

Messung der temperaturabhängigen Ausdehnung mit Hilfe eines Michelson-Interferometers

PPG8

Udo Beier Leon Brückner Valentin Olpp Marco Zech
Sebastian Ziegler

Dezember 2013

Inhaltsverzeichnis

1	Vorwort	4
2	Theorie	4
2.1	Kohärenzlänge und Kohärenzzeit	4
2.2	Interferenz zweier Lichtstrahlen	5
2.3	Das Michelson-Interferometer	6
2.4	Thermische Längenänderung	7
2.5	Überlegungen zu Wärmeleitung und Konvektion	8
2.6	Leidenfrost-Effekt	9
3	Versuchsaufbau	9
4	Versuchsdurchführung	12
4.1	Messung	12
4.2	Probleme	12
5	Darstellung der Ergebnisse und Auswertung	12
5.1	Darstellung der Ergebnisse	12
5.2	Auswertung	15
5.2.1	Einteilung der Messwerte in Fraktionen	15
5.2.2	Berechnung des Ausdehnungskoeffizienten durch approximatives Fitten	18
5.2.3	Vergleich beider Methoden	20
5.2.4	Vergleich mit Literaturwerten	21
5.3	Fazit	22
6	Anhang	24

Abbildungsverzeichnis

1	Darstellung der Interferenz zwischen zwei verkippten Wellenfronten	7
2	Fotografie des Versuchsaufbaus nach Zeichnung in Abb. 3	10
3	Skizze des Versuchsaufbaus, nicht maßstabsgetreu	11
4	Anzahl der innerhalb von 10s druchgelaufenen Ringe in Abhängigkeit der Zeit	14
5	Temperatur in Abhängigkeit der Zeit	14
6	Einteilung in Fraktionen	17
7	Wärmeausdehnungskoeffizient in Abhängigkeit der Temperatur	19
8	Fit von dN/dt	19
9	Fit von $T(t)$	20
10	Vergleich zwischen Methode 1 und 2	21

Tabellenverzeichnis

1	Anzahl der innerhalb von 10s durchgelaufenen Ringe in Abhängigkeit der Zeit	13
2	Einteilung in Fraktionen	16
3	Mittelwerte und Fehler von dN/dt	16
4	Wärmeausdehnungskoeffizient in Abhängigkeit der Temperatur	18
5	Temperaturverlauf über die Zeit des Experiments	24

1 Vorwort

Ursprünglich wurde das Michelson-Morley-Interferometer von Albert Abraham Michelson (1852 - 1931) und Edward William Morley (1838 - 1923) verwendet, um die Existenz eines Äthers, also eines möglicherweise existierenden Trägermediums von elektromagnetischen Wellen, zu überprüfen. Gäbe es einen solchen Äther, so müsste sich das Labor aufgrund der Erdrotation ebenfalls durch den Äther bewegen und zwar in wechselnder Richtung. Nach dem in der Theorie beschriebenen Aufbau würde dies eine Änderung des zu beobachtenden Interferenzmusters bewirken. Tatsächlich konnte unter korrekter Ausführung dieses Versuches allerdings niemals eine solche Verschiebung festgestellt werden, sodass die Idee des Äthers schließlich fallen gelassen werden musste. Dementsprechend bewegt sich das Licht unabhängig vom Bezugssystem des Beobachters immer mit der Lichtgeschwindigkeit c , was auch als Einsteinsches Relativitätsprinzip bekannt ist. Der Grund dafür ist schlicht, dass dieses Prinzip die wesentliche Abänderung des Verständnisses von Raum und Zeit darstellt, welches schließlich zur Lorentz-Transformation und der speziellen Relativitätstheorie führte. Somit kommt diesem Experiment eine herausragende Rolle in der Entwicklung der modernen Physik zu. Tatsächlich kann dieser Versuchsaufbau auch dazu verwendet werden, Längenänderungen im Bereich von Wellenlängen des sichtbaren Lichts zu messen. Speziell wurde dies von uns dazu genutzt, die thermische Ausdehnung eines Metallstabs zu untersuchen.

2 Theorie

2.1 Kohärenzlänge und Kohärenzzeit

Unter der Kohärenzlänge einer Lichtquelle versteht man die Länge, um die sich die durchlaufenen Wege zweier von der selben Lichtquelle stammenden Strahlen maximal unterscheiden dürfen, sodass noch eine räumlich und zeitlich konstante Interferenz zu beobachten ist. Das Phänomen, das diese Definition notwendig macht, ist, dass prinzipiell keine reale Lichtquellen eine über längere Zeit exakte Sinusschwingung mit konstanter Frequenz liefert, sondern sich mit der Zeit ein „Versatz“ der Phase herausbildet. Es ist deswegen nicht mehr möglich, für eine Länge zwischen einem Maximum und einem weiteren Punkt auf dem Wellenzug, die zwar einem Vielfachen der Wellenlänge entspricht, aber auch die Kohärenzlänge überschreitet, wiederum auf ein Maximum zu schließen. Die Kohärenzzeit bezeichnet die maximale Zeitdifferenz zwischen zwei Punkten auf dem Wellenzug, deren Abstand kleiner als die Kohärenzlänge ist, und ergibt sich deshalb im Vakuum zu

$$t_K = \frac{l_k}{c}, \quad (1)$$

wobei hier t_K die Kohärenzzeit, l_k die Kohärenzlänge und c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet.

Bei Lasern ist die Kohärenzlänge meist verhältnismäßig groß und kann mehrere Kilometer erreichen, wohingegen bei anderen Lichtquellen, die etwa auf thermischer Emission

beruhen, nur sehr kleine Kohärenzlängen erreicht werden. So liegt diese bei Glühlampen im Bereich von Mikrometern.

2.2 Interferenz zweier Lichtstrahlen

Werden zwei Lichtstrahlen, die in gleicher Richtung polarisiert sind, überlagert, so ergibt sich die tatsächliche Lichteinstrahlung durch Addition der beiden elektrischen Felder an diesem Ort. Seien \vec{E}_1 und \vec{E}_2 die elektrischen Felder des einfallenden Lichts mit:

$$\vec{E}_1 = \vec{e}_p \cdot E_1 \cdot e^{i(\omega_1 t - k_1 \cdot r + \phi_1)} \quad (2)$$

und

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_p \cdot E_2 \cdot e^{i(\omega_2 t - k_2 \cdot r + \phi_2)}. \quad (3)$$

Dabei sind E_1, E_2 die Amplituden beider Felder, ω_1, ω_2 die Frequenzen der beiden Schwingungen, r_1, r_2 die zurückgelegten Wege der beiden Lichtstrahlen, k_1, k_2 die Beträge der Wellenvektoren \vec{k}_1, \vec{k}_2 , die in Ausbreitungsrichtung zeigen sollen und \vec{e}_p der Einheitsvektor in Richtung der Polarisation. Weiter sind ϕ_1 und ϕ_2 die Phasen des elektrischen Feldes bei $r_1, r_2, t = 0$.

