

# **Frequenzfilter**

**PPG8**

Udo Beier      Leon Brückner      Valentin Olpp      Marco Zech  
Sebastian Ziegler

November 2013

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Betrachtung</b>	<b>3</b>
2.1	Durchlassfilter . . . . .	3
2.2	Sperrfilter . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>6</b>
3.1	Durchlassfilter als Frequenzfilter . . . . .	6
3.2	Sperrfilter als Frequenzfilter . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Ergebnisse und Diskussion</b>	<b>8</b>
4.1	Durchlassfilter . . . . .	8
4.2	Sperrfilter . . . . .	9
4.3	Fazit . . . . .	10

## Abbildungsverzeichnis

1	Schaltbild eines Durchlassfilters . . . . .	4
2	Schaltbild eines Sperrfilters . . . . .	5
3	Position der zusätzlich angenommenen Widerstände . . . . .	6
4	Sprünge in handnotierten Werten der Messung mit Oszilloskop klar erkennbar (Durchlassfilter) . . . . .	7
5	Fotos der Versuchsaufbauten . . . . .	8
6	Plot der Messdaten des Durchlassfilters unter Berücksichtigung des gemessenen Gesamtwiderstandes . . . . .	9
7	Plot der Messdaten des Durchlassfilters (Theoriekurven mit gefittetem Gesamtwiderstand) . . . . .	11
8	Plot der Messdaten des Sperrfilters mit (Theoriekurven mit gemessenem Widerstand) . . . . .	11

# 1 Vorwort

Frequenzfilter bilden die Grundlage für viele technische Anwendungen. Sie sind insbesondere in der Tontechnik essenziell, wenn es darum geht, bestimmte Frequenzen hervorzuheben oder abzuschwächen. Dies kann sehr gut am Beispiel einer Bassdrum verdeutlicht werden. Dort verstärkt man Frequenzen bei ca. 80 Hz sowie hohe Frequenzen von mehr als 1 kHz, um die charakteristischen Klänge einer Bassdrum hervorzuheben, während man mittlere Frequenzen abschwächt, da diese das Klangbild meist verwaschen klingen lassen. Aufgrund der immensen Bedeutung von Frequenzfiltern sollen im folgenden ein Sperr- und ein Durchlassfilter gebaut und die zugehörigen gemessenen Frequenzkurven mit den Theoriekurven verglichen werden.

## 2 Theoretische Betrachtung

### 2.1 Durchlassfilter

Ein Durchlassfilter ist eine Reihenschaltung aus Kondensator, Spule und Widerstand. (s.Abb. 1)

Mit den Kirchhoffschen Regeln und  $U = Z \cdot I$  gilt <sup>1</sup>

$$U_a(\omega) = \frac{R}{R + i \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} \cdot U_e(\omega) \quad (1)$$

$$\Rightarrow |U_a(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} \cdot |U_e(\omega)| \quad (2)$$

Bei der Frequenz

$$\omega = \omega_R = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad (3)$$

wird  $|U_a| = |U_e|$ , d.h. die Wechselspannung  $U_e(\omega_R)$  wird vollständig durchgelassen, während alle anderen Frequenzen abgeschwächt werden. Setzt man nun

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (4)$$

und löst die quadratische Gleichung, ergibt sich die Bedingung

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \omega_R^2} \quad (5)$$

Berechnet man nun die Frequenzbreite  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ , ergibt sich

$$\Delta\omega = \frac{R}{L} \quad (6)$$

, d.h. bei kleineren Widerständen ergeben sich 'schärfere' Peaks.

---

<sup>1</sup>(Demtröder, 2009, 151 ff.)

