Análisis de Fourier

Series de Fourier

Para señales periódicas discretas en el tiempo. Sea una señal discreta periódica x[n] de periodo N.

$$x[n] = x[n+N] \quad \forall\, n$$

La representación en series de Fourier de $x[n]$ consta de N funciones exponenciales armónicamente relacionadas.

la Σ va para 1 periodo

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Tiempo discreto
n=0,1,2,...

Ecuación de Síntesis

Se denomina la Serie de Fourier en Tiempo Discreto (DTFS), Donde C_k

N: periodo
k: índice del coeficiente asociado a una frecuencia.

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

Ecuación de Análisis

C_k : Coeficientes de Fourier, $k = \{0,1,\ldots,N-1\}$

- Proporcionan una descripción de $x[n]$ en el dominio de la frecuencia.

- Para cada C_k hay un componente frecuencial asociado.

- $C_k \rightarrow$ Secuencia periódica.

- El espectro de una señal $x[n]$ periódica de periodo N es también una secuencia periódica de periodo N.

- Hallar la serie de Fourier de la señal $x[n] = \cos(\sqrt{2}\pi n)$

1. ¿la señal es periódica?

$\omega = \sqrt{2}\pi$

$\omega = 2\pi f$

$f = \frac{2}{\sqrt{2}}$ no es periódica, No se le aplica Fourier.

$\hookrightarrow f$ no puede ser racional

- Sea $x[n] = [\overset{0}{\underset{\uparrow}{1}}, \overset{1}{1}, \overset{2}{0}, \overset{3}{0}]$ periódica con $N = 4$

$$C_k = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$C_k = \frac{1}{4}\left((1)e^{\frac{-j2\pi k(0)}{4}} + (1)e^{\frac{-j2\pi k(1)}{4}} + (0)e^{\frac{-j2\pi k(2)}{4}} + (0)e^{\frac{-j2\pi k(3)}{4}}\right)$$

$$C_k = \frac{1}{4}\left(1 + e^{-j\pi k}\right)$$

$C_0 = \frac{1}{2}$; $\quad C_1 = \frac{1}{4}(1 - j)$; $\quad C_2 = 0$; $\quad C_3 = \frac{1}{4}(1 + j)$

Magnitud

$|C_0| = \frac{1}{2}$; $\quad |C_1| = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\quad |C_2| = 0$; $\quad |C_3| = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Fase

$\theta_{c_0} = 0; \theta_{c_1} = -\frac{\pi}{4}; \theta_{c_2} =$ No definido; $\theta_{c_3} = \frac{\pi}{4}$

- $x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right) \rightarrow$ ¿Es periódica?

$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{1}{6} \rightarrow$ Periodo fundamental es 6

$\cos(j\theta) = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$

$f = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$N = 6$

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

$$k = \{0, \dots, 5\}$$

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$$

$$\boxed{x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}}$$

¡Se pueden hallar directamente los coeficientes!

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{6}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{j2\pi n}{6}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{j2\pi n}{6}}$$

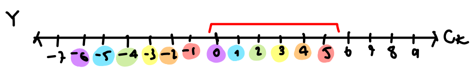
$$C_k = \frac{1}{2}$$

$-\frac{j\pi n}{3} = \frac{j2\pi kn}{6} \rightarrow k = -1$

↳ ¿C_{-1}?

$\frac{j\pi n}{3} = \frac{j2\pi kn}{6} \rightarrow k = 1$

↳ $C_1 = 1/2$



$C_{-1+N} = C_5$

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{6}\right) = \frac{1}{2} e^{\frac{j2\pi n}{6}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{j2\pi n}{6}}$$

$$C_{-1+N} = C_5$$

$$C_0 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \qquad C_5 = \frac{1}{2}$$

- Considere la señal periódica:

$$x[n] = [\dots, \overset{-4}{1}, \overset{-3}{0}, \underbrace{\overset{-2}{1}, \overset{-1}{2}, \underset{\uparrow}{\overset{0}{3}}, \overset{1}{2}, \overset{2}{1}}_{\text{se repite } N=6}, \overset{3}{0}, \overset{4}{1}, \dots] \quad N = ?$$

$$C_k = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5} x[n]e^{-j\frac{2\pi kn}{6}}$$

$$C_k = \frac{1}{6}\left[(3)e^{-\frac{j2\pi k(0)}{6}} + (2)e^{-\frac{j2\pi k(1)}{6}} + (1)e^{-\frac{j2\pi k(2)}{6}} + (0)(\dots) + (1)e^{-\frac{j2\pi k(4)}{6}} + (2)e^{-\frac{j2\pi k(5)}{6}}\right]$$

$$C_k = \frac{1}{6}\left(3 + 2e^{-\frac{j2\pi k}{6}} + e^{-\frac{j2\pi k}{3}} + e^{-\frac{j2\pi k(4)}{6}} + 2e^{-\frac{j2\pi k(5)}{6}}\right)$$

$$\boxed{C_k = \frac{1}{6}\left(3 + 4\cos\left(\frac{\pi k}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{2\pi k}{3}\right)\right)}$$

$$C_k = \frac{1}{6}\left(3 + 2e^{-\frac{j2\pi k}{6}} + e^{-\frac{j2\pi k}{3}} + e^{-\frac{j2\pi k(4)}{6}} + 2e^{-\frac{j2\pi k(5)}{6}}\right)$$

$$C_0 = \frac{1}{6}(3 + 2 + 1 + 1 + 2) = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

$$C_1 = \frac{4}{6}; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = \frac{1}{6}; \quad C_4 = 0; \quad C_5 = \frac{4}{6}$$

Relación de Parseval

Potencia

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2 = \overbrace{\sum_{k=0}^{N-1}|C_k|^2}^{\text{Para señales periódicas}}$$

- Verificar la relación de Parseval del ejemplo 4, calculando la potencia en el tiempo y la frecuencia.

$$x[n] = \{\dots, 1,0,1,2,\underset{\uparrow}{3},2,1,0,1,\dots\} \quad N = 6$$

$$C_0 = \frac{3}{2}; \quad C_1 = \frac{4}{6}; \quad C_2 = 0; \quad C_3 = \frac{1}{6}; \quad C_4 = 0; \quad C_5 = \frac{4}{6}$$

$$P = \frac{1}{6}\sum_{n=0}^{5}|x[n]|^2 = \frac{1}{6}(3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2) = \frac{19}{6}$$

$$P = \sum_{k=0}^{5}|C_k|^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{19}{6}$$

- Determine el espectro de la siguiente señal periódica.

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right) \qquad N = ?$$

$$N = 15$$

↳ mínimo común múltiplo

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$C_k = C_{1k} + C_{2k}$$

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{j2\pi}{3}n} + e^{\frac{-j2\pi}{3}n}\right)$$

$$C_{1k} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = 5,10 \\ 0, & \text{Otros casos} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{j2\pi kn}{N} = \frac{j2\pi}{3}n \\ \frac{k}{15} = \frac{1}{3} \\ k = 5 \end{gathered}}$$

$$x_2[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right) = \frac{1}{2j}\left(e^{\frac{j2\pi}{5}n} - e^{\frac{-j2\pi}{5}n}\right)$$

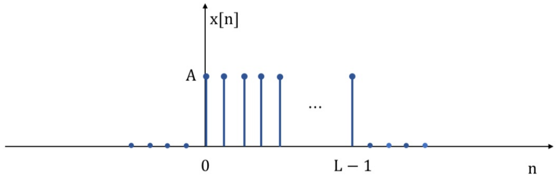
$$\boxed{x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}}$$

$$C_{2k} \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = 3 \\ \frac{-1}{2j} & k = 12 \\ 0 & k = eoc \end{cases}$$

$\frac{\pi k n}{\quad} = \frac{j2\pi n}{5} \rightarrow k = 3 \qquad C_3 = 1/2j$

$$C_k = C_{1k} + C_{2k} \quad C_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = 3 \\ \frac{1}{2}, & k = 5 \\ \frac{1}{2}, & k = 10 \\ -\frac{1}{2j}, & k = 12 \\ 0, & \text{Otro caso} \end{cases}$$

- **Ejemplo 7:**
  - Señal de onda cuadrada periódica



- Hallar los coeficientes de la serie de Fourier de la señal periódica cuadrada.

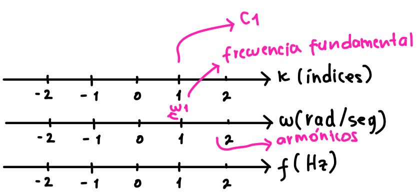
$$C_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{L-1} Ae^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

Señal de onda cuadrada periódica

$$C_k = \frac{A}{N}\sum_{n=0}^{L-1}\left(e^{\frac{-j2\pi k}{N}}\right)^n = \begin{cases} \frac{AL}{N}; & k = 0 \\ \frac{A}{N}\frac{1-e^{\frac{-j2\pi kL}{N}}}{1-e^{\frac{-j2\pi k}{N}}}; & k = 1,2,..N-1 \end{cases}$$

$\sum_{0}^{n} i = ih$

$$\sum_{i=p}^{n} r^{i} = \frac{r^p - r^{n+1}}{1-r}$$

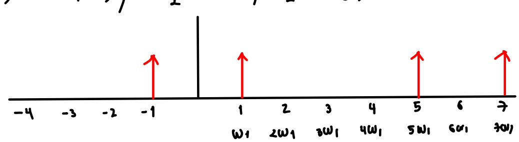


Componente en frec(0) = nivel DC

- $\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) = \frac{1}{2}e^{-jn\frac{\pi}{3}} + \frac{1}{2}e^{jn\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) - j\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + j\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$

$\frac{n\pi}{3} = \frac{j2\pi n}{N}$

$\hookrightarrow N = 6$



Transformada de Fourier de Señales NO Periódicas en Tiempo Discreto

$$X(\underline{\underline{\omega}}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

continua

- $X(\omega) \rightarrow$ Representa el contenido frecuencial de la señal x[n]

- $X(\omega) \rightarrow$ Es una descomposición de x[n] en sus componentes de frecuencia.

- Transformada de Fourier tiempo continuo $\rightarrow (-\infty, \infty)$.
- Transformada de Fourier tiempo discreto $\rightarrow (0,2\pi) \leftrightarrow (-\pi, \pi)$.

$$X(\omega + 2\pi k) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j(\omega+2\pi k)n} = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} = X(\omega)$$

$e^{-j2\pi} = 1$

- Consecuencia del hecho que el rango de frecuencia para cualquier señal discreta en el tiempo esté limitado a $(0,2\pi) \leftrightarrow (-\pi, \pi)$.
- Cualquier frecuencia fuera de intervalo es equivalente a una frecuencia dentro del intervalo.

Ecuación de Análisis: Transformada

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

Ecuación de Síntesis: Inversa

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$$

Densidad Espectral de Energía

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(\omega)|^2 d\omega$$

Relación de Parseval para señales aperiódicas en el tiempo de energía finita.

$$\left.\begin{aligned} X(\omega) &= |X(\omega)|e^{j\theta(\omega)} \\ \theta(\omega) &= \measuredangle X(\omega) \end{aligned}\right\} \textbf{Espectro}$$

Potencia → señales periódicas

Energía → señales no periódicas

Propiedades

autocorrelación

- $S_{xx}(\omega) = |X(\omega)|^2 \rightarrow$ Densidad espectral de energía
- $|X(\omega)| = |X(-\omega)| \rightarrow$ Simetría par
- $X(\omega)^* = X(-\omega) \rightarrow$ x[n] Real
- $\measuredangle X(-\omega) = -\measuredangle X(\omega) \rightarrow$ Simetría impar
- $S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega) \rightarrow$ x[n] Simetría par

- Determinar la densidad espectral de energía de la señal:

$$x[n] = a^n u[n], \qquad -1 < a < 1$$

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

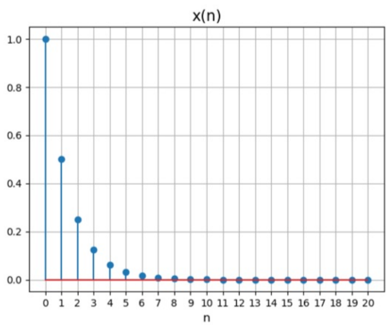
$$\left|ae^{-j\omega}\right| = |a| < 1$$

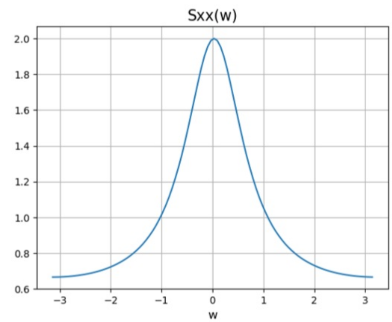
$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$DEE = |X(\omega)|^2$

