

# **Geschwindigkeitsmessung mittels Pitotrohr**

**PPG8**

Udo Beier      Leon Brückner      Valentin Olpp      Marco Zech  
Sebastian Ziegler

Januar 2014

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Vorwort</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Theorie</b>	<b>5</b>
2.1	Strömende Flüssigkeiten und Gase . . . . .	5
2.1.1	Grundbetrachtungen . . . . .	5
2.1.2	Die Kontinuitätsgleichung . . . . .	5
2.1.3	Die Euler-Gleichung . . . . .	9
2.1.4	Die Bernoulli-Gleichung . . . . .	9
2.1.5	Die Navier-Stokes-Gleichung . . . . .	10
2.2	Strömungsmesstechnik . . . . .	11
2.2.1	Grundsätzliche Betrachtungen . . . . .	11
2.2.2	Sonden zur Messung des Gesamtdrucks (Pitotrohre) . . . . .	11
2.2.3	Sonden zur Messung des statischen Drucks . . . . .	12
2.2.4	Sonden zur gleichzeitigen Messung des Gesamtdrucks und des statischen Drucks (Prandtlsonden) . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Versuchsdurchführung</b>	<b>14</b>
3.1	Herstellung des Rohres . . . . .	14
3.2	Messung der Fahrgeschwindigkeiten . . . . .	14
3.3	Aufhängung des Feinmanometers . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Auswertung</b>	<b>18</b>
4.1	Winkelabhängigkeit . . . . .	18
4.2	Kalibration des Rohrs . . . . .	19
4.3	Geschwindigkeitsmessung . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Fazit</b>	<b>24</b>
<b>6</b>	<b>Anhang</b>	<b>26</b>

## Abbildungsverzeichnis

1	(a) Stromlinien und Strömungsgeschwindigkeit $\vec{u}(\vec{r}, t)$ ; (b) Strömungsfeld zu einem bestimmten Zeitpunkt $t$ . . . . .	6
2	Beispiele laminarer Strömungen . . . . .	7
3	Beispiel einer turbulenten Strömung . . . . .	8
4	Rohr mit variablem Querschnitt zur Herleitung der Bernoulli-Gleichung . . . . .	9
5	Strömung durch ein schräges Rohr . . . . .	10
6	Verschiedene Ausführungen der Sondenköpfe . . . . .	12
7	Sonde zur Messung des statischen Drucks . . . . .	13
8	Prandtlsonde . . . . .	13
9	Skizze des Messsondenmodells . . . . .	14
10	3D-Rendering des Messsondenmodells . . . . .	15
11	Bild des Versuchsaufbaus auf dem Autodach . . . . .	15
12	Feinmanometer und Laptop mit GPS-Sensor . . . . .	16
13	Aufhängung des Feinmanometers . . . . .	17
14	Messung der Winkelabhängigkeit des Pitotrohrs für 3 verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten . . . . .	18
15	Messung der Winkelabhängigkeit der nicht umhüllten Prandtlsonde für eine Strömungsgeschwindigkeit von $10,3 \frac{m}{s}$ . . . . .	19
16	Kalibration des Rohrs . . . . .	20
17	Messung der Geschwindigkeit . . . . .	21
18	Abweichung der am Tachometer angezeigten und mit GPS gemessenen Geschwindigkeit . . . . .	22
19	Abweichung der mit dem Pitotrohr und mit GPS gemessenen Geschwindigkeit . . . . .	23

## Tabellenverzeichnis

1	Winkelabhängigkeit des Pitotrohrs . . . . .	26
2	Winkelabhängigkeit der Prandtlsonde . . . . .	26
3	Kalibration Teil 1 . . . . .	27
4	Kalibration Teil 2 . . . . .	27
5	Messwerte GPS . . . . .	28
6	Messwerte Pitotrohr . . . . .	28
7	Berechnete Geschwindigkeiten + Abweichung . . . . .	29

## 1 Vorwort

In der Luftfahrt ist es oftmals wichtig, die Bewegungsgeschwindigkeit relativ zur Luft genau zu bestimmen, da diese wesentlich für etwa die auf das Fluggerät wirkende Geschwindigkeit ist. Eine Geschwindigkeitsmessung via etwa GPS kann dies nicht leisten, da sie diese nicht in der Lage ist, Winde relativ zum Erdboden zu berücksichtigen. Aus diesem Grund muss die Messung lokal am Fluggerät vorgenommen werden. Zur Realisierung der Geschwindigkeitsmessung bietet sich ein Pitotrohr an, bei dem die Relativgeschwindigkeit in der Luft mittels des sich ergebenden Staudrucks bestimmt wird. Eine weitere Anwendung dieser Art der Geschwindigkeitsmessung findet sich im Formel-1-Sport, da auch hier für die Aerodynamik des Fahrzeugs die Relativgeschwindigkeit zur Umgebungsluft und nicht die Geschwindigkeit „über Grund“ von Bedeutung ist. Das Pitotrohr wurde nach dem Wasserbauingenieur Henri Pitot, der sich mit Strömungen in Kanälen auseinandersetzte, benannt. Im Flugzeugbau werden heute sowohl mechanische als auch elektronische Varianten der Messrohre eingesetzt. Im folgenden wird eine Sonde mechanischer Bauform betrachtet.

## 2 Theorie

### 2.1 Strömende Flüssigkeiten und Gase

#### 2.1.1 Grundbetrachtungen

Strömende Flüssigkeiten und Gase unterscheiden sich hauptsächlich in zwei Punkten. Zum einen sind die Dichten von Flüssigkeiten um etwa drei Größenordnungen größer als bei Gasen. Zum anderen sind Flüssigkeiten in guter Näherung inkompressibel, was auf Gase nicht zutrifft.

Um die makroskopische Bewegung von Flüssigkeiten und Gasen beschreiben zu können, ist es nötig alle Kräfte zu kennen, die auf ein Volumenelement  $\Delta V$  wirken. Als Kräfte kommen dabei Kräfte durch Druckdifferenzen  $\vec{F}_p$ , die Schwerkraft  $\vec{F}_g$  und Reibungskräfte  $\vec{F}_R$  zwischen Schichten des strömenden Mediums in Frage. Hier bezeichnet  $p$  den Druck und  $\rho$  die Dichte. Dabei gilt:

$$\vec{F}_p = -\mathbf{grad}(p) \cdot \Delta V \quad (1)$$

$$\vec{F}_g = \rho \cdot \vec{g} \cdot \Delta V \quad (2)$$

Die Reibungskraft  $\vec{F}_R$  wird weiter unten noch behandelt.

Mit  $\vec{F} := \vec{F}_p + \vec{F}_g + \vec{F}_R$  ergibt sich für die Newtonschen Bewegungsgleichungen:

$$\vec{F} = \Delta m \ddot{\vec{r}} = \rho \cdot \Delta V \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} \quad (3)$$

Dabei ist  $\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  die Strömungsgeschwindigkeit des Volumenelements  $\Delta V$ .

Kennt man die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  an allen Orten  $\vec{r}$  und zu jedem Zeitpunkt  $t$ , so kennt man die makroskopische Bewegung der gesamten Flüssigkeit.

Eine Strömung heißt stationär, wenn  $\vec{u}(\vec{r}, t) \equiv \vec{u}(\vec{r})$  nicht von  $t$  abhängt. Flüssigkeiten, bei denen  $\|\vec{F}_R\| \ll \|\vec{F}_p\| + \|\vec{F}_g\|$ , bezeichnet man als ideale Flüssigkeiten, während Flüssigkeiten, bei denen  $\|\vec{F}_R\| \gg \|\vec{F}_p\| + \|\vec{F}_g\|$ , als viskos oder zäh bezeichnet werden.

Die Kurve  $\vec{r}(t)$  eines Flüssigkeitselements  $\Delta V$  nennt man Stromlinie. (Abb. 1) Strömungen heißen laminar, wenn sich die Stromlinien nebeneinander bewegen und sich nicht vermischen. (Abb. 2) Laminare Strömungen liegen immer dann vor, wenn die inneren Reibungskräfte im Vergleich zu den anderen Kräften groß sind. Sind die inneren Reibungskräfte allerdings klein im Vergleich zu Kräften, wie z.B. solche die an Hindernissen auftreten, bilden sich Wirbel. Solche Strömungen bezeichnet man als turbulent. (Abb. 3)

