittels eines Fits (Abb. ??) in den Verlauf von

$$a = 0.813J$$

und

$$b = -0.024s^{-1}$$

mit Fehlern von 1.26% und 4.89%.

Allerdings kann aus den hier dargestellten Daten nicht verifiziert werden, ob der Verlauf tatsächlich einem exponentiellen Abfall folgt, da auch etwa ein Abfall mit dem inversen Quadrat der Zeit denkbar wäre, wie es für reine Luftreibung zu erwarten wäre.

4.3 Simulation des Doppelpendels

Die gemessenen Daten sollen nun mit einer Simulation, die entsprechend der Beschreibung in der Theorie durchgeführt wurde, verglichen werden. Da das Pendel händisch gestartet wurde, ist davon auszugehen, dass sich die ersten Werte eher schlecht mit der Simulation nachvollziehen lassen.

Tatsächlich ist dies der Fall, wie in Abb. ?? zu sehen ist. Hier ist die x_2 -Koordinate, also die x-Koordinate des unteren Pendels über der Zeit aufgetragen. Man erkennt, dass sich Simulation und Messung schon zu Beginn sehr deutlich unterscheiden. Zwar verlaufen ab etwa 0.8s Simulation und Messung ähnlich, allerdings dürfte dies auf einen Zufall beziehungsweise darauf zurückzuführen sein, dass die Auslenkung des Pendels hier relativ klein ist und das Pendel ein leicht periodisches Verhalten aufweist. Aus diesem Grund wurde die Simulation erst bei 0.8s begonnen. Dieser spezielle Wert wurde gewählt, weil hier wie in Abb. ?? die Änderungsrate von x_2 in etwa 0 ist, und so Fehler bei der Bestimmung der Geschwindigkeit zu minimieren.

Dabei wurden die in Abb. ??, ??, ?? und Abb. ?? dargestellten Ergebnisse erzielt, wobei der rote Graph die Simulation darstellt und der grüne die tatsächlich gemessenen Werte.

Es ist deutlich sichtbar, dass die Verläufe bis etwa $t = 2s$ recht gut mit den Messwerten übereinstimmen, danach ergeben sich vor allem bei den x_2 - und y_1 -Koordinaten deutliche Unterschiede, wohingegen bei den anderen beiden Koordinaten noch länger eine deutliche Ähnlichkeit bestehen bleibt. Die Ähnlichkeit ist zum Teil auch darauf zurückzuführen, dass das Pendel bei dieser Messung kein deutlich ausgeprägtes chaotisches Verhalten besitzt, sondern eher periodische Eigenschaften aufweist.

Trotzdem eignet sich die Simulation scheinbar gut, um die Bewegung des Pendels nachzuvollziehen.

Weiter sind die sich aus den gemessenen Daten ergebenden Phasenraumdiagramme in Abb. ?? und Abb. ?? dargestellt. Es ergibt sich dabei ein Verlauf, der plausibel erscheint, da sie sehr dem in Abb. ?? ähnelt, welches das Phasenraumdiagramm eines einfachen



Abbildung 14: Auftragung der x_2 -Koordinate bei einer Simulation mit Start zu etwa dem Zeitpunkt des Loslassens



Abbildung 15: Auftragung der x_1 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start

