Corrigés des exercices
Probabilités et statistiques

N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions. [1]

1 Lois de probabilités

Exercice 1. Ecriture ensembliste ($\star$)

Soit Ω un univers fini et soient A, B et C trois évènements de Ω. Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes (union, intersection, complémentaire), les evènements suivants :

0. *Exemple : L'évènement $D =$"A ne se réalise pas" s'exprime par la formule* [2] *:* $D = \overline{A}$.
1. $E =$ "seul A se réalise",
2. $F =$ "A et B se réalisent mais pas C",
3. $G =$ "les trois évènements se réalisent",
4. $H =$ "au moins l'un des trois évènements se réalise",
5. $I =$ "aucun des trois évènements ne se réalise",
6. $J =$ "exactement deux des trois se réalisent".
7. $K =$ "au plus l'un des trois évènements se réalise",

Solution de l'exercice 1.

1. $E = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$,
2. $F = A \cap B \cap \overline{C}$,
3. $G = A \cap B \cap C$,
4. $H = A \cup B \cup C$,
5. $I = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
6. $J = \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$,
7. *Deux façons de le voir ici, qui donnent bien sûr le même résultat : "au plus un évènement se réalise" est égale à l'évènement $K' =$ "aucun des trois ou exactement un se réalise" ou encore à l'évènement* contraire *de $K'' =$ "au moins deux se réalisent". Dans le premier cas on trouve $K = K' = I \cup \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$, car "aucun évènement ne se réalise" est le contraire de l'évènement H. Dans le second cas, on trouve $K = \overline{K''}$ où $K'' = J \cup (A \cap B \cap C)$.*

---

1. vadim.lebovici@ens.fr
2. On rappelle que $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Exercice 2. Dé pipé ($\star$)

On lance un dé à six faces pipé de sorte qu'il existe un coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la probabilité de faire un nombre n avec ce dé soit égale à $n\alpha$.

1. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la valeur du paramètre α de la loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrite par l'énoncé.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

Solution de l'exercice 2.

1. *On considère l'univers fini* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. *Puisque* $\mathbb{P}$ *est une loi de probabilité, on a :*

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= \alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha \\ &= 21\alpha, \end{aligned}$$

d'où $\alpha = 1/21$.

3. *La probabilité d'obtenir un chiffre pair vaut :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= 2/21 + 4/21 + 6/21 \\ &= 12/21. \end{aligned}$$

Exercice 3. Propriétés du cours ($\star$)

Soit Ω un univers fini et soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω. Montrer que :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Soient $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
   (a) Si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
   (b) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
   (c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Solution de l'exercice 3.

Toutes les questions ont été corrigées en cours sauf la 2.(c). Pour montrer ce résultat, notons que[3] *:*

$$A \cup B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B) \cup (A \cap B).$$

3. Le montrer si vous n'en êtes pas convaincu·e·s.

De plus, comme $(A \setminus A \cap B) \cap (B \setminus A \cap B) = \emptyset$, on a par l'additivité de $\mathbb{P}$ et la question 2.(a) :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)) &= \mathbb{P}(A \setminus A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B).\end{aligned}$$

De plus, $\Big((A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)\Big) \cap (A \cap B) = \emptyset$, donc par additivité de $\mathbb{P}$, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}((A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B)\\ &= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).\end{aligned}$$

Exercice 4. Encadrement de la probabilité de l'intersection ($\star$)

Soit Ω un univers fini, soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω et soient A et B deux évènements de Ω. Montrer que [4] :

$$\mathbb{P}(A) + P(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)).$$

Solution de l'exercice 4.

Pour l'inégalité de gauche, on sait que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq 1$ (cf. exercice 3 question 3) et que :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B),$$

par la question 2.(c) de l'exercice 3. Ainsi, on a que $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \leq 1$, ou encore :

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B).$$

Pour l'inégalité de droite, on sait que $A \cap B \subseteq A$ et $A \cap B \subseteq B$. Par la question 2.(a) de l'exercice 3, on a donc que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A)$ et que $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$. D'où $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B))$.

Exercice 5. Indépendance ($\star$)

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les événements A = "tirage d'un nombre pair" et B = "tirage d'un multiple de 3".

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Solution de l'exercice 5.

