Д/З к уроку №3.

① Даны значения зарплат из выборки выпускников: 100, 80, 75, 77, 89, 33, 45, 25, 65, 17, 30, 24, 57, 55, 70, 75, 65, 84, 90, 150. Посчитать среднее арифметическое, среднее квадратичное отклонение, смещенную и несмещенную оценки дисперсий для данной выборки.

Реш: 1) $\bar{x} = \dfrac{\sum_i^n x_i}{n} = \dfrac{1306}{20} = 65,3$

2) $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \dfrac{(100-65,3)^2 + 14,7^2 + 9,7^2 + 11,7^2 + 23,7^2 + (-32,3)^2 +}{19}$

$+ \dfrac{(-20,3)^2 + (-40,3)^2 + (-0,3)^2 + (-48,3)^2 + (-35,3)^2 + (-41,3)^2 + (-8,3)^2 +}{19}$

$+ \dfrac{(-10,3)^2 + (4,7)^2 + 9,7^2 + (-0,3)^2 + 18,7^2 + 24,7^2 + 84,7^2}{19} =$

$= \dfrac{19002,2}{19} = 1000,1$ $\qquad S = \sqrt{1000,1} = 31,62$

3) смещенная оценка:

$D(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} = 950,11$

не смещенная

$D(x) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = 1001,1$

② В первом ящике находится 8 мячей, из которых 5 белые. Во втором ящике – 12 мячей, из которых 5 белых. Из первого ящика вытаскивают случайным образом два мяча, из второго – 4. Какова вероятность того, что 3 мяча белые?

Реш: Три белых шара собираем следующими способами:

	I ящ.	II ящ.
1 способ	0 бел	3 бел
2 способ	1 бел	2 бел
3 способ	2 бел	1 бел

1. способ:

$$P = \frac{C_3^2 \cdot C_5^0}{C_8^2} \cdot \frac{C_5^3 \cdot C_7^1}{C_{12}^4} =$$

где C_3^2 – кол-во способов собрать из 3 небелых 2 мяча,
C_5^0 – Кол-во способов собрать из 5 белых 0 мячей
C_8^2 – Кол-во всего исходов (из 8 мячей по 2 мяча).
аналогичные рассуждения для второго ящика
Итого имеем: $= \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{5!}{0!5!} \cdot \frac{2!6!}{8!} \cdot \frac{5!}{3!2!} \cdot \frac{7!}{6!} \cdot \frac{4!8!}{12!} =$

$$= \frac{4!\,5!\,7!}{2!\,12!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 7!}{2!\cdot 7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} = \frac{1}{66} = 0{,}015$$

2 способ: $P = \frac{C_3^1 \cdot C_5^1}{C_8^2} \cdot \frac{C_5^2 \cdot C_7^2}{C_{12}^4} = \frac{3!5!5!7!\cdot 2!6!4!8!}{2!4!2!3!2!8!5!12!} = \frac{5!7!6!}{2!2!12!} =$

$$= \frac{2!\cdot 2!\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot 5^2\cdot 6\cdot 7!}{2!\cdot 2!\cdot 7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} = \frac{4\cdot 4\cdot 5\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 8\cdot 11\cdot 2\cdot 6} = \frac{5}{22} = 0{,}23$$

3 способ: $P = \frac{C_3^0 \cdot C_5^2}{C_8^2} \cdot \frac{C_5^1 \cdot C_7^3}{C_{12}^4} = \frac{3!5!5!7!2!6!4!8!}{3!2!3!4!3!4!8!12!} =$

$$= \frac{4!\cdot 5\cdot 3!\cdot 4\cdot 5\cdot 3!\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7!}{4!\cdot 3!\cdot 3!\,7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12} = \frac{5\cdot 5}{9\cdot 11\cdot 2} = \frac{25}{198} = 0{,}13$$

Тогда полная вероятность:

$$P(\mathrm{I}\,сл + \mathrm{II}\,сл + \mathrm{III}\,сл) = 0{,}015 + 0{,}23 + 0{,}13 = 0{,}375$$

(3) На соревновании по биатлону один из трех спортсменов стреляет и попадает в мишень. Вер-ть попадания для первого спортсмена 0,9, для второго – 0,8, для третьего – 0.6. Найти вероятность, что выстрел произведен:
а) первым спортсменом. б) вторым спортсменом, в) третьим.

