Mathématiques pour littéraires

Polycopié de cours

Vadim Lebovici[1]

2021/2022 - S2

1. vadim.lebovici@ens.fr, https://vadimlebovici.github.io

Table des matières

Chapitre 1

Ensembles et applications

1.1 Introduction

«L'éternité, c'est long... surtout vers la fin. »

Woody Allen

«L'infini, c'est grand... mais ça dépend surtout duquel. »

Woody Allen (s'il avait été mathématicien)

Dans ce premier chapitre, nous nous intéresserons à un concept qui peut sembler mystérieux à première vue : l'infini. Ce concept, qui signifie *ce qui n'est pas limité*, n'a cessé de fasciner les intellectuelles à travers les époques et sera le fil rouge de ce cours. La raison en est que son étude motiva les mathématiciennes à développer des outils et des théories d'une grande richesse. Le premier de ces fruits s'est révélé utile pour fonder tout l'édifice mathématique au XXè siècle : la théorie des ensembles.

Note bibliographique. *Toute cette section d'introduction, notamment les points historiques, a été écrite très largement grâce au très bon livre* Histoire de la Théorie des Ensembles *de Jean-Pierre Belna. Elle s'inspire également de l'article de Patrick Dehornoy,* Georg Cantor, et les infinis furent*, que je vous recommande vivement.*

1.1.1 Un peu d'Histoire

Si j'osais simplifier l'Histoire, voici ce que je dirais[1] : l'infini pose déjà problème aux Grecques. Zénon d'Elée expose au Vème siècle avant J.C. une série de paradoxes destinée à montrer que le mouvement est impossible. Cette thèse n'étant pas des plus intuitives, on est en droit de se demander si la démonstration tient la route. Or, ces paradoxes reposent tous sur des divisions *infinies* (et indéfinies) de l'espace et/ou du temps, et nous verrons au **??** qu'une définition mathématique de ces opérations fait disparaître les paradoxes.

Un siècle plus tard, c'est au tour d'Aristote d'étudier l'infini. Selon lui, tout être est à la fois *en puissance* et *en acte*. En puissance, au sens *qui est possible mais n'est pas encore réalisé, qui n'a d'existence que virtuelle*. En acte, au sens *qui est réalisé ou achevé* et a donc une existence concrète. L'infini ne peut alors pas être en acte, puisqu'il ne s'achève jamais et reste ainsi irrémédiablement en puissance. Il n'a donc qu'une existence virtuelle et n'est pas concret.

Cette vision de l'infini imprègnera longtemps la pensée mathématique. Ce qui peut paraître tout aussi étonnant est que par ailleurs, note Aristote lui-même, le caractère virtuel de l'infini n'est pas gênant pour faire des mathématiques : pour faire des raisonnements sur des droites, il suffit de réfléchir à des segments que l'on pourrait prolonger

1. Les parties de ce cours qui ne sont pas *stricto sensu* des mathématiques, comme la tentative d'histoire de la pensée qui va suivre, doivent être prises avec beaucoup de précautions, car si je suis qualifié pour parler de mathématiques, je suis (très) loin d'être expert du reste, et serait ravi de me voir corriger par un retour de mail, pour améliorer ce cours.

aussi longuement que l'on veut, il n'est pas nécessaire de considérer la droite dans son intégralité, dans toute son étendue, qui elle est infinie.

Un des points qui fut l'objet de nombre de réflexions fut l'axiome du tout et la partie d'Euclide (IIIème siècle avant J.C.) figurant dans *Les Eléments*, et s'exprimant ainsi :

Axiome 1.1. *Le tout est plus grand que la partie.*

Une manière naturelle d'interpréter cet axiome est la suivante : si l'on considère un certain ensemble d'éléments, n'importe lequel de ses sous-ensembles [2] est plus petit que l'ensemble de départ. Cela semble pour le moins évident... si l'on ne considère que des ensemble finis.

Si l'on considère des ensembles infinis en revanche, comme le fait remarquer Duns Scot (XIIIème siècle), l'axiome pose question. Considérons par exemple l'ensemble des nombres entiers naturels 0, 1, 2, 3, ..., et le sous-ensemble des entiers pairs 0, 2, 4, ... D'une part, l'un contient strictement l'autre, puisque 3 par exemple est un entier qui n'est pas pair. D'autre part, les deux sont infinis et pourraient donc être considérés comme ayant la même taille.

Remarque 1.2. Avant que ne naisse la théorie axiomatique des ensembles, les mathématiciens ont historiquement toujours résolu cette contradiction en s'interdisant de comparer la taille d'ensembles infinis, afin de ne pas remettre en cause l'axiome d'Euclide.

1.1.2 Comment comparer la taille d'ensembles infinis ?

Ce que le paradoxe de Duns Scot fait ressortir, c'est qu'outre le fait que l'infini est un concept à manier avec précaution, il se pose un problème lorsque l'on cherche à comparer deux ensembles infinis : la notion de comparaison de taille. Qu'entend-on exactement « par tel ensemble est *plus grand* que tel autre » ? Duns Scot énonce essentiellement deux manières de faire.

Première approche. On pourrait définir qu'un ensemble est plus petit qu'un autre si le premier est inclus dans le second. Le problème c'est que cette méthode ne permet de comparer la taille que d'ensembles dont les éléments sont de même nature : un ensemble fini de pommes et un ensemble fini de poires sont incomparables...

Deuxième approche. On pourrait suivre notre manière de procéder pour les ensembles finis :

1. on compte le nombre d'éléments du premier ensemble, appelé *cardinal* en mathématiques,
2. on compte le nombre d'éléments du second ensemble,

2. i.e n'importe quel ensemble d'éléments présents dans l'ensemble initial.

3. on compare les cardinaux obtenus.