Als Summe über beide Felder ergibt sich zeitabhängig:

$$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{e}_p \cdot (E_1 \cdot e^{i(\omega_1 t - k_1 \cdot r_1 + \phi_1)} + E_2 \cdot e^{i(\omega_2 t - k_2 \cdot r_2 + \phi_2)}). \quad (4)$$

Mit $\varphi_1 = -k_1 \cdot r_1 + \phi_1$ und $\varphi_2 = -k_2 \cdot r_2 + \phi_2$ ergibt sich:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{e}_p \cdot (E_1 \cdot e^{i(\omega_1 t + \varphi_1)} + E_2 \cdot e^{i(\omega_2 t + \varphi_2)}). \quad (5)$$

Die Lichtintensität I ist nach ¹ proportional zum zeitlichen Mittel von \vec{E}_{reell}^2 über eine Schwingung, deshalb:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{reell}^2 &= (\vec{e}_p \cdot (E_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2)))^2 = (E_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2 \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2))^2 = \\ &= E_1^2 \cdot \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) + 2E_1 E_2 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + E_2^2 \cdot \cos^2(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Die beiden quadratischen Terme können als Feldstärkequadrate der einzelnen Strahlen identifiziert werden, es bleibt der Mischterm:

$$2E_1 E_2 \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_2) = E_1 E_2 \cdot (\cos(t(\omega_1 + \omega_2) + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(t(\omega_1 - \omega_2) + \varphi_1 - \varphi_2)). \quad (7)$$

Für $\omega_1 = \omega_2$ (und damit auch $k_1 = k_2$) kann dies weiter vereinfacht werden zu:

$$E_1 E_2 \cdot (\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)), \quad (8)$$

für $\omega_1 \neq \omega_2$ würde sich im längerfristigen zeitlichen Mittel über dem Mischterm 0 ergeben, da beide Summanden zeitabhängig wären.

¹[Fey, 433f.]

Mittelt man nun über \vec{E}_{reell}^2 , so folgt:

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{E}_{reell}^2 \rangle = \\
& \langle E_1^2 \cdot \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) + E_2^2 \cdot \cos^2(\omega_2 t + \varphi_2) + E_1 E_2 \cdot (\cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)) \rangle = \\
& \quad \frac{E_1^2}{2} + \frac{E_2^2}{2} + E_1 E_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \\
& \quad \frac{E_1^2}{2} + \frac{E_2^2}{2} + E_1 E_2 \cdot \cos(k \cdot (r_2 - r_1) + \phi_1 - \phi_2). \tag{9}
\end{aligned}$$

Bezeichnen I_1, I_2 die Intensitäten der einfallenden Lichtstrahlen, so ergibt sich über $I = \mu \langle \vec{E}_{reell}^2 \rangle$:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos(k \cdot (r_2 - r_1) + \phi_1 - \phi_2). \tag{10}$$

2.3 Das Michelson-Interferometer

Das Michelson-Interferometer gehört zur Klasse der Zweistrahlinterferometer. Seine Funktionsweise beruht darauf, dass ein polarisierter Laserstrahl mit Hilfe eines halbdurchlässigen Spiegels aufgespalten wird (siehe dazu Abb. 3). Beide Strahlen werden gespiegelt und so wieder am halbdurchlässigen Spiegel vereinigt. Aufgrund der unterschiedlich großen zurückgelegten Wegstrecken kommt es dort zu Interferenzeffekten, die vom genauen Aufbau des Interferometers abhängen.

Verändert man die Länge von einem der beiden Wege, so ändert sich auch die Phasenverschiebung zwischen beiden Lichtstrahlen und nach (10) auch die Intensität der interferierenden Strahlen und ergibt eine verschobene Cosinus- oder gleichbedeutend Sinusfunktion abhängig von k mal der Laufwegsdifferenz. Durch Beobachtung der Verschiebung der Interferenzen kann also auf die Geschwindigkeit geschlossen werden, mit der sich die Länge des einen Weges ändert: Hat sich das Interferenzmuster genau um 2π verschoben, so hat sich nach (10) $k \cdot \Delta r$ um 2π vergrößert oder verkleinert. Ein ΔN von 1 entspricht deswegen genau einer Längenänderung um $\frac{\lambda}{2}$, also:

$$\Delta l = \frac{\lambda}{2} \cdot \Delta N. \tag{11}$$

wobei λ die Wellenlänge des verwendeten Lasers ist und N die Anzahl der während der Längenänderung durchlaufenen Intensitätsmaxima ist. Durch zeitliches Ableiten ergibt sich:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{dN}{dt}. \tag{12}$$

Weiterhin kann das vom Laser emittierte Strahlenbündel durch Einbringen von einer oder mehrerer Linsen zu einem divergenten Strahl oder einem breiteren, parallelen Strahlenbündel gewandelt werden. Durch eine solche Aufweitung kommt es zu weiteren Interferenzphänomenen, welche im nächsten Absatz detaillierter beschrieben werden. Oftmals geschieht dies mit Hilfe eines „Teleskops“, bei dem das Strahlenbündel eine Kombination aus konkaver und konvexer Linse durchläuft und danach parallel austritt. Im Falle eines zu Beginn ebenfalls parallelen Strahlenbündels, wie es vom Laser

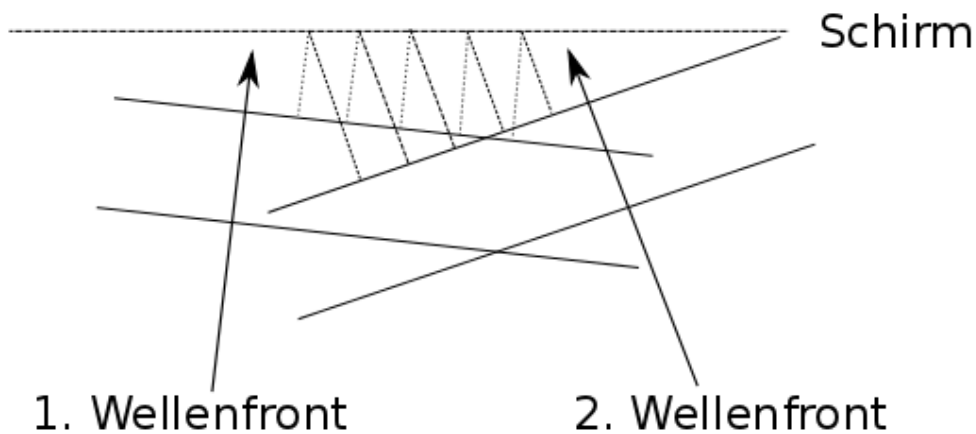


Abbildung 1: Darstellung der Interferenz zwischen zwei verkippten Wellenfronten

in guter Näherung emittiert wird, müssen dazu die beiden Brennpunkte aufeinander fallen.

Die beobachtbaren Interferenzeffekte hängen maßgeblich von der genauen Ausrichtung der optischen Elemente im Strahlengang ab: Sind etwa die reflektierenden Spiegel nicht exakt senkrecht zum einfallenden Strahl ausgerichtet oder der halbdurchlässige Spiegel nicht in einem Winkel von exakt 45° zum einfallenden Strahl justiert, so führt diese Verkipfung der Spiegel zu deutlich sichtbaren Interferenzstreifen, da die Wellenfronten der beiden interferierenden Strahlen dann nicht parallel auf den Schirm treffen. (Abb. 1: Die Differenz zwischen den beiden gestrichelten Strecken entspricht dem Phasenversatz zwischen den beiden Wellen an dem entsprechenden Punkt auf dem Schirm. Der Versatz ändert sich in der Horizontalen.) Treffen sich weiter die beiden Strahlbündel bei Vereinigung auf dem halbdurchlässigen Spiegel nicht mittig am gleichen Punkt, so beobachtet man sehr deutlich Interferenzringe, da sich die Laufzeiten bei Verschieben des betrachteten Punkts unterschiedlich ändern. Beide Effekte verschieben sich bei einer Änderung der Laufzeitdifferenz um eine Wellenlänge genau um ein Maximum und sind so für eine alternative „Zählung“ der Interferenzmaxima geeignet.

2.4 Thermische Längenänderung

Wird ein Material erhitzt, so dehnt es sich in den meisten Fällen aus. Dies kann im Standard-Atom-Modell für einen Feststoff veranschaulicht werden: Wird dem Stoff thermische Energie zugeführt, bedeutet dies effektiv eine Zunahme der kinetischen Energie der Atomrümpfe. Dadurch nimmt die Amplitude von deren Schwingung um die Ruhelage zu und es kommt effektiv zu einer „Streckung“ des Materials in alle Raumrichtungen. Eine exakte Beschreibung ist tatsächlich deutlich komplizierter und erfordert die Verwendung von Quantenmechanik. Im Allgemeinen ergibt sich kein einfacher Verlauf für $l(T)$, allerdings kann die Längenänderung für einen bestimmten Temperaturbereich durch einen linearen Verlauf angenähert werden

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha(T) \cdot (T - T_0), \quad (13)$$

wobei l_0 die eindimensionale Ausdehnung bei der Temperatur T_0 ist. α heißt der Längenausdehnungskoeffizient und ist insbesondere vom Material abhängig.

