Diana.tobon@udea.edu.co → 19442

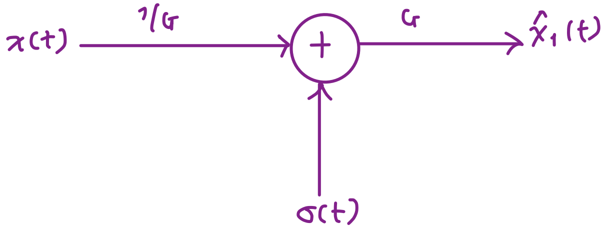
Cap 1
- Introducción
- Señales y sistemas en tiempo discreto
- Dominio Z

Cap 2
- Análisis frecuencial (fourier)

Cap 3
- Diseño de filtros digitales

PORCENTAJES

- Cap 1 Parcial 25%
- Cap 2 Parcial 25%
- Cap 3 Diseño 25%
- Laboratorio 25%

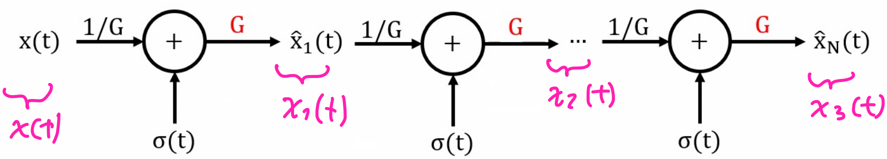


G ganancia

σ ruido

$$\frac{x(t)}{G} + \sigma(t) \quad , \quad \hat{x}_1(t) = G\left[\frac{x(t)}{G} + \sigma(t)\right] = x(t) + G\,\sigma(t)$$

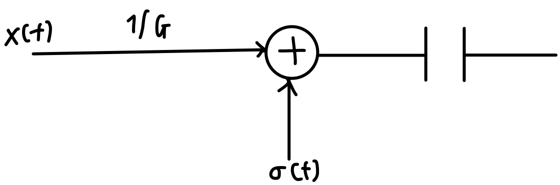
Para Comunicaciones a Grandes Distancias, Podemos Usar Repetidores



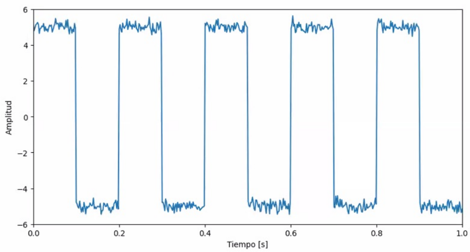
$$\hat{x}_N(t) = x(t) + NG\sigma(t)$$

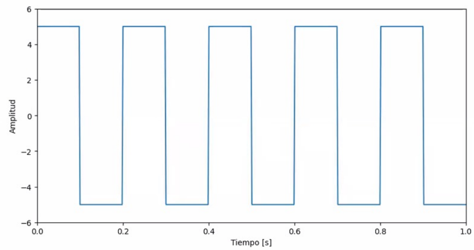
$$x_1(t) = x(t) + G\,\sigma(t) \quad , \quad x_2(t) = x_1(t) + G\sigma(t) = x(t) + 2G\sigma(t)$$

En señales digitales se umbraliza



Transmisión de Señales Cuantizadas

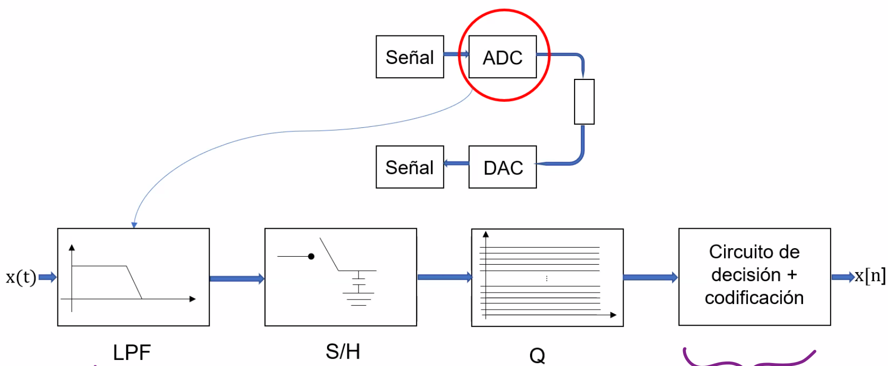




$$G\left[\frac{x(t)}{G} + \sigma(t)\right] = x(t) + G\sigma(t)$$

$$\hat{x}_1(t) = G\mathrm{sgn}[x(t) + G\sigma(t)]$$

Proceso de Conversión Analógico-Digital



muestreo

cuantización

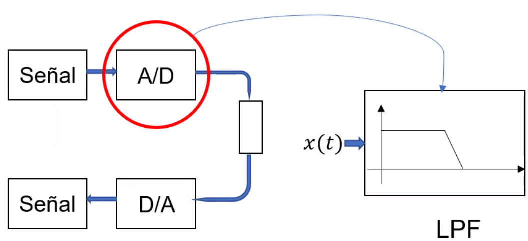
codificación

Proceso de Conversión Analógico-Digital

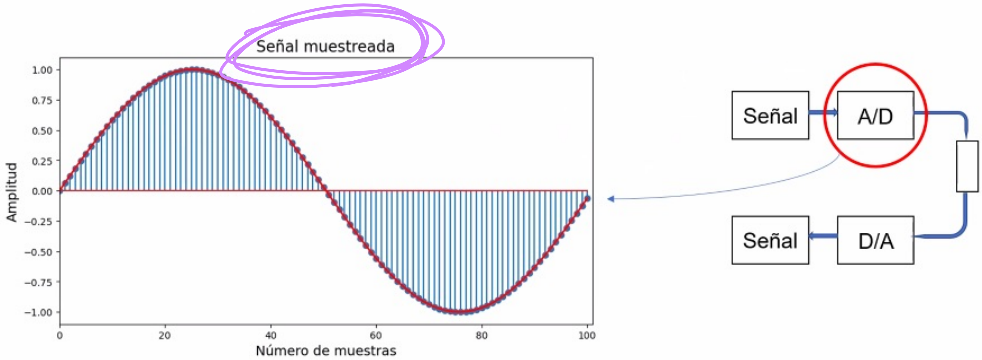
→ filtro anti-aliasing o anti-distorsión

- Filtro pasa-bajas: pre-filtrado, para limitar la frecuencia máxima que se quiere muestrear, y así conocer la frecuencia mínima a la cual deberá ser muestreada.

↳ Nyquist

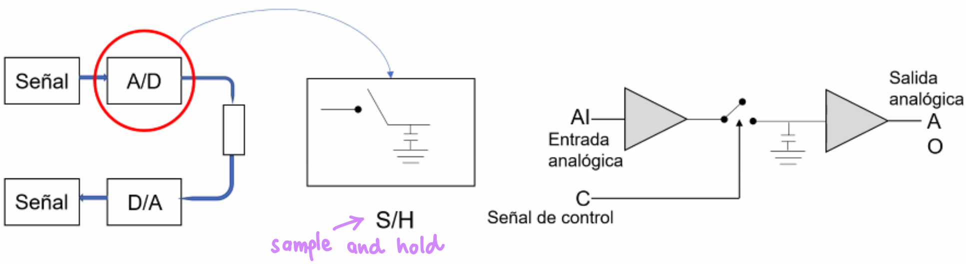


Proceso de Conversión Analógico-Digital



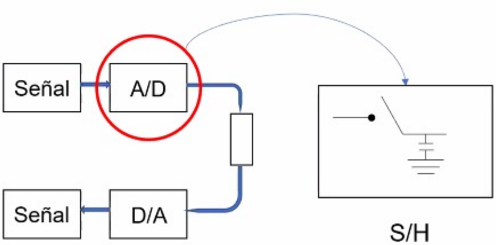
DE ANTIOQUIA

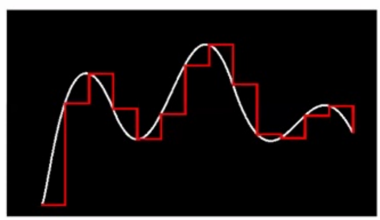
Proceso de Conversión Analógico-Digital



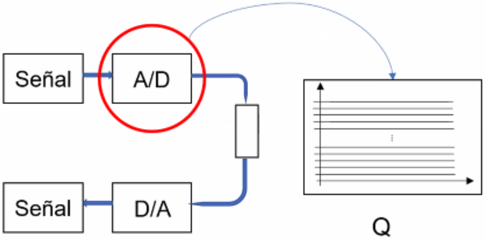
- Para muestreo el *switch* se cierra y el capacitor es conectado a un buffer amplificador. En “hold”, el *switch* se abre y el capacitor se descarga durante un tiempo determinado.

Proceso de Conversión Analógico-Digital





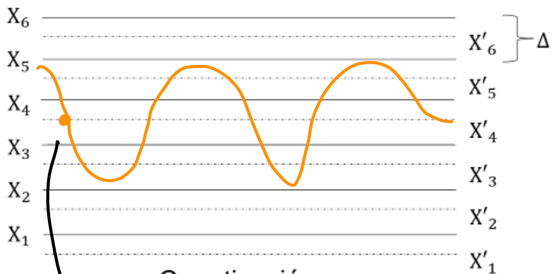
Muestreo y Retención
(S/H – Sample and Hold)



8 niveles de cuantización

$2^3 = 8 \rightarrow$ 3 bits para los 8 niveles.

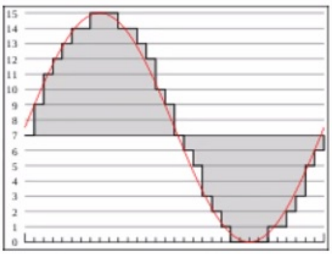
000, 001, 010, …, 111

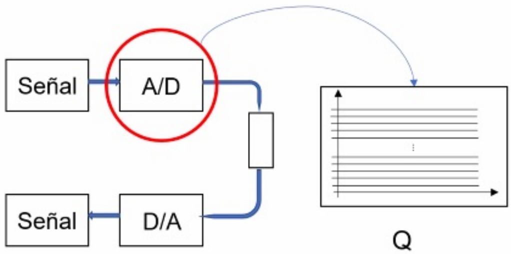


Cuantización

X_q : Niveles de cuantización.
X'_p : Niveles de decisión.

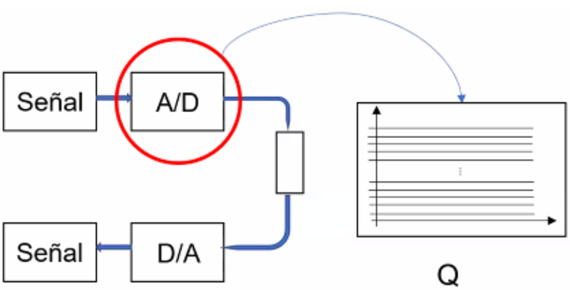
Si quiero analizar la muestra, lo hago con el nivel de cuantización más cercano. → surge el error de cuantización





Circuito de decisión y codificación

- Asigna valores discretos a los niveles de amplitud de la señal (pueden ser codificados según aplicación).
- Código binario a los valores de amplitud (ej. PCM).



Circuito de decisión y codificación

- Codificar significa asignar códigos discretos a muestras cuantizadas.

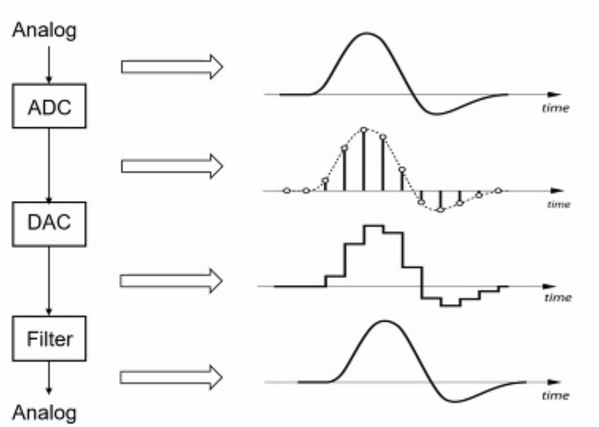
Valor	Complemento A2	Complemento A1	Signo-Magnitud
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
-0	0000	1111	1000
-1	1111	1110	1001
-2	1110	1101	1010
-3	1101	1100	1011
-4	1100	1011	1100
-5	1011	1010	1101
-6	1010	1001	1110
-7	1001	1000	1111

Proceso ADC

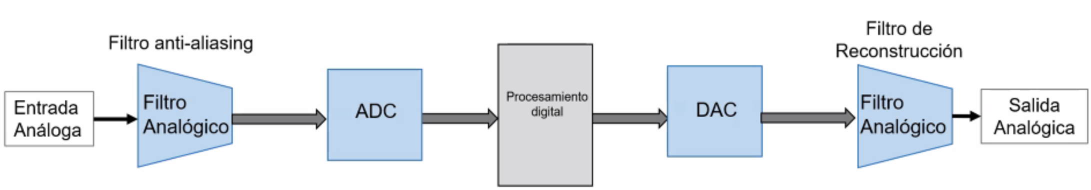
- Primero la señal (de banda limitada) es **muestreada**, convirtiéndose en una **señal de tiempo discreto y continua en amplitud**.
- La amplitud de la señal es **cuantizada** usando 2^B valores, donde B es el número de bits usados para representar una muestra en el ADC.
- Los **niveles discretos de amplitud** son representados o **codificados** en diferentes palabras binarias de longitud de *B bits*.