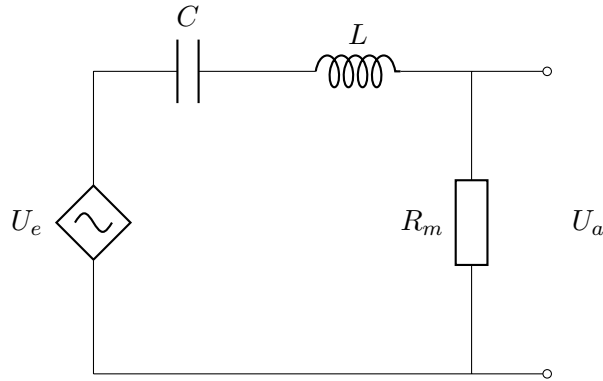


Abbildung 1: Schaltbild eines Durchlassfilters

Bei dieser Betrachtung wird angenommen, dass der Ohmsche Widerstand der Spule vernachlässigbar klein ist. Dies in der Praxis jedoch nicht immer der Fall. Wenn die Spule einen Widerstand  $R_L$  besitzt, ändert sich Gleichung (2) zu

$$\Rightarrow |U_a| = \frac{R}{\sqrt{(R + R_L)^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cdot |U_e| \quad (7)$$

also wird die Wechselspannung  $U_e$  selbst bei der Resonanzfrequenz nicht vollständig durchgelassen.

## 2.2 Sperrfilter

Beim Sperrfilter werden die Spule und der Kondensator nun parallel geschaltet. (siehe Abb. 2 auf Seite 5)

Analog zum Durchlassfilter ergibt sich nun

$$U_a(\omega) = \frac{R}{R - i\frac{1}{\omega C - \frac{1}{\omega L}}} \cdot U_e(\omega) \quad (8)$$

$$\Rightarrow |U_a(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}}} \cdot |U_e(\omega)| \quad (9)$$

Bei der Resonanzfrequenz (3) geht nun  $|U_a| \rightarrow 0$ , d.h. die Frequenz  $\omega_R$  wird blockiert, während andere Frequenzen durchgelassen werden.

Berechnet man hier die Frequenzbreite analog zu (4) und (5) ergibt sich:

$$\Delta\omega = \frac{1}{RC\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} \quad (10)$$

Hier ergeben größere Widerstände 'schärfere' Peaks.

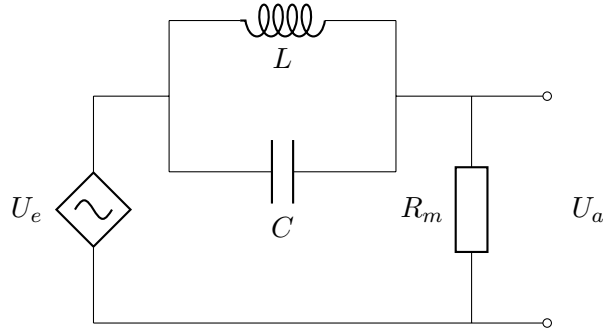


Abbildung 2: Schaltbild eines Sperrfilters

Auch hier kann man der Spule einen Widerstand  $R_L$  zuweisen, außerdem wurde ein nicht weiter spezifizierter zusätzlicher Widerstand  $R_{zus}$  eingefügt, der die Widerstände der Steckverbindungen darstellt, s. ieh Abb. 3 auf Seite 6.

Der Gesamtwiderstand der Parallelschaltung aus Spule und Kondensator ist dann:

$$Z_{SK} = \frac{1}{\frac{1}{R_L + i\omega L} + i\omega C} \quad (11)$$

Der Gesamtwiderstand der Schaltung kann nun geschrieben werden als

$$Z_{SK} + R_{zus} + R = \frac{\gamma R_L - i\omega\gamma[C\gamma - L]}{R_L^2 + \omega^2[C\gamma - L]^2} + R_{ges} \quad (12)$$

mit  $\gamma = R_L^2 + \omega^2 L^2$  und  $R_{ges} = R + R_{zus}$

Analoges Vorgehen zu (1) und (2) liefert schließlich:

$$\frac{|U_a|}{|U_e|} = \frac{R\beta}{\sqrt{(\gamma R_L + R_{ges}\beta)^2 + \gamma^2 \epsilon^2}} \quad (13)$$

mit  $\gamma = R_L^2 + \omega^2 L^2$ ,  $\epsilon = \omega[C\gamma - L]$ ,  $\beta = R_L^2 + \epsilon^2$

Einsetzen der Substitutionen und Ausschreiben liefert dann folgende Gleichung, die für die Theoriekurven in Abb. 8 verwendet wurde.

