Feuille d'exercices
Probabilités et statistiques

N'hésitez pas à m'envoyer un mail si vous avez des questions.[1]

1 Lois de probabilités

Exercice 1. Ecriture ensembliste ($\star$)

Soit Ω un univers fini et soient A, B et C trois évènements de Ω. Exprimer à l'aide d'opérations ensemblistes (union, intersection, complémentaire), les evènements suivants :

0. *Exemple : L'évènement $D =$ "A ne se réalise pas" s'exprime par la formule*[2] *:* $D = \overline{A}$.
1. $E =$ "seul A se réalise",
2. $F =$ "A et B se réalisent mais pas C",
3. $G =$ "les trois évènements se réalisent",
4. $H =$ "au moins l'un des trois évènements se réalise",
5. $I =$ "aucun des trois évènements ne se réalise",
6. $J =$ "exactement deux des trois se réalisent".
7. $K =$ "au plus l'un des trois évènements se réalise",

Exercice 2. Dé pipé ($\star$)

On lance un dé à six faces pipé de sorte qu'il existe un coefficient $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la probabilité de faire un nombre n avec ce dé soit égale à $n\alpha$.

1. Proposer un univers modélisant cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la valeur du paramètre α de la loi de probabilité $\mathbb{P}$ décrite par l'énoncé.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair ?

Exercice 3. Propriétés du cours ($\star$)

Soit Ω un univers fini et soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω. Montrer que :

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
2. Soient $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\Omega)$.
   (a) Si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. En particulier, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
   (b) $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
   (c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
3. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

1. vadim.lebovici@ens.fr
2. On rappelle que $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Exercice 4. Encadrement de la probabilité de l'intersection ($\star$)
Soit Ω un univers fini, soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur Ω et soient A et B deux évènements de Ω. Montrer que [3] :

$$\mathbb{P}(A) + P(B) - 1 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \min(\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B)).$$

2 Variables aléatoires

Dans toute cette section, on se fixe un univers fini Ω et une loi de probabilités $\mathbb{P}$ sur Ω.

Exercice 5. Echauffements I ($\star$)
Soit X une variable aléatoire sur Ω d'univers image est $X(\Omega) = \{-2, -1, 1, 2\}$ et de probabilités données par :

$$\mathbb{P}(X = -2) = 0,1 \qquad \mathbb{P}(X = -1) = 0,35,$$
$$\mathbb{P}(X = 2) = 0,4 \qquad \mathbb{P}(X = 1) = 0,15.$$

1. Quel est l'univers image de la variable aléatoire X^2 ?
2. La variable aléatoire X^2 suit-elle une loi uniforme ?
3. Les variables X et X^2 sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. Echauffements II ($\star\star$)
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même univers image $\{1, \ldots, n\}$ et suivant toutes deux la loi uniforme. Déterminer $\mathbb{P}(X = Y)$, avec une aide [4].

Exercice 7. Petits calculs ($\star$)
On considère le même cadre que l'exercice 5.

1. Calculer l'espérance de X et de X^2.
2. Calculer la variance et l'écart-type de X et de X^2.

Exercice 8. Formule de König-Huygens ($\star$)
Soit X une VAR sur un univers fini Ω. Montrer que $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}\left[X\right]^2$.

Exercice 9. Des variables de Bernoulli ($\star$)
Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $0 < p < 1$ et soit X une variable de Bernoulli de paramètre p.

1. On pose $Y = 1 - X^2$. Montrer que Y est une variable de Bernoulli et donner son paramètre.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Montrer que $a \leq \min(b, c)$ est équivalent à montrer que $a \leq b$ et $a \leq c$.
4. On admettra que l'additivité de $\mathbb{P}$ s'étend aux familles finies d'évènements : si $A_1, \ldots, A_m$ sont m évènements deux à deux incompatibles (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour tout $i, j \in \{1, \ldots, m\}$) alors $\mathbb{P}(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_m)$.

Exercice 10. Une convergence en probabilité ($\star\star$)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une variable aléatoire réelle X_n centrée (i.e. telle que $\mathbb{E}\left[X_n\right] = 0$) sur Ω et telle que $\mathbb{V}\left(X_n\right) = 1/n$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(X_n^2 \geq \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.