Corrigé de l'examen

vendredi 4 juin

1 Ensembles et applications

Solution de l'exercice 1.

Les réponses sont dans le cours pour les deux premières questions et dans la feuille 1 de TD pour la dernière question.

Solution de l'exercice 2.

1. $g^{-1}(A) = \{1, 2, 3\}$.

2.(a) *Soit* $x \in f^{-1}(A)$. *Alors,* $f(x) \in A$, *donc également* $f(x) \in B$, *i.e* $x \in f^{-1}(B)$. *D'où* $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.

2.(b) *Procédons par double inclusion. Commençons par montrer que*

$$f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Soit $x \in f^{-1}(A \cap B)$. *On a alors* $f(x) \in A \cap B$, *donc* $f(x) \in A$ *et* $f(x) \in B$, *i.e.* $x \in f^{-1}(A)$ *et* $x \in f^{-1}(B)$, *i.e.* $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. *On a bien montré* $f^{-1}(A \cap B) \subseteq f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
Montrons maintenant que

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B).$$

Soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. *Alors,* $f(x) \in A$ *et* $f(x) \in B$, *i.e.* $f(x) \in A \cap B$, *i.e.* $x \in f^{-1}(A \cap B)$. *On a donc bien* $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cap B)$.

2.(c) *Procédons par double inclusion. Commençons par montrer que*

$$f^{-1}(A \cup B) \subseteq f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Soit $x \in f^{-1}(A \cup B)$. *On a alors que* $f(x) \in A \cup B$, *donc* $f(x) \in A$ *ou* $f(x) \in B$, *i.e.* $x \in f^{-1}(A)$ *ou* $x \in f^{-1}(B)$, *i.e.* $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. *On a donc bien l'inclusion.*
Montrons désormais que

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A \cup B).$$

Soit $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. *Alors,* $f(x) \in A$ *ou* $f(x) \in B$, *i.e.* $f(x) \in A \cup B$, *i.e.* $x \in f^{-1}(A \cup B)$. *On a donc bien l'inclusion.*

3. *Procédons par double inclusion. Montrons que* $(g \circ f)^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(g^{-1}(C))$. *Soit* $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$. *Alors,* $g \circ f(x) \in C$, *i.e.* $g(f(x)) \in C$, *i.e.* $f(x) \in g^{-1}(C)$, *i.e.* $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$. *De même, si* $x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$, *alors* $f(x) \in g^{-1}(C)$, *donc* $g(f(x)) \in C$, *i.e.* $g \circ f(x) \in C$, *i.e.* $x \in (g \circ f)^{-1}(C)$.

4. *Montrons que* f *est injective. Soient* $x \in X$ *et* $x' \in X$ *tels que* $f(x) = f(x')$. *Alors, si l'on pose* $y = f(x) = f(x')$, *on a que* $f(x) \in \{y\}$ *et* $f(x') \in \{y\}$, *i.e.* $x \in f^{-1}(\{y\})$ *et* $x' \in f^{-1}(\{y\})$. *Or,* $f^{-1}(\{y\})$ *ne contient qu'un seul élément, donc* $x = x'$.

5.(a) *L'application* ϕ *est injective si pour tout* $A \in \mathcal{P}(Y)$ *et tout* $A' \in \mathcal{P}(Y)$ *tels que* $A \neq A'$, *on a* $\phi(A) \neq \phi(A')$, *i.e.* $f^{-1}(A) \neq f^{-1}(A')$.

5.(b) *L'application* ϕ *est injective si pour tout* $A \in \mathcal{P}(Y)$ *et tout* $A' \in \mathcal{P}(Y)$ *tels que* $\phi(A) = \phi(A')$ *i.e.* $f^{-1}(A) = f^{-1}(A')$, *on a* $A = A'$.

5.(c) *Soit* A *et* A' *deux parties de* Y *telles que* $\phi(A) = \phi(A')$, *i.e.* $f^{-1}(A) = f^{-1}(A')$. *Montrons que* $A = A'$. *Procédons par double inclusion et commençons par montrer que* $A \subseteq A'$. *Soit* $y \in A$. *Comme* f *est surjective, il existe* $x \in X$ *tel que* $y = f(x)$. *Alors,* $f(x) \in A$ *et donc* $x \in f^{-1}(A)$. *Comme par hypothèse* $f^{-1}(A) = f^{-1}(A')$, *on a aussi* $x \in f^{-1}(A')$ *et donc* $y = f(x) \in A'$. *On a donc bien montré que pour tout* $y \in A$, *on a* $y \in A'$, *i.e.* $A \subseteq A'$. *L'autre inclusion est symétrique, d'où le résultat :* $A = A'$. *On a donc bien montré l'injectivité de* ϕ.

2 Suites et limites

Solution de l'exercice 3.

Les réponses sont dans le cours.

Solution de l'exercice 4.

1.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 0 \end{array}$$

2.

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array}$$

3.

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 1 + \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

4.

$$x : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 1 - \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

5.

$$y : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 0 \end{array}$$

On pose $M = 0$. On a alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = 0 \leq 0 = M$, i.e. y est majorée par 0.

6.

$$z : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array}$$

Soit $M \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien et $M > 0$ et $1 > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M < n = z_n$. On a donc bien montré que z n'était pas majorée.

7.

$$a : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \dfrac{1}{n+1} \end{array}$$

La suite a n'est pas constante car $a_0 = 1 \neq 1/2 = a_1$. De plus, elle tend vers 0, la preuve figure dans le corrigé de la feuille 2 de TD.

Solution de l'exercice 5.

