

Feuille d'exercices

Probabilités et statistiques

*N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.*¹

1 Lois de probabilités

Exercice 1. Ecriture ensembliste (★)

Soit Ω un univers fini et soient A, B et C trois évènements de Ω . Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes (union, intersection, complémentaire), les évènements suivants :

0. *Exemple* : L'évènement $D = "A \text{ ne se réalise pas}"$ s'exprime par la formule² : $D = \overline{A}$.
1. $E = "seul A \text{ se réalise}"$,
2. $F = "A \text{ et } B \text{ se réalisent mais pas } C"$,
3. $G = "les trois évènements se réalisent"$,
4. $H = "au moins l'un des trois évènements se réalise"$,
5. $I = "aucun des trois évènements ne se réalise"$,
6. $J = "exactement deux des trois se réalisent"$.
7. $K = "au plus l'un des trois évènements se réalise"$,

Exercice 2. Dé pipé (★)

On lance un dé à six faces pipé de sorte qu'il existe un coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la probabilité de faire un nombre n avec ce dé soit égale à $n\alpha$.

1. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la valeur du paramètre α de la loi de probabilité \mathbb{P} décrite par l'énoncé.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

Exercice 3. Propriétés du cours (★)

Soit Ω un univers fini et soit \mathbb{P} une loi de probabilité sur Ω . Montrer que :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Soient $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
 - (a) Si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
 - (b) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
 - (c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

1. vadim.lebovici@ens.fr

2. On rappelle que $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Exercice 4. Encadrement de la probabilité de l'intersection (★)

Soit Ω un univers fini, soit \mathbb{P} une loi de probabilité sur Ω et soient A et B deux évènements de Ω . Montrer que³ :

$$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)).$$

Exercice 5. Indépendance (★)

Une urne contient 12 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les évènements A = "tirage d'un nombre pair" et B = "tirage d'un multiple de 3".

1. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
2. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

2 Variables aléatoires**Exercice 6. Echauffements I (★)**

Soit X une variable aléatoire sur Ω d'univers image est $X(\Omega) = \{-2, -1, 1, 2\}$ et de probabilités données par :

$$\begin{array}{ll} \mathbb{P}(X = -2) = 0,1 & \mathbb{P}(X = -1) = 0,35, \\ \mathbb{P}(X = 2) = 0,4 & \mathbb{P}(X = 1) = 0,15. \end{array}$$

1. Quel est l'univers image de la variable aléatoire X^2 ?
2. La variable aléatoire X^2 suit-elle une loi uniforme ?
3. Les variables X et X^2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. Echauffements II (★★)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même univers image $\{1, \dots, n\}$ et suivant toutes deux la loi uniforme. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$, avec une aide⁴.

Exercice 8. Petits calculs (★)

On considère le même cadre que l'exercice 6.

1. Calculer l'espérance de X et de X^2 .
2. Calculer la variance et l'écart-type de X et de X^2 .

Exercice 9. Formule de König-Huygens (★)

Soit X une VAR sur un univers fini Ω . Montrer que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$.

3. Montrer que $a \leq \min(b, c)$ est équivalent à montrer que $a \leq b$ et $a \leq c$.

4. On admettra que l'additivité de \mathbb{P} s'étend aux familles finies d'évènements : si A_1, \dots, A_m sont m évènements deux à deux incompatibles (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, m\}$) alors $\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_m) = \mathbb{P}(A_1) + \dots + \mathbb{P}(A_m)$.