$$\left| \frac{U_a}{U_e} \right| = \quad (14)$$

$$\frac{R \left( R_L^2 + \omega^2 [C (R_L^2 + \omega^2 L^2) - L]^2 \right)}{\sqrt{(R_L^2 + \omega^2 L^2) R_L + R_{ges} \{ R_L^2 + \omega^2 [C (R_L^2 + \omega^2 L^2) - L]^2 \}^2 + (R_L^2 + \omega^2 L^2)^2 \omega^2 [C (R_L^2 + \omega^2 L^2) - L]}}$$

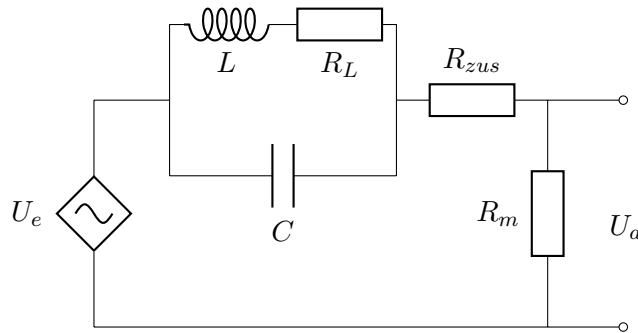


Abbildung 3: Position der zusätzlich angenommenen Widerstände

### 3 Versuchsdurchführung

#### 3.1 Durchlassfilter als Frequenzfilter

Zur Überprüfung der Funktionsweise eines Frequenzfilters wurde zunächst die Schaltung aus Abb. 1 wie in Abb. 5a realisiert. Es wurde die Spule „Leybold 56214“ mit 500 Windungen und einer Induktivität von 9 mH verwendet, wobei das Augenmerk auf einer möglichst geringen Windungszahl liegt, um den in der Spule angesiedelten Widerstand möglichst gering zu halten. Dieser liegt für die Spule bei angegebenen 2,5  $\Omega$ , was durch Messung bestätigt wurde. Auf der anderen Seite musste auch eine hinreichend große Induktivität garantiert werden, damit die Resonanzfrequenz, in deren Umgebung die Messungen stattfanden, in einem gut erfassbaren Bereich lagen. Weiter wurde ein Plastikfolienkondensator der Firma „WIMA“ der Kapazität 0,22  $\mu F$  sowie in einem zweiten Teilversuch ein Kondensator gleicher Bauart, allerdings mit 4,7  $\mu F$  Kapazität, verwendet. Da beide Teilversuche die angestrebte Resonanzfrequenz gut trafen, wird in der Auswertung nur der erste Teilversuch dargestellt. Ferner wurden mit Hilfe eines Widerstandskasten verschiedene Widerstände im Bereich von 1  $\Omega$  bis 20  $\Omega$  eingesetzt.

Zur Erzeugung der Eingangsspannung wurde zunächst ein Frequenzgenerator der Marke Hameg (Programmable 15 MHz Function Generator, HM8131/2) verwendet, zur Vereinfachung und Automatisierung der Messung wurde dieser allerdings durch das Power-Cassy ersetzt <sup>2</sup>. Die Messung der über dem Widerstand abfallenden Ausgangsspannung wurde bei einem ersten Aufbau mit einem Oszilloskop (Tektronix TDS 2024 100MHz, PPL28/2/001) durchgeführt. Hierbei stellte sich allerdings heraus, dass die Messungen nicht die gewünschte Genauigkeit liefern konnten. (Siehe Abb. 4) Um eine glattere Kurve zu erreichen wurde bei der optimierten Durchführung des Experiments stattdessen das Sensor-Cassy genutzt; Vorteil hierbei ist zudem klar die direkte Übertragung der Daten in die Cassy-Software.

<sup>2</sup>vgl. (Hund, 2013, 42f.)

