

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Факультет прикладної математики
Кафедра прикладної математики

Звіт
із лабораторної роботи
із дисципліни «Математичне моделювання»
на тему:
МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ ТІЛА, КИНУТОГО ПІД КУТОМ К ГОРИЗОНТУ

Виконав:
студент групи КМ-13
Онищенко В.

Перевірила:
старший викладач
Ладогубець Т.С.

Київ — 2024 року

ЗМІСТ

1	Вступ	3
2	Постановка задачі	4
3	Практична частина	5
3.1	Дослідження залежності дальності польоту та висоти верхньої точки від кута кидка	5
3.2	Дослідження залежності дальності польоту та висоти верхньої точки від початкової швидкості	7
3.3	Дослідження траєкторії руху при різних типах опору середовища .	10
4	Теоретична частина	14
5	Висновки	15

1. Вступ

Мета лабораторної роботи полягає в ознайомленні з можливостями математичного моделювання руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, використовуючи як класичні формули фізики, так і диференціальні рівняння, що враховують опір середовища.

У роботі розглядається базовий фізичний приклад, що дозволяє застосувати математичні методи для аналізу руху, отримання залежностей між параметрами, а також перевірки впливу лінійної та квадратичної складових сили опору на траєкторію. Результати моделювання сприятимуть розвитку практичних навичок роботи з аналітичними й чисельними методами в моделюванні фізичних процесів.

2. Постановка задачі

3. Практична частина

3.1. Дослідження залежності дальності польоту та висоти верхньої точки від кута кидка

Для дослідження залежності дальності польоту l і висоти верхньої точки траєкторії h від кута кидка α використовуються наступні формули:

$$l = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g},$$

$$h = \frac{(v_0 \sin \alpha)^2}{2g},$$

де:

- v_0 — початкова швидкість (м/с),
- α — кут кидка (градуси),
- g — прискорення вільного падіння ($g \approx 9.8 \text{ м/с}^2$).

Для кожного кута α у діапазоні від 0° до 90° обчислено дальність польоту l і висоту верхньої точки h . Результати візуалізовані на рисунках 3.1.1 і 3.1.2.

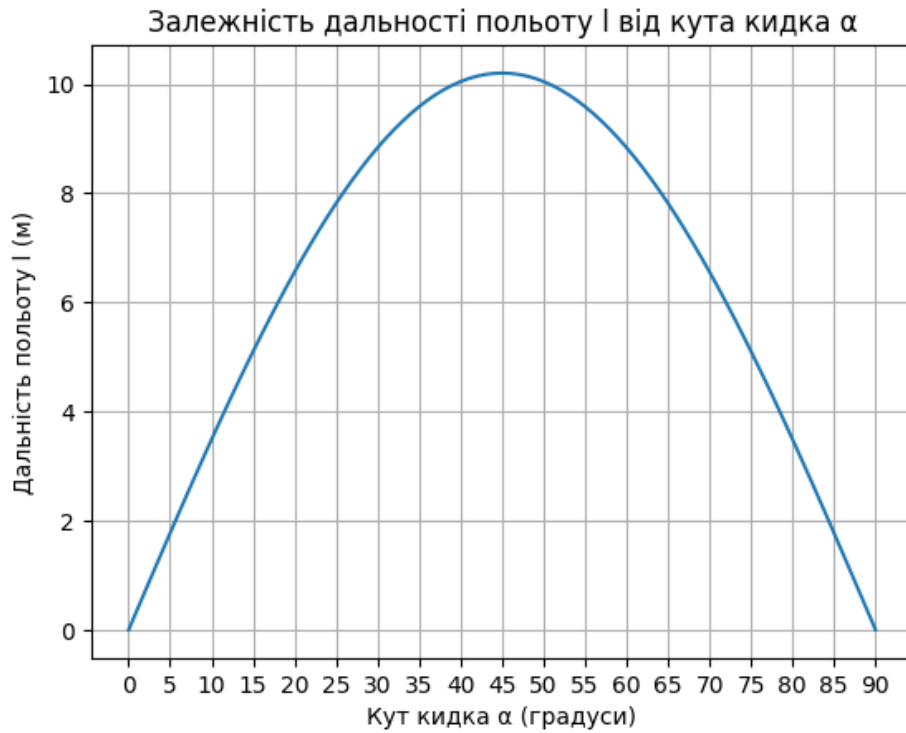


Рисунок 3.1.1 – Залежність дальності польоту l від кута кидка α .

