Corrigé du partiel

mercredi 7 avril

1 Ensembles et applications

Solution de l'exercice 1.

Les réponses sont dans le cours.

Solution de l'exercice 2.

Les réponses sont également dans le cours.

Solution de l'exercice 3.

1.(a) *On suppose que* $A \subseteq B$. *Montrons que* $E \setminus B \subseteq E \setminus A$. *Soit* $x \in E \setminus B$, *i.e.* $x \notin B$. *Si par l'absurde*[1] $x \in A$, *alors* $x \in B$ *car* $A \subseteq B$. *Ainsi, on a* $x \notin A$, *i.e* $x \in E \setminus A$.

1.(b) *On procède par double inclusion. Montrons tout d'abord que* $E \setminus (E \setminus A) \subseteq A$. *Soit* $x \in E \setminus (E \setminus A)$, *i.e.* $x \notin E \setminus A$. *Si par l'absurde* $x \notin A$, *alors* $x \in E \setminus A$, *absurde, c'est donc que* $x \in A$.
Montrons désormais que $A \subseteq E \setminus (E \setminus A)$. *Si* $x \in A$, *alors* $x \notin E \setminus A$ *(par l'absurde,* $x \in E \setminus A$ *serait équivalent à* $x \notin A$*). Or, ceci équivaut à* $x \in E \setminus (E \setminus A)$.

1.(c) *Procédons par double inclusion. Soit* $x \in E \setminus (A \cup B)$, *i.e.* $x \notin A \cup B$. *Montrons tout d'abord que* $x \in E \setminus A$, *i.e.* $x \notin A$. *Si par l'absurde* $x \in A$, *alors* $x \in A \cup B$, *absurde. De même, on montre que* $x \in E \setminus B$. *Ainsi,* $x \in E \setminus A$ *et* $x \in E \setminus B$, *i.e.* $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.

Soit $x \in (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$. *On a alors* $x \notin A$ *et* $x \notin B$. *Si par l'absurde* $x \in A \cup B$, *alors* $x \in A$ *ou* $x \in B$, *absurde. Donc* $x \notin A \cup B$, *i.e.* $x \in E \setminus (A \cup B)$.

2.(a).i. *Par définition,* f *est injective si pour toutes parties* $A \in \mathcal{P}(E)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(E)$ *telles que* $A \neq A'$, *on a* $f(A) \neq f(A')$, *i.e.* $E \setminus A \neq E \setminus A'$.

2.(a).ii. *En prenant la contraposée,* f *est injective si pour toutes parties* $A \in \mathcal{P}(E)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(E)$ *telles que* $E \setminus A = E \setminus A'$, *on a* $A = A'$.

---

1. En fait, il suffit de prendre la contraposée de la phrase *si* $x \in A$ *alors* $x \in B$ pour obtenir que *si* $x \notin B$, *alors* $x \notin A$, on obtient alors une démonstration plus élégante. Cependant, nous n'avons pas travaillé le passage d'une proposition à sa contraposée, ce n'était donc pas exigible ici, et j'écris la correction en conséquence.

2.(a).iii. *Montrons que f est injective. Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $A' \in \mathcal{P}(E)$ telles que $E \setminus A = E \setminus A'$. Montrons qu'alors $A = A'$ par double inclusion. Montrons donc que $A \subseteq A'$. On a que $E \setminus A \subseteq E \setminus A'$ puisque ces deux ensembles sont égaux par hypothèse, donc $E \setminus (E \setminus A) \subseteq E \setminus (E \setminus A')$ par la question 1.(a), i.e. $A \subseteq A'$ par 1.(b). Le cas $A' \subseteq A$ est symétrique.*

2.(b).i. *Par définition, f est surjective si pour tout $B \in \mathcal{P}(E)$, il existe $A \in \mathcal{P}(E)$ telle que $f(A) = B$, i.e. $E \setminus A = B$.*

2.(b).ii. *Montrons que f est surjective. Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. On pose $A = E \setminus B$. On a alors par 1.(b) que $f(A) = E \setminus A = E \setminus (E \setminus B)$ et donc $f(A) = B$ par 1.(c).*

Solution de l'exercice 4.

