Д/з к уроку №3.

① Найти собственные векторы и собственные значения для линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

Решение: 1. Найдем собственные значения оператора: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$(-1-\lambda)\cdot(6-\lambda) + 12 = 0 \Rightarrow (\lambda+1)(6-\lambda) = 12 \Rightarrow$

$6\lambda - \lambda^2 + 6 - \lambda - 12 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$D = 1 \quad \lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} \quad \lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 3$

2. Найдем собственный вектор:

$\begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Для $\lambda = 2$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 2x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3x_1 = 6x_2 \\ 2x_1 = -4x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_1 = -2x_2 \end{cases}$

Решением будет $\forall x_1$ и $x_2 \in R$, где $x_1 = -2x_2$

Для $\lambda = 3$ $\quad \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 6x_2 = 3x_1 \\ 2x_1 + 6x_2 = 3x_2 \end{cases}$

$\begin{cases} -4x_1 - 6x_2 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{2}x_2 \\ x_1 = -3/2\, x_2 \end{cases}$

Решением будет $\forall x_1$ и $x_2 \in R$, где $x_1 = -\frac{3}{2}x_2$.

Решением возьмем частный случай, где длина вектора $x=(x_1;x_2)$ равна 1, т.е.

$\sqrt{x_1^2+x_2^2}=1$ или $x_1^2+x_2^2=1$.

Для первого случая когда $x_1=-2x_2$ имеем:

$4x_2^2+x_2^2=1 \Rightarrow 5x_2^2=1 \quad x_2^2=\frac{1}{5} \quad x_2=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

таким образом имеем вектора при $\lambda=2$.

$\left(-\frac{2}{\sqrt5};\frac{1}{\sqrt5}\right),\left(\frac{2}{\sqrt5};-\frac{1}{\sqrt5}\right)$

при $\lambda=3 \quad x_1=-\frac{3}{2}x_2 \Rightarrow$

$\frac{9}{4}x_2^2+x_2^2=1 \Rightarrow \frac{13x_2^2}{4}=1 \quad x_2^2=\frac{4}{13} \quad x_{2\,1,2}=\pm\frac{2}{\sqrt{13}}$

в этом случае имеем вектора:

$\left(-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right),\left(\frac{3}{\sqrt{13}};-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

Ответ: собственные значения $\lambda_1=2 \quad \lambda_2=3$

собственные вектора $\left(-\frac{2}{\sqrt5};\frac{1}{\sqrt5}\right),\left(\frac{2}{\sqrt5};-\frac{1}{\sqrt5}\right)$,

$\left(-\frac{3}{\sqrt{13}};\frac{2}{\sqrt{13}}\right),\left(\frac{3}{\sqrt{13}};-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

2) Дан оператор поворота на $180°$, задаваемый матрицей $A=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$. Показать, что любой вектор является для него собственным.

Реш: Найдем собственные значения

$\begin{vmatrix}-1-\lambda&0\\0&-1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (\lambda+1)(\lambda+1)=0 \Rightarrow$

$\lambda_{1,2}=-1$.

Найдем собственный вектор оператора:

$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-x_1=-x_1\\-x_2=-x_2\end{cases}$

Решением системы будет $x_1\in R$
$x_2\in R$

т.е. любой вектор будет для оператора $A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ являться собственным.

(3.) Пусть линейный оператор задан матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$. Установить, является ли вектор $x=(1,1)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение: Найдем собственные значения:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)(3-\lambda)+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2-4\lambda+4=0 \Rightarrow (\lambda-2)^2=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=2$$

Найдем собственный вектор:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}x_1+x_2\\ -x_1+3x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_1\\ 2x_2\end{pmatrix}$$

подставим вместо $x_1=1$ и $x_2=1$ имеем:

$$\begin{pmatrix}1+1\\ -1+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 1\\ 2\cdot 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\end{pmatrix}$$ Равенство

верное $\Rightarrow$ вектор $(1,1)$ для оператора $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ собственный вектор.

Ответ: вектор $x=(1;1)$ является собственным для оператора $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$

(4) Пусть линейный оператор задан матрицей $A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. Установить, является ли вектор $x=(3,-3,-4)$ собственным вектором этого линейного оператора.

Решение: Найдем собственные значения

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -\lambda \cdot (-\lambda \cdot (3-\lambda)) - 3 \cdot (3 \cdot (3-\lambda)) = 0$$

$$\lambda^2 \cdot (3-\lambda) - 9 \cdot (3-\lambda) = 0$$

$$3\lambda^2 - \lambda^3 - 27 + 9\lambda = 0$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 27\lambda - 27 + 6\lambda^2 - 36\lambda + 54 = 0$$

$$(\lambda-3)^3 + 6\lambda^2 - 36\lambda + 54 = 0$$

$$\frac{(\lambda-3)^3}{6} + \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

$$\frac{(\lambda-3)^3}{6} + (\lambda-3)^2 = 0 \quad (\lambda-3)^3 + 6(\lambda-3)^2 = 0$$

$$(\lambda-3)^2 \cdot (\lambda - 3 + 6) = 0 \Rightarrow (\lambda-3)^2 \cdot (\lambda+3) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = 3 \quad \lambda_3 = -3.$$

Проверим наш вектор: при $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -12 \end{pmatrix}$$

при $\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -12 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Ответ: вектор $x = (3, -3, -4)$ для оператора $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ не является собственным.