Dans le cas infini, on pourrait très bien se dire : les deux premières étapes renvoient le même résultat, infini, les cardinaux sont donc égaux, si tant est que le terme de *cardinaux* ait un sens dans ce cas. Cependant, c'est une grave erreur : les deux premières étapes ne renvoient pas le même résultat, elles ne se terminent jamais ! Il n'y a donc jamais de moment où l'on pourra comparer les résultats et il n'y a non plus de *résultat* qui ait un sens.

Résolution par Cantor. En 1873, le mathématicien allemand Georg Cantor (1845 – 1918) souhaite comparer la taille de deux ensembles que vous connaissez. Vous avez peut-être déjà entendu dire qu'il y a une infinité de points sur une droite. [3] Vous savez également qu'il y a une infinité de nombres entiers naturels : 0, 1, 2, ... Cantor se pose alors la question suivante :

Question 1.3. *Est-ce qu'il y a autant de points sur une droite que de nombres entiers naturels ?*

C'est en cherchant une réponse à cette question que Cantor introduira un vocabulaire précis pour parler des ensembles ainsi qu'une approche fructueuse pour comparer leur taille. Il parviendra à la résoudre en 1874 : *non*, il n'y en a pas autant, il y a plus de points sur une droite que de nombres entiers, en un sens précis et satisfaisant.

1.1.3 Objectif du chapitre

La question 1.3 est une des questions que nous allons chercher à résoudre dans ce chapitre et qui va nous servir de motivation pour introduire des notions fondamentales en mathématiques : les ensembles et les applications. Ces notions sont équivalentes aux lettres et aux mots d'une langue, et sont aussi intéressantes qu'elles vous seront utiles si vous souhaitez lire des mathématiques, quelle qu'en soit la forme, un jour. Le chapitre est donc structuré ainsi :

1. Nous commencerons par introduire le vocabulaire utilisé en mathématiques pour parler d'ensembles.
2. Nous définirons ensuite une bonne notion de comparaison de taille via le concept mathématique d'*application*.
3. Nous répondrons à la question de Duns Scot : y a-t-il plus de nombres entiers que de nombres pairs ?
4. Pour enfin répondre à la question de Cantor : y a-t-il plus de points sur une droite que de nombres entiers naturels ?

---

3. Notez que ce fait, aujourd'hui enseigné en primaire, fut historiquement loin d'être une évidence : il était considéré comme faux par Aristote et plus tard par Leibniz.

1.2 Kit de manipulation des ensembles

1.2.1 Encore un peu d'Histoire

Note bibliographique. *Cette partie tire grandement son contenu et même ses formulations du brillant article de Patrick Dehornoy* Théorie axiomatique des ensembles *pour* Encyclopedia Universalis, *que vous pouvez trouver sur son site internet. Je dresse ici un court résumé des idées essentielles que je veux vous présenter, mais je vous incite vivement à lire au moins l'intégralité de la première section de cet article. Pour un point de vue plus détaillé et contenant l'expression explicite des axiomes, vous pouvez consulter la seconde partie du polycopié de cours de Jean Feydy,* Culture mathématique*, disponible sur son site.*

Les recherches de Cantor sur l'infini ont été le point de départ de la théorie des ensembles modernes, avec les travaux de Richard Dedekind (1831 – 1916), mathématicien allemand. La théorie des ensembles, au sens de la théorie *axiomatique* des ensembles, née à la fin du XIXè siècle, a pour but de fournir un cadre conceptuel dans lequel la notion d'ensemble est bien définie et peut être étudiée. Elle a occupé un rôle prépondérant lors de son développement tout au long du XXè siècle, jusqu'à servir un temps de base à l'édifice mathématique tout entier. Aujourd'hui, la théorie des ensembles développée au XXè siècle ne peut plus servir de base à la totalité de l'édifice mathématique, mais cela dépasse le cadre de ce cours.

Pourquoi cette théorie est-elle dite axiomatique ? La raison en est que définir les ensembles est très délicat : si l'on choisit une définition trop vague, elle mène à des contradictions, comme le paradoxe de Russel (voir Section 1.6), du nom du mathématicien gallois du même nom Bertrand Russel (1872 – 1970). Or, il est raisonnable de penser, et c'est l'hypothèse que nous ferons, que le monde n'est pas contradictoire, donc que si notre définition l'est, c'est qu'elle ne retranscrit pas la réalité que nous voulions décrire, elle est donc à changer.

Face à une difficulté si grande pour expliciter la *nature* du concept d'ensemble, les mathématiciens ont recours à un procédé très intéressant, dont l'idée est la suivante :

Idée fondamentale. Il n'est pas nécessaire, pour travailler avec le concept d'ensemble d'un point de vue mathématique, d'en donner la *nature*. Il suffit de décrire de manière non-ambiguë[4] les propriétés minimales (appelées *axiomes*) que doivent satisfaire les choses que l'on nommera ensuite *ensembles*. Nous pourrons alors étudier le comportement des choses satisfaisant ces propriétés en établissant les conséquences logiques[5], appelées *théorèmes*, qu'ont ces propriétés.

Dans le cas des ensembles, ce sont principalement Ernst Zermelo, Abraham Frænkel et Thoralf Skolem qui ont élaboré au XXème siècle une théorie axiomatique des ensembles, que l'on appelle la théorie ZF (Zermelo-Frænkel).

4. Ceci peut être réalisé grâce au langage symbolique de la logique.
5. Pour des règles de logique que l'on aura pris soin de spécifier de manière non-ambiguë.

Cette idée fondamentale n'est pas utilisée que dans le cas de la théorie des ensembles. Pour étudier les nombres, il suffit d'étudier les conséquences logiques de leurs propriétés fondamentales prises comme axiomes : chaque nombre à un successeur, il existe un nombre plus petit que tous les autres que l'on note 0, etc. C'est l'arithmétique du mathématicien italien Peano (1858 – 1932). De même, pour faire de la géométrie, il n'y a nul besoin de définir la nature d'un point ou d'une droite, il suffit de prendre leurs propriétés essentielles pour axiomes (par deux points passe une unique droite, etc), et d'en établir les conséquences logiques. C'est ce qu'a fait le mathématicien antique Euclide ($\sim$ 300 av. J.C.).