#### 2.1.2 Die Kontinuitätsgleichung

Sei  $V$  ein beliebiges Volumen.  $V$  enthält zur Zeit  $t$  die Masse:

$$M(t) = \iiint_V \rho(t) dV \quad (4)$$

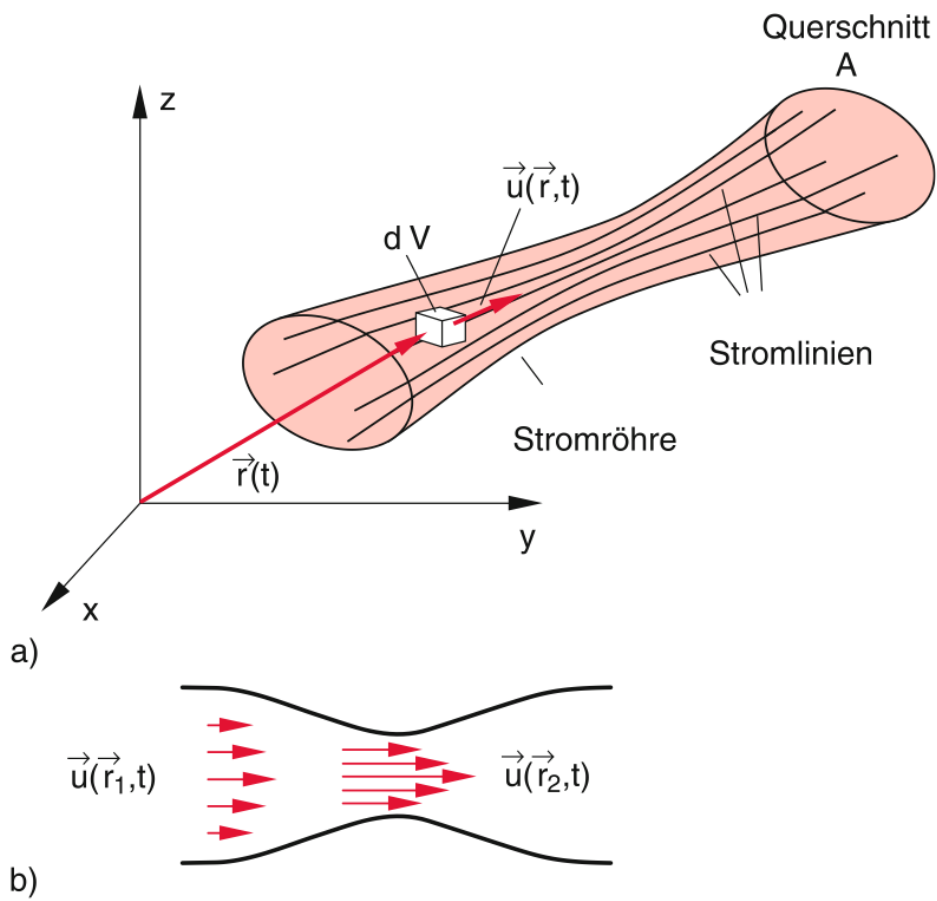


Abbildung 1: (a) Stromlinien und Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  ; (b) Strömungsfeld zu einem bestimmten Zeitpunkt  $t$

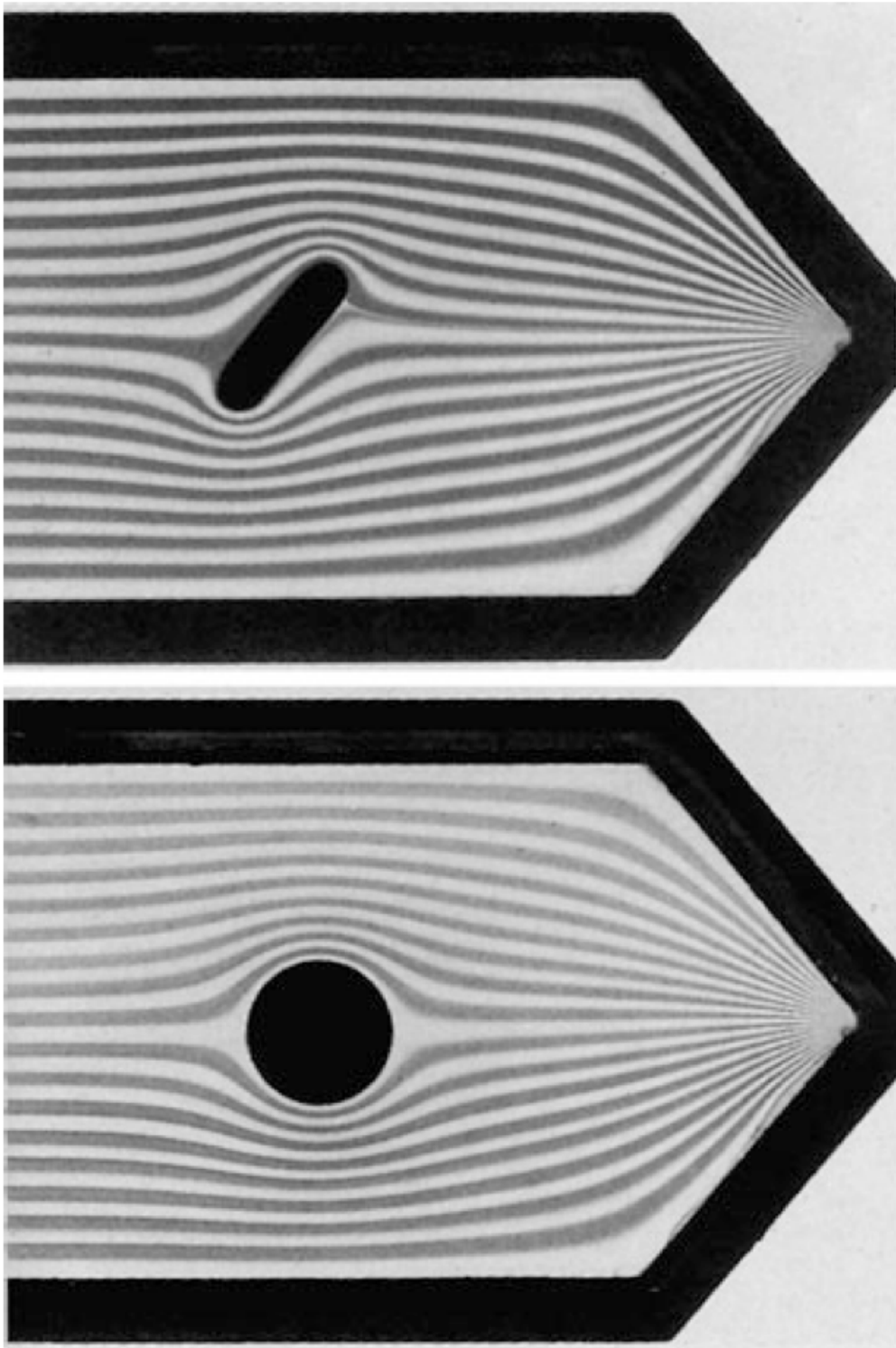


Abbildung 2: Beispiele laminarer Strömungen

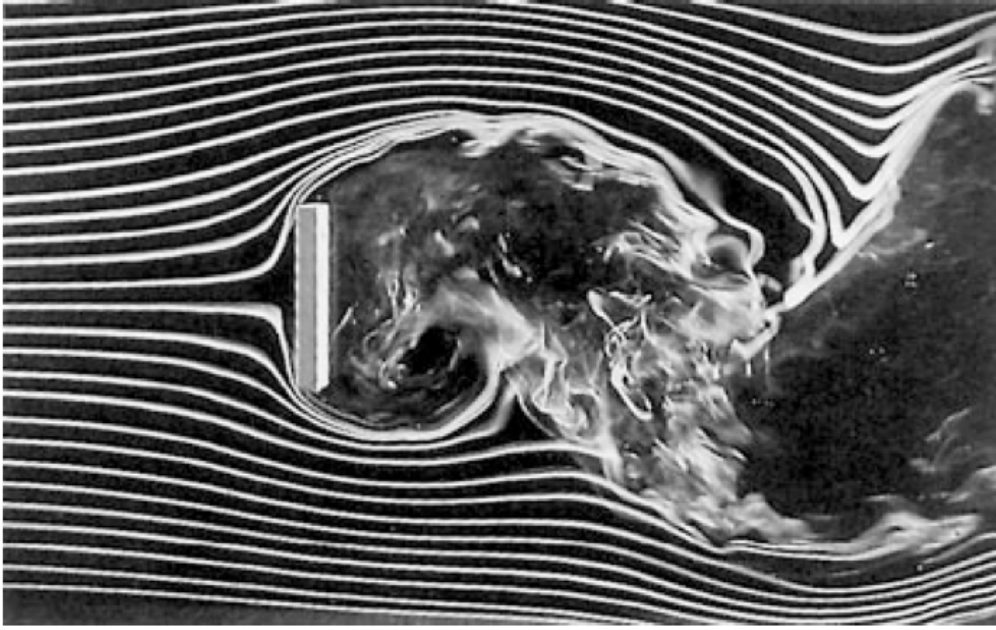


Abbildung 3: Beispiel einer turbulenten Strömung

Aufgrund der Massenerhaltung kann sich die Masse in  $V$  nur dann ändern, wenn Masse durch die Oberfläche  $\partial V$  ein- oder ausströmt. Sei  $\vec{j} = \rho \cdot \vec{u}$  die Massenstromdichte. Dann gilt wegen der Massenerhaltung:

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = \iint_{\partial V} \vec{j} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_{\partial V} \rho \cdot \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} \quad (5)$$

