

# Corrigés des exercices

## Ensembles et applications

*N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.*<sup>1</sup>

### 1 Ensembles

#### Exercice 1. Echauffements I (★)

Soit  $E$  un ensemble. Que dire de deux sous-ensembles  $A$  et  $B$  de  $E$  tels que  $A \cup B = A \cap B$  ?

#### Solution de l'exercice 1.

*Faire un dessin pour se convaincre que dans une telle situation,  $A = B$ . Montrons que c'est bien le cas. Pour ce faire, nous allons utiliser une technique très importante : la double inclusion. Le principe est d'utiliser l'équivalence suivante :  $A = B$  équivaut à  $A \subseteq B$  et  $B \subseteq A$ . On peut donc montrer le second pour en déduire le premier.*

**Montrons que  $A \subseteq B$ .** Par définition de l'inclusion, nous devons donc montrer que :

*Pour tout  $a \in A$ , on a que  $a \in B$ .*

*Soit  $a \in A$ . Par définition de l'union, on a alors que  $a \in A \cup B$ . Or,  $A \cup B = A \cap B$ , donc  $a \in A \cap B$ . Par définition de l'intersection, on a alors  $a \in B$ .*

Conclusion : *Pour tout  $a \in A$ , on a que  $a \in B$ , donc  $A \subseteq B$ .*

**Montrons que  $B \subseteq A$ .** L'énoncé est symétrique en  $A$  et  $B$ , et  $A \subseteq B$ , donc  $B \subseteq A$ .

**Conclusion :** *On a bien montré que  $A \subseteq B$  et  $B \subseteq A$ , i.e  $A = B$ .*

---

1. vadim.lebovici@ens.fr