Feuille d'exercices
Ensembles et applications

N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.[1]

1 Ensembles

Exercice 1. Echauffements I ($\star$)
Soit E un ensemble. Que dire de deux sous-ensembles A et B de E tels que $A \cup B = A \cap B$?

Exercice 2. Echauffements II ($\star$)
Soit E un ensemble et soient A, B et C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 3. Des parties ($\star$)
Soient E et F deux ensembles. Quelles relations d'inclusion y a-t-il entre :

1. $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
2. $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?

Exercice 4. Différence symétrique ($\star\star\star$)
Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique de A et B*, et on note $A \Delta B$ l'ensemble défini par :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Faire un dessin, puis calculer $A \Delta B$ pour $A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$.
2. Montrer que $A \Delta B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$.
3. Supposons que $A \Delta B = A \cap B$. Montrer que $A = B = \emptyset$.
4. Soit $C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $A \Delta B = A \Delta C$ si, et seulement si $B = C$.
5. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$, $A \Delta X = \emptyset$.

2 Applications

Exercice 5. Gammes sur l'injectivité et la surjectivité ($\star$)
Soient X, Y et Z trois ensembles. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Montrer que :

1. vadim.lebovici@ens.fr

1. Injectivité
   (a) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
   (b) La relation de subpotence est transitive, i.e. si $X \preccurlyeq Y$ et $Y \preccurlyeq Z$ alors $X \preccurlyeq Z$.
   (c) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
   (d) Donner un exemple où $g \circ f$ est injective et où g ne l'est pas.
2. Surjectivité
   (a) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
   (b) La relation de surpotence est transitive.
   (c) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
   (d) Donner un exemple où $g \circ f$ est surjective et où f ne l'est pas.
3. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.
4. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.
5. La relation d'équipotence est transitive.

Exercice 6. Une propriété en entraîne une autre ($\star\star$)

Soit E un ensemble et soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$. On suppose que pour toutes parties A et B disjointes[2] de E, on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

1. Montrer que $f(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que pour toutes parties A et B de E telles que $A \subseteq B$, on a $f(B \setminus A) = f(B) - f(A)$.
3. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.[3]

Exercice 7. Fonctions caractéristiques ($\star\star\star$)

Soit A une partie d'un ensemble E. On lui associe l'application suivante :

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{rcl} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. ($\star$) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a :[4]
   (a) $\mathbf{1}_{B \setminus A} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$, si $A \subseteq B$.
   (b) $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$.
   (c) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$, si A et B sont disjointes.
   (d) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}$.[5]

2. i.e. telle que $A \cap B = \emptyset$
3. Indice : essayer d'écrire $A \cup B$ comme l'union disjointe de trois parties de E.
4. La somme de deux fonctions est définie ainsi : pour $x \in E$, $(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B)(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x)$, et les autres opérations de manière similaire.
5. On peut vérifier tous les cas possibles, ou bien noter que $A \cup B = E \setminus ((E \setminus A) \cap (E \setminus B))$ et utiliser les questions précédentes.

2. ($\star\star\star$) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a On note $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$. Montrer que l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathbf{1}_A \end{array}$$

   est une bijection.[6]

3. ($\star\star$) *Application.* Résoudre la question 4 de l'exercice 4 en ne faisant que des calculs de fonctions caractéristiques.

Exercice 8. Une caractérisation de la bijectivité ($\star\star$)

Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application. Montrer que f est bijective si, et seulement si pour toute partie A de E, on a $f(E \setminus A) = E \setminus f(A)$.[7]

Exercice 9. Un classique (💡)

Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E sur $\mathcal{P}(E)$.

---

6. L'injectivité implique en particulier que, pour toutes parties A et B de E, on a $A = B$ si, et seulement si $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

7. Voir la définition de *l'image directe* d'un sous-ensemble $A \subseteq E$, i.e de $f(A)$, dans le polycopié de cours.