Выполнение Д/З к уроку №4.

①. Случайная непрерывная величина А имеет равномерное распределение на промежутке [200, 800]. Найдите ее среднее значение и дисперсию.

Реш: Для непрерывной случайной величины имеем для матожидания и дисперсии следующие формулы:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{200+800}{2} = 500$$

$$D(x) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(800-200)^2}{12} = \frac{600^2}{12} = 30{,}000$$

Ответ: $M(x) = 500$

$D(x) = 30{,}000$

(2) О случайной непрерывной равномерно распределенной величине В известно, что ее дисперсия равна 0,2. Можно ли найти правую границу величины В и ее среднее значение зная, что левая граница равна 0,5?

Реш: запишем формулы для среднего и дисперсии $M(X) = \frac{a+b}{2}$ $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

где $a = 0,5$ $D(X) = 0,2$, тогда

$0,2 = \frac{(b-0,5)^2}{12} \Rightarrow (b-0,5)^2 = 2,4 \Rightarrow b = \sqrt{2,4} - 0,5 \Rightarrow$

$\Rightarrow b = 2,05$, тогда

$M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{0,5+2,05}{2} = 1,27.$

Ответ: $M(X) = 1,27.$

(3) Непрерывная случайная величина X распределена нормально и задана плотностью распределения $f(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x+2)^2}{2\cdot 16}}$. Найти: $M(X)$, $D(X)$, σ.

Запишем формулу для функции плотности нормально распределенной случайной величины

$f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, ~~то~~ легко видеть что в нашем случае $M(X) = a = -2$, $D(X) = \sigma^2 = 16$ и $\sigma = 4$.

Ответ: $M(X) = -2$

$D(X) = 16$

$\sigma = 4$

4) Рост взрослого населения города X имеет нормальное распределение. Причем средний рост равен 174 см, а среднее квадратическое отклонение равно 8 см. Какова вероятность того, что случайным образом выбранный взрослый человек имеет рост:

а) >182 см б) >190 см в) от 166 см до 190 см

г) от 166 см до 182 см д) от 158 см до 190 см

е) не выше 150 см или не ниже 190 см

ё) не выше 150 см или не ниже 198 см

ж) ниже 166 см.

Решение: с помощью линейного преобразования $\overset{*}{X} \triangleq \frac{X-m}{\sigma}$ нормальное распределение переведем в стандартное нормальное распределение $N(0;1)$ с функцией распределения $F_{\overset{*}{X}}(x) = \Phi(x)$ где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, и с помощью табличных значений решим задачу.

а) более 182 см

линейное преобразование $z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{182-174}{8} = 1$

$P(X > 1\sigma) = 0{,}1587$, т.е. вероятность, что случайно выбранный взрослый человек имеет рост больше чем 182 см составляет менее 0,1587

б) >190 см. $z = \frac{X-m}{\sigma} = \frac{190-174}{8} = 2$

$P(X > 2\sigma) = 0{,}0228$, т.е. вероятность - // - более чем 190 см составляет менее 0,0228

в) от 166 см до 190 см.

Вероятность того, что нормальная случайная величина X с параметрами m и σ примет значение из интервала $(\alpha;\beta)$, можно вычислить по формуле:

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

$\beta = 190$, $\alpha = 166$ тогда $P(\alpha < X < \beta) = \Phi(2) - \Phi(-1) = \Phi(2) - (-\Phi(1)) = \Phi(2) + \Phi(1) = 0{,}4772 + 0{,}3413 = 0{,}8185$, т.е. вероятность, что случайно выбранный взрослый человек имеет рост в промежутке от 166 см до 190 составляет 0,8185

г) от 166 до 182 см

$$P(-1\sigma < X < 1\sigma) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) + \Phi(1) = 0{,}3413 + 0{,}3413 = 0{,}6826$$

д) от 158 см до 190 см $\quad z_{158} = \frac{158 - 174}{8} = -2$, т.е.

$$P(-2\sigma < X < 2\sigma) = \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) + \Phi(2) = 0{,}4772 + 0{,}4772 = 0{,}9544,$$

т.е. вероятность что сл. выбранный человек имеет рост в промежутке от 158 см до 190 см составляет 0,9544.

е) не выше 150 см или не ниже 190 см. Так как

$$P((X < -3\sigma) \cup (X > 2\sigma)) = 1 - P(-3\sigma < X < 2\sigma) = 1 - (\Phi(2) - \Phi(-3)) = 1 - (\Phi(2) + \Phi(3)) = 1 - (0{,}4772 + 0{,}49865) = 0{,}02415,$$

т.е. вероятность что случайно выбранный человек имеет рост меньше 150 см или более 190 см равна 0,02415.

ё) менее 150 см или более 198 см. Так как
$P((X<-3\sigma)\cup(X>3\sigma)) = 1-P(-3\sigma<X<3\sigma) =$
$= 1-(\Phi(3)-\Phi(-3)) = 1-(\Phi(3)+\Phi(3)) =$
$= 1-(0{,}49865+0{,}49865) = 0{,}0027$, т.е. вероятность того что случайно выбранный человек (взрослый) будет иметь рост менее 150 см или более 198 см равна 0,0027.

ж) ниже 166 см $P(X<-1\sigma)$
$P(X<-1\sigma) = 1-P(-1\sigma<X<+\infty) =$
$= 1-(\underbrace{\Phi(+\infty)}_{\to 0{,}5}-\Phi(-1)) =$
$= 1-(0{,}5+\Phi(1)) = 1-(0{,}5+0{,}3413) = 1-0{,}8413 =$
$= 0{,}1587$, т.е. вероятность, что случайно выбранный взрослый человек меньше ростом чем 166 см равна 0,1587.

Ответ:
а) 0,1587
б) 0,0228
в) 0,8185
г) 0,6826
д) 0,9544
е) 0,02415
ё) 0,0027
ж) 0,1587

(5) На сколько σ (ср. кв. отклонений) отклоняется рост человека, равный 190 см, от мат ожидания роста в популяции, в которой $M(X)=178$ см и $D(X)=25$ кв. см?

Реш.: $D(X)=\sigma^2=25 \Rightarrow \sigma=5$

$$Z=\frac{X-M(X)}{\sigma}=\frac{190-178}{5}=\frac{12}{5}=2{,}4$$

Ответ: на 2,4σ