Dabei ist  $d\vec{\sigma}$  der Flächennormalenvektor. Also folgt mit dem Satz von Gauß:

$$-\frac{\partial M}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left(-\frac{\partial}{\partial t} \rho\right) dV = \iiint_V \mathbf{div}(\rho \cdot \vec{u}) dV = \iint_{\partial V} \rho \cdot \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} \quad (6)$$

Da Gleichung (6) für beliebige  $V$  gilt, folgt:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{div}(\rho \cdot \vec{u}) = 0} \quad (7)$$

Diese Gleichung nennt man die Kontinuitätsgleichung. Sie drückt aus, dass Masse erhalten ist. Im Fall von inkompressiblen Flüssigkeiten gilt:  $\rho = \text{const.}$ . Deshalb vereinfacht sich Gleichung (7) zu:

$$\mathbf{div}(\vec{u}) = 0 \quad (8)$$



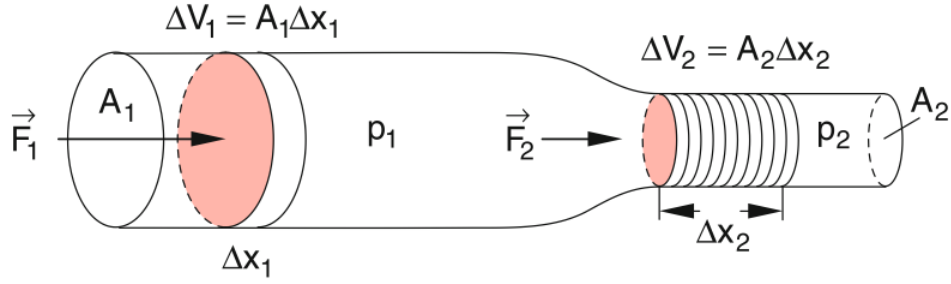


Abbildung 4: Rohr mit variablem Querschnitt zur Herleitung der Bernoulli-Gleichung

### 2.1.3 Die Euler-Gleichung

Für  $\frac{d\vec{u}}{dt}$  gilt:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} u_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} u_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} u_z = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \quad (9)$$

Aufgrund der Gleichungen (3) und (9) ergibt sich für die Bewegungsgleichung einer idealen Flüssigkeit:

$$\boxed{\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \mathbf{grad}(p)} \quad (10)$$

Diese Gleichung nennt man die Euler-Gleichung. Sie bildet die Grundlage der Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten.

### 2.1.4 Die Bernoulli-Gleichung

Hier wird ein Fluid (Flüssigkeit oder Gas) betrachtet, das horizontal durch ein Rohr mit veränderlichem Querschnitt fließt. (Abb. 4) Die Bernoulli-Gleichung folgt dann aus der Energieerhaltung. Strömt ein Fluid durch ein Rohr, dessen Querschnitt variabel ist, so muss das Fluid aufgrund der Kontinuitätsgleichung 7 an Stellen mit kleinerem Querschnitt schneller fließen. Ein Volumen  $\Delta V_1 = A_1 \cdot \Delta x_1$  hat dort also eine größere kinetische Energie.

Um das Volumen  $\Delta V_1$  um  $\Delta x_1$  gegen  $p_1$  zu verschieben, ist eine Arbeit  $\Delta W_1$  nötig. Analoges gilt für  $\Delta V_2$ . Es gilt dann:

$$\Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot \Delta V_1 \quad (11)$$

$$\Delta W_2 = F_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot \Delta V_2 \quad (12)$$

Die kinetische Energie des Volumenelements  $\Delta V$  ist  $E_{kin} = \frac{1}{2} \Delta m u^2 = \frac{1}{2} \rho u^2 \Delta V$ . Für ideale Flüssigkeiten muss nun die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant sein. Deshalb folgt:

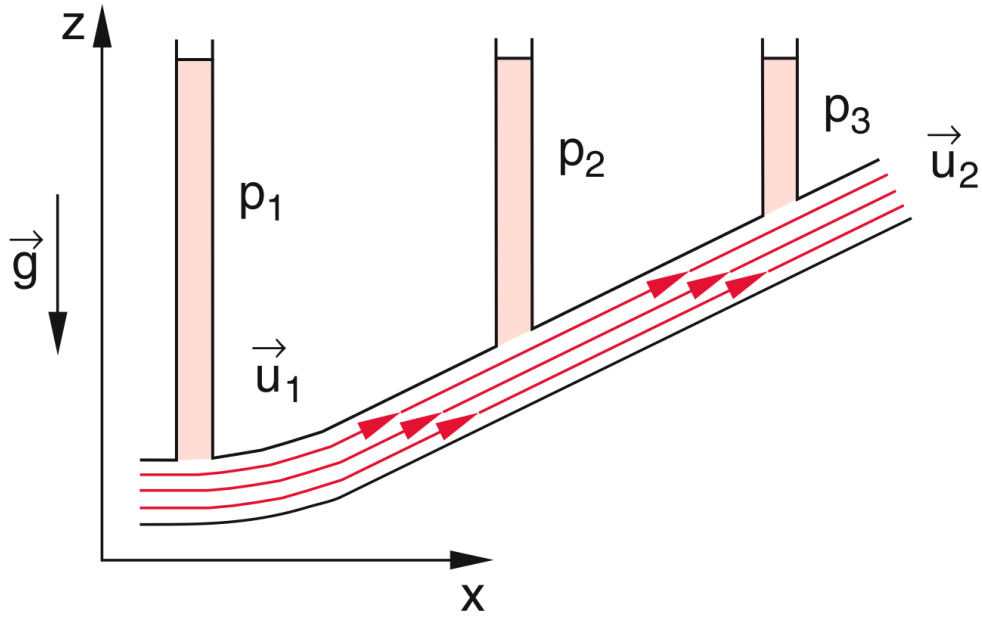


Abbildung 5: Strömung durch ein schräges Rohr

$$p_1 \Delta V_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \Delta V_2 \quad (13)$$

Für inkompressible Flüssigkeiten gilt nun  $\Delta V_1 = \Delta V = \Delta V_2$ . Damit ergibt sich:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho u_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho u_2^2 \quad (14)$$

Da Gleichung (14) für beliebige Querschnitte gilt, folgt die Bernoulli-Gleichung:

$$\boxed{p + \frac{1}{2} \rho u^2 = p_0 = \text{const.}} \quad (15)$$

$p_0$  heißt Gesamtdruck,  $p_S = \frac{1}{2} \rho u^2$  heißt Staudruck und  $p$  ist der statische Druck der strömenden Flüssigkeit. Verläuft die Strömung durch schräge Rohre (Abb. 5), ergibt sich die allgemeinere Gleichung:

$$p + \rho g z(x) + \frac{1}{2} \rho u^2(x) = p_0 = \text{const.} \quad (16)$$

Dabei ist  $z(x)$  die Höhe am Ort  $x$ .

### 2.1.5 Die Navier-Stokes-Gleichung

Die Bewegungsgleichung für reale viskose strömende Fluide kann angegeben werden, wenn auch  $\vec{F}_R$  genauer bestimmt ist. Für viskose Fluide gilt:

$$\vec{F}_R = \eta \Delta \vec{u} \Delta V \quad (17)$$

Dabei ist  $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  der Laplace-Operator. Aus 3 folgt nun mit Hilfe von Gleichung (9) die Navier-Stokes-Gleichung:

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = -\text{grad}(p) + \rho \cdot \vec{g} + \eta \Delta \vec{u} \quad (18)$$

Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichung ist laut dem Clay Mathematics Institute sogar Teil der Millenium-Probleme. Deshalb werden wir uns hier nicht weiter mit der Navier-Stokes-Gleichung befassen.<sup>1</sup>

## 2.2 Strömungsmesstechnik

### 2.2.1 Grundsätzliche Betrachtungen

Betrachtet man ein Fluid, ist ihm zunächst nicht anzusehen, ob es strömt oder nicht. Dies wird erst durch Fremdkörper wie z.B. Rauch, Farbstoff, Strömungsfäden oder anderes ermöglicht. Es wird also in der Praxis unmöglich sein tatsächlich  $\vec{u}(\vec{r}, t)$  für alle  $\vec{r}$  und  $t$  zu messen. Deshalb ist man auf indirekte Methoden wie z.B. die Messung von Druckdifferenzen oder die Messung der Kraft auf einen in der Strömung befindlichen Körper angewiesen. Außerdem sind Messinstrumente oft nur dazu in der Lage den Betrag oder die Richtung von  $\vec{u}$  zu bestimmen. Dabei ist außerdem zu beachten, dass Instrumente zur Messung des Betrags von  $\vec{u}$  oft eine Richtungsempfindlichkeit besitzen, sodass vor der Messung des Betrags die Kenntnis der Richtung von  $\vec{u}$  erforderlich ist. Die Grundlage zur Bestimmung von Strömungsgeschwindigkeiten durch Druckmessung bildet die Bernoulli-Gleichung 15. Stellt man diese nach  $u$  um, ergibt sich eine Formel zur Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit des Fluids:

$$u = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_0 - p)} = \sqrt{\frac{2}{\rho}p_d} \quad (19)$$

Dabei ist  $p_d := p_0 - p$  der dynamische Druck. In der Praxis wird deshalb oft eine Messung des Gesamtdrucks und des statischen Drucks durchgeführt, um aus der Differenz auf die Geschwindigkeit des strömenden Fluids schließen zu können.

