Corrigés des exercices
Ensembles et applications

N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.[1]

1 Ensembles

Exercice 1. Echauffements I ($\star$)
Soit E un ensemble. Que dire de deux sous-ensembles A et B de E tels que $A \cup B = A \cap B$?

Solution de l'exercice 1.
Faire un dessin pour se convaincre que dans une telle situation, $A = B$. Montrons que c'est bien le cas. Pour ce faire, nous allons utiliser une technique très importante : la double inclusion. *Le principe est d'utiliser l'équivalence suivante : $A = B$ équivaut à $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. On peut donc montrer le second pour en déduire le premier.*

Montrons que $A \subseteq B$. *Par définition de l'inclusion, nous devons donc montrer que :*

$$\text{Pour tout } a \in A, \text{ on a que } a \in B.$$

Soit $a \in A$. Par définition de l'union, an a alors que $a \in A \cup B$. Or, $A \cup B = A \cap B$, donc $a \in A \cap B$. Par définition de l'intersection, on a alors $a \in B$.
Conclusion : Pour tout $a \in A$, on a que $a \in B$, donc $A \subseteq B$.

Montrons que $B \subseteq A$. *L'énoncé est symétrique en A et B, et $A \subseteq B$, donc $B \subseteq A$.*

Conclusion : *On a bien montré que $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$, i.e $A = B$.*

Exercice 2. Echauffements II ($\star$)
Soit E un ensemble et soient A, B et C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Solution de l'exercice 2.
On procède à nouveau par double inclusion.

[1] vadim.lebovici@ens.fr

Montrons que $B \subseteq C$**.** *Soit* $b \in B$*. On a alors que* $b \in A \cup B$*. Comme* $A \cup B = A \cup C$*, on a* $b \in A \cup C$*. Par définition de l'union, l y a alors deux possibilités :*
1er cas : $b \in C$**.** *on a ce qu'on voulait,* $b \in C$*.*
2nd cas : $b \in A$**.** *on a alors* $b \in A \cap B = A \cap C$ *et donc* $b \in C$*. Dans tous les cas, on a bien* $b \in C$*.*
Conclusion : pour tous $b \in B$*, on a* $b \in C$*, donc* $B \subseteq C$*.*

Montrons que $C \subseteq B$**.** *Le problème est symétrique en* B *et* C *et* $B \subseteq C$*, donc* $C \subseteq B$*.*

Conclusion. *On a montré que* $B \subseteq C$ *et* $C \subseteq B$*, donc* $B = C$*.*

Exercice 3. Des parties ($\star$)

Soient E et F deux ensembles. Quelles relations d'inclusion y a-t-il entre :

1. $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
2. $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?

Solution de l'exercice 3.

1. Montrons que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$**.** *Pour montrer qu'une union est incluse dans un ensemble, il suffit de montrer que chaque terme de l'union est inclus dans l'ensemble.*

Montrons que $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$**.** *Soit* $A \in \mathcal{P}(E)$*, montrons que* $A \in \mathcal{P}(E \cup F)$*. Pour tout* $a \in A$*, on a que* $a \in E$*, et donc* $a \in E \cup F$*, donc* $A \subseteq E \cup F$*, i.e.* $A \in \mathcal{P}(E \cup F)$*. Ceci étant vrai pour tout élément* A *de* $\mathcal{P}(E)$*, on a bien* $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$*.*

Montrons que $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$**.** *Comme* E *et* F *jouent des rôles symétriques et que* $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$*, on a également* $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$*.*
Conclusion : *On a montré que* $\mathcal{P}(E) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$ *et* $\mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F)$*, donc*

$$\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subseteq \mathcal{P}(E \cup F).$$

Montrons qu'en général, on a pas $\mathcal{P}(E \cup F) \subseteq \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$**.** *Pour cela, il faut que l'on exhibe un contre-exemple à cette proposition. Prenons* $E = \{0\}$ *et* $F = \{1\}$*. On a alors* $E \cup F = \{0, 1\}$ *et donc :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(E) &= \{\emptyset, \{0\}\}, \\
\mathcal{P}(F) &= \{\emptyset, \{1\}\}, \\
\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) &= \{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}, \\
\mathcal{P}(E \cup F) &= \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\},
\end{aligned}$$

ce qui montre bien que dans cet exemple $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \neq \mathcal{P}(E \cup F)$*.*