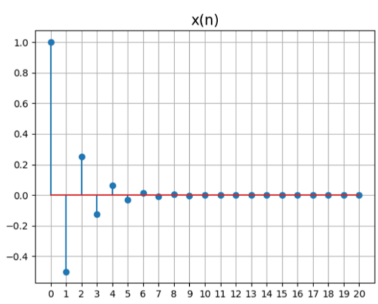
$$|X(\omega)|^2 = X(\omega)X(-\omega) = \frac{1}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{j\omega})}$$

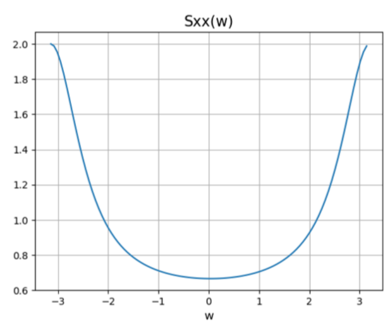
$$|X(\omega)|^2 = \frac{1}{1 - ae^{j\omega} - ae^{-j\omega} + a^2} = \frac{1}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$





$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad a = 0.5$$





$$x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad a = -0.5$$

Propiedades

- **Linealidad:**

$$x_1[n] \leftrightarrow X_1(\omega)$$

$$x_2[n] \leftrightarrow X_2(\omega)$$

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \leftrightarrow a_1X_1\omega + a_2X_2(\omega)$$

- $x[n] = a^{|n|}, \qquad -1 < a < 1$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n]$$

$$x_1[n] = \begin{cases} a^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

$$x_2[n] = \begin{cases} a^{-n}, & n < 0 \\ 0, & n \geq 0 \end{cases}$$

$$X_1(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$$

$$X_1(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(ae^{-j\omega}\right)^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\left|ae^{-j\omega}\right| = |a|\left|e^{-j\omega}\right| = |a| < 1$$

$$X_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}e^{-j\omega n}$$

$$X_2(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{-1} (ae^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} (ae^{j\omega})^{n}$$

$$X_2(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} - 1 = \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}$$

$$X_1(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \qquad X_2(\omega) = \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}$$

$$X(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1 - ae^{j\omega}}$$

$$X(\omega) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$

Relación Entre la Transformada de Fourier y Transformada Z

La transformada Z se define como:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}, \mathrm{ROC} \rightarrow r_2 < |z| < r_1$$

$$z = re^{j\,\omega} \rightarrow \text{Forma polar}$$

Sustituyendo

$$X(z)\,\Big|_{z=re^{j\,\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x[n]r^{-n}]\, e^{-j\,\omega n}$$

- $X(z)$ es la transformada de Fourier de la secuencia $x[n]r^{-n}$

$$X(z)\,\Big|_{z=e^{j\,\omega}} = X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x[n]r^{-n}]\;\; e^{-j\omega n}$$

La Transformada de Fourier puede ser vista como la Transformada Z de la secuencia evaluada en el círculo unitario.

Si $X(z)$ no converge en la región $|z| = 1$, la Transformada de Fourier no existe.

La existencia de la Transformada Z requiere que la secuencia $x[n]r^{-n}$ sea absolutamente sumable para algún valor de r. Es decir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]r^{-n}| < \infty$$

Si converge solo para valores de $r > r_0 > 1$, la Transformada Z existe, pero la Transformada de Fourier no existe.

Ejemplo 1:

$$x[n] = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}, \qquad -\infty < n < \infty$$

No tiene transformada Z

Tiene energía finita, su transformada de Fourier converge en el sentido cuadrático medio a la función discontinua $X(\omega)$.

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |X(\omega) - X_T(\omega)|^2 \, d\omega = 0$$

$$X(\omega)=\begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| < |\omega_c| < \pi \end{cases}$$

Conclusiones

- La existencia de la Transformada Z requiere que la ecuación se satisfaga para alguna región en el plano Z.
- Si la región contiene el círculo unitario, la Transformada de Fourier $X(\omega)$ existe.
- La existencia de la Transformada de Fourier, la cual está definida para señales de energía finita, no necesariamente asegura la existencia de la Transformada Z.

Propiedades de Simetría de la Transformada de Fourier

$$x[n] = x_R[n] + jx_i[n]$$

$$X(\omega) = X_R(\omega) + jX_i(\omega)$$

1. Sustituyendo $e^{-j\omega} = \cos\omega - j\sin\omega$
2. Sustituyendo $e^{j\omega} = \cos\omega + j\sin\omega$

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R[n]\ \cos(\omega n) + x_I[n] \sin(\omega n)]$$

$$X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R[n]\ \sin(\omega n) - x_I[n] \cos(\omega n)]$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\ e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] [\cos(\omega n) - j\sin(\omega n)]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_R[n]\ + jx_I[n]\ ) [\cos(\omega n) - j\sin(\omega n)]$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R[n]\ \cos(\omega n) - jx_R[n]\ \sin(\omega n)] + [jx_I[n]\ \cos(\omega n) + x_I[n]\ \sin(\omega n)]$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R[n]\ \cos(\omega n) + x_I[n]\ \sin(\omega n)] + j[-x_R[n]\ \sin(\omega n) + x_I[n]\ \cos(\omega n)]$$

Casos Especiales

- Si $x[n]$ es Real → $x_R[n] = x[n] \qquad x_I[n] = 0$

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\cos(\omega n)$$

$$X_I(\omega) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\sin(\omega n)$$

$$\boxed{X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [x_R[n]\ \cos(\omega n) + x_I[n]\ \sin(\omega n)] + j * [-x_R[n]\ \sin(\omega n) + x_I[n]\ \cos(\omega n)]}$$

Ya que $\cos(-\omega n) = \cos(\omega n)$ y $\sin(-\omega n) = -\sin(\omega n)$

$$X_R(-\omega) = X_R(\omega) \rightarrow \text{Par}$$

$$X_I(-\omega) = -X_I(\omega) \rightarrow \text{Impar}$$

$$X^*(\omega) = X(-\omega)$$

$$|X(\omega)| = |X(-\omega)| \rightarrow \text{Par}$$

$$\measuredangle X(-\omega) = -\measuredangle X(\omega) \rightarrow \text{Impar}$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{{X_R}^2(\omega) + {X_I}^2(\omega)} \qquad \measuredangle X(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)}\right)$$

- **Ejemplo 2:** $x[-n] = x[n]$

$$X_R(\omega) = x[0] + 2\sum_{n=1}^{\infty} x[n]\cos(\omega n) \quad \rightarrow \quad \text{Par}$$

impar → $x[-0] = -x[0] = 0$

$$X_I(\omega) = 0$$

$$x[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_R(\omega)\cos(\omega n)\, d\omega$$

- **Ejemplo 3:** $x[-n] = -x[n]$

$$X_R(\omega) = 0$$

$$X_I(\omega) = -2\sum_{n=1}^{\infty} x[n]\sin(\omega n)$$

$$x[n] = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_I(\omega)\sin(\omega n)\, d\omega$$

- Si $x_R[n] = 0 \quad x[n] = jx_I[n]$

impar · impar = par

$$X_R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I[n]\sin(\omega n)$$

impar · par = impar

$$X_I(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_I[n]\cos(\omega n)$$

$$x_I[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [X_R(\omega)\sin(\omega n) + X_I(\omega)\cos(\omega n)]d\omega$$

• Si x[n] impar $\rightarrow x_I[-n] = -x_I[n]$

$$X_R(\omega) = 2\sum_{n=1}^{\infty} x_I[n]\ \sin(\omega n) \qquad \text{(Par)}$$

$$X_I(\omega) = 0$$

$$x_I[n] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} X_R(\omega)\sin(\omega n)\,d\omega$$

• Si $x_I[n]$ es par $\rightarrow x_I[-n] = x_I[n]$

$$X_R(\omega) = 0$$

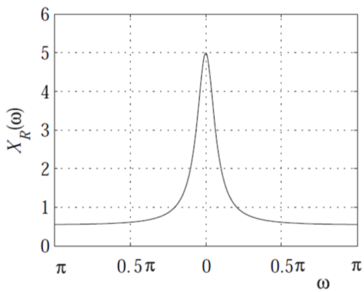
$$X_I(\omega) = x_I[0] + 2\sum_{n=1}^{\infty} x_I[n]\ \cos(\omega n) \quad \rightarrow \quad \text{Par}$$

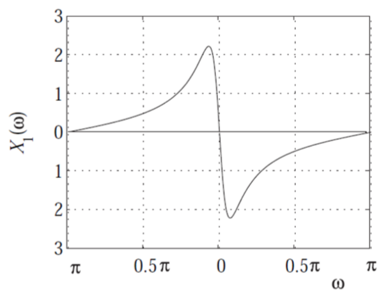
Ejemplo 4: Determine $X_R(\omega), X_I(\omega), |X(\omega)|$ y $\measuredangle X(\omega)$ para:

$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad -1 < a < 1$$

$$X(\omega) = \frac{1 - ae^{j\omega}}{(1 - ae^{-j\omega})(1 - ae^{j\omega})} = \frac{1 - a\cos\omega - ja\sin\omega}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$

$$X_R(\omega) = \frac{1 - a\cos\omega}{1 - 2a\cos\omega + a^2} \qquad X_I(\omega) = -\frac{a\sin(\omega)}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$



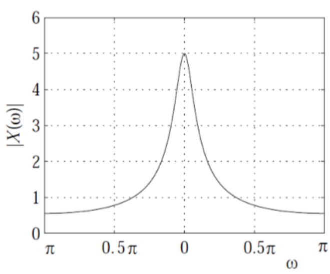


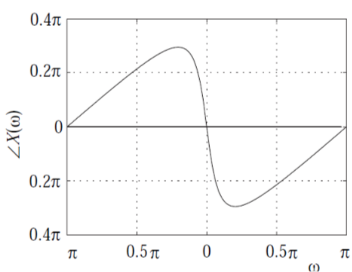
$$X(\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \qquad -1 < a < 1$$

$$|X(\omega)| = \sqrt{X_R{}^2(\omega) + X_I{}^2(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega + a^2}}$$

$$\measuredangle X(\omega) = -\tan^{-1}\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$$

La fase es una función impar





Desplazamiento Temporal

$$x[n] \leftrightarrow X(\omega)$$

$z = e^{-j\omega}$

$$x[n-k] \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega k}$$

$z^{-k} X(z)$

$$x[n-k] \leftrightarrow X(\omega)e^{-j\omega k} = |X(\omega)|e^{j[\measuredangle X(\omega) - \omega k]}$$

Reverso Temporal

$$x[-n] \leftrightarrow X(-\omega)$$

$$F\{x[-n]\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[l]\, e^{j\omega l} = X(-\omega)$$

Si $x[n]$ es Real:

$l = -n$

$$F\{x[-n]\} = X(-\omega) = |X(-\omega)|e^{j[\measuredangle X(-\omega)]} = |X(\omega)|e^{-j[\measuredangle X(\omega)]}$$

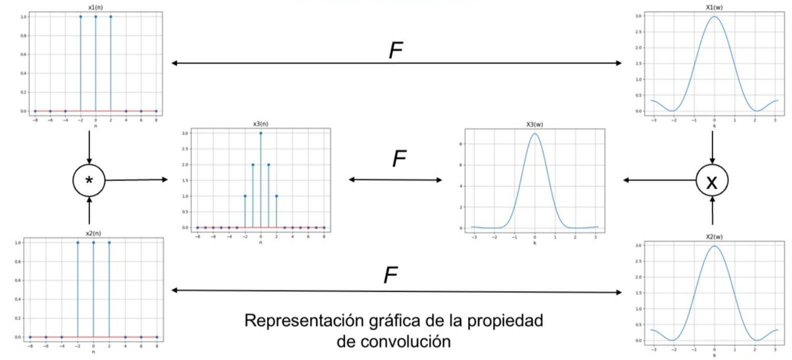
Convolución

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega)$$

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]\right]e^{-j\omega n}$$

Convolución



Representación gráfica de la propiedad de convolución

Ejemplo 1: Hallar x[n] usando la transformada de Fourier

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

$$x_1[n] = x_2[n] = \{1,\underset{\uparrow}{1},1\}$$

- Señal real y par:

$$X_R(\omega) = x[0] + 2\sum_{n=1}^{\infty} x[n]\cos(\omega n)$$

$$x_1[n] = [\overset{-1}{1}\ \overset{0}{1}\ \overset{1}{1}]$$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n) z^{-n} = 1\cdot z^1 + 1\cdot z^0 + 1\cdot z^{-1} = z^1 + 1 + z^{-1}$$

$$X_1(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_1[n] e^{-j\omega n} = 1e^{j\omega} + 1 + 1e^{-j\omega} = X_2(\omega)$$

$$X_1(\omega)X_2(\omega) = e^{j2\omega} + 2e^{j\omega} + 3 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}$$