1. *On a $g(\{1, 2, 3\}) = \{5, 6\}$.*

2. *Supposons que $f(X) = Y$. Montrons que f est surjective. Soit $y \in Y$. Alors comme $f(X) = Y$, on a $y \in f(X)$, i.e. il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. On a donc bien montré que pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$, i.e. f est surjective.*

3.(a) *Supposons $A \subseteq B$. Montrons que $f(A) \subseteq f(B)$. Soit $y \in f(A)$. Par définition, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$ et $A \subseteq B$, on a que $x \in B$. Il existe donc $x \in B$ tel que $y = f(x)$, i.e. $y \in f(B)$.*

3.(b) *Soit $y \in f(A \cap B)$. Il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. On a que $x \in A$ et $x \in B$. Comme alors $x \in A$ et $y = f(x)$, c'est que $y \in f(A)$. Comme aussi $x \in B$ et $y = f(x)$, c'est que $y \in f(B)$. On a donc que $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$, i.e. $x \in f(A) \cap f(B)$.*

3.(c) *Procédons par double inclusion. Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$. On a que $x \in A$ ou $x \in B$. Si $x \in A$, alors, puisqu'on a aussi $y = f(x)$, c'est que $y \in f(A)$ et donc $y \in f(A) \cup f(B)$. Le cas $x \in B$ est symétrique. Dans tous les cas, on a bien $x \in f(A) \cup f(B)$.*
Soit maintenant $y \in f(A) \cup f(B)$. Alors $y \in f(A)$ ou $y \in f(B)$. Supposons dans un premier cas que $y \in f(A)$. Il existe alors $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, on a aussi $x \in A \cup B$. Ainsi, $y \in f(A \cup B)$. Le cas $y \in f(B)$ est symétrique.

3.(d) *Supposons que f est injective. Procédons par double inclusion. Par 3.(b), on a $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Montrons que $f(A) \cap f(B) \subseteq f(A \cap B)$. Soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Comme $x \in f(A)$, il existe $a \in A$ tel que $y = f(a)$. De plus, comme $x \in f(B)$, il existe $b \in B$ tel que $y = f(b)$. Ainsi, $y = f(a) = f(b)$. Comme f est injective, on a donc que $a = b$. On peut alors poser $x = a$ pour obtenir que $x \in A \cap B$ (car $x = a \in A$ et $x = a = b \in B$) et que $y = f(x)$ car $y = f(a)$. Ainsi, on a bien montré qu'il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$, i.e. $y \in f(A \cap B)$.*

Solution de l'exercice 5.

Les réponses sont dans le cours pour 1., 2. et 3. et dans la feuille d'exercice pour 4.

Solution de l'exercice 6.

1.(a) *Soit $A > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $A < N$. Soit $n \geq N$. On a : $n \geq N > A$ donc $u_n = n > A$. On a donc bien montré que pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$, i.e. u tend vers $+\infty$.*

1.(b) *Supposons par l'absurde que v tend vers $+\infty$. On pose $A = 2$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$. En particulier c'est vrai pour l'indice N, on a $u_N > A$, i.e. $1 > 2$, absurde.*

2.(a) *Soit $A > 0$. Comme u tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$. Soit $n \geq N$. Comme $v_n \geq u_n > A$, on a $v_n > A$. On a donc bien montré que pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $v_n > A$, i.e. v tend vers $+\infty$.*

2.(b) *Soit $A > 0$. Comme $A/2 > 0$, et u tend vers $+\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a $u_n > A/2$. Comme également v tend vers $+\infty$, il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, on a $v_n > A/2$. On pose $N = \max(N', N'')$. Soit $n \geq N$. Comme $n \geq N'$ par définition du maximum, on a $u_n > A/2$. Comme $n \geq N''$ par définition du maximum, on a $v_n > A/2$. En additionnant ces deux inégalités, on obtient que $u_n + v_n > A/2 + A/2 = A$.*

3. *Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ croissante et non-majorée. Soit $A > 0$. Comme u n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Soit $n \geq N$. Comme u est croissante, et que $N \leq n$, on a $u_N \leq u_n$. Ainsi, $u_n \geq u_N > A$, donc $u_n > A$. On a donc bien montré que pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$, i.e. u tend vers $+\infty$.*

4.(a) *On dit qu'une suite réelle u* tend vers $-\infty$, *et l'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si :*

$$\text{pour tout } A < 0, \text{ il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que pour tout } n \geq N, \text{ on a } u_n < A.$$

4.(b) *On peut adapter les questions 2.(a) et 2.(b) ainsi : soient $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ deux suites réelles.*

1. *Si u tend vers $-\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \leq u_n$, alors v tend vers $-\infty$.*
2. *Si u et v tendent vers $-\infty$, alors $u + v$ tend aussi vers $-\infty$.*

Les preuves sont similaires à celles des questions 2.(a) et 2.(b).

4.(c) *On peut adapter la question 3 ainsi : si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est décroissante et non-minorée, alors u tend vers $-\infty$. La preuve est similaire. On rappelle les définitions suivantes :*

- *(i) On dit que u est* décroissante *si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$, on a $u_n \geq u_m$.*
- *(ii) On dit que u est* non-minorée *si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N < M$.*