2. ***Montrons que*** $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$***.*** *Pour A un ensemble, on a que $A \subseteq E \cap F$ équivaut $A \subseteq E$ et $A \subseteq F$, par définition de l'intersection.*[2] *Autrement dit, on a équivalence entre $A \in \mathcal{P}(E \cap F)$ et $A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$, d'où le résultat.*

Exercice 4. Différence symétrique (⋆⋆⋆)

Soient A et B deux parties d'un ensemble E. On appelle *différence symétrique de A et B*, et on note $A\Delta B$ l'ensemble défini par :

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1. Faire un dessin, puis calculer $A\Delta B$ pour $A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$.
2. Montrer que $A\Delta B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$.
3. Supposons que $A\Delta B = A \cap B$. Montrer que $A = B = \emptyset$.
4. Soit $C \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que $A\Delta B = A\Delta C$ si, et seulement si $B = C$.
5. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$, $A\Delta X = \emptyset$.

Solution de l'exercice 4.

1. *De beaux dessins sont disponibles sur la page wikipédia de la différence symétrique. Pour $A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $B = \{2, 3, 4\}$, on a*

$$A\Delta B = \{0, 1, 4\}.$$

2. *Procédons par double-inclusion.*
Montrons que $A\Delta B \subseteq (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$***.*** *Soit $x \in A\Delta B$. Par définition, $x \in A \cup B$, donc $x \in A$ ou $x \in B$. Supposons d'abord que $x \in A$, l'autre cas étant symétrique. Par définition de la différence symétrique $x \notin A \cap B$, on a donc bien $x \in A \setminus A \cap B$. Par symétrie, si $x \in B$, on aura $x \in B \setminus A \cap B$.*
<u>Conclusion :</u> On a montré que pour tout $x \in A\Delta B$, on a $x \in A \setminus A \cap B$ ou $x \in B \setminus A \cap B$, i.e $A\Delta B \subseteq (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B)$.
Montrons que $(A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B) \subseteq A\Delta B$***.*** *La preuve est similaire.*

3. *Supposons $A\Delta B = A \cap B$. Pour montrer que $A = B = \emptyset$, il nous suffit de montrer que $A = \emptyset$, car A et B jouent des rôles symétriques. Montrons donc que $A = \emptyset$. Supposons par l'absurde qu'il existe $a \in A$. Deux cas sont alors possibles :*
1er cas : $a \in B$***.*** *On a $a \in A \cap B = A\Delta B$. Or, par définition de la différence symétrique, $a \notin A \cap B$, une contradiction.*
2nd cas : $a \notin B$***.*** *On a alors que $a \notin A \cap B$. Puisque $a \in A$, on a que $a \in A \cup B$, et donc $a \in A\Delta B$. Or, $A\Delta B = A \cap B$, donc $a \in A \cap B$, donc $a \in B$, une contradiction.*
<u>Conclusion :</u> Tous les cas mènent à une contradiction, c'est donc qu'il n'existe pas de $a \in A$, et donc $A = \emptyset$.

---

2. Si vous n'êtes pas convaincu, prouvez-le, en prenant des éléments $a \in A$ et en montrant l'équivalence.

4. *Si $B = C$, alors il est clair que $A\Delta B = A\Delta C$. Supposons maintenant $A\Delta B = A\Delta C$, et montrons que $B = C$. A nouveau, nous allons procéder par double inclusion.*
Montrons que $B \subseteq C$***.*** *Soit $b \in B$. Il y a plusieurs possibilités :*

1. *Si $b \in A$, alors il est dans $A \cap B$, et ne peut donc pas être dans $A\Delta B$. Comme $A\Delta B = A\Delta C$ par hypothèse, $b \notin A\Delta C$. Comme $b \in A$, c'est qu'il doit être dans $A \cap C$, et $b \in C$.*
2. *Si $b \notin A$, alors il est dans $A \cup B \setminus A \cap B = A\Delta B = A\Delta C$. Donc $b \in A \cup C$, mais $b \notin A$, donc $b \in C$.*

Dans tous les cas, $b \in C$. Ceci étant vrai pour tous $b \in B$, on a bien $B \subseteq C$.
Montrons que $C \subseteq B$***.*** *L'énonce est symétrique en B et C, et $B \subseteq C$.*
Conclusion : *$B = C$.*

