

Estadística paramétrica. Contrastes de hipótesis

Víctor Aceña - Isaac Martín - Carmen Lancho

DSLAB

2025-09-19



- Estimación puntual. Conocemos la distribución a excepción de un parámetro. Estimamos el valor de dicho parámetro.
- Intervalos de confianza. Construimos un intervalo que contiene el valor del parámetro con una confianza de $1 - \alpha$
- Contrastes de hipótesis. Sirven para responder preguntas del tipo:
 - Dados los datos, ¿el valor del parámetro puede ser a ? Por ejemplo, ¿la altura media de las alumnas de la URJC es 1.65m?
 - En base a la muestra, ¿estos dos medicamentos son igual de efectivos ($\mu_1 = \mu_2$) para tratar la ansiedad?

- Permiten evaluar si los datos disponibles proporcionan suficiente evidencia en contra de una hipótesis previamente establecida sobre una población
- Es un proceso estructurado para evaluar afirmaciones sobre parámetros poblacionales utilizando datos muestrales. Mediante la formulación de hipótesis, selección de niveles de significancia, elección de estadísticas de prueba y evaluación del p -valor, podemos tomar decisiones informadas y cuantitativamente justificadas
- Este enfoque es fundamental en muchas áreas de investigación y análisis de datos, proporcionando un marco riguroso para la inferencia estadística

Hipótesis nula (H_0):

La hipótesis nula es una afirmación sobre parámetros poblacionales que se asume verdadera hasta que se presente suficiente evidencia en contra. Se asume inicialmente que la hipótesis nula es correcta (semejante a suponer inocencia a menos que se pruebe la culpa). Habitualmente corresponde al estatus quo. Esto es, generalmente, la hipótesis nula representa un estado de “no efecto” o “no diferencia”.

Ejemplo:

- $H_0 : \mu = 50$ Se contrasta si la media poblacional es 50
- $H_0 : \mu \leq 50$ Se contrasta si la media poblacional es ≤ 50
- $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ Se contrasta si la media de las dos muestras es igual

Se rechaza H_0 cuando los datos apoyan mucho más otra hipótesis, llamada hipótesis alternativa H_1

Hipótesis alternativa H_1 :

La hipótesis alternativa es una afirmación que contrasta con la hipótesis nula y representa el efecto o diferencia que se desea detectar

Ejemplo:

- $H_1 : \mu \neq 50$ La media poblacional no es 50
- $H_1 : \mu > 50$ La media poblacional es mayor que 50

Supongamos que una empresa de educación en línea afirma que sus estudiantes pasan en promedio al menos 4 horas diarias estudiando en su plataforma. Queremos comprobar si esta afirmación es cierta basándonos en una muestra de estudiantes

- La hipótesis nula es la afirmación que queremos poner a prueba y que asumimos verdadera inicialmente. En este caso, la hipótesis nula es que la media del tiempo de estudio diario es de al menos 4 horas.
- La hipótesis alternativa es lo que queremos demostrar y se contrapone a la hipótesis nula. En este caso, queremos ver si el tiempo de estudio diario es menor de 4 horas. Fíjate que la empresa podría estar “inflando” sus resultados y lo “interesante” en este caso es “demostrar” que realmente los alumnos pasan menos tiempo en la plataforma.

$$H_0 : \mu \geq 4 \text{ horas}$$

$$H_1 : \mu < 4 \text{ horas}$$

Supongamos que el rectorado de la URJC afirma que menos del 20% de los estudiantes de sus grados, fuman. Queremos verificar si la proporción de fumadores es mayor al 20%

- La hipótesis nula es que la proporción de fumadores es menor o igual al 20%

$$H_0 : p \leq 0.20$$

- La hipótesis alternativa es si la proporción de fumadores es mayor al 20%

$$H_1 : p > 0.20$$

- Unilarerales. Se contrasta si el valor es mayor o menor, es decir, si queda a la izquierda o a la derecha en la distribución

$$H_0 : p \leq 0.20 \quad \text{vs} \quad H_1 : p > 0.20$$

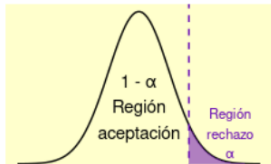
- Bilaterales. Se contrasta la igualdad y se rechaza si queda a la derecha o a la izquierda en la distribución del estadístico bajo H_0