2.5 Überlegungen zu Wärmeleitung und Konvektion

Für den Wärmestrom \vec{j} innerhalb eines Materials gilt:

$$\vec{j} = -\kappa \cdot \nabla T, \quad (14)$$

wobei hier κ der Wärmeleitungskoeffizient ist sowie T die dreidimensionale Temperaturfunktion innerhalb des Materials.

Weiter ergibt sich über

$$\int dt \int_{\partial V} -\vec{j} d\vec{f} = \int dt \int_V -\nabla \cdot \vec{j} dV = Q = m \cdot c \cdot \Delta T = \int_V \rho dV \cdot c \cdot \Delta T \quad (15)$$

mit c als massebezogene Wärmekapazität, m als Masse, ρ als Dichte. Durch Umschreiben in differenzielle Form folgt:

$$\nabla \cdot \vec{j} = \rho \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (16)$$

und nach Einsetzen in 14:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho \cdot c} \Delta T, \quad (17)$$

wobei hier Δ den Laplace-Operator darstellt.

Ein weiterer Effekt bei der Übertragung von Wärme ist die Konvektion. Diese bezeichnet allgemein den Transport von Wärme durch Strömungen in Flüssigkeiten oder Gasen. Die Konvektion lässt sich im Allgemeinen nur sehr schwer exakt beschreiben, da die Grundlage hierfür von der Navier-Stokes-Gleichung gebildet wird, die bis heute nicht allgemein gelöst wurde. Nach [Bre] gilt allerdings für den Wärmetransport von einem Gegenstand weg innerhalb eines Gases/ einer Flüssigkeit:

$$\frac{dQ}{dt} \sim \Delta T, \quad (18)$$

wobei ΔT die Differenz zwischen der Oberflächentemperatur des Gegenstandes und der Temperatur der Flüssigkeit/ des Gases ist. Nimmt man an, dass der Wärmeleitungskoeffizient innerhalb des Gegenstandes relativ hoch ist, was im Falle von Metall durchaus gerechtfertigt ist, so kann dessen Temperatur als konstant innerhalb des Gegenstandes angenommen werden. Im hier durchgeführten Experiment soll die Erwärmung eines Metallstabes von etwa -130°C auf Raumtemperatur untersucht werden. Somit ergibt sich:

$$\frac{dQ}{dt} \sim \frac{dT_M}{dt} \sim (T_M - T_R). \quad (19)$$

Als Lösung einer derartigen Differentialgleichung ergibt sich eine e-Funktion

$$k \cdot e^{a \cdot t} + b \quad (20)$$

, auf die Bestimmung der Konstanten k und a und b soll hier nicht weiter eingegangen werden.

2.6 Leidenfrost-Effekt

Der Leidenfrost-Effekt beschreibt ursprünglich das Verhalten von Wassertropfen auf heißen Herdplatten. Wird ein Wassertropfen auf eine heiße Platte gegeben, verdampft die untere Oberfläche des Tropfens sehr schnell und bildet eine Schicht aus Wasserdampf, die den restlichen Tropfen vor weiterer Wärmeübertragung isoliert. Dadurch kann der Tropfen für längere Zeit auf der heißen Herdplatte gleiten, ohne zu verdampfen. Ein ähnlicher Effekt entsteht, wenn Metall in flüssigen Stickstoff getaucht wird. Der Stickstoff rund um das Metall verdampft sehr schnell und bildet eine isolierende Schicht, was das Abkühlen des Metalls erschwert.

3 Versuchsaufbau

Das Interferometer wurde auf einem schwingungsgedämpften optischen Tisch aufgebaut, als Lichtquelle wurde ein HeNe-Laser mit Wellenlänge $\lambda = 633nm$ verwendet. Der Lichtstrahl wurde durch einen Teleskopaufbau, bestehend aus einer Zerstreuungslinse mit Brennweite $f = -30.0mm$ und einer Sammellinse mit Brennweite $f = 200.0mm$, die im Abstand von 17 cm zueinander aufgestellt wurden, aufgeweitet. Durch den Teleskopaufbau wird der Strahl zunächst aufgeweitet und dann wieder zu einem Parallelstrahl zusammengeführt. Dies ist notwendig, da eine zu starke Aufweitung bzw. Divergenz des Strahls eine Messung oder Zählung unmöglich machen würde, da der Kontrast des Interferenzbildes dadurch zu gering wäre. Nach dem Teleskopaufbau wurde der Strahl zunächst über zwei Spiegel parallel zur Tischebene ausgerichtet und dann in den halbdurchlässigen Spiegel geleitet. Der transmittierte Anteil des Strahls traf auf einen fest montierten Spiegel, der reflektierte Anteil traf auf einen auf einer Schiene beweglich montierten Spiegel. Hinter dem beweglichen Spiegel wurde der Edelstahlstab (Werkstoffnummer 1.4301), dessen Länge zu $l = 28.9 \pm 0.1cm$ gemessen wurde, eingespannt. In den Stab wurde ein kleines Loch gebohrt, sodass ein Temperaturfühler die Kerntemperatur des Stabes messen konnte. Der Temperaturfühler wurde an ein Sensor-CASSY 2 angeschlossen und die Messwerte über CASSYLab ausgelesen. Das entstehende Interferenzmuster wurde schließlich noch durch eine Zerstreuungslinse mit Brennweite $f = -100.0mm$ aufgeweitet, um es besser sichtbar zu machen und auf eine Wand abgebildet.