На рисунку 3.1.1 представлено залежність дальності польоту l від кута кидка α . Дальність польоту досягає максимуму при $\alpha = 45^\circ$, що відповідає максимальному значенню функції $\sin(2\alpha)$. Для кутів менше 45° дальність зменшується через недостатню висоту, а для кутів більше 45° — через надмірну вертикальну складову швидкості.

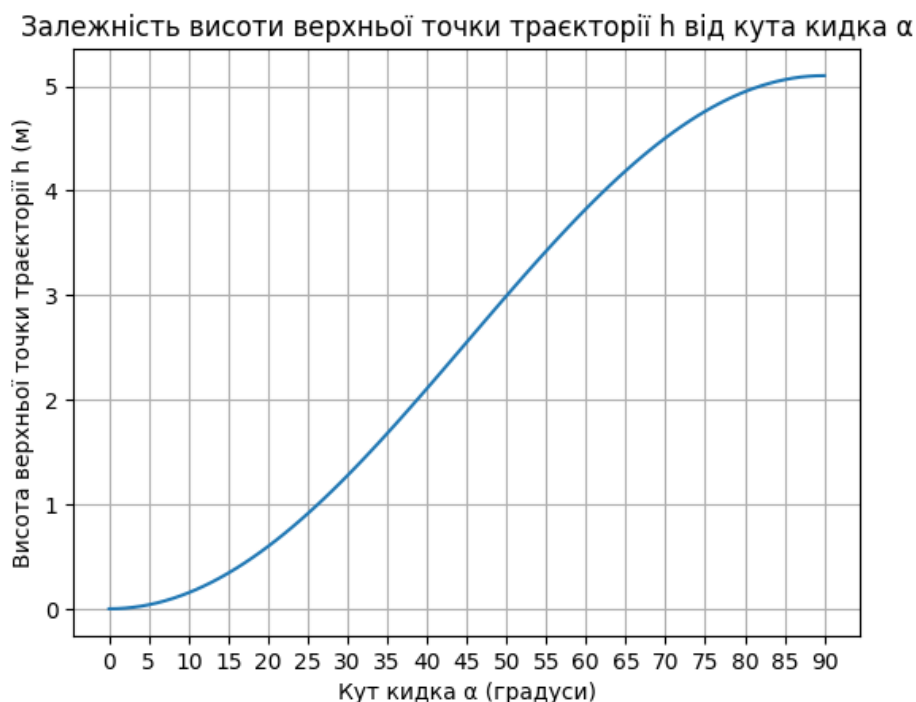


Рисунок 3.1.2 – Залежність висоти верхньої точки траєкторії h від кута кидка α .

На рисунку 3.1.2 показано залежність висоти верхньої точки траєкторії h від кута кидка α . Висота збільшується зі зростанням кута, досягаючи максимуму при $\alpha = 90^\circ$. Це відповідає максимальній вертикальній складовій початкової швидкості $v_0 \sin \alpha$, що визначає висоту траєкторії.

3.2. Дослідження залежності дальності польоту та висоти верхньої точки від початкової швидкості

Обчислення проведено для діапазону початкових швидкостей v_0 від 0 м/с до 100 м/с. Результати візуалізовані на рисунках 3.2.1, 3.2.2, і 3.2.3.