Cette approche pour appréhender un concept peut sembler décevante car la nature des ensembles nous reste inaccessible. Les mathématiques apparaissent comme une simple *modélisation* d'objets concrets, au sens où l'on a encodé les propriétés des objets à étudier dans un langage symbolique, pour ne plus étudier que cette formalisation.

Pourquoi n'est-ce pas si terrible ?

1. Il est bon de se rappeler que c'est l'exigence de rigueur qui impose un tel choix faute de mieux.
2. De plus, les fruits de cette approche sont d'une remarquable généralité : n'importe quel concept satisfaisant les axiomes de l'arithmétique de Peano se comporte comme un nombre, et satisfait donc *tous les théorèmes* valides sur les nombres. En mathématiques, il est fréquent et très fructueux de remarquer que certains objets se comportent comme d'autres déjà étudiés. On peut alors gratuitement appliquer aux premiers tous les théorèmes valides sur les seconds. Il est par exemple possible de définir une addition entre courbes fermées, qui permet de faire de l'algèbre avec des objets géométriques...
3. Enfin, de telles approches sont *redoutablement efficaces*. Certes, les mathématiques sont fondées sur des axiomes logiques exprimés en des termes symboliques, et peuvent donc sembler ne pas nous renseigner sur la nature des objets en question. Cependant, ce sont ces mêmes mathématiques qui permettent de décrire le réel avec tant de précision dans les autres sciences, et de faire ainsi des prédictions très précises de phénomènes naturels.

Une dernière remarque sur ce point : ces questions d'axiomatisation nous rappellent à quel point les mathématiques sont soumises à une part de subjectivité, le choix des axiomes, inhérente à toute forme de pensée. Cependant, il est à noter que les mathématiques ont la particularité de chercher à réduire le plus possible cette part de subjectivité.

Pourquoi la théorie des ensembles peut-elle servir de base à l'édifice mathématique ? Il se trouve que la théorie des ensembles permet d'encoder les ensembles, mais pas seulement. On peut construire une *représentation*, un encodage, de quasiment tous les objets mathématiques à l'aide d'ensembles. Les ensembles ont le rôle de briques élémentaires, des *atomes*, qui permettent de construire les autres concepts mathématiques. L'avantage de ce procédé est qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter des axiomes à la théorie pour construire de nouveaux objets. Par exemple, les nombres sont construits comme des ensembles satisfaisant certaines propriétés (celles énoncées par Peano). Ce paragraphe mériterait un approfondissement, mais ceci sort du cadre de ce cours.

Conclusion. Nous sommes désormais convaincus qu'il est nécessaire de définir proprement le concept d'ensemble, une définition naïve n'étant pas satisfaisante. De plus, nous avons vu que *définir proprement* signifie : établir – à l'aide du vocabulaire de la logique – un nombre minimal d'axiomes qui décrivent les caractéristiques essentielles des ensembles. Dans ce cours, nous n'allons utiliser qu'une définition *intuitive* des ensembles ainsi que leurs propriétés les plus utiles en nous appuyant sur le fait que la définition et ces propriétés ont été bien définis par des mathématiciennes avant nous. Tout ce que l'on fera sera donc bien fondé, même si nous n'avons pas le temps de voir comment. Vous saurez ainsi manipuler des ensembles, en définir comme bon vous semble et travailler avec. C'est tout ce qui est nécessaire pour faire des mathématiques, même à un niveau Master.

1.2.2 Enfin, des mathématiques

Comme promis, voici quelques bases pour bien travailler avec les ensembles en mathématiques.

Définition 1.4 (Informelle)**.** Un ensemble est une collection d'éléments munie d'un critère qui permet de déterminer si un élément est ou non dans l'ensemble.

Pour noter leurs concepts simplement et sans ambiguïté, les mathématiciens utilisent des symboles.

Notations 1.5.

— Pour spécifier les éléments d'un ensemble, on les écrira entre accolades. Ainsi, l'ensemble constitué des entiers 0 et 1, et du mot "zoo" sera noté $\{0, 1, \text{"zoo"}\}$. Pour lui donner un nom, on écrira $X = \{0, 1, \text{"zoo"}\}$.

— **Appartenance.** Pour indiquer qu'un élément e *appartient à* un ensemble E, on notera $e \in E$. Le symbole $\notin$ indique au contraire que e n'appartient pas à E. Ainsi, on a $0 \in X$ et $3 \notin X$.

— **Inclusion.** Si tous les éléments d'un ensemble A appartiennent également à E, on dit que A est inclus dans E, que E contient A, ou que A est un sous-ensemble de E et on note $A \subseteq E$. Ainsi, $\{0, \text{"zoo"}\} \subseteq X$.

Voici un exemple fondamental d'ensemble, le seul dont l'existence est spécifiquement stipulée dans les axiomes de la théorie ZF [6].

Exemple 1.6 (Ensemble vide)**.** L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé *ensemble vide* et noté $\emptyset$.

6. La théorie des ensembles de Zermelo et Fraenkel.

Un des axiomes de ZF détermine quand on a le droit de dire que deux ensembles sont égaux :

Axiome 1.7 (Extensionnalité)**.** *Deux ensembles sont égaux s'ils ont les mêmes éléments.*

Notation 1.8. Pour écrire le contenu d'un ensemble, l'ordre dans lequel sont notés les éléments ne compte pas et on ne s'autorise pas de répétition. Ainsi on a $X = \{0, 1, \text{"zoo"}\} = \{\text{"zoo"}, 1, 0\} = \{\text{"zoo"}, 1, 0, 0\}$. Il n'y a qu'un seul nombre 0, ce n'est pas la peine de le noter deux fois.