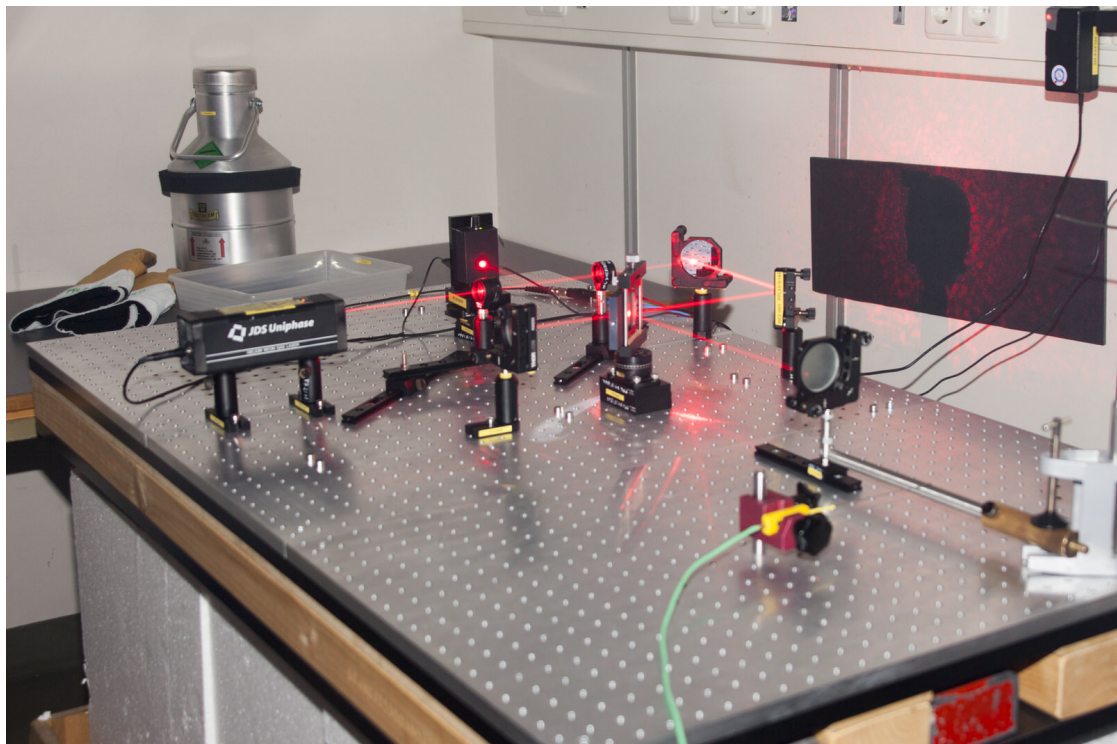


Abbildung 2: Fotografie des Versuchsaufbaus nach Zeichnung in Abb. 3

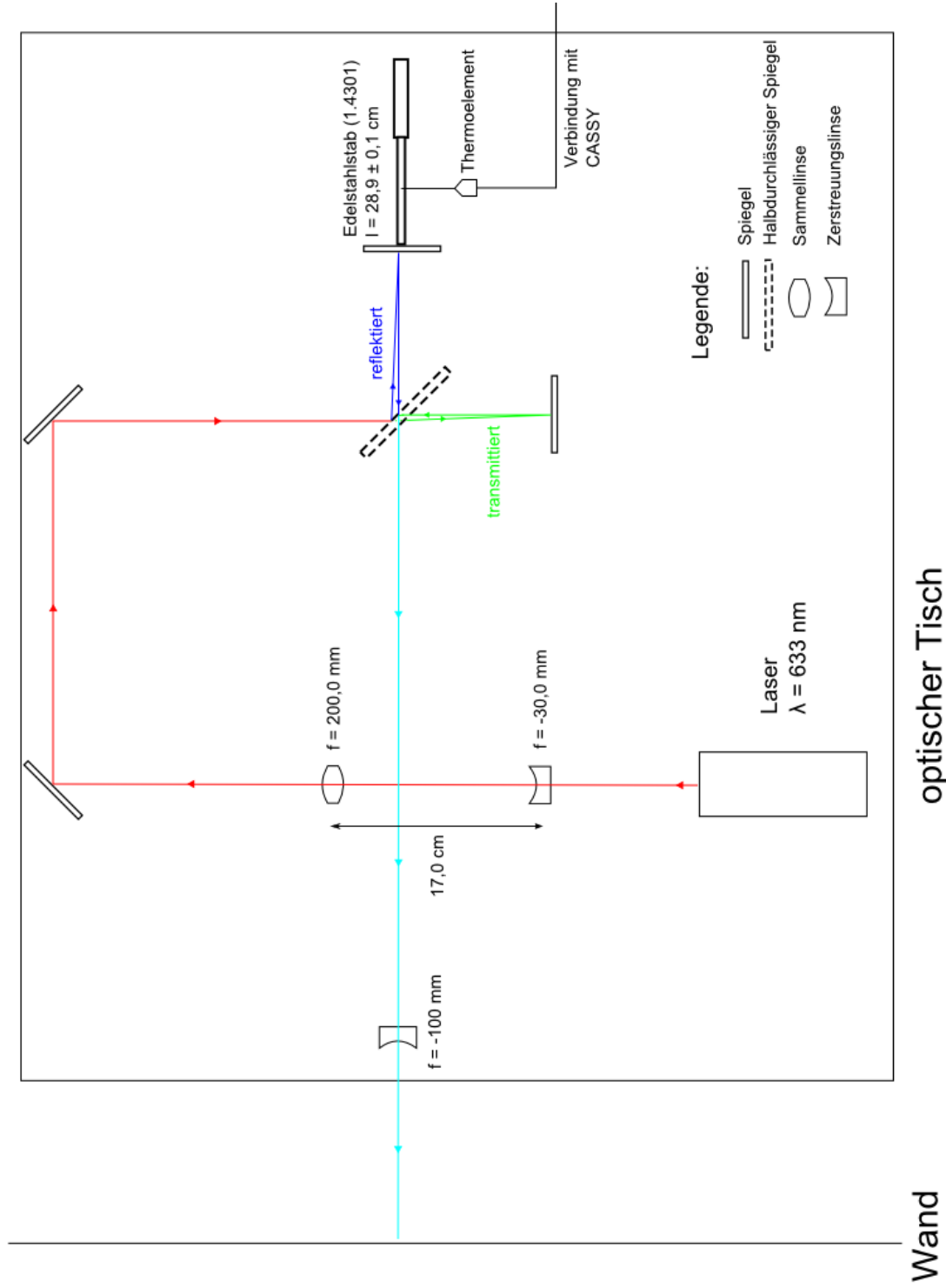


Abbildung 3: Skizze des Versuchsaufbaus, nicht maßstabgetreu

4 Versuchsdurchführung

4.1 Messung

Der Edelstahlstab wurde in ein Bad aus flüssigem Stickstoff ($T = -180^\circ\text{C}$) eingetaucht, aufgrund des Leidenfrost-Effekts war jedoch eine Abkühlung bis zu dieser Temperatur nicht möglich. Die Messung wurde bei einer gemessenen Temperatur von $T = -130^\circ\text{C}$ begonnen. Diese Art der Temperaturänderung des Stabs wurde gewählt, da die Ausdehnung des Stabs durch Aufheizung aus der Umgebungsluft gleichmäßiger ist als beispielsweise durch Aufheizen des Stabs mittels Heizdraht o.Ä..

Die Messung bestand daraus, die an einem Referenzpunkt an der Wand „vorbeilaufenden“ Maxima zu zählen. Die Zählung aller Maxima wäre stark fehleranfällig gewesen, also wurden die Maxima in 10-Sekunden-Intervallen gezählt, d.h. die Anzahl der Maxima, die innerhalb von 10 Sekunden am Referenzpunkt vorbeiliefen. Dann wurde 10 Sekunden pausiert, danach wurde die nächste zehnsekündige Messung gestartet.

4.2 Probleme

Die Durchführung des Versuchs gestaltete sich insgesamt schwierig. Das Interferenzmuster war trotz schwingungsgedämpftem Aufbau anfällig gegen Erschütterungen. Auch eine sehr genaue Justierung des Interferometers war notwendig, da schon kleinste Verkippungen der Spiegel zusätzliche Streifenmuster erzeugten, die sich mit dem eigentlichen, d.h. durch den Strahlteiler erzeugten, Interferenzmuster überlagerten.

Ursprünglich war eine elektronische Messung mit CASSY geplant, bei der das Interferenzmuster auf den Sensor einer Fotodiode abgebildet werden sollte, sodass aus den Spannungsmaxima und -minima die Interferenzmaxima und -minima erkennbar sein sollten. In der Praxis war dies jedoch sehr schwierig, da die Ausschläge aufgrund der geringen Intensität des Lichts nach Aufweitung und Durchgang durch den Strahlteiler so gering waren, dass sie selbst bei maximaler Verstärkung an der Diode nicht vom Grundrauschen der Diode unterscheidbar waren. Dies konnte zwar durch geringere Aufweitung (Teleskopaufbau) teilweise behoben werden (d.h. auf einem Oszilloskop waren die Maxima und Minima deutlich zu erkennen), bei einer probeweise durchgeführten Messung mit CASSY waren die Daten jedoch nicht verwertbar, auch bei einer zweiten Messung mit höherer zeitlicher Auflösung waren keine klaren Ausschläge zu erkennen, sodass die Messung schließlich doch per Hand durchgeführt wurde.

5 Darstellung der Ergebnisse und Auswertung

5.1 Darstellung der Ergebnisse

Mit der oben beschriebenen Messmethode wurden die in Tabelle 1 dargestellten Werte gemessen.

