Выполнение Д/З к уроку №4.

1. Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x_4 = -\frac{2}{3}$, тогда $-2x_3 + 3x_4 = 4 \Rightarrow -2x_3 - \frac{2}{3} \cdot 3 = 4$

$\Rightarrow -2x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = -3$

$-x_2 + x_3 + 5x_4 = -2 \Rightarrow x_2 = x_3 + 5x_4 + 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2 = -3 + 5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 2 \Rightarrow x_2 = -1 - \frac{10}{3} = -\frac{13}{3}$

$x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 - \frac{13}{3} + 3 + 2 \cdot \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

Проверка: $\begin{cases} 0 - 13/3 + 3 + 2 \cdot \frac{2}{3} = 0 \\ 2 \cdot 0 - 13/3 + 3 - 2/3 = -2 \\ 0 - 13/3 + 9 - 2/3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4/3 + 4/3 = 0 \\ -4/3 - 2/3 = -2 \\ 14/3 - 2/3 = 4 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ -2 = -2 \\ 4 = 4 \end{cases}$ Истина. Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -13/3$, $x_3 = -3$, $x_4 = -\frac{2}{3}$

2. Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -13 & -11 & -59 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -13 & -11 & -59 \\ 0 & 0 & -96 & -288 \end{vmatrix} \Rightarrow x_3 = \frac{288}{96} = 3$$

$-13x_2 - 11x_3 = -59 \Rightarrow -13x_2 = -59 + 11x_3 \Rightarrow -13x_2 = -59 + 33$

$-13x_2 = -26 \Rightarrow x_2 = 2$

$3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow 3x_1 - 2 + 3 = 4 \Rightarrow 3x_1 = 3 \quad x_1 = 1$

Ответ: $x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1 \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = -4 \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases}$

левые части I-го и II-го уравнения одинаковы и одновременно равны разным числам, что делает систему несовместной.

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 23 & 14 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{vmatrix}$

$\begin{cases} 5x_2 + 23x_3 = 14 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$ $x_2 = \frac{14 - 23x_3}{5}$

пусть $x_3 = c$ тогда $x_2 = \frac{14 - 23c}{5}$

$3x_1 + \frac{14 - 23c}{5} - 8c = -2 \Rightarrow 3x_1 = 8c - 2 - \frac{14 - 23c}{5}$

$3x_1 = \frac{40c - 10 - 14 + 23c}{5} = \frac{63c - 24}{5}$

Найдем частное решение:

пусть $c = 0$ тогда $x_1 = -\frac{24}{15}$, $x_2 = \frac{14}{5}$, $x_3 = 0$

проверка $\begin{cases} -\frac{24}{15} + 2 \cdot \frac{14}{15} + 5 \cdot 0 = 4 \\ 3 \cdot \left(-\frac{24}{15}\right) + \frac{14}{5} - 8 \cdot 0 = -2 \end{cases}$ $\begin{cases} -\frac{24}{15} + \frac{28 \cdot 3}{15} + 0 = 4 \\ -\frac{24}{5} + \frac{14}{5} = -2 \end{cases} \Rightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{60}{15} = 4 \\ -\frac{10}{5} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4 \\ -2 = -2 \end{cases}$ Истина.

Общее решение системы:

$x_1 = \frac{63c - 24}{5}$; $x_2 = \frac{14 - 23c}{5}$; $x_3 = c$

Частное решение системы:

$x_1 = -\frac{24}{15}$, $x_2 = \frac{14}{5}$, $x_3 = 0$

3) Проверить на совместность и выяснить, сколько решений будет иметь система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей:

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow 2x_4 = 1$$

$$x_4 = \frac{1}{2}$$

$$3x_3 + 0 \cdot x_4 = 4 \Rightarrow x_3 = \frac{4}{3}$$

$$5x_2 + \cdot 0x_3 + x_4 = 2 \Rightarrow 5x_2 + \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{3}{10}$$

$$x_1 + 3 \cdot \frac{3}{10} - 2 \cdot \frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow x_1 = 3 - 2 + \frac{8}{3} - \frac{9}{10} = \frac{83}{30}$$

система совместна и т.к. $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \hat{A} = n$ система имеет единственное решение:

$$x_1 = \frac{83}{30},\ x_2 = \frac{3}{10},\ x_3 = \frac{4}{3},\ x_4 = \frac{1}{2}$$

Проверим: $x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 3$

$$\frac{83}{30} + 3 \cdot \frac{3}{10} - 2\frac{4}{3} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow \frac{83}{30} + \frac{27}{30} - \frac{80}{30} + \frac{60}{30} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{30}{30} + \frac{60}{30} = 3 \Rightarrow 1 + 2 = 3$$ Истина

Ответ: $x_1 = \frac{83}{30},\ x_2 = \frac{3}{10},\ x_3 = \frac{4}{3},\ x_4 = \frac{1}{2}$.

4) Дана система линейных уравнений, заданная расширенной матрицей

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right)$$

Найти соотношение м/д параметрами a, b и c, при которых система является несовместной:

Решение: Определим ранг матрицы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 7 & 8 & 9 & c \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 4 & 5 & 6 & b \\ 0 & -3 & -6 & 4c-7b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & -3 & -6 & b-4a \\ 0 & -3 & -6 & 4c-7b \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 3 & 6 & 4a-b \\ 0 & -3 & -6 & 4c-7b \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 3 & 6 & 4a-b \\ 0 & 0 & 0 & 4c+4a-6b \end{array}\right)$$

Система будет несовместной, если параметры a, b и c не будут удовлетворять соотношению $4c+4a-6b=0$ или

$$a = \frac{6b-4c}{4}$$

2.1 Решить систему ур-ний методом Крамера:

1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -4+6 = 2$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} = -4+14 = 10 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 7-3 = 4$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{10}{2} = 5 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: $x_1 = 5$, $x_2 = 2$.

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 10 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$ $\quad \Delta = 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= 2(1+12) + (1+6) + 5(4-2) = 29+14 = 43$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 10 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 10(1+12) + 1\cdot(-2+3) + 5(-8-1) = 130+1-45 = 86$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 10 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot(-2+3) - 10(1+6) + 5(1+4) = 2-70+25 = -43$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+8) + (1+4) + 10(4-2) = 18+5+20 = 43$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{86}{43} = 2 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{43}{43} = -1$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{43}{43} = 1$$

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1$

2.2) Найти L-матрицу LU-разложения для матрицы коэффициентов:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix}$

Решение: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 9 & 12 \\ 3 & 26 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 20 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

[Далее решим систему: $Ly = b$]

Ответ: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 18 & 29 & 18 \\ 4 & 22 & 53 & 33 \end{pmatrix}$ $\qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 29 & 1 \end{pmatrix}$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 15 & 23 & 6 \\ 0 & 18 & 45 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 87 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$$

Ответ: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 29 & 1 \end{pmatrix}$