Corrigé de l'examen

mercredi 1er juin

Durée : 2 heures

1 Ensembles et applications

Solution de l'exercice 1.

Les réponses sont dans le cours.

Solution de l'exercice 2.

1. *Supposons que $A \cup B = B$ et montrons que $A \subseteq B$. Soit $a \in A$. On a alors que $a \in A \cup B = B$, donc $a \in B$. On a bien montré que $A \subseteq B$.*
Supposons que $A \subseteq B$ et montrons que $A \cup B = B$. Il est clair que $B \subseteq A \cup B$. De plus, $A \cup B \subseteq B$. En effet, pour tout $x \in A \cup B$, on a que $x \in B$ ou $x \in A \subseteq B$. Par double inclusion, on a $A \cup B = B$.

2. *Supposons que $A \cap B = B$ et montrons que $B \subseteq A$. Soit $b \in B$. On a alors que $b \in B = A \cap B$, donc $b \in A$. On a bien montré que $B \subseteq A$.*
Supposons que $B \subseteq A$ et montrons que $A \cap B = B$. Il est clair que $A \cap B \subseteq B$. De plus, $B \subseteq A \cap B$. En effet, pour tout $x \in B$, on a aussi $x \in B \subseteq A$, donc $x \in A \cap B$. Par double inclusion, on a $A \cap B = B$.

Solution de l'exercice 3.

1.(a) *On suppose que $A \subseteq B$. Montrons que $E \setminus B \subseteq E \setminus A$. Soit $x \in E \setminus B$, i.e. $x \notin B$. Si par l'absurde*[1] *$x \in A$, alors $x \in B$ car $A \subseteq B$. Ainsi, on a $x \notin A$, i.e $x \in E \setminus A$.*

1.(b) *On procède par double inclusion. Montrons tout d'abord que $E \setminus (E \setminus A) \subseteq A$. Soit $x \in E \setminus (E \setminus A)$, i.e. $x \notin E \setminus A$. Si par l'absurde $x \notin A$, alors $x \in E \setminus A$, absurde, c'est donc que $x \in A$.*
Montrons désormais que $A \subseteq E \setminus (E \setminus A)$. Si $x \in A$, alors $x \notin E \setminus A$ (par l'absurde, $x \in E \setminus A$ serait équivalent à $x \notin A$). Or, ceci équivaut à $x \in E \setminus (E \setminus A)$.

1.(c) *On peut utiliser la question 1.(a) : comme $A \subseteq A \cup B$, alors $E \setminus (A \cup B) \subseteq E \setminus A$ et également $B \subseteq A \cup B$ donc $E \setminus (A \cup B) \subseteq E \setminus B$. Ainsi, on a bien $E \setminus (A \cup B) \subseteq E \setminus A \cap E \setminus B$.*

1. En fait, il suffit de prendre la contraposée de la phrase *si $x \in A$ alors $x \in B$* pour obtenir que *si $x \notin B$, alors $x \notin A$*, on obtient alors une démonstration plus élégante. Cependant, nous n'avons pas travaillé le passage d'une proposition à sa contraposée, ce n'était donc pas exigible ici, et j'écris la correction en conséquence.

Sinon, on pouvait procéder par double inclusion. Soit $x \in E \setminus (A \cup B)$, i.e. $x \notin A \cup B$. Montrons tout d'abord que $x \in E \setminus A$, i.e. $x \notin A$. Si par l'absurde $x \in A$, alors $x \in A \cup B$, absurde. De même, on montre que $x \in E \setminus B$. Ainsi, $x \in E \setminus A$ et $x \in E \setminus B$, i.e. $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.

Soit $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$. On a alors $x \notin A$ et $x \notin B$. Si par l'absurde $x \in A \cup B$, alors $x \in A$ ou $x \in B$, absurde. Donc $x \notin A \cup B$, i.e. $x \in E \setminus (A \cup B)$.

2.(a).i. *Par définition, f est injective si pour toutes parties $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A' \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \neq A'$, on a $f(A) \neq f(A')$, i.e. $E \setminus A \neq E \setminus A'$.*

2.(a).ii. *En prenant la contraposée, f est injective si pour toutes parties $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A' \in \mathcal{P}(E)$ telles que $E \setminus A = E \setminus A'$, on a $A = A'$.*

2.(a).iii. *Montrons que f est injective. Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A' \in \mathcal{P}(E)$ telles que $E \setminus A = E \setminus A'$. Montrons qu'alors $A = A'$ par double inclusion. Montrons donc que $A \subseteq A'$. On a que $E \setminus A \subseteq E \setminus A'$ puisque ces deux ensembles sont égaux par hypothèse, donc $E \setminus (E \setminus A) \subseteq E \setminus (E \setminus A')$ par la question 1.(a), i.e. $A \subseteq A'$ par 1.(b). Le cas $A' \subseteq A$ est symétrique.*

2.(b).i. *Par définition, f est surjective si pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $f(A) = B$, i.e. $E \setminus A = B$.*

2.(b).ii. *Montrons que f est surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. On pose $A = E \setminus B$. On a alors par 1.(b) que $f(A) = E \setminus A = E \setminus (E \setminus B)$ et donc $f(A) = B$ par 1.(c).*

2 Suites et limites

Solution de l'exercice 4.

Les réponses sont dans le cours.

Solution de l'exercice 5.

1.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array}$$

2.

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & -1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \end{array}$$

3.

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & -1 + \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

5.

$$y : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 0 \end{array}$$

On pose $M = 0$. On a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = 0 \geq 0 = M$, i.e. y est minorée par 0.