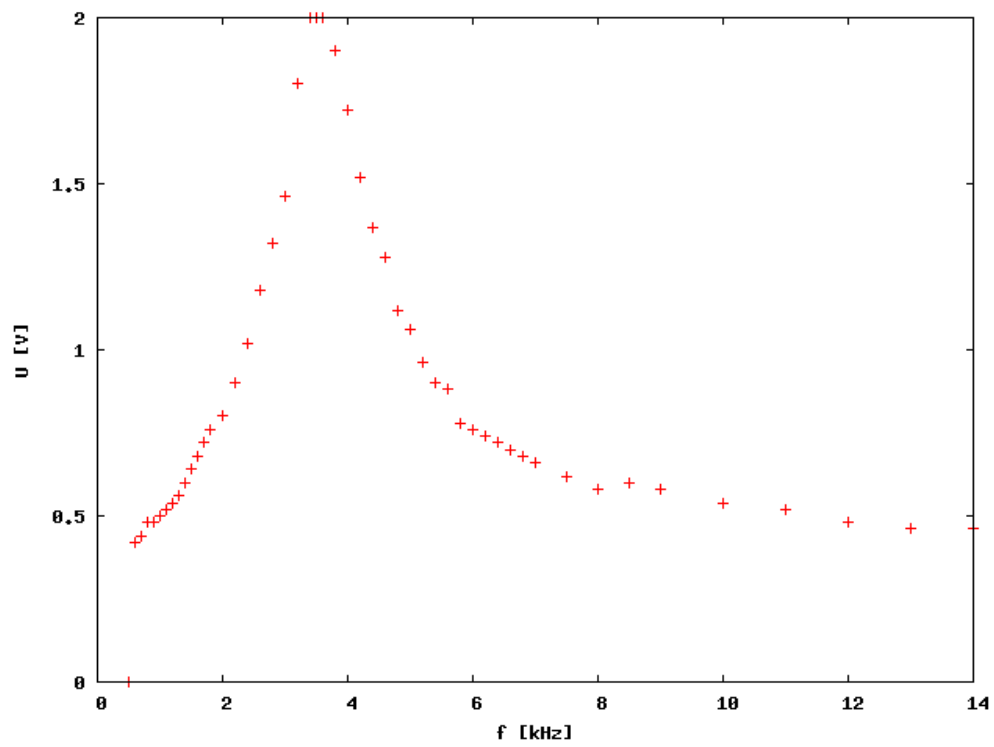
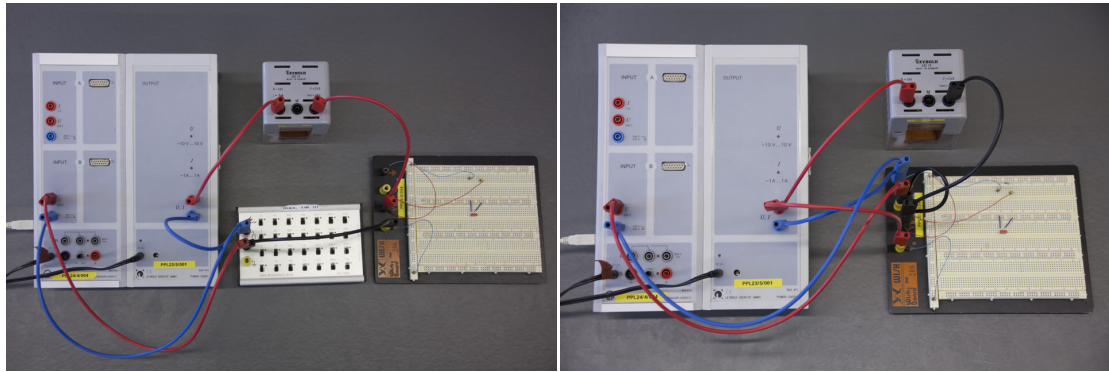


Abbildung 4: Sprünge in handnotierten Werten der Messung mit Oszilloskop klar erkennbar (Durchlassfilter)