Quels ensembles peut-on définir ? Pour l'instant, nous ne pouvons définir les ensembles qu'en énumérant leurs éléments entre parenthèses, on dit qu'on les définit par *extension*. Pourtant, nous avons envie de pouvoir parler de l'ensemble des entiers naturels ou de l'ensembles des entiers pairs, qui sont infinis et que l'on ne va donc pas pouvoir énumérer. C'est pour cela que l'on s'autorise à définir des ensembles par *compréhension*, au sens suivant :

Définition 1.9 (Informelle)**.** Si P est une propriété (raisonnable) qui peut être vérifiée par les éléments d'un ensemble E, alors on peut définir l'ensemble des éléments de E vérifiant P, et on le note

$$\{e \in E \,|\, e \text{ vérifie } P\},$$

où le symbole | se lit "tel que".

Remarque 1.10. Notez comme la condition que les éléments e sélectionnés fassent déjà partie d'un ensemble E empêche la présence du paradoxe de Russel.

Exemple 1.11.

- Considérons l'ensemble F des fruits et considérons la propriété $P =$"être un fruit rouge", qui est bien une propriété qui peut être vérifiée ou non par les éléments de l'ensemble F. On peut alors définir l'ensemble $\{f \in F \,|\, f \text{ vérifie } P\}$ qui n'est autre que l'ensemble des fruits rouges.
- Considérons l'ensemble $\mathcal{P}$ des nombres pairs. Cet ensemble n'est autre que $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \text{ est pair}\}$, où $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels.

Voici d'autres façons de construire de nouveaux ensembles à partir de ceux déjà à notre disposition.

Définition 1.12. Soient deux ensembles E et F.

- **Union.** On appelle *union* de E et F, et l'on note $E \cup F$, l'ensemble contenant tous les éléments de E et tous les éléments de F.
- **Intersection.** On appelle *intersection* de E et F, et l'on note $E \cap F$, l'ensemble contenant les éléments qui sont à la fois dans E et dans F.

— **Complémentaire.** Soit A un ensemble tel que $A \subseteq E$. On appelle *complémentaire de A dans E*, et l'on note $E \setminus A$ l'ensemble

$$E \setminus A = \{e \in E \,|\, e \notin A\}.$$

— **Ensemble des parties.** On appelle *ensemble des parties de E*, et l'on note 2^E ou $\mathcal{P}(E)$, l'ensemble des sous-ensembles de E.

Remarque 1.13. Le fait que l'union, l'intersection, le complémentaire et les parties précédemment définis soient bel et bien des ensembles découle des axiomes de la théorie ZF.

Exemple 1.14. Prenons pour exemple $E = \{0, 1, 2, 3\}$ et $F = \{2, 3, 4\}$.
— **Union.** $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
— **Intersection.** $E \cap F = \{2, 3\}$.
— **Complémentaire.** Soit $A = \{1, 3\}$. On a bien $A \subseteq E$. De plus, $E \setminus A = \{0, 2\}$.
— **Ensemble des parties.**

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(E) = &\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\},\\ &\{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}\end{aligned}$$

1.3 Fonctions

1.3.1 Motivations

Ce qui nous intéresse est de trouver un moyen de comparer la taille (en un sens à définir) de deux ensembles. Le problème, c'est qu'on ne peut s'autoriser à utiliser la méthode qui consiste à compter le nombre d'éléments puis comparer les résultats puisqu'elle n'a pas de sens dans le cas d'ensembles infinis. De plus, souvenez-vous, on ne peut pas prendre la relation d'inclusion de l'un dans l'autre car elle ne permet pas de comparer des ensembles dont les éléments ne sont pas de même nature. Il faut que nous trouvions un moyen de définir une relation d'ordre entre deux ensembles, un lien d'infériorité de taille, pour pouvoir dire ensuite : le premier ensemble est lié par notre lien d'infériorité au deuxième ensemble, il est donc plus petit.

Dans la partie qui va suivre, nous allons définir ces liens entre ensembles : les applications.

1.3.2 Définitions

Nous arrivons à la partie où nous allons définir un des objets les plus fondamentaux des mathématiques : les fonctions. Si la théorie des ensembles est la grammaire des mathématiques, la fonction en est le verbe. C'est un concept fondamental, universel et extrêmement puissant.

Vous avez normalement, au cours de votre scolarité, déjà rencontré la définition d'une fonction. Vous leurs avez donné des formes algébriques, vous en avez dessiné des graphes... En voici une définition plus générale.

Définition 1.15 (Application)**.** Soient X et Y deux ensembles. Une *application*[7] *f de X dans Y*, noté $f : X \to Y$, fait correspondre à chaque élément x de X un unique élément de Y, noté $f(x)$.

Pour une application $f : X \to Y$ et un élément $x \in X$, si $y \in Y$ est tel que $y = f(x)$, on dit que y est l'*image de x par f* et que x est l'*antécédent de y par f*. Une application est donc un objet mathématique qui prend en entrée un élément x d'un ensemble X (appelé *ensemble de définition* de l'application), et renvoie un élément y de Y (appelé *ensemble but* de l'application), de sorte que pour un x fixé, la fonction renvoie toujours le même y, que l'on note $f(x)$.

Exemple 1.16. Un distributeur de boissons se modélise très bien par une application. Entrez un numéro x, et la boisson sélectionnée $f(x)$ vous tombe dans les mains. Pour un numéro donné, vous aurez toujours la même boisson[8]. L'ensemble X de définition du distributeur est l'ensemble des numéros correspondant aux boissons, et l'ensemble but Y est l'ensemble des boissons disponibles au distributeur.

