Выполнение Д/З к уроку №5.

① Известно, что генеральная совокупность распределена нормально со средним квадратическим отклонением, равным 16. Найти доверительный интервал для оценки мат. ожидания a с надежностью 0,95, если выборочная средняя $M = 80$, а объем выборки $n = 256$.

Решение: $\sigma = 16$ $\quad \bar{X} = 80$ $\quad n = 256$ $\quad \alpha = 5\%$

Доверительный интервал найдем по формуле:

$$\bar{X} \pm \frac{z_{\alpha/2} \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = 80 \pm \frac{1{,}96 \cdot 16}{\sqrt{256}} = 80 \pm \frac{1{,}96 \cdot 16}{16} = 80 \pm 1{,}96$$

($z_{\alpha/2}$ - по таблице $= 1{,}96$)

Ответ: $[78{,}04;\ 81{,}96]$

② В результате 10 независимых измерений некоторой величины X, выполненных с одинаковой точностью, получены опытные данные: 6.9, 6.1, 6.2, 6.8, 7.5, 6.3, 6.4, 6.9, 6.7, 6.1. Предполагая, что результаты измерений подчинены нормальному закону распределения вер-тей, оценить истинное значение величины X при помощи дов. интервала, покрывающего это значение с дов. вер-тью 0,95.

Решение: σ не известна → используем критерий Стьюдента по формуле: $\bar{X} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

($t_{\alpha/2}$ - по таблице при $(n-1)$ измерениях $= 2{,}262$)

тогда $\bar{X} = \frac{65{,}9}{10} = 6{,}59$ $\qquad \sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{1{,}829}{9} = 0{,}203$

Интервал: $\qquad \sigma = \sqrt{0{,}203} = 0{,}45$

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6{,}59 \pm 2{,}262 \cdot \frac{0{,}203}{\sqrt{10}} = 6{,}59 \pm 0{,}145 =$$

~~Ответ: $[6{,}445;\ 6{,}735]$~~

$$\bar{X} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6{,}59 \pm 2.262 \cdot \frac{0{,}45}{\sqrt{10}} = 6{,}59 \pm 0{,}32$$

Ответ: $[6{,}268;\ 6{,}91]$

③ Утверждается, что шарики для подшипников, изготовленные авт. станком, имеют ср. диаметр 17 мм. Используя односторонний критерий с $\alpha = 0{,}05$, проверить эту гипотезу, если в выборке из $n = 100$ шариков средний диаметр оказался равным 17.5 мм, а дисперсия известна и равна 4 кв.мм.

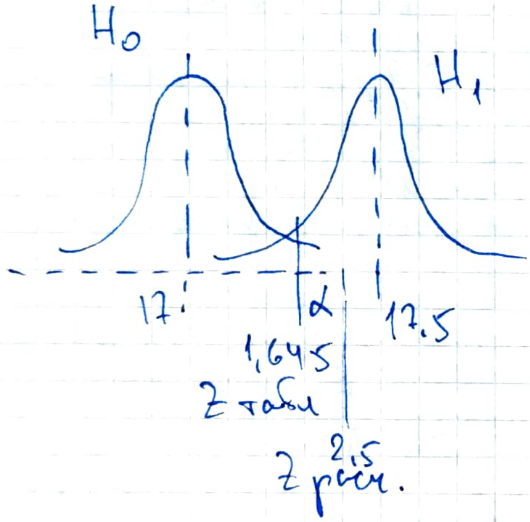
Реш: по условию задачи имеем:

$\bar{X}_0 = 17$ мм, $\alpha = 0{,}05$, $n = 100$ $D(\bar{X}) = 4$ кв.мм.

$\bar{X}_1 = 17{,}5$ мм

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{17{,}5 - 17}{2/\sqrt{100}} = \frac{0{,}5}{0{,}2} = 2{,}5$$

т.к. критерий односторонний по таблице для $\alpha = 0{,}05$ находим $z_{табл} = 1{,}645$.



Имеем $z_{таб} < z_{расч.}$ поэтому гипотеза H_0 с $M_0 = 17$ отвергается и принимается гипотеза H_1

④ Продавец утверждает, что средний вес пачки печенья составляет 200 гр. Из партии извлечена выборка из 10 пачек. Вес каждой пачки составляет: 202, 203, 199, 197, 195, 201, 200, 204, 194, 190. Известно, что их веса распределены нормально. Верно ли утверждение продавца, если учитывать, что доверительная вероятность равна 99%?

Реш: По условию: $n = 10$, $\alpha = 1\%$, $\bar{X}_1 = 200$

$$\bar{X}_0 = \frac{202+203+199+197+195+201+200+204+194+190}{n} = \frac{1985}{10} = 198{,}5$$

Примем за H_1 – утверждение продавца и H_0 – $\bar{X}_0 = 198{,}5$.

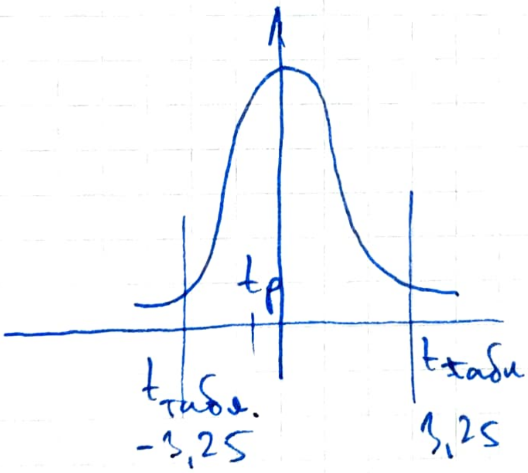
т.к. по условию задачи σ не задана будем использовать критерий Стьюдента.

Будем использовать двухсторонний критерий Стьюдента $t_{\alpha/2}$, где $\alpha = 1\%$ т.е. $\frac{\alpha}{2} = 0{,}005$ из таблицы $t_{табл} = 3{,}25$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{178{,}5}{9} = 19{,}83. \Rightarrow \sigma = 4{,}45.$$

Рассчитаем фактическое значение статистического критерия:

$$t_p = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{198{,}5 - 200}{4{,}45/\sqrt{10}} = -1{,}066$$



$|t_p| < |t_{табл}|$ следовательно принимаем гипотезу H_0 и утверждение продавца говорящего, что средний вес пачки равен 200 гр.

<u>Ответ:</u> утверждение продавца верно.