(a) Durchlassfilter

(b) Sperrfilter

Abbildung 5: Fotos der Versuchsaufbauten

### 3.2 Sperrfilter als Frequenzfilter

Für die Abwandlung des Durchlassfilters zu einem Sperrfilter müssen lediglich Kapazität und Induktivität parallel anstatt in Reihe geschaltet werden, wie in Abb. 2 dargestellt. Für diesen Versuch wurde der zweite Kondensator mit einer Kapazität von  $4,7 \mu F$  sowie daneben eine Spule höherer Induktivität (36 mH bei 1000 Windungen; ebenfalls von "Leybold") verwendet. Grund hierfür war eine erwartete Senkung der Resonanzfrequenz und eine damit verbundene bessere Messung, da die Abtastrate des Sensor Cassy besser für niedrige Frequenzen geeignet ist. Tatsächlich wurde aber kein qualitativer Unterschied zum Durchlassfilter und ersterer Spule bei der Genauigkeit der Messung erzielt. Um für dieses Experiment den teilweise recht schwach ausgebildeten Peak deutlicher sichtbar zu machen, also eine geringere Breite zu erreichen, wurde weiter die Widerstandsbox durch einen einfachen Schichtwiderstand, wie etwa in Abb. 5b zu sehen, ersetzt. Grund dafür ist, dass die Widerstandsbox insbesondere bei den kleinsten Widerständen einen zu großen tatsächlichen Widerstand liefert.

## 4 Ergebnisse und Diskussion

### 4.1 Durchlassfilter

Beim Aufzeichnen der Spannungskurven für verschiedene ohmsche Widerstände fiel auf, dass die Maxima im Vergleich zu denen der Theoriekurven berechnet nach (7) deutlich zu klein waren (siehe Abb. 6). Dabei wurde auch der an weiteren Bauteilen, hierbei vor allem die Spule, abfallende Widerstand berücksichtigt. Dieser wurde zuvor zu  $3,0 \Omega$  ausgemessen. Abbildung 7 zeigt die gleiche Messreihe, wobei hier über dem Gesamtwiderstand des Kreises als Variable gefittet wurde, um zu zeigen, dass der Gesamtwiderstand des Kreises um etwa  $4 \Omega$  größer ausfällt als wir durch Messungen am ausgeschalteten Schaltkreis messen konnten. Grund hierfür ist wohl schlichtweg zusätzlicher Widerstand, der sich als Übergangswiderstand bei den Steckverbindungen ausbildet, oder ein thermischer



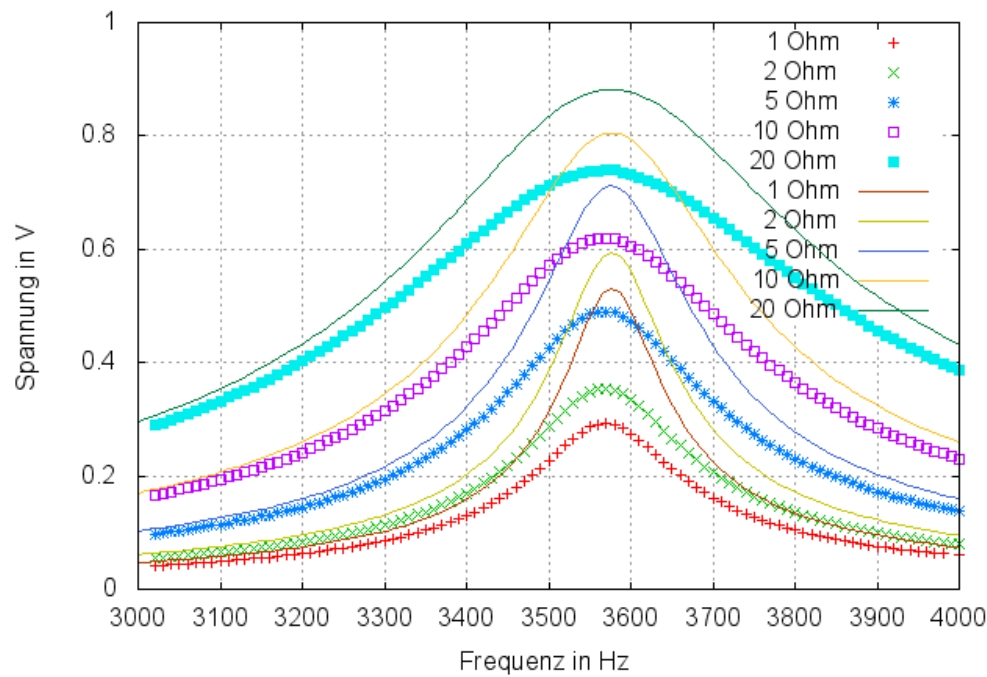


Abbildung 6: Plot der Messdaten des Durchlassfilters unter Berücksichtigung des gemessenen Gesamtwiderstandes

Widerstand in der Widerstandsbox.