Remarque 1.17. Ici, on ne fait que décrire le comportement d'une fonction, il faudrait ajouter un axiome à notre théorie stipulant qu'il existe de tels objets si nous voulons travailler avec. En fait, il est plus malin de construire un objet mathématique *application* à partir d'ensembles, des objets bien axiomatisés, qui se comporte comme on voudrait qu'une application se comporte. On aura alors défini une application sans ajouter d'axiome ! Comme pour les ensembles, la définition n'est pas le plus important pour nous ici, tout ce dont il faut se souvenir pour travailler est la propriété essentielle d'une application, et c'est justement la définition que je viens de vous donner.

Comment définir une application soi-même ? Pour définir une application, il suffit donc, pour tout élément $x \in X$ de définir un unique élément $f(x)$ de Y, celui qui est associé à x. On peut noter également une application f de la manière suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} X & \to & Y \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple 1.18. La fonction *carré* est l'application c qui a tout entier naturel associé son carré. On la note

$$c : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}.$$

7. souvent appelé *fonction*. En toute rigueur, il y a une nuance entre les deux termes mais même les matheux font cet abus de langage.

8. Si vous entrez un numéro différent, vous pouvez quand même avoir la même boisson (si plusieurs rangées contiennent la même boisson par exemple).

Exercice 1.19. Prendre deux ensembles finis et définir une application entre eux.

Quelques définitions supplémentaires :

Définition 1.20 (Image directe)**.** Soit $f : X \to Y$ une application et soit $A \subseteq X$. On appelle *image directe de A par f*, et on note $f(A)$, l'ensemble des éléments de Y qui ont un antécédent appartenant à A par f. Autrement dit, on a

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{ il existe } x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

On appelle *image de f*, et l'on note $\mathrm{Im}(f)$, l'ensemble $f(X)$.

Définition 1.21 (Image réciproque)**.** Soit $f : X \to Y$ une application et $B \subseteq Y$. On appelle *image réciproque de B par f*, et l'on note $f^{-1}(B)$, l'ensemble des éléments x de X tels que $f(x) \in B$. Autrement dit, on a

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Définition 1.22 (Restriction)**.** Soit $f : X \to Y$ une application et soit $A \subseteq X$. On appelle *restriction de f à A*, et l'on note $f_{|A}$, l'application $f_{|A} : A \to Y$ définie pour tout $a \in A$ par $f_{|A}(a) = f(a)$.

Définition 1.23 (Composition d'applications)**.** Soient X, Y, et Z trois ensembles et soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. On définit l'*application composée de f par g à gauche* ou *application composée de g par f à droite*, et l'on note $g \circ f$, l'application h définie pour tout élément $x \in X$ par $h(x) = g(f(x))$.

Notation 1.24. Si X est un ensemble, on appelle *application identité de X* l'application notée Id_X définie pour tout élément $x \in X$ par $\mathrm{Id}_X(x) = x$.

1.3.3 Comment se servir des applications pour notre problème ?

Pour l'instant, on a pu définir des applications d'un ensemble vers un ensemble plus petit, ou vers un ensemble plus grand, et le fait que l'on puisse définir une application d'un ensemble dans un autre ne nous donne pas d'information comparative de taille comme nous aurions pu le souhaiter. Une application générique n'est pas le lien d'infériorité que nous aurions souhaité.

Notre stratégie va donc être de définir des types d'applications particuliers qui joueront ce rôle de lien d'infériorité. Nous définirons "être plus petit que", "être plus grand que" et "être de la même taille" comme l'existence de certains types d'applications entre les deux ensembles. Nous aurons alors *généralisé* la notion intuitive de comparaison de taille dans le cas des ensembles finis aux cas des ensembles infinis.

1.3.4 Injection

Dans quels cas est-ce qu'il y a moins d'éléments dans un ensemble que dans un autre ?

Définition 1.25 (Injectivité)**.** On dit qu'une application $f : X \to Y$ est *injective* si f ne fait jamais correspondre le même élément de Y à deux éléments distincts de X. Autrement dit, f est injective si :

$$\text{Pour tous } x \in X \text{ et } x' \in X \text{ tels que } x \neq x', \text{ on a } f(x) \neq f(x').$$

Remarques 1.26.

— Une autre manière (c'est la contraposée) très utile de formuler la définition est de dire que f est injective si :

$$\text{Pour tous } x \in X \text{ et } x' \in X, \text{ on a que si } f(x) = f(x'), \text{ alors } x = x'.$$

— Encore une autre manière de formuler l'injectivité serait de dire que si un élément $y \in Y$ est image d'au moins un élément de X, ce ne peut être que d'un seul.

Exercice 1.27.

— Donner un exemple d'une application injective entre deux ensembles finis.

— Donner un exemple d'une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Définition 1.28 (Subpotence)**.** Soient deux ensembles X et Y. On dit que X est *subpotent* à Y, et l'on note $X \preccurlyeq Y$, s'il existe une injection $f : X \to Y$.

1.3.5 Surjection

Définition 1.29 (Surjectivité)**.** On dit qu'une application $f : X \to Y$ est *surjective* si pour tout élément de $y \in Y$, il existe un élément de $x \in X$ tel que $y = f(x)$.

Remarque 1.30. Par définition, une application est surjective si, et seulement si $\mathrm{Im}(f) = Y$. Autrement dit, il est équivalent de dire qu'une application f est surjective ou de dire que $\mathrm{Im}(f) = Y$. On pourrait reformuler informellement la définition en disant que f est surjective si elle atteint tous les éléments de Y au moins une fois.

Exercice 1.31.

— Donner un exemple d'une application surjective entre deux ensembles finis.

— Donner un exemple d'une application surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

Définition 1.32 (Surpotence)**.** Soient deux ensembles X et Y. On dit que X est *surpotent* à Y, et l'on note $X \succcurlyeq Y$, s'il existe une surjection $f : X \to Y$.

