Programme de groupe de travail

Classes caractéristiques

Vadim Lebovici

Exposés basés sur le livre
Characteristic classes
de John W. Milnor and James D. Stasheff

Septembre 2021 – Janvier 2022

Résumé

Les fibrés vectoriels sont des objets de premier importance en géométrie différentielle. Une excellente motivation à l'étude des fibrés vectoriels se trouve dans le cours d'A. Oancea [2], mais on peut penser par exemple au fibré tangent, aux formes différentielles... Les fibrés les plus simples, dits *triviaux*, sont simplement un produit cartésien de la base par un espace vectoriel. La richesse des fibrés vectoriels vient de l'existence de fibrés non-triviaux : le ruban de Möbius de largeur infinie ressemble localement au produit de la sphère par la droite réelle, mais il est globalement bien différent, puisqu'il est non-orientable !

Dans ce groupe de travail, nous étudierons de riches et puissants objets algébriques (des classes de cohomologie bien choisies) qui mesurent le défaut de trivialité d'un fibré vectoriel. Ces objets sont appelés *classes caractéristiques*, et nous étudierons plus particulièrement les *classes de Stiefel-Whitney*. Nous suivrons pour ce faire le livre *Characteristic classes* de J. Milnor et J. Stasheff [1].

Si le temps le permet, nous continuerons notre étude dans le cadre complexe via les *classes de Chern*.

Prérequis : topologie algébrique et géométrie différentielle.

Modalités pratiques

- **Contact :** vadim.lebovici@ens.fr, bureau T9 (sous les toits)
- **Accès au livre :** Le livre est disponible à la bibliothèque et en ligne ici. Si vous empruntez un exemplaire à la bibliothèque, merci de le rendre après votre exposé pour que les autres puissent l'utiliser.
- **Préparation d'un exposé :** nous nous verrons au moins une fois dans la semaine précédant l'exposé, pour discuter de ce que vous exposerez et éclaircir certaines parties si besoin.
- **Contenu des exposés :** pour chaque chapitre, les items $\star$ indiquent ce qui peut être traité selon vos goûts personnels et le temps disponible. Il faut compter 1h15 par exposé pour laisser le temps pour des questions. S'il vous reste du temps à la fin de votre exposé, vous pouvez présenter votre solution à un des exercices du chapitre.
- **Critères d'évaluation :** Vous serez évalués sur trois critères : la compréhension et la présentation rigoureuse du contenu de votre exposé, le choix du contenu que vous mettez en valeur dans votre présentation, et enfin la qualité pédagogique de l'exposé.

Programme

0 Rappels de topologie algébrique I (17 septembre, Vadim)

1 Rappels de topologie algébrique II (24 septembre, Alex)

- Rappels de cohomologie (morphisme induit par une application, invariance par homotopie, suite exacte longue associée à une paire, suite de Mayer-Vietoris, excision) [3, Chap. 3, p.197-204]
- (Co)Homologie d'un CW-complexe [1, Append. A, p.260-263]
- Produit cup relatif [1, Append. A, p.263-265]
- Cohomologie d'un produit [1, Append. A, p.265-270]

2 Fibrés vectoriels (1 octobre, Oscar)

[1, Chap. 2]

- Définition
- Exemples (fibré normal, fibré trivial)
- Fibrés munis d'une métrique
- Opérations sur les fibrés vectoriels (restriction, tiré en arrière, somme directe, orthogonal, produit tensoriel, foncteur Hom) [1, Chap. 3]

3 Définition axiomatique des classes de Stiefel-Whitney (8 octobre, Laurine)

[1, Chap. 4]

- Axiomes
- Conséquences des axiomes
- Cohomologie des espaces projectifs (admis pour l'instant)
- Fibrés sur les espaces projectifs
- Nombres de Stiefel-Whitney
- ⋆ Immersions

4 Grassmanniennes et fibrés universels (15 octobre, Sardor)

[1, Chap. 5]

- Grassmanniennes
- Fibrés universel (I)
- Grassmannienne infinie
- Fibrés universel (II)
- Universalité
- Classe caractéristique cohomologique

5 Cohomologie des grassmanniennes et existence des classes de Stiefel-Whitney (22 octobre, Ethan)

- Cohomologie des grassmanniennes [2, Sec. 4.1, Thm. 4.2.(i)]
- Définition, existence et unicité des classes de Stiefel-Whitney [2, Def. 4.4, Thm. 4.6]
- Théorème de Leray-Hirsch [2, Sec. 4.3]
- Calcul de la cohomologie des grassmanniennes (cas réel) [2, Sec. 4.3.2]
- ⋆ Preuve du théorème de Leray-Hirsch [3, Thm. 4D.1]

6 Classe d'Euler et isomorphisme de Thom (29 octobre, Chuhao)

Classe d'Euler – [1, Chap. 9]

- Fibré orienté
- Enoncé de l'isomorphisme de Thom
- Définition de la classe d'Euler
- Applications

Preuve de l'isomorphisme de Thom – [1, Chap. 10]

- Dans le cas non-orienté
- Dans le cas orienté

7 Calculs dans les variétés lisses (12 novembre, Laurine)

[1, Chap. 11]

- Fibré normal et plongement de variétés
- Fibré tangent et orientation (avec [1, Append. A, p.273])
- Classes d'homologie diagonale

8 Dualité de Poincaré (19 novembre, Alex)

- Dualité de Poincaré et produit cap [1, Append. A, p.276]
- Dualité de Poincaré et classe diagonale [1, Chap. 11]
- Classe d'Euler et caractéristique d'Euler [1, Chap. 11]
- Application : calcul de la cohomologie des espaces projectifs réels
  - Décomposition cellulaire des grassmanniennes [1, Chap. 6]
  - Calcul de la cohomologie des espaces projectifs [1, Pb. 11-A]

9 Carrés de Steenrod et classes de Stiefel-Whitney (26 novembre, Oscar)

- Définition des classes de S-W à partir des carrés de Steenrod [1, Chap. 8]
- Formule de Wu [1, Chap. 11]
- Relations entre carrés de Steenrod et classes duales [1, Pb. 11-E]
- Quelques formules sur les carrés de Steenrod [1, Pb. 11-F]
- Relation d'Adem et algèbre de Steenrod [3, Sec. 4.L, p.496]

Suite à venir...

Références

[1] Milnor, J. W., Stasheff, J. D. (1975). "Characteristic classes". Ann. of Math. Studies, (76), 862-865.

[2] Oancea, A. (2018). "Fibrés vectoriels, classes caractéristiques, dualité de Poincaré." Notes de cours.

[3] Hatcher, A. (2002). "Algebraic topology". Cambridge University Press.