Залежність висоти верхньої точки траєкторії h від початкової швидкості v_0

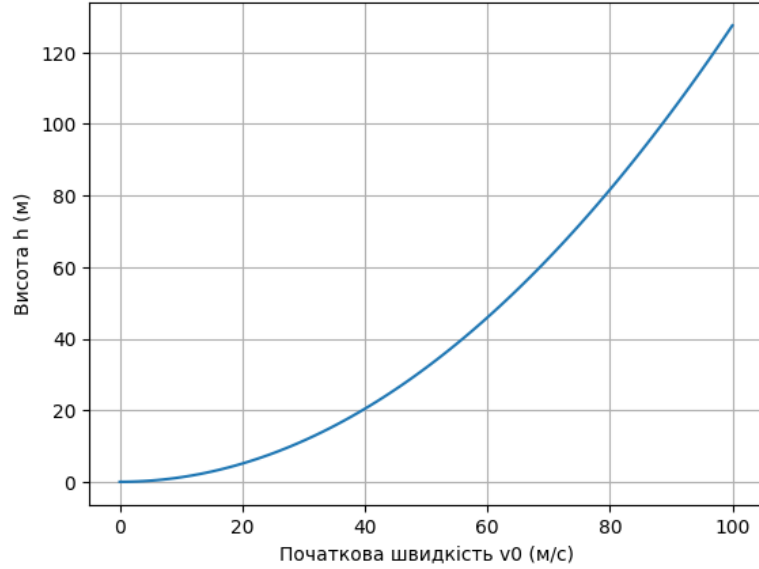


Рисунок 3.2.1 – Залежність висоти верхньої точки h від початкової швидкості v_0 .

На рисунку 3.2.1 показано залежність висоти верхньої точки траєкторії h від початкової швидкості v_0 . Висота зростає квадратично зі збільшенням початкової швидкості, що відповідає теоретичній формулі.

Залежність дальності польоту l від початкової швидкості v_0

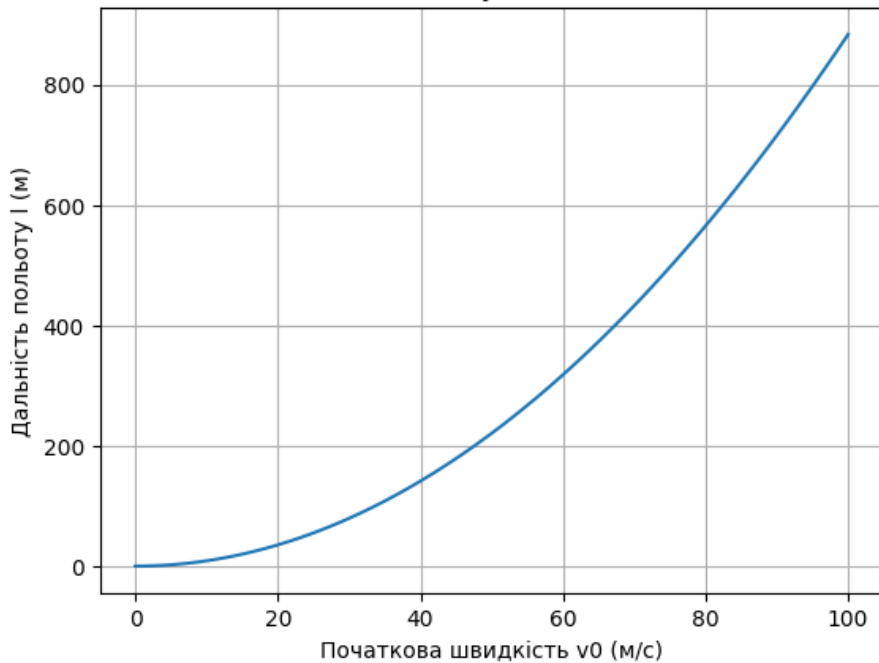


Рисунок 3.2.2 – Залежність дальності польоту l від початкової швидкості v_0 .

На рисунку 3.2.2 зображено залежність дальності польоту l від початкової швидкості v_0 . Дальність також зростає квадратично зі збільшенням початкової швидкості, що підтверджує теоретичну залежність.