$$H_0 : p = 0.20 \quad \text{vs} \quad H_1 : p \neq 0.20$$

Contraste unilateral derecho

$$H_0: \mu \leq \mu_0$$

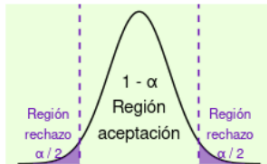
$$H_1: \mu > \mu_0$$



Contraste bilateral

$$H_0: \mu = \mu_0$$

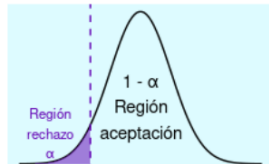
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$



Contraste unilateral izquierdo

$$H_0: \mu \geq \mu_0$$

$$H_1: \mu < \mu_0$$



1. Formular las hipótesis:

- Definir H_0 y H_1 claramente

2. Seleccionar el nivel de significatividad estadística (α):

- El nivel de significatividad estadística es la probabilidad de rechazar H_0 cuando es verdadera. Comúnmente, se utilizan $\alpha = 0.05, 0.01, 0.10$.

3. Elegir el estadístico de prueba:

- Seleccionar un estadístico que resuma la información de interés sobre los datos (ejemplo: media muestral para la estatura media) y que siga una distribución conocida bajo H_0 (por ejemplo, la distribución Normal)

4. Calcular el p - *valor*:

- El p - *valor* es la probabilidad de observar un valor tan extremo o más extremo que el observado, bajo la suposición de que H_0 es verdadera

5. Tomar una decisión:

- La regla de decisión de un contraste de hipótesis se basa en la “distancia” entre los datos muestrales y los valores esperados si H_0 es cierta
- Esta distancia se calcula a partir del estadístico del contraste y se considera “grande” o no, en base a la distribución del mismo y a la probabilidad de observar realizaciones “más extremas” de dicho estadístico. Para tomar la decisión, comparamos el $p - valor$ con α :
 - Si $p - valor \leq \alpha$, se rechaza H_0 . Hay suficiente evidencia en la muestra como para rechazar la hipótesis nula. El valor del parámetro establecido en H_0 es poco creíble dada la muestra observada.
 - Si $p - valor > \alpha$, no se rechaza H_0 . **Muy importante:** esto no significa que la hipótesis nula sea cierta. La interpretación es que no existe, en la muestra que hemos observado, suficiente evidencia en contra de la hipótesis nula como para rechazarla.

Tenemos por tanto que el $p - valor$ es una medida que nos dice cuán probable sería obtener nuestros datos observados si la hipótesis nula fuera verdadera. En otras palabras, mide la evidencia en contra de H_0 . Si el $p - valor$ es pequeño (generalmente menor que 0.05), tenemos razones para rechazar H_0 . Si es grande, no tenemos suficiente evidencia para rechazarla.

Un contraste de hipótesis es como un juicio y el **p-valor** es la fuerza de la evidencia presentada..

Analogía del juicio

- **Hipótesis Nula (H_0):** El acusado es inocente (principio de presunción de inocencia).
- **Evidencia:** Tus datos muestrales.
- **p-valor:** La probabilidad de que la evidencia en tu contra sea tan fuerte por puro azar (si realmente fueras inocente).
- **Veredicto:**
 - **p-valor bajo:** Evidencia muy incriminatoria. Se supera la “duda razonable” (α).
 - Veredicto → **Culpable (Rechazamos H_0)**.
 - **p-valor alto:** Evidencia débil, circunstancial. No se supera la “duda razonable”.
 - Veredicto → **No culpable (No podemos rechazar H_0)**.

Declarar a alguien “no culpable” no es lo mismo que declararlo “inocente”. Simplemente, no teníamos pruebas suficientes para condenarlo. De igual forma, **no rechazar H_0 no la convierte en verdadera**, solo significa que no teníamos evidencia suficiente en su contra.