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n] = [1,2,3,2,1]$$

	1	1	1	
1	1	1	1	1
2	1	1	1	1
3	1	1	1	1
	2	1		

$$x[n] = [1,2,3,2,1]$$

Señal real y par:

$$X_R(\omega) = x[0] + 2\sum_{n=1}^{\infty} x[n]\cos(\omega n)$$

$$X_1(\omega) = 1 + 2\cos\omega = X_2(\omega)$$

$$X(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega) = (1 + 2\cos\omega)^2$$

$$= 1 + 4\cos\omega + 4\cos^2\omega = 1 + 4\cos\omega + 2(\cos 2\omega + 1)$$

$$= 1 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega + 2$$

$$= 3 + 4\cos\omega + 2\cos 2\omega$$

$$X(\omega) = 3 + 2\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega}\right) + \left(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}\right)$$

$$X(\omega) = e^{j2\omega} + 2e^{j\omega} + 3 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}$$

Ordeno por el exponente

$$x[n] = \{1,2,\underset{\uparrow}{3},2,1\}$$

- **Ejemplo 2:** Halle la transformada de Fourier

$$x[n] = \{\overset{-4}{1},\overset{-3}{0},\overset{-2}{1},\overset{-1}{0},\underset{\uparrow}{\overset{0}{1}},\overset{1}{0},\overset{2}{1},\overset{3}{0},\overset{4}{1}\}$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = e^{-j4\omega} + e^{-j2\omega} + 1 + e^{j2\omega} + e^{j4\omega}$$

$$X(\omega) = 1 + 2\cos(2\omega) + 2\cos(4\omega)$$

Correlación

$$r_{x_1x_2}[n] \leftrightarrow S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)\, X_2(-\omega)$$

aquí no reflejamos la señal

$$r_{x_1x_2}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, x_2[k-n]$$

Densidad espectral de energía cruzada

$$S_{x_1x_2}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_{x_1x_2}[n] e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [x_1[k]\, x_2[k-n]]\, e^{-j\omega n}$$

Teorema de Wiener-Khintchine

$$r_{xx}(l) \leftrightarrow S_{xx}(\omega)$$

Desplazamiento en Frecuencia

$$x[n-k] \longleftrightarrow e^{-j\omega k} X(\omega)$$

$$e^{-j\omega_0 n} x[n] \longleftrightarrow x(\omega + \omega_0)$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

Modulación

$$x[n] \cos\omega_0 \leftrightarrow \frac{1}{2}\overbrace{[X(\omega+\omega_0) + X(\omega-\omega_0)]}^{\text{doble banda lateral}}$$

Teorema Ventaneo

$$x_3[n] = x_1[n]x_2[n] \leftrightarrow \; X_3(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\gamma)X_2(\omega-\gamma)d\gamma$$

multiplicación en el tiempo — convolución en frec.

Diferenciación

$$nx[n] \leftrightarrow j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$$

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}\right]$$

$$\boxed{nx(n) \leftrightarrow j\frac{dX(\omega)}{d\omega}}$$

$$\frac{dX(\omega)}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\frac{d}{d\omega}e^{-j\omega n} = -j\sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n]e^{-j\omega n}$$

$$\frac{j\,dX(\omega)}{d\omega} = j\left[-j\sum_{-\infty}^{\infty} n\,x[n]e^{-j\omega n}\right] = \sum_{-\infty}^{\infty} n\,x[n]e^{-j\omega n}$$

Ejemplo 3:

Si la transformada de Fourier de $x[n]$ es: $z = e^{j\omega}$

$$X(\omega) = \frac{1}{1-\underbrace{ae^{-j\omega}}_{z^{-1}}} \longrightarrow x[n] = a^n u[n]$$

solo se cumple en el círculo unitario

¿Cuál sería la transforma de Fourier de?

$x[n-k] = X(\omega)e^{j\omega}$

$$x[2n+1]$$

$$x[2n+1] = e^{j\omega}\frac{1}{1-ae^{j\omega}}$$

$$X'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[2n + 1]\, e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[2n]e^{-j\omega n}e^{j\omega}$$

$$X'(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-\frac{j\omega n}{2}}\, e^{j\frac{\omega}{2}}$$

Ejemplo 3:

$x[2n + 1])$
$X(\omega) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

$$X'(\omega) = X\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{\frac{j\omega}{2}}$$

$$X\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega/2}}$$

$$X'(\omega) = \frac{e^{\frac{j\omega}{2}}}{1 - ae^{\frac{-j\omega}{2}}}$$

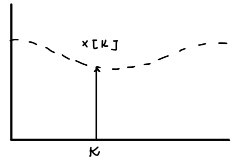
$x[n] = a^n u[n]$ $\qquad$ $x[2n+1] = a^{2n+1} u[2n+1]$

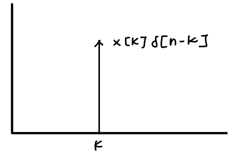
Algunas Transformadas de Fourier de Señales Aperiódicas

Señal $x[n]$	Espectro $X(\omega)$
$x[n] = \begin{cases} a^n & n \geq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases}$	$X(\omega) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$

$x[n] = \delta[n]$

$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} \delta[n] e^{-j\omega n} = 1$ $\qquad$ $x[n]\delta[n-k] = x[k]\,\delta[n-k]$





Propiedad	**Dominio Temporal**	**Dominio Frecuencia**
Notación	$x[n]$	$X(\omega)$
	$x_1[n]$	$X_1(\omega)$
	$x_2[n]$	$X_2(\omega)$
Linealidad	$a_1x_1[n] + a_2x_2[n]$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Desplazamiento temporal	$x[n-k]$	$e^{-i\omega k}X(\omega)$
Inversión temporal	$x[-n]$	$X(-\omega)$
Convolución	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Correlación	$r_{x_1x_2}(l) = x_1[l] * x_2[-l]$	$S_{x_1x_2}(\omega) = X_1(\omega)X_2(-\omega)$ $= X_1(\omega)\,X_2^*(\omega)$ (si $x_2[n]$ es real).

Propiedad	**Dominio Temporal**	**Dominio Frecuencia**
Teorema Wiener-Khintchine	$r_{xx}(l)$	$S_{xx}(\omega)$
Desplazamiento frecuencial	$e^{-i\omega_0 n}x[n]$	$X(\omega-\omega_0)$
Modulación	$x[n]\cos\omega_0 n$	$\frac{1}{2}X(\omega+\omega_0) + \frac{1}{2}X(\omega-\omega_0)$
Multiplicación	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\lambda)X_2(\omega-\lambda)d\lambda$
Diferenciación en el dominio frecuencial	$nx[n]$	$j\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Conjugación	$x^*[n]$	$X^*(-\omega)$
Teorema de Parseval	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]x_2^*[n]$	$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X_1(\omega)X_2^*(\omega)d\omega$

Análisis de Sistemas LTI en el Dominio de la Frecuencia

Respuesta por Convolución

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

Señal de Excitación

$$x[n] = Ae^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty, \quad \omega[-\pi, \pi]$$

entrada sinusoidal

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k][Ae^{j\omega(n-k)}]$$

$$y[n] = A\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-j\omega k}\right]e^{j\omega n}$$

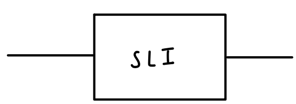
$\mathcal{F}\{h[k]\} = H(\omega)$

función de transferencia $\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}$

$$H(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, e^{-j\omega k}$$

$H(\omega)$

$$\boxed{y[n] = AH(\omega)e^{j\omega n}}$$



$H(\omega)$ existe si el sistema es estable

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

Transformada de Fourier como un caso especial de la transformada z en el círculo unitario.

- **Ejemplo 1:** Hallar la respuesta del sistema

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n], \quad x[n] = Ae^{\frac{j\pi n}{2}}, \quad -\infty < n < \infty$$

$z = 1e^{j\omega}$

$x[n] = Ae^{j\omega n}$

$$\boxed{y[n] = AH(\omega)e^{j\omega n}}$$

$$H(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} \rightarrow \omega = \frac{\pi}{2}$$

$$H(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}} = \frac{4}{5} - \frac{j2}{5}$$

Polar: $\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j0.4637}$

$$y[n] = A\left(\frac{2}{\sqrt{5}}e^{-j0.4637}\right)e^{j\frac{\pi n}{2}}$$

$$y[n] = \frac{2A}{\sqrt{5}}e^{j\left(\frac{\pi n}{2}-0.46\right)}$$

¡Único efecto es escalar amplitud y desplazar fase!

- **Ejemplo 2:** Si se modifica la entrada del ejemplo 1, ¿Cuál será la salida?

$\omega = \pi$

$$x[n] = Ae^{j\pi n}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi n}}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{y[n] = AH(\omega)e^{j\omega n}}$$

$$y[n] = \frac{2}{3}Ae^{j\pi n}$$

Ejemplo 3: Cuál es la respuesta del sistema si se tiene que:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$\boxed{y[n] = AH(\omega)e^{j\omega n}}$$

$$x[n] = \underbrace{10}_{x_1} - \underbrace{5\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)}_{x_2} + \underbrace{20\cos(\pi n)}_{x_3}$$

$\omega_1 = 0$ $\quad A_1 = 10$
$\omega_2 = \frac{\pi}{2}$ $\quad A_2 = 5$
$\omega_3 = \pi$ $\quad A_3 = 20$

Forma de la salida $Y[n] = AH(\omega)e^{jn\omega}$

$$H(\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega n}} \begin{cases} H_1(0) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \\ H_2\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}e^{-j0,46} \\ H_3(\pi) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$y[n] = 2(10) - \frac{2(5)}{\sqrt{5}}\sin\left(\frac{\pi n}{2} - 0.46\right) + \frac{2(20)}{3}\cos(\pi n - 0)$$

$$y[n] = 20 - \frac{10}{\sqrt{5}}\sin\left(\frac{\pi n}{2} - 0.46\right) + \frac{40}{3}\cos(\pi n)$$

$$H(\omega) = \sqrt{H_R{}^2(\omega) + H_I{}^2(\omega)}e^{j\tan^{-1}\left(\frac{H_I(\omega)}{H_R(\omega)}\right)}$$

Sistemas LTI con respuesta al impulso, real.

Ejemplo 4: Determine $H(\omega)$ de la siguiente ecuación en diferencias:

$\xrightarrow{\mathcal{F}}$
$x[n-1] \rightarrow e^{-j\omega}X(\omega)$
$x[n+1] \rightarrow e^{j\omega}X(\omega)$
$x[n] \rightarrow 1\ X(\omega)$

$$y[n] = \frac{1}{3}[x[n+1] + x[n] + x[n-1]]$$

no causal: toma una muestra del futuro

$$H(\omega) = \frac{1}{3}\left(e^{-j\omega} + 1 + e^{j\omega}\right)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega)$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{3}[e^{j\omega}X(\omega) + X(\omega) + e^{-j\omega}X(\omega)]$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{3}X(\omega)[e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}] \rightarrow \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{3}[e^{j\omega} - e^{-j\omega} + 1]$$

$$|H(\omega)| = \frac{1}{3}|1 + 2\cos\omega|$$

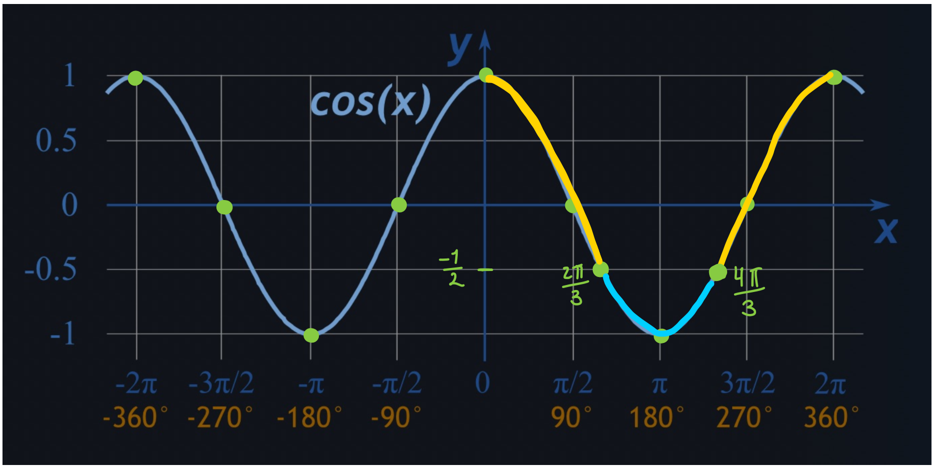
$$\tan^{-1}\left(\frac{H_i(\omega)}{H_R(\omega)}\right)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$$

por el valor absoluto

$1 + 2\cos\omega < 0 \rightarrow \omega = \pi$

$1 + 2\cos\omega \geq 0 \rightarrow \omega = 0$



- $1 + 2\cos\omega \geq 0 \rightarrow \cos\omega \geq -1/2 \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{3}$

  $\frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq 2\pi \longrightarrow \theta(\omega) = 0$