### 2.2.2 Sonden zur Messung des Gesamtdrucks (Pitotrohre)

Im vorderen Teil eines Körpers stellt sich der Gesamtdruck ein, der dort durch Anbringen einer Bohrung gemessen werden kann. Mit einem parallel zur Strömung ausgerichteten Rohr hat schon Henri Pitot (1732) als erster Strömungsgeschwindigkeiten gemessen. Deshalb bezeichnet man Gesamtdruckrohre als Pitotrohre. Um die Richtungsempfindlichkeit von Pitotrohren zu verbessern wurden verschiedene Kopfformen entwickelt, unter anderem auch ein umhülltes Pitotrohr (siehe rechts unten Abb. 6). Der maximale Winkelbereich, um unter 1% Fehler zu bleiben, hängt stark von der jeweiligen Bauweise ab. Er kann bei einer scharfen Vorderkante  $\pm 10^\circ$  betragen und reicht beim umhüllten

---

<sup>1</sup>nach [Dem, 212ff.]

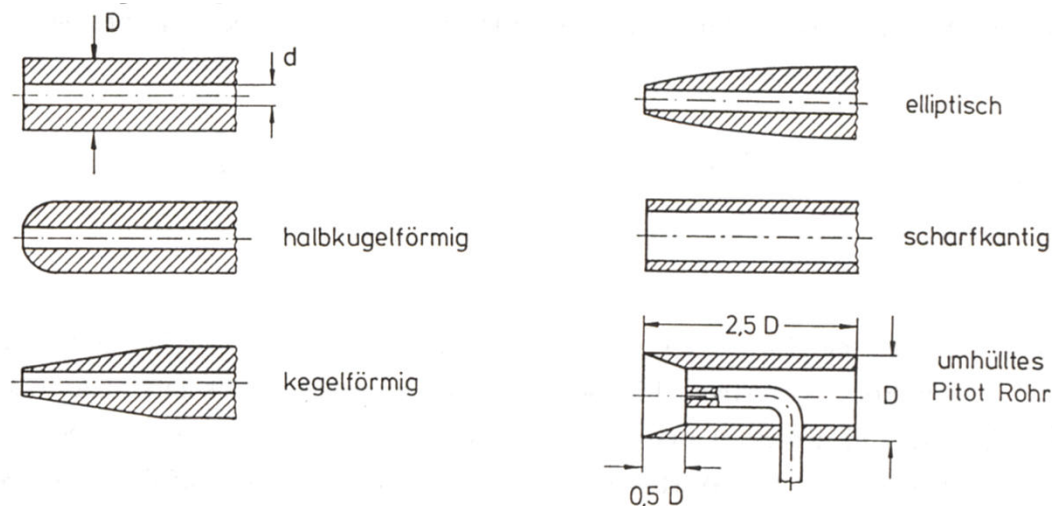


Abbildung 6: Verschiedene Ausführungen der Sondenköpfe

Pitotrohr bis zu  $\pm 60^\circ$ . Diese Werte sind jedoch nur Richtwerte. Weiterhin hängt die Richtungsempfindlichkeit auch noch von der Mach-Zahl (Verhältnis von Strömungsgeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit) ab, mit höherer Geschwindigkeit wird auch die Richtungsempfindlichkeit größer.

### 2.2.3 Sonden zur Messung des statischen Drucks

Zur Messung des statischen Drucks (siehe Abb. 7) wird ein vorne geschlossenes Rohr mit seitlichen Bohrungen verwendet. Die Bohrungen dürfen dabei keinen Grat oder ähnliches aufweisen, da sonst die Messergebnisse verfälscht werden. Außerdem muss die Bohrung exakt senkrecht zur Wand und damit auch zur Strömung sein.

### 2.2.4 Sonden zur gleichzeitigen Messung des Gesamtdrucks und des statischen Drucks (Prandtlsonden)

Eine Prandtlsonde (siehe Abb. 8) ist Pitotrohr und statische Drucksonde in einem und kann daher direkt zur Messung des dynamischen Drucks verwendet werden. Bei der Prandtlsonde ist die Messung des statischen Drucks problematisch, da es wichtig ist, dass sich die Bohrungen hierfür nicht zu weit vorne, aber auch nicht zu weit hinten befindet. Beides führt zu Fehlern bei der Messung des statischen Drucks. Werden diese Bohrungen jedoch korrekt platziert, gleichen sich die Messfehler gerade gegenseitig aus. Hier soll jedoch nicht weiter auf diesen Aspekt eingegangen werden, da bei unseren Messungen ein Pitotrohr verwendet wurde.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>nach [Eck]

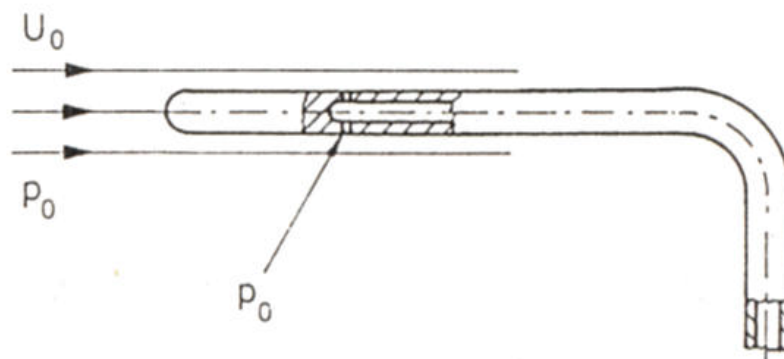


Abbildung 7: Sonde zur Messung des statischen Drucks

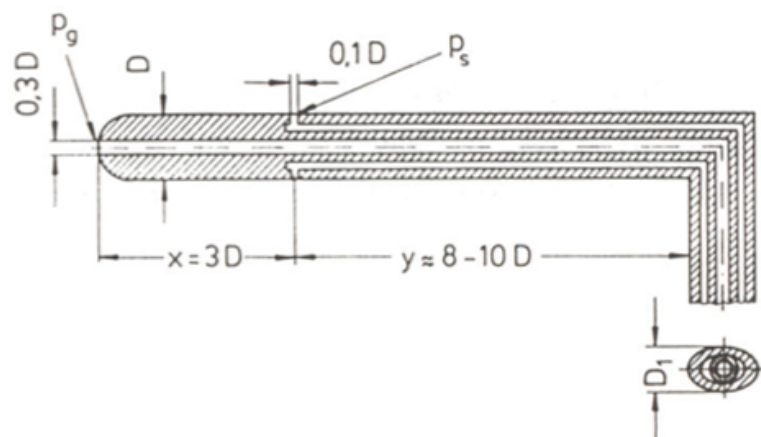


Abbildung 8: Prandtlsonde

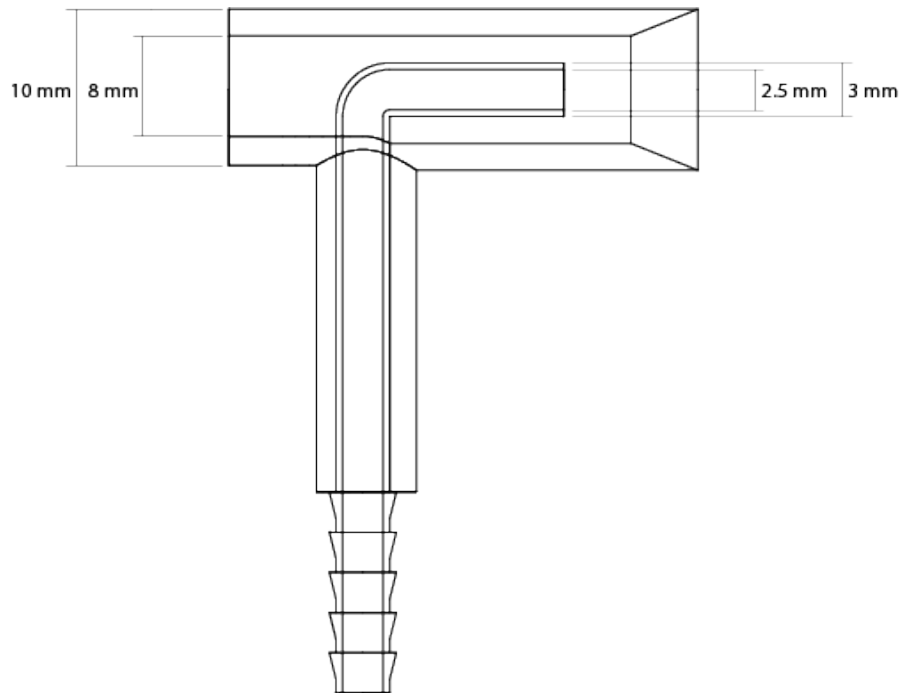


Abbildung 9: Skizze des Messsondenmodells

### 3 Versuchsdurchführung

#### 3.1 Herstellung des Rohres

Für diesen Versuch wurde in einem CAD-Programm das Modell eines Pitotrohres (s. Abb. 9 für eine Skizze und Abb. 10 für ein 3D-Rendering) erstellt und dieses in einem 3D-Drucker gedruckt. Nach einigen Versuchen haben wir es so geschafft, ein funktionsfähiges Pitot-Rohr herzustellen.

