Examen

vendredi 4 juin

Durée : 2 heures

Les documents de cours sont interdits.
Les calculatrices sont autorisées.

Remarques.

1. *Toute trace de recherche, même infructueuse, sera prise en compte dans la notation.*
2. *N'hésitez pas à poser des questions.*
3. *Vous pouvez (et devrez) utiliser les résultats prouvés aux questions précédentes pour résoudre certaines questions. Lorsque vous le faites, citez précisément le numéro de la question que vous utilisez. Si vous n'avez pas réussi à montrer le résultat que vous souhaitez utiliser, indiquez "en admettant..." avant de le citer.*
4. *Ne restez pas bloqués sur une question, l'examen est volontairement long pour vous permettre de faire en priorité celles que vous savez faire.*
5. *N'hésitez pas à faire des dessins au brouillon pour vous aider.*

1 Ensembles et applications

Exercice 1. Questions de cours

1. Rappeler la définition d'ensemble *fini*.
2. Rappeler la définition de l'injectivité d'une application f de X dans Y.
3. Montrer que si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ sont injectives, alors $g \circ f : X \to Z$ est injective.

Exercice 2. Image réciproque

Soient X et Y deux ensembles et $f : X \to Y$ une application. Soit $A \subseteq Y$. On appelle *image réciproque de A par f*, et l'on note $f^{-1}(A)$, la partie de X définie par :

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}.$$

1. Donner *sans démonstration* l'image réciproque de $A = \{5, 6\}$ par l'application suivante :

$$g : \begin{array}{ccc} \{0,1,2,3\} & \to & \{4,5,6\} \\ 0 & \mapsto & 4 \\ 1 & \mapsto & 5 \\ 2 & \mapsto & 6 \\ 3 & \mapsto & 6 \end{array}.$$

2. Soient $A \subseteq Y$ et $B \subseteq Y$.
   (a) Montrer que si $A \subseteq B$, alors $f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$.
   (b) Montrer que $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   (c) Montrer que $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
3. Montrer que si $g : Y \to Z$ est une application et $C \subseteq Z$, alors $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.
4. Montrer que si pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(\{y\})$ est un ensemble à un élément, alors f est injective.
5. Supposons que f est surjective. On considère l'application suivante :

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(Y) & \to & \mathcal{P}(X) \\ A & \mapsto & f^{-1}(A) \end{array} .$$

   (a) Ecrire la proposition logique que ϕ doit vérifier pour être injective (i.e. écrire la définition de l'injectivité, dans le cas particulier de ϕ définie ci-dessus).
   (b) Ecrire la contraposée de cette proposition logique (généralement utilisée dans les preuves pour montrer que ϕ est injective).
   (c) Montrer que ϕ est injective.

2 Suites et limites

Exercice 3. Questions de cours

1. Soit u une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. Rappeler la définition de la convergence de u vers ℓ.
2. Enoncer le théorème d'encadrement des limites.

Exercice 4. Quelques exemples

Soit $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une suite réelle. On dit que :

— u *est croissante* si pour tous entiers $n \leq m$, on a $u_n \leq u_m$,

— u *est majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq M$.

— u *n'est pas majorée* si pour tout réel $M > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > M$.

Donner *sans démonstration* un exemple de suite :

1. qui converge,
2. qui diverge,
3. non constante qui tend vers 1.
4. croissante qui tend vers 1.

Donner *avec démonstration* un exemple de suite :

5. qui est majorée,
6. qui n'est pas majorée,

7. non constante qui tend vers 0.

Exercice 5. Suites convergentes

Soit u et v deux suites réelles telles que :

(i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$ et $0 \leq v_n \leq 1$,

(ii) $u_n \cdot v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

On s'intéresse à la convergence de u et v.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \cdot v_n \leq u_n$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \cdot v_n \leq v_n$.
3. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

3 Probabilités

Exercice 6. Questions de cours

Soit Ω un univers fini.

1. Rappeler la définition de loi de probabilité sur Ω.
2. Montrer que si A et B sont deux évènements tels que $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ et qu'en particulier $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles sur Ω. Rappeler à quelle condition l'on dit que X et Y sont indépendantes.
4. Soit $p \in [0, 1]$. Rappeler la définition de variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p.

Exercice 7. Applications du cours

1. Proposer une modélisation probabiliste de l'expérience consistant à lancer un dé icosaédrique (à 20 faces) équilibré et calculer la probabilité d'obtenir un multiple de 5.
2. Soit Ω un univers fini et X une variable aléatoire sur Ω telle que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $\mathbb{P}(X = 0) = 0,3$, $\mathbb{P}(X = 1) = 0,5$, $\mathbb{P}(X = 2) = 0,1$, et $\mathbb{P}(X = 3) = 0,1$.
   (a) Calculer l'espérance de X.
   (b) On pose $Y = (X - \mathbb{E}[X])^2$. Quel est l'univers image de Y ?
   (c) Pour chaque valeur y prise par Y, exprimer (sans détailler la preuve) l'évènement $\{Y = y\}$ en fonction d'évènements faisant intervenir la variable X.
   (d) Avec quelles probabilités Y prend-elle chacune des valeurs de son univers image ?
   (e) Calculer la variance de X.

Exercice 8. Variables de Bernoulli

Soit $p \in \mathbb{R}$ tel que $0 < p < 1$ et soit X une variable de Bernoulli de paramètre p sur un univers fini Ω.

1. Montrer que la variable $Y = 1 - X$ est une variable de Bernoulli et en donner le paramètre.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Montrer que si Z est une variable de Bernoulli de paramètre $q \in [0, 1]$ telle que X et Z sont indépendantes, alors XZ est une variable de Bernoulli de paramètre pq.

Exercice 9. Covariance

Soit Ω un univers fini et soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω. On appelle *covariance de X et Y*, et l'on note $\mathrm{Cov}\,(X, Y)$, le nombre $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \mathbb{E}\,[(X - \mathbb{E}\,[X])(Y - \mathbb{E}\,[Y])]$. Montrer que :

1. $\mathrm{Cov}\,(X, X) = \mathbb{V}\,(X)$,
2. (Symétrie) $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \mathrm{Cov}\,(Y, X)$,
3. (Généralisation de König-Huygens) $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \mathbb{E}\,[XY] - \mathbb{E}\,[X]\,\mathbb{E}\,[Y]$,
4. Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{Cov}\,(X, Y) = 0$. *(la covariance agit comme un indicateur de l'indépendance de deux variables aléatoires)*