- **Señal analógica (entrada):** continua en tiempo y en amplitud.
- **Señal muestreada:** definida en valores discretos de tiempo. La señal es cero excepto en tiempo t=nT (instantes de muestreo).
- **Señal digital:** x[n] (n=0,1,…): existe sólo en valores discretos de tiempo relacionado a un sólo valor entre los 2^B posibles.

Estas son las señales que nos conciernen en este curso



ADC - DAC



Señales de Tiempo Discreto

Definida en intervalos de tiempo discreto equiespaciados.

Se representa como una secuencia de números.

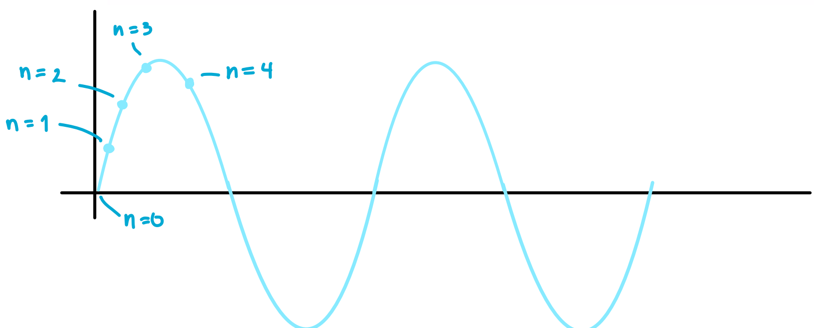
La secuencia se denota como $x[n]$

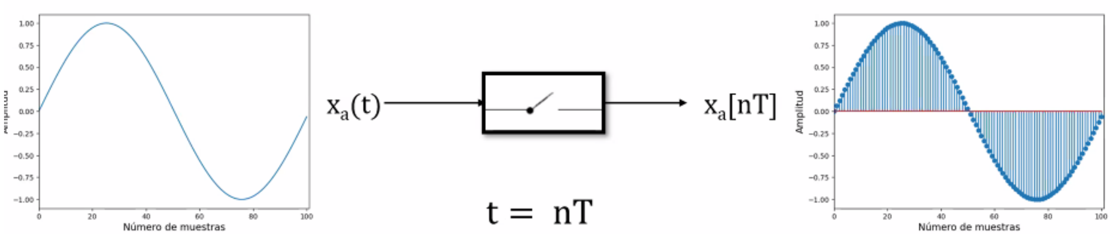
- Donde n es un número entero en el rango $(-\infty, \infty)$

- Una señal discreta se obtiene al muestrear periódicamente una señal continua en intervalos uniformes de tiempo.

- El periodo de muestreo es denotado como T_s

- La frecuencia de muestreo es entonces: $F_s = 1/T_s$





- **Ejemplo 1:**

Considere la señal analógica:

$$x_a(t) = 3\cos(50\pi t) + 100\text{sen}(300\pi t) - \cos(100\pi t)$$

¿Cuál es la tasa de Nyquist para esta señal?

$$f_1 = \frac{50\pi}{2\pi} = 25\ \text{Hz}; \quad f_2 = \frac{300\pi}{2\pi} = 150\ \text{Hz}; \quad f_3 = \frac{100\pi}{2\pi} = 50\ \text{Hz};$$

$$f_{max} = ? \rightarrow 150\ \text{Hz}; \quad F_s \geq 2f_{max} = 300\ \text{Hz} \rightarrow \text{Tasa de Nyquist}$$

- Si $100\text{sen}(300\pi t)$ se muestrea a 300Hz, corresponde con las muestras:

$100\text{sen}(\pi n) \rightarrow$ siempre cierto

$100\text{sen}(300\pi n + \varphi) \rightarrow \varphi \neq 0$ ó π

$v(t) = 100\text{sen}(300\pi t)$, $t = nT$, $T = \frac{1}{f}$, $t = \frac{n}{f}$, $f = 300\text{Hz}$ frecuencia de Nyquist

$$v(t) = 100\text{sen}\left(\frac{300\pi n}{300}\right) = 100\text{sen}(\pi n)$$

- Ejemplo 3:

$$x_a(t) = 3\cos(2000\pi t) + 5\text{sen}(6000\pi t) + 10\cos(12000\pi t)$$

¿Tasa de Nyquist?

$$2000\pi = 2\pi f_1; \quad 6000\pi = 2\pi f_2; \quad 12000\pi = 2\pi f_3$$

$f_1 = 1\text{KHz}$, $f_2 = 3\text{KHz}$, $f_3 = 6\text{KHz}$

Tasa de Nyquist $\rightarrow f_s \geq 2f_{máx} \rightarrow 12\ \text{KHz}$

PERIODICIDAD DE UNA SEÑAL

$e^{j(\omega n - \theta)}$, $\omega = 2\pi f$

$e^{\pm j\theta} = \cos\theta \pm j \operatorname{sen}\theta$

$f = \frac{N}{M}$, N y $M \in \mathbb{Z}$

- $x[n] = e^{j[\frac{n}{3} - \pi]} \rightarrow \omega = \frac{1}{3}$, $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{6\pi}$ no es periódica porque π es irracional

- $x[n] = e^{j(\frac{2\pi}{4}n - 2\pi)}$, $\omega = \frac{\pi}{2} \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{4} \rightarrow$ periódica

- $x(t) = 200\sin(400\pi t) - 150\cos(300\pi t)$, hallar frecuencia de nyquist.

  $\omega_1 = 400\pi$, $f_1 = \frac{\omega}{2\pi} = 200\,Hz$ $\qquad$ $\omega_2 = 300\pi$, $f_2 = \frac{\omega}{2\pi} = 150\,Hz$

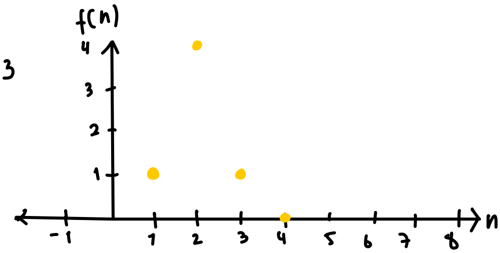
frecuencia de nyquist $f_s \geq 2f_{máx} \rightarrow f_s = 400\,Hz$

Si uso $f_s = 300Hz \rightarrow x(t) = 200\sin\left(\frac{400\pi}{300}\right) - 150\cos\left(\frac{300\pi}{300}\right) = 200\sin\left(\frac{4\pi}{3}n\right) - \underbrace{150\cos(n\pi)}_{\text{oscila entre 1 y -1}}$

Si $f_s = 400Hz \rightarrow x(t) = 200\sin(n\pi) - 150\cos\left(\frac{3\pi}{4}n\right)$

REPRESENTACIÓN DE SECUENCIAS

funcional $\begin{cases} 1, & n = 1,3 \\ 4, & n = 2 \\ 0, & \text{otro} \end{cases}$



Tabular

n	1	2	3	4	5	6
f(n)	1	4	1	0	0	0

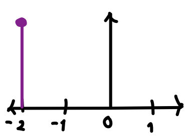
En secuencia $f(n) = [\,\ldots, 0, 0, 1, 4, 1, 0, 0, \ldots]$ $\uparrow n=0$

denota con una flecha el origen temporal con n=0

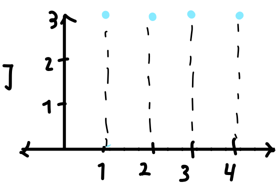
- Representar $x[n] = 2\delta(n+2)$

amplitud $\rightarrow \infty$

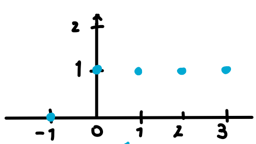
área $\rightarrow 2$



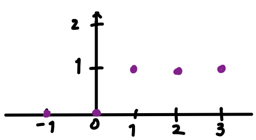
- $x[n] = 3u[n-1]$



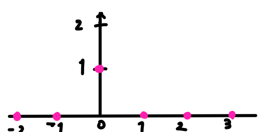
- $u[n] - u[n-1]$



$u[n]$



$u[n-1]$



$u[n] - u[n-1] = \delta[n]$

- Si tengo $x[n]\,u[n]$ me aseguro que $x[n]$ solo existe para muestras mayores a cero o n.

Clasificación

Duración: secuencias de longitud finita e infinita.

$$x[n] = 0 \rightarrow \forall_n \in [N_1, N_2, N_3, N_4]$$

Periodicidad: secuencias que se repiten cada cierto número de muestras.

- $x[n] = e^{jn\frac{\pi}{8}}$, $\underset{\text{forma general}}{\underset{\downarrow}{e^{j\omega n}}}$, $\omega = \frac{2\pi}{N}$, $e^{j\frac{2\pi}{N}n}$, $\omega = \frac{\pi}{8}$

¿es periódica?

$\omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\pi}{8(2\pi)} = \frac{1}{16}$ sí

SEÑALES DE ENERGÍA Y POTENCIA

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \qquad P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

cambio de la energía respecto al número de muestras

$E \to \infty$ para señales periódicas

$\boxed{\sum_{j=1}^{n} 1 = n}$

Señal de energía

$E_x \neq \infty$, $P_x = 0$

Señal de Potencia

$E_x \to \infty$, $P_x \neq \infty$

- $x[n] = u[n]$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |1|^2 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + \ldots = \infty$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}(E') \qquad \text{Y tengo que } E' = \sum_{n=0}^{N} 1^2 = N+1$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}(E') = \lim_{N\to\infty} \frac{N+1}{2N+1} = \frac{1 + \cancel{\frac{1}{N}}^{\,0}}{2 + \cancel{\frac{1}{N}}^{\,0}} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Si es } u[a],\ E = \sum_{n=-a}^{\infty}}$

- $x[n] = 0.5^n u[n]$ existe a partir de cero

$$\sum_{r=0}^{\infty} A^r = \frac{1}{1-A}, \ |A| < 1$$

$$E = \sum_{n=0}^{\infty} (0.5^n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (0{,}5^2)^n \qquad \text{Y usamos } \sum_{i=p}^{N} r^m = \frac{r^p - r^{N+1}}{1-r}$$

$0.25 \times 0{,}25 \times 0{,}25 \times \ldots = 0$

$$E = \frac{(0{,}25)^0 - (0{,}25)^{\infty+1}}{1 - 0{,}25} = \frac{1-0}{1-0{,}25} = \frac{4}{3}$$

$$P = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\left(\frac{4}{3}\right) = 0$$

- $X[n] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & n \geq 1 \\ 0 & n \leq 0 \end{cases}$

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots = \infty$$

$$P = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots\right) = 0$$

OPERACIONES

$y[n] = \alpha X[n] \rightarrow$ atenuaciones o amplificaciones.

$y[n] = X[n] + m[n] \rightarrow$ Ambas señales deben tener igual n, porque se suman muestra a muestra.

$y[n] = X[n \pm k] \rightarrow$ $n-k$ = retraso, $n+k$ = adelanto.
pasado / futuro

$X[n] \rightarrow z^{-m} \rightarrow X[n-m]$ atraso.

DIFERENCIA HACIA ATRÁS DE UNA FUNCIÓN

* $\Delta f[n] = f[n] - f[n-1]$

  - $f[n] = 2n^2 \rightarrow \Delta f[n] = 2n^2 - 2[n-1]^2$

* $\Delta^2 f[n] = \Delta\{\Delta f[n]\} = \Delta\{f[n] - f[n-1]\} = f[n] - 2f[n-1] + f[n-2]$

* $\Delta^3 f[n] = \Delta\{\Delta^2 f[n]\} = f[n] - 3f[n-1] + 3f[n-2] - f[n-3]$

* Diferencia de productos

$\Delta\{f[n]\}\Delta\{g[n]\} = f[n]g[n] - f[n]g[n-1] - f[n-1]g[n] + f[n-1]g[n-1]$

* Diferencia de productos

$$\Delta\{f[n]g[n]\} = f[n]g[n] - f[n-1]g[n-1]$$

- $f[n]=2n, \; g[n]=n$

$$\Delta\{f[n]g[n]\} = 2n^2 - [2(n-1)(n-1)] = 2n^2 - [(2n-2)(n-1)] = 4n-2$$

Transformación General

$$y[n] = A\,x\left(\frac{\alpha}{\beta}(n+m)\right)$$

factor de compresión/reflexión

cantidad de adelanto/retraso

factor de amplificación/atenuación/inversión de fase

$\in \mathbb{Z}$ factor de dilatación

$2n=0 \to 0$

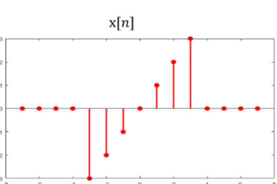
$2n=1 \to 1/2$

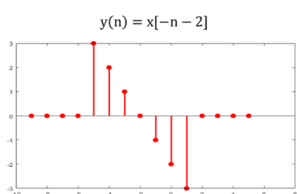
} compresión si $\alpha > 1$

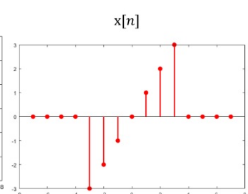
- $x[n] = \begin{cases} n & -3 \le n \le 3 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$ sea $m=2$ un retraso

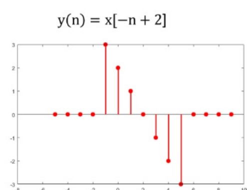
a) $y[n] = x[-n-2]$

b) $y[n] = x[-n+2]$









Filtro de Media Móvil

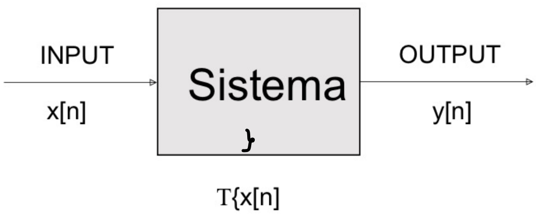
$m = \frac{a+b}{2}$

El filtro hace el promedio del valor de las muestras o los puntos en una ventana de muestras.