In Abb. 4 wurde die Anzahl der in 10 Sekunden durchlaufenen Maxima über der Zeit aufgetragen. Der Verlauf ist bis etwa $t = 2000\text{s}$ annähernd linear, danach wird der Verlauf flacher und nähert sich der Zeit-Achse an. Die Größe $\frac{dN}{dt}$ ist nach (12) proportional

t in s	dN/dt in 1/10s		
20	34	...	
40	29	1120	18
60	32	1160	17
80	28	1180	16
100	31	1200	18
120	25	1220	18
140	28	1240	16
160	24	1260	17
180	27	1280	15
200	24	1300	18
220	32	1320	16
240	25	1340	15
260	24	1360	14
280	27	1440	13
300	26	1460	12
320	25	1480	12
340	27	1500	13
420	29	1520	12
440	29	1540	12
460	26	1560	10
480	25	1580	12
500	26	1600	12
560	26	1640	9
580	22	1660	8
600	25	1680	8
620	22	1700	8
640	21	1720	9
660	20	1740	8
680	23	1760	8
700	21	1780	8
760	22	1840	7
780	20	1860	6
800	24	1880	7
820	22	1900	6
840	24	1920	6
860	23	1940	6
880	22	2000	5
900	20	2020	5
920	22	2040	5
940	20	2060	5
960	21	2080	5
980	22	2160	5
1000	18	2180	4
1080	19	2200	4
1100	19	2220	3

... 13

Tabelle 1: Anzahl der innerhalb von 10s durchgelaufenen Ringe in Abhängigkeit der Zeit

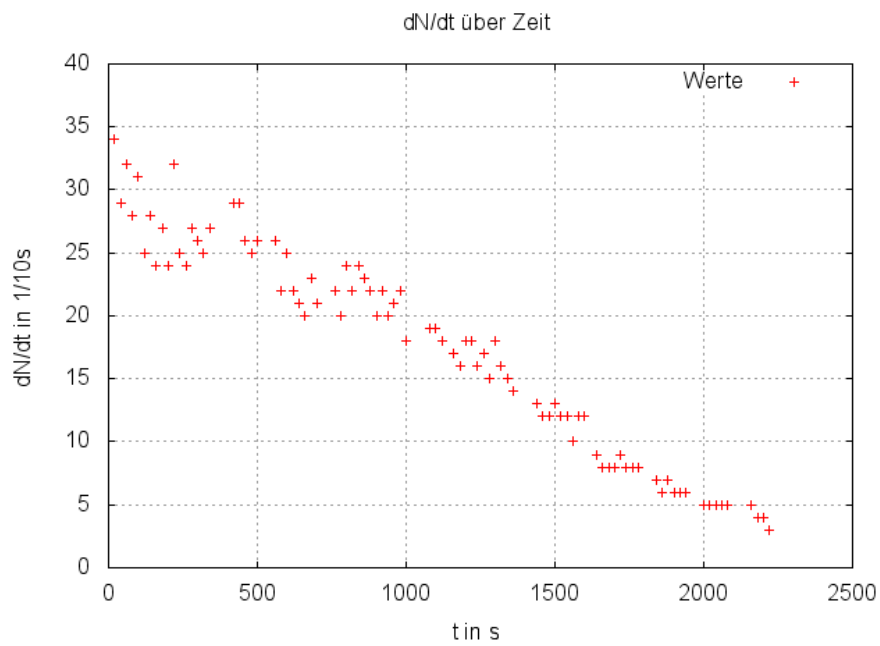


Abbildung 4: Anzahl der innerhalb von 10s druchgelaufenen Ringe in Abhängigkeit der Zeit

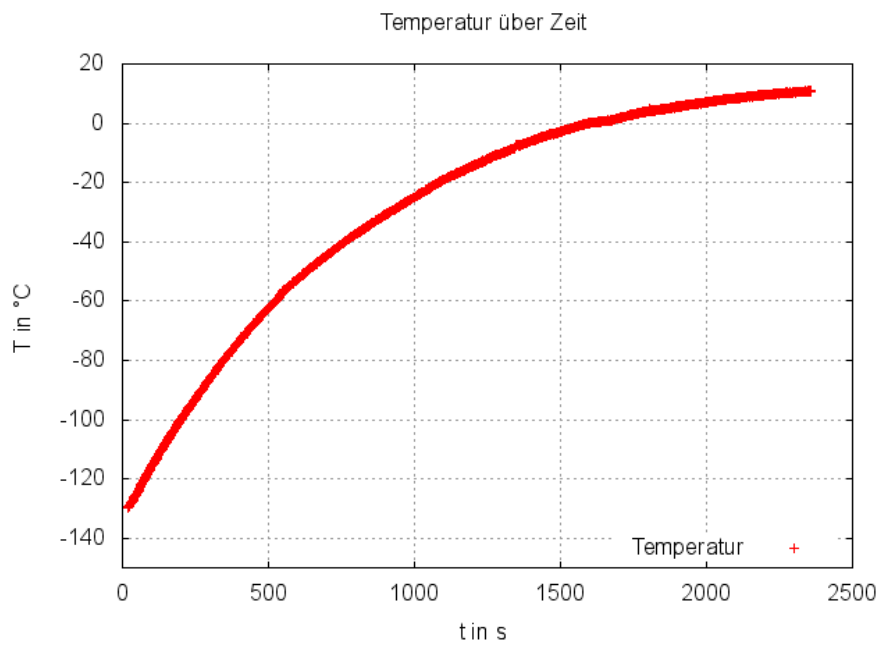


Abbildung 5: Temperatur in Abhängigkeit der Zeit

zur Geschwindigkeit der Längenänderung des Stabes. In diese Längenänderung fließt nach (13) ein im Allgemeinen temperaturabhängiges α sowie der zeitliche Verlauf der Temperaturkurve ein. Für den Temperaturverlauf ist nach (20) ein exponentieller Abfall zu erwarten, aber das Verhalten von $\alpha(T)$ ist nicht bekannt, sondern soll gerade mit diesem Versuch ermittelt werden. Weiter fällt sofort auf, dass die Messwerte bei großen Werten von dN/dt wesentlich mehr streuen, was darauf zurückzuführen ist, dass das Zählen der Ringe bei größeren Werten von dN/dt mehr Schwierigkeiten bereitet hat. Eine Tabelle der Temperatur des Stabes in Abhängigkeit der Zeit ist im Anhang zu finden.

In Abb. 5 wird der Temperaturverlauf über der Zeit aufgetragen. Der Graph steigt zu Beginn sehr schnell und nähert sich dann der Raumtemperatur von etwa $20^\circ C$ an. Der Verlauf ähnelt sehr stark einer an der Zeitachse gespiegelten und nach oben verschobenen Exponentialfunktion, wie es nach (20) zu erwarten ist. An der Temperaturkurve ist weiter bei $0^\circ C$ ein kurzes Gleichbleiben der Temperatur zu beobachten. Dies ist darauf zurückzuführen, dass sich Eis um den Stab gebildet hat. Dieses schmilzt bei $0^\circ C$ und hält den Stab so kurzzeitig auf einer konstanten Temperatur.

5.2 Auswertung

Aus den gemessenen Daten kann der Wärmeausdehnungskoeffizient α des verwendeten Stabes in Abhängigkeit von der Temperatur bestimmt werden. Dafür werden in dieser Auswertung zwei verschiedene Methoden verwendet und anschließend miteinander verglichen.