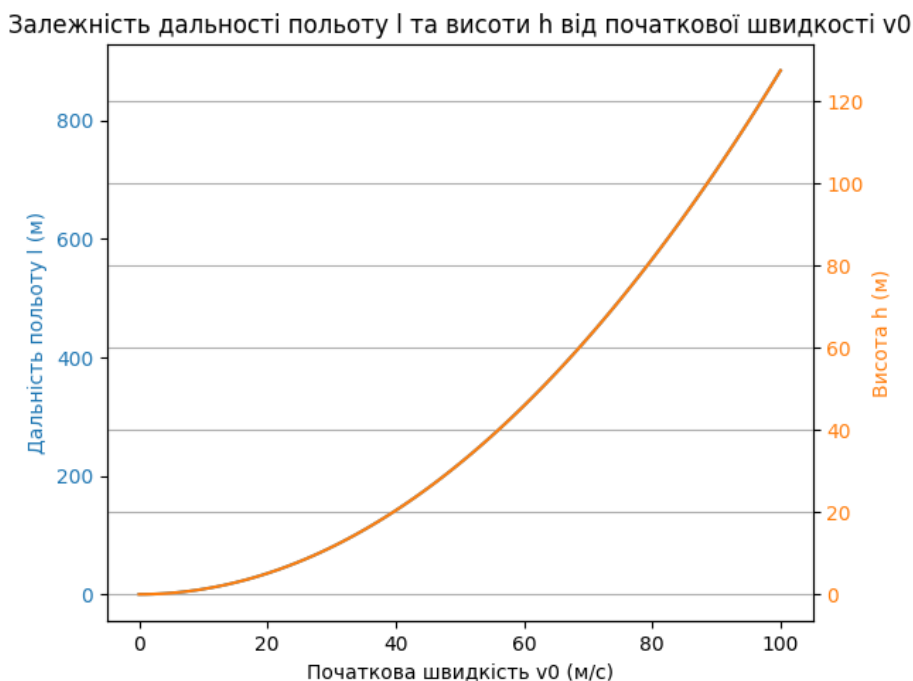


Рисунок 3.2.3 – Залежність дальності польоту l та висоти верхньої точки h від початкової швидкості v_0 .

На рисунку 3.2.3 представлені залежності дальності польоту l та висоти верхньої точки h одночасно. Обидві величини зростають квадратично зі збільшенням початкової швидкості v_0 , що дозволяє простежити їхню взаємозалежність.

Дані графіки підтверджують теоретичні моделі та демонструють важливість початкової швидкості у визначенні параметрів траєкторії руху тіла.

3.3. Дослідження траєкторії руху при різних типах опору середовища

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, з урахуванням опору середовища описується наступними рівняннями:

$$m \frac{dv_x}{dt} = -k_1 v_x - k_2 v_x |v|, \quad m \frac{dv_y}{dt} = -mg - k_1 v_y - k_2 v_y |v|,$$

де:

- v_x та v_y — компоненти швидкості по осях x та y ,
- $k_1 = a$, $k_2 = b$ — коефіцієнти лінійного та квадратичного опору відповідно,
- g — прискорення вільного падіння ($g \approx 9.8 \text{ м/с}^2$),
- m — маса тіла.

Для параметрів $a = 0.0663$ та $b = 0.0078$ проведено дослідження траєкторій для наступних випадків:

1. Траєкторія без лінійного опору ($b \neq 0, a = 0$).
2. Траєкторія без квадратичного опору ($a \neq 0, b = 0$).
3. Траєкторія з урахуванням обох типів опору ($a \neq 0, b \neq 0$).
4. Траєкторія з врахуванням абсолютних розмірів руху.

Результати представлені на рисунках 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.3.4, і 3.3.5.