- $1 + 2\cos\omega < 0 \rightarrow \cos\omega < -1/2$

  $\frac{2\pi}{3} < \omega < \frac{4\pi}{3} \longrightarrow \theta(\omega) = \pi$

Ejemplo 5: Respuesta a entrada de señal aperiódica

↳ transformada no, sino producto de transformadas

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \qquad x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

$Y[n] = x[n] * h[n]$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \qquad X(\omega) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}$$

$$Y(\omega) = H(\omega) \cdot X(\omega)$$

$$Y(\omega) = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}}\right)$$

Ejemplo 6: Halle la densidad espectral del ejemplo anterior

$$\boxed{S_{yy}(\omega) = |Y(\omega)|^2 = |H(\omega)|^2 |X(\omega)|^2}$$

$$\boxed{|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega) = H(\omega)H(-\omega)}$$

¡conjugado en frecuencia!
≠ conjugado complejo

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}\right)}$$

$$|X(\omega)|^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}\right)\left(1 - \frac{1}{4}e^{j\omega}\right)}$$

$$S_{yy}(\omega) = \frac{1}{\left(\frac{5}{4} - \cos\omega\right)\left(\frac{17}{16} - \frac{1}{2}\cos\omega\right)}$$

Respuesta en Frecuencia de los Sistemas LTI

$$|H(\omega)|^2 = H(\omega)H^*(\omega)$$

$$= H(\omega)H(-\omega) = H(z)H(z^{-1})\Big|_{z=e^{j\omega}}$$

Transformada Z de la secuencia de autocorrelación

Ejemplo 7: Determine $|H(\omega)|^2$ para el siguiente sistema:

↳ densidad espectral de energía $S(\omega)_{HH}$

$$y[n] = -0.1y[n-1] + 0.2y[n-2] + x[n] + x[n-1]$$

separo Y[n] y X[n]

$$y[n] + 0.1y[n-1] - 0.2y[n-2] = x[n] + x[n-1]$$

$$Y(z) + 0.1Y(z)z^{-1} - 0.2Y(z)z^{-2} = X(z) + X(z)z^{-1}$$

$$Y(z)[1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}] = X(z)[1 + z^{-1}]$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}} = H(z)$$

$$\boxed{|H(\omega)|^2 = H(z)H(z^{-1})\Big|_{z=e^{j\omega}}}$$

$z = e^{j\omega}$

$$H(z)H(z^{-1}) = \left[\frac{1 + z^{-1}}{1 + 0.1z^{-1} - 0.2z^{-2}}\right]\left[\frac{1 + z}{1 + 0.1z - 0.2z^2}\right]$$

$$= \frac{2 + 2\cos\omega}{1.05 + 0.16\cos\omega - 0.4\cos(2\omega)}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{2 + 2\cos\omega}{1.05 + 0.16\cos\omega - 0.4\cos(2\omega)}$$

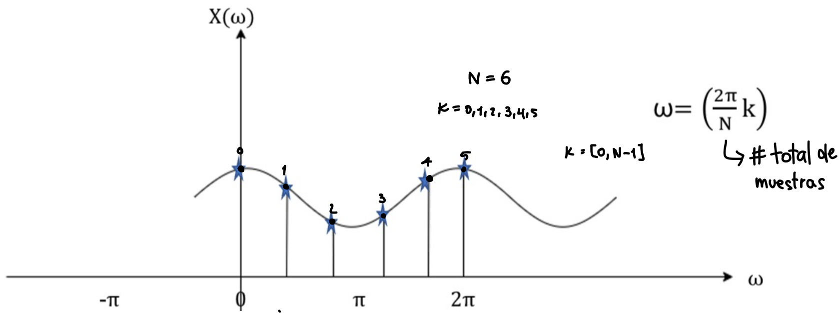
$$\boxed{\cos 2\omega = 2\cos^2\omega - 1}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{2(1 + \cos\omega)}{1.45 + 0.16\cos\omega - 0.8\cos^2\omega}$$

Transformada
Discreta de Fourier

Muestreo en el Dominio de la Frecuencia

Una señal aperiódica de energía finita tiene espectro continuo



$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$ y reemplazo $\omega = \frac{2\pi K}{N}$

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Esta puede ser subdividida en un número infinito de sumas, donde cada suma contiene N términos.

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) =$$

$$\dots + \sum_{n=-N}^{-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + \sum_{n=N}^{2N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} + \cdots$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{n=lN}^{lN+N-1} x[n] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Cambiando índice interior de la suma e intercambiando el orden de la suma:

$$X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n-lN] \right] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}} \qquad (*)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

• La señal $$x_p[n] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - lN]$$

Obtenida por repetición periódica de $x[n]$ cada N muestras, es periódica con periodo fundamental N.

Secuencia no periódica — $\boxed{\text{Discretizar el espectro}}$ → Secuencia periódica ← $\boxed{\text{Análisis de serie de Fourier}}$

Discretizar la transformada

Se puede expandir en series de Fourier:

$$x_p[n] = \sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$$

Con coeficientes de Fourier: ⟶ componentes espectrales

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

$$k = 0, 1, \dots N - 1$$

Comparando con (*), se concluye que:

$$C_k = \frac{1}{N} \underbrace{X\left(\frac{2\pi}{N} k\right)}_{\text{Transformada discreta}}$$

$$k = 0, 1, \dots N - 1$$

$$\boxed{X\left(\frac{2\pi}{N} k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[n - lN] \right] e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}}$$

Por lo tanto:

Aliasing → solapamiento

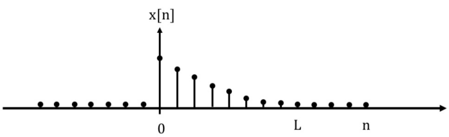
$$x_p[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right)e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$$

$$n = 0, 1, \ldots, N-1$$

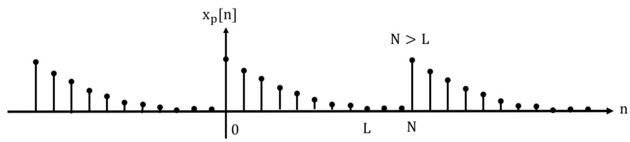
Reconstrucción de la señal periódica $x_p[n]$ a partir de las muestras del espectro $X(\omega)$.

No implica que se pueda recuperar $X(\omega)$ o $x[n]$ de las muestras (Necesario relacionar $x_p[n]$ con $x[n]$).

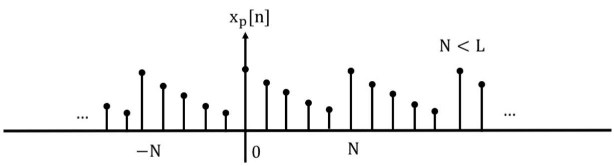
Secuencia Aperiódica $x[n]$ de Longitud L



Extensión Periódica para $N \geq L$ (Sin Aliasing)



Extensión Periódica para $N < L$ (Aliasing)

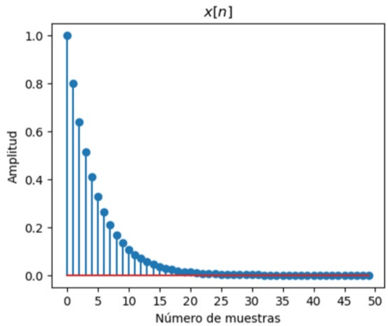


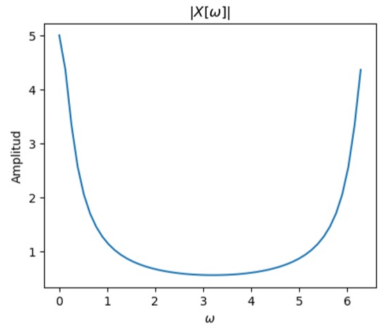
Cuando $x[n]$ tiene duración finita de tamaño $L \leq N$, entonces $x_p[n]$ es una repetición periódica de $x[n]$, donde $x_p[n]$:

x[n] es un pedacito de x_p[n]

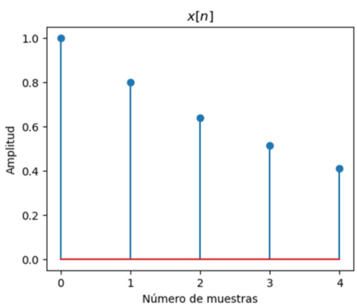
$$x_p[n] = \begin{cases} x[n] & 0 \leq n \leq L-1 \\ 0 & L \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

- **Ejemplo 1:** $x[n] = (0.8)^n u[n]$

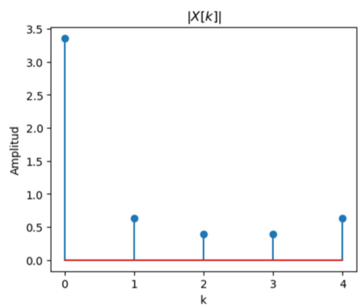




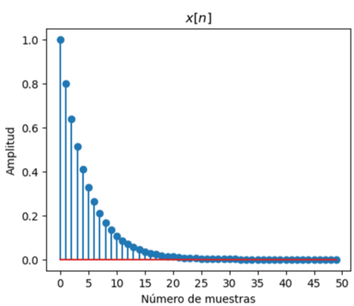
- **Ejemplo 1:** $X\left(\frac{2\pi k}{N}\right)$



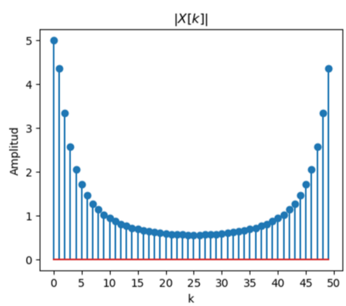
$N = 5$



$N = 5$



$N = 50$



$N = 50$

DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Ejemplo 2: Halle la DFT

$\omega = \frac{2\pi k}{N}$

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{1},2,1,0\}$$, $N = 4$

$k = 0, 1, 2, 3$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \qquad k = 0,1,2,\dots N-1$$

$$k = 0 \ \rightarrow X(0) = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{0} = 1 + 2 + 1 + 0 = 4$$

$$k = 1 \ \rightarrow X(1) = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-\frac{j2\pi n}{4}} = 1 + 2e^{-\frac{j\pi}{2}} + e^{-j\pi} = -j2$$

$$k = 2 \ \rightarrow X(2) = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-\frac{j2\pi 2n}{4}} = 1 + 2e^{-j\pi} + e^{-j2\pi} = 0$$

$$k = 3 \ \rightarrow X(3) = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{-\frac{j2\pi 3n}{4}} = 1 + 2e^{-\frac{j3\pi}{2}} + e^{-j3\pi} = j2$$

$$\therefore X(k) = \{4, -j2, 0, j2\}, \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

Ejemplo 3: Hallar la DFT

$$x_2[n] = \{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$$

$$X_2(k) = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{4}} = 1 + 2e^{-\frac{j\pi k}{2}} + 3e^{-j\pi k} + 4e^{-\frac{j3\pi k}{2}}$$

$X_2(0) = 10$
$X_2(1) = -2 + j2$
$X_2(2) = -2$
$X_2(3) = -2 - j2$

Ejemplo 4: Hallar la DFT

$$x_3[n] = \{\underset{\uparrow}{2},1,2,1\}$$

$$X_3(k) = \sum_{n=0}^{3} x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{4}} = 2 + e^{-\frac{j\pi k}{2}} + 2e^{-j\pi k} + e^{-\frac{j3\pi k}{2}}$$

$X_3(0) = 6$
$X_3(1) = 0$
$X_3(2) = 2$
$X_3(3) = 0$

Ejemplo 5: Hallar $x_4[n]$, si $X_4(k) = X_3(k)X_2(k)$

$$x_2[n] = \{\underset{\uparrow}{1},2,3,4\}$$

$$x_3[n] = \{\underset{\uparrow}{2},1,2,1\}$$

- $X_2(0) = 10$
- $X_2(1) = -2 + j2$
- $X_2(2) = -2$
- $X_2(3) = -2 - j2$

- $X_3(0) = 6$
- $X_3(1) = 0$
- $X_3(2) = 2$
- $X_3(3) = 0$

$$x_4[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{3} X_4(k)e^{\frac{j2\pi nk}{4}}, \qquad n = 0,1,2,3$$

$X_4(0) = 60$
$X_4(1) = 0$
$X_4(2) = -4$
$X_4(3) = 0$

$$x_4[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{3} X_4(k)e^{\frac{j2\pi nk}{4}}, \qquad n = 0,1,2,3$$

$$\frac{1}{4}\left[60(1) + (-4)e^{j\pi n}\right] \;\therefore\; \rightarrow$$

$$x_4[0] = 14, \quad x_4[1] = 16, \quad x_4[2] = 14, \quad x_4[3] = 16$$

Propiedades de la DFT

Recordemos:

- DFT:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- IDFT:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

- Notación:

$$x[n], y[n] \rightarrow X(k), Y(k)$$

- Linealidad:

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \rightarrow a_1X_1(k) + a_2X_2(k)$$

- Periodicidad:

$$x[n] = x[n+N] \;\rightarrow X(k) = X(k+N)$$

- Convolución circular:

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \rightarrow X_1(k)X_2(k)$$

- Correlación circular:

$$x[n] \otimes y^*[-n] \;\rightarrow X(k)Y^*(k)$$

- Desplazamiento Circular en el Tiempo:

$$\boxed{x([n-L])_N \rightarrow X(k)e^{-\frac{j2\pi kL}{N}}}$$

- Desplazamiento Circular en Frecuencia:

$$\boxed{x[n]\, e^{\frac{j2\pi Ln}{N}} \rightarrow X\big((k-L)\big)_N}$$

- Multiplicación de dos secuencias:

$$x_1[n]\, x_2[n] = \frac{1}{N}X_1(k) \otimes X_2(k)$$

- Parseval:

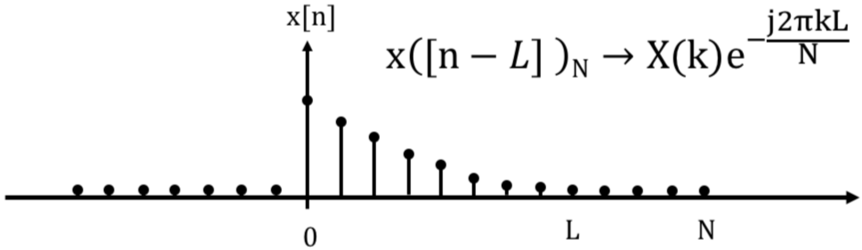
$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \rightarrow \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

Transformada de Fourier → Señales no discretas

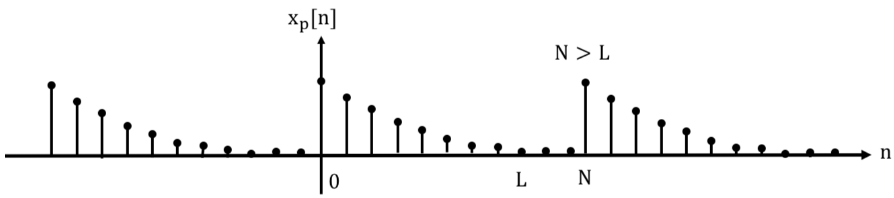
Convolución Circular

Secuencia Aperiódica $x[n]$ de Longitud L

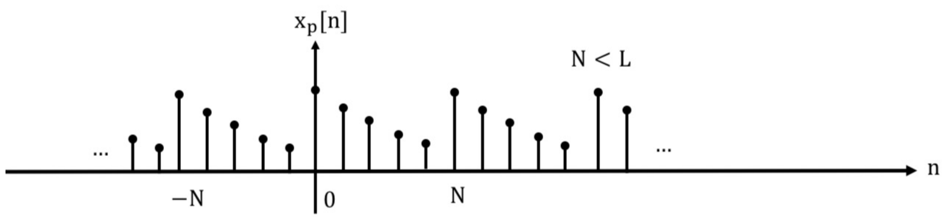
$$x([n-L]\,)_N \rightarrow X(k)e^{-\frac{j2\pi kL}{N}}$$



Extensión Periódica para $N \geq L$ (Sin Aliasing)



Extensión Periódica para $N < L$ (Aliasing)



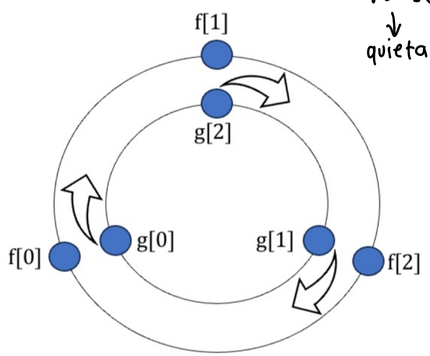
- Producto de dos DFTS es equivalente a una convolución circular en el tiempo.

$$x_1[n] \otimes x_2[n] \leftrightarrow X_1(k)X_2(k)$$

Secuencias del mismo tamaño, sino, se rellenan con cero.

- Requiere que las dos secuencias sean del mismo tamaño. Si no, se debe rellenar con ceros la secuencia más corta.

$f[n] \otimes g[0]$



$\underset{\text{quieta}}{f[n]} \otimes \underset{\text{muevo}}{g[n]}$

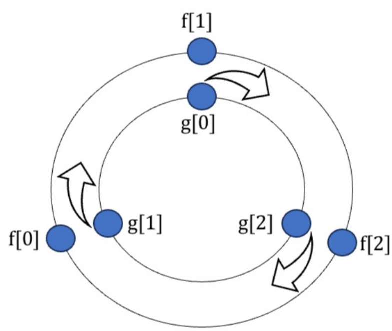
$f[n] = [1, 2, 3]$

$g[n] = [4, 5, 6]$ reflejo

$$f[n] \otimes g[0] = f[0]g[0] + f[1]\,g[2] + f[2]\,g[1] = y[0]$$

4 + 12 + 15 = 31

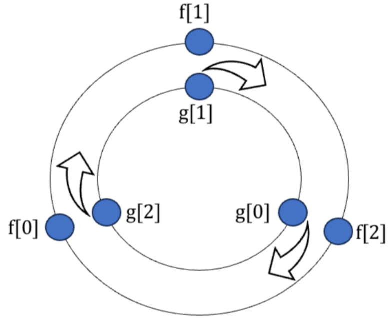
$f[n] \otimes g[1]$



$$f[n] \otimes g[1] = f[0]\,g[1] + f[1]\,g[0] + f[2]\,g[2] = y[1]$$

5 + 8 + 18 = 31

$$f[n] \otimes g[2]$$



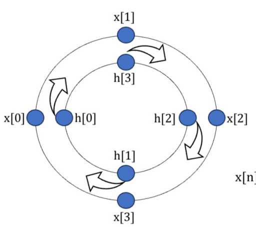
$$f[n] \otimes g[2] = f[0]\,g[2] + f[1]\,g[1] + f[2]\,g[0] = y[2]$$

6 + 10 + 12 = 28

- **Ejemplo 1:** Hallar la convolución circular de las siguientes secuencias:

$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{3},7,7,9\}$$

$$h[n] = \{\underset{\uparrow}{2},8,0,0\}$$

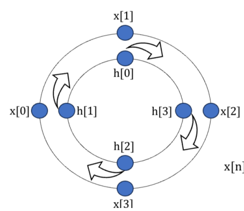


$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{3},7,7,9\}$$

$$h[n] = \{\underset{\uparrow}{2},8,0,0\}$$

$$x[n] \otimes h[0] = x[0]h[0] + x[1]\,h[3] + x[2]\,h[2] + x[3]\,h[1]$$

$$y[0] = 6 + 0 + 0 + 72 = 78$$

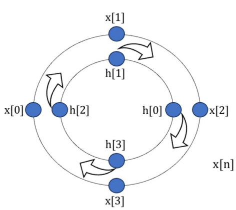


$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{3},7,7,9\}$$

$$h[n] = \{\underset{\uparrow}{2},8,0,0\}$$

$$x[n] \otimes h[1] = x[0]\,h[1] + x[1]\,h[0] + x[2]\,h[3] + x[3]\,h[2]$$

$$y[1] = 24 + 14 + 0 + 0 = 38$$

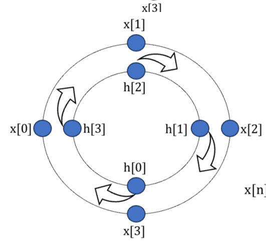


$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{3},7,7,9\}$$

$$h[n] = \{\underset{\uparrow}{2},8,0,0\}$$

$$x[n] \otimes h[2] = x[0]\,h[2] + x[1]\,h[1] + x[2]\,h[0] + x[3]\,h[3]$$

$$y[2] = 0 + 56 + 14 + 0 = 70$$



$$x[n] = \{\underset{\uparrow}{3},7,7,9\}$$

$$h[n] = \{\underset{\uparrow}{2},8,0,0\}$$

$$x[n] \otimes h[3] = x[0]\,h[3] + x[1]\,h[2] + x[2]\,h[1] + x[3]\,h[0]$$

$$y[3] = 0 + 0 + 56 + 18 = 74$$

$x[n] = \{\underset{\uparrow}{3},7,7,9\}$

$h[n] = \{\underset{\uparrow}{2},8,0,0\}$

	2	8	0	0
3	6	24	0	0
7	14	56	0	0
7	14	56	0	0
9	18	72	0	0

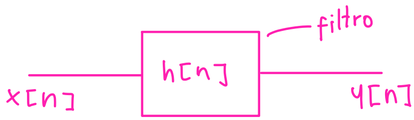
78 38 70 74

$$y[n] = \{\underset{\uparrow}{78},38,70,74\}$$

DFT en Filtrado Lineal

- Producto de dos DFTS es equivalente a una convolución circular en el tiempo.

- Para la salida de un filtro, se debe buscar una equivalencia de la convolución lineal.



$y[n] = x[n] * h[n]$ convolución lineal

$Y(K) = X(K)\,H(K)$

- $x[n] \rightarrow$ Finita de tamaño L

- Excita un filtro FIR de tamaño M

$$x[n] = 0, \qquad n < 0 \ \text{ y } \ n \geq L$$

$$h[n] = 0, \qquad n < 0 \ \text{ y } \ n > M$$

- Salida del FIR:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]x[n-k]$$

- $h[n]$ y $x[n]$ $\rightarrow$ Finitas

$$y[n] \rightarrow L + M - 1 \text{ (Tamaño de salida)}$$

$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

- Una DFT de tamaño $N \geq L + M - 1$ es requerida para representar $y[n]$ en el dominio de la frecuencia.

$$Y(k) \equiv y(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}} \qquad = X(\omega)H(\omega)\Big|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}$$

$$Y(k) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{N-puntos} \\ \text{DFT} \\ x[n]}}{X(k)}\;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{N-puntos} \\ \text{DFT} \\ h[n]}}{H(k)} \qquad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\boxed{\text{Rellenar con ceros si h[n] o x[n] duran menos de N}}$$

Ejemplo 2: Por medio de la DFT y la IDFT, determine la respuesta del filtro FIR con respuesta al impulso h[n]

$$h[n] = \{\overset{0}{\underset{\uparrow}{1}},\overset{1}{2},\overset{2}{3}\} \rightarrow M = 3$$

$$\text{Entrada } x[n] = \{\overset{0}{\underset{\uparrow}{1}},\overset{1}{2},\overset{2}{2},\overset{3}{1}\} \rightarrow L = 4$$

$$N \geq L + M - 1$$
$$N \geq 6$$

Para que la convolución circular sea igual a la lineal

- Por conveniencia para la transformada rápida de Fourier, se escoge $N = 8$

Ejemplo 2: Por medio de la DFT y la IDFT, determine la respuesta del filtro FIR con respuesta al impulso h[n]

N = 8

$$x[n] = \{1,2,2,1\}$$
$$\uparrow$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{7} x[n]\, e^{-\frac{j2\pi kn}{8}}$$

$$X(k) = 1 + 2e^{-\frac{j\pi k}{4}} + 2e^{-\frac{j\pi k}{2}} + e^{-\frac{j3\pi k}{4}}$$

$$k = 0,1,\ldots,7$$

- $X(0) = 6$
- $X(1) = 1.71 - j4.12$
- $X(2) = -1 - j$
- $X(3) = 0.29 + j0.12$
- $X(4) = 0$
- $X(5) = 0.29 - j0.12$
- $X(6) = -1 + j$
- $X(7) = 1.71 + j4.12$

$$h[n] = \{1,2,3\}$$
$$\uparrow$$

$$H(k) = \sum_{n=0}^{7} h[n]\, e^{-\frac{j2\pi kn}{8}}$$

$$H(k) = 1 + 2e^{-j\frac{\pi k}{4}} + 3e^{-j\frac{\pi k}{2}}$$

$$k = 0,1,\ldots,7$$

- $H(0) = 6$
- $H(1) = 2.41 - j4.41$
- $H(2) = -2 - j2$
- $H(3) = -0.41 + j1.58$
- $H(4) = 2$
- $H(5) = -0.41 - j1.58$
- $H(6) = -2 + j2$
- $H(7) = 2.41 + j4.41$

- Producto de las dos DFTs:

- $Y(0) = 36$
- $Y(1) = -14.07 - j17.48$
- $Y(2) = j4$
- $Y(3) = 0.07 + j0.515$
- $Y(4) = 0$
- $Y(5) = 0.07 - j0.515$
- $Y(6) = -j4$
- $Y(7) = -14.07 + j17.48$

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{7} Y(k)\, e^{\frac{j2\pi kn}{8}}$$

$$y[n] = \{1, 4, 9, 11, 8, 3, 0, 0\}$$
$$\uparrow$$

Transformada Rápida de Fourier (FFT)

- La DFT es la única transformada que es discreta en el dominio del tiempo y de la frecuencia y está definida para secuencias de duración finita.