5.2.1 Einteilung der Messwerte in Fraktionen

Bei dieser Methode werden die Messwerte möglichst gleichmäßig in Fraktionen (Tabelle 2) eingeteilt und es wird jeweils innerhalb dieser der Mittelwert von dN/dt gebildet. (Die Mittelwertbildung ist aus mehreren Gründen gerechtfertigt: Zum Einen wird gerade ein gemittelter Wärmeausdehnungskoeffizient bestimmt. Zum anderen kann dN/dt in den Fraktionen als linear approximiert werden, wodurch sich Abweichungen vom Mittelwert durch die Linearität gegenseitig aufheben.) Außerdem werden aus den zu den Fraktionen passenden Zeitintervallen die entsprechenden Zeitdifferenzen errechnet. Aus den so bestimmten Größen kann dann für jede Fraktion ein mittlerer Wärmeausdehnungskoeffizient nach (13) folgendermaßen ermittelt werden:

$$\alpha(T) = \frac{\Delta L(T)}{L_0 \cdot \Delta T} \quad (21)$$

Aus $\Delta L = \frac{\lambda}{2} \cdot \Delta N$ (11) folgt:

$$\alpha(T) = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\Delta N(T)}{L_0 \cdot \Delta T} \quad (22)$$

Für die Mittelwerte von dN/dt mit zugehörigen Fehlern ergeben sich die in Tabelle 3 dargestellten Werte.

Fraktion	Zeitintervalle in s	ΔT in $^{\circ}C$
1	[20, 180]	26,5
2	[200, 340]	18,9
3	[420, 500]	8,7
4	[560, 700]	11,1
5	[760, 880]	7,9
6	[900,1000]	6,1
7	[1080,1120]	1,9
8	[1160,1260]	4,4
9	[1280,1360]	3,6
10	[1440,1600]	4,6
11	[1640,1780]	2,9
12	[1840,1940]	1,8
13	[2000,2080]	1,3
14	[2160,2220]	0,7

Tabelle 2: Einteilung in Fraktionen

Fraktion	Mittelwert von dN/dt in 1/10s	Fehler von dN/dt in 1/10s
1	28,67	1,08
2	26,25	0,92
3	27	0,84
4	22,5	0,73
5	22,43	0,53
6	20,5	0,62
7	18,67	0,33
8	17	0,37
9	15,6	0,68
10	12	0,29
11	8,25	0,16
12	6,33	0,21
13	5	0
14	4	0,41

Tabelle 3: Mittelwerte und Fehler von dN/dt

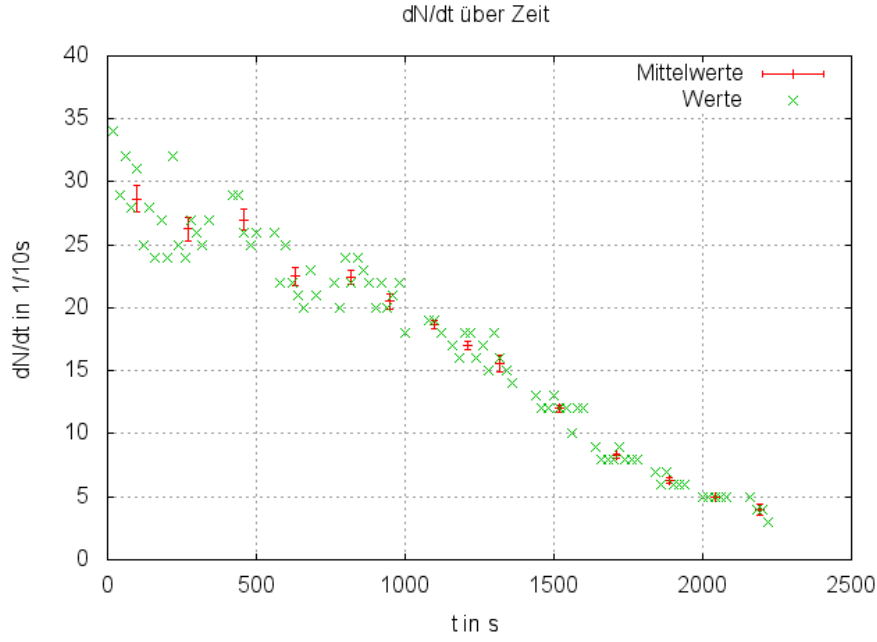


Abbildung 6: Einteilung in Fraktionen

An Tabelle 3 und deren graphischen Darstellung Abb. 6 fällt sofort auf, dass der Fehler in Fraktion 13 Null ist. Dies resultiert daraus, dass alle in dieser Fraktion zusammengefassten Werte gleich 5/10s sind.

Für die Fehlerabschätzung von α wird eine Fehlerfortpflanzung durchgeführt. Dabei sind die Fehler von λ und ΔT vernachlässigbar klein. Im Fall von ΔT ist der Fehler sogar nicht ermittelbar, da auf Grund der Benutzung von CASSY diesbezüglich keine ausreichenden Angaben vorhanden sind.

Der Fehler von L_0 beträgt aufgrund der Messung mit einem Zollstock 1mm.

Die Fehlerfortpflanzung liefert:

$$\Delta(\alpha) = \frac{\lambda}{2 \cdot \Delta T} \cdot \sqrt{\frac{1}{L_0^2} \cdot (\Delta(\Delta N))^2 + \frac{(\Delta N)^2}{(L_0)^4} \cdot (\Delta L_0)^2} \quad (23)$$

Damit ergibt sich für den temperaturabhängigen Wärmeausdehnungskoeffizient der in Tabelle 4 tabellarisch und in Abb. 7 graphisch dargestellte Verlauf. Es ist eindeutig zu erkennen, dass der Ausdehnungskoeffizient mit zunehmender Temperatur im Bereich zwischen -120 und -20°C ebenfalls zunimmt. Es bietet sich hier ein linearer Verlauf an. Für den Bereich ab -20°C ist es aufgrund der großen Fehler schwierig, den Verlauf zu interpretieren. Grund dafür ist auch, dass die in einem zehnssekündigen Intervall gezählten Maxima sich im Bereich von etwa 5 bewegten. Da die Messung nicht notwendigerweise auf ein Maximum begonnen und beendet wurde, sondern zu von der Uhr vorgegebenen Zeitpunkten, ergibt sich hier eigentlich noch ein zusätzlicher Fehler, der für kleine dN/dt relativ gesehen zunehmend größer wird.

Mittlere Temperatur in $^{\circ}C$	α in $10^{-5} \frac{1}{^{\circ}C}$	Fehler von α in $10^{-5} \frac{1}{^{\circ}C}$
-115,6	1,896	0,072
-90,2	2,129	0,075
-66,9	2,719	0,085
-50,1	3,108	0,101
-35,9	3,731	0,089
-27,9	3,680	0,112
-19,2	4,305	0,078
-14,0	4,231	0,093
-9,3	3,797	0,166
-2,1	4,571	0,112
2,1	4,362	0,086
5,3	3,851	0,128
7,7	3,370	0,011
9,4	3,755	0,385

Tabelle 4: Wärmeausdehnungskoeffizient in Abhängigkeit der Temperatur

Fittet man in Abb. 7 einen linearen Graphen, so ergibt sich die Näherung:

$$\alpha(T) = a \cdot T + b \quad (24)$$

mit $a = (0,0182 \pm 0,003) \cdot 10^{-5} K^{-2}$ und $b = (4,07 \pm 0,143) \cdot 10^{-5} K^{-1}$. Dabei wurde lediglich der von gnuplot ausgegebene Fehler aufgeführt, aber keine erneute Fehlerfortpflanzung mit Berücksichtigung der Fehler der einzelnen Mittelwerte durchgeführt.