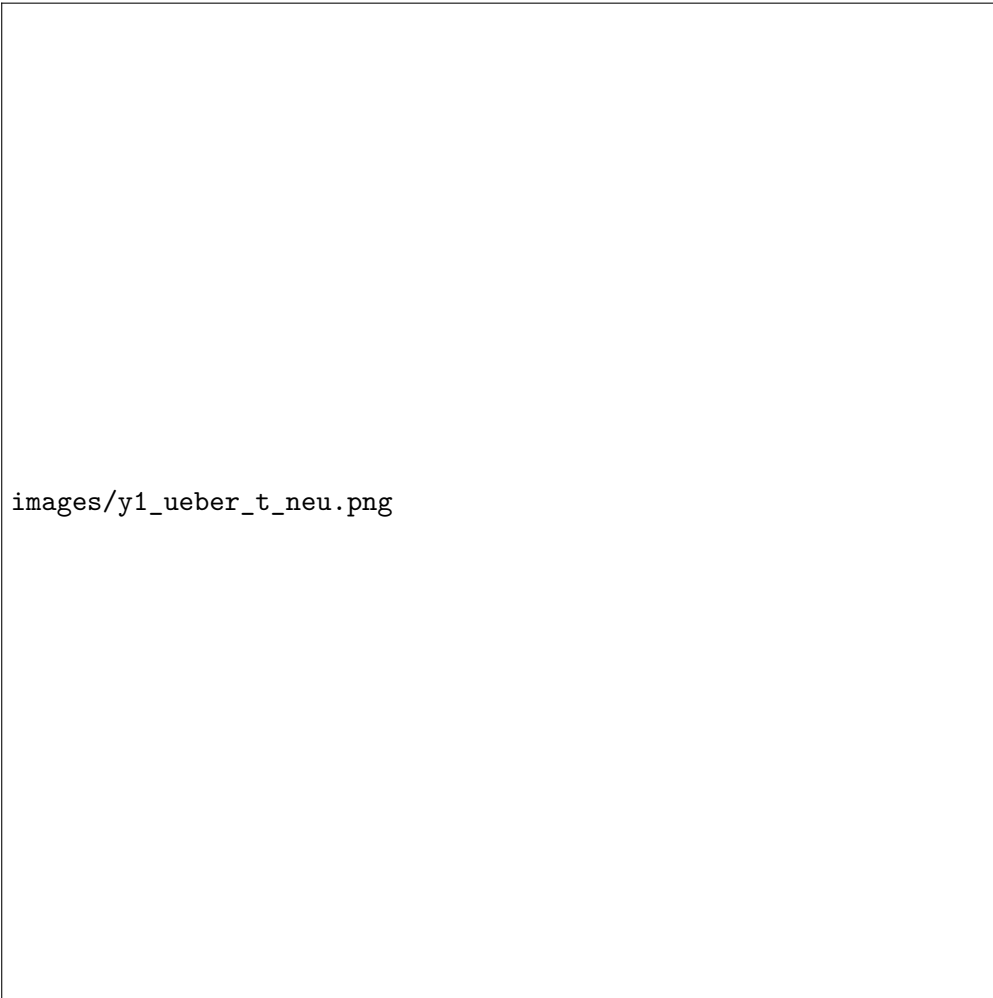


Abbildung 16: Auftragung der y_1 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start