6.

$$z : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & -n \end{array}$$

Soit $M < 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien et $-M > 0$ et $1 > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $-M < n$, i.e. $M > -n = z_n$. On a donc bien montré que z n'était pas minorée.

7.

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

La suite a n'est pas constante car $a_0 = 1 \neq 1/2 = a_1$. De plus, elle tend vers 0, la preuve figure dans le corrigé de la feuille 2 de TD.

3 Probabilités

Solution de l'exercice 6.

Les réponses sont dans le cours.

Solution de l'exercice 7.

1. *On modélise l'expérience par l'univers fini $\Omega = \{1, \ldots, 60\}$ muni de la loi de probabilité uniforme. L'évènement $A =$"tirer un multiple de 5" est alors*

$$A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60\},$$

de cardinal 12. On a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$$

2.(a) *On peut calculer l'espérance de X :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 4 \times \mathbb{P}(X = 4) + 6 \times \mathbb{P}(X = 6), \\ &= 2 \times 0.5 + 4 \times 0.1 + 6 \times 0.1, \\ &= 2. \end{aligned}$$

2.(b) *On a alors $Y(\Omega) = \{0, 4, 16\}$.*

2.(c) *On a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned}\{Y=0\} &= \{X=2\}\\ \{Y=4\} &= \{X=4\}\cup\{X=0\}\\ \{Y=16\} &= \{X=6\}.\end{aligned}$$

On peut donc calculer en utilisant le fait que $\{X=2\}\cap\{X=0\}=\emptyset$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0) &= 0.5,\\ \mathbb{P}(Y=4) &= 0.1+0.3=0.4,\\ \mathbb{P}(Y=16) &= 0.1.\end{aligned}$$

2.(d) *On peut donc calculer*

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}[Y]\\ &= 0\times\mathbb{P}(Y=0)+4\times\mathbb{P}(Y=4)+16\times\mathbb{P}(Y=16),\\ &= 0+1.6+1.6,\\ &= 3.2.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8.

1. *La variable aléatoire* Y *a pour univers image* $\{0,1\}$ *et l'on a de plus* $\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}(X=0)=1-\mathbb{P}(X=1)=1-p$. *La variable aléatoire* Y *est donc une variable de Bernoulli de paramètre* $1-p$.

2. *Les variables* X *et* Y *ne sont pas indépendantes, en effet :*

$$\mathbb{P}(X=0\cap Y=0)=\mathbb{P}(\emptyset)=0,$$

mais

$$\mathbb{P}(X=0)\times\mathbb{P}(Y=0)=(1-p)p\neq 0,$$

car $0<p<1$.

3. *L'univers image de* XZ *est* $XZ(\Omega)=\{0,1\}$. *De plus,*

$$\mathbb{P}(XZ=1)=\mathbb{P}(\{X=1\}\cap\{Z=1\}),$$

car si $X=0$ *ou* $Z=0$ *alors* $XZ=0$. *Donc, par indépendance de* X *et* Z,

$$\mathbb{P}(XZ=1)=\mathbb{P}(X=1\cap Z=1)=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Z=1)=pq.$$

La variable XZ *est donc bien une variable de Bernoulli de paramètre* pq.

Solution de l'exercice 9.

Soit X *une VAR sur un univers fini* Ω.

1. *Montrer la formule de König-Huygens :* $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$. *On rappelle que* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
2. *Montrer que* $\mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2\right]$.

Solution de l'exercice 10.

Soit X une VAR sur un univers fini Ω.

1. *On va montrer la formule de König-Huygens :* $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$.
   (a) *Montrer que pour tout nombres réels a et b, on a* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
   (b) *En déduire que* $(X - \mathbb{E}[X])^2 = X^2 - 2 \times \mathbb{E}[X] \times X + \mathbb{E}[X]^2$.
   (c) *Si Y est une variable aléatoire constante égale à une valeur $C \in \mathbb{R}$. Quelle est l'espérance de Y ? Le démontrer.*
   (d) *Déduire des questions précédentes que* $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2$.
2. *Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz :* $\mathbb{E}[X]^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2\right]$.

Solution de l'exercice 11.

1.(a) *Soient a et b deux nombres réels. On peut calculer* $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

1.(b) *On utilise la question précédente pour montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, on a*

$$\begin{aligned}(X - \mathbb{E}[X])^2(\omega) &= (X(\omega) - \mathbb{E}[X])^2 \\ &= X(\omega)^2 - 2 \times X(\omega) \times \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2.\end{aligned}$$

Ainsi, on a $(X - \mathbb{E}[X])^2 = X^2 - 2 \times X \times \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X]^2$.

1.(c) *La réponse est dans le cours.*

1.(d) *On peut alors utiliser la linéarité de l'espérance et on développe le carré.*

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] &= \mathbb{E}\left[X^2 - 2 \cdot \mathbb{E}[X] \cdot X + \mathbb{E}[X]^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2 \cdot \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X]^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - 2 \cdot \mathbb{E}[X]^2 + \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2.\end{aligned}$$

A la deuxième ligne, on utilise la linéarité de l'espérance sortir la somme de l'espérance et pour sortir $2 \cdot \mathbb{E}[X]$ de l'espérance du milieu. A la troisième ligne, on utilise le fait que, puisque $\mathbb{E}[X]^2$ est un nombre réel constant, $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[X]^2\right] = \mathbb{E}[X]^2$.

2. *Par positivité de la variance, on a $\mathbb{V}(X) \geq 0$. Par la formule de König-Huygens, on a donc* $\mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 \geq 0$ *et donc* $\mathbb{E}\left[X^2\right] \geq \mathbb{E}[X]^2$.