# Corrigés des exercices
# Suites et limites

*N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.*[1]

## 1 Suites

**Exercice 1. Calculs de termes ($\star$)**
Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3 \end{array} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3n+1 \end{array}$$

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array} \qquad z : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \cdot n \end{array}$$

**Solution de l'exercice 1.**

$$\begin{array}{llll}
u_0 = 3, & v_0 = 3 \times 0 + 1 = 1, & w_0 = (-1)^0 = 1, & z_0 = (-1)^0 \times 0 = 0, \\
u_1 = 3, & v_1 = 3 \times 1 + 1 = 4, & w_1 = (-1)^1 = -1, & z_1 = (-1)^1 \times 1 = -1, \\
u_2 = 3, & v_2 = 3 \times 2 + 1 = 7, & w_2 = (-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1, & z_2 = (-1)^2 \times 2 = 2, \\
u_3 = 3, & v_3 = 3 \times 3 + 1 = 10, & w_3 = (-1)^3 = (-1)^2 \times (-1) = -1, & z_3 = (-1)^3 \times 3 = -3.
\end{array}$$

**Exercice 2. Des propriétés classiques ($\star$)**
Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite réelle. On dit que :

— $u$ *est croissante* si pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_n \leq u_m$,

— $u$ *est décroissante* si pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_n \geq u_m$,

— $u$ *est minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq m$.

— $u$ *est majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$.

— $u$ *n'est pas minorée* si pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < m$.

— $u$ *n'est pas majorée* si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$.

1. Donner un exemple de suite croissante.
2. Donner un exemple de suite majorée et un de suite non majorée.
3. Donner un exemple de suite non majorée et non croissante.
4. Mêmes questions en remplaçant croissante par décroissante et majorée par minorée.
5. Donner un exemple de suite qui n'est ni croissante, ni décroissante.

1. vadim.lebovici@ens.fr

6. Dire si les suites suivantes sont croissantes/décroissantes, majorées ou non, minorées ou non :

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array} \qquad v : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \cdot n \end{array}$$

**Solution de l'exercice 2.**

**1.** *La suite identité*

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array}$$

*est croissante. Montrons-le. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$. Alors $u_n = n \leq m = u_m$. Donc, $u$ est croissante.*

**2.** *La suite constante égale à 1, que l'on notera ici $v$, est majorée. On peut prendre $M = 1$ dans la définition et vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 \leq 1 = M$.*
*La suite identité n'est pas majorée. Notez que si $u$ était majorée par un $M' \in \mathbb{R}$ qui soit négatif (i.e. $M' \leq 0$), alors 1 majorerait aussi $u$. Ainsi, si $u$ est majorée par un nombre négatif, elle l'est aussi par un nombre strictement positif. C'est pourquoi, pour montrer que $u$ n'est pas majorée, il suffit de montrer qu'elle n'est pas majorée par des réels strictement positifs $M > 0$. Soit donc un réel $M > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien (voir le théorème du cours) et que $M > 0$ et $1 > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M < n \times 1 = n = u_n$. On a donc bien montré que $u$ n'est pas majoré.*

**3.** *La suite $x$ définie par :*

$$x : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ 0 & \textit{si } n \textit{ est pair,} \end{cases} \end{array}$$

*(Tracer le graphe de cette suite pour comprendre son fonctionnement) n'est ni majorée, ni croissante. Elle n'est pas croissante, i.e il existe $n \leq m$ tels que $u_n > u_m$. Par exemple, $u_1 = 1 > 0 = u_2$ alors que $1 \leq 2$. Elle n'est pas majorée, comme le montre la preuve suivante. Soit $M > 0$ (regarder la discussion de la question 2). Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $M < n'$. Si $n'$ est impair, alors on a bien $M < n' = x'_n$ et on peut poser $n = n'$. Si $n'$ est pair, alors $n' + 1$ est impair et $M < n' < n' + 1 = v_{n'+1}$ et on peut poser $n = n' + 1$. On a bien montré que $x$ n'était pas majorée.*

**4.** *Multiplier les suites précédentes par $-1$ et montrer qu'une suite $u$ est croissante (resp. majorée) si, et seulement si,[2] $-u$ est décroissante (resp. minorée).*

**5.** *Vérifier que la suite $x$ n'est ni croissante (déjà montré à la question 3), ni décroissante (s'inspirer de la question 3).*

2. Cette formule signifie que qu'il y a équivalence entre les assertions qui l'encadrent.

**6.** *La suite $u$ n'est ni croissante, ni décroissante, mais elle est majorée (par 1) et minorée (par -1). La suite $v$ n'est ni croissante, ni décroissante, ni majorée, ni minorée. S'inspirer des questions précédentes pour le montrer, les preuves sont similaires.*