#### 3.2 Messung der Fahrgeschwindigkeiten

Um die Geschwindigkeiten des fahrenden Autos zu messen, wurde das Pitotrohr am Dach des Autos befestigt (Siehe Abbildung 11), zusammen mit einer schon vorrätigen Prandtlsonde, welche zur Messung des statischen Druckes verwendet wurde. Diese sind mit einem Feinmanometer im Inneren des Autos verbunden worden. Mit einer ersten Kamera wurde der Stand des Manometers sowie parallel die von einem GPS-Sensor ausgegebene Geschwindigkeit aufgenommen (Siehe Abbildung 12), mit einer zweiten die Anzeige des Tachometers. Die beiden Aufnahmen wurden über die Audiospur synchronisiert, um die drei Geschwindigkeiten zu jeweils einem bestimmten Zeitpunkt auswerten zu können.

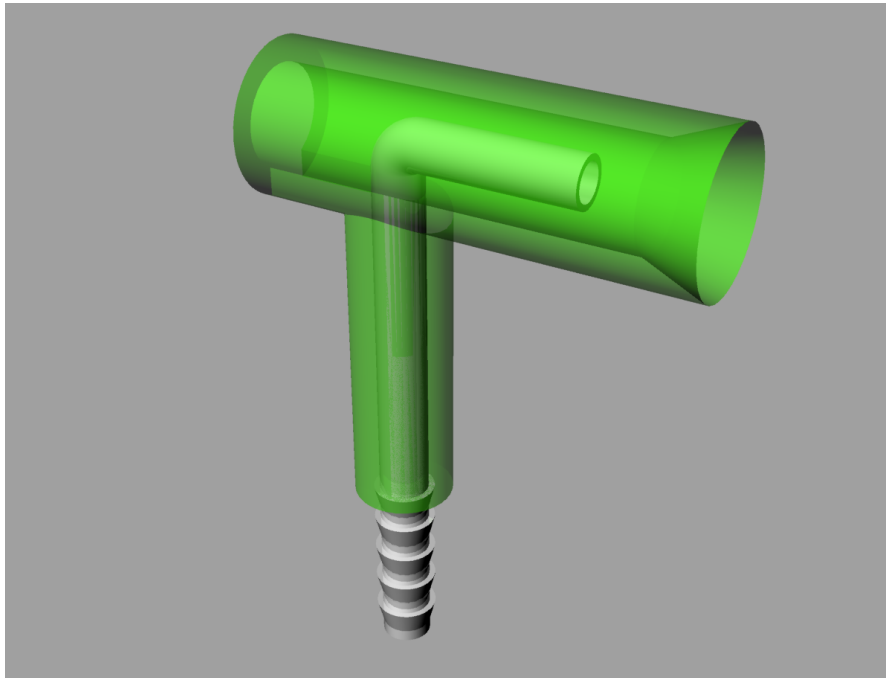


Abbildung 10: 3D-Rendering des Messsondenmodells

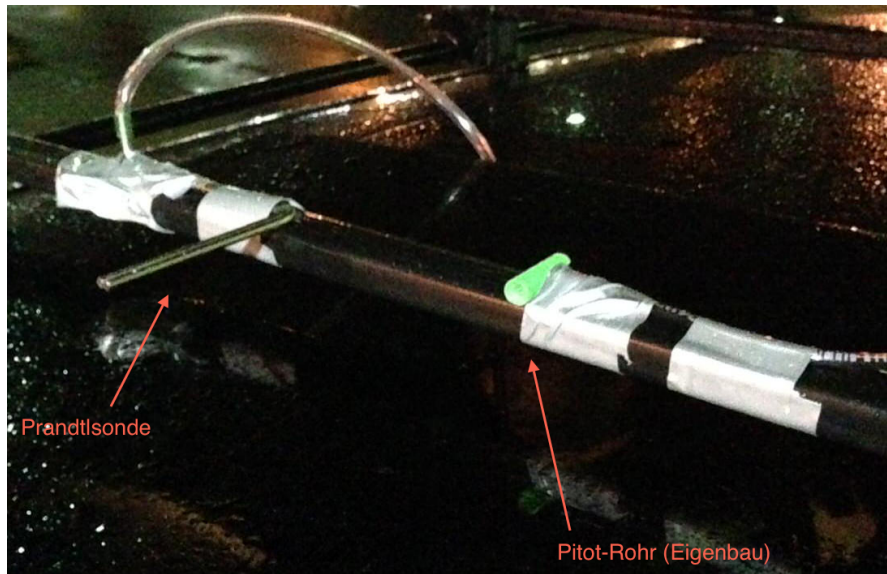


Abbildung 11: Bild des Versuchsaufbaus auf dem Autodach

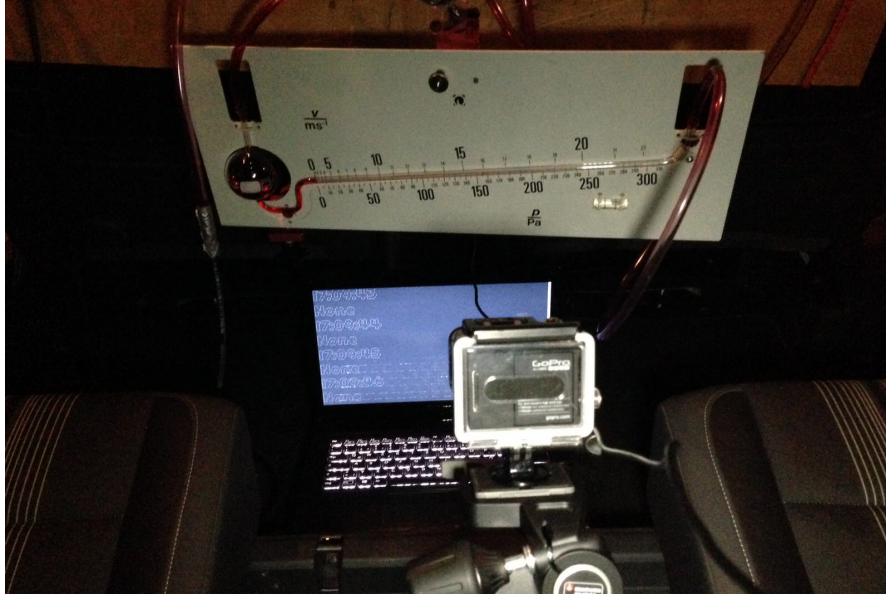


Abbildung 12: Feinmanometer und Laptop mit GPS-Sensor

### 3.3 Aufhängung des Feinmanometers

Um mit dem Feinmanometer messen zu können, muss es genau senkrecht zur Beschleunigung ausgerichtet werden. Dies wurde im Auto mittels einer kardanischen Aufhängung realisiert (Siehe Abbildung 13): in eine frei im Auto, parallel zur Windschutzscheibe hängende Holzplatte wurde das Manometer mittels eines Kugellagers an einer Gewindestange befestigt und diese in ein Loch in der Mitte der Holzplatte eingelassen. Dies garantiert die waagrechte Ausrichtung des Manometers im Auto und gleicht leichtere Erschütterungen aus.





Abbildung 13: Aufhängung des Feinmanometers

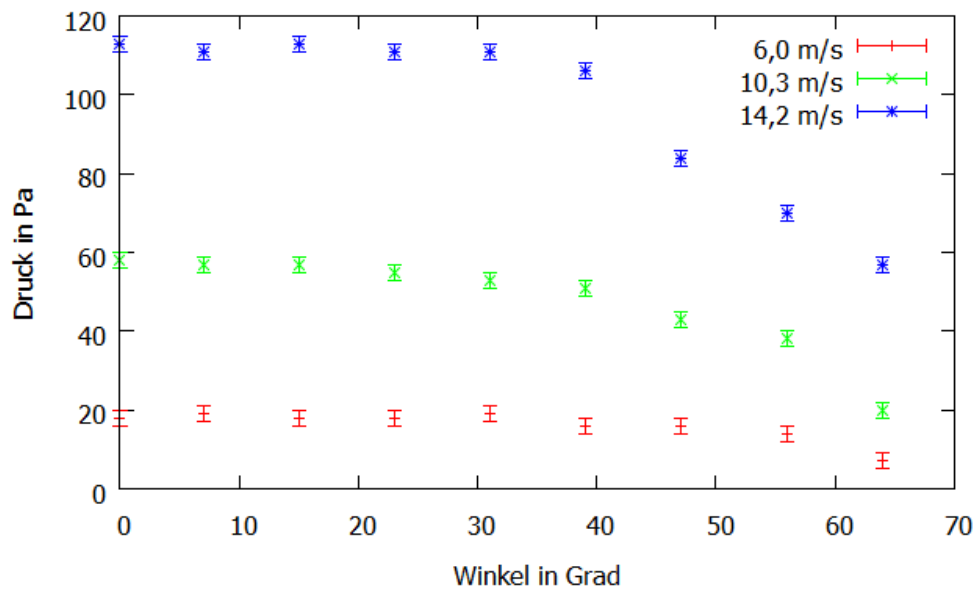


Abbildung 14: Messung der Winkelabhängigkeit des Pitotrohrs für 3 verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten

## 4 Auswertung

### 4.1 Winkelabhängigkeit

In diesem Versuch soll überprüft werden, ob die umhüllte Bauweise des Pitotrohrs tatsächlich die Winkelabhängigkeit des Messergebnisses reduziert. Hierzu wurde das Pitotrohr, ähnlich wie bei der Messung auf dem Auto, zusammen mit der Prandtlsonde aus dem Lager als statischer Druckmesser in den Luftstrom einer Turbine gebracht. Der Winkel des Pitotrohrs gegenüber der Strömungsrichtung wurde verändert und der resultierende Druck wurde vom Feinmanometer abgelesen. Diese Messung wurde für drei verschiedene Strömungsgeschwindigkeiten, die mit einem Windmesser bestimmt wurden, durchgeführt. Als Messfehler wurde ein Ablesefehler von  $\pm 2$  Pa angesetzt.