$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$ media móvil local

Sistemas de Tiempo Discreto

Si la señal de entrada al sistema es de tiempo discreto, la señal de salida será de tiempo discreto.



Un Sistema es Lineal Si y Solo Si:

- **Aditividad**

$$T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$$

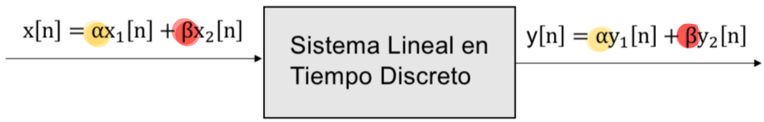
- **Escalamiento**

$$T\{ax[n]\} = aT\{x[n]\} = ay[n]$$

Donde a es una constante arbitraria.

Superposición

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ay_1[n] + by_2[n]$$



Sistema Acumulador – Sistema Lineal:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$y_1[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k],$$

$$y_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k],$$

$$y_3[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} (ax_1[k] + bx_2[k]) = ay_1[n] + by_2[n]$$

Un Sistema NO Lineal:

$$y[n] = \log_{10}(|x[n]|)$$

Considere $x_1[n] = 1$ y $x_2[n] = 10$

Sistemas Invariantes en el Tiempo

Un retraso en la secuencia de entrada corresponde a un retraso en la secuencia de salida:

$$x_1[n] = x_1[n - n_0] \rightarrow y_1[n] = y_1[n - n_0]$$

Sistema Causal: presente y pasado.

- Cambios en la salida, no significan cambios en la entrada.
- $y[n_0]$ depende solo de $x[n]$ para $n \leq n_0$
- Ejemplo: $y[n] = x[n] - x[n-1]$

antes

Sistema Estable: Entrada finita → respuesta finita

- Para una entrada limitada, la salida está limitada también (BIBO, Bounded Input - Bounded Output).
- Si $y[n]$ es la respuesta a $x[n]$, y Si $|x[n]| < B_x$ para todo n, Entonces, $|y[n]| < B_y$ para todo n, Donde B_x y B_y son constantes positivas y finitas.

Relación entre Entrada y Salida

- Un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI, Linear Time-Invariant) satisface las propiedades de linealidad e invarianza.
- Un sistema LTI está caracterizado por la respuesta al impulso.

Ejemplo:

$$x[n] = 0.5\delta[n-2] + 1.5\delta[n-1] - \delta[n-4]$$

Resultará en:

$$y[n] = 0.5h[n-2] + 1.5h[n-1] - h[n-4]$$

$$\delta(n) \rightarrow \boxed{H} \rightarrow h[n]$$

respuesta natural

- ## Ejemplo:

Linealidad e invarianza temporal

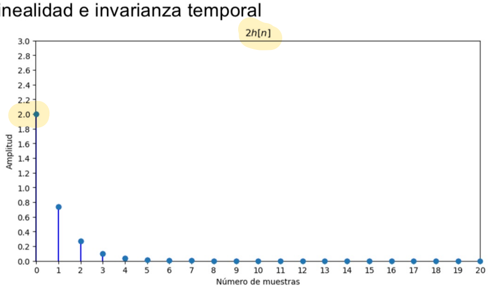
$$y[n] = \mathcal{H}\{2\delta[n] + 3\delta[n-1] + \delta[n-2]\}$$

$$y[n] = 2\mathcal{H}\{\delta[n]\} + 3\mathcal{H}\{\delta[n-1]\} + \mathcal{H}\{\delta[n-2]\}$$

$$y[n] = 2h[n] + 3h[n-1] + h[n-2]$$

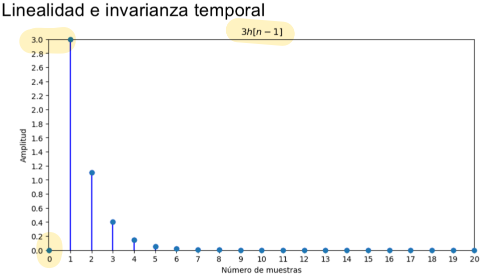
- **Ejemplo:**

Linealidad e invarianza temporal



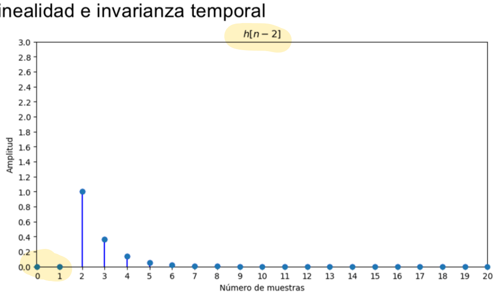
- **Ejemplo:**

Linealidad e invarianza temporal

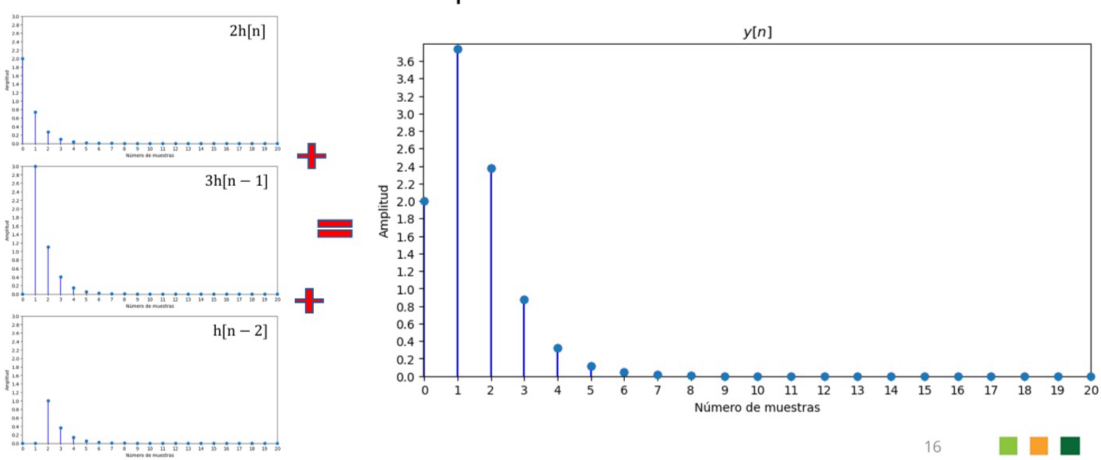


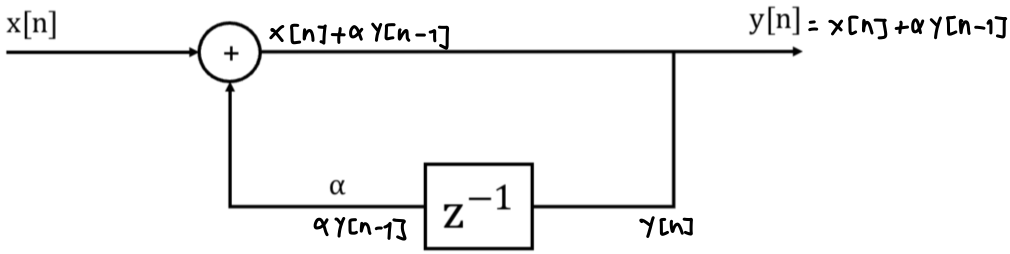
- **Ejemplo:**

Linealidad e invarianza temporal



Linealidad e invarianza temporal

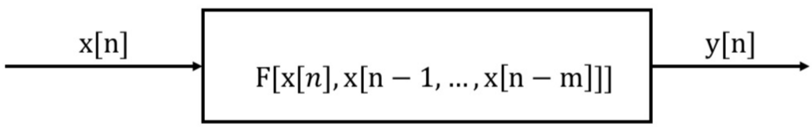




Sistemas no Recursivos

- Son aquellos en los que la salida se puede calcular secuencialmente conociendo únicamente las entradas.

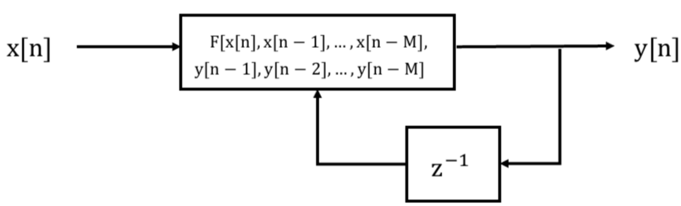
Ejemplo: $y[n] = a_1x[n] + a_2x[n-1] + a_3x[n-2]$



Sistemas Recursivos

- Son aquellos en los que la salida en un instante dado depende de entradas presentes y pasadas, y también de salidas pasadas (condiciones Iniciales).

- Ej: $y[n] = y[n-1] + x[n]$



Sistemas Recursivos

- Forma general de la relación entrada-salida de un sistema recursivo descrito por ecuaciones lineales de coeficientes constantes:

$$y[n] = -\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

- N es el orden de la ecuación en diferencias u orden del sistema.
- Para calcular la salida para n ≥ 0 se deben conocer la entrada para n ≥ 0 y N condiciones iniciales.

Solución de Ecuación en Diferencias

- Método Iterativo (ejemplo): $y[n] = ay[n-1] + x[n]$

$$y[0] = ay[-1] + x[0]$$
$$y[1] = ay[0] + x[1] = a^2 y[-1] + ax[0] + x[1]$$
$$y[2] = ay[1] + x[2] = a^3 y[-1] + a^2 x[0] + ax[1] + x[2]$$
$$\vdots$$
$$y[n] = a^{(n+1)} y[-1] + \sum_{k=0}^{n} a^k x[n-k]$$

Relación entre Entrada y Salida

- $x[n]$ se puede expresar de la manera:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- Donde $x[k]$ denota la $k-\acute{e}sima$ muestra de la secuencia $\{x[n]\}$.
  - La respuesta del sistema LTI es:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k]$$

  - … o representado como:

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

¡¡¡Convolución!!!

Propiedades de la Convolución

- **Conmutativa**

$$x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$$

- **Distributiva**

$$x_1[n] * (x_2[n] + x_3[n]) = x_1[n] * x_2[n] + x_1[n] * x_3[n]$$

- **Asociativa**

$$(x_1[n] * x_2[n]) * x_3[n] = x_1[n] * (x_2[n] * x_3[n])$$

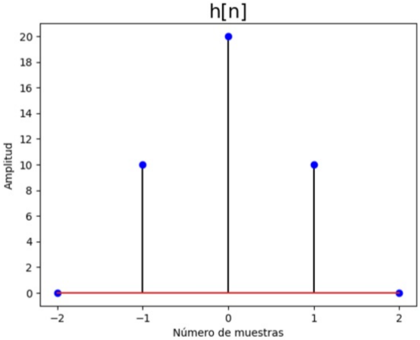
Convolución

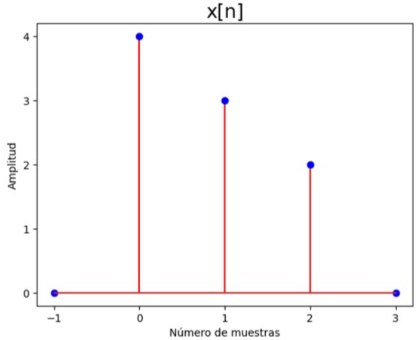
$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

Ingredientes:
- Una secuencia $x[n]$
- Una segunda secuencia $h[n]$

Receta:
- Cambiar al dominio de k
- Inversión temporal a $h[n]$
- A cada paso de n (desde -∞ a ∞)
  - Centrar la inversa de $h[n]$ en n (desplazar por $-n$)
  - Calcular el producto interno

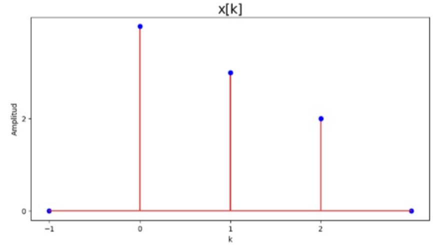
- **Ejemplo 1:** Sistema con respuesta $h[n]$, alimentado con una señal $x[n]$. Determine la salida por convolución.