1.3.6 Bijection

Définition 1.33 (Bijectivité)**.** On dit qu'une application $f : X \to Y$ est *bijective* si elle est injective et surjective.

Remarque 1.34. Voici des reformulations de la définition :

- f est bijective si tout élément de Y est l'image d'un (surjectivité) et un seul (injectivité) élément de X par f.
- Ou encore, f est bijective si :
  - f **est une application :** pour tout élément $x \in X$, il existe un unique élément $y \in Y$ tel que $y = f(x)$, et
  - f **est bijective :** pour tout élément $y \in Y$, il existe un unique élément $x \in X$ tel que $y = f(x)$.

Lorsqu'il existe une bijection entre X et Y, elle induit une correspondance entre les éléments de X et les éléments de Y de sorte que chaque élément de X est lié à un unique élément de Y et réciproquement.

Définition 1.35 (Equipotence)**.** Soient deux ensembles X et Y. On dit que X est *équipotent* à Y, et l'on note $X \sim Y$, s'il existe une bijection $f : X \to Y$.

On utilise aussi souvent la terminologie : X est en bijection avec Y.

Proposition 1.36. *La relation d'équipotence $\sim$ est* transitive*, c'est-à-dire qu'elle vérifie : pour tous ensembles X, Y et Z, si $X \sim Y$ et $Y \sim Z$, alors $X \sim Z$.*

Exercice 1.37. Le démontrer.

Conclusion. Nous avons finalement abouti à une notion de comparaison de taille entre ensembles infinis. Nous dirons que deux ensembles ont le même cardinal s'ils sont équipotents, i.e. s'il existe une bijection de l'un vers l'autre. Cette méthode permet de comparer des ensembles de même nature et, contrairement à la méthode naive consistant à compter le nombre d'éléments de chaque ensemble, elle a un sens dans le cas d'ensembles infinis. Le processus de comptage d'éléments ne termine jamais pour un ensemble infini, alors que l'on peut très bien définir en temps fini une bijection entre deux ensembles infinis, comme vous allez le voir dans la suite.

1.3.7 Reformulation de nos questions initiales

Donnons des noms aux ensembles dont nous parlions au début de ce cours. L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$ et l'ensemble des nombres pairs positifs $2\mathbb{N}$. Voici les questions que nous allons chercher à résoudre :

1. Est-ce que $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ sont équipotents ?
2. Est-ce que $\mathbb{N}$ et l'ensemble des points sur une droite sont équipotents ?

1.3.8 Définition des ensembles finis et infinis

Avant de répondre à ces questions, faisons un petit aparté. Depuis le début de ce cours, nous parlons d'ensembles finis, d'ensembles infinis, sans jamais avoir donné une définition de ces termes. Avec les nouveaux outils que nous venons de définir, il est désormais possible d'en donner une qui soit satisfaisante.

Définition 1.38 (Ensemble fini)**.** On dit qu'un ensemble E est *fini* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$.

Proposition 1.39. *S'il existe,*[9] *l'entier $n \in \mathbb{N}$ de la définition précédente est unique, et on l'appelle le* cardinal de *E.*

Définition 1.40 (Ensemble infini)**.** On dit qu'un ensemble E est *infini* s'il n'est pas fini.

1.4 Il y a autant de nombres pairs que de nombres entiers

Théorème 1.41. *L'ensemble $\mathbb{N}$ est équipotent à l'ensemble $2\mathbb{N}$.*

Démonstration. Considérer l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & 2\mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}$$

et vérifier qu'elle définit bien une bijection entre $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$. □

1.5 Il y a plus de points sur une droite que de nombre entiers

1.5.1 Court rappel sur les nombres réels

L'ensemble des nombres réels, noté $\mathbb{R}$, est le plus grand ensemble de nombres que vous avez pu rencontrer au cours de votre scolarité. C'est l'ensemble de tous les nombres que vous connaissez : les entiers positifs, les négatifs, les fractions, les *irrationnels*, π, ... tous !

Si l'on considère par exemple les deux entiers 0 et 1, il existe des nombres réels entre les deux comme 0.1 ou 0.43543. Mais il en existe aussi avec une infinité de nombres après la virgule comme $\frac{1}{3} \simeq 0.3333...$ ou encore $\frac{2}{7} \simeq 0.28571428571....$ Il existe également des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous forme d'une fraction de deux entiers comme $\sqrt{2}/2 \simeq 0.707106781...$ par exemple. En fait, tous les nombres compris en 0 et 1 forment

9. c'est-à-dire si l'ensemble E est fini

un continuum..., il y en a une infinité, et "il n'y a pas de trou" : les tracer tous revient à tracer *une segment de droite*. Ces termes sont flous, et n'ont pour but que de donner une vague intuition, mais ils ont un sens bien précis en mathématiques. Les définir dépasserait malheureusement le cadre de ce cours.

Il y a deux choses à retenir pour ce cours :

1. l'ensemble des nombres réels peut être représenté par une droite, *la droite réelle*, et il y a donc autant de point sur une droite que de nombres dans $\mathbb{R}$. En particulier, **résoudre la question 1.3 est équivalent à se demander si les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ sont équipotents.**
2. Tout nombre réel admet un unique [10] *développement décimal*, c'est-à-dire une unique écriture à virgule (potentiellement infinie).

Au Palais de la découverte, il y a une salle avec les décimales de π inscrites sur les murs.