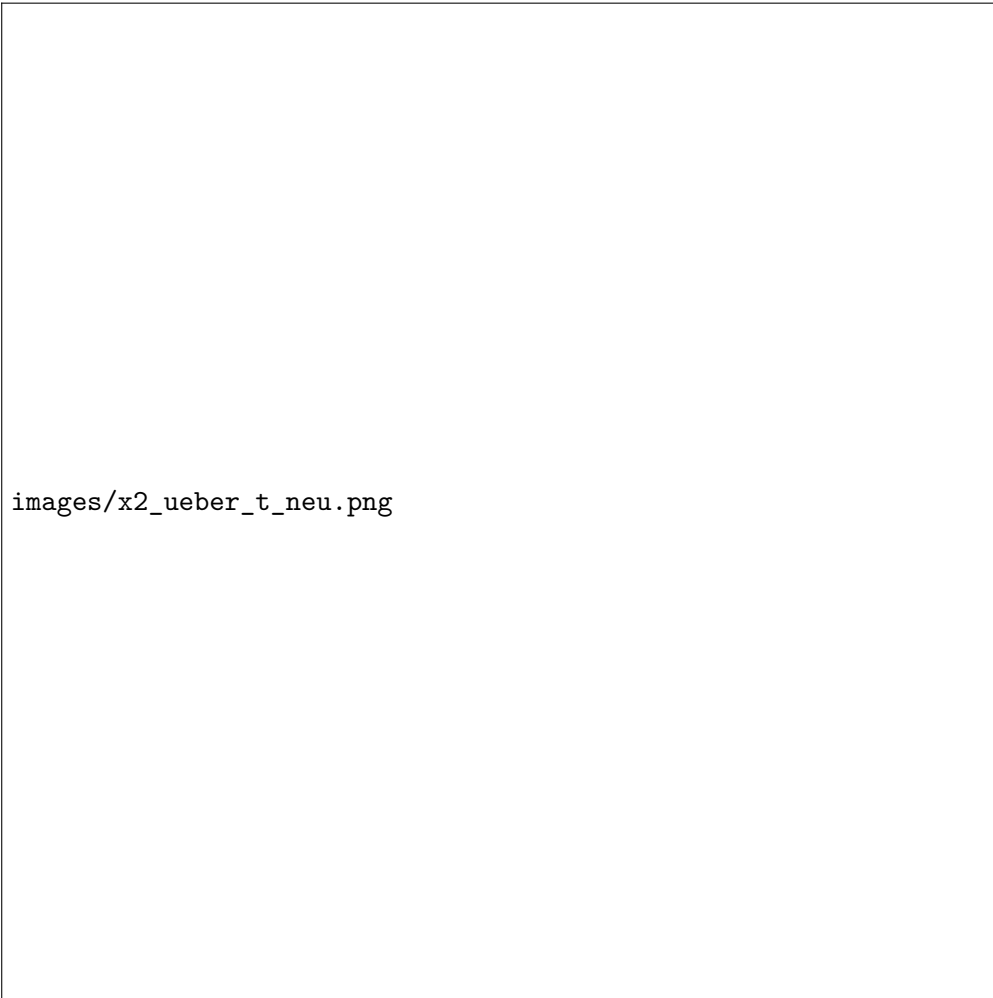


Abbildung 17: Auftragung der x_2 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start

