|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | | | |
| Федеральное государственное бюджетное  образовательное учреждение высшего образования «Новосибирский государственный технический университет» | | | |
|  | | | |
| Кафедра прикладной математики | | | |
|  | | | |
|  | | | |
| Курсовой проект по курсу | | | |
| **«Численные методы»** | | | |
|  | | | |
|  | Группа | ПМ-24 |
|  |  |
| Студент | Герасименко Вадим |
|  |  |
|
|  |
| Новосибирск | | | |

2024

1. Условие задачи

МКЭ для двумерной краевой задачи для эллиптического уравнения в декартовой системе координат. Базисные функции билинейные на прямоугольниках. Краевые условия всех типов. Коэффициент диффузии разложить по биквадратичным базисным функциям. Матрицу СЛАУ генерировать в разреженном строчном формате. Для решения СЛАУ использовать МСГ или ЛОС с неполной факторизацией.

1. Постановка задачи

Решаемое уравнение в общем виде:

*,*

область интегрирования с границей и краевыми условиями:

,

,

.

Дифференциальное уравнение для двумерной эллиптической краевой задачи в декартовой системе координат:

.

1. Теоретическая часть
   1. **Вариационная постановка в форме уравнения Галеркина**

Невязка данного уравнения примет следующий вид:

.

Потребуем, чтобы эта невязка была ортогональна (в смысле скалярного произведения пространства ) некоторому пространству функций , которое будем называть *пространством пробных функций*:

.

Воспользуемся формулой Грина:

,

где граница .

Преобразуем слагаемое :

Преобразуем интегралы по границам и , воспользовавшись краевыми условиями:

В качестве выберем пространство пробных функций , которые на границе удовлетворяют нулевым первым краевым условиям, и при этом будем считать, что , где множество функций, имеющих с квадратом первым производные и удовлетворяющих только первым краевым условиям на границе .

Учитывая, что , получим итоговое уравнение:

=

= , .

* 1. **Конечноэлементная дискретизация и переход к локальным матрицам**

При построении конечноэлементных аппроксимаций по методу Галеркина пространства и заменяются конечномерными пространстами и . При этом чаще всего в МКЭ функции из этих пространств являются элементами одного и того же конечномерного пространства , которое мы будем определять как линейное пространство, натянутое на базисные функции .

Как правило, функции являются финитными кусочно-полиномиальными функциями, а приближённое решение является линейной комбинацией таких функций.

Для получения аппроксимации уравнения Галеркина на конечномерных пространствах и заменим в полученном уравнении функцию аппроксимирующей её функцией , а функцию функцией :

=

= , .

Так как любая функция может быть представлена в виде линейной комбинации:

,

вариационное уравнение эквивалентно следующей системе уравнений:

=

= , .

Таким образом, МКЭ-решение удовлетворяет полученной системе уравнений. Поскольку , оно может быть представлено в виде линейной комбинации базисных функций пространства :

.

Подставляя данное выражение в ранее полученную систему уравнений, получаем СЛАУ для компонент вектора весов с индексами :

=

, .

При решении краевой задачи с использованием базисных функций, принимающих нулевые значения во всех узлах сетки, кроме одного, полученная конечноэлементная СЛАУ для вектора весов q может быть записана в матричном виде:

Где компоненты матрицы и вектора определяются соотношениями

в которых

Сборка глобальных матрицы и вектора правой части выполняется из локальных матриц и векторов конечных элементов. При этом локальная матрица представляет собой сумму двух матриц: матрицы жесткости и матрицы массы, где элементы матрицы жесткости определяются как

элементы матрицы массы:

* 1. **Базисные функции**

Для реализации МКЭ для данной задачи необходимо разбить область на прямоугольные конечные элементы и определить построение билинейных базисных функций.

Зададим по две одномерные линейные функции на каждом из отрезков:

Локальные базисные функции на конечном элементе представляются в виде произведения функций:

, ,

, .

Если параметр на конечном элементе заменить его осредненным значением и учесть, что

(аналогичный вид будут иметь и интегралы от произведений функций и их производных), а также заменить на , то, подставляя в ранее полученные формулы компонент матриц жёсткости и массы, преобразовав, получим:

+ ,

Если представить правую часть решаемого уравнения в виде билинейного интерполянта , то локальный вектор в этом случае легко вычисляется через матрицу , фактически являющуюся матрицей массы при :

.