5.2.2 Berechnung des Ausdehnungskoeffizienten durch approximatives Fitten

Bei dieser Methode werden dN/dt und $T(t)$ gefittet und daraus der Ausdehnungskoeffizient in Abhängigkeit der Temperatur bestimmt.

dN/dt lässt sich gut mit einem Polynom 5. Grades approximieren:

Dabei ergibt sich für

$$\dot{N}(t) = a_0 + a_1 \cdot t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 : \quad (25)$$

$$a_0 = (3,153 \pm 0,104) s^{-1}$$

$$a_1 = (-0,00311 \pm 0,00097) s^{-2}$$

$$a_2 = (5,78 \pm 2,65) 10^{-6} s^{-3}$$

$$a_3 = (-5,83 \pm 2,99) 10^{-9} s^{-4}$$

$$a_4 = (2,33 \pm 1,47) 10^{-12} s^{-5}$$

$$a_5 = (-3,21 \pm 2,62) 10^{-16} s^{-6}$$

$T(t)$ lässt sich sehr gut mit einer e-Funktion approximieren:

Dabei ergibt sich für $T(t) = a \cdot e^{bt} + c$:

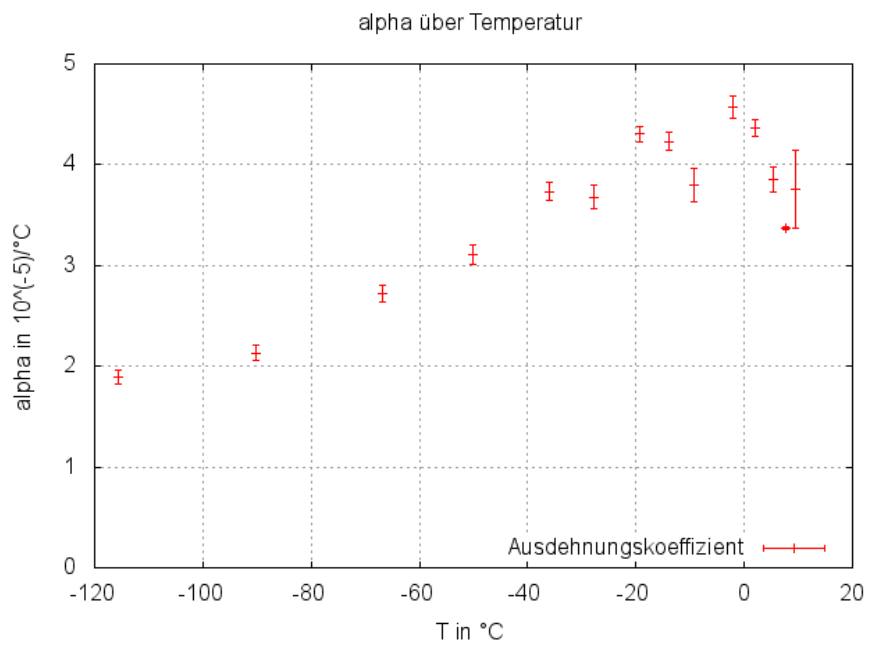


Abbildung 7: Wärmeausdehnungskoeffizient in Abhängigkeit der Temperatur

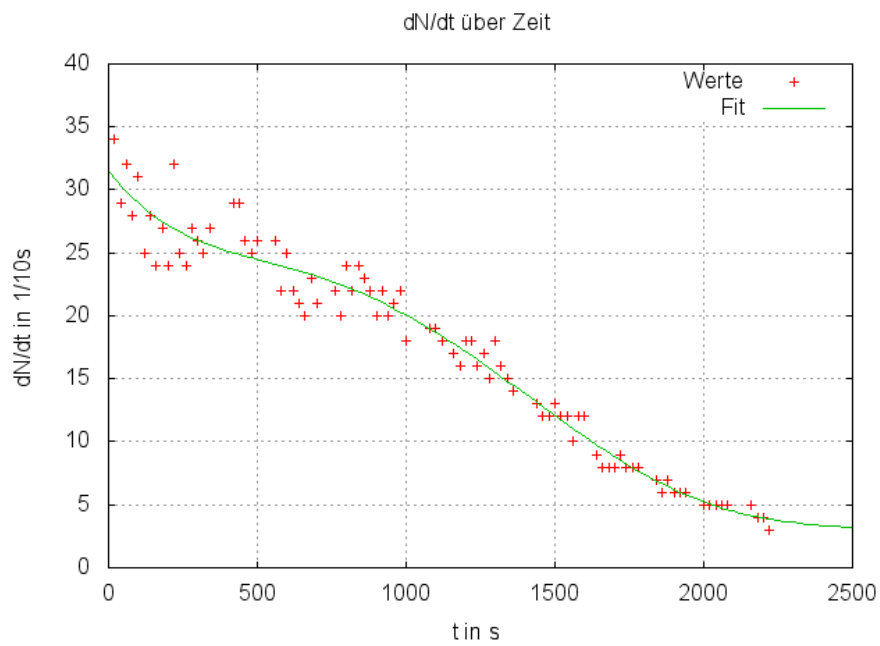


Abbildung 8: Fit von dN/dt

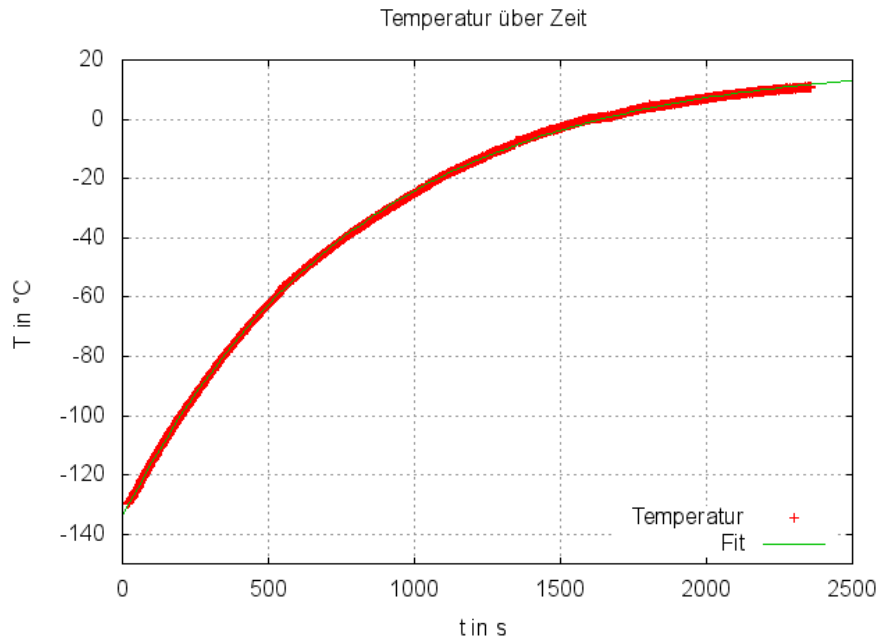


Abbildung 9: Fit von $T(t)$

$$a = (-154,01 \pm 0,04)^\circ\text{C}, \quad b = (-0,0012499 \pm 0,0000011)\text{s}^{-1}, \quad c = (19,91 \pm 0,042)^\circ\text{C}$$

Herleitung einer Formel zur Berechnung des Ausdehnungskoeffizienten:
Wegen $\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T$ (nach (13)) folgt:

$$\alpha(T) = \frac{1}{L_0} \frac{\partial L}{\partial T} \quad (26)$$

Außerdem gilt:

$$L = \frac{\lambda}{2} N \quad (27)$$

$$\Rightarrow \alpha(T) = \frac{1}{L_0} \frac{\lambda}{2} \frac{\partial N}{\partial T} = \frac{\lambda}{2} \cdot L_0 \frac{\partial N}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial T} \quad (28)$$

$$\Rightarrow \alpha(T) = \frac{\lambda}{2 \cdot L_0} \frac{\dot{N}(t(T))}{\dot{T}(t(T))} \quad (29)$$

Dann ergibt sich der Graph Abb. 10

5.2.3 Vergleich beider Methoden

Wie in Abb. 10 zu erkennen, führen beide Methoden zu ähnlichen Ergebnissen: Im Temperaturbereich zwischen -120 und -20°C stimmt der Verlauf des Graphen gut mit den Messwerten überein. Der Graph verläuft hier durch zwei von sieben und berührt zwei