1. *Comme $u_n \geq 0$, on peut multiplier l'inégalité $v_n \leq 1$ par u_n pour obtenir $u_n v_n \leq u_n$.*

2. *Comme $v_n \geq 0$, on peut multiplier l'inégalité $u_n \leq 1$ par v_n pour obtenir $u_n v_n \leq v_n$.*

3. *Par la question 1, on a que $u_n v_n \leq u_n$ et on sait de plus que $u_n \leq 1$, donc*

$$u_n v_n \leq u_n \leq 1.$$

Par hypothèse $u_n v_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ et on sait de plus que $1 \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$, d'où par le théorème d'encadrement $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$. Idem pour v en utilisant la question 2.

3 Probabilités

Solution de l'exercice 6.

Les réponses sont dans le cours.

Solution de l'exercice 7.

1. *On modélise l'expérience par l'univers fini* $\Omega = \{1, \dots, 20\}$ *muni de la loi de probabilité uniforme. L'évènement* $A =$"*tirer un multiple de* 5" *est alors* $\{5, 10, 15, 20\}$ *de cardinal* 4. *On a donc :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

2.(a) *On peut calculer l'espérance de* X *:*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= 0 \times \mathbb{P}(X = 0) + 1 \times \mathbb{P}(X = 1) + 2 \times \mathbb{P}(X = 2) + 3 \times \mathbb{P}(X = 3),\\ &= 0,5 + 2 \times 0,1 + 3 \times 0,1,\\ &= 1.\end{aligned}$$

2.(b) *On a alors* $Y(\Omega) = \{0, 1, 4\}$.

2.(c) *On a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned}\{Y = 0\} &= \{X = 1\}\\ \{Y = 1\} &= \{X = 2\} \cup \{X = 0\}\\ \{Y = 4\} &= \{X = 3\}.\end{aligned}$$

2.(d) *On peut donc calculer en utilisant la question précédente et le fait que* $\{X = 2\} \cap \{X = 0\} = \emptyset$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = 0) &= 0,5,\\ \mathbb{P}(Y = 1) &= 0,1 + 0,3,\\ \mathbb{P}(Y = 4) &= 0,1.\end{aligned}$$

2.(e) *On peut donc calculer*

$$\begin{aligned}\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}[Y]\\ &= 0 \times \mathbb{P}(Y = 0) + 1 \times \mathbb{P}(Y = 1) + 4 \times \mathbb{P}(Y = 4),\\ &= 0 + 0,4 + 0,4,\\ &= 0,8.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 8.

1. *La variable aléatoire* Y *a pour ensemble image* $\{0, 1\}$ *et l'on a de plus* $\{Y = 1\} = \{X = 0\}$ *donc* $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p$. *La variable aléatoire* Y *est donc une variable de Bernoulli de paramètre* $1 - p$.

2. *Les variables* X *et* Y *ne sont pas indépendantes, en effet :*

$$\mathbb{P}(X = 0 \cap Y = 0) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0,$$

mais

$$\mathbb{P}(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 0) = (1 - p)p \neq 0,$$

car $0 < p < 1$.

3. *L'univers image de XZ est $XZ(\Omega) = \{0, 1\}$. De plus,*

$$\{XZ = 1\} = \{X = 1\} \cap \{Z = 1\},$$

car si $X = 0$ ou $Z = 0$ alors $XZ = 0$. Donc, par indépendance de X et Z,

$$\mathbb{P}(XZ = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \cap Z = 1) = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z = 1) = pq.$$

La variable XZ est donc bien une variable de Bernoulli de paramètre pq.

Solution de l'exercice 9.

1. *Par définition de la covariance et de la variance,* $\mathrm{Cov}\,(X, X) = \mathbb{E}\,[(X - \mathbb{E}\,[X])(X - \mathbb{E}\,[X])] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}\,[X])^2\right] = \mathbb{V}\,(X)$.

2. *Par définition de la covariance,*

$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \mathbb{E}\,[(X - \mathbb{E}\,[X])(Y - \mathbb{E}\,[Y])] = \mathbb{E}\,[(Y - \mathbb{E}\,[Y])(X - \mathbb{E}\,[X])] = \mathrm{Cov}\,(Y, X)\,.$$

3. *On peut calculer :*

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X, Y) &= \mathbb{E}\,[(X - \mathbb{E}\,[X])(Y - \mathbb{E}\,[Y])] \\ &= \mathbb{E}\,[XY - X\mathbb{E}\,[Y] - \mathbb{E}\,[X]\,Y + \mathbb{E}\,[X]\,\mathbb{E}\,[Y]]\,,\end{aligned}$$

d'où par linéarité de l'espérance et le calcul d'espérance pour une constante :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\,(X, Y) &= \mathbb{E}\,[XY] - \mathbb{E}\,[X\mathbb{E}\,[Y]] - \mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,[X]\,Y] + \mathbb{E}\,[\mathbb{E}\,[X]\,\mathbb{E}\,[Y]] \\ &= \mathbb{E}\,[XY] - \mathbb{E}\,[X]\,\mathbb{E}\,[Y] - \mathbb{E}\,[X]\,\mathbb{E}\,[Y] + \mathbb{E}\,[X]\,\mathbb{E}\,[Y] \\ &= \mathbb{E}\,[XY] - \mathbb{E}\,[X]\,\mathbb{E}\,[Y]\,.\end{aligned}$$

4. *Supposons X et Y indépendantes. On sait alors par le cours que* $\mathbb{E}\,[XY] = \mathbb{E}\,[X]\,\mathbb{E}\,[Y]$. *Par la question 3, ceci implique que* $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$.