- Queremos probar si, después de una campaña de concienciación, los jóvenes de 20 años de GCID pasan, de media, menos de 3 horas diarias en Instagram o siguen pasando 3 horas o más
- Se sabe que la v.a. X : horas que pasan los jóvenes en Instagram sigue una distribución Normal de media desconocida μ y varianza $\sigma^2 = 0.25$
- Para contrastar si la campaña de concienciación ha tenido efecto, se toma una muestra de $n = 50$ estudiantes

Hipótesis:

- Hipótesis nula $H_0: \mu \geq 3$ horas
- Hipótesis alternativa $H_1: \mu < 3$ horas

- Si la media muestral de los 50 estudiantes es 1'5 horas, ¿qué haríamos?
- ¿Y si fuera de 4 horas?
- Como la media muestral (en este caso) sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2/n) = N(3, 0.25/50)$ bajo H_0 , trabajamos en términos de probabilidades
- Con el contraste lo que hacemos es, dada la distribución de la población bajo H_0 , estudiar cómo de probable es obtener una media muestral como la lograda con los 50 estudiantes
- Si la probabilidad es muy baja \rightarrow existen evidencias para rechazar la hipótesis nula de que los jóvenes pasan 3 o más horas en Instagram. El número medio de horas sería significativamente menor
- Si la probabilidad es muy alta \rightarrow no existen evidencias para rechazar la hipótesis nula

- Bajo H_0 :
 - La población $X \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 0.25)$
 - De dicha población, se toma una m.a.s de v.a. independientes e igualmente distribuidas $X_1, \dots, X_{50} \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 0.25)$
 - Sabemos que $\bar{X} \sim N(\mu = 3, \sigma^2/n = 0.25/50)$
 - Calculamos el valor de la media muestral en nuestra muestra concreta: $\bar{x} = 2.75$
 - Suponiendo dicha distribución, calculamos la probabilidad de que el número medio de horas sea 2.75: $P(\bar{X} < 2.75) = 0.0002$ ¿Interpretación?
- $p - valor = 0.0002$ ¿Decisión con $\alpha = 0.05$?

- Una vez especificadas las hipótesis nula H_0 y alternativa H_1 y recogida la información muestral, se toma una decisión sobre la hipótesis nula (rechazar o no rechazar H_0)
- Existe la posibilidad de llegar a una conclusión equivocada, porque solo se dispone de una muestra aleatoria y no se puede tener la certeza de que sea correcta o no
- Cuando realizamos un contraste de hipótesis, pueden ocurrir 2 errores: el **error de tipo I** o α y el **error de tipo II** o β
- Entender estos errores es fundamental para interpretar correctamente los resultados de cualquier prueba estadística
- El balance entre α y β , así como el tamaño de la muestra, juegan un papel importante en la fiabilidad de los resultados obtenidos

- El error de tipo I ocurre cuando rechazamos la hipótesis nula H_0 siendo esta verdadera. En otras palabras, concluimos que hay un efecto o una diferencia cuando, en realidad, no la hay
- El nivel de significancia α es la probabilidad de cometer un error de tipo I:

$$\alpha = P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es correcta})$$

- Este valor se establece de antemano, comúnmente 0.05, 0.01 o 0.10.
- Si el p – *valor* de nuestra prueba es menor o igual a α , rechazamos H_0 . Por ejemplo, si $\alpha = 0.05$, esto significa que estamos dispuestos a aceptar un 5% de probabilidad de rechazar H_0 cuando es verdadera

- El error de tipo II ocurre cuando no rechazamos la hipótesis nula H_0 siendo esta falsa. En otras palabras, concluimos que no hay un efecto o una diferencia cuando, en realidad, sí la hay:

$$\beta = P(\text{No rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es incorrecta})$$

- Potencia del test:** La potencia de una prueba estadística es la probabilidad de rechazar H_0 cuando H_0 es falsa:

$$\text{Potencia} = 1 - \beta = P(\text{Rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ es correcta})$$

- Una alta potencia es deseable \rightarrow mayor probabilidad de detectar un efecto o diferencia cuando realmente existe. Por ejemplo, si $\beta = 0.20$, esto significa que hay un 20% de probabilidad de no rechazar H_0 cuando es falsa. La potencia de la prueba, probabilidad de detectar un efecto cuando realmente existe, sería 0.80

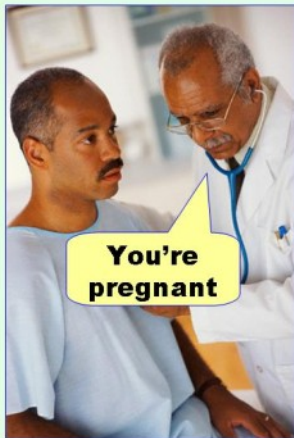
Supongamos que estamos evaluando la efectividad de un nuevo medicamento.