Реш: 1. Предположим, что выстрела еще не было, событие „выстрел точный" пока не наступило.
Рассмотрим три гипотезы H_1, H_2 и H_3.
H_1 – стрелял 1-ый спортсмен
H_2 – –//– 2-ой спортсмен
H_3 – –//– 3-ий спортсмен

По классическому определению вероятности:

$P(H_1) = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ $P(H_2) = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ $P(H_3) = \frac{1}{3}$

Рассмотрим зависимое событие: A – произведен точный выстрел. По условию задачи имеем 3 для каждого спортсмена (гипотезы):

$P_{H_1}(A) = 0{,}9$ $P_{H_2}(A) = 0{,}8$ $P_{H_3}(A) = 0{,}6$

По формуле полной вероятности, имеем:

$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A) =$

$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}9 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}6 = \frac{1}{3} \cdot 0{,}23 = 0{,}77$

Теперь, выстрел произведен и он точен, следовательно событие A – „точный выстрел" – произошло, тогда по формуле Байеса:

1. $P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{1/3 \cdot 0{,}9}{0{,}77} = 0{,}39$

2. $P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{1/3 \cdot 0{,}8}{0{,}77} = 0{,}35$

3. $P_A(H_3) = 1 - P_A(H_1) - P_A(H_2) = 0{,}26$, т.к. гипотезы H_1, H_2 и H_3 – образуют полную группу событий.

Ответ: а) 0,39
б) 0,35
в) 0,26

④ В университет на факультеты A и B поступило равное кол-во студентов, а на фак. C студентов поступило столько же, сколько на A и B вместе. Вероятность того, что студент факультета A сдаст первую сессию, равна 0,8. Для студента факультета B эта вер-ть равна 0,7, для студента фак. C – 0,9. Студент сдал первую сессию. Какова вер-ть, что он учился: а) на фак. A б) фак. B в) на фак. C.?

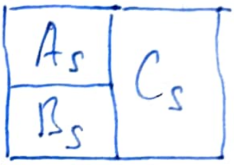
Реш. Рассмотрим три гипотезы H_1, H_2 и H_3:

H_1 – студент учится на фак. A.

H_2 – студент учится на фак. B.

H_3 – студент учится на фак. C.

т.к. фак. $C_S = A_S + B_S$ или



Вероятность выбрать случайного студента:

для фак. A: $P(H_1) = \frac{1}{4}$

для фак. B: $P(H_2) = \frac{1}{4}$

для фак. C: $P(H_3) = \frac{1}{2}$

Рассмотрим зависимое событие G – студент сдал экзамен. Тогда для каждой из гипотез по условию задачи:

$P_{H_1}(G) = 0,8$ – вероятность, что студент сдаст экзамен при условии, что он учится на факультете A. Также для двух других:

$P_{H_2}(G) = 0,7$ и $P_{H_3}(G) = 0,9$.

По формуле полной вероятности:

$$P(G) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(G) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(G) + P(H_3)\cdot P_{H_3}(G)$$

$= 0,25\cdot 0,8 + 0,25\cdot 0,7 + 0,5\cdot 0,9 = 0,825$ – вероятность, что наугад выбранный студент из любых трех факультетов сдаст экзамен 0,825.

Теперь по условию задачи студент сдал экзамен, т.е. событие G произошло. Тогда по формуле Байеса:

а) $P_G(H_1) = \dfrac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(G)}{P(G)} = \dfrac{0,25\cdot 0,8}{0,825} = 0,24$

б) $P_G(H_2) = \dfrac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(G)}{P(G)} = \dfrac{0,25\cdot 0,7}{0,825} = 0,21.$

в) т.к. гипотезы H_1, H_2 и H_3 образуют полную группу событий, то:

$$P_G(H_3) = 1-\left(P_G(H_1)+P_G(H_2)\right) = 1-0,45 = 0,55$$

<u>Ответ:</u> а) 0,24
б) 0,21
в) 0,55

(5) Устройство состоит из трех деталей. Для первой детали вероятность выйти из строя в первый месяц равна 0,1, для второй — 0,2, для третьей — 0,25. Какова вер-ть того что в первый месяц выйдут из строя: а) все детали б) только две детали в) хотя бы одна деталь г) от одной до двух деталей?

<u>Реш:</u> Пусть A_1 — событие выхода из строя первой детали, A_2 — //— второй детали, A_3 — третьей детали. События A_1, A_2, A_3 — независимые. Тогда а) {все ~~события~~ детали вышли из строя} это $P(A_1\cdot A_2\cdot A_3) =$
$= P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0,1\cdot 0,2\cdot 0,25 = 0,005.$

б) Только две детали вышли из строя. Это условие можно „собрать" следующим способом:

$$P(A) = P(A_1\cdot A_2\cdot \overline{A_3} + A_1\cdot \overline{A_2}\cdot A_3 + \overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3) =$$
$$= P(A_1\cdot A_2\cdot \overline{A_3}) + P(A_1\cdot \overline{A_2}\cdot A_3) + P(\overline{A_1}\cdot A_2\cdot A_3) =$$

$= 0{,}1\cdot 0{,}2\cdot(1-0{,}25) + 0{,}1\cdot(1-0{,}2)\cdot 0{,}25 + (1-0{,}1)\cdot 0{,}2\cdot 0{,}25 =$

$= 0{,}015 + 0{,}02 + 0{,}045 = 0{,}08$ – вероятность того, что выйдут из строя только две детали.

