Corrigés des exercices
Suites et limites

N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.[1]

1 Suites

Exercice 1. Calculs de termes ($\star$)

Calculer les quatre premiers termes des suites suivantes.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3 \end{array} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3n+1 \end{array}$$

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array} \qquad z : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \cdot n \end{array}$$

Solution de l'exercice 1.

$$\begin{array}{llll}
u_0 = 3, & v_0 = 3 \times 0 + 1 = 1, & w_0 = (-1)^0 = 1, & z_0 = (-1)^0 \times 0 = 0, \\
u_1 = 3, & v_1 = 3 \times 1 + 1 = 4, & w_1 = (-1)^1 = -1, & z_1 = (-1)^1 \times 1 = -1, \\
u_2 = 3, & v_2 = 3 \times 2 + 1 = 7, & w_2 = (-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1, & z_2 = (-1)^2 \times 2 = 2, \\
u_3 = 3, & v_3 = 3 \times 3 + 1 = 10, & w_3 = (-1)^3 = (-1)^2 \times (-1) = -1, & z_3 = (-1)^3 \times 3 = -3.
\end{array}$$

Exercice 2. Des propriétés classiques ($\star$)

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite réelle. On dit que :

- u *est croissante* si pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_n \leq u_m$,
- u *est décroissante* si pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_n \geq u_m$,
- u *est minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq m$.
- u *est majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$.
- u *n'est pas minorée* si pour tout $m \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < m$.
- u *n'est pas majorée* si pour tout $M \in \mathbb{R}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$.

1. Donner un exemple de suite croissante.
2. Donner un exemple de suite majorée et un de suite non majorée.
3. Donner un exemple de suite non majorée et non croissante.
4. Mêmes questions en remplaçant croissante par décroissante et majorée par minorée.
5. Donner un exemple de suite qui n'est ni croissante, ni décroissante.

1. vadim.lebovici@ens.fr

6. Dire si les suites suivantes sont croissantes/décroissantes, majorées ou non, minorées ou non :
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \end{array} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & (-1)^n \cdot n \end{array}$$

Solution de l'exercice 2.

1. *La suite identité*
$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & n \end{array}$$
est croissante. Montrons-le. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq m$. Alors $u_n = n \leq m = u_m$. Donc, u est croissante.

2. *La suite constante égale à 1, que l'on notera ici v, est majorée. On peut prendre $M = 1$ dans la définition et vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 \leq 1 = M$.*
La suite identité n'est pas majorée. Notez que si u était majorée par un $M' \in \mathbb{R}$ qui soit négatif (i.e. $M' \leq 0$), alors 1 majorerait aussi u. Ainsi, si u est majorée par un nombre négatif, elle l'est aussi par un nombre strictement positif. C'est pourquoi, pour montrer que u n'est pas majorée, il suffit de montrer qu'elle n'est pas majorée par des réels strictement positifs $M > 0$. Soit donc un réel $M > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien (voir le théorème du cours) et que $M > 0$ et $1 > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $M < n \times 1 = n = u_n$. On a donc bien montré que u n'est pas majoré.

3. *La suite x définie par :*
$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \begin{cases} n & \textit{si } n \textit{ est impair,} \\ 0 & \textit{si } n \textit{ est pair,} \end{cases} \end{array}$$
(Tracer le graphe de cette suite pour comprendre son fonctionnement) n'est ni majorée, ni croissante. Elle n'est pas croissante, i.e il existe $n \leq m$ tels que $u_n > u_m$. Par exemple, $u_1 = 1 > 0 = u_2$ alors que $1 \leq 2$. Elle n'est pas majorée, comme le montre la preuve suivante. Soit $M > 0$ (regarder la discussion de la question 2). Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe $n' \in \mathbb{N}$ tel que $M < n'$. Si n' est impair, alors on a bien $M < n' = x'_n$ et on peut poser $n = n'$. Si n' est pair, alors $n' + 1$ est impair et $M < n' < n' + 1 = v_{n'+1}$ et on peut poser $n = n' + 1$. On a bien montré que x n'était pas majorée.

4. *Multiplier les suites précédentes par -1 et montrer qu'une suite u est croissante (resp. majorée) si, et seulement si,*[2] *$-u$ est décroissante (resp. minorée).*

5. *Vérifier que la suite x n'est ni croissante (déjà montré à la question 3), ni décroissante (s'inspirer de la question 3).*

2. Cette formule signifie que qu'il y a équivalence entre les assertions qui l'encadrent.

6. *La suite u n'est ni croissante, ni décroissante, mais elle est majorée (par 1) et minorée (par -1). La suite v n'est ni croissante, ni décroissante, ni majorée, ni minorée. S'inspirer des questions précédentes pour le montrer, les preuves sont similaires.*

2 Limites

Exercice 3. Quelques exemples ($\star$)

1. Montrer que la suite suivante converge et donner sa limite.

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3 \end{array}$$

2. Montrer que la suite suivante converge et donner sa limite. [3]

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \frac{1}{n+1} \end{array}$$

3. Montrer que la suite suivante diverge.

$$w : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & 3n \end{array}$$

Solution de l'exercice 3.