- Hipótesis nula H_0 : El medicamento no tiene efecto ($\mu = 0$).
- Hipótesis alternativa H_1 : El medicamento tiene un efecto ($\mu \neq 0$).

Error de tipo I: Si el medicamento no tiene ningún efecto pero el estudio concluye que sí lo tiene, hemos cometido un error de tipo I. Esto podría llevar a la aprobación y uso de un medicamento ineficaz

Error de tipo II: Si el medicamento tiene un efecto, pero el estudio concluye que no lo tiene, hemos cometido un error de tipo II. Esto podría llevar a la no aprobación de un medicamento potencialmente beneficioso

Type I error
(false positive)



Type II error
(false negative)



- **Inversamente proporcionales:** Reducir α (haciendo la prueba más conservadora y menos propensa a rechazar H_0) generalmente aumenta β (haciendo la prueba más propensa a no detectar un efecto cuando realmente existe), y viceversa. Los errores de tipo I y de tipo II no se pueden comentar simultáneamente:
 - El error de tipo I solo puede darse si H_0 es correcta
 - El error de tipo II solo puede darse si H_0 es incorrecta
- **Tamaño de la muestra:** Aumentar el tamaño de la muestra puede reducir ambos tipos de errores, incrementando la precisión de la prueba

La siguiente tabla refleja la relación entre los dos tipos de errores en relación con la decisión del contraste y la verdadera situación en la población:

	Verdadera Situación: H_0 correcta	Verdadera Situación: H_0 incorrecta
No rechazar H_0	Sin error ($1 - \alpha$)	Error de Tipo II (β)
Rechazar H_0	Error de Tipo I (α)	Sin error ($1 - \beta = \text{potencia}$)

Es importante notar que, si todo lo demás no cambia, entonces la potencia del contraste disminuye cuando:

- La diferencia entre el valor supuesto para el parámetro y el valor real disminuye
- La variabilidad de la población aumenta
- El tamaño muestral disminuye

- El contraste para la media de una población normal con varianza conocida es un procedimiento estadístico utilizado para determinar si la media de una población difiere de un valor específico (hipótesis nula)
- El parámetro de estudio es la media de la variable aleatoria: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Distintas opciones de hipótesis:
 - Hipótesis nula: $H_0: \mu = \mu_0$ (La media de la población es igual a μ_0)
 - Tenemos varias opciones para la hipótesis alternativa:
 - $H_1: \mu \neq \mu_0$ (Contraste bilateral)
 - $H_1: \mu > \mu_0$ (Contraste unilateral derecho)
 - $H_1: \mu < \mu_0$ (Contraste unilateral izquierdo)

- Nivel de significación α
- El estadístico de prueba se calcula utilizando la distribución Normal estándar $Z \sim N(0, 1)$, dado que la varianza (σ^2) es conocida. La fórmula para el estadístico de prueba es:

$$Z = \frac{\bar{\mathbf{X}} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

donde $\bar{\mathbf{X}}$ es el estadístico media muestral

- Calculamos el valor observado del estadístico:

$$z = \frac{\bar{\mathbf{x}} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

donde $\bar{\mathbf{x}}$ es la media muestral calculada con la muestra concreta

- Calculamos el $p - valor$ como sigue:
 - Contraste bilateral: $p - valor = P(|Z| \geq |z|)$
 - Contraste unilateral derecho: $p - valor = P(Z \geq z)$
 - Contraste unilateral izquierdo: $p - valor = P(Z \leq z)$
- Si esta probabilidad es menor o igual que el valor de referencia α entonces, rechazamos la hipótesis nula en favor de la alternativa.

Otra forma de plantear el contraste de hipótesis es determinando el rechazo de H_0 . Para ello, debemos comparar el valor del estadístico Z con los valores críticos de la distribución Normal estándar.