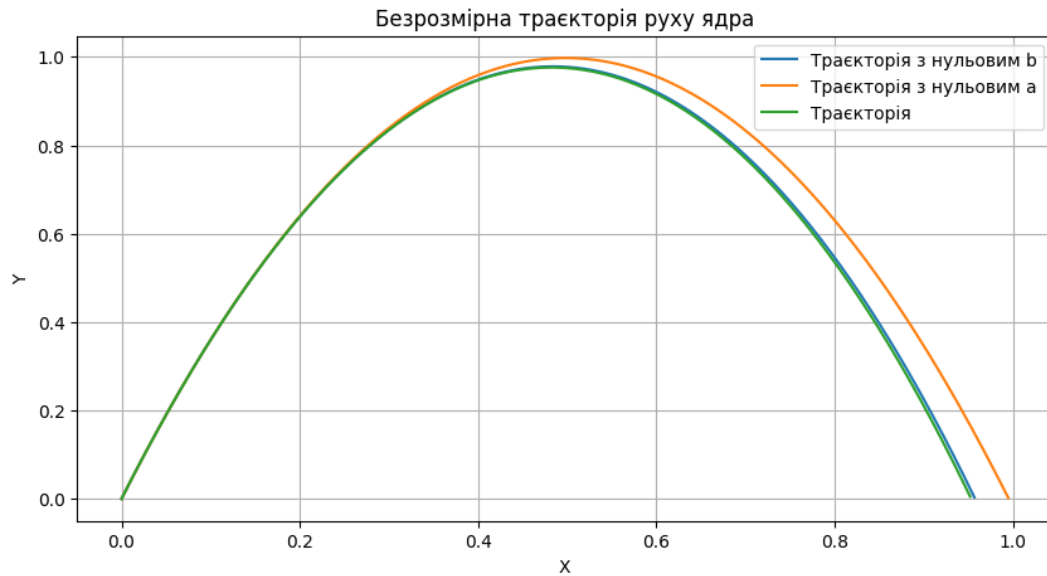


Рисунок 3.3.1 – Порівняння траєкторій руху ядра для різних типів опору.

На рисунку 3.3.1 представлено порівняння траєкторій руху: з нульовим лінійним опором ($b \neq 0, a = 0$), з нульовим квадратичним опором ($a \neq 0, b = 0$) та для обох компонент ($a \neq 0, b \neq 0$). Видно, що квадратичний опір сильніше впливає на зменшення дальності польоту.

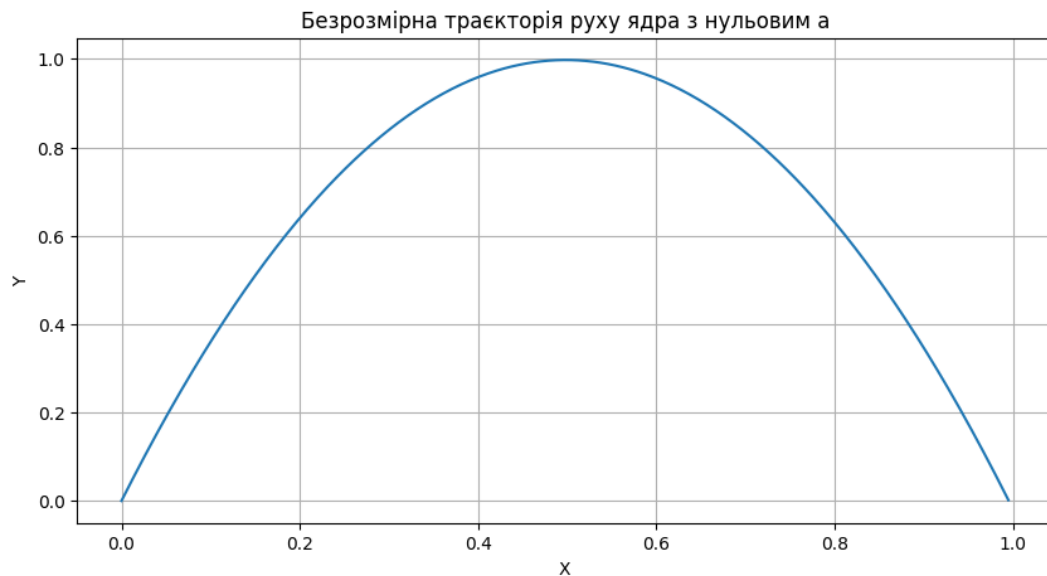


Рисунок 3.3.2 – Траєкторія руху ядра з нульовим лінійним опором ($a = 0$).

На рисунку 3.3.2 зображено траєкторію за умови, що лінійний опір відсутній

($a = 0$). Дальність польоту є меншою, ніж у випадку без опору, через дію квадратичного компонента.