1. *Adapter la preuve du cours (voir polycopié) pour la suite constante égale à* 1*, en remplaçant* 1 *par* 3*. Ne regardez la preuve du cours que si c'est vraiment nécessaire.*

2. *Montrons que* $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Soit $\varepsilon > 0$. *Comme* $\mathbb{R}$ *est archimédien,* $\varepsilon > 0$ *et* $1 > 0$*, il existe un entier* $N \geq 1$ *tel que* $1 < N\varepsilon$. *Soit* $n \geq N$. *On a alors* $(n+1)\varepsilon = n\varepsilon + \varepsilon$ *et de plus :*

$$n\varepsilon + \ \varepsilon \geq N\varepsilon + \varepsilon \geq N\varepsilon > 1,$$

car $n \geq N$ *et* $\varepsilon > 0$. *Ainsi, pour tout* $n \geq N$*, on a* $(n+1)\varepsilon > 1$*, i.e* $\varepsilon > 1/(n+1)$. *De plus, on a* $1/(n+1) > 0 > -\varepsilon$.
Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe* $N \in N$ *tel que pour tout* $n \geq N$*, on a* $-\varepsilon < v_n < \varepsilon$*, i.e* v *converge vers* 0.

3. *Idem, adapter la preuve du cours (voir polycopié) pour la suite identité, en remplaçant* n *par* $3n$. *Ne regardez la preuve du cours que si c'est vraiment nécessaire.*

Exercice 4. Unicité de la limite ($\star$)
Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. On souhaite montrer que si u converge, sa limite est unique [4], i.e :

3. Notez que ce cas est légèrement plus simple que la preuve faite en cours.
4. C'est d'ailleurs ce qui nous autorise à parler de *la* limite d'une suite u lorsqu'elle existe.

$$\text{pour tout } \ell \in \mathbb{R} \text{ et } \ell' \in \mathbb{R}, \text{ si } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \text{ et } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell', \text{ alors } \ell = \ell'.$$

Soient $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell' \in \mathbb{R}$ deux réels tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$. Supposons par l'absurde que $\ell \neq \ell'$.

1. Supposons dans un premier temps que $\ell < \ell'$.
   (a) Montrer qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a $u_n > (\ell + \ell')/2$ (un indice [5]).
   (b) Montrer qu'il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, on a $u_n < (\ell + \ell')/2$.
   (c) Conclure à une absurdité dans le cas où $\ell < \ell'$.
2. Conclure à une absurdité dans le cas où $\ell > \ell'$.
3. Conclure.

Solution de l'exercice 4.

1.(a) *On pose $\varepsilon = (\ell' - \ell)/2$. Comme $\ell' > \ell$, on a que $(\ell' - \ell) > 0$ donc aussi $\varepsilon = (\ell' - \ell)/2 > 0$. Ainsi, on peut appliquer la définition de la convergence de u vers ℓ' pour obtenir qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $\ell' - \varepsilon < u_n$. On peut alors calculer :*

$$\begin{aligned}
\ell' - \varepsilon &= \ell' - \frac{\ell' - \ell}{2} \\
&= \frac{2\ell'}{2} - \frac{\ell' - \ell}{2} \\
&= \frac{2\ell' - (\ell' - \ell)}{2} \\
&= \frac{2\ell' - \ell' + \ell}{2} \\
&= \frac{\ell' + \ell}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $u_n > (\ell + \ell')/2$.

1.(b) *On pose $\varepsilon = (\ell' - \ell)/2$. A nouveau, on a bien $\varepsilon = (\ell' - \ell)/2 > 0$ car $\ell < \ell'$. Ainsi, on peut appliquer la définition de la convergence de u vers ℓ pour obtenir qu'il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, $u_n < \ell + \varepsilon$. On peut alors calculer :*

$$\begin{aligned}
\ell + \varepsilon &= \ell + \frac{\ell' - \ell}{2} \\
&= \frac{2\ell}{2} + \frac{\ell' - \ell}{2} \\
&= \frac{2\ell + \ell' - \ell}{2} \\
&= \frac{\ell' + \ell}{2}.
\end{aligned}$$

5. Poser $\varepsilon = (\ell' - \ell)/2$ et appliquer la définition de la convergence vers ℓ'.

Ainsi, on a bien qu'il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, $u_n < (\ell + \ell')/2$.

1.(c) *Dans le cas où $\ell < \ell'$ on a montré aux questions précédentes qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, on a $u_n > (\ell + \ell')/2$ et qu'il existe $N'' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N''$, on a $u_n < (\ell + \ell')/2$. Ainsi, en posant $n = \max(N', N'')$, on a que :*

$$\frac{\ell' + \ell}{2} < u_n < \frac{\ell' + \ell}{2},$$

car $n \geq N'$ et $n \geq N''$, ce qui est absurde.