4. Montrer que $a \leq \min(b, c)$ est équivalent à montrer que $a \leq b$ et $a \leq c$.

1. *On modélise l'expérience aléatoire par l'univers* $\Omega = \{1, \ldots, 12\}$ *muni de la loi de probabilité uniforme que l'on notera* $\mathbb{P}$*. On a :*

$$\begin{aligned} A &= \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}, \\ B &= \{3, 6, 9, 12\}, \\ A \cap B &= \{6, 12\}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 6/12 = 1/2, \\ \mathbb{P}(B) &= 4/12 = 1/3, \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= 2/12 = 1/6, \end{aligned}$$

et donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$*, i.e. les évènements* A *et* B *sont indépendants.*

2. *On modélise l'expérience aléatoire par l'univers* $\Omega = \{1, \ldots, 13\}$ *muni de la loi de probabilité uniforme que l'on notera* $\mathbb{P}$*. Les évènements* A*,* B *et* $A \cap B$ *sont les mêmes qu'à la question précédente. On a :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= 6/13, \\ \mathbb{P}(B) &= 4/13, \\ \mathbb{P}(A \cap B) &= 2/13, \end{aligned}$$

et donc $\mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 24/169 \neq 2/13 = \mathbb{P}(A \cap B)$*, i.e. les évènements* A *et* B *ne sont pas indépendants.*

2 Variables aléatoires

Dans toute cette section, on se fixe un univers fini Ω et une loi de probabilités sur Ω.

Exercice 6. Echauffements I ($\star$)

Soit X une variable aléatoire sur Ω d'univers image est $X(\Omega) = \{-2, -1, 1, 2\}$ et de probabilités données par :

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,1 \qquad \mathbb{P}(X = -1) = 0,35,$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = 0,4 \qquad \mathbb{P}(X = 1) = 0,15.$$

1. Quel est l'univers image de la variable aléatoire X^2 ?
2. La variable aléatoire X^2 suit-elle une loi uniforme ?
3. Les variables X et X^2 sont-elles indépendantes ?

Solution de l'exercice 6.

1. $X^2(\Omega) = \{1, 4\}$.

2. *Commençons par noter que*[5] *:*

$$\{X^2 = 1\} = \{X = -1\} \cup \{X = 1\}.$$

De même,

$$\{X^2 = 4\} = \{X = -2\} \cup \{X = 2\}.$$

Comme $\{X = 1\} \cap \{X = -1\} = \emptyset$ *et* $\{X = 2\} \cap \{X = -2\} = \emptyset$ *on peut calculer :*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X^2 = 1) &= \mathbb{P}(\{X = -1\} \cup \{X = 1\}) = 0,35 + 0,15 = 0,5,\\ \mathbb{P}(X^2 = 4) &= \mathbb{P}(\{X = -2\} \cup \{X = 2\}) = 0,4 + 0,1 = 0,5.\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien, pour tout $y \in X^2(\Omega)$, *que* $\mathbb{P}(X^2 = y) = \frac{1}{\#X^2(\Omega)}$, *i.e.* X^2 *suit la loi uniforme.*

3. *Non, on a* $\mathbb{P}(\{X = 1\} \cap \{X^2 = 1\}) = \mathbb{P}(X = 1) = 0,15 \neq 0,075 = \mathbb{P}(X = 1) \cdot \mathbb{P}(X^2 = 1)$.

Exercice 7. Echauffements II ($\star\star$)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même univers image $\{1, \ldots, n\}$ et suivant toutes deux la loi uniforme. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$, avec une aide[6].

Solution de l'exercice 7.

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. *On peut facilement vérifier que :*

$$\{X = Y\} = \Big(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}\Big) \cup \cdots \cup \Big(\{X = n\} \cap \{Y = n\}\Big).$$

D'où, l'on a :

$$\mathbb{P}(X = Y) = \mathbb{P}\Big(\{X = 1\} \cap \{Y = 1\}\Big) + \cdots + \mathbb{P}\Big(\{X = n\} \cap \{Y = n\}\Big).$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, *on a*

$$\mathbb{P}\Big(\{X = i\} \cap \{Y = i\}\Big) = \mathbb{P}(X = i) \cdot \mathbb{P}(Y = i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2},$$

car X *et* Y *sont indépendantes et suivent la loi uniforme. On peut donc remplacer dans la deuxième équation pour trouver :*

$$\mathbb{P}(X = Y) = \frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n},$$

car il y a n *termes dans la somme.*

---

5. Cette égalité intuitive ne l'est peut-être pas encore pour vous. Pour celles et ceux qui n'en seraient pas convaincus, cela nécessite de vérifier l'égalité suivante par double inclusion :

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega)^2 = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = -1\} \cup \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 1\},$$

6. On admettra que l'additivité de $\mathbb{P}$ s'étend aux familles finies d'évènements : si $A_1, \ldots, A_m$ sont m évènements deux à deux incompatibles (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, m\}$) alors $\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_m)$.