Examen

mercredi 1er juin

Durée : 2 heures

Les documents de cours sont interdits.
Les calculatrices sont autorisées.

Remarques.

1. *Toute trace de recherche, même infructueuse, sera prise en compte dans la notation.*
2. *N'hésitez pas à poser des questions.*
3. *Vous pouvez (et devrez) utiliser les résultats prouvés aux questions précédentes pour résoudre certaines questions. Lorsque vous le faites, citez précisément le numéro de la question que vous utilisez. Si vous n'avez pas réussi à montrer le résultat que vous souhaitez utiliser, indiquez "en admettant..." avant de le citer.*
4. *Ne restez pas bloqués sur une question, l'examen est volontairement long pour vous permettre de faire en priorité celles que vous savez faire.*
5. *N'hésitez pas à faire des dessins au brouillon pour vous aider.*

1 Ensembles et applications

Exercice 1. Questions de cours

1. Rappeler la définition de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E.
2. Rappeler la définition de la surjectivité d'une application f de X dans Y.
3. Montrer que si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont surjectives, alors $g \circ f : X \to Z$ est surjective.

Exercice 2. Egalités et inclusions d'ensembles

Soient A et B deux ensembles.

1. Montrer que si $A \cup B = B$, alors $A \subseteq B$, et réciproquement.
2. Montrer que si $A \cap B = B$ alors $B \subseteq A$, et réciproquement.

Exercice 3. Propriétés des opérations ensemblistes

Soit E un ensemble.

1. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$.
   (a) Montrer que[1] si $A \subseteq B$, alors $E \setminus B \subseteq E \setminus A$.

1. On rappelle que pour $x \in E$, $x \in E \setminus A$ est équivalent à $x \notin A$. Ainsi, avoir l'un équivaut à avoir l'autre et montrer l'un équivaut à montrer l'autre.

(b) Montrer que $E \setminus (E \setminus A) = A$.

(c) Montrer que $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.

2. On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & E \setminus A \end{array}.$$

(a) Injectivité

i. Ecrire la proposition logique que f doit vérifier pour être injective (i.e. écrire la définition de l'injectivité, dans le cas particulier de f définie ci-dessus).

ii. Ecrire la contraposée de cette proposition logique (généralement utilisée dans les preuves pour montrer que f est injective).

iii. Montrer que f est injective.

(b) Surjectivité

i. Ecrire la proposition logique que f doit vérifier pour être surjective (i.e. écrire la définition de la surjectivité, dans le cas particulier de f définie ci-dessus).

ii. Montrer que f est surjective.

2 Suites et limites

Exercice 4. Questions de cours

1. Soit u une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la convergence de u vers ℓ.
2. Enoncer le théorème d'encadrement des limites.

Exercice 5. Quelques exemples

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite réelle. On dit que :

— *u est décroissante* si pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_m \leq u_n$,

— *u est minorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq M$.

— *u n'est pas minorée* si pour tout réel $M < 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < M$.

Donner *sans démonstration* un exemple de suite :

1. qui diverge,
2. non constante qui tend vers -1,
3. strictement décroissante qui tend vers -1.

Donner *avec démonstration* un exemple de suite :

5. qui est minorée,
6. qui n'est pas minorée,
7. non constante qui tend vers 0.

3 Probabilités

Exercice 6. Questions de cours

Soit Ω un univers fini.

1. Rappeler la définition de loi de probabilité sur Ω.
2. Montrer que si A et B sont deux évènements tels que $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ et qu'en particulier $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. Rappeler à quelle condition l'on dit que X et Y sont indépendantes.
4. Soit $p \in [0, 1]$. Rappeler la définition de variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p.

Exercice 7. Applications du cours

1. Proposer une modélisation probabiliste de l'expérience consistant à lancer un dé pentakidodécaédrique (à 60 faces) équilibré et calculer la probabilité d'obtenir un multiple de 5.
2. Soit Ω un univers fini et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega) = \{0, 2, 4, 6\}$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 0,3$, $\mathbb{P}(X = 2) = 0,5$, $\mathbb{P}(X = 4) = 0,1$, et $\mathbb{P}(X = 6) = 0,1$.
   (a) Calculer l'espérance de X.
   (b) On pose $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$. Quel est l'univers image de Y ?
   (c) Avec quelles probabilités Y prend-elle chacune des valeurs de son univers image ?
   (d) Calculer la variance de X.

Exercice 8. Variables de Bernoulli

Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $0 < p < 1$ et soit X une variable de Bernoulli de paramètre p sur un univers fini Ω.

1. Montrer que la variable $Y = (1 - X)^2$ est une variable de Bernoulli et en donner le paramètre p'.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Montrer que si Z est une variable de Bernoulli de paramètre $q \in [0, 1]$ telle que X et Z sont indépendantes, alors XZ est une variable de Bernoulli de paramètre pq.

Exercice 9. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit X une VAR sur un univers fini Ω.

1. On se propose de démontrer la formule de König-Huygens : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$.
   (a) Montrer que pour tout nombres réels a et b, on a $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   (b) En déduire que $(X - \mathbb{E}[X])^2 = X^2 - 2 \times X \times \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$.
   (c) Si Y est une variable aléatoire constante égale à une valeur $C \in \mathbb{R}$. Quelle est l'espérance de Y ? Le démontrer.
   (d) Déduire des questions précédentes que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$.
2. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz : $\mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2\right]$.