1.5.2 $\mathbb{N} \preccurlyeq \mathbb{R}$

Tout d'abord, notons que puisque $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, on peut définir une injection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array}$$

En fait, on a même le théorème suivant :

Théorème 1.42. *Il existe une injection de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $[0,1] = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \leq x \leq 1\}$.*

Démonstration. Considérons l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & [0,1] \\ n & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{n} & \text{si } n > 1, \end{cases} \end{array}$$

et montrons qu'elle est injective. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $n' \in \mathbb{N}$ tels que $f(n) = f(n')$. Montrons que $n = n'$. Si $f(n) = f(n') = 0$, alors c'est que $n = n' = 0$ car pour tout $m \geq 1$, $\frac{1}{m} \neq 0$. Si maintenant $f(n)$ et $f(n')$ sont différents de 0, c'est que n et n' sont différents de 0 aussi, et on a que $\frac{1}{n} = \frac{1}{n'}$ par définition de f, ce qui équivaut à $n = n'$. □

1.5.3 Est-ce que $\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$?

On va utiliser l'agument diagonal de Cantor, une idée extrêmement riche, publié en 1891 par le mathématicien Georg Cantor, pour démontrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{N}$ ne sont pas équipotents.

10. Ce n'est pas vrai, mais presque.

Théorème 1.43 (Cantor 1874)**.** *Les ensembles* $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{R}$ *ne sont pas équipotents. Autrement dit, il n'existe pas de bijection entre* $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{R}$*.*

Démonstration. On va montrer qu'il n'existe pas de bijection entre $]0,1[$[11] et $\mathbb{N}$.

Ceci impliquera alors que $\mathbb{N}$ n'est pas équipotent à $\mathbb{R}$. En effet, nous l'admettrons ici, mais nous avons une bijection $]0,1[\sim \mathbb{R}$, donc si nous avions $\mathbb{N} \sim \mathbb{R}$ alors nous aurions $\mathbb{N} \sim \mathbb{R} \sim]0,1[$ et donc $\mathbb{N} \sim]0,1[$, ce dont nous allons précisément montrer le contraire.

Pour montrer qu'il n'existe pas de bijection entre $\mathbb{N}$ et $]0,1[$, nous allons montrer qu'il ne peut en fait déjà pas exister de surjection de $\mathbb{N}$ sur $]0,1[$.

Supposons par l'absurde qu'il existe une surjection $f : \mathbb{N} \to]0,1[$**.** On cherche à aboutir à une contradiction logique (que quelque chose et son contraire soient vrais). Ceci montrera alors qu'il ne peut exister de telle surjection.

Comme f **est une application, elle associe à chaque entier** $n \in \mathbb{N}$ **un nombre** $f(n)$ **entre** 0 **et** 1**.** On ne sait pas quel nombre f associe à chaque entier, mais on sait qu'ils peuvent tous s'écrire de manière unique sous la forme décimale $0,...$ avec une certaine suite de chiffres après la virgule. De plus, à un nombre réel entre 0 et 1 est associé une unique suite, et réciproquement, à une suite de décimales, un unique nombre réel entre 0 et 1.

Par exemple, f pourrait être :

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0,5 \\
f(1) &= 0,7952838236253 \\
f(2) &= \pi/4 \simeq 0,78539816339\dots \\
f(3) &= \sqrt{2}-1 \simeq 0,41421356\dots \\
f(4) &= \frac{2}{7} \simeq 0,28571428571\dots \\
f(5) &= \frac{1}{3} \simeq 0.3333\dots \\
f(6) &= 0,1 \\
f(7) &= 0,48 \\
f(8) &= 0,34 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Comme f **est surjective, chaque nombre** $x \in]0,1[$ **a un antécédent par** f**.** Autrement dit, il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = x$. Pour montrer une absurdité, on va en fait montrer que f n'atteint pas tous les éléments de $]0,1[$.

Définissons un nombre z**, qui n'est pas atteint par** f**.** On définit z par son écriture décimale. On choisit les décimales de z de sorte que z ait au moins une décimale de différence avec chacun des $f(n)$. Ainsi, z ne pourra pas être dans l'image de f,

11. L'ensemble $]0,1[$ désigne l'ensemble des nombres $x \in \mathbb{R}$ tels que $0 < x < 1$, c'est le segment ouvert des nombres réels compris strictement entre 0 et 1.

puisque sinon il serait égal à un certain $f(m)$ pour un $m \in \mathbb{N}$, et il aurait alors les mêmes décimales que lui.

Exemple Commençons par construire z dans le cas de l'exemple précédent de manière illustrée. Ecrivons pour cela les décimales de tous les $f(n)$ dans un grand tableau.

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0,\mathbf{5}0000000000\ldots\\
f(1) &= 0,7\mathbf{9}528382362\ldots\\
f(2) &= 0,78\mathbf{5}39816339\ldots\\
f(3) &= 0,414\mathbf{2}1356237\ldots\\
f(4) &= 0,2857\mathbf{1}428571\ldots\\
f(5) &= 0,33333\mathbf{3}33333\ldots\\
f(6) &= 0,100000\mathbf{0}0000\ldots\\
f(7) &= 0,4800000\mathbf{0}000\ldots\\
f(8) &= 0,34000000\mathbf{0}00\ldots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Pour être sûr que z a toujours une décimale de différence avec chacun des $f(n)$, on définit les décimales de z comme étant celles qui sont dans la diagonale de ce tableau (celles en rouge et en gras), mais auxquelles on fait subir d'abord une transformation, ce qui nous assure que les décimales de z seront différentes de celles de chacun des $f(n)$.

La transformation qu'on fait subir aux décimales de la diagonale avant de les placées dans l'écriture décimale de z est la suivante : si la décimale en rouge est différente de 9, on lui ajoute 1, si c'est 9, on la remplace par 1. Si l'on applique ce procédé pour définir z dans notre exemple, on obtient $z = 0,616324111$....

On peut alors vérifier que le procédé fonctionne : z peut-il être égal à $f(3)$? Non, puisque par construction, la 4ème décimale de z est différente de la 4ème décimale de $f(3)$. En effet, la 4ème décimale de z est la 4ème décimale de $f(3)$ à laquelle on a ajouté 1. Comme z et $f(3)$ ont une décimale de différence, ils sont différents. Par construction de z, ce sera vrai pour tous les $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, et z ne peut donc pas être dans l'image de f.