5. *On a que*

$$A\Delta A = A \cup A \setminus A \cap A = A \setminus A = \emptyset,$$

donc A est solution de l'équation. De plus, n'importe quelle partie X de E satisfaisant $A\Delta X = \emptyset$ satisferait $A\Delta X = A\Delta A$. Or, par la question précédente, on a dans ce cas $X = A$.
Conclusion : *La seule solution de l'équation est la partie A.*

2 Applications

Exercice 5. Gammes sur l'injectivité et la surjectivité ($\star$)

Soient X, Y et Z trois ensembles. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Montrer que :

1. Injectivité
   (a) Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
   (b) La relation de subpotence est transitive, i.e. si $X \preccurlyeq Y$ et $Y \preccurlyeq Z$ alors $X \preccurlyeq Z$.
   (c) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
   (d) Donner un exemple où $g \circ f$ est injective et où g ne l'est pas.
2. Surjectivité
   (a) Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ l'est aussi.
   (b) La relation de surpotence est transitive.
   (c) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
   (d) Donner un exemple où $g \circ f$ est surjective et où f ne l'est pas.
3. Si $g \circ f$ est surjective et g est injective, alors f est surjective.
4. Si $g \circ f$ est injective et f est surjective, alors g est injective.

5. La relation d'équipotence est transitive.

Solution de l'exercice 5.

1. (a) *Supposons que f et g sont injectives. Montrons que $g \circ f$ est injective. Soient donc $x \in X$ et $x' \in X$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ et montrons que $x = x'$. Comme g est injective, on a donc $f(x) = f(x')$. Comme f est injective, on a $x = x'$.*
Conclusion : *Pour tous $x \in X$ et $x' \in X$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$, on a $x = x'$, i.e $g \circ f$ est injective.*

1. (b) *Supposons que $X \preccurlyeq Y$ et $Y \preccurlyeq Z$, i.e il existe une injection $f : X \to Y$ et une injection $g : Y \to Z$. On pose alors $h = g \circ f : X \to Z$. Par la question 1.(a), cette application est injective car f et g le sont. Par définition, on a donc $X \preccurlyeq Z$.*

1. (c) *Supposons que $g \circ f$ est injective. Montrons que f est injective. Soient donc $x \in X$ et $x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$ et montrons que $x = x'$. Comme $f(x) = f(x')$ on peut appliquer g pour obtenir que $g(f(x)) = g(f(x'))$.*[3] *Or, $g \circ f$ est injective, ceci implique donc $x = x'$.*
Conclusion : *Pour tous $x \in X$ et $x' \in X$ tels que $f(x) = f(x')$, on a $x = x'$, i.e f est injective.*

1. (d) *On pose :*

$$f : \begin{array}{ccc} \{0,1\} & \to & \{0,1,2\} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

que l'on aurait pu écrire aussi moins efficacement :

$$f : \begin{array}{ccc} \{0,1\} & \to & \{0,1,2\} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$$

ainsi que :

$$g : \begin{array}{ccc} \{0,1,2\} & \to & \{0,1\} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 1 \end{array}.$$

On peut alors facilement vérifier que :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \{0,1\} & \to & \{0,1\} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$$

Cette application est clairement injective (le vérifier si ce n'est pas clair). En revanche, g ne l'est pas : $g(1) = g(2)$ alors que $1 \neq 2$.

3. Noter que ceci est vrai parce que l'image d'un élément par une application est unique.

2. (a) *Supposons que f et g sont surjectives. Montrons que $g \circ f$ l'est aussi, i.e que pour tout $z \in Z$, il existe $x \in X$ tel que $g \circ f(x) = z$. Soit $z \in Z$. Comme g est surjective, il existe $y \in Y$ tel que $z = g(y)$. Comme de plus f est surjective, il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$. On a alors $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$.*
<u>*Conclusion :*</u> *Pour tout $z \in Z$, il existe $x \in X$ tel que $z = g \circ f(x)$, i.e $g \circ f$ est surjective.*