2. *Le cas $\ell' < \ell$ est symétrique du précédent cas, on a donc bien une absurdité dans ce cas également.*

3. *Dans tous les cas, l'hypothèse $\ell \neq \ell'$ mène à une absurdité, donc $\ell = \ell'$. Ainsi, on a bien montré que la limite d'une suite convergente est unique.*

Exercice 5. Toute suite convergente est bornée. ($\star\star$)

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite convergente vers un réel $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que u est majorée, i.e qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$. Voici un indice[6] pour vous aider.
2. En déduire[7] que u est minorée, i.e qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq m$.
3. Donner un exemple de suite bornée (i.e. majorée et minorée) qui ne converge pas.

Solution de l'exercice 5.

1. *Comme u converge[8], il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\ell - 1 < u_n < \ell + 1$. On pose alors $M = \max(\max\{u_0, ..., u_N\}, \ell + 1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n \leq N$, alors :*

$$u_n \leq \max\{u_0, ..., u_N\} \leq M,$$

par définition du maximum, et si $n \geq N$, alors

$$u_n < \ell + 1 \leq M,$$

par définition du maximum. Ainsi, dans tous les cas $u_n \leq M$.

6. Le maximum d'un ensemble fini non-vide de nombres réels est bien défini. Ainsi, pour un certain $N \in \mathbb{N}$, vous pouvez par exemple considérer le nombre $\max\{u_0, ..., u_N\}$. C'est le plus petit nombre réel qui est plus grand que tous ceux de l'ensemble $\{u_0, ..., u_N\}$.
7. Noter que si u converge, alors $-u$ aussi et appliquer la question 1. Ne pas oublier que $x \leq y$ est équivalent à $-y \leq -x$.
8. On applique la définition avec $\varepsilon = 1$ ici.

2. *Comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, on applique la propriété du cours sur la multiplication d'une suite convergente par un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\lambda = -1$ pour obtenir que $-u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ell$. Comme $-u$ converge, elle est majorée par la question 1, i.e. il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-u_n \leq M$, i.e $u_n \geq -M$. On pose alors $m = -M$ et on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$. On a donc bien montré qu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$, i.e. u est minorée.*

3. *La suite w de l'exercice 1 est bornée (majorée par 1 et minorée par -1) mais ne converge pas. Vous pouvez l'admettre ici, mais pour le montrer, il y a plusieurs solutions :*

1. *on peut le montrer à la main "avec des ε" en utilisant la définition de la convergence : d'abord utiliser le théorème d'encadrement des limites et la convergence de la suite constante égale à 1 et de celle constante égale à -1 pour montrer que $-1 \leq \ell \leq 1$ puis utiliser la définition de la convergence avec $\varepsilon = 1/3$ mène à une absurdité, u_n ne peut rester dans $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$.*
2. *on peut le montrer en utilisant l'exercice 6 : la suite w est à valeurs entières[9] et n'est pas stationnaire, elle ne converge donc pas.*

Exercice 6. Suites convergentes d'entiers ($\star\star\star$)

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

u converge si, et seulement si[10], u est stationnaire.

On dit qu'une suite est *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang, i.e s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n = u_N$. Voici un indice[11] pour vous aider.

Solution de l'exercice 6.

Tout d'abord, le cas facile : supposons que u est stationnaire et montrons que u converge. Comme u est stationnaire, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $u_n \geq u_N$. Montrons que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_N$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n \geq N$ (il est déjà posé, il existe par la stationnarité de u). On a que :

$$u_N - \varepsilon < u_N = u_n = u_N < u_N + \varepsilon,$$

car $\varepsilon > 0$. On a donc bien montré que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_N$. Ainsi, si u est stationnaire, u converge.
Supposons maintenant que u converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $1/2 > 0$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $\ell - 1/2 < u_n < \ell + 1/2$. Soit $n \geq N$. Notons d'abord que u_N est entier et que $u_N \in E = \{x \in \mathbb{R} \mid \ell - 1/2 < x < \ell + 1/2\}$. Comme également $u_n \in E$ et u_n est entier, c'est que $u_n = u_N$. Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a $u_n = u_N$. On a donc bien montré que u est stationnaire.
<u>*Conclusion :*</u> *on a bien montré que u est stationnaire si, et seulement si, u converge.*

9. i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \in \mathbb{N}$.
10. i.e si u converge alors u est stationnaire et réciproquement si u est stationnaire alors u converge.
11. Vous pouvez admettre qu'il y a au plus un entier dans l'ensemble $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \ell - 1/2 < x < \ell + 1/2\}$, i.e. si $k \in E$ et $l \in E$ sont entiers, alors $k = l$.