1) Исследовать на линейную зависимость:

$f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = 1$, $f_3(x) = x+1$, $f_4(x) = x - e^x$

Решение: Выразим $f_4(x)$ через $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$

$f_4(x) = x - e^x = f_3(x) - f_2(x) - f_1(x)$, т. е. вектор $f_4(x)$ есть линейная комбинация векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ из чего делаем вывод что $f_4(x)$, $f_3(x)$, $f_2(x)$ и $f_1(x)$ линейно зависимы.

2) Исследовать на линейную зависимость:

$f_1(x) = 2$, $f_2(x) = x$, $f_3 = x^2$, $f_4(x) = (x+1)^2$

Решение: $f_4(x) = x^2 + 2x + 1$, выразим $f_4(x)$ через $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$, получим

$f_4(x) = x^2 + 2x + 1 = f_3(x) + 2f_2(x) + f_1(x)$, т. е. вектор $f_4(x)$ есть линейная комбинация векторов $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ из чего следует, что векторы $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ линейно зависимы.

(3) Найти координаты вектора $x = (2, 3, 5) \in R^3$ в базисе $b_1 = (0, 0, 10)$, $b_2 = (2, 0, 0)$, $b_3 = (0, 1, 0)$

Решение:

$$x = b_2 + 3 b_3 + \frac{1}{2} b_1$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; 1; 3\right)$

(5) Установить, является ли линейным подпространством:

а) совокупность всех векторов трехмерного пространства, у которых по крайней мере одна из первых двух координат равна нулю;

Реш.: пусть исходные вектора принимают вид $(0; a; b)$ или $(0; 0; d)$. Подмножество этих векторов будет подпространством линейного пространства V тогда и только тогда, когда для любых его элементов выполняется:

$$(0; a; b) + (0; 0; d) \in L \text{ и } \alpha \cdot (0; a; b) \in L.$$

Проверим: $(0; a; b) + (0; 0; d) = (0; a; b+d) \in L$ и $\alpha \cdot (0; a; b) = (0; \alpha a; \alpha b) \in L$ и $\alpha \cdot (0; 0; d) = (0; 0; \alpha d) \in L$. следовательно подмножество векторов вида $(0; 0; d)$ и $(0; a; b)$ является подмножеством линейного пространства L.

б) все векторы, являющиеся линейными комбинациями данных векторов $\{u_1, u_2, \dots u_n\}$

пусть $u'_1 = \alpha_1 \cdot u_2$. Если вектора u_1 и $u_2 \in L$ то и вектор $u'_1 = \alpha_1 \cdot u_2 \in L$ из второго свойства линейности подмножества линейного множества L.

(4.) Найти координаты вектора $3x^2-2x+2 \in R^3$

а) в базисе $1, x, x^2$:

вектор $3x^2-2x+2$ запишем в виде $2-2x+3x^2$ тогда вектор в базисе $(1, x, x^2)$ запишем в виде $(2;-2;3)$

Ответ: $(2;-2;3)$

б) в базисе $x^2, x-1, 1$.

исходный вектор в базисе $(x^2, x-1, 1)$ запишется в виде $(3;-2;0)$

Ответ: $(3;-2;0)$

(1.1.) Найти скалярное произведение векторов $x, y \in R$:

а) $x=(0;-3;6)$, $y=(-4;7;9)$

$(x,y)=0\cdot(-4)+(-3)\cdot 7+6\cdot 9=-21+54=33$

б) $x=(7;-4;0;1)$, $y=(-3;1;11;2)$

$(x,y)=7\cdot(-3)+(-4)\cdot 1+0\cdot 11+1\cdot 2=-21-4+2=-23$

(1.2) Найти нормы векторов $(4;2;4)$ и $(12;3;4)$ и угол между ними:

Реш.: 1. Найдем манхэттенскую норму векторов:

$\|(4;2;4)\|=|4|+|2|+|4|=10$

$\|(12;3;4)\|=|12|+|3|+|4|=19$

2) найдем евклидову норму:

$\|(4;2;4)\|=\sqrt{4^2+2^2+4^2}=\sqrt{36}=6$

$\|(12;3;4)\|=\sqrt{12^2+3^2+4^2}=\sqrt{144+9+16}=\sqrt{169}=13$

$\cos\varphi=\frac{(x,y)}{\|x\|\cdot\|y\|}=\frac{4\cdot 12+2\cdot 3+4\cdot 4}{6\cdot 13}=\frac{48+6+16}{6\cdot 13}=\frac{2\cdot 35}{2\cdot 3\cdot 13}=\frac{35}{39}$

$\varphi=\arccos\frac{35}{39} \Rightarrow \varphi=26^\circ$

(1.3) Будет ли линейное пространство евклидовым, если за скалярное произведение принять:

а) произведение длин векторов

Реш: данное пространство будет только частным случаем евклидова пространства в котором угол между векторами равен πn, где $n \in N$.

б) утроенное обычное скалярное произведение векторов?

Реш. нет, т.к. $\cos\varphi$ угла между ними не может быть больше 1.

(1.4) Какие из нижеперечисленных векторов образуют ортонормированный базис в линейном пространстве R^3:

Реш: элементы x и y пр-ва ортогональны, если $(x,y)=0$. Ортонормированный если к тому же $(x,x)=1$ и $(y;y)=1$

б) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right), (0;0;1)$

$(x,y)=0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$(x,x)=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1.$

$(y,y)=1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = 1.$

Условие выполняется ортонормированного базиса:

в) $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right), \left(0; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), (0;0;1)$

$(x,y)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 = -\frac{1}{4} \neq 0$

Условие не выполнено:

г) $(1;0;0), (0;1;0), (0;0;1)$ - это ортонормированный базис i, j, k. в трехмерном пространстве:

Ответ: б) и г) - ортонормированные базисы.