2. (b) *S'inspirer de 1. (b).*

2. (c) *Supposons que $g \circ f$ est surjective. Montrons que g l'est. Soit $z \in Z$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in X$ tel que $z = g \circ f(x)$.* On pose *alors $y = f(x)$. On a bien $z = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$.*
<u>*Conclusion :*</u> *On a montré que pour tout $z \in Z$, il existe $y \in Y$ tel que $z = g(y)$, i.e g est surjective.*

2. (d) *On pose :*

$$f : \begin{array}{ccc} \{0,1\} & \to & \{0,1,2\} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$$

ainsi que :

$$g : \begin{array}{ccc} \{0,1,2\} & \to & \{0,1\} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \\ 2 & \mapsto & 1 \end{array}.$$

On peut alors facilement vérifier que :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} \{0,1\} & \to & \{0,1\} \\ 0 & \mapsto & 0 \\ 1 & \mapsto & 1 \end{array}$$

On a alors que $g \circ f$ est clairement surjective alors que f ne l'est pas, puisque 2 *n'est l'image d'aucun élément de $\{0,1\}$ par f.*

3. *Montrons que f est surjective. Soit $y \in Y$. On pose $z = g(y) \in Z$. Comme $z \in Z$, et que $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in X$ tel que $z = g \circ f(x)$, i.e $g(y) = g(f(x))$. Comme de plus g est injective, $y = f(x)$.*
<u>*Conclusion :*</u> *Pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$, i.e f est surjective.*

4. *Montrons que g est injective. Soient $y \in Y$ et $y' \in Y$ tels que $g(y) = g(y')$, montrons que $y = y'$. Comme f est surjective, il existe $x \in X$ tel que $y = f(x)$ et*

$x' \in X$ tel que $y' = f(x')$. On a alors

$$\begin{aligned} g \circ f(x) &= g(f(x)) \\ &= g(y) \\ &= g(y') \\ &= g(f(x')) \\ &= g \circ f(x'). \end{aligned}$$

Or, $g \circ f$ est injective, donc $x = x'$. Ceci implique que $f(x) = f(x')$, i.e $y = y'$.
<u>Conclusion :</u> Pour tous $y \in Y$ et $y' \in Y$ tels que $g(y) = g(y')$, on a $y = y'$, i.e g est injective.

5. *Utiliser les questions 1.(a) et 2.(a) pour montrer qu'une composée de bijections est une bijection puis s'inspirer de la question 1.(b).*

Exercice 6. Une propriété en entraîne une autre ($\star\star$)

Soit E un ensemble et soit $f : \mathcal{P}(E) \to \mathbb{R}$. On suppose que pour toutes parties A et B disjointes[4] de E, on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

1. Montrer que $f(\emptyset) = 0$.
2. Montrer que pour toutes parties A et B de E telles que $A \subseteq B$, on a $f(B \setminus A) = f(B) - f(A)$.
3. Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

Solution de l'exercice 6.

1. *Comme $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ (i.e le vide est disjoint de lui-même) et que $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$, on a $f(\emptyset) = f(\emptyset) + f(\emptyset) = 2f(\emptyset)$. Ceci implique donc $f(\emptyset) = 0$.*

2. *Soient A et B deux parties de E telles que $A \subseteq B$. On peut décomposer : $B = (B \setminus A) \cup A$ avec $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$ (le montrer si ce n'est pas clair). On a alors $f(B) = f(B \setminus A) + f(A)$, d'où le résultat.*

3. *On peut décomposer $A \cup B$ en trois parties disjointes :*

$$A \cup B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B) \cup A \cap B$$

4. i.e. telle que $A \cap B = \emptyset$

et ainsi calculer :

$$\begin{aligned}f(A \cup B) &= f\left((A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B) \cup A \cap B\right) \\ &= f\left(A \setminus A \cap B\right) + f\left((B \setminus A \cap B) \cup A \cap B\right) \\ &= f\left(A \setminus A \cap B\right) + f\left(B \setminus A \cap B\right) + f\left(A \cap B\right) \\ &= f(A) - f(A \cap B) + f(B) - f(A \cap B) + f(A \cap B) \\ &= f(A) + f(B) - f(A \cap B).\end{aligned}$$

Exercice 7. Fonctions caractéristiques ($\star\star\star$)

Soit A une partie d'un ensemble E. On lui associe l'application suivante :

$$\mathbf{1}_A : \begin{array}{ccl} E & \to & \{0,1\} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

