Санкт-Петербургский Национальный Исследовательский Университет
Информационных Технологий, Механики и Оптики Факультет
Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Расчётно-графическая работа №1

по дисциплине «Математика»

Выполнили:

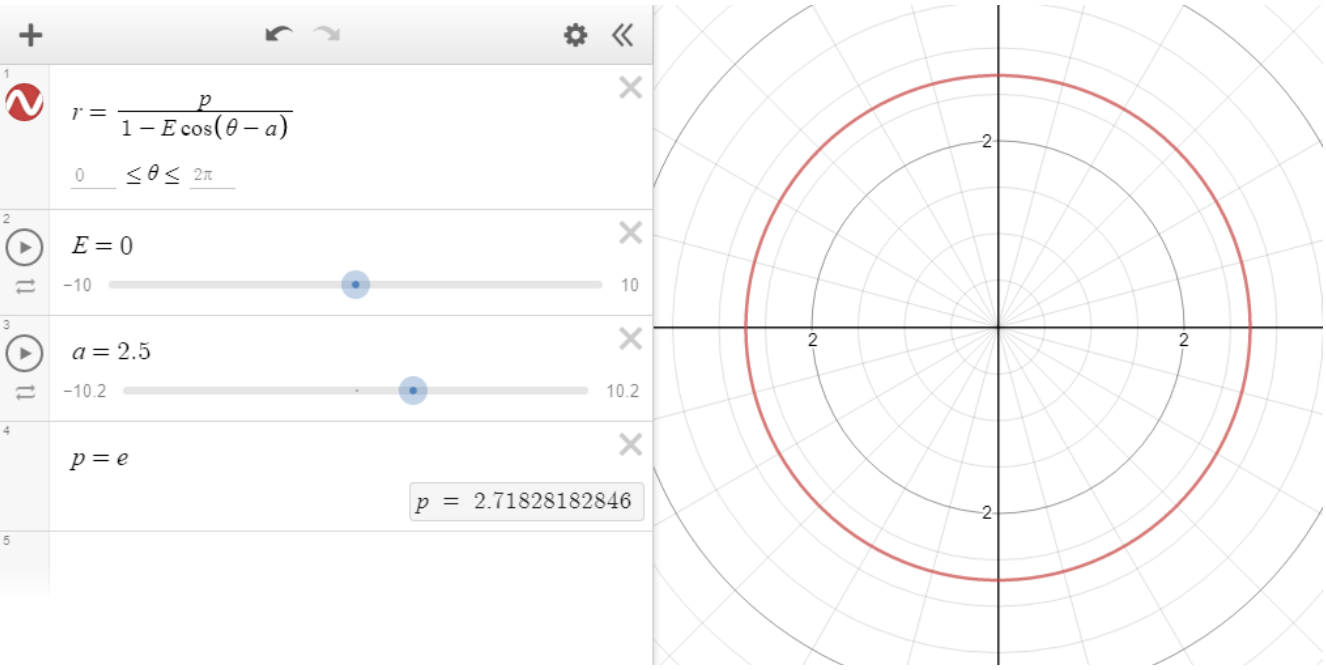
Данилов Павел
Романов Артём
Венин Дмитрий
Лебедев Вадим
Группа: P3110

Санкт-Петербург
2020 г.