- Para un contraste bilateral (dos colas): Rechaza H_0 si $|z| > z_{\alpha/2}$
- Para un contraste unilateral derecho (una cola): Rechaza H_0 si $z > z_{\alpha}$
- Para un contraste unilateral izquierdo (una cola): Rechaza H_0 si $z < -z_{\alpha}$

Aquí, z_{α} y $z_{\alpha/2}$ son los valores críticos (cuantiles) de la distribución Normal estándar correspondientes al nivel de significación α

Es decir, decidimos si rechazamos o no la hipótesis nula en función del valor del estadístico de prueba:

- Si su valor está en la región crítica, rechaza H_0
- Si su valor no está en la región crítica, no rechaces H_0

Supón que queremos probar si la edad media de los profesores de la URJC es igual a 50 años con una desviación estándar conocida de 10 años, y tienes una muestra de 36 observaciones con una media muestral de 52.

Contraste de hipótesis para la media de una población Normal con varianza desconocida

- Cuando la varianza poblacional es desconocida, se utiliza la desviación estándar muestral (S) y el estadístico de prueba se basa en la distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

donde \bar{X} es el estadístico media muestral

- Calculamos el valor observado del estadístico en base a la muestra concreta

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$$

En función del tipo de contraste, se calculará el $p - valor$

- $H_1: \mu \neq \mu_0$ (Contraste bilateral), $p - valor = P(|T_{n-1}| > |t|)$
- $H_1: \mu > \mu_0$ (Contraste unilateral derecho), $p - valor = P(T_{n-1} > t)$
- $H_1: \mu < \mu_0$ (Contraste unilateral izquierdo), $p - valor = P(T_{n-1} < t)$

Aquí, T_{n-1} es una variable aleatoria con una distribución t de Student con $n - 1$ grados de libertad.

La decisión asociada al contraste es:

- Si el $p - valor \leq \alpha$, rechazar H_0
- Si el $p - valor > \alpha$, no rechazar H_0

Supón que una empresa quiere verificar si el tiempo promedio de entrega de sus pedidos es mayor de 30 minutos. Toma una muestra aleatoria de 16 entregas y encuentra que el tiempo promedio de entrega es de 32 minutos con una desviación estándar muestral de 4 minutos. Realiza un contraste de hipótesis con un nivel de significación del 0.05 para ver si el tiempo promedio de entrega es mayor de 30 minutos.

- Cuando se desea comparar las medias de dos muestras independientes asumiendo que los datos siguen una distribución normal, se puede usar el contraste de hipótesis paramétrico conocido como la prueba t de Student para muestras independientes
- Este método es robusto y se basa en suposiciones claras acerca de la normalidad de las distribuciones subyacentes:
 - Las dos muestras son independientes
 - Los datos de cada muestra se distribuyen normalmente (con n grande, por el TCL, esto se cumplirá)
 - Las varianzas poblacionales son desconocidas, pero se pueden asumir iguales para una versión específica del test t (si esta suposición es razonable).

- Supongamos dos m.a.s. independientes con medias, desviaciones típicas y tamaño muestral igual a: \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , s_1^2 , s_2^2 , n_1 y n_2 , respectivamente.
- Formulamos las hipótesis:
 - Hipótesis nula H_0 : Las medias de las dos poblaciones son iguales $\mu_1 = \mu_2$
 - Hipótesis alternativa H_1 Las medias de las dos poblaciones son diferentes $\mu_1 \neq \mu_2$
- Consideramos un nivel de significancia estadística α

- Calculamos el estadístico muestral, en este caso

$$t = \frac{\bar{\mathbf{x}}_1 - \bar{\mathbf{x}}_2}{SE}$$

donde:

$$SE = \sqrt{S_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}$$

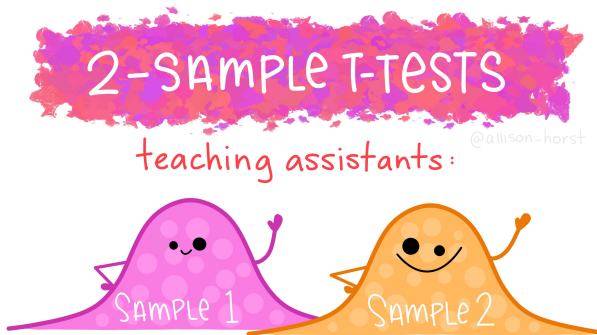
siendo S_p la desviación típica combinada:

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- Para un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ y grados de libertad $df = n_1 + n_2 - 2$, buscamos el valor crítico $T_{df, 1-\alpha/2}$ para la distribución t de Student para una prueba de dos colas.
- Comparamos el valor del estadístico t calculado con las muestras con el valor crítico:
 - Si $|t| > T_{df, 1-\alpha/2}$, rechazamos H_0
 - Si $|t| \leq T_{df, 1-\alpha/2}$, no rechazamos H_0

El t -test de forma gráfica (¡y divertida!) gracias a las ilustraciones de Allison Horst:

https://twitter.com/allison_horst/status/1216411185240690688



Supongamos que un investigador quiere comparar la efectividad de dos métodos de enseñanza de matemáticas. Se seleccionan dos grupos de estudiantes al azar, uno para cada método. Después de un semestre, se mide el puntaje de un examen final de matemáticas.

Datos:

- Grupo A (Método 1):
 - Tamaño de la muestra (n_1) = 12
 - Puntajes: 85, 78, 92, 88, 75, 84, 90, 91, 83, 79, 87, 86
- Grupo B (Método 2):
 - Tamaño de la muestra (n_2) = 10
 - Puntajes: 82, 77, 85, 80, 79, 81, 83, 78, 82, 76

Consideramos un nivel de significancia $\alpha = 0.05$.

El contraste de hipótesis para la diferencia de proporciones se utiliza para determinar si hay una diferencia significativa entre las proporciones de éxito en dos grupos independientes.

Supongamos dos variables aleatorias X e Y que siguen una distribución binomial de parámetros p_1 y p_2 respectivamente.

Formulamos las hipótesis:

- Hipótesis nula H_0 : Las proporciones de las dos poblaciones son iguales $p_1 = p_2$
- Hipótesis alternativa H_1 : Las proporciones de las dos poblaciones son diferentes $p_1 \neq p_2$

Para comparar dos proporciones, partimos de dos muestras aleatorias de tamaños n_1 y n_2 .

- **Estimadores:** Si x e y son los “éxitos” en cada muestra, las proporciones muestrales son:

$$\hat{p}_1 = \frac{x}{n_1} \quad y \quad \hat{p}_2 = \frac{y}{n_2}$$

- **Hipótesis a contrastar** (con un nivel de significación α):
 - $H_0 : p_1 = p_2$ (Las proporciones poblacionales son iguales).
 - $H_1 : p_1 \neq p_2$ (Son distintas).

Para decidir sobre H_0 , calculamos un estadístico de prueba que, bajo H_0 , sigue una distribución conocida.

- **Estadístico Z:**

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}$$

- **Proporción combinada (\hat{p}):** El error estándar se calcula usando una proporción conjunta que asume que H_0 es cierta:

$$\hat{p} = \frac{\mathbf{x} + \mathbf{y}}{n_1 + n_2}$$

- Para valores grandes de n_1 y n_2 , la distribución de Z es $N(0, 1)$
- Para un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, buscamos el valor crítico $Z_{1-\alpha/2}$ para la distribución Normal
- Comparamos el valor del estadístico $Z = z$ calculado con el valor crítico:
 - Si $|Z| > Z_{1-\alpha/2}$, rechazamos H_0
 - Si $|Z| \leq Z_{1-\alpha/2}$, no rechazamos H_0

Supongamos que una empresa de marketing quiere evaluar la efectividad de dos campañas publicitarias diferentes (Campaña A y Campaña B) para atraer clientes. La empresa desea saber si hay una diferencia significativa en la proporción de clientes que responden positivamente a cada campaña.

- Campaña A:
 - Número de personas que recibieron la campaña: 500
 - Número de personas que respondieron positivamente: 75
- Campaña B:
 - Número de personas que recibieron la campaña: 600
 - Número de personas que respondieron positivamente: 120

Wasserman, L. (2013). *All of Statistics: a Concise Course in Statistical Inference*.

Spiegel, M., & Stephens, L. (2009). *Estadística–Serie Schaum. Mc Graw-Hill*.

Gomez Villegas, M. A. (2005). *Inferencia estadística*. Ediciones Díaz de Santos.

Canavos, G. C., & Medal, E. G. U. (1987). *Probabilidad y estadística* (p. 651). México: McGraw Hill.