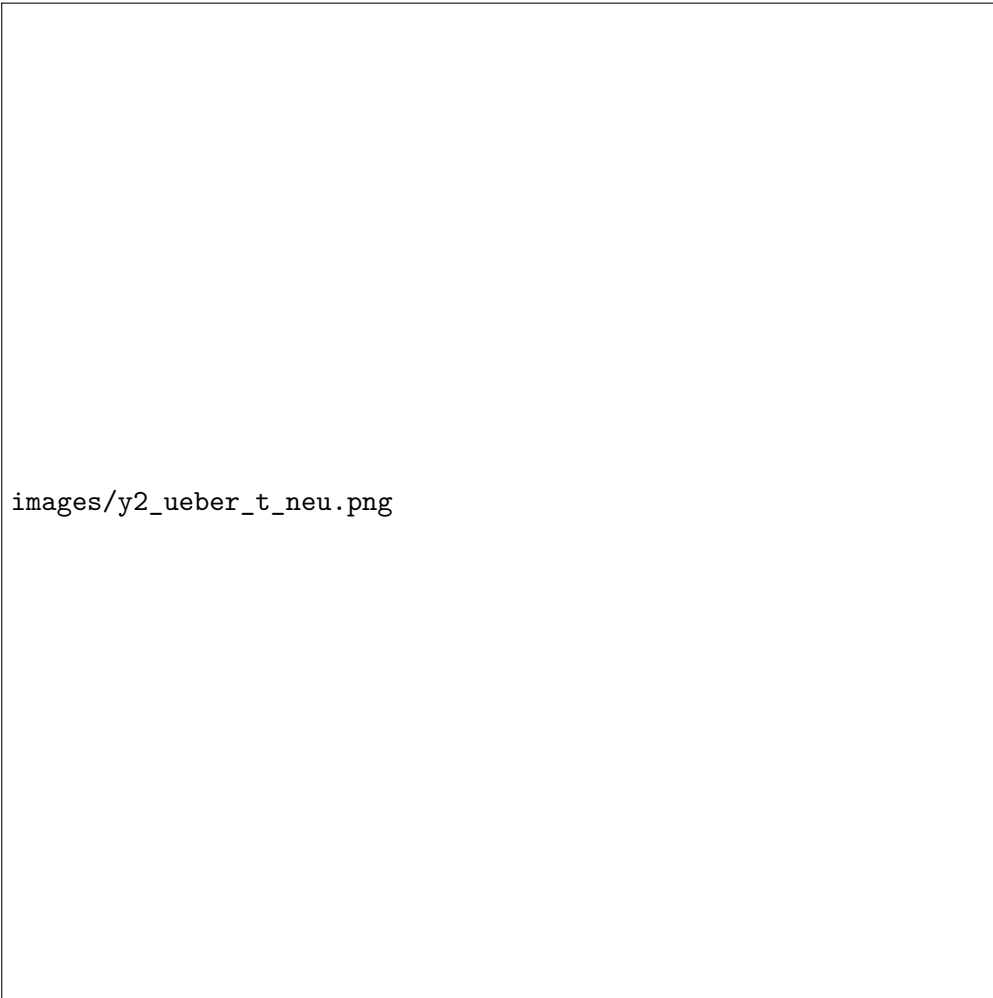


Abbildung 18: Auftragung der y_2 -Koordinate bei einer Simulation mit späterem Start



images/phi1_ueberphi1_neu.png

Abbildung 19: Phasenraum $\dot{\varphi}_1$ über φ_1



Abbildung 20: Phasenraum $\dot{\varphi}_2$ über φ_2

Pendels zeigt. Der Grund dafür liegt darin, dass auch das Doppelpendel in dem hier dargestellten Energiebereich lediglich „hin und her schwingt“, sodass eine in Näherung ellipsenförmige, auf jeden Fall aber „geschlossene“ Kurve entsteht.

Trotzdem gibt es Abweichungen zum einfachen Pendel. Zunächst schneiden sich hier die Linien im Phasenraumdiagramm, was allerdings darauf zurückzuführen ist, dass die Auftragungen nur eine Projektion des gesamten, vierdimensionalen Phasenraums darstellen. Weiter erscheint das Diagramm vor allem bei dem oberen Pendel (Abb. ??) seitlich „unscharf“, was durch die Beeinflussung durch das untere Pendel zu erklären ist.

5 Fazit

Es zeigt sich, dass das Doppelpendel, wie zu erwarten, chaotisches Verhalten aufweist. Darüber hinaus ist es möglich, die Bewegung des Doppelpendels über mehrere „Schwingungen“ nachzuvollziehen, wohingegen eine analytische Lösung der in der Theorie aufgestellten Bewegungsgleichung unmöglich ist.

Literatur

- [Dem] DEMTRÖDER, Wolfgang. Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme. Springer DE, 2005.
- [Sch] SCHECK, Florian. Theoretische Physik 1: Mechanik. Von den Newtonschen Gesetzen zum deterministischen Chaos. Springer DE, 2003.
- [Reib] Wikipedia. Tabellarische Auflistung von Rollreibungskoeffizienten. <http://de.wikipedia.org/wiki/Rollreibung>. (11. Januar 2014)
- [Eul] Wikipedia. Tabellarische Auflistung von Rollreibungskoeffizienten. <http://de.wikipedia.org/wiki/Rollreibung>. (11. Januar 2014)
- [Win] Wikipedia. Artikel zu Winddruck und Windlast. <http://de.wikipedia.org/wiki/Winddruck> (19. November 2014)
- [Rol] Wikipedia. Rollwiderstand. <http://de.wikipedia.org/wiki/Rollreibung> (19. November 2014)

6 Anhang

6.1 Winkelabhängigkeit

Tabelle 1: Winkelabhängigkeit des Pitotrohrs

v=4,3 m/s		v=10,3 m/s		v=14,2 m/s	
Druck in Pa	Winkel in Grad	Druck in Pa	Winkel in Grad	Druck in Pa	Winkel in Grad
18	0	58	0	113	0
19	7	57	7	111	7
18	15	57	15	113	15
18	23	55	23	111	23
19	31	53	31	111	31
16	39	51	39	106	39
16	47	42	47	84	47
14	56	38	56	70	56
7	64	20	64	57	64

Tabelle 2: Winkelabhängigkeit der Prandtlsonde

v=10,3 m/s	
Druck in Pa	Winkel in Grad
63	0
64	10
63	20
61	30
59	40
55	50
45	60
36	70

6.2 Kalibration

6.3 Geschwindigkeitsmessung

Tabelle 3: Kalibration Teil 1

Geschwindigkeit Windmesser in m/s	Druck Pitotrohr in Pa
4,6	11
6,2	20
7,4	30
9	45
11,1	70
13,1	97
14	111
16,1	152