Die geringen Abweichungen der Resonanzfrequenz von  $50 \text{ Hz} \pm 1 \text{ Hz}$ , die überdies hinaus zu sehen sind, könnten unter anderem auf ungenaue Kapazitäts- und Induktivitätsangaben zurückgeführt werden, fallen allerdings kaum ins Gewicht.

## 4.2 Sperrfilter

Ähnlich verhält es sich mit den aus dem Betrieb der zweiten Schaltung als Sperrfilter entstandenen Kurven (Abb. 8). Nach Berücksichtigung des ohmschen Widerstandes der Spule ergeben sich immer noch kleine Abweichungen zwischen Theorie nach Formel (14) und den Messwerten, die Resonanzfrequenz konnte nicht getroffen werden, sie weicht 15

$R_{mess}$ in $\Omega$	$R_{zus}$ aus Fit
1	11,48
2	11.20
5	10.70
10	10.57
20	10.88

Tabelle 1: Zusätzliche Widerstände aus Fit (siehe Abb. 7)

$\pm 0.7$  Hz von den Erwartungswerten ab. Hier scheint es ebenfalls am wahrscheinlichsten, dass die Induktivität der zweiten Spule mit 36 mH nicht korrekt ist, oder dass in anderen Bauteilen ungewollte Induktivitäten oder Kapazitäten auftreten.

Der systematische Fehler wurde in beiden Versuchen nicht mit dargestellt, da er im Verhältniss zu den gemessenen Werten sehr gering ausfällt und die Graphen unnötig unübersichtlicher gestalten würde. Der statistische Fehler konnte von Cassy nicht ausgegeben werden. Cassy mittelte die Messwerte automatisch über einen Zeitraum von 2 Sekunden.

### **4.3 Fazit**

Vergleicht man also die Theorie der behandelten Frequenzfilter mit den tatsächlich gemessenen Ergebnissen, so stimmen beide vor allem in qualitativer Hinsicht gut überein. Durch Ersetzen von etwa der Widerstandsbox durch einen Schichtwiderstand, eine Reduktion des Widerstands der Spule sowie durch Löten der Kontakte an Stelle von gewöhnlichen Steckverbindungen müssten darüberhinaus deutliche Verbesserungen möglich sein, was die Höhe des Spannungsverlaufs und dessen Abweichung von der Theorie betrifft. Darüber hinaus müsste es durch die Verwendung genauer ausgemessener Induktivitäten und Kapazitäten auch möglich sein, einem idealen Frequenzfilter näher zu kommen.

