Feuille d'exercices
Probabilités et statistiques

N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.[1]

1 Lois de probabilités

Exercice 1. Ecriture ensembliste ($\star$)
Soit Ω un univers fini et soient A, B et C trois évènements de Ω. Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes (union, intersection, complémentaire), les evènements suivants :

0. *Exemple : L'évènement $D =$ "A ne se réalise pas" s'exprime par la formule*[2] *:* $D = \overline{A}$.
1. $E =$ "seul A se réalise",
2. $F =$ "A et B se réalisent mais pas C",
3. $G =$ "les trois évènements se réalisent",
4. $H =$ "au moins l'un des trois évènements se réalise",
5. $I =$ "aucun des trois évènements ne se réalise",
6. $J =$ "exactement deux des trois se réalisent".
7. $K =$ "au plus l'un des trois évènements se réalise",

Exercice 2. Dé pipé ($\star$)
On lance un dé à six faces pipé de sorte qu'il existe un coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la probabilité de faire un nombre n avec ce dé soit égale à $n\alpha$.

1. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la valeur du paramètre α de la loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrite par l'énoncé.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

Exercice 3. Propriétés du cours ($\star$)
Soit Ω un univers fini et soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω. Montrer que :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Soient $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
   (a) Si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
   (b) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
   (c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

1. vadim.lebovici@ens.fr
2. On rappelle que $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Exercice 4. Encadrement de la probabilité de l'intersection ($\star$)

Soit Ω un univers fini, soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω et soient A et B deux évènements de Ω. Montrer que[3] :

$$\mathbb{P}(A) + P(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)).$$

Exercice 5. Indépendance ($\star$)

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les événements $A =$ "tirage d'un nombre pair" et $B =$ "tirage d'un multiple de 3".

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

3. Montrer que $a \leq \min(b, c)$ est équivalent à montrer que $a \leq b$ et $a \leq c$.