# Corrigé du partiel

mercredi 6 avril

## 1 Ensembles et applications

**Solution de l'exercice 1.**

*Les réponses sont dans le cours.*

**Solution de l'exercice 2.**

1. *On peut considérer l'application suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n \end{array}.$$

2. *On peut considérer l'application suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n \end{array}.$$

3. *On peut considérer l'application suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n-1 & \text{si } n \neq 0, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases} \end{array}$$

4. *On peut considérer l'application suivante :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ 0 & \text{si } n = 1, \\ n & \text{si } n > 1. \end{cases} \end{array}$$

**Solution de l'exercice 3.**

*Exercice 3 de la feuille de TD 1.*

**Solution de l'exercice 4.**

**1.** *On a* $g^{-1}(\{5,6\}) = \{1,2,3\}$.

**2.(a)** *Supposons* $A \subseteq B$. *Montrons que* $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$. *Soit* $x \in f^{-1}(A)$. *Par définition,* $f(x) \in A$. *Comme* $A \subseteq B$, *on a que* $f(x) \in B$. *Par définition, on a donc bien que* $x \in f^{-1}(B)$.

**2.(b)** *Procédons par double inclusion. Soit* $x \in f^{-1}(A \cup B)$. *Alors* $f(x) \in A \cup B$ *donc* $f(x) \in A$ *ou* $f(x) \in B$. *Si* $f(x) \in A$, *alors* $x \in f^{-1}(A)$ *par définition et si* $f(x) \in B$ *alors* $x \in f^{-1}(B)$ *par définition. Dans tous les cas, on a bien* $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
*Soit maintenant* $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. *Alors* $f(x) \in A$ *ou* $f(x) \in B$. *Donc* $f(x) \in A \cup B$ *et* $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

**2.(c)** *Procédons par double inclusion. Soit* $x \in X \setminus f^{-1}(A)$. *Alors* $x \notin f^{-1}(A)$, *i.e.* $f(x) \notin A$, *i.e.* $f(x) \in Y \setminus A$, *i.e.* $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$. *Soit* $x \in f^{-1}(Y \setminus A)$. *De même, on a* $f(x) \notin A$ *donc* $x \notin f^{-1}(A)$, *i.e.* $x \in X \setminus f^{-1}(A)$.

**3.** *Montrons que* $f$ *est injective. Soit* $x \in X$ *et* $x' \in X$ *tel que* $f(x) = f(x')$. *En posant* $y = f(x)$ *on a que* $f(x) \in \{y\}$ *et* $f(x') = f(x) \in \{y\}$. *Donc* $x \in f^{-1}(\{y\})$ *et* $x' \in f^{-1}(\{y\})$. *Comme l'ensemble* $f^{-1}(\{y\})$ *ne contient au plus qu'un seul élément, on a* $x = x'$.

**4.(a).i** *L'application* $\phi$ *est injective si pour tout* $A \in \mathcal{P}(X)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(X)$ *tels que* $A \neq A'$, *on a* $\phi(A) \neq \phi(A')$, *i.e.* $f^{-1}(A) \neq f^{-1}(A')$.

**4.(a).ii** *Autrement dit, l'application* $\phi$ *est injective si pour tout* $A \in \mathcal{P}(X)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(X)$ *tels que* $f^{-1}(A) = f^{-1}(A')$, *on a* $A = A'$.

**4.(a).iii** *Soient* $A \in \mathcal{P}(X)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(X)$ *tels que* $f^{-1}(A) = f^{-1}(A')$. *Montrons que* $A = A'$. *Procédons par double-inclusion. Soit* $y \in A$. *Comme* $f$ *est surjective, il existe* $x \in X$ *tel que* $y = f(x)$. *Dans ce cas,* $f(x) = y \in A$ *donc* $x \in f^{-1}(A)$. *Comme* $f^{-1}(A) = f^{-1}(A')$, *on a aussi que* $x \in f^{-1}(A')$, *i.e.* $f(x) \in A'$. *Donc* $y = f(x) \in A'$. *L'autre inclusion est symétrique.*

**4.(b).i** *L'application* $\phi$ *est surjective si pour tout* $B \in \mathcal{P}(X)$, *il existe* $A \in \mathcal{P}(Y)$ *tel que* $\phi(A) = B$, *i.e.* $f^{-1}(A) = B$.

**4.(b).ii** *Montrons que* $\phi(A) = B$, *i.e.* $f^{-1}(A) = B$. *Procédons par double-inclusion. Soit* $x \in B$. *Montrons que* $x \in f^{-1}(A)$, *i.e.* $f(x) \in A$. *En posant* $y = f(x)$, *on a bien l'existence de* $x \in B$ *tel que* $f(x) = y$, *i.e.* $y \in A$ *par définition de* $A$. *Donc* $f(x) \in A$ *et* $x \in f^{-1}(A)$.
*Soit maintenant* $x \in f^{-1}(A)$. *Montrons que* $x \in B$. *Alors* $f(x) \in A$. *En posant* $y = f(x)$, *on a* $y \in A$ *donc il existe* $x' \in B$ *tel que* $y = f(x')$. *On a alors* $f(x) = y = f(x')$. *Comme* $f$ *est injective, ceci implique* $x = x'$. *Comme* $x' \in B$, *on a aussi* $x \in B$.

