# Partiel

mercredi 7 avril

Durée : 2 heures

*Les documents de cours et les calculatrices sont interdits.*

**Remarques.**

1. *Toute trace de recherche, même infructueuse, sera prise en compte dans la notation.*
2. *N'hésitez pas à poser des questions.*
3. *Vous pouvez (et devrez) utiliser les résultats prouvés aux questions précédentes pour résoudre certaines questions. Lorsque vous le faites, citez précisément le numéro de la question que vous utilisez. Si vous n'avez pas réussi à montrer le résultat que vous souhaitez utiliser, indiquez "en admettant..." avant de le citer.*
4. *Ne restez pas bloqués sur une question, le partiel est volontairement long pour vous permettre de faire en priorité celles que vous savez faire.*
5. *N'hésitez pas à faire des dessins au brouillon pour vous aider.*

## 1 Ensembles et applications

### Exercice 1. Questions de cours

1. Rappeler la définition de l'injectivité d'une application $f$ de $X$ dans $Y$.
2. Rappeler la définition de la surjectivité d'une application $f$ de $X$ dans $Y$.

### Exercice 2. Premier exemple

On considère l'application suivante :

$$d : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}.$$

1. Montrer qu'elle est injective.
2. Est-elle surjective ? Justifier.
3. Donner *sans démonstration* un exemple différent de $d$ :
   (a) d'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
   (b) d'application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$,
   (c) d'application surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.

### Exercice 3. Propriétés des opérations ensemblistes

Soit $E$ un ensemble.

1. Soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq E$.
   (a) Montrer que[1] si $A \subseteq B$, alors $E \setminus B \subseteq E \setminus A$.
   (b) Montrer que $E \setminus (E \setminus A) = A$.
   (c) Montrer que $E \setminus (A \cup B) = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.
2. On considère l'application suivante :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ A & \mapsto & E \setminus A \end{array}.$$

   (a) Injectivité
      i. Ecrire la proposition logique que $f$ doit vérifier pour être injective (i.e. écrire la définition de l'injectivité, dans le cas particulier de $f$ définie ci-dessus).
      ii. Ecrire la contraposée de cette proposition logique (généralement utilisée dans les preuves pour montrer que $f$ est injective).
      iii. Montrer que $f$ est injective.
   (b) Surjectivité
      i. Ecrire la proposition logique que $f$ doit vérifier pour être surjective (i.e. écrire la définition de la surjectivité, dans le cas particulier de $f$ définie ci-dessus).
      ii. Montrer que $f$ est surjective.

**Exercice 4. Image directe**

Soit $f : X \to Y$ une application. Pour $A$ une partie de $X$, on appelle *image directe de $A$ par $f$*, et l'on note $f(A)$, l'ensemble :

$$f(A) = \{y \in Y \mid \text{ il existe } x \in A, \text{ tel que } y = f(x)\}.$$

1. Donner *sans démonstration* l'image directe de $A = \{1, 2, 3\}$ par l'application suivante :

$$g : \begin{array}{ccc} \{0,1,2,3\} & \to & \{4,5,6\} \\ 0 & \mapsto & 4 \\ 1 & \mapsto & 5 \\ 2 & \mapsto & 6 \\ 3 & \mapsto & 6 \end{array}.$$

2. Montrer que si $f(X) = Y$, alors $f$ est surjective.
3. Soient $A \subseteq X$ et $B \subseteq X$.
   (a) Montrer que si $A \subseteq B$, alors $f(A) \subseteq f(B)$.
   (b) Montrer que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
   (c) Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
   (d) Montrer que si $f$ est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

1. On rappelle que pour $x \in E$, $x \in E \setminus A$ est équivalent à $x \notin A$. Ainsi, avoir l'un équivaut à avoir l'autre et montrer l'un équivaut à montrer l'autre.

## 2 Suites et limites

**Exercice 5. Questions de cours**

1. Rappeler la définition d'une suite réelle.
2. Soit $u$ une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la convergence de $u$ vers $\ell$.
3. Enoncer le théorème affirmant que $\mathbb{R}$ est archimédien.
4. Dire si la suite suivante converge et donner sa limite. Démontrer ces affirmations.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \frac{1}{n+1} \end{array}.$$

**Exercice 6. Suites qui tendent vers $+\infty$**

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On dit que $u$ *tend vers plus l'infini (noté $+\infty$)*, et l'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, si :

pour tout $A > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$.

1. (a) Montrer que la suite suivante tend vers $+\infty$ :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array}.$$

   (b) Montrer que la suite suivante ne tend pas vers $+\infty$ :

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 1 \end{array}.$$

2. Soient $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ deux suites réelles.
   (a) On suppose que $u$ tend vers $+\infty$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$. Montrer que $v$ tend vers $+\infty$.
   (b) Montrer que si $u$ et $v$ tendent vers $+\infty$, alors $u + v$ tend aussi vers $+\infty$.
3. Montrer que si $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ est croissante et non-majorée, alors $u$ tend vers $+\infty$. On rappelle les définitions suivantes :
   *(i) On dit que $u$ est* croissante *si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$, on a $u_n \leq u_m$.*
   *(ii) On dit que $u$ est* non-majorée *si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > M$.*
4. (Bonus) Suites qui tendent vers $-\infty$.
   (a) Proposer une définition de la propriété *tendre vers $-\infty$* pour une suite réelle $u$.
   (b) (Bonus) Adapter les questions 2.(a) et 2.(b) à cette nouvelle définition pour montrer des résultats analogues.
   (c) (Bonus) Même question pour la question 3.