Feuille d'exercices
Suites et limites

N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.[1]

1 Suites

Exercice 1. Calculs de termes ($\star$)
Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3 \end{array} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3n+1 \end{array}$$

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array} \qquad z : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \cdot n \end{array}$$

Exercice 2. Des propriétés classiques ($\star$)
Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite réelle. On dit que :
- *u est croissante* si pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_n \leq u_m$,
- *u est décroissante* si pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_n \geq u_m$,
- *u est minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq m$.
- *u est majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$.
- *u n'est pas minorée* si pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < m$.
- *u n'est pas majorée* si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$.

1. Donner un exemple de suite croissante.
2. Donner un exemple de suite majorée et un de suite non majorée.
3. Donner un exemple de suite non majorée et non croissante.
4. Mêmes questions en remplaçant croissante par décroissante et majorée par minorée.
5. Donner un exemple de suite qui n'est ni croissante, ni décroissante.
6. Dire si les suites suivantes sont croissantes/décroissantes, majorées ou non, minorées ou non :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \cdot n \end{array}$$

[1] vadim.lebovici@ens.fr

2 Limites

Exercice 3. Quelques exemples ($\star$)

1. Montrer que la suite suivante converge et donner sa limite.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3 \end{array}$$

2. Montrer que la suite suivante diverge.

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3n \end{array}$$

Exercice 4. Opérations sur les limites ($\star$)

Soient $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers des limites $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ et soit $\lambda > 0$ un nombre réel.

1. Montrer que $\lambda \cdot u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot \ell$.
2. Montrer que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell - \ell'$.

Exercice 5. Suites croissantes non majorées ($\star\star$)

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite telle que :

(i) *(u est croissante)* pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_n \leq u_m$,

(ii) *(u n'est pas majorée)* pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$.

Montrer que u diverge.

Exercice 6. Toute suite convergente est bornée. ($\star\star$)

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite convergente.

1. Montrer que u est majorée, i.e qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$.
2. En déduire[2] que u est minorée, i.e qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq m$.
3. Donner un exemple de suite bornée (i.e. majorée et minorée) qui ne converge pas.

Exercice 7. Suites convergentes d'entiers ($\star\star\star$)

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

u converge si, et seulement si, u est stationnaire.

On dit qu'une suite est *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang, i.e s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_n = u_{n_0}$.

2. Noter que si u converge, alors $-u$ aussi et appliquer la question 1. Ne pas oublier que $x \leq y$ est équivalent à $-y \leq -x$.