1. ($\star$) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a : [5]
   (a) $\mathbf{1}_{B \setminus A} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$, si $A \subseteq B$.
   (b) $\mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B$.
   (c) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$, si A et B sont disjointes.
   (d) $\mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}$. [6]
2. ($\star\star\star$) Montrer que pour toutes parties A et B de E, on a On note $\mathcal{F}(E, \{0,1\})$ l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$. Montrer que l'application :

   $$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{F}(E, \{0,1\}) \\ A & \mapsto & \mathbf{1}_A \end{array}$$

   est une bijection. [7]
3. ($\star\star\star\star$) *Application.* Résoudre la question 4 de l'exercice 4 en ne faisant que des calculs de fonctions caractéristiques.

Solution de l'exercice 7.

1. (a), (b), (c) *Les trois réponses étant similaires, on traite intégralement la première, et laissons les autres au lecteur ou à la lectrice. Soient donc A et B deux parties de E telles que $A \subseteq B$. On souhaite montrer que pour tout $x \in E$,*

5. La somme de deux fonctions est définie ainsi : pour $x \in E$, $(\mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B)(x) = \mathbf{1}_A(x) + \mathbf{1}_B(x)$, et les autres opérations de manière similaire.

6. On peut vérifier tous les cas possibles, ou bien noter que $A \cup B = E \setminus ((E \setminus A) \cap (E \setminus B))$ et utiliser les questions précédentes.

7. L'injectivité implique en particulier que, pour toutes parties A et B de E, on a $A = B$ si, et seulement si $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$.

$\mathbf{1}_{B\setminus A}(x) = \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)$. *Soit* $x \in E$.
1er cas : $x \in B \setminus A$. *On a alors* $\mathbf{1}_{B\setminus A}(x) = 1$. *Comme* $x \in B$, *on a* $\mathbf{1}_B(x) = 1$ *et comme* $x \notin A$, $\mathbf{1}_A(x) = 0$. *Ainsi, on a bien :* $\mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x) = 1 - 0 = 1 = \mathbf{1}_{B\setminus A}(x)$.
2nd cas : $x \notin B \setminus A$. *On a alors que* $\mathbf{1}_{B\setminus A}(x) = 0$. *De plus, il y a alors deux possibilités : ou bien* $x \notin B$, *ou bien* $x \in A$. *Si* $x \notin B$, *alors* $\mathbf{1}_B(x) = 0$ *et* $x \notin A$ *car* $A \subseteq B$, *donc aussi* $\mathbf{1}_A(x) = 0$. *Ainsi :* $\mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x) = 0 - 0 = 0 = \mathbf{1}_{B\setminus A}(x)$. *Si* $x \in A$, *alors aussi* $x \in B$ *car* $A \subseteq B$. *On aura donc* $\mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x) = 1 - 1 = 0 = \mathbf{1}_{B\setminus A}(x)$.
Conclusion : dans tous les cas, on a bien montré que pour tout $x \in E$, $\mathbf{1}_{B\setminus A}(x) = \mathbf{1}_B(x) - \mathbf{1}_A(x)$, *i.e* $\mathbf{1}_{B\setminus A} = \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A$.

1. (d) *On utilise les questions précédentes et le fait que l'on peut décomposer* $A \cup B$ *en trois parties disjointes :*

$$A \cup B = (A \setminus A \cap B) \cup (B \setminus A \cap B) \cup A \cap B.$$

2. *On doit montrer que* f *est injective et surjective. Commençons par l'injectivité. On doit montrer que pour toutes parties* $A \in \mathcal{P}(E)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(E)$ *telles que* $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A'}$ *on a* $A = A'$. *Soient donc* $A \in \mathcal{P}(E)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(E)$ *telles que* $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A'}$. *Procédons par double inclusion. Soit* $a \in A$. *On a alors* $\mathbf{1}_A(a) = 1$. *Or* $\mathbf{1}_{A'}(a) = \mathbf{1}_A(a) = 1$ *donc* $a \in A'$ *par définition de* $\mathbf{1}_{A'}$. *Ainsi,* $A \subseteq A'$. *Par symétrie, on a aussi que* $A' \subseteq A$.
Conclusion : on a montré que pour toutes parties $A \in \mathcal{P}(E)$ *et* $A' \in \mathcal{P}(E)$ *telles que* $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{A'}$ *on a* $A = A'$, *i.e.* f *est injective.*
Montrons que f *est surjective. Soit* $\alpha \in \mathcal{F}(E, \{0,1\})$. *Posons*