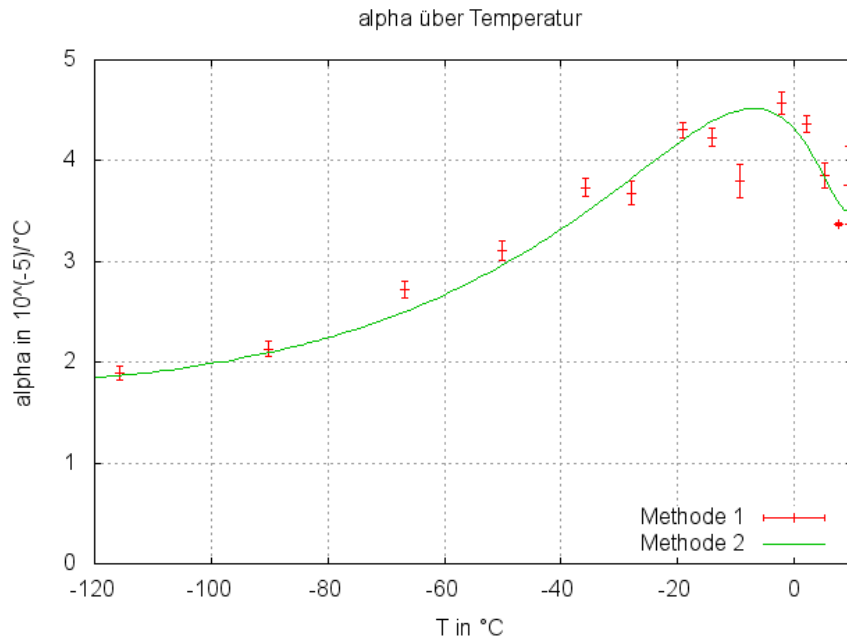


Abbildung 10: Vergleich zwischen Methode 1 und 2

weitere Fehlerbalken. Im Temperaturbereich zwischen -20 und 10°C stimmt der Verlauf des Graphen nur bedingt mit den Messwerten überein, da beispielweise der Messwert bei $T = -9,3^\circ\text{C}$ weit vom durch Methode 2 erlangten Graphen entfernt ist. Dies liegt vor allem daran, dass in diesem Temperaturbereich der oben schon angesprochene und nicht eingezeichnete Fehler relativ groß ist, da hier nur geringe Maximumsdurchläufe pro zehn Sekunden gezählt werden konnten.

5.2.4 Vergleich mit Literaturwerten

Der für Edelstahl angegebene Wert für den Temperaturbereich 20 bis 100°C für den Wärmeausdehnungskoeffizienten liegt nach [Ede] bei $1,6 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$. Der gemessene Wert stimmt zumindest in der Größenordnung mit dem gemessenen Wert von $3,76 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$ (nach 4) bei $9,4^\circ\text{C}$ überein. Allerdings beträgt der relative Fehler etwa 135%. Eine mögliche Erklärung hierfür ist, dass die Temperaturmessung zwar in einer Bohrung im Edelstahlstab durchgeführt wurde, wodurch allerdings trotzdem nicht die Kerntemperatur, sondern eine niedrigere Temperatur gemessen wurde. Da sich der Kern zunächst langsamer erwärmen dürfte als das Äußere des Stabes, unterscheidet sich, wenn sich die gemessene Temperatur schon an die Raumtemperatur angenähert hat, die Kerntemperatur noch deutlich von der Raumtemperatur. In Folge dessen ändert sich die Kerntemperatur stärker als die gemessene Temperatur, was zu einem größeren tatsächlichen ΔT führt und nach (13) zu einem kleineren tatsächlichen α als errechnet. Für eine detailliertere Untersuchung wäre es hilfreich, unter Berücksichtigung von (17) eine Simulation zu

schreiben, wenngleich dies aufgrund etwa der Bohrung, sowie der Befestigung des Stabes im Zylinder sehr schwierig sein dürfte.

5.3 Fazit

Der Bau des Interferometers hat sich als sehr schwierig herausgestellt, da die Spiegel sehr genau ausgerichtet sein müssen. Weitere Probleme sind bei der Messung der Ausdehnung des Stabs entstanden. Der vom Stab geschobene Spiegel musste so auf einer Schiene befestigt sein, dass er sich dabei nicht verdreht. Durch das Zählen von Interferenzringen konnten dennoch Messungen durchgeführt werden, welche zumindest Resultate in der richtigen Größenordnung lieferten. Da der Fehler vermutlich nicht im Interferometer sondern in der Temperaturmessung zu suchen ist, dürfte dieser Aufbau prinzipiell geeignet sein, um Längenausdehnungen in der Größenordnung von μm zu messen. Durch eine Automatisierung der Messung mit Hilfe beispielsweise einer Photodiode dürfte die Messung mit deutlich höherer Genauigkeit möglich sein, allerdings ist hierfür eine sehr genaue Justierung der optischen Elemente nötig.

Literatur

[Hec] Hecht, Eugene. Optik. Oldenbourg Verlag, 2005.

[Bre] Brehm, Prof. Dr. Axel. Praktikum der Technischen Chemie Waermeuebertragung. Uni Oldenburg, 2009. www.uni-oldenburg.de/tchemie/Praktikum/Waermeuebertragung.pdf (29. November 2013)

[Fey] Feynman, Richard P and Leighton, Robert B and Sands, Matthew. Feynman-Vorlesungen ueber Physik, Band 1: Mechanik, Strahlung, Waerme, Ausgabe 5. Oldenburg Verlag, 2007.

[Ede] Deutsche Edelstahlwerke. Nichtrostender austenitischer Stahl 1.4301 X5CrNi18-10. http://www.dew-stahl.com/fileadmin/files/dew-stahl.com/documents/Publikationen/Werkstoffdatenblaetter/RSH/1.4301_de.pdf. (14. Dezember 2013)

6 Anhang

t in s	T in °C
20	-129,68	800	-37,34
40	-126,28	820	-35,86
60	-122,58	840	-34,65
80	-119,19	860	-33,38
100	-115,60	880	-32,12
120	-112,51	900	-31,02
140	-109,13	920	-29,60
160	-106,18	940	-28,39
180	-103,22	960	-27,34
200	-99,93	980	-25,97
220	-97,27	1000	-24,87
240	-94,43	1020	-23,94
260	-91,52	1040	-22,35
280	-88,80	1060	-21,08
300	-86,22	1080	-20,09
320	-83,37	1100	-19,20
340	-81,04	1120	-18,16
360	-78,27	1140	-17,23
380	-75,88	1160	-16,24
400	-73,61	1180	-15,30
420	-71,21	1200	-14,52
440	-68,82	1220	-13,43
460	-66,90	1240	-12,64
480	-64,39	1260	-11,81
500	-62,47	1280	-10,77
520	-60,56	1299	-9,93
540	-58,19	1320	-9,31
560	-55,72	1340	-8,58
580	-54,41	1360	-7,23
600	-52,63	1380	-6,81
620	-50,80	1400	-5,82
640	-49,19	1420	-5,20
660	-47,82	1440	-4,57
680	-46,22	1460	-3,84
699	-44,56	1480	-3,43
720	-43,18	1500	-3,01
740	-41,46	1520	-2,12
760	-39,98	1540	-1,71
780	-38,82	1560	-0,87
...		...	
		1580	-0,30
		1600	-0,04
		1620	0,31
		1640	0,71
		1660	0,81
		1680	1,26
		1700	1,61
		1720	2,27
		1740	2,92
		1760	3,27
		1780	3,57
		1800	4,17
		1820	4,23
		1840	4,38
		1860	4,89
		1880	5,14
		1900	5,60
		1920	5,95
		1940	6,25
		1960	6,55
		1980	6,60
		2000	7,00
		2019	7,30
		2040	7,71
		2060	8,01
		2080	8,31
		2100	8,66
		2120	8,86
		2140	8,91
		2160	9,21
		2180	9,41
		2200	9,56
		2220	9,86
		2240	9,96
		2260	10,06
		2280	10,21
		2300	10,41
		2320	10,41
		2340	10,91

Tabelle 5: Temperaturverlauf über die Zeit des Experiments