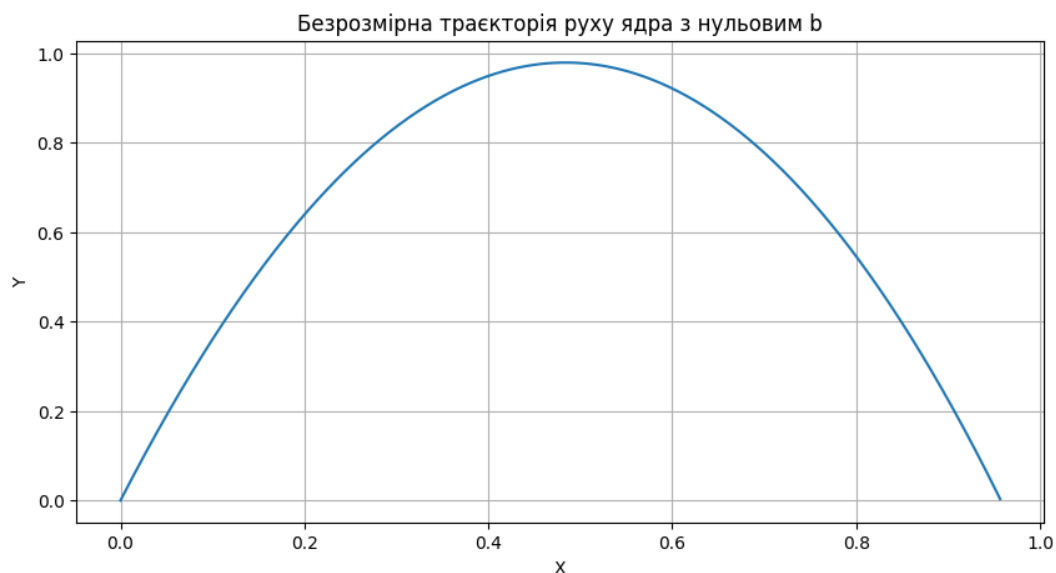


Рисунок 3.3.3 – Траєкторія руху ядра з нульовим квадратичним опором ($b = 0$).

На рисунку 3.3.3 представлена траєкторія руху ядра з нульовим квадратичним опором ($b = 0$). Видно, що у цьому випадку дальність польоту є більшою, ніж при врахуванні обох компонент опорю.

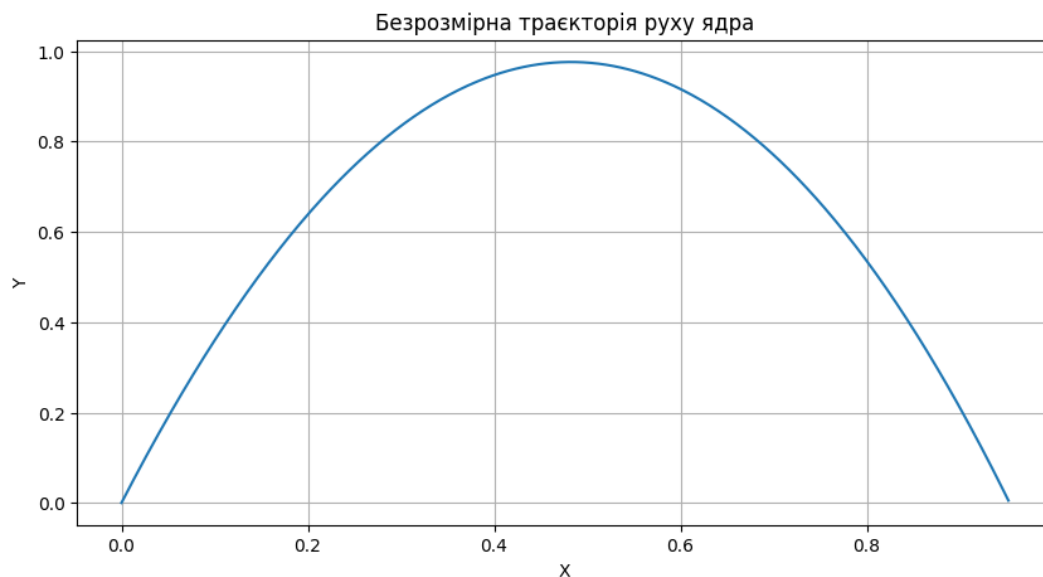


Рисунок 3.3.4 – Траєкторія руху ядра з урахуванням обох типів опорю ($a \neq 0, b \neq 0$).

На рисунку 3.3.4 показано траєкторію руху ядра з урахуванням обох типів опору ($a \neq 0, b \neq 0$). Видно, що обидва компоненти опору разом суттєво зменшують дальність польоту порівняно з випадками відсутності одного з опорів.