Généralisation Dans le cas général où les $f(n)$ ne sont pas donnés par les valeurs de l'exemple précédent, on peut tout de même définir le même procédé que dans l'exemple pour définir z : la n-ième décimale de z est définie de la manière suivante :

— ou bien comme la n-ième décimale[12] de $f(n-1)$ auquel on ajoute 1 si cette décimale n'est pas 9,

— ou bien comme 1 si la n-ième décimale de $f(n-1)$ est 9.

12. La n-ième décimale de $f(n-1)$ est la décimale de $f(n-1)$ se trouvant sur la diagonale, en rouge dans l'exemple.

Dans ce cas, z est bien un nombre réel entre 0 et 1. Cependant, il n'est pas dans l'image de f, car il a forcément au moins une décimale de différence avec $f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il ne peut donc être aucun des $f(n)$. Ainsi, f n'est pas surjective. C'est une contradiction : nous avions supposé f surjective.

Ainsi, il ne peut exister de surjection de $\mathbb{N}$ sur $]0, 1[$, donc encore moins de bijection entre eux, et donc, comme expliqué en début de cette preuve, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ne peuvent être équipotents. □

1.6 Appendice : Paradoxe de Russel

Etablir une définition des ensembles qui soit assez rigoureuse pour ne pas donner lieu à des contradictions logiques est une tâche extrêmement difficile. Pour preuve, voici plus de détail sur le paradoxe de Russel. Dans ses *Fondements de l'arithmétique*, Gottlob Frege (mathématicien, logicien et philosophe allemand) souhaitait construire une théorie sur laquelle on pourrait fonder toutes les mathématiques. Cependant, Bertrand Russel lui adresse une lettre en 1902 dans laquelle il montre que l'une des bases de la théorie de Frege mène à une contradiction, rendant alors la théorie inutilisable. Frege publie tout de même son livre et écrit en annexe après avoir énoncé le paradoxe de Russel :

> *Pour un écrivain scientifique, il est peu d'infortunes pires que de voir l'une des fondations de son travail s'effondrer alors que celui-ci s'achève. C'est dans cette situation inconfortable que m'a mis une lettre de M. Bertrand Russell, alors que le présent volume allait paraître.*

Quel est donc ce paradoxe ? Considérons une définition naïve des ensembles, comme par exemple : *un ensemble est une collection d'éléments munie d'un critère qui permet de déterminer si un élément est ou non dans l'ensemble.* Etudions les concepts que recouvre cette définition.

Considérons l'ensemble de tous les ensembles. Nous avons bien un ensemble au sens de notre définition : la propriété est : *"être un ensemble"*. Nous avons alors par exemple $\mathbb{N} \in E$, $\{\text{"zoo"}, 0, 1\} \in E$ et $\mathbb{R} \in E$. Oui mais... E est un ensemble n'est-ce pas ? On a donc aussi $E \in E$. Il s'appartient à lui-même. C'est un peu singulier pour un ensemble, non ? Cela n'est pas contradictoire a priori, mais ne correspond en tout cas pas à l'intuition que nous en avons car si notre intuition est celle d'un contenant, nous avons du mal à imaginer un objet étant à la fois le contenant et son contenu.

Considérons l'ensemble des ensembles qui ne s'appartiennent pas à eux-mêmes, et notons le A. On a alors qu'un ensemble X appartient à A si X n'appartient pas à X. En particulier, on a $\mathbb{N} \in A$, $\mathbb{R} \in A$, mais $E \notin A$. Mais voilà, la définition bancale que nous avons choisie va révéler sa véritable nature... En fait, A ne peut pas exister, car cela mènerait à une absurdité, c'est-à-dire à une proposition vraie et fausse à la fois.

Proposition 1.44. *L'existence de A est contradictoire.*

Démonstration. La preuve repose sur la question suivante : "Ce dernier ensemble s'appartient-il à lui-même ?". Supposons par l'absurde qu'il existe un ensemble A qui contienne exactement les ensembles qui ne s'appartiennent pas à eux-mêmes. Nous allons étudier tous les cas qui peuvent alors se produire :

— Premier cas : $A \in A$, A s'appartient à lui-même, mais donc par la définition de A, il ne s'appartient pas : $A \notin A$.

— Second cas : $A \notin A$, mais alors par la définition de A, on a $A \in A$.

Les deux possibilités sont absurdes, A n'existe donc pas. □

1.7 Références

— Patrick Dehornoy, mathématicien ayant travaillé dans le domaine et bon vulgarisateur, est un auteur de référence sur le sujet de la théorie des ensembles. Il a fait de très bonnes conférences grand public et a écrit de nombreux articles grand public. Je vous conseille en particulier la vidéo *Deux malentendus sur la théorie des ensembles* et les articles *Cantor et les infinis* et *L'infini est-il nécessaire ?*.

— Le livre sur lequel je me suis principalement appuyé pour la partie sur l'histoire de la théorie des ensembles est le suivant : Jean-Pierre Belna, *Histoire de la théorie des ensembles*, Volume 47 de Esprit des sciences, Éditeur Ellipses, 2009.

— Pour une version plus détaillée de la construction des la théorie axiomatique des ensembles, avec les formules et les axiomes écrits *in extenso*, voir la deuxième partie du très bon polycopié du cours *Culture mathématique* de Jean Feydy. Attention : ce polycopié, sans suivre le cours auquel il était rattaché, est plus difficile que le présent cours. Le polycopié de Jean Feydy contient également des références plus poussées pour approfondir votre connaissance de la théorie axiomatique des ensembles.

— Une très bonne vidéo sur le sujet de David Louapre, sur sa chaîne ScienceEtonnante.