Tabelle 4: Kalibration Teil 2

Geschwindigkeit Pitotrohr in m/s	Fehler	Abweichung
4,2	0,38290435	0,4
5,7	0,28396947	0,5
7	0,2318601	0,4
8,5	0,18931298	0,5
10,6	0,15178806	0,5
12,5	0,12894389	0,6
13,4	0,12053833	0,6
15,7	0,10300655	0,4
	0,4875	Mittelwert
	0,0834523	Standardabweichung
	0,02950484	st. Fehler

Tabelle 5: Messwerte GPS

	30 km/h	50 km/h	60 km/h	70 km/h	80 km/h	90 km/h
	GPS in kn	GPS in kn	GPS in kn	GPS in kn	GPS in kn	GPS in kn
	13,15	25,2	29,09	36,28	40,65	45,8
	15,06	25,12	30,22	35,16	40,47	45,97
	15,94	25,35	30,43	35,36	40,48	46,21
	15,08	24,3	30,15	35,59	40,21	45,93
	14,31	25,51	29,49	35,48	41,2	45,81
	13,78	24,83	30,95	35,67	39,66	44,5
	13,08	24,08	29,78	35,25	39,85	43,49
	14,91	24,63	30,57	34,82	41,31	45,84
	14,9	24,73	29,99	35,97	41,93	44,24
	13,89	25,54	29,75	35,63	38,18	43,37
Mittelwert	14,41	24,929	30,042	35,521	40,394	45,116
Standardabweichung	0,92713417	0,50036542	0,54413642	0,41356042	1,03800235	1,10058772
statistischer Fehler	0,29318557	0,15822944	0,17207104	0,13077929	0,32824517	0,3480364
gesamter Fehler	0,59318557	0,45822944	0,47207104	0,43077929	0,62824517	0,6480364
Mittelwert in km/h	26,68732	46,168508	55,637784	65,784892	74,809688	83,554832
Fehler in km/h	1,09857967	0,84864092	0,87427557	0,79780324	1,16351005	1,20016341

Tabelle 6: Messwerte Pitotrohr

30 km/h	50 km/h	60 km/h	70 km/h	80 km/h	90 km/h
Druck in Pa	Druck in Pa	Druck in Pa	Druck in Pa	Druck in Pa	Druck in Pa
46	88	116	204	211	271
42	91	115	202	215	281
41	96	113	199	227	286
40	94	111	195	224	289
39	93	118	193	217	294
39	94	125	193	211	297
38	99	132	191	215	302
38	100	134	191	213	308
38	100	132	189	215	299
38	102	128	186	213	291

Tabelle 7: Berechnete Geschwindigkeiten + Abweichung

	30 km/h	50 km/h	60 km/h	70 km/h	80 km/h	90 km/h
	u in m/s	u in m/s	u in m/s	u in m/s	u in m/s	u in m/s
	9,19	12,59	14,39	18,89	19,19	21,69
	8,89	12,79	14,29	18,79	19,39	22,09
	8,79	13,09	14,19	18,69	19,89	22,29
	8,69	12,99	14,09	18,49	19,79	22,39
	8,49	12,89	14,49	18,39	19,49	22,59
	8,49	12,99	14,89	18,39	19,19	22,69
	8,39	13,29	15,29	18,29	19,39	22,89
	8,39	13,39	15,39	18,29	19,29	23,09
	8,39	13,39	15,29	18,19	19,39	22,79
	8,39	13,49	15,09	18,09	19,29	22,49
Mittelwert	8,61	13,09	14,74	18,45	19,43	22,5
Standardabweichung	0,27406406	0,29439203	0,50387388	0,26331224	0,23664319	0,4094712
stat.Fehler	0,08666667	0,09309493	0,15933891	0,08326664	0,07483315	0,12948616
ges. Fehler	0,11666667	0,12309493	0,18933891	0,11326664	0,10483315	0,15948616
Mittelwert in km/h	30,996	47,124	53,064	66,42	69,948	81
Fehler in km/h	0,42	0,44314176	0,68162008	0,4077599	0,37739933	0,57415019