в) хотя бы одна деталь выйдет из строя, это = 1 – ни одна деталь не выйдет из строя или

$1 - P(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3) = 1 - P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) =$

$= 1-(1-0{,}1)\cdot(1-0{,}2)\cdot(1-0{,}25) = 1-0{,}54 = 0{,}46$

г) от одной до двух деталей выйдет из строя.

Две детали выйдут из строя мы рассчитали в пункте б) это 0,08. Рассчитаем что только одна деталь выйдет из строя:

$P(A_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3 + \bar{A}_1\cdot A_2\cdot\bar{A}_3 + \bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot A_3) = 0{,}1\cdot(1-0{,}2)\cdot(1-0{,}25) +$

$+ (1-0{,}1)\cdot 0{,}2\cdot(1-0{,}25) + (1-0{,}1)\cdot(1-0{,}2)\cdot 0{,}25 = 0{,}06 +$

$+ 0{,}135 + 0{,}18 = 0{,}375$

Тогда искомая величина это Σ вероятностей этих событий:

$P(A_1\cdot A_2\cdot\bar{A}_3 + A_1\cdot\bar{A}_2\cdot A_3 + \bar{A}_1\cdot A_2\cdot A_3 + A_1\cdot\bar{A}_2\cdot\bar{A}_3 + \bar{A}_1\cdot A_2\cdot\bar{A}_3 + \bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot A_3) =$

$= 0{,}08 + 0{,}375 = 0{,}455$

Работа над ошибками к заданию №2.

пункт 8) какова вероятность, что два мяча белые:

Такой вариант можно собрать следующими способами:

	I ящик	II ящик
1 способ	0б 0б	1б 1б
2 способ	0б 1б	0б 1б
2.2	1б 0б	0б 1б
2.3.	0б 1б	1б 0б
2.4.	1б 0б	1б 0б
3 способ	1б 1б	0б 0б.

1 способ: Для первого ящика: пусть A – вытаскиваем первый мяч не белый $P(A_1) = \frac{3}{10}$

Пусть A_2 – вытаскиваем второй мяч не белый при условии, что первый также не белый $P(A_2|A_1) = \frac{2}{9}$

Для второго ящ: B_1 – первый белый

$P(B_1) = \frac{9}{11}$ и B_2 – второй тоже белый при условии, что первый тоже был белый:

$P(B_2|B_1) = \frac{8}{10}$. Тогда для первого способа

$P(A_1 \cdot A_2|A_1 \cdot B_1 \cdot B_2|B_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{9}{11} \cdot \frac{8}{10} = 0,044$

2 способ. Рассчитаем один вариант и умножим на 4, т.к. варианты 2.1 ÷ 2.4 равновероятные

Для первого ящика: A_1 – первый не белый

$P(A_1) = \frac{3}{10}$ и A_2 – второй белый при условии A_1

$P(A_2|A_1) = \frac{7}{9}$

Для второго ящика: B_1 – первый не белый

$P(B_1) = \frac{2}{11}$ и B_2 при – вытаскиваем белый при условии B_1. $P(B_2|B_1) = \frac{9}{10}$

Тогда для варианта 2.1.

$P(A_1 \cdot A_2|A_1 \cdot B_2 \cdot B_2|B_1) = \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{9}{10} = 0,038(18)$

Тогда для 2-го способа: $4 \times 2.1 = 0,15(27)$

3 способ: Для первого ящика:

A_1 – первый белый. $P(A_1) = \frac{7}{10}$. A_2 – второй белый при условии A_1. $P(A_2|A_1) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Для второго ящика:

B_1 – первый небелый $P(A_1) = \frac{2}{11}$ и A_2 – второй не белый при условии B_1, $P(B_2|B_1) = \frac{1}{10}$

Тогда $P(A_1 \cdot A_2|A_1 \cdot B_1 \cdot B_2|B_1) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} =$

$= 0{,}0085$

Итого для вариантов, где 2 белых:

$P = P_{1 сп} + 4 \cdot P_{2.1 способ} + P_{3 способ} =$

$= 0{,}044 + 0{,}15(27) + 0{,}0085 = 0{,}205$

Ответ: пункт б) 0,205.