- DFT es una transformada computable, pero su implementación es muy ineficiente, en especial para secuencias largas.

- DFT no es eficiente, ya que no explota las propiedades de simetría y periodicidad del factor de fase:

$$W = e^{-j2\pi/N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

- La DFT requiere de varias multiplicaciones y sumas complejas.

DFT como una Transformación Lineal

- **DFT:** $X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{nk}$ $\qquad k = 0,1,2,\dots,N-1$

- **IDFT:** $x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X(k) W^{-nk}$ $\qquad k = 0,1,2,\dots,N-1$

DFT:

$$X(k) = x[0]\,W_N^0 + x[1]\,W_N^k + x[2]\,W_N^{2k} + \cdots + x[N-1]\,W_N^{k(N-1)}$$

$$\rightarrow k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Para los N valores posibles de k, se obtiene una matriz de tamaño $N \times N$.

Propiedades del Factor de Fase

$$\rightarrow W_N^{kn} = W_N^{k(n+N)} = W_N^{(k+N)n}$$

$$\rightarrow W_N^{kn+\frac{N}{2}} = -W_N^{kn}$$

$$\rightarrow W_N^2 = W_{\frac{N}{2}}$$

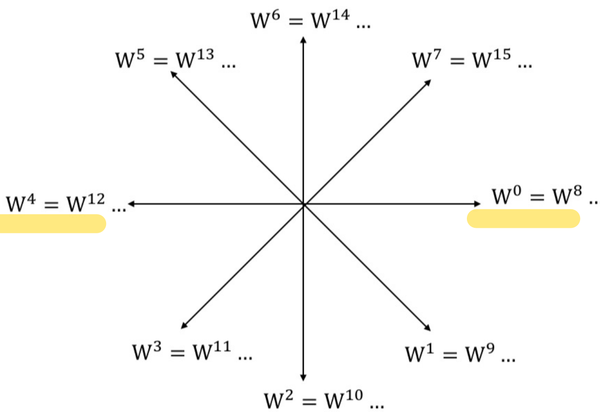
$$(W_N)^2 = \left(e^{-j2\pi/N}\right)^2 \rightarrow W_N^2 = e^{-j4\pi/N}$$

$$W_{N/2} = e^{-j2\pi/N/2} = e^{-j4\pi/N}$$

Son Iguales

- **Ejemplo 1:** N=8

$$W^{k+N} = W^k$$
$$W^{k+\frac{N}{2}} = -W^k$$



Calculo Eficiente de la DFT

- Idea detrás de la FFT: Divide y vencerás
  - Se divide la secuencia original de N muestras en dos secuencias de (N/2) muestras y así sucesivamente.
  - Los algoritmos de FFT culminan con secuencias de dos muestras que solo requieren una multiplicación, dos sumas y recombinación de muestras.

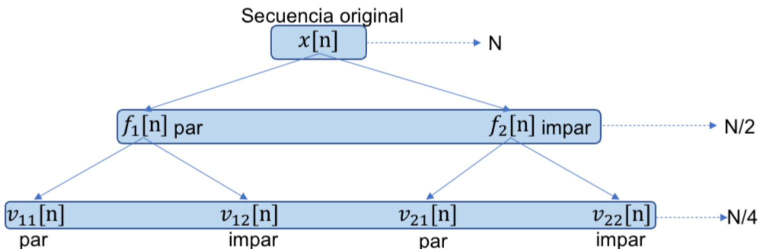
Algoritmos FFT Base-2

- Esto reduce el total de operaciones a (N log N).
- Estos algoritmos asumen que la longitud N de la secuencia es una potencia de 2.

$$x[n] = \{\underset{0}{a}, \underset{1}{b}, \underset{2}{c}, \underset{3}{d}, \underset{4}{e}, \underset{5}{f}, \underset{6}{g}, \underset{7}{h}\}$$

$$f_1[n] = \{\overset{0}{a}, \overset{1}{c}, \overset{2}{e}, \overset{3}{g}\} \qquad f_2[n] = \{b, d, f, h\}$$

$v_{11}[n]$ parte par $\quad$ $v_{12}[n]$ parte impar



$v_{11}[n] = \{a, e\}$ $\quad$ $v_{12}[n] = \{c, e\}$ $\quad$ $v_{21}[n] = \{b, f\}$ $\quad$ $v_{22}[n] = \{d, h\}$

Diezmado en el Tiempo

original (N)
↑
$x[n]$

Se separan en funciones pares e impares

$f_1 = x[2n]$ $\left(\frac{N}{2}\right)$ par $\qquad$ $f_2 = x[2n+1]$ impar

$$f_1[n] = x[2n] \qquad n = 0,1,\dots,\frac{N}{2}-1$$

$$f_2[n] = x[2n+1]$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]W_N^{nk} \qquad k = 0,1,2,\dots,N-1$$

La desgloso

$$W_N^2 = W_{N/2}$$

$$X(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} x[2n]W_N^{2nk}}_{\text{parte par}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} x[2n+1]W_N^{k(2n+1)}}_{\text{parte impar}}$$

$$W_N^{2nk} \qquad W_N^{k} = W_{N/2}^{nk}\, W_N^{k}$$

$$X(k) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} f_1[n]W_{N/2}^{nk}}_{\text{FT de } f_1} + \underbrace{W_N^k}_{\text{factor de fase}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\left(\frac{N}{2}\right)-1} f_2[n]W_{N/2}^{nk}}_{\text{FT de } f_2}$$

$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) \qquad k = 0,1,2,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right) = F_1(k) - W_N^k F_2(k) \qquad k = 0,1,2,\ldots,\frac{N}{2}-1$$

$$f_1[n] = \overbrace{f_1[2n]}^{\text{par}} + \overbrace{f_1[2n+1]}^{\text{impar}}$$

$$= v_{11}[n] + v_{12}[n]$$

$$F_1(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} f_1[2n]\,W_{\frac{N}{2}}^{2nk} + \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} f_1[2n+1]\,W_{N/2}^{(2n+1)k}$$

$$\hookrightarrow W_{N/4}^{nk}\,W_{N/2}^{k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} v_{11}[n]\,W_{N/4}^{nk} + W_{N/2}^{k} \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} V_{12}[n]\,W_{N/4}^{nk}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} v_{11}[n] = \{\overset{0}{2}, \overset{1}{3}\} \\ \hookrightarrow V_1(0) = \underbrace{5}_{2+3},\; V_1(1) = \underbrace{-1}_{2-3} \end{array}}$$

$$F_1(k) = V_{11}(k) + W_{N/2}^{k}\,V_{12}(k)$$

$$F_1\left(k+\frac{N}{4}\right) = V_{11}(k) - W_{N/2}^{k}\,V_{12}(k)$$

$$V_{11}(k) = \sum_{n=0}^{\frac{N}{4}-1} v_{11}[n]\,W_{N/4}^{nk}$$

con $N=8$

$$V_{11}(k) = \sum_{n=0}^{1} v_{11}[n]\,W_{N/4}^{nk}$$

$$= v_{11}[0]\,W^0 + v_{11}[1]\,W_{N/4}^{k}$$

$k=0$: $V_{11}(0) = v_{11}[0] + v_{11}[1]$

$k=1$: $V_{11}(1) = V_{11}[1] + V_{11}[1]\,W_{N/4}^{1}$

$$W_{N/4}^{1} = e^{-j2\pi/N/4} = e^{-j\pi} = -1$$

$k=1$: $V_{11}(1) = V_{11}[0] - V_{11}[1]$

$$v_{11}[n] = f_1[2n]$$

$$v_{12}[n] = f_1[2n+1]$$

$$v_{21}[n] = f_2[2n]$$

$$v_{22}[n] = f_2[2n+1]$$

$$n = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1$$

$$F_1(k) = V_{11}(k) + W_{N/2}^{k} V_{12}(k)$$

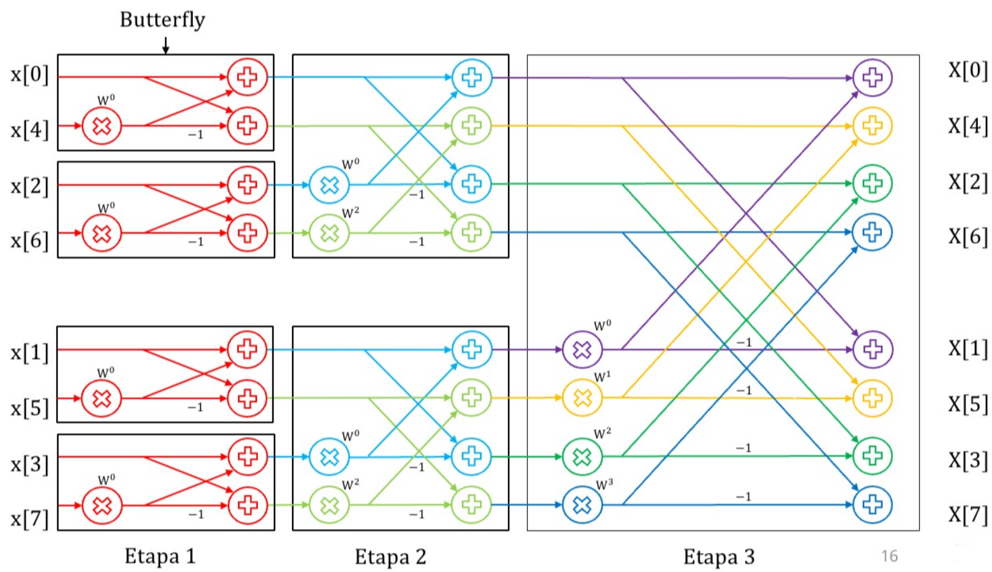
$$F_1\left(k+\frac{N}{4}\right) = V_{11}(k) - W_{N/2}^{k} V_{12}(k)$$

$$F_2(k) = V_{21}(k) + W_{N/2}^{k} V_{22}(k)$$

$$F_2\left(k+\frac{N}{4}\right) = V_{21}(k) - W_{N/2}^{k} V_{22}(k)$$

$$k = 0,1,\ldots,\frac{N}{4}-1$$

FFT de 8 puntos - Diezmado en el Tiempo



- **Ejemplo 2:** FFT usando diezmado en el tiempo

0 1 2 3 4 5 6 7

$$x[n] = \{1, 5, 3, 2, 4, 6, 7, 8\}$$

1. Diezmo $x[n]$, generando $f_1[n]$ y $f_2[n]$

$f_1[n] = \{1,3,4,7\}$ pares

$f_2[n] = \{5,2,6,8\}$ impares

$$X(k) = F_1(k) \pm W_N^k F_2(k)$$

$$k = 0,1,2,3$$

2. Diezmo nuevamente, generando $v_{ij}[n]$

$f_1[n] = \{1,3,4,7\}$ $f_2[n] = \{5,2,6,8\}$

0 1 2 3   0 1 2 3

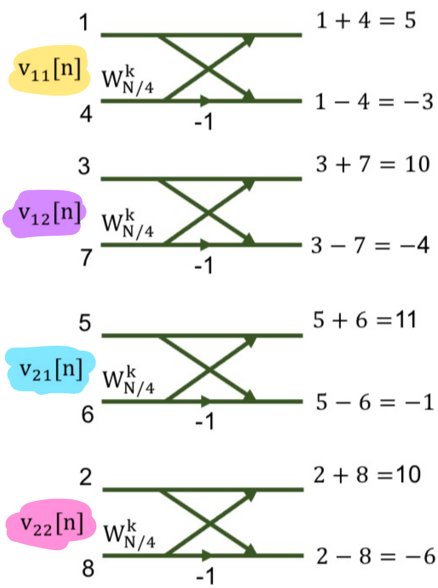
$f_1[n]$ → $v_{11}[n] = \{1,4\}$ pares; $v_{12}[n] = \{3,7\}$ impares

$$F_1(k) = V_{11}(k) \pm W_{\frac{N}{4}}^k V_{12}(k), \ k = 0,1$$

$f_2[n]$ → $v_{21}[n] = \{5,6\}$ pares; $v_{22}[n] = \{2,8\}$ impares

$$F_2(k) = V_{21}(k) \pm W_{\frac{N}{4}}^k V_{22}(k), \ k = 0,1$$

$N = 2$



Transformadas!

