Corrigés des exercices
Probabilités et statistiques

N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.[1]

1 Lois de probabilités

Exercice 1. Ecriture ensembliste ($\star$)

Soit Ω un univers fini et soient A, B et C trois évènements de Ω. Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes (union, intersection, complémentaire), les evènements suivants :

0. *Exemple : L'évènement $D =$ "A ne se réalise pas" s'exprime par la formule*[2] *: $D = \overline{A}$.*
1. $E =$ "seul A se réalise",
2. $F =$ "A et B se réalisent mais pas C",
3. $G =$ "les trois évènements se réalisent",
4. $H =$ "au moins l'un des trois évènements se réalise",
5. $I =$ "aucun des trois évènements ne se réalise",
6. $J =$ "exactement deux des trois se réalisent".
7. $K =$ "au plus l'un des trois évènements se réalise",

Solution de l'exercice 1.

1. $E = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$,
2. $F = A \cap B \cap \overline{C}$,
3. $G = A \cap B \cap C$,
4. $H = A \cup B \cup C$,
5. $I = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$.
6. $J = \left(A \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$,
7. *Deux façons de le voir ici, qui donnent bien sûr le même résultat : "au plus un évènement se réalise" est égale à l'évènement $K' =$ "aucun des trois ou exactement un se réalise" ou encore à l'évènement* contraire *de $K'' =$ "au moins deux se réalisent". Dans le premier cas on trouve $K = K' = I \cup \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap \overline{C}\right) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B} \cap C\right)$, car "aucun évènement ne se réalise" est le contraire de l'évènement H. Dans le second cas, on trouve $K = \overline{K''}$ où $K'' = J \cup (A \cap B \cap C)$.*

1. vadim.lebovici@ens.fr
2. On rappelle que $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Exercice 2. Dé pipé ($\star$)

On lance un dé à six faces pipé de sorte qu'il existe un coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la probabilité de faire un nombre n avec ce dé soit égale à $n\alpha$.

1. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la valeur du paramètre α de la loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrite par l'énoncé.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

Solution de l'exercice 2.

1. *On considère l'univers fini* $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. *Puisque* $\mathbb{P}$ *est une loi de probabilité, on a :*

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= \alpha + 2\alpha + 3\alpha + 4\alpha + 5\alpha + 6\alpha \\ &= 21\alpha, \end{aligned}$$

d'où $\alpha = 1/21$.

3. *La probabilité d'obtenir un chiffre pair vaut :*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) &= \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\}) \\ &= 2/21 + 4/21 + 6/21 \\ &= 12/21. \end{aligned}$$

Exercice 3. Propriétés du cours ($\star$)

Soit Ω un univers fini et soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω. Montrer que :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Soient $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
   (a) Si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
   (b) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
   (c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Solution de l'exercice 3.

Toutes les questions ont été corrigées en cours sauf la 2.(c). Pour montrer ce résultat, notons que[3] *:*

$$A \cup B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B) \cup (A \cap B).$$

3. Le montrer si vous n'en êtes pas convaincu·e·s.

De plus, comme $(A \setminus A \cap B) \cap (B \setminus A \cap B) = \emptyset$*, on a par l'additivité de* $\mathbb{P}$ *et la question 2.(a) :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}((A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)) &= \mathbb{P}(A \setminus A \cap B) + \mathbb{P}(B \setminus A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B).
\end{aligned}$$

De plus, $\Big((A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)\Big) \cap (A \cap B) = \emptyset$*, donc par additivité de* $\mathbb{P}$*, on a :*

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup B) &= \mathbb{P}((A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B) \\
&= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).
\end{aligned}$$