Man sieht (Abbildung 14, Tabelle 1 Seite 26), dass im Rahmen des Messfehlers im Winkelbereich bis  $30^\circ$  keine Abweichung festzustellen ist. Weiterhin fällt der Druck bei der Geschwindigkeit  $14,2 \frac{m}{s}$  stärker ab als bei den kleineren Geschwindigkeiten, was aus der Theorie zu erwarten ist.

Zum Vergleich soll noch die Winkelabhängigkeit der nicht umhüllten Prandtlsonde aus dem Lager überprüft werden. Dazu wurde der gleiche Versuchsaufbau wie vorher mit der Strömungsgeschwindigkeit  $10,3 \frac{m}{s}$  verwendet. Es wurde wieder ein Ablesefehler von  $\pm 2$  Pa angesetzt. Hier (Abbildung 15, Tabelle 2 Seite 26) ist im Winkelbereich bis  $20^\circ$  keine Abweichung festzustellen, obwohl das Rohr nicht umhüllt ist. Es scheint also, als ob die umhüllte Bauweise des 3D-gedruckten Pitotrohrs nicht den erwarteten Unterschied machen würde. Jedoch ist der in der Theorie erwähnte Vorteil des umhüllten

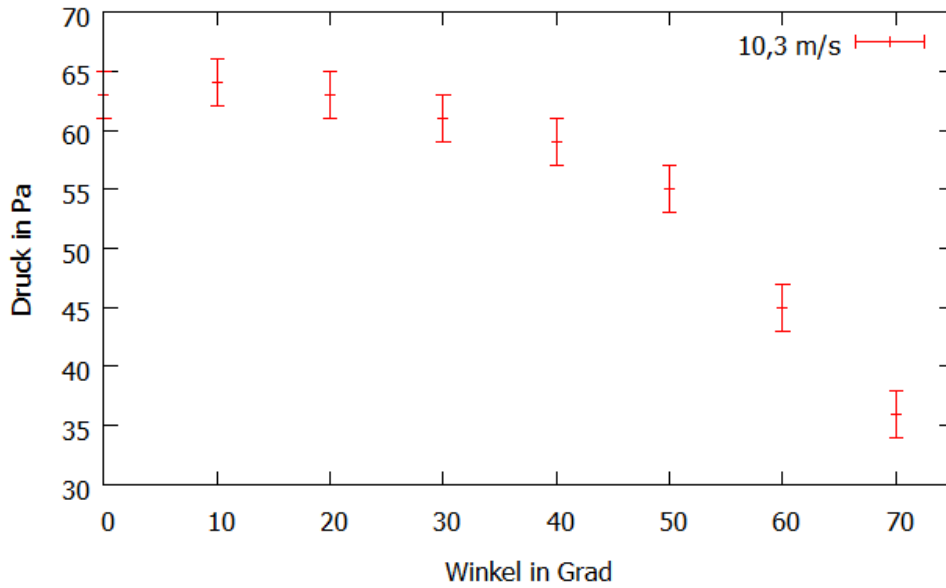


Abbildung 15: Messung der Winkelabhängigkeit der nicht umhüllten Prandtlsonde für eine Strömungsgeschwindigkeit von  $10,3 \frac{m}{s}$

Pitotrohrs, dass der Fehler für einen bestimmten Winkelbereich unter 1% liegt, mit unserer Messgenauigkeit unmöglich nachzuvollziehen. Das gewünschte Resultat für die Messung auf dem Auto, also dass das Messergebnis nicht stark vom Winkel beeinflusst wird, wurde aber erreicht. Natürlich führt dies auch dazu, dass Seitenwind einen größeren Einfluss auf das Messergebnis hat.

## 4.2 Kalibration des Rohrs

Als Nächstes soll überprüft werden, ob das 3D-gedruckte Rohr korrekte Messergebnisse liefert und eine eventuelle Abweichung bestimmt werden. Hierfür wurde das Pitotrohr wieder zusammen mit der Prandtlsonde als statischer Druckmesser in den Luftstrom einer Turbine gebracht. An der Turbine wurden verschiedene Geschwindigkeiten eingestellt, die mit einem Windmesser gemessen wurden, der resultierende Druck wurde am Feinmanometer abgelesen. Es wurde wieder ein Ablesefehler von  $\pm 2 Pa$  angesetzt. Die gemessenen Drücke wurden mit der Bernoulli-Gleichung über Gleichung(19) in Geschwindigkeiten umgerechnet. Der Fehler für die Geschwindigkeiten wurde über Fehlerfortpflanzung mittels der Formel

$$\Delta u = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial p_D} \Delta p_D\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta p_d}{\sqrt{2\rho p_D}}\right)^2} \quad (20)$$

bestimmt. Die Ergebnisse sind in Abbildung 16 dargestellt. Die Werte auf der x-Achse sind hier die mit dem Windmesser gemessenen Geschwindigkeiten umgerechnet in Drücke. Aus der Grafik und den Messwerten (Tabellen 3 und 4, Seite 27) sieht man, dass sich

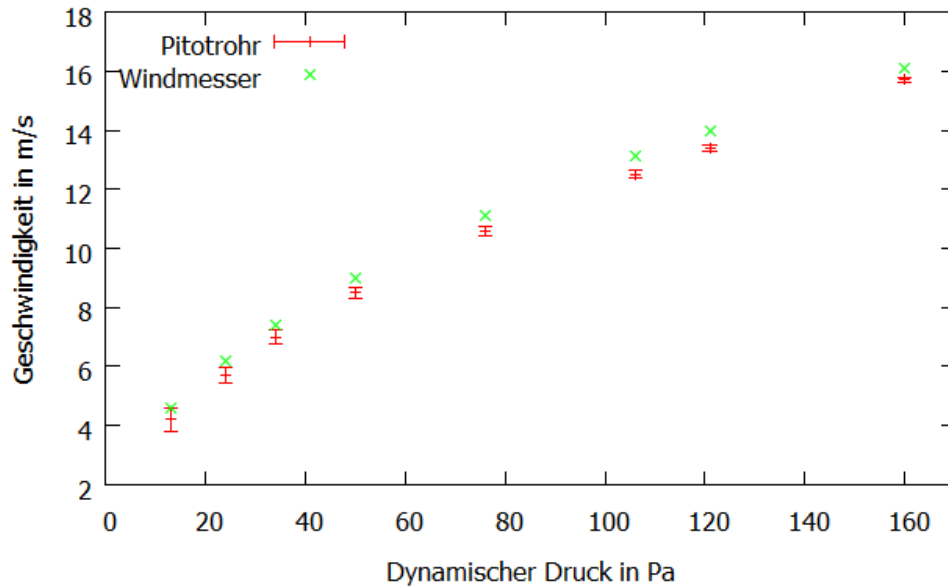


Abbildung 16: Kalibration des Rohrs

die Abweichung (innerhalb des Messbereichs) nicht mit der Geschwindigkeit ändert. Deswegen kann nun eine mittlere Abweichung bestimmt werden. Eigentlich müsste hier der Fehler aus der Fehlerfortpflanzung mit eingerechnet werden, dies wäre aber sehr kompliziert und wird deshalb vernachlässigt. Die mittlere Abweichung ergibt sich dann (mit statistischem Fehler) zu:

$$\Delta u = (0.49 \pm 0.03) \frac{m}{s} \quad (21)$$

Der Grund für diese Abweichung kann nicht klar bestimmt werden, es ist aber anzunehmen, dass Fehler und Ungenauigkeiten beim 3D-Druckprozess (z.B. raue Oberflächen, kleine Verformungen des Materials, etc.) zumindest teilweise dafür verantwortlich sind.