**4.(b).iii** *Soit* $B \in \mathcal{P}(X)$. *On pose* $A$ *comme dans la question précédente. On a alors que* $\phi(A) = B$ *par la question précédente. On a donc bien montré que pour tout* $B \in \mathcal{P}(X)$, *il existe* $A \in \mathcal{P}(Y)$ *tel que* $\phi(A) = B$, *i.e.* $\phi$ *est surjective.*

### Solution de l'exercice 5.

*Les réponses sont dans le cours pour 1., 2. et 3. et dans la feuille d'exercice pour 4.*

### Solution de l'exercice 6.

**1.** *Vrai, c'est le théorème d'opération sur les limites.*

**2.** *Faux. Les suites*

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n \end{array},$$

*et*

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & -n \end{array}$$

*divergent. On sait que $u$ diverge par le cours et si par l'absurde la suite $v$ convergeait alors $-v = u$ aussi. De plus, la suite $u + v$ est la suite constance égale à $0$, qui converge donc vers $0$.*

**3.** *Vrai. Si par l'absurde $u + v$ convergeait alors $v = (u + v) - u$ aussi par le théorème d'opérations sur les limites. Absurde, puisque $v$ diverge.*

**4.** *Faux. On prend $u$ la suite constante égale à $0$ et $v$ la suite identité. Alors $u \times v$ est aussi la suite constante égale à $0$, qui converge.*

**Solution de l'exercice 7.**

**1.(a)** *Soit $A > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $A < N$. Soit $n \geq N$. On a : $n \geq N > A$ donc $u_n = n > A$. On a donc bien montré que pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$, i.e. $u$ tend vers $+\infty$.*

**1.(b)** *Supposons par l'absurde que $v$ tend vers $+\infty$. On pose $A = 2$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$. En particulier c'est vrai pour l'indice $N$, on a $u_N > A$, i.e. $1 > 2$, absurde.*

**2.(a)** *Soit $A > 0$. Comme $u$ tend vers $+\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$. Soit $n \geq N$. Comme $v_n \geq u_n > A$, on a $v_n > A$. On a donc bien montré que pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $v_n > A$, i.e. $v$ tend vers $+\infty$.*

**2.(b)** *Soit $A > 0$. Comme $A/2 > 0$, et $u$ tend vers $+\infty$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a $u_n > A/2$. Comme également $v$ tend vers $+\infty$, il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, on a $v_n > A/2$. On pose $N = \max(N', N'')$. Soit $n \geq N$. Comme $n \geq N'$ par définition du maximum, on a $u_n > A/2$. Comme $n \geq N''$ par définition du maximum, on a $v_n > A/2$. En additionnant ces deux inégalités, on obtient que $u_n + v_n > A/2 + A/2 = A$.*

**3.** *Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ croissante et non-majorée. Soit $A > 0$. Comme $u$ n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Soit $n \geq N$. Comme $u$ est croissante, et que $N \leq n$, on a $u_N \leq u_n$. Ainsi, $u_n \geq u_N > A$, donc $u_n > A$. On a donc bien montré que pour tout $A > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n > A$, i.e. $u$ tend vers $+\infty$.*

**4.(a)** *On dit qu'une suite réelle $u$* tend vers $-\infty$, *et l'on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$, si :*

*pour tout $A < 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n < A$.*

**4.(b)** *On peut adapter les questions 2.(a) et 2.(b) ainsi : soient* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *et* $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *deux suites réelles.*

1. *Si* $u$ *tend vers* $-\infty$ *et que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a* $v_n \leq u_n$, *alors* $v$ *tend vers* $-\infty$.
2. *Si* $u$ *et* $v$ *tendent vers* $-\infty$, *alors* $u + v$ *tend aussi vers* $-\infty$.

*Les preuves sont similaires à celles des questions 2.(a) et 2.(b).*

**4.(c)** *On peut adapter la question 3 ainsi : si* $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *est décroissante et non-minorée, alors* $u$ *tend vers* $-\infty$. *La preuve est similaire. On rappelle les définitions suivantes :*

*(i)* *On dit que* $u$ *est* décroissante *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $m \in \mathbb{N}$ *tels que* $n \leq m$, *on a* $u_n \geq u_m$.

*(ii)* *On dit que* $u$ *est* non-minorée *si pour tout* $M \in \mathbb{R}$, *il existe* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $u_N < M$.