Partiel

mercredi 6 avril

Durée : 2 heures

Les documents de cours et les calculatrices sont interdits.

Remarques.

1. *Toute trace de recherche, même infructueuse, sera prise en compte dans la notation.*
2. *N'hésitez pas à poser des questions.*
3. *Vous pouvez (et devrez) utiliser les résultats prouvés aux questions précédentes pour résoudre certaines questions. Lorsque vous le faites, citez précisément le numéro de la question que vous utilisez. Si vous n'avez pas réussi à montrer le résultat que vous souhaitez utiliser, indiquez "en admettant..." avant de le citer.*
4. *Ne restez pas bloqués sur une question, le partiel est volontairement long pour vous permettre de faire en priorité celles que vous savez faire.*
5. *N'hésitez pas à faire des dessins au brouillon pour vous aider.*

1 Ensembles et applications

Exercice 1. Questions de cours

1. Rappeler la définition de l'injectivité d'une application f de X dans Y.
2. Rappeler la définition de la surjectivité d'une application f de X dans Y.

Exercice 2. Premier exemple

On considère l'application suivante :

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}.$$

1. Montrer qu'elle est injective.
2. Est-elle surjective ? Justifier.
3. Donner *sans démonstration* un exemple différent de d :
   (a) d'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
   (b) d'application injective non surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
   (c) d'application surjective non injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
   (d) d'application bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ différente de la fonction identité.

Exercice 3. Parties et opérations ensemblistes

Soient E et F deux ensembles.

1. (a) Montrer que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$.
   (b) Donner un exemple de E et de F pour lesquels l'inclusion $\mathcal{P}(E \cup F) \subseteq \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$ ***n'est pas*** vérifiée.
2. Montrer que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.

Exercice 4. Image réciproque

Soit $f : X \to Y$ une application. Pour A une partie de Y, on appelle *image réciproque de A par f*, et l'on note $f^{-1}(A)$, le sous-ensemble de X défini par :

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}.$$

1. Donner *sans démonstration* l'image réciproque de $A = \{5, 6\}$ par l'application suivante :
$$g : \begin{array}{ccc} \{0,1,2,3\} & \to & \{4,5,6\} \\ 0 & \mapsto & 4 \\ 1 & \mapsto & 5 \\ 2 & \mapsto & 6 \\ 3 & \mapsto & 6 \end{array}.$$
2. Soient $A \subseteq X$ et $B \subseteq X$.
   (a) Montrer que si $A \subseteq B$, alors $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
   (b) Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   (c) Montrer que $X \setminus f^{-1}(A) = f^{-1}(Y \setminus A)$.
3. On suppose que pour tout $y \in Y$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ ne contient au plus qu'un seul élément. Montrer que f est injective.
4. On considère l'application suivante :
$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(Y) & \to & \mathcal{P}(X) \\ A & \mapsto & f^{-1}(A) \end{array}.$$
   (a) Dans cette question, on supposera f surjective.
      i. Ecrire la proposition logique que ϕ doit vérifier pour être injective (i.e. écrire la définition de l'injectivité, dans le cas particulier de ϕ définie ci-dessus).
      ii. Ecrire la contraposée de cette proposition logique (généralement utilisée dans les preuves pour montrer que ϕ est injective).
      iii. Montrer que ϕ est injective.
   (b) Dans cette question, on supposera f injective.
      i. Ecrire la proposition logique que ϕ doit vérifier pour être surjective (i.e. écrire la définition de la surjectivité, dans le cas particulier de ϕ définie ci-dessus).

ii. Soit $B \in \mathcal{P}(X)$. On pose $A \in \mathcal{P}(X)$ défini par :

$$A = \{y \in Y \mid \text{ il existe } x \in B, \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

Montrer que $\phi(A) = B$.

iii. Montrer que ϕ est surjective.

2 Suites et limites

Exercice 5. Questions de cours

1. Soit u une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la convergence de u vers ℓ.
2. Enoncer le théorème affirmant que $\mathbb{R}$ est archimédien.
3. Enoncer le théorème assurant la convergence et donnant la limite de la somme et du produit de deux suites convergentes.
4. Dire si la suite suivante converge et donner sa limite. Démontrer ces affirmations.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \frac{1}{n+1} \end{array}.$$

Exercice 6. Vrai ou faux ?

Soient u et v deux suites réelles. Pour chacune des assertions suivantes, dire si elles sont vraies ou fausses et le démontrer [1]. On admettra connus les résultats de convergence et de divergence des suites introduites dans les exemples du cours.

1. Si u et v convergent, alors $u + v$ converge.
2. Si u et v divergent, alors $u + v$ diverge.
3. Si u converge et v diverge, alors $u + v$ diverge.
4. Si u converge et v diverge, alors $u \times v$ diverge.

Exercice 7. Suites qui tendent vers $+\infty$

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On dit que u *tend vers plus l'infini (noté $+\infty$)*, et l'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si :

pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$.

1. (a) Montrer que la suite suivante tend vers $+\infty$:

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array}.$$

1. On rappelle que l'on doit donner un contre-exemple pour démontrer qu'une assertion est fausse.

(b) Montrer que la suite suivante ne tend pas vers $+\infty$:

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 1 \end{array}.$$

2. Soient $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ deux suites réelles.
   (a) On suppose que u tend vers $+\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$. Montrer que v tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que si u et v tendent vers $+\infty$, alors $u + v$ tend aussi vers $+\infty$.
3. Montrer que si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est croissante et non-majorée, alors u tend vers $+\infty$. On rappelle les définitions suivantes :
   (i) On dit que u est croissante *si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$, on a $u_n \leq u_m$.*
   (ii) On dit que u est non-majorée *si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > M$.*
4. (Bonus) Suites qui tendent vers $-\infty$.
   (a) Proposer une définition de la propriété *tendre vers* $-\infty$ pour une suite réelle u.
   (b) (Bonus) Adapter les questions 2.(a) et 2.(b) à cette nouvelle définition pour montrer des résultats analogues.
   (c) (Bonus) Même question pour la question 3.