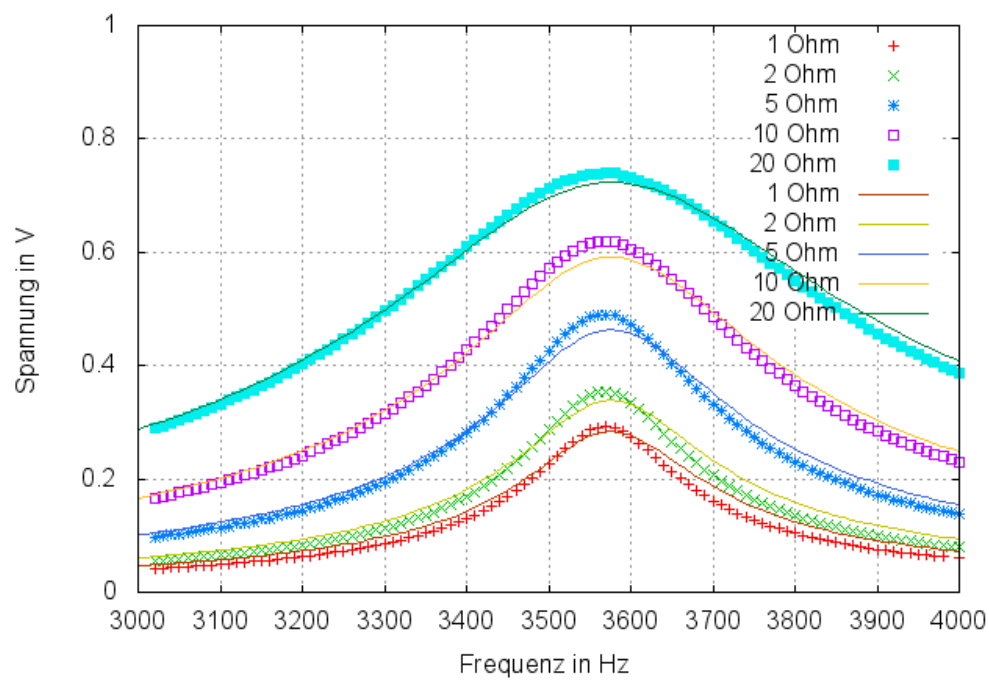


Abbildung 7: Plot der Messdaten des Durchlassfilters (Theoriekurven mit gefittetem Gesamtwiderstand)

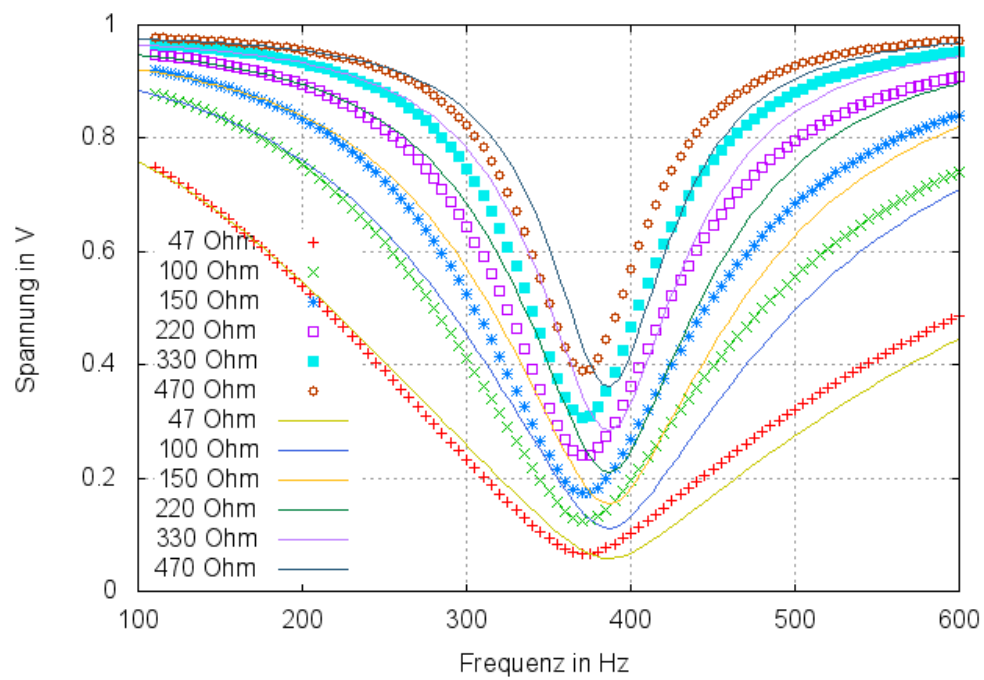


Abbildung 8: Plot der Messdaten des Sperrfilters mit (Theoriekurven mit gemessenem Widerstand)

## Literatur

[Demtröder 2009] DEMTRÖDER, Wolfgang: Experimentalphysik 2: Elektrizität und Optik. 5., überarb. und erw. Aufl. In: *Au. Reihe: Springer-Lehrbuch Bandwerk Experimentalphysik 2* (2009)

[Hund 2013] HUND, Michael: Handbuch CASSY Lab 2. (2013)