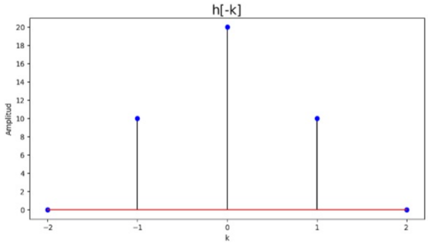


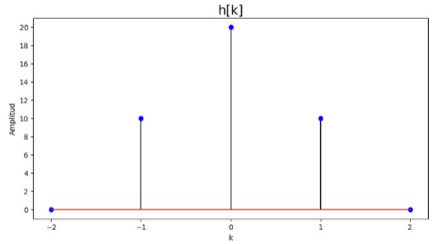
- **Solución:**

1. Cambiar n por k $\mathrm{x[n]} \rightarrow \mathrm{x[k]}$
   $\mathrm{h[n]} \rightarrow \mathrm{h[k]}$

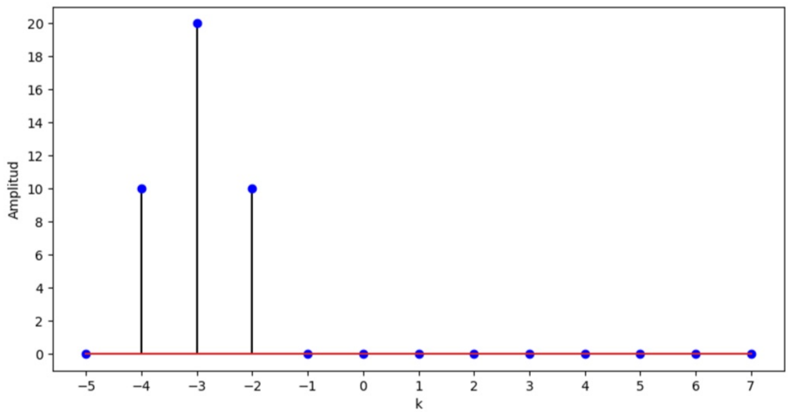


2. Reflejar $\mathrm{h[k]} \rightarrow \mathrm{h[-k]}$

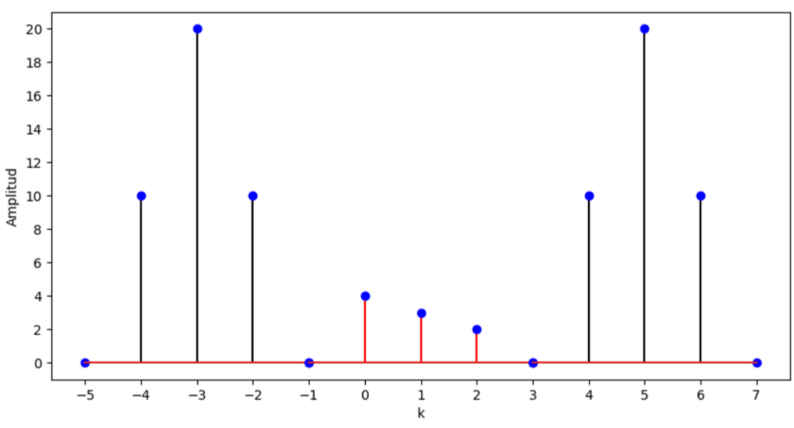




3. Desplazar $\mathrm{h[-k]}$ n unidades $\mathrm{h}[-k+n] \rightarrow \mathrm{h(n-k)}$

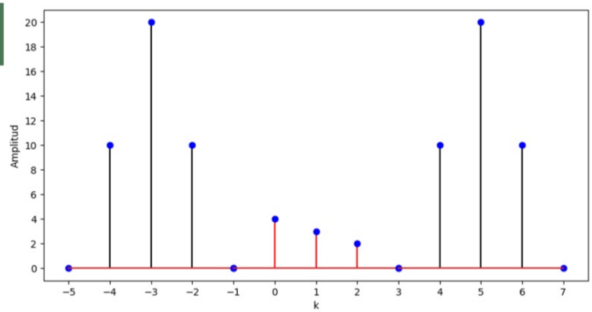


4. Buscar intervalos para los cuales $\mathrm{x[k]} \cdot \mathrm{h[n-k]} = 0$



5. Buscar intervalos para los cuales $x[k] \cdot h[n-k] = 0$

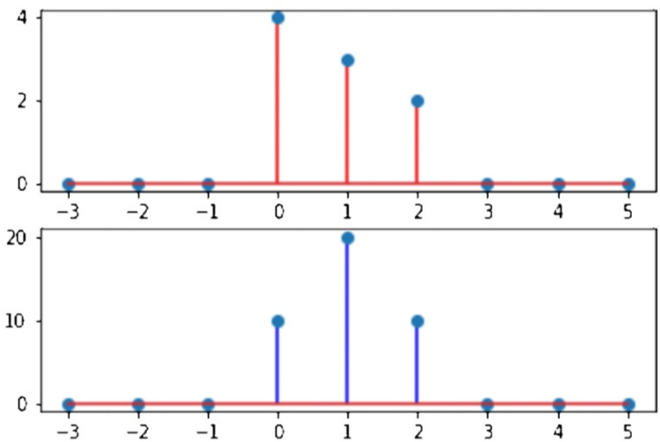
Comienzo y fin de la convolución.



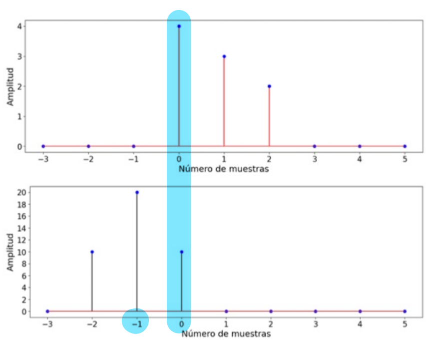
Izquierda
h[n-k] centrado en -1

Derecha
h[n-k] centrado en 3

6. Ir moviendo la señal y calculando.

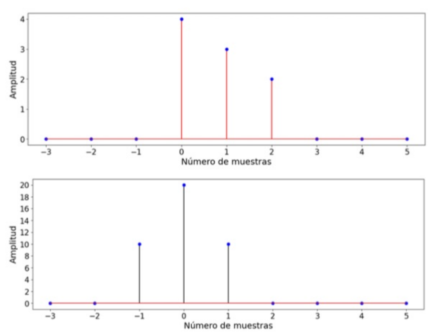


4. $y[k] = h[k] * x[k]$



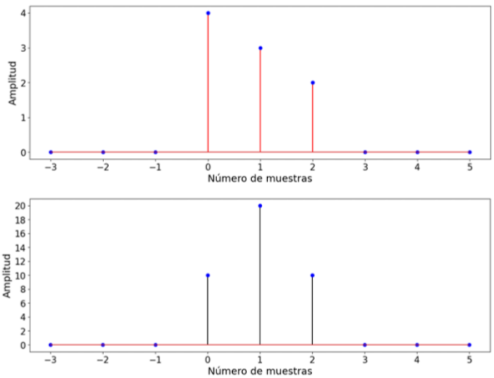
$n = -1$

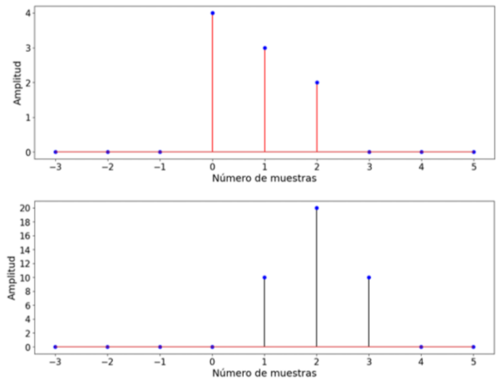
$y[-1] = 4 \cdot 10 = 40$



$n = 0$

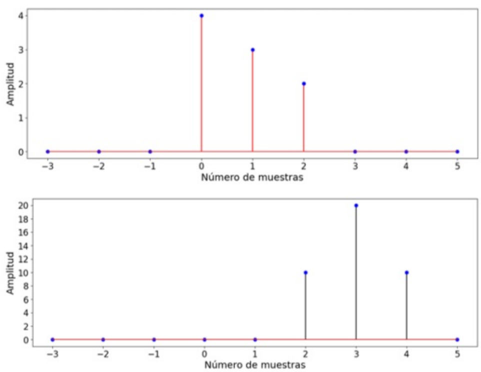
$y[0] = 4 \cdot 20 + 3 \cdot 10 = 110$

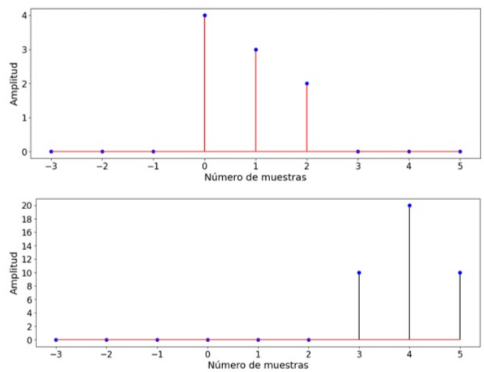




$$n = 1$$
$$y[1] = 2 \cdot 10 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 10 = 120$$

$$n = 2$$
$$y[2] = 2 \cdot 20 + 3 \cdot 10 = 70$$

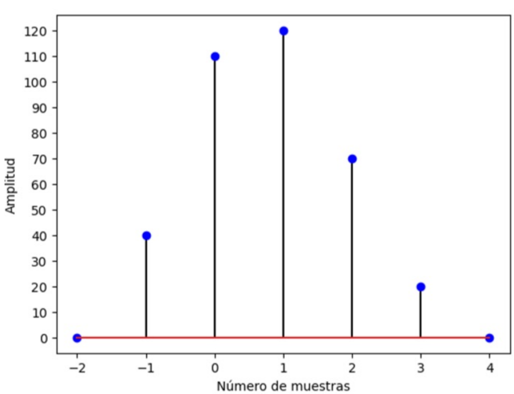




$$n = 3$$
$$y[3] = 2 \cdot 10 = 20$$

$$n = 4$$
$$y[4] = 0$$

$$y[n] = h[n] * x[n]$$



Salida del sistema ante x[n]

Ejemplo 2: Hallar la convolución

$$\begin{array}{c} n= \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \\ x[n] = [-2, 0, 1, -1, 3] \\ \uparrow \end{array}$$

$$\begin{array}{c} n= \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ h[n] = [1, 2, 0, -1] \\ \uparrow \end{array}$$

$$x[n] = [\overset{N_1}{-2}, 0, 1, -1, \overset{M_1}{3}]$$
$$\uparrow$$

$$h[n] = [\overset{N_2}{1}, 2, 0, \overset{M_2}{-1}]$$
$$\uparrow$$

Posiciones:

$$N_1 = 0$$
$$M_1 = 4$$
$$N_2 = 0$$
$$M_2 = 3$$

Sumo orígenes y finales

Limites

$$N_1 + N_2 \leq n \leq M_1 + M_2$$
$$0 \leq n \leq 7$$

$$x[k] = [-2, 0, 1, -1, 3]$$
$$\uparrow$$

$$h[n] = [1, 2, 0, -1] \rightarrow h[-k] = [-1, 0, 2, 1]$$

n = 0

$$x[k] = [-2, 0, 1, -1, 3]$$
$$h[-k] = [-1, 0, 2, 1]$$

$$y[0] = -2 \cdot 1$$

$$y[0] = -2$$

n = 2

$$x[k] = [-2, 0, 1, -1, 3]$$
$$h[-k] = [-1, 0, 2, 1]$$

$$y[2] = (-2 \cdot 0) + (0 \cdot 2) + (1 \cdot 1)$$

$$y[2] = 1$$

n = 1

$$x[k] = [-2, 0, 1, -1, 3]$$
$$h[-k] = [-1, 0, 2, 1]$$

$$y[1] = (-2 \cdot 2) + (0 \cdot 1)$$

$$y[1] = -4$$

n = 3

$$x[k] = [-2, 0, 1, -1, 3]$$
$$h[-k] = [-1, 0, 2, 1]$$

$$y[3] = (-2 \cdot -1) + (0 \cdot 0) + (1 \cdot 2) + (-1 \cdot 1)$$

$$y[3] = 3$$

$n = 4$

$$x[k] = [-2, 0, 1, -1, 3]$$
$$h[-k] = [-1, 0, 2, 1]$$

$$y[4] = (0 \cdot -1) + (1 \cdot 0) + (-1 \cdot 2) + (3 \cdot 1)$$

$$y[4] = 1$$

$n = 6$

$$x[k] = [-2, 0, 1, -1, 3]$$
$$h[-k] = [-1, 0, 2, 1]$$

$$y[6] = (-1 \cdot -1) + (3 \cdot 0)$$

$$y[6] = 1$$

$n = 5$

$$x[k] = [-2, 0, 1, -1, 3]$$
$$h[-k] = [-1, 0, 2, 1]$$

$$y[5] = (1 \cdot -1) + (-1 \cdot 0) + (3 \cdot 2)$$

$$y[5] = 5$$

$n = 7$

$$x[k] = [-2, 0, 1, -1, 3]$$
$$h[-k] = [-1, 0, 2, 1]$$

$$y[7] = (3 \cdot -1)$$

$$y[7] = -3$$

Solución Ejemplo 2:

$$x[n] = [-2, \underset{\uparrow}{0}, 1, -1, 3]$$

$$h[n] = [1, \underset{\uparrow}{2}, 0, -1]$$

Convolución:

$$y[n] = [\underset{\uparrow}{-2}, -4, 1, 3, 1, 5, 1, -3]$$

CORRELACIÓN

Determina el grado de similitud entre dos señales.

