Д/з к уроку №2.

1. Установить, какие произведение матриц AB и BA определены, и найти размерность полученных матриц:

а) A - матрица 4×2, B - матрица 4×2.

Для того, чтобы умножить одну матрицу на другую необходимо, чтобы матрицы имели следующую размерность $m \times n$ и $n \times s$, где $m = s$ либо $m \neq s$, т.е. кол-во столбцов в первой матрице должно быть равно кол-ву строк второй матрицы. Так как в данном случае $2 \neq 4$, то для данных матриц операция умножения не определена.

б) $A_{2\times5}$, $B_{5\times3}$. В данном случае кол-во столбцов в матрице A = кол-ву строк в B, т.е. операция умножения для этих матриц определена и результирующая матрица будет иметь размерность 2×3

в) $A_{8\times3}$, $B_{3\times8}$ $3 = 3 \Rightarrow$ операция умножения определена и размерность результирующей матрицы 8×8.

г) $A_{4\times4}$, $B_{4\times4}$ $4 = 4 \Rightarrow$ операция умножения определена и результат матрица 4×4

2. Найти сумму и произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+4 & -2+(-1) \\ 3+0 & 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot4+(-2)\cdot0 & 1\cdot(-1)+5\cdot(-2) \\ 4\cdot3+0\cdot0 & 3\cdot(-1)+0\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -11 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$$

3) Из закономерностей сложения и умножения матриц на число можно сделать вывод, что матрицы одного размера образуют линейное пространство. Вычислить ~~их~~ линейную комбинацию

$3A - 2B + 4C$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix}$$

$$-2B = -2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$4C = 4 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Тогда $3A - 2B + 4C =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 21 \\ 9 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & -16 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 11 & -5 \\ 9 & -12 \end{pmatrix}$

4) Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислить $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$.

Решение:

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 11 \\ 18 & 29 & 4 \\ 11 & 4 & 13 \end{pmatrix}$$

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 5 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 4 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 \\ 4 + (-2) \cdot 5 + 2 \cdot 3 & 1 + 4 + 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix}$$

Часть 2.

2.1. Вычислить определитель.

a) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin^2 x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

б) $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} \overset{I}{=} 4\cdot 5\cdot 9 = 180$

$\overset{II}{=} 4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 4\cdot 45 = 180$

в) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$

$= 45 - 48 - 2\cdot(36-42) + 3(32-35) = -3 + 12 - 9 = -12+12 = 0$

2.) Определитель матрицы A равен 4. Найти:

а) $\det(A^2) = \det(A\cdot A) = \det(A)\cdot\det(A) = 4\cdot 4 = 16$

б) $\det(A^T) = \det(A) = 4$

в) $\det(2A) = \det(2A_{n\times n}) = 2^n\cdot 4 = 2^{n+2}$

2.3) Доказать, что матрица A вырожденная:

$A = \begin{pmatrix} -2 & 7 & -3 \\ 4 & -14 & 6 \\ -3 & 7 & 13 \end{pmatrix}$

Реш: Матрица вырожденная если её det = 0.

$\det(A) = -2\begin{vmatrix} -14 & 6 \\ 7 & 13 \end{vmatrix} - 7\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} + (-3)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -14 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} =$

$= -2(-14\cdot 13 - 6\cdot 7) - 28\cdot 13 - 7\cdot 18 - 3\cdot(28 - 3\cdot 14) =$

$= \cancel{28\cdot 13} + \cancel{12\cdot 7} - \cancel{28\cdot 13} - \cancel{7\cdot 18} - \cancel{12\cdot 7} + \cancel{18\cdot 7} = 0$

Ответ: $\det(A) = 0 \Rightarrow$ Матрица A - вырожденная.

4.2) Найти ранг матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

ранг матрицы равен 2.

б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ ранг матрицы равен 3.

<u>Ответ:</u> а) 2 б) 3