$V_{11}(k) = \{5, -3\}$

$V_{12}(k) = \{10, -4\}$

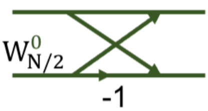
$V_{21}(k) = \{11, -1\}$

$V_{22}(k) = \{10, -6\}$

$N = 4$

$V_{11}(0) = 5$

$V_{12}(0) = 10$



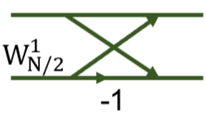
$5 + 10W_4^0 = 15 \Rightarrow F_1(0) = V_{11}(0) + W_4^0\, V_{12}(0) = 5 + 10 = 15$

$5 - 10W_4^0 = -5 \Rightarrow F_1\left(0 + \frac{N}{4}\right) = V_{11}(0) - W_4^0\, V_{12}(0) = 5 - 10 = -5$

$F_1(2) = -5$

$V_{11}(1) = -3$

$V_{12}(1) = -4$



$\Rightarrow F_1(1) = V_{11}(1) + W_4^1\, V_{12}(1) = -3 + \left(-4^{-\frac{j2\pi(1)}{4}}\right) = -3 + j4$

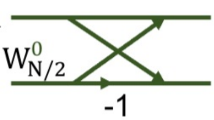
$\Rightarrow F_1\left(1 + \frac{N}{4}\right) = V_{11}(1) - W_4^1\, V_{12}(1) = -3 - (-j)(-4) = -3 - j4$

$F_1(3) = -3 - j4$

$N = 4$

$V_{21}(0) = 11$

$V_{22}(0) = 10$



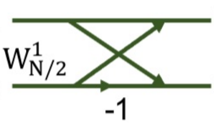
$11 + 10 = 21 \quad \Rightarrow F_2(0) = V_{21}(0) + W_4^0\, V_{22}(0) = 11 + 10 = 21$

$11 - 10 = 1 \quad \Rightarrow F_2\left(0 + \frac{N}{4}\right) = V_{21}(0) - W_4^0\, V_{22}(0) = 11 - 10 = 1$

$F_2(2) = 1$

$V_{21}(1) = -1$

$V_{22}(1) = -6$



$\Rightarrow F_2(1) = V_{21}(1) + W_4^1\, V_{22}(1) = -1 - 6(-j) = -1 + j6$

$\Rightarrow F_2\left(1 + \frac{N}{4}\right) = V_{21}(1) - W_4^1\, V_{22}(1) = -1 - (-6)(-j) = -1 - j6$

$F_1(3) = -1 - j6$

$$F_1(k) = \{15, -3 + j4, -5, -3 - j4\}$$

$$F_2(k) = \{21, -1 + j6, 1, -1 - j6\}$$

Con $F_1(k)$ y $F_2(k)$, se encuentra $X(k)$:

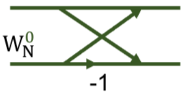
$$X(k) = F_1(k) + W_N^k F_2(k) \qquad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2} - 1$$

$$X\left(k + \frac{N}{2}\right) = F_1(k) - W_N^k F_2(k) \qquad k = 0,1,\ldots,\frac{N}{2} - 1$$

$N = 8$

$F_1(0) = 15$

$F_2(0) = 21$



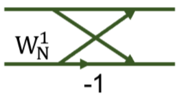
$\Rightarrow X(0) = F_1(0) + W_N^0 F_2(0) = 15 + 1(21) = 36$

$\Rightarrow X\left(0 + \frac{N}{2}\right) = F_1(0) - W_N^0 F_2(0) = 15 - 1(21) = -6$

$X(4) = -6$

$F_1(1) = -3 + j4$

$F_2(1) = -1 + j6$



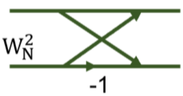
$\Rightarrow X(1) = (-3 + j4) + \overbrace{(0,71 - j0,71)}^{e^{-\frac{j2\pi(1)}{8}}}(-1 + j6) = 0.55 + j8.97$

$\Rightarrow X\left(1 + \frac{N}{2}\right) = (-3 + j4) - (0,71 - j0,71)(-1 + j6)$

$X(5) = -6.55 - j0.97$

$F_1(2) = -5$

$F_2(2) = 1$



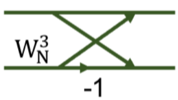
$\Rightarrow X(2) = -5 + (-j)(1) = -5 - j$

$\Rightarrow X\left(2 + \frac{N}{2}\right) = -5 - (-j)(1)$

$X(6) = -5 + j$

$F_1(3) = -3 - j4$

$F_2(3) = -1 - j6$

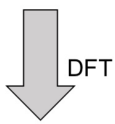


$\Rightarrow X(3) = (-3 - j4) + \overbrace{(-0,71 - j0,71)}^{e^{-\frac{j2\pi(3)}{8}}}(-1 - j6) = -6.55 + j0.97$

$\Rightarrow X\left(3 + \frac{N}{2}\right) = (-3 - j4) - (-0,71 - j0,71)(-1 - j6)$

$X(7) = 0.55 - j8.97$

$x[n] = \{1, 5, 3, 2, 4, 6, 7, 8\}$



$X(k) = \{36, 0.55 + j8.97, -5 - j, -6.55 + j0.97, -6, -6.55 - j0.97, -5 + j, 0.55 - j8.97\}$

EJERCICIOS

Serie de Fourier → $\underbrace{\text{Periódicas}}_{x[n]=x[n+N]}$ → $x[n]=\sum_{k=0}^{N-1} C_k e^{\frac{j2\pi kn}{N}}$, $C_k=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$

N periodo , K índice coeficiente , n tiempo discreto.

$\boxed{\text{Parseval} \quad \underset{\text{potencia}}{P}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x[n]|^2=\sum_{k=0}^{N-1}|C_k|^2 \quad \text{Periódicas}}$

$x[n-k]=e^{-j\omega k}x(\omega)$

$e^{-j\omega_0 n}x[n]=x(\omega+\omega_0)$

Transformada de Fourier de Señales no Periódicas en tiempo Discreto $X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$

Inversa $x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{j\omega n}d\omega$

Densidad Espectral de Energía $E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x[n]|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(\omega)|^2 d\omega$

Parseval para no periódicas $X(\omega)=|X(\omega)|e^{j\theta(\omega)}$

$\theta(\omega)=\measuredangle X(\omega)$

Autocorrelación DEE

$S_{xx}(\omega)=|X(\omega)|^2=X(\omega)X(-\omega)$

$X_R(\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty} x_R[n]\cos(\omega n)+x_I[n]\operatorname{sen}(\omega n)$

$X_I(\omega)=\sum_{-\infty}^{\infty} x_R[n]\operatorname{sen}(\omega n)+x_I[n]\cos(\omega n)$

$|X(\omega)|=\sqrt{X_R^2(\omega)+X_I^2(\omega)}$

$\measuredangle X(\omega)=\tan^{-1}\left(\frac{X_I(\omega)}{X_R(\omega)}\right)$

$X(\omega)=X_R(\omega)+jX_I(\omega)$

$e^{-j2\pi}=1 \qquad e^{-j\pi}=-1$

$\sum_{i=p}^{n} r^i=\frac{r^p-r^{n+1}}{1-r}$

$\sum_{0}^{\infty} a^n=\frac{1}{1-a}, |a|<1$

$X(\omega)^*=X(-\omega)$

$\sum_{-\infty}^{-1} a^{-n}=\sum_{1}^{\infty} a^n$

$z=e^{j\omega}$

$x[n-k]=z^{-k}X(z)$; $x[n-k]=X(\omega)e^{-j\omega k}$

$Y(\omega)=H(\omega)\cdot X(\omega)$

convolución
reflejo

correlación
No reflejo

Respuesta en Frecuencia

$$y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]$$

correlación $r_{x_1x_2}[n] \longleftrightarrow S_{x_1x_2}(\omega) \leftrightarrow X_1(\omega)X_2(-\omega)$

Transformada Discreta de Fourier

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1$$

Inversa

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{\frac{j2\pi kn}{N}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}, \quad \omega = \frac{2\pi k}{N} \rightarrow X\left(\frac{2\pi k}{N}\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}$$

Filtrado Lineal

filtro de tamaño M

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

señal filtrada de tamaño L+M−1

señal de tamaño L

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h[k]\, x[n-k]$$

$$Y(\omega) = X(\omega)\, H(\omega)$$

$N \geq L+M-1$

- Hallar la serie de Fourier para $x[n]=\cos(\sqrt{2}\,\pi n)$

¿la señal es periódica? $\rightarrow \omega=\sqrt{2}\,\pi \rightarrow f=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ no!

$\omega=2\pi f,\ f=\frac{\omega}{2\pi}$

$$\boxed{e^{-j\pi}=-1}$$

- Sea $x[n]=[\overset{0}{\underset{\uparrow}{1}}\ \overset{1}{1}\ \overset{2}{0}\ \overset{3}{0}]$ periódica con $N=4$

$$c_k=\frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1}x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{N}}=\frac{1}{4}\sum_{0}^{3}x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{4}} \quad \text{para } k=0,1,2,3$$

$$c_k=\frac{1}{4}\Big[\underbrace{(1)e^{\frac{-j2\pi 0k}{4}}}_{n=0}+\underbrace{(1)e^{\frac{-j2\pi(1)k}{4}}}_{n=1}+\underbrace{(0)e^{\frac{-j2\pi(2)k}{4}}}_{n=2}+\underbrace{(0)e^{\frac{-j2\pi(3)k}{4}}}_{n=3}\Big] \Rightarrow c_k=\frac{1}{4}\left(1+e^{\frac{-j\pi k}{2}}\right)$$

$$\begin{cases} c_0=\frac{1}{2} \\ c_1=\frac{1}{4}\left(1+e^{\frac{-j\pi}{2}}\right) \\ c_2=\frac{1}{4}\left(1+e^{-j\pi}\right) \\ c_3=\frac{1}{4}\left(1+e^{\frac{-j\pi 3}{2}}\right) \end{cases}$$

- $x[n]=\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$

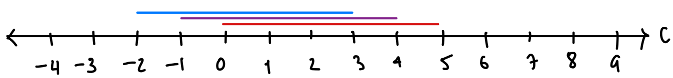
$\omega=2\pi f$

$f=\frac{\omega}{2\pi}$

$\omega=\frac{\pi}{3},\ f=\frac{1}{6},\ \overbrace{N=6}^{\text{periodo fundamental}},\ k=\{0,1,\dots,5\}$

Para hallar los coeficientes: $x[n]=\dfrac{e^{\frac{j2\pi n}{6}}+e^{\frac{-j2\pi n}{6}}}{2}=\frac{1}{2}e^{\frac{j2\pi n}{6}}+\frac{1}{2}e^{\frac{-j2\pi n}{6}}$, $c_k=\frac{1}{2} \rightarrow j\frac{\pi}{3}n=\frac{j2\pi kn}{6}$

$\rightarrow k=1 \rightarrow c_1=\frac{1}{2}$



- Considere la señal periódica $x[n]=[\dots,1,0,1,2,\underset{\uparrow}{\overset{0}{3}},\overset{1}{2},\overset{2}{1},\overset{3}{0},\overset{4}{1},\dots]$, $N=6$

$$\begin{array}{cccccc} [3, & 2, & 1, & 0, & 1, & 2] \\ n=0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \quad N=6$$

$$c_k=\frac{1}{6}\sum_{0}^{5}x[n]e^{\frac{-j2\pi kn}{6}}=\frac{1}{6}\Big|\underbrace{(3)e^{\frac{-j2\pi k(0)}{6}}}_{n=0}+\underbrace{2e^{\frac{-j2\pi k}{6}}}_{n=1}+\underbrace{1e^{\frac{-j2\pi k(2)}{6}}}_{n=2}+\underbrace{0e^{\frac{-j2\pi k(3)}{6}}}_{n=3}$$

reemplazo n

$$+\underbrace{1e^{\frac{-j2\pi k(4)}{6}}}_{n=4}+\underbrace{2e^{\frac{-j2\pi k(5)}{6}}}_{n=5}\Big|$$

$$c_k=\frac{1}{6}\left(3+2e^{\frac{-j\pi k}{3}}+e^{\frac{-j\pi k2}{3}}+e^{\frac{-j\pi k4}{3}}+2e^{\frac{-j\pi k5}{3}}\right)$$

$c_0=\frac{3}{2},\ c_1=\frac{4}{6},\ c_2=0,\ c_3=\frac{1}{6},\ c_4=0,\ c_5=\frac{4}{6}$

- Determinar el espectro de x[n] periódica:

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right) \qquad ¿N? \quad N = 15, \text{ MCM entre } 5 \text{ y } 3$$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] \qquad N = (3.5) \text{ y } (5.3) = 15$$

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n], \quad c_k = c_{1k} + c_{2k} \qquad c_k = c_1 + c_2$$

$$x_1[n] = \frac{1}{2}e^{\frac{j2\pi n}{3}} + \frac{1}{2}e^{-\frac{j2\pi n}{3}}, \quad \frac{j2\pi n}{3} = \frac{j2\pi k n}{15} \to k = \pm 5, \quad c_{1k} = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 5, 10 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

$$x_2[n] = \frac{1}{2j}e^{\frac{j2\pi n}{5}} - \frac{1}{2j}e^{-\frac{j2\pi n}{5}}, \quad -\frac{j2\pi n}{5} = \frac{j2\pi k n}{15} \to k = \pm 3, \quad c_{2k} = \begin{cases} \frac{1}{2j} & k = 3 \\ -\frac{1}{2j} & k = -12 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