- **Comunicaciones**: El receptor compara las señales recibidas con los patrones de los símbolos que pueden ser enviados para su detección.

- **Radar y sonar**: las señales enviadas son reflejadas por el objeto y devueltas de nuevo al emisor. Comparando estas señales con las originales se puede obtener información del objeto.

- En muchas ocasiones las señales recibidas están contaminadas con ruido aditivo por lo que la detección es más compleja.

- Correlación Cruzada
- Autocorrelación
- Relación entre Correlación y Convolución

$$R_{xy}[\lambda] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-\lambda] \quad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

- λ: Desplazamiento (Lag). Representa el desplazamiento temporal entre ambas señales.

- La secuencia $y[n-\lambda]$ se desplaza λ muestras a la derecha respecto a $x[n]$ para $\lambda > 0$ y λ muestras hacia la izquierda para $\lambda < 0$.

Correlación Cruzada

señales diferentes

El orden de los sub-índices en R_{xy} indica que secuencia se queda fija y cuál se desplaza.

$$R_{xy}[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-\lambda]$$

$$R_{xy}[\lambda] = R_{yx}[-\lambda]$$

$R_{yx}[\lambda] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]x[n-\lambda]$ y cambio de variable $m = n-\lambda \rightarrow n = m+\lambda$

$\rightarrow R_{yx}[\lambda] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[m+\lambda]x[m]$ y reemplazo λ por $-\lambda$

$\rightarrow R_{yx}[-\lambda] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} y[m-\lambda]x[m] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]y[m-\lambda]$

Autocorrelación

$$R_{xx}[\lambda] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]x[n-\lambda] \qquad \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Si $\lambda = 0$

$$R_{xx}[0] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2[n] = E_x \rightarrow \text{Energía}$$

Relación entre Correlación y Convolución

$$R_{xy}[\lambda] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[n-\lambda]$$

$$R_{xy}[\lambda] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y[-[-n+\lambda]]$$

$$R_{xy}[\lambda] = x[n] * y[-n]$$

Hay similitudes en el cálculo, pero significados distintos.

$$x[n] \longrightarrow \boxed{y[-n]} \longrightarrow R_{xy}[n]$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{x[-n]} \longrightarrow R_{xx}[n]$$

Correlación

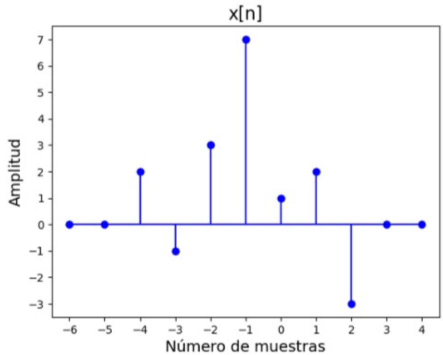
- Autocorrelación Normalizada

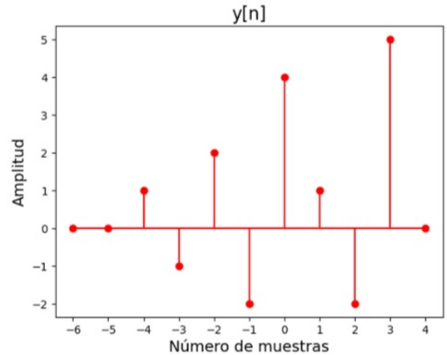
$$\rho_{xx}(\lambda) = \frac{R_{xx}(\lambda)}{R_{xx}(0)}$$

- Correlación Normalizada

$$\rho_{xy}(\lambda) = \frac{R_{xy}(\lambda)}{\sqrt{R_{xx}(0)R_{yy}(0)}}$$

- **Ejemplo 1:** Determine la Correlación cruzada $R_{xy}(\lambda)$ de las secuencias:





$$x[n] = [\dots, 0, 0, 2, -1, 3, 7, \underset{\uparrow}{1}, 2, -3, 0, 0, \dots] \qquad y[n] = [\dots, 0, 0, 1, -1, 2, -2, \underset{\uparrow}{4}, 1, -2, 5, 0, \dots]$$

$$x[n] = [\dots, 0, 0, 2, -1, 3, 7, \underset{\uparrow}{1}, 2, -3, 0, 0, \dots]$$

$$y[n] = [\dots, 0, 0, 1, -1, 2, -2, \underset{\uparrow}{4}, 1, -2, 5, 0, \dots]$$

$$x[n]y[n] = [\dots, 0, 0, 2, 1, 6, -14, 4, 2, 6, 0, 0, \dots]$$

→ Sumar

$$R_{xy}[0] = 2 + 1 + 6 - 14 + 4 + 2 + 6 = 7$$

quieta ← $x[n] = [\dots, 0, 0, 2, -1, 3, 7, \underset{\uparrow}{1}, 2, -3, 0, 0, \dots]$

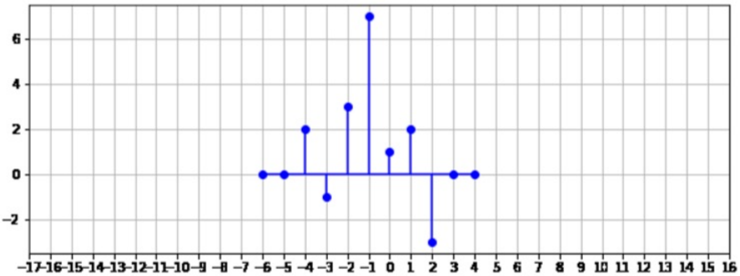
$$y[n] = [\dots, 0, 0, 1, -1, 2, -2, \underset{\uparrow}{4}, 1, -2, 5, 0, \dots]$$

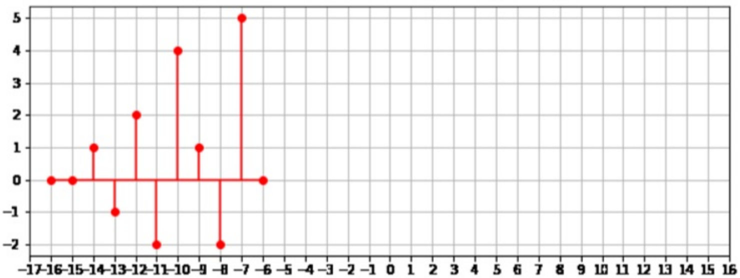
$$x[n]y[n] = [\dots, -1, -3, 14, -2, 8, -3, 0, \dots]$$

→ Sumar

$$R_{xy}[1] = -1 - 3 + 14 - 2 + 8 - 3 = 13$$

Ejemplo 2:





$R_{xy}(0) = 7$

$R_{xy}(1) = 13$

$R_{xy}(2) = -18$

$R_{xy}(3) = 16$

$R_{xy}(4) = -7$

$R_{xy}(5) = 5$

$R_{xy}(6) = -3$

$R_{xy}(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda \geq 7$

$R_{xy}(-1) = 0$

$R_{xy}(-2) = 33$

$R_{xy}(-3) = -14$

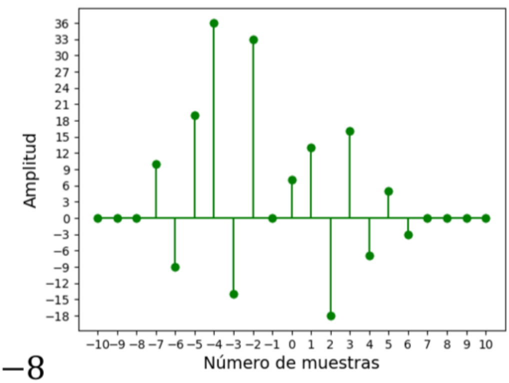
$R_{xy}(-4) = 36$

$R_{xy}(-5) = 19$

$R_{xy}(-6) = -9$

$R_{xy}(-7) = 10$

$R_{xy}(\lambda) = 0 \rightarrow \lambda \leq -8$



TRANSFORMADA Z

Transformar $x(t)$

Se consideran los valores muestreados de $x(t)$

- $x(0), x(T), x(2T), \ldots$
- T: Periodo de Muestreo

Transformada Z Unilateral

Solo cuento de 0 a ∞ para sistemas causales.

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Transformada Z Bilateral

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Transformada Z

$$X(z) = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots + x(n)z^{-k}$$

¡Series de potencia!

- La transformada Z solo existe para aquellos valores de z para los cuales la serie converge.
- **ROC (*Region of Convergence*)**
- Es un conjunto de valores de z para los cuales X(z) es finita.

NOTA: La transformada Z de una función x[n], debe tener su respectiva región de convergencia (ROC) bien definida, de lo contrario no es correcta la transformada.

$$X(z) \equiv Z\{x[n]\}$$

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z)$$

Señales de duración finita

$$x_1[n] = \underset{\uparrow}{[1}, 2, 5, 7, 0, 1]$$

$$X_1(z) = ?$$

$$x_1[n] = \underset{\uparrow}{[1}, 2, 5, 7, 0, 1]$$

$$X_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{5} x_1[n]z^{-n}$$

$$X_1(z) = 1 + 2z^{-1} + 5z^{-2} + 7z^{-3} + z^{-5}$$

$$\mathrm{ROC} = ???$$

$$\mathrm{ROC} = \text{Plano Z excepto } \{z = 0\}$$

Definir la ROC es fundamental para tener una correcta transformada Z

valores de z para los cuales converge.

$$x_3[n] = [\overset{0}{\underset{\uparrow}{0}}, \overset{1}{0}, \overset{2}{1}, \overset{3}{2}, \overset{4}{5}, \overset{5}{7}, \overset{6}{0}, \overset{7}{1}]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n}$$

$$x_4[n] = [\underset{-2}{2}, \underset{-1}{4}, \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{5}, \underset{1}{7}, \underset{2}{0}, \underset{3}{1}]$$

$$X_3(z) = ?$$
$$X_4(z) = ?$$

$$X_3(z) = \sum_{n=0}^{7} x_3[n]\, z^{-n} = z^{-2} + 2z^{-3} + 5z^{-4} + 7z^{-5} + z^{-7}$$

ROC plano z excepto $z=0$

$$X_4(z) = \sum_{n=-2}^{n=3} x_4[n]\, z^{-n} = 2z^{2} + 4z + 7z^{-1} + z^{-3}$$

ROC plano z excepto $z=0$ y $z=\infty$

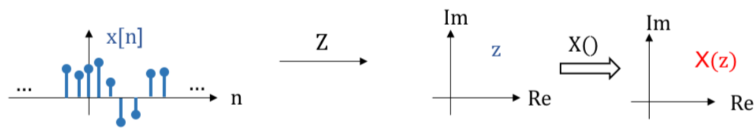
Hallar z de $x[n] = \delta[n]$, $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n] z^{-n} = 1$

Y su ROC es todo el plano z.

Definición Matemática

$$x[n] \xrightarrow{z} X(z) \qquad X(z) = Z[x[n]] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} \qquad \text{con} \quad z \in C$$

- Transforma una señal en el tiempo discreto x[n] en una función polinómica compleja de variable compleja.
- Forma alternativa de representar la señal. Los valores de la señal pasan a ser los coeficientes de un polinomio de variable compleja z.



$x[n] = \{\dots, x(-1), x(0), x(1), x(2), \dots\}$ $\qquad X(z) = \dots + x(-1)z + x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \cdots$

- **Función Delta**

$$\delta[n-k], k>0 \overset{Z}{\leftrightarrow} Z^{-k} \qquad \text{ROC: Plano Z} - \{|Z| = 0\}$$

$$\delta[n+k], k>0 \overset{Z}{\leftrightarrow} Z^{k} \qquad \text{ROC: Plano Z} - \{|Z| = \infty\}$$

- **Escalón Unitario**

ROC $|z^{-1}| < 1$

$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \to 1 < |z|$

$\to |z| > 1$

$|r| < 1$

$\sum_{i=p}^{n} r^i = \frac{r^p - r^{n+1}}{1-r}$

$$x[n] = \begin{cases} u[n] & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = Z\{1\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 z^{-n} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots$$

El escalón existe a partir de cero

$\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{r^0 - r^{\infty+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$

$|r| < 1$

$$\boxed{\sum A^r = \frac{1}{1-A}; \qquad |A| < 1}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$\sum A^r = \frac{1}{1-A}; \qquad |A| < 1$$

Escalón Unitario

$$X(z) \overset{\times\frac{z}{z}}{=} \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

¿Converge?