$$A = \{x \in E \mid \alpha(x) = 1\} \in \mathcal{P}(E).$$

Montrons que $\alpha = \mathbf{1}_A = f(A)$. *Soit* $x \in E$. *Si* $x \in A$, *alors* $\mathbf{1}_A(x) = 1 = \alpha(x)$ *par définition de* A *et de* $\mathbf{1}_A$. *Si* $x \notin A$, *alors* $\mathbf{1}_A(x) = \alpha(x)$ *par définition de* A *et de* $\mathbf{1}_A$.
Conclusion : on a montré que pour tout $\alpha \in \mathcal{F}(E, \{0,1\})$, *il existe* $A \in \mathcal{P}(E)$ *telle que* $\alpha = f(A)$, *i.e* f *est surjective.*

3. *Soient* A, B *et* C *trois parties de* E. *Montrons que* $A\Delta B = A\Delta C$ *si, et seulement si* $B = C$. *Puisque* f *est injective, on a que pour toutes parties* D *et* D' *de* E *que*

$$\mathbf{1}_D = \mathbf{1}_{D'} \Leftrightarrow D = D'.$$

On a donc que

$$A\Delta B = A\Delta C$$

équivaut à

$$\mathbf{1}_{A\Delta B} = \mathbf{1}_{A\Delta C}.$$

De plus, par la question 1), on a :

$$\begin{aligned}
\mathbf{1}_{A\Delta B} &= \mathbf{1}_{(A\cup B)\setminus(A\cap B)} \\
&= \mathbf{1}_{A\cup B} - \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \\
&= \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \\
&= \mathbf{1}_A^2 + \mathbf{1}_B^2 - 2\cdot \mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B \\
&= (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2.
\end{aligned}$$

où la troisième égalité vient du fait que $\mathbf{1}_A$ *et* $\mathbf{1}_B$ *sont à valeurs dans* $\{0,1\}$ *et que* $0^2 = 0$ *et* $1^1 = 1$. *Ainsi,* $A\Delta B = A\Delta C$ *équivaut à :*

$$(\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B)^2 = (\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_C)^2.$$

Attention*, ceci n'est équivalent à* $\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_C$ *que si les deux côtés de cette dernière égalité sont de même signe. En fait, c'est toujours le cas. En effet, si* $x \in A$*, alors* $\mathbf{1}_A(x) = 1$ *et* $\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x) \geq 0$ *car* $\mathbf{1}_B(x) \in \{0,1\}$*, idem on a* $\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_C(x) \geq 0$*. Si* $x \notin A$*, alors* $\mathbf{1}_A(x) = 0$ *et* $\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_B(x) \leq 0$ *car* $\mathbf{1}_B(x) \in \{0,1\}$ *et encore* $\mathbf{1}_A(x) - \mathbf{1}_C(x) \leq 0$*. On a donc bien dans tous les cas :*

$$\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_C.$$

Ce qui équivaut à :

$$\mathbf{1}_B = \mathbf{1}_C,$$

et, comme f *est injective, ceci équivaut à :*

$$B = C.$$

Exercice 8. Un classique (💡)

Soit E un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas de surjection E dans $\mathcal{P}(E)$.

Solution de l'exercice 8.

Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$*. On pose alors :*

$$A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(E),$$

qui a bien un sens puisque $f(x) \subseteq E$ *(c'est une partie de* E*). Montrons que* A *n'a pas d'antécédent par* f*. Supposons par l'absurde qu'il existe* $z \in E$ *tel que* $A = f(z)$*. On a alors deux possibilités :*

— *ou bien* $z \in A$ *et alors* $z \in f(z)$*, donc* $z \notin A$ *par définition de* A*, ce qui est absurde,*

— *ou bien* $z \notin A$ *et alors* $z \notin f(z)$*, donc* $z \in A$ *par définition de* A*, ce qui est absurde.*

Dans tous les cas, l'existence d'un antécédent de A *par* f *est absurde, donc* A *n'a pas d'antécédent et* f *n'est pas surjective.*