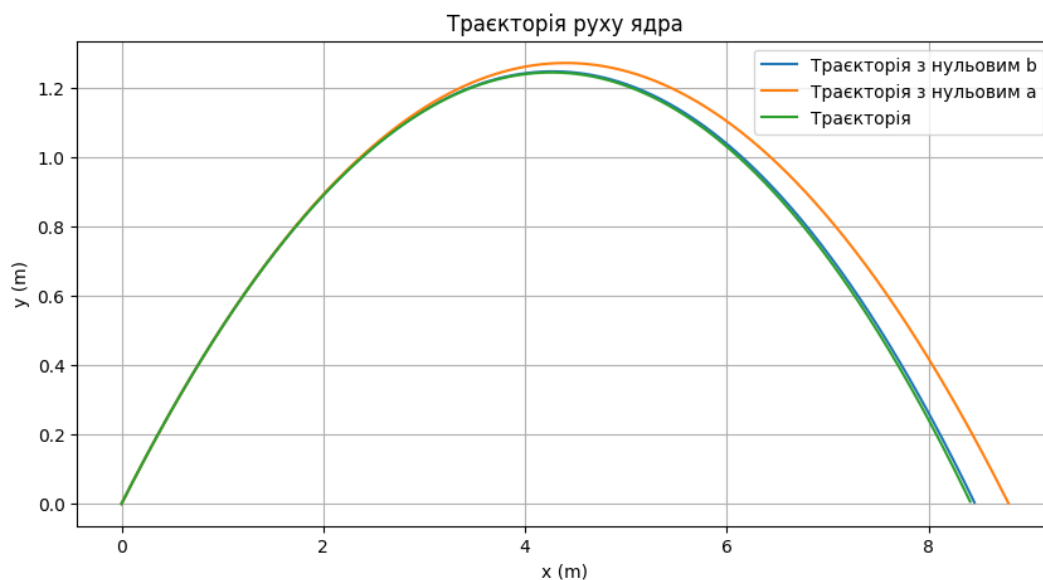


Рисунок 3.3.5 – Траєкторія руху з врахуванням абсолютних розмірів.

На рисунку 3.3.5 показано траєкторію руху ядра з врахуванням абсолютних розмірів (метри). Така візуалізація дозволяє краще оцінити реальні масштаби руху.

Таким чином, вплив опору середовища суттєво залежить від його природи. Квадратичний опір сильніше впливає на траєкторію при більших швидкостях, тоді як лінійний опір дає менший внесок. Обидва компоненти опору разом мають максимальний ефект на скорочення дальності польоту.

4. Теоретична частина

1. **Які сили діють на тіло в польоті?** На тіло в польоті впливають сила тяжіння та опір повітря.
2. **Який характер руху тіла по осях OX та OY ?** Рух по вертикалі OY є рівноприскореним до досягнення максимальної висоти, а після цього — рівноприскореним у напрямку донизу через дію сили тяжіння. По горизонталі OX рух залишається рівномірним.
3. **Яка траєкторія руху тіла, кинутого під кутом до горизонту, за відсутності опору середовища?** Траєкторія є параболічною.
4. **Який вплив на траєкторію руху чинить опір середовища?** Опір повітря сплющує траєкторію, зменшуючи її висоту і дальність.
5. **Для чого виконується перехід від абсолютних до відносних величин, що характеризують рух?** Перехід до відносних величин дозволяє звести параметри до діапазону від 0 до 1, що зручно для оцінки впливу різних компонентів опору на рух.

5. Висновки

У даній лабораторній роботі було змодельовано рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, з урахуванням різних типів опору середовища. Проведені розрахунки та побудовані графіки дозволили зробити наступні висновки:

- Для випадку без опору середовища дальність польоту l становить 8.837 м, а максимальна висота траєкторії h дорівнює 1.276 м.
- Врахування лінійного опору ($a = 0.0663$) значно зменшує дальність польоту, але менше впливає на максимальну висоту.
- Врахування квадратичного опору ($b = 0.0078$) суттєво скорочує дальність польоту та висоту, особливо при високих швидкостях.
- Поєднання обох компонентів опору ($a = 0.0663, b = 0.0078$) має найсильніший вплив, зменшуючи як дальність, так і висоту траєкторії.
- Абсолютні масштаби руху, представлені у метрах, дозволяють оцінити реальні розміри траєкторії ядра та вплив опору на рух.
- Переходи до відносних величин полегшують аналіз впливу різних параметрів на траєкторію руху.

Отримані результати підтверджують теоретичні залежності та демонструють важливість врахування сил опору при моделюванні руху тіл у середовищі. Лабораторна робота дозволила поглибити розуміння впливу параметрів середовища на динаміку руху.