ROC $\quad |z^{-1}| < 1 \quad \therefore \quad |z| > 1$

Rampa Unitaria

$$x[n] = \begin{cases} n & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases} \quad = \quad X[n] = n\,u[n]$$

$$X(z) = Z\{n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} = z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots$$

$$\boxed{\sum rA^r = \frac{A}{(1-A)^2}; \qquad |A| < 1}$$

Rampa Unitaria

$$X(z) \overset{\frac{z^2}{z^2}\times}{=} \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

$$\sum rA^r = \frac{A}{(1-A)^2}; \qquad |A| < 1$$

¿Converge?

$|z^{-1}| < 1 \quad \therefore \quad |z| > 1$

$$\frac{z}{z^2(1-z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{z}{(z-1)^2}$$

- **Polinomial**

$$x[n] = \begin{cases} a^n & n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = Z\{a^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots$$

$$\hookrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad \text{con } |az^{-1}| < 1$$

$$\text{ROC} \quad |az^{-1}| < 1 \rightarrow \left|\frac{a}{z}\right| < 1 \rightarrow |a| < |z| \rightarrow |z| > |a|$$

$$\sum A^r = \frac{1}{1 - A}; \qquad |A| < 1$$

- **Polinomial**

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^1 z^{-1})^n$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

¿Converge?: $|az^{-1}| < 1 \quad \therefore \quad |z| > |a|$

Exponencial

$$x[n] = \begin{cases} e^{-an} & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (e^{-a} z^{-1})^n = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}}$$

$$X(z) = Z\{e^{-an}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} z^{-n}$$

$$X(z) = 1 + e^{-a} z^{-1} + e^{-a2} z^{-2} + e^{-a3} z^{-3} + \cdots$$

ROC $|e^{-a} z^{-1}| < 1 \rightarrow \left| \frac{e^{-a}}{z} \right| < 1 \rightarrow |z| > |e^{-a}|$

Senoidal

$$x[n] = \begin{cases} \operatorname{sen}(\omega n) & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Senoidal

$$\operatorname{sen}(\omega n) = \frac{1}{2j}\left(\overset{x_1[n]}{e^{j\omega n}} - \overset{x_2[n]}{e^{-j\omega n}}\right) = \left(\frac{1}{2j}\overset{x_1[n]}{e^{j\omega n}} - \frac{1}{2j}\overset{x_2[n]}{e^{-j\omega n}}\right)$$

$$\boxed{Z\{e^{-an}\} = \frac{1}{1 - e^{-a} z^{-1}}}$$

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega} z^{-1}}\right)$$

ROC $|e^{j\omega} z^{-1}| < 1 \rightarrow |z^{-1}| < 1 \rightarrow \cdots \rightarrow |z| > 1$

Senoidal

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega}z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega}z^{-1}}\right)$$

$$X(z) = \frac{1}{2j}\left(\frac{(e^{j\omega} - e^{-j\omega})z^{-1}}{1 - (e^{j\omega} + e^{-j\omega})z^{-1} + z^{-2}}\right)$$

Senoidal

$$X(z) = \frac{z^{-1}\mathrm{sen}(\omega)}{1 - 2z^{-1}\cos(\omega) + z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{z\mathrm{sen}(\omega)}{z^2 - 2z\cos(\omega) + 1}$$

PROPIEDADES

- **Linealidad:**

$$a_1x_1[n] + a_2x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$$

Ya que:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(a_1x_1[n] + a_2x_2[n])z^{-n} = a_1\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_1[n]z^{-n} + a_2\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_2[n]z^{-n}$$

Desplazamiento en el tiempo:

$$x[n-k] \overset{Z}{\leftrightarrow} z^{-k}X(z)$$

Convolución:

$$x_1[n] * x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z)X_2(z)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (x_1[n] * x_2[n])z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k) \right) z^{-n}$$

$$= \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n]z^{-n} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]z^{-n} \right)$$

¡Demostrar!

Dominio n

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] \qquad y[n] = h[n] * x[n]$$

Dominio Z

$$X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow Y(z) \qquad Y(z) = H(z)X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

función de transferencia

Ecuación en Diferencias

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

Ecuación en Diferencias

$$\left(\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\right) Y(z) = \left(\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}\right) X(z)$$

$$Y(z) = \frac{B(z)}{A(z)} X(z) \quad \rightarrow \quad H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Transformada Z: Otras Propiedades

- **Correlación:**……………………………………$r_{x_1 x_2}[n] \overset{z}{\rightarrow} X_1(z) X_2(z^{-1})$
- **Teorema del valor inicial:**………………………si $x[n]$ causal, $x(0) = \lim_{z \to \infty} X(z)$
- **Escalado en el dominio z:**……………………$a^n x[n] \overset{z}{\rightarrow} X(a^{-1} Z)$
- **Inversión temporal:**……………………………$x[-n] \overset{z}{\rightarrow} X(z^{-1})$
- **Conjugación:**………………………………………$x^*[n] \overset{z}{\rightarrow} X^*(z^*)$
- **Parte real:**…………………………...$\mathrm{Re}[x[n]] \overset{z}{\rightarrow} \frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$
- **Parte imaginaria:**…………………...$\mathrm{Im}[x[n]] \overset{z}{\rightarrow} \frac{1}{2}[X(z) - X^*(z^*)]$
- **Diferenciación en el dominio z:**...$nx[n] \overset{z}{\rightarrow} -z \frac{dX(z)}{dz}$
- **Multiplicación:**……………………...$x_1[n] x_2[n] \overset{z}{\rightarrow} \frac{1}{j2\pi} \oint_c X_1(v) X_2\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1} dv$
- **Relación de Parseval:**……………$\sum^{\infty} x_1[n] x_2^*[n] = \frac{1}{j2\pi} \oint_c X_1(v) X_2^*\left(\frac{2}{v^*}\right) v^{-1} dv$

Ejemplo 1:

$ROC: \left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \rightarrow \left|\frac{1}{2}\right| < |z| \rightarrow |z| > \frac{1}{2}$

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n$$

$$x(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \qquad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

- **Ejemplo 2:**

$$X(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

Tabla de Transformadas $x(t) = 1 - e^{-t}, t \geq 0$

Discretización $x[n] = (1 - e^{-nT})u[n]$

Ejemplo 2:

Ejemplo 2:

ROC 1: $|z^{-1}| < 1 \quad \therefore \quad |z| > |1|$

ROC 2: $|e^{-T}z^{-1}| < 1 \quad \therefore \quad |z| > |e^{-T}|$

ROC $\cap$

$$x[n] = (1 - e^{-nT})u[n]$$

$$x[n] = u[n] - e^{-nT}u[n]$$

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}$$

$$X(z) = \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} = \frac{(1-e^{-T})\,z}{(z-1)(z-e^{-T})}$$

Ejemplo 3:

- Hallar la función de transferencia del sistema $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n-1] + 2x[n]$$

lo llevo a z

$$Y(z) = \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} + 2X(z)$$

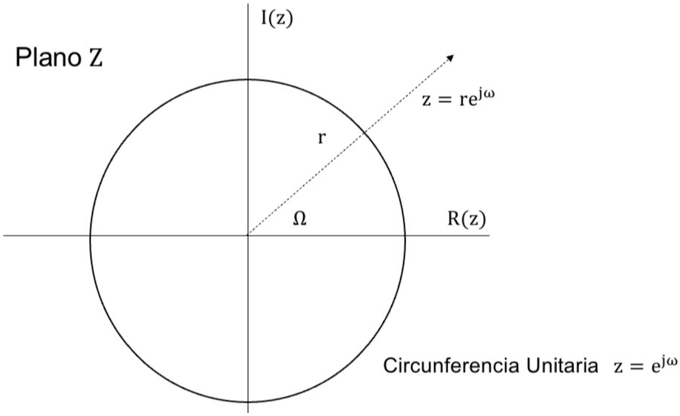
$$Y(z) - \frac{1}{2}Y(z)z^{-1} = 2X(z)$$

$$Y(z)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) = 2X(z)$$

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Transformada Z: Convergencia



- $X(z)$ es una serie de potencias
- Puede haber valores de Z en los que no converge
- El conjunto de puntos en los que $X(z)$ converge se llama Región de convergencia (ROC).

$$z \in \mathrm{ROC} \leftrightarrow |X(z)| < \infty$$

Ejemplo 1:

$$x[n] = a^n\, u[n]$$

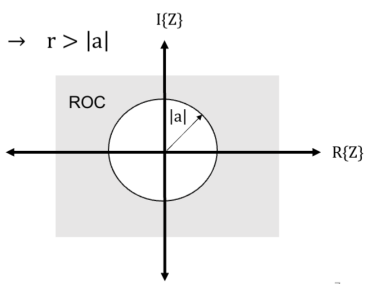
$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad |z| > |a| \quad \rightarrow \quad r > |a|$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n$$

$$X(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$\left(\frac{a}{z}\right)^n = A^n \rightarrow \text{Converge} \ \ |A| < 1$$

$$\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad |z| > |a| \quad \rightarrow \quad r > |a|$$



Converge para los valores por fuera de la a

Ejemplo 2:

entre $(-\infty, -1)$

$$x[n] = -a^n\, u[-n-1]$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} (a^1 z^{-1})^n$$

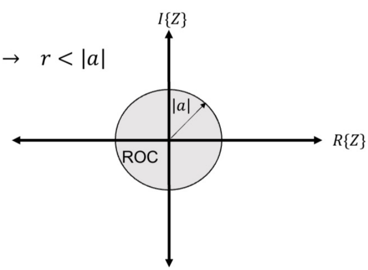
$$= -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{a}{z}\right)^{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^{-n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{n} = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{n} - 1\right)$$

$$X(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a}\right)^{n}$$

$$\left|\frac{z}{a}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad |z| < |a| \quad \rightarrow \quad r < |a|$$

$$X(z) = 1 - \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$\left|\frac{z}{a}\right| < 1 \quad \rightarrow \quad |z| < |a| \quad \rightarrow \quad r < |a|$$



Ejemplo 3:

$$x[n] = a^n u[n] + b^n u[-n-1]$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (b^{-1}z)^n$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (az^{-1})^n + \sum_{n=1}^{\infty} (b^{-1}z)^n \qquad \boxed{\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \quad \left|\frac{z}{b}\right| < 1}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (b^{-1}z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (b^{-1}z)^n - 1 \;\rightarrow\; \frac{1}{1-b^{-1}z} - 1 = -\frac{1}{1-bz^{-1}}}$$

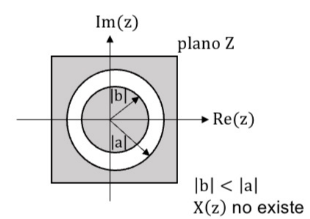
$$X(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} - \frac{1}{1-bz^{-1}}$$

$$\boxed{\left|\frac{a}{z}\right| < 1 \quad \left|\frac{z}{b}\right| < 1}$$

$\rightarrow |z| > |a|$

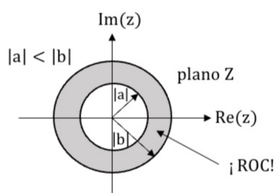
$\rightarrow |b| > |z|$

ROC: ¿?



En este caso las 2 ROC no se traslapan. Por lo tanto, no hay valores de z para los cuales ambas series de potencia converjan simultáneamente.

X(z) NO existe



En este caso hay un anillo en el plano z donde ambas series de potencia convergen simultáneamente.