-5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14

10 11 12 13 14

$$c_k = c_{1k} + c_{2k} = \begin{cases} \frac{1}{2}j & k = 3 \\ \frac{1}{2} & k = 5, 10 \\ -\frac{1}{2}j & k = 12 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

- Determinar la DEE de $x[n] = a^n u[n]$, $-1 < a < 1$

$$X(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad |ae^{-j\omega}| < 1 \to |a| < 1$$

$$DEE = |X(\omega)|^2 = X(\omega)X(-\omega) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 - ae^{j\omega}} = \frac{1}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$

- Determine $X_R, X_I, |X(\omega)|, \measuredangle X(\omega)$ para $X(\omega) = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}, \quad -1<a<1$

$$X(\omega) = \frac{1-ae^{j\omega}}{(1-ae^{j\omega})(1-ae^{-j\omega})} = \frac{1-a\cos\omega - ja\sin\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}, \quad \measuredangle X(\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{a\sin\omega}{1-a\cos\omega}\right)$$

↳ fase = función impar

$$X_R(\omega) = \frac{1-a\cos\omega}{1-2a\cos\omega+a^2}, \quad X_I(\omega) = \frac{-a\sin(\omega)}{1-2a\cos\omega+a^2}, \quad |X\omega|^2 = \sqrt{X_R^2+X_I^2} = \frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\omega+a^2}}$$

- Hallar x[n] usando la FT.

$$x[n] = x_1[n] * x_2[n], \quad x_1[n] = x_2[n] = \{\overset{-1}{1}, \underset{\uparrow}{\overset{0}{1}}, \overset{1}{1}\}$$

señal real y par:

$$X_R(\omega) = x[0] + 2\sum_{1}^{\infty} x[n]\cos(\omega n)$$

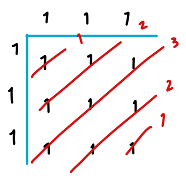
$$x_1(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_1[n] z^{-n} = 1\cdot z^1 + 1\cdot z^0 + 1\cdot z^{-1} = z^1 + 1 + z^{-1}$$

$$x_1(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_1[n] e^{-j\omega n} = 1e^{j\omega} + 1e^0 + 1e^{-j\omega} = e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega} = X_2(\omega)$$

$$X_1(\omega)X_2(\omega) = e^{j2\omega} + 2e^{j\omega} + 3 + 2e^{-j\omega} + e^{-j2\omega} \longrightarrow \text{ordeno por exponente}$$

equivalentes

Y para $x_1[n] * x_2[n] = [1,2,3,2,1] = x[n]$



$$X_R(\omega) = x[0] + 2\sum_{1}^{\infty} x[n]\cos(\omega n)$$

$$X_1(\omega) = 1 + 2\cos(\omega n) = X_2(\omega), \quad X(\omega) = X_1(\omega)X_2(\omega) = (1+2\cos(\omega n))^2 = e^{j2\omega} + 2e^{j\omega} + 3 + e^{-j\omega}2 + e^{-j2\omega}$$

- Hallar la F.T. de $x[n] = \left\{ \begin{array}{ccccccccc} -4 & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1, & 0, & 1, & 0, & \underset{\uparrow}{1}, & 0, & 1, & 0, & 1 \end{array} \right\}$

$$X(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = e^{j\omega 4} + e^{j\omega 2} + 1 + e^{-j\omega 2} + e^{-j\omega 4} = 1 + 2\cos(\omega 2) + 2\cos(4\omega)$$

- Si $X(\omega) = \dfrac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$, hallar la F.T. de $x[2n+1]$

como $z = e^{j\omega}$, entonces $e^{-j\omega} = z^{-1}$ y $x[n] = a^n u[n]$. Aplico $x[n-k] = X(\omega) e^{j\omega(-k)}$

$$X[2n+1] = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \cdot e^{j\omega} = \frac{e^{j\omega}}{1 - ae^{-j\omega}}, \quad X'(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[2n+1] e^{-j\omega n} \Rightarrow X'(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[2n] e^{-j\omega n} e^{j\omega}$$

$$X'(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} x[n] e^{\frac{-j\omega n}{2}} e^{\frac{j\omega}{2}}$$

$$X'(\omega) = X\left(\frac{\omega}{2}\right) e^{\frac{j\omega}{2}} \qquad X\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega/2}} \qquad X'(\omega) = \frac{e^{j\omega/2}}{1 - ae^{-j\omega/2}}$$

- $x[n] = Ae^{j\omega n}, \quad -\infty < n < \infty$

$$Y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} h[n] x[n-k] \rightarrow Y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} h[n] A e^{j\omega(n-k)} \rightarrow Y[n] = A\Big(\underbrace{\sum_{-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}}_{H(\omega)}\Big) e^{j\omega n} \rightarrow Y[n] = A\, H(\omega) e^{j\omega n}$$

- hallar la respuesta del sistema: $h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, $x[n] = Ae^{\frac{j\pi n}{2}} = Ae^{j\omega n}$

$$Y[n] = \sum_{-\infty}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^n A e^{j\omega n}, \quad H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}, \quad H(\omega) = \sum_{-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega}}$$

Y si $\omega = \frac{\pi}{2} \rightarrow H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{-j\pi/2}} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2} j} = \dfrac{4}{5} - \dfrac{j2}{5}$, forma polar: $\sqrt{\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-2/5}{4/5}\right) = 0.463$

$e^{-j\pi} = -1$

$(e^{-j\pi})^{1/2} = (-1)^{1/2}$

$e^{-j\pi/2} = j$

forma polar $= \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j0.4637}$

$$Y[n] = A\left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j0.463}\right) e^{j\omega n} = A\left(\frac{2}{\sqrt{5}} e^{-j0.463}\right) e^{j\frac{\pi}{2} n}$$

- $x[n] = Ae^{j\pi n}$, $\omega = \pi$

$$Y[n] = \frac{2}{3} Ae^{j\pi n}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\pi}} = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}$$

$$e^{-j\pi} = -1$$

- Determinar $H(\omega)$ de:

$$x[n-m] = e^{j\omega(-m)} X(\omega)$$

$$Y[n] = \frac{1}{3}\left[x[n+1] + x[n] + x[n-1] \right]$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{3}\left[X(\omega)e^{j\omega} + X(\omega) + X(\omega)e^{-j\omega} \right] \rightarrow Y(\omega) = \frac{1}{3} X(\omega)\left(e^{j\omega} + e^{-j\omega} + 1\right)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1}{3}\left(e^{-j\omega} + e^{j\omega} + 1\right) = \frac{1}{3}\left(2\cos(\omega) + 1\right)$$

- Hallar $|H(\omega)|^2 = S_{HH}(\omega)$

$$z = e^{j\omega}, \quad z^{-1} = -e^{j\omega}$$

$$Y[n] = -0.1\,Y[n-1] + 0.2\,Y[n-2] + x[n] + x[n-1]$$

$$Y(\omega) = -0.1\,Y(\omega)e^{-j\omega} + 0.2\,Y(\omega)e^{-2j\omega} + X(\omega) + X(\omega)e^{-j\omega}$$

$$Y(\omega) + 0.1\,Y(\omega)e^{-j\omega} - 0.2\,Y(\omega)e^{-2j\omega} = X(\omega)\left(1 - e^{-j\omega}\right)$$

$$Y(\omega)\left(1 + 0.1e^{-j\omega} - 0.2e^{-2j\omega}\right) = X(\omega)\left(1 - e^{-j\omega}\right)$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{1-e^{-j\omega}}{1+0.1e^{-j\omega}-0.2e^{-2j\omega}}, \quad |H(\omega)|^2 = H(\omega)H(-\omega) = \frac{1-e^{-j\omega}}{1+0.1e^{-j\omega}-0.2e^{-2j\omega}} \cdot \frac{1-e^{j\omega}}{1+0.1e^{j\omega}-0.2e^{2j\omega}}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{2+2\cos\omega}{1.05+0.16\cos\omega-0.4\cos(2\omega)}$$

- Hallar la DFT de: $x[n] = \{\overset{0}{\underset{\uparrow}{1}}, \overset{1}{2}, \overset{2}{1}, \overset{3}{0}\}$, $N=4$, $K=0,1,2,3$

$$\text{DFT} \quad X(K) = \sum_{0}^{N-1} x[n] e^{\frac{-j2\pi K n}{N}}$$

$K=0$, $\quad X(0) = x[n]e^{0} = 1+2+1+0 = 4$

$K=1$, $\quad X(1) = x[n]e^{\frac{-j\pi n}{2}} = \underset{n=0}{1} + \underset{n=1}{2e^{\frac{-j\pi}{2}}} + \underset{n=2}{e^{-j\pi}} = 1+2j-1 = -2j$

$K=2$, $\quad X(2) = x[n]e^{-j\pi n} = \underset{n=0}{1} + \underset{n=1}{2e^{-j\pi}} + \underset{n=2}{1e^{-2j\pi}} = 1-2+1 = 0$

$K=3$, $\quad X(3) = x[n]e^{\frac{-j2\pi 3n}{4}} = \underset{n=0}{1} + \underset{n=1}{2e^{-j\frac{3\pi}{2}}} + \underset{n=2}{1e^{-j\pi 3}} = 1 - 2j - 1 = 2j$

$$X(K) = \{4, -2j, 0, 2j\}, \; K=0,1,2,3$$

- Hallar la DFT de $x[n] = \{\overset{0}{\underset{\uparrow}{1}}, \overset{1}{2}, \overset{2}{3}, \overset{3}{4}\}$, $N=4$, $K=0,1,2,3$

$$X(K) = \sum_{0}^{3} x[n] e^{\frac{-2j\pi K n}{4}}$$

$K=0$, $\quad X(0) = x[n]e^{0} = 1+2+3+4 = 10$

$K=1$, $\quad X(1) = x[n]e^{\frac{-j\pi n}{2}} = \underset{n=0}{1} + \underset{n=1}{2e^{-j\pi/2}} + \underset{n=2}{3e^{-j\pi}} + \underset{n=3}{4e^{-j\frac{\pi 3}{2}}} = 1 - 2j - 3 + 4j = -2+2j$

$K=2$, $\quad X(2) = x[n]e^{-j\pi n} = \underset{n=0}{1} + \underset{n=1}{2e^{-j\pi}} + \underset{n=2}{3e^{-2j\pi}} + \underset{n=3}{4e^{-3j\pi}} = 1-2+3-4 = -2$

$K=3$, $\quad X(3) = x[n]e^{\frac{-j2\pi 3n}{4}} = \underset{n=0}{1} + \underset{\substack{n=1\\(+)}}{2e^{-j\frac{3\pi}{2}}} + \underset{n=2}{3e^{-j3\pi}} + \underset{\substack{n=3\\(-)}}{4e^{-j9/2\,\pi}} = 1+2j-3-4j = -2-2j$

$$2e^{-\frac{j\pi}{2}} = \underset{=0}{2\cos\left(\tfrac{-\pi}{2}\right)} + \underset{-2j}{j2\,\text{sen}\left(\tfrac{-\pi}{2}\right)}$$

Convolución Circular $x_1[n] \circledast x_2[n] \longleftrightarrow X_1(k)\, X_2(k)$

Secuencias del mismo tamaño, sino se rellenan con ceros.

$x_1[n] \circledast x_2[n]$

↳ reflejo

- $x[n] \circledast h[n]$ $\quad x[n] = \{3, 7, 7, 9\}$, $h[n] = \{2, 8, 0, 0\}$

	3	7	7	9
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
8	24	56	56	72
2	6	14	14	18

0, 0, 72

6, 38, 70, 74

$Y[n] = \{6+72, 38+0, 70+0, 74\}$

$Y[n] = \{78, 38, 70, 74\}$

- Respuesta del filtro FIR al impulso $h[n]$

$h[n] = \{\underset{\uparrow}{\overset{0}{1}}, \overset{1}{2}, \overset{2}{3}\}$, $M = 3$ $\qquad$ Entrada $x[n] = \{\underset{\uparrow}{\overset{0}{1}}, \overset{1}{2}, \overset{2}{2}, \overset{3}{1}\}$, $L = 4$

$N \geq L+M-1 \rightarrow N \geq 3+4-1 \rightarrow N \geq 6$ y tomo $N = 8$, $k = 0, 1, 2, \dots, 7$

$$X(k) = \sum_{0}^{7} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi k n}{8}} = \underset{n=0}{1} + \underset{n=1}{2e^{-j\frac{\pi k}{4}}} + \underset{n=2}{2e^{-j\frac{\pi k}{2}}} + \underset{n=3}{e^{-j\frac{\pi k 3}{4}}}$$