### 4.3 Geschwindigkeitsmessung

Für die Auswertung der Geschwindigkeitsmessung wurden die Videoaufnahmen des Tachometers mit denen des Manometers synchronisiert. Dazu wurde die Audiospur der beiden Kameras durch die Software Pluraleyes analysiert, welche eine XML Datei zum Import in gängige Videoschnittprogramme erstellt. Es stellte sich jedoch heraus, dass die Audiospuren keine gute Qualität aufwiesen. Dies führte zu einer fehlerbehafteten Synchronisation, sodass teilweise Abweichungen von mehreren Sekunden zwischen beiden Videos vorkamen. Aus dem synchronisierten Video wurden dann die Passagen, während denen mit konstanter Geschwindigkeit gefahren wurde, herausgesucht. Aus diesen Passagen wurden dann jeweils ein Startpunkt, an dem die Flüssigkeit im Manometer nicht mehr steigt bzw. fällt, und ein Endpunkt, an dem die Flüssigkeit wieder steigt bzw. fällt, d.h.

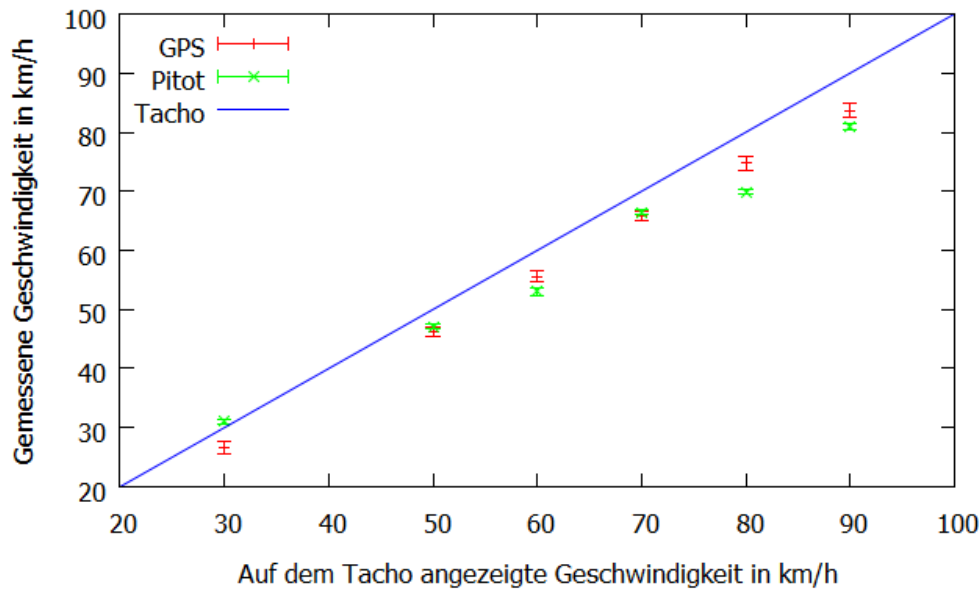


Abbildung 17: Messung der Geschwindigkeit

wenn das Auto wieder beschleunigte bzw. abbremste, gewählt. Das Zeitintervall zwischen Start- und Endpunkt wurde dann in 10 gleiche Teile unterteilt und jeweils am Beginn eines neuen Teils wurde der Wert für den gemessenen Druck auf dem Manometer und der Wert für die mit GPS gemessene Geschwindigkeit aufgeschrieben. (D.h. wenn z.B. ein 40 Sekunden langes Zeitintervall gewählt wurde, wurde alle 4 Sekunden ein Messwert aufgeschrieben.)

Für das GPS wurde ein Fehler von  $\pm 0.3$  Knoten gewählt, da dies der Wert war, der auch bei stehendem Fahrzeug angezeigt wurde. Für den Druck kann wieder ein Ablesefehler von  $\pm 2$  Pa angenommen werden. Die gemessenen Drücke wurden dann über Gleichung (19) in Geschwindigkeiten umgerechnet, aus denen dann ein Mittelwert und statistischer Fehler bestimmt wurde. Zu dem so bestimmten Mittelwert wurde dann noch die Abweichung (Gleichung (21)) hinzuaddiert. Korrekterweise müsste hier wieder bei der Umrechnung der Drücke in Geschwindigkeiten eine Fehlerfortpflanzung nach Gleichung (20) durchgeführt werden, die Behandlung dieser Fehler ist aber wieder sehr kompliziert und muss deswegen vernachlässigt werden. Für die mit GPS gemessenen Geschwindigkeiten wurden ebenfalls Mittelwerte und statistische Fehler bestimmt. (Tabellen 5-7 Seite 28-29) Der statistische Fehler wurde über die Formel

$$\Delta x_{stat} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (22)$$

bestimmt, wobei  $\sigma$  die Standardabweichung und  $n$  die Anzahl der Messwerte ist. Der gesamte Fehler ist der statistische Fehler + Ablesefehler.

Die Ergebnisse der Messung sind in Abbildung (17) dargestellt. Folgende Beobachtungen können gemacht werden:

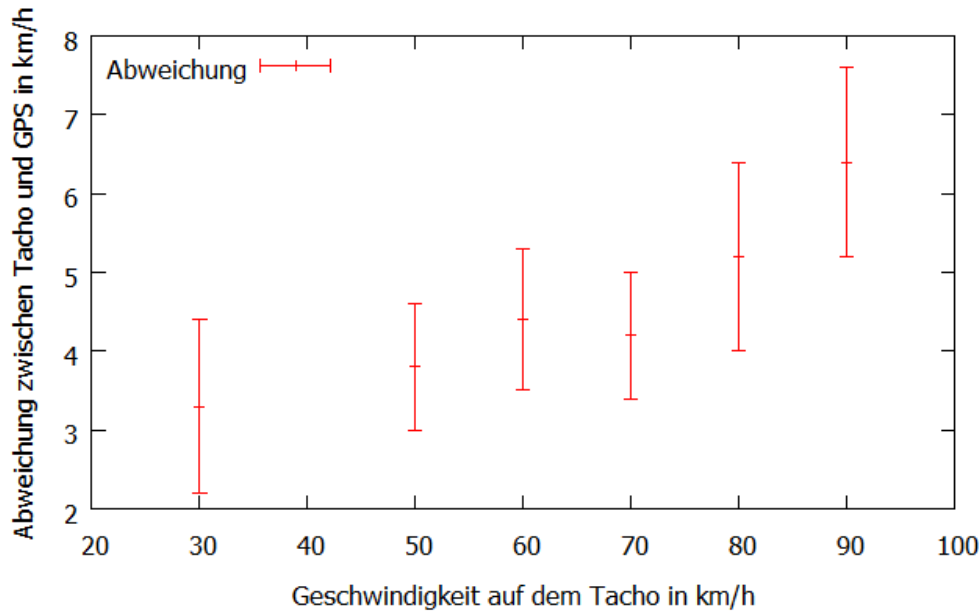


Abbildung 18: Abweichung der am Tachometer angezeigten und mit GPS gemessenen Geschwindigkeit

1. Für 40 km/h ist kein Messwert eingetragen. Dies liegt daran, dass aufgrund der Verkehrslage nur kurzzeitig ( $\sim 20$  Sekunden) 40 km/h gefahren werden konnten. Wegen der fehlerhaften Synchronisation und der Verzögerung des Manometers können aus dem Video hierfür keine Messpunkte entnommen werden.
2. Der Fehler für die mit dem Pitotrohr bestimmten Werte ist zu klein, da die Fehler aus der Fehlerfortpflanzung notwendigerweise vernachlässigt wurden.
3. Die gemessenen Geschwindigkeiten sind größtenteils kleiner als die am Tachometer angezeigten. Dies soll im Folgenden noch näher untersucht werden.

In Abbildung 18 ist die Differenz zwischen der am Tachometer angezeigten und mit GPS gemessenen Geschwindigkeit dargestellt. Es zeigt sich, dass die Abweichung relativ groß (im Bereich von 2-8 km/h) ist und mit der Geschwindigkeit zunimmt. Diese Abweichung liegt im Funktionsprinzip des Tachometers begründet. Tachometer messen die Drehzahl der Räder des Autos und errechnen daraus eine Geschwindigkeit. Zusätzlich zur prinzipiellen Ungenauigkeit der Messmethode verändern Abweichungen im Radumfang (z.B. durch Verschleiß oder Reifenwechsel) das Messergebnis. Diese Abweichungen wirken sich bei höheren Drehzahlen, d.h. höheren Geschwindigkeiten, stärker aus. Weiterhin ist gesetzlich vorgeschrieben, dass ein Tachometer aus Sicherheitsgründen niemals eine geringere Geschwindigkeit als die tatsächlich gefahrene anzeigen darf, weswegen Tachometer schon von Werk aus 'voreilen' und zu hohe Geschwindigkeiten anzeigen. Die gesetzlich maximal

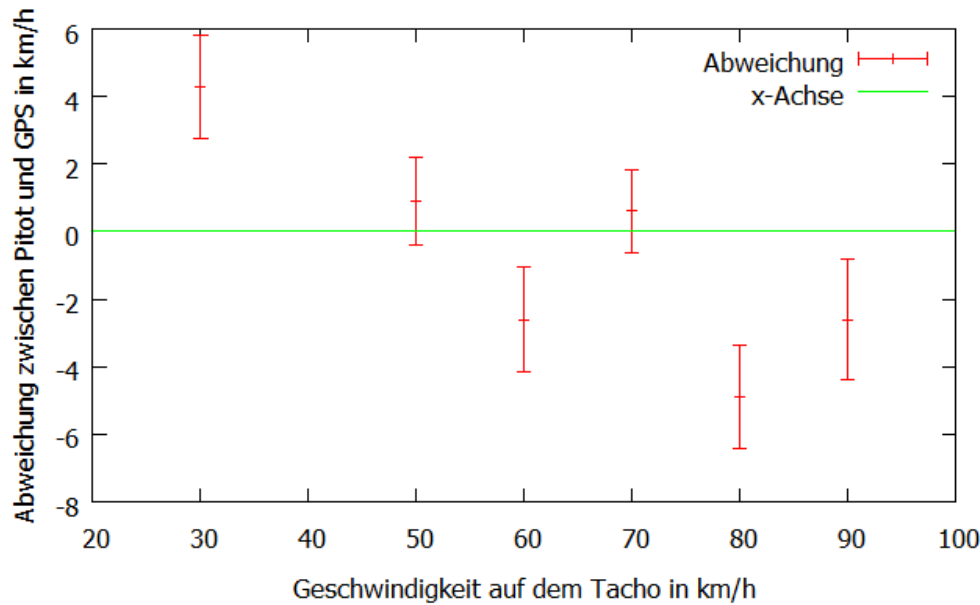


Abbildung 19: Abweichung der mit dem Pitotrohr und mit GPS gemessenen Geschwindigkeit

erlaubte Abweichung beträgt 10% der Geschwindigkeit + 4 km/h.<sup>3</sup>

In Abbildung 19 ist die Differenz zwischen der mit dem Pitotrohr und mit GPS gemessenen Geschwindigkeit dargestellt. Man sieht:

1. Die Abweichungen liegen im Bereich von -6 bis +6 km/h, insbesondere gibt es sowohl positive wie auch negative Abweichungen, wobei der Fehler wie vorhin erklärt zu klein ist.
2. Für 80 und 90 km/h ergeben sich große negative Abweichungen. Möglicherweise ist hier aufgrund der hohen Strömungsgeschwindigkeit die Strömung auf dem Autodach nicht mehr laminar, bzw. es entstehen unvorhersehbare Turbulenzen.
3. Die Abweichungen sind sowohl im Betrag als auch im Vorzeichen unterschiedlich und folgen keiner erkennbaren Verteilung. Eine mögliche Erklärung ist, dass die Strömungsgeschwindigkeit auf dem Autodach natürlich vom Wind beeinflusst wird. Je nach Windrichtung wird dann das Ergebnis größer oder kleiner.

---

<sup>3</sup>nach [Tac]

## 5 Fazit

Insgesamt lässt sich sagen, dass die Messung trotz des simplen Aufbaus und der einfachen Konstruktion des Pitotrohrs gut funktioniert und erstaunlich genaue Ergebnisse geliefert hat. Als Geschwindigkeitsmesser für das Auto oder andere Fahrzeuge eignet sich das Pitotrohr aber doch nur bedingt, insbesondere da die Messergebnisse durch den Wind verfälscht werden können. Der Tachometer hat den klaren Vorteil, auch gegenüber dem eigentlich genaueren GPS, dass seine Anzeige quasi nicht von äußeren Einflüssen abhängt und damit zwar keine genauen, aber immer zuverlässige Werte liefert. Für die Messung von Strömungsgeschwindigkeiten, die z.B. bei Flugzeugen oder auch Rennwagen für die Aerodynamik entscheidend sind, ist es aber ideal geeignet. Es ist zu erwarten, dass mit professionell gebauten Systemen sehr gute Messgenauigkeiten erreicht werden können.



## Literatur

- [Dem] DEMTRÖDER, Wolfgang. Experimentalphysik 1: Mechanik und Wärme. Springer DE, 2005.
- [Eck] ECKELMANN, Helmut. Einführung in die Strömungsmeßtechnik: Teubner, 1997.
- [Tac] Wikipedia. Tachometer. <http://de.wikipedia.org/wiki/Tachometer>. (13. Februar 2014)

## 6 Anhang

Tabelle 1: Winkelabhängigkeit des Pitotrohrs

v=4,3 m/s		v=10,3 m/s		v=14,2 m/s	
Druck in Pa	Winkel in Grad	Druck in Pa	Winkel in Grad	Druck in Pa	Winkel in Grad
18	0	58	0	113	0
19	7	57	7	111	7
18	15	57	15	113	15
18	23	55	23	111	23
19	31	53	31	111	31
16	39	51	39	106	39
16	47	42	47	84	47
14	56	38	56	70	56
7	64	20	64	57	64

Tabelle 2: Winkelabhängigkeit der Prandtlsonde

v=10,3 m/s	
Druck in Pa	Winkel in Grad
63	0
64	10
63	20
61	30
59	40
55	50
45	60
36	70

Tabelle 3: Kalibration Teil 1

Geschwindigkeit Windmesser in m/s	Druck Pitotrohr in Pa
4,6	11
6,2	20
7,4	30
9	45
11,1	70
13,1	97
14	111
16,1	152

Tabelle 4: Kalibration Teil 2

Geschwindigkeit Pitotrohr in m/s	Fehler	Abweichung	
4,2	0,38	0,4	
5,7	0,28	0,5	
7	0,23	0,4	
8,5	0,19	0,5	
10,6	0,15	0,5	
12,5	0,13	0,6	
13,4	0,12	0,6	
15,7	0,10	0,4	
		0,49	Mittelwert
		0,083	Standardabweichung
		0,030	st. Fehler

Tabelle 5: Messwerte GPS

	30 km/h	50 km/h	60 km/h	70 km/h	80 km/h	90 km/h
	GPS in kn	GPS in kn	GPS in kn	GPS in kn	GPS in kn	GPS in kn
	13,15	25,20	29,09	36,28	40,65	45,80
	15,06	25,12	30,22	35,16	40,47	45,97
	15,94	25,35	30,43	35,36	40,48	46,21
	15,08	24,30	30,15	35,59	40,21	45,93
	14,31	25,51	29,49	35,48	41,20	45,81
	13,78	24,83	30,95	35,67	39,66	44,50
	13,08	24,08	29,78	35,25	39,85	43,49
	14,91	24,63	30,57	34,82	41,31	45,84
	14,90	24,73	29,99	35,97	41,93	44,24
	13,89	25,54	29,75	35,63	38,18	43,37
Mittelwert	14,41	24,93	30,04	35,52	40,39	45,12
Standardabweichung	0,93	0,50	0,54	0,41	1,04	1,10
statistischer Fehler	0,29	0,16	0,17	0,13	0,33	0,35
gesamter Fehler	0,59	0,46	0,47	0,43	0,63	0,65
Mittelwert in km/h	26,68	46,17	55,64	65,78	74,81	83,55
gesamter Fehler in km/h	1,10	0,85	0,87	0,80	1,16	1,20

Tabelle 6: Messwerte Pitotrohr

30 km/h	50 km/h	60 km/h	70 km/h	80 km/h	90 km/h
Druck in Pa	Druck in Pa	Druck in Pa	Druck in Pa	Druck in Pa	Druck in Pa
46	88	116	204	211	271
42	91	115	202	215	281
41	96	113	199	227	286
40	94	111	195	224	289
39	93	118	193	217	294
39	94	125	193	211	297
38	99	132	191	215	302
38	100	134	191	213	308
38	100	132	189	215	299
38	102	128	186	213	291

Tabelle 7: Berechnete Geschwindigkeiten + Abweichung

	30 km/h	50 km/h	60 km/h	70 km/h	80 km/h	90 km/h
	u in m/s	u in m/s	u in m/s	u in m/s	u in m/s	u in m/s
	9,2	12,6	14,4	18,9	19,2	21,7
	8,9	12,8	14,3	18,8	19,4	22,1
	8,8	13,1	14,2	18,7	19,9	22,3
	8,7	13,0	14,1	18,5	19,8	22,4
	8,5	12,9	14,5	18,4	19,5	22,6
	8,5	13,0	14,9	18,4	19,2	22,7
	8,4	13,3	15,3	18,3	19,4	22,9
	8,4	13,4	15,4	18,3	19,3	23,1
	8,4	13,4	15,3	18,2	19,4	22,8
	8,4	13,5	15,1	18,1	19,3	22,5
Mittelwert	8,6	13,1	14,8	18,5	19,4	22,5
Standardabweichung	0,27	0,29	0,50	0,26	0,24	0,41
stat.Fehler	0,09	0,09	0,16	0,08	0,07	0,13
stat.Fehler + Abweichung	0,12	0,12	0,19	0,11	0,10	0,16
Mittelwert in km/h	31,0	47,2	53,1	66,5	70,0	81,0
Fehler in km/h	0,42	0,44	0,68	0,41	0,38	0,57