X(z) existe

Ejemplo 4:

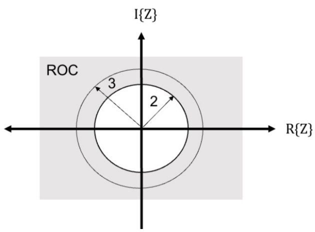
$$x[n] = [3(2^n) - 4(3^n)]u[n]$$

$$x_1[n] = 3(2^n)u[n]$$

$$x_2[n] = -4(3^n)u[n]$$

$$ROC_1: |z| > 2 \qquad ROC_2: |z| > 3$$

$$X_1(z) = 3\left[\frac{1}{1-2z^{-1}}\right] \qquad X_2(z) = -4\left[\frac{1}{1-3z^{-1}}\right]$$



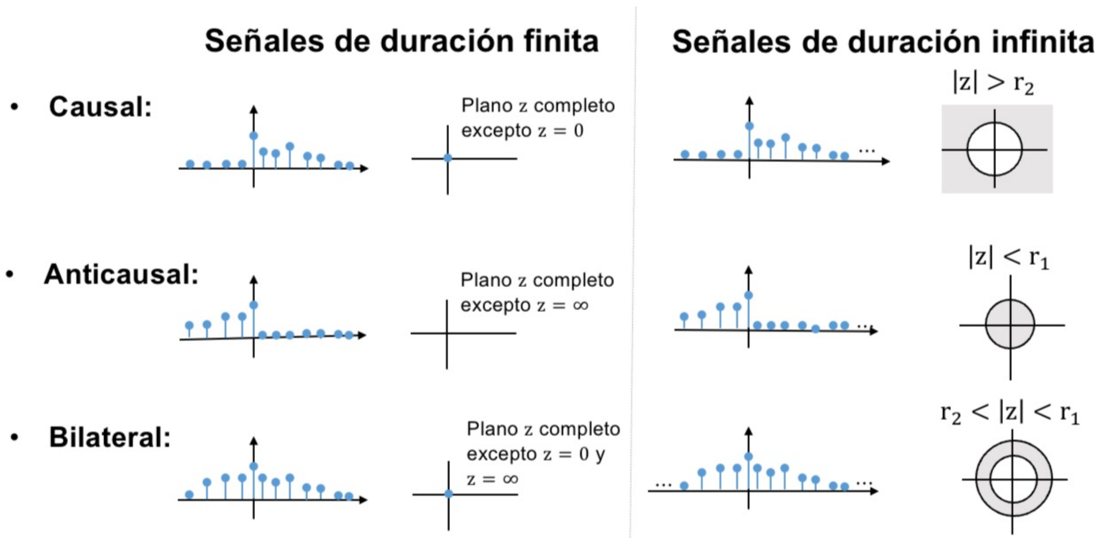
$$X(z) = \frac{3}{1-2z^{-1}} - \frac{4}{1-3z^{-1}}$$

$$ROC_1: |z| > 2$$

$$ROC_1: |z| > 3$$

$$ROC:\ X(z) \rightarrow |z| > 3$$

Transformada Z: Convergencia



Secuencia temporal	Transformada	ROC
$\delta[n-m]$	z^{-m}	Todo z excepto 0 (m>0) o ∞ (m<0)
$a^n u[n]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-a^n u[-n-1]$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$na^n u[n]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
$-na^n u[-n-1]$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
$\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$	$\dfrac{1-z^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 0$
$\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{1-\cos\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
$\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\dfrac{\sin\omega_0 z^{-1}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$

Transformada Z: Polos Y Ceros

- Se llama **ceros** a los valores de **z** para los que $X(z) = 0$
- Se llama **polos** a los valores de **z** para los que $X(z) = \infty$
- La expresión racional compacta:

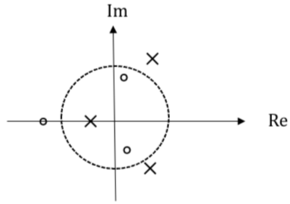
$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

- Puede escribirse utilizando las raíces de los polinomios numerador y denominador:

$$X(z) = \frac{b_0}{a_0}\frac{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})\ldots(1-z_Mz^{-1})}{(1-P_1z^{-1})(1-P_2z^{-1})\ldots(1-P_Nz^{-1})} = Gz^{N-M}\frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_M)}{(z-P_1)(z-P_2)\ldots(z-P_N)}$$

Se dice que $X(z)$ tiene:

- M **ceros** $z_1, z_2, \ldots$
- N **polos** $p_1, p_2, \ldots$
- **Ganancia** $\mathbf{G} = b_0/a_0$



La transformada Z puede mostrarse gráficamente mediante su diagrama de polos y ceros. Los polos se representan mediante de aspas y los ceros mediante de círculos.

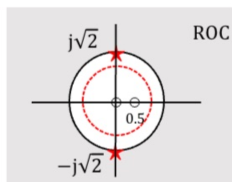
- Si se dispone de una expresión de la transformada Z que utilice polos y ceros:

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = G\frac{(1-z_1z^{-1})(1-z_2z^{-1})\ldots(1-z_Mz^{-1})}{(1-P_1z^{-1})(1-P_2z^{-1})\ldots(1-P_Nz^{-1})}$$

- Las posiciones de los polos determinan la frontera de la ROC, ya que la ROC no puede contenerlos.

- Si $x[n]$ es causal, la ROC se extiende del polo más externo al infinito.

- Ejemplo: x(n) causal



$$X(z) = 2\frac{1-0.5z^{-1}}{1+2z^{-2}} = 2\frac{z^2-0.5z}{z^2+2}$$

Polos en

$z^2+2=0 \to z^2=-2$

$z=\sqrt{-2} = \pm\sqrt{2}j$

$z(z-0{,}5)$

ceros en $z=0{,}5$

$z=0$

Diagramas De Polos: Estabilidad Y Causalidad

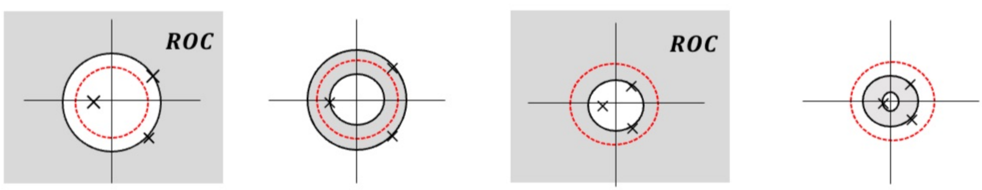
- **Sistema LTI causal** equivale a decir $h[n]$ causal, y por tanto: La ROC es el exterior del polo de mayor módulo.

- **Sistema LTI estable** equivale a decir $h[n]$ absolutamente sumable, y por tanto en puntos de la circunferencia unidad:

$$\left|H(z)_{|z|=1}\right| = \left|\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n](z^{-n})_{|z|=1}\right| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|h[n](z^{-n})_{|z|=1}\right| = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

- Es decir: La **ROC** de $h[n]$ incluye la circunferencia unitaria.

- En un **Sistema LTI, causal estable** equivale a decir: **Todos los polos están en el interior de la circunferencia unidad**



Causal inestable | No Causal inestable | Causal estable | No Causal estable

Diagramas De Polos: Sistemas De Fase Mínima

- Un sistema LTI T_2 se dice inverso de otro T_1 si:

$$h_1[n] * h_2[n] = \delta[n] \text{ o } H_2(z) = \frac{1}{H_1(z)}$$

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h_1[n]} \longrightarrow \boxed{h_2[n]} \longrightarrow x[n]$$

- Si el sistema tiene transformada Z racional:

$$H_1(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \rightarrow H_2(z) = \frac{A(z)}{B(z)}$$

- Se llama sistema de fase mínima a un sistema LTI estable y causal y con inverso estable y causal.
- Un sistema LTI causal será de fase mínima si todos sus polos y ceros se encuentran dentro de la circunferencia unidad.

Ejemplo 5:

- Dibujar polos y ceros

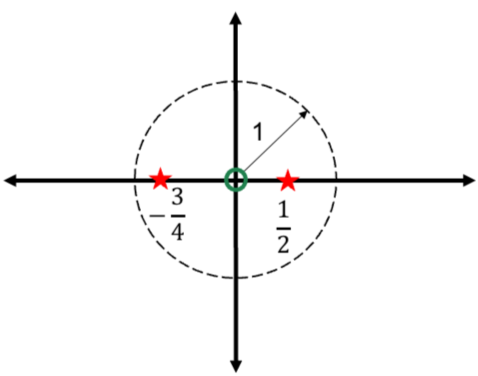
Lo 1ro que debo hacer es quitar z^{-1}

$$H(z) = \frac{z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 + \frac{3}{4}z^{-1}\right)} \rightarrow \frac{z^2}{z^2} \rightarrow \frac{z^2}{(z^1)(z^1)}$$

$$H(z) = \frac{z}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{3}{4}\right)}$$

Polos: $\left\{\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right\}$

Ceros: $\{0\}$



ROC
- causal hacia fuera (del polo mayor)
- no causal hacia dentro
- Bilateral anillo

Transformada Z Inversa
Expansión en Fracciones Simples

- Señales y sistemas con transformada Z racional:
  - Casos con métodos más sencillos.
- Partiendo de la expresión de X(z) con polos y ceros se descompone en suma de expresiones simples con transformada conocida.
- Hay que tener en cuenta la ROC para elegir la transformada inversa de cada sumando.

$$X(z) = \frac{1}{(1-P_1z^{-1})}A_1 + \cdots + \frac{1}{(1-P_kz^{-1})}A_k + \cdots + \frac{1}{(1-P_Nz^{-1})}A_N$$

Recordemos:

causal ←	$a^n u(n)$	$\xrightarrow{Z}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	ROC: $\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
anticausal ←	$-a^n u(-n-1)$	$\xrightarrow{Z}$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	ROC: $\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$

(=) (≠)

$$X(z) = \frac{1}{(1-P_1z^{-1})}A_1 + \cdots + \frac{1}{(1-P_kz^{-1})}A_k + \cdots + \frac{1}{(1-P_Nz^{-1})}A_N$$

$\frac{z}{z} \times$

$$X(z) = \frac{z}{(z-P_1)}A_1 + \cdots + \frac{z}{(z-P_k)}A_k + \cdots + \frac{z}{(z-P_N)}A_N$$

$\frac{1}{z}X(z) = \ldots$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{1}{(z-P_1)}A_1 + \cdots + \frac{1}{(z-P_k)}A_k + \cdots + \frac{1}{(z-P_N)}A_N$$

$$\frac{(z-P_k)}{z}X(z) = \frac{(z-P_k)}{(z-P_1)}A_1 + \cdots + A_k + \cdots + \frac{(z-P_k)}{(z-P_N)}A_N$$

implica que todo se cancela y queda

$$\rightarrow z = P_k \qquad A_k = \left.\frac{(z-P_k)X(z)}{z}\right|_{z=P_k}$$

Ejemplo 1:

$$X(z) = \frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

Ejemplo con polos reales.

Dos polos y dos ceros.

$$X(z) = \frac{1}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}} \cdot \frac{z^2}{z^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2-1.5z+0.5}$$

$$\frac{z}{z^2-1.5z+0.5} = \frac{A_1}{z-P_1} + \frac{A_2}{z-P_2}$$

$$\boxed{\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}} \longrightarrow \frac{-1.5 \pm \sqrt{1.5^2-4(1)(0.5)}}{2(1)}$$

Polos

$$\begin{cases} P_1 = 1 \\ P_2 = 0.5 \end{cases}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{z^2-1.5z+0.5} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{A_1}{z-1} + \frac{A_2}{z-0.5}$$

Para hallar A_1

$$\frac{(z-1)X(z)}{z} = \frac{(z-1)A_1}{z-1} + \frac{(z-1)A_2}{z-0.5}$$

Ejemplo 1:

$$\frac{(z-1)X(z)}{z} = A_1 + \cancel{\frac{(z-1)A_2}{z-0.5}}\,0$$

$$\boxed{\frac{X(z)}{z} = \frac{z}{(z-1)(z-0.5)}}$$

$$\rightarrow z = P_1 = 1$$

$$A_1 = \frac{(z-1)X(z)}{z}\bigg|_{z=P_1} \qquad A_1 = \frac{(z-1)z}{(z-1)(z-0.5)}\bigg|_{z=1}$$

$$A_1 = \frac{z}{(z-0.5)}\bigg|_{z=1} \qquad A_1 = \frac{1}{(1-0.5)} = 2$$

$$\frac{(z-0.5)X(z)}{z} = \frac{(z-0.5)A_1}{z-1} + \frac{(z-0.5)A_2}{z-0.5}$$

$$\rightarrow z = P_2 = 0.5$$

$$A_2 = \left.\frac{(z-0.5)X(z)}{z}\right|_{z=P_2} \qquad A_2 = \left.\frac{(z-0.5)z}{(z-1)(z-0.5)}\right|_{z=P_2}$$

$$A_2 = \left.\frac{z}{(z-1)}\right|_{z=0.5} \qquad A_2 = \frac{0.5}{(0.5-1)} = -1$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z-P_1} + \frac{A_2}{z-P_2} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0.5}$$

$$X(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} = \frac{2}{1-1z^{-1}} - \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$(2(1)^n - (0,5)^n)u[n]$

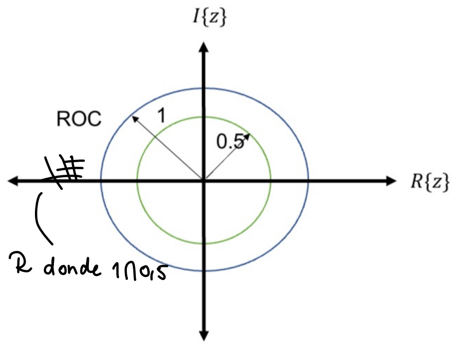
causal

Ejemplo 1:

$$X(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5}$$

$$X(z) = \frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$x[n] = ¿?$$



- **Causal:**

  $$x[n] = 2(1)^n u[n] - 1(0.5)^n u[n] = [2(1)^n - 1(0.5)^n]u[n]$$

- **Anticausal:**

  $$x[n] = -2(1)^n u[-n-1] + (0.5)^n u[-n-1]$$

- **Bilateral:**

  $$x[n] = -2(1)^n u[-n-1] - 1(0.5)^n u[n]$$

Generalización Transformada Z Inversa

$$X(z) = \frac{1}{(1 - P_1 z^{-1})} A_1 + \cdots + \frac{1}{(1 - P_k z^{-1})} A_k$$

$$Z^{-1}\left\{\frac{1}{(1 - P_k z^{-1})}\right\} = \begin{cases} (P_k)^n u[n] \rightarrow \text{ROC: } |z| > |P_k| \\ -(P_k)^n u[-n-1] \rightarrow \text{ROC: } |z| < |P_k| \end{cases}$$

$x[n]$ → Causal → ROC $|z| > P_{Max}$

$$P_{Max} = Max\{|P_1|, |P_2|, \dots, |P_n|\}$$

$$x[n] = (A_1 P_1^n + A_2 P_2^n + \cdots + A_N P_N^n) u[n]$$

→ Causal: Polos Reales

Complejos:

$z = e^{j\omega}$

coeficientes de las fracciones parciales

$$A_k = |A_k| e^{j\alpha_k}$$

Polos

$$P_k = r_k e^{j\underbrace{\beta_k}_{\omega = \text{frec. angular}}}$$

$$x[n] = |A_k| r_k^n \left[e^{j(\beta_k n + \alpha_k)} + e^{-j(\beta_k n + \alpha_k)}\right] u[n]$$

$$x[n] = 2|A_k| r_k^n \cos(\beta_k n + \alpha_k) u[n]$$

$$= Z^{-1}\left\{\frac{A_k}{(1 - P_k z^{-1})} + \frac{A_k^*}{(1 - P_k^* z^{-1})}\right\}$$

ROC: $|z| > |P_k| = r_k$

Ejemplo 2:

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}}$$

$$X(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1} + 0.5z^{-2}} \cdot \left(\frac{z^2}{z^2}\right)$$

$$X(z) = \frac{z^2 + z}{z^2 - z + 0.5} \quad \rightarrow \quad \frac{x(z)}{z} = \frac{z + 1}{z^2 - z + 0.5}$$

factorizo!

Polos: $\quad P_1 = \frac{1}{2} + j\frac{1}{2} \qquad P_2 = \frac{1}{2} - j\frac{1}{2}$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z + 1}{(z - P_1)(z - P_2)} = \frac{A_1}{z - P_1} + \frac{A_2}{z - P_2}$$

$$\left.\frac{(z - P_1)X(z)}{z}\right|_{z = P_1} = \frac{(z - P_1)A_1}{z - P_1} + \frac{(z - P_1)A_2}{z - P_2}$$

$$A_1 = \frac{(z - P_1)(z + 1)}{(z - P_1)(z - P_2)} \rightarrow A_1 = \left.\frac{(z + 1)}{(z - P_2)}\right|_{z = P_1} = \frac{0.5 + j0.5 + 1}{0.5 + j0.5 - (0.5 - j0.5)}$$

$$A_1 = 0.5 - j\frac{3}{2} \quad \ldots \quad A_2 = 0.5 + j\frac{3}{2}$$

$$A_1 = A_2^* = 0.5 - j\frac{3}{2} \xrightarrow{\text{POLARES}} A_1 = \frac{\sqrt{10}}{2} e^{-j71.565°}$$

$$P_1 = P_2^* = 0.5 + j0.5 \xrightarrow{\text{POLARES}} P_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

$$x[n] = 2\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{4}n - 71.565°\right)u[n]$$

$re^{j\theta}$, $|A_k| = \sqrt{(\mathbb{R}eal)^2 + (\mathbb{I}m)^2}$, $j71.63° = \tan^{-1}\left(\frac{\mathbb{I}m}{\mathbb{R}e}\right)$

Polo doble:

$$Z^{-1}\left\{\frac{Pz^{-1}}{(1-Pz^{-1})^2}\right\} = nP^n\,u[n]$$

$$\text{ROC: } |z| > |P|$$

Ejemplo 3:

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}$$

$$X(z) = \frac{1}{(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2}\,\frac{z^3}{(z)(z^2)}$$

Polos: $P_1 = -1$
$P_2 = P_3 = 1$

$$X(z) = \frac{z^3}{(z+1)(z-1)^2}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \frac{A_1}{(z+1)} + \frac{A_2}{(z-1)} + \frac{A_3}{(z-1)^2}$$

$$\frac{(z+1)X(z)}{z} = \frac{(z+1)A_1}{(z+1)} + \frac{(z+1)A_2}{(z-1)} + \frac{(z+1)A_3}{(z-1)^2}$$

$$A_1 = \left.\frac{(z+1)X(z)}{z}\right|_{z=P_1} = \left.\frac{(z+1)z^2}{(z+1)(z-1)^2}\right|_{z=P_1}$$

$$= \left.\frac{z^2}{(z-1)^2}\right|_{z=-1} = \frac{1}{4} = A_1$$

$$\left.\frac{(z-1)^2X(z)}{z}\right|_{z=P_3} = A_3 = \frac{(z-1)^2z^2}{(z+1)(z-1)^2} = \left.\frac{z^2}{z+1}\right|_{z=P_3}$$

$$= \frac{1}{2} = A_3$$

$$\left.\frac{(z+1)^2X(z)}{z}\right|_{z=P_3} = A_3 = \frac{(z+1)^2z^2}{(z+1)(z+1)^2} = \left.\frac{z^2}{z+1}\right|_{z=P_3}$$

$$= \frac{1}{2} = A_3$$

$$A_2 = \frac{d}{dz}\left[\frac{(z+1)^2X(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=p} = \frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{z+1}\right] = \frac{(2z)(z+1)-(z^2)(1)}{(z+1)^2}$$

EJERCICIOS

• Transformada z Inversa Hallar $x[n]$

$$X(z) = \frac{z^{-1} - 3z^{-2}}{(1-2z^{-1})(1-2z^{-1}+2z^{-2})} \Rightarrow \frac{z^{-1} - 3z^{-2}}{(1-2z^{-1})(1-2z^{-1}+2z^{-2})} \cdot \frac{z^3}{z^3}$$

z $\quad z^2$

$$\Rightarrow \frac{z^2 - 3z}{(z-2)(z^2-2z+2)} \Rightarrow \frac{z(z-3)}{(z-2)(z^2-2z+2)} \Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z-3}{(z-2)(z^2-2z+2)}$$

$P_1 = 1+j, \; P_2 = 1-j$

$$\Rightarrow \frac{X(z)}{z} = \frac{z-3}{(z-2)(z-P_1)(z-P_2)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-P_1} + \frac{B^*}{z-P_2}$$

Para hallar A:

$$(z-2)\frac{X(z)}{z} = A + \frac{(z-2)B}{z-P_1} + \frac{(z-2)B^*}{z-P_2}$$ Y reemplazo $z=2$ $\Rightarrow (z-2)\frac{X(z)}{z} = A$ Y reemplazo $X(z)/z$

$$\Rightarrow A = \left.\frac{z-3}{(z-P_1)(z-P_2)}\right|_{z=2} \Rightarrow A = \frac{-1}{(1-j)(1+j)} = \frac{-1}{1+j-j-j^2} = \frac{-1}{1-(-1)} = -0{,}5 = A$$

Para halla B:

$$(z-P_1)\frac{X(z)}{z} = \frac{(z-P_1)A}{z-2} + \frac{(z-P_1)B}{z-P_1} + \frac{(z-P_1)B^*}{z-P_2}$$ $\Rightarrow$ Reemplazo $P_1 = 1+j$ $\Rightarrow B = (z-P_1)\frac{X(z)}{z} \Rightarrow B = \left.\frac{z-3}{(z-2)(z-P_2)}\right|_{z=P_1}$

$$\Rightarrow B = \frac{-2+j}{(-1+j)(2j)} = \frac{-2+j}{-2-2j} \cdot \frac{-2+2j}{-2+2j} = 0{,}25 - 0{,}75j = B$$

$$x[n] = 2|A_k|\, r_k^n \cos(kn + \alpha_k)\, u[n]$$

$$P_1 = 1+j \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\ \tan^{-1}(1/1) = \pi/4 \end{array} \right\} \underbrace{\sqrt{2}}_{r_k}\, e^{-j\overbrace{\pi/4}^{\beta_k}}$$

$$x[n] = 2(0{,}7906)(\sqrt{2})^n \cos\left(\tfrac{\pi}{4} - 71{,}56°\right)$$

$$B = \underbrace{0{,}7906}_{A_k}\, e^{-j\overbrace{71{,}56°}^{\alpha_k}}$$

Parte Compleja

transformada Inversa

$$\frac{Az}{z-2} = \frac{-0{,}5z}{z-2} \cdot \frac{z^{-1}}{z^{-1}} = \frac{-0{,}5}{1-2z^{-1}} = -0{,}5 \cdot 2^n$$

$$x[n] = \left[0{,}5 \cdot 2^n + 2(0{,}7906\sqrt{2}^{\,n} \cos(\tfrac{\pi}{4} - 71{,}56°)\right] u[n]$$

- Correlación

$$x[n] = \begin{array}{c} \begin{matrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 1 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} N_1 & & \uparrow & & M_1 \end{matrix} \end{array}, \quad y[n] = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 4 & 2 & 5 \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} \uparrow & & \end{matrix} \end{array}$$

Para el rango: $\underbrace{y[-n]}_{\text{solo la uso para límites}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} N_2 & & M_2 \end{matrix} \\ \left[\begin{matrix} 5 & 2 & 4 \end{matrix}\right] \\ \begin{matrix} -2 & -1 & 0 \\ & & \uparrow \end{matrix} \end{array}$ $\quad N_1+N_2 \leq n \leq M_1+M_2 \rightarrow -4 \leq n \leq 2$

$n=-4$, muevo $y[n]$

$x[n] = [1 \;\; 4 \;\; \underset{\uparrow}{2} \;\; 5 \;\; 1]$

$y[n] = [\underset{\uparrow}{4} \;\; 2 \;\; 5]$

$R_{xy}(-4) = 1 \times 5 = 5$

$n=-3$

$x[n] = [1 \;\; 4 \;\; \underset{\uparrow}{2} \;\; 5 \;\; 1]$

$y[n] = [4 \;\; 2 \;\; 5]$

$R_{xy}[-3] = (2 \cdot 1) + (5 \cdot 4) = 22$

$n=-2$

$x[n] = [1 \;\; 4 \;\; \underset{\uparrow}{2} \;\; 5 \;\; 1]$

$y[n] = [4 \;\; 2 \;\; 5]$

$R_{xy}(-2) = (4 \cdot 1) + (4 \cdot 2) + (2 \cdot 5) = 78$

$n=-1$

$x[n] = [1 \;\; 4 \;\; \overset{\downarrow}{2} \;\; 5 \;\; 1]$

$y[n] = [4 \;\; 2 \;\; 5]$

$R_{xy}(-1) = (4 \cdot 4) + (2 \cdot 2) + (5 \cdot 5)$

$= 45$

$n=0$

$x[n] = [1 \;\; 4 \;\; \overset{\downarrow}{2} \;\; 5 \;\; 1]$

$y[n] = [4 \;\; 2 \;\; 5]$

$R_{xy}(0) = 8 + 10 + 5 = 23$

$n=1$

$x[n] = [1 \;\; 4 \;\; \overset{\downarrow}{2} \;\; 5 \;\; 1]$

$y[n] = [4 \;\; 2 \;\; 5]$

$R_{xy}(1) = 22$

$n=2$

$x[n] = [1 \;\; 4 \;\; \overset{\downarrow}{2} \;\; 5 \;\; 1]$

$y[n] = [4 \;\; 2 \;\; 5]$

$R_{xy}(2) = 4$

$R_{xy}[n] = [5 \;\; 22 \;\; 22 \;\; 45 \;\; \underset{\uparrow}{23} \;\; 22 \;\; 4]$

- Convolución

$$x[n] = \delta[n+1] + 2(u[n] - u[n-1]) - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3] + 4\delta[n-4]$$

$$h[n] = [1 \ \underset{\uparrow}{2} \ 3]$$

$$x[n] = \delta[n+1] + 2u[n] - u[n-1] - \delta[n-1] + 2\delta[n-2] + \delta[n-3] + 4\delta[n-4]$$

en forma secuencial.

$$x[n] = [\underset{-1}{1} \ \underset{\underset{\uparrow}{0}}{2} \ -1 \ 2 \ 1 \ 4]$$

	1	2	-1	2	1	4
1	1	2	-1	2	1	4
2	2	4	-2	4	2	8
3	3	6	-3	6	3	12

1 4 6 6 2 12 17 12

$$x[n] = 2^n u[n]$$

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (2^n)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} 4^n$$

- Transformada z de $x[n] = \left(\frac{1}{3}\right)^n u[n-1]$ $\qquad$ $x[n-2] = z^{-2} X(z)$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad , \quad \sum_{r=0}^{\infty} A^r = \frac{1}{1-A} \text{ con } |A|<1$$ y la aplico y le quito el 1er término

$$\rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n z^{-n} \underbrace{-1}_{\text{1er término } A^0=1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^{-1}}{3}\right)^n - 1 = \frac{1}{1-\frac{z^{-1}}{3}} - 1 = \frac{\frac{z^{-1}}{3}}{1-\frac{z^{-1}}{3}} \quad , \quad ROC \left|\frac{1}{3} z^{-1}\right| < 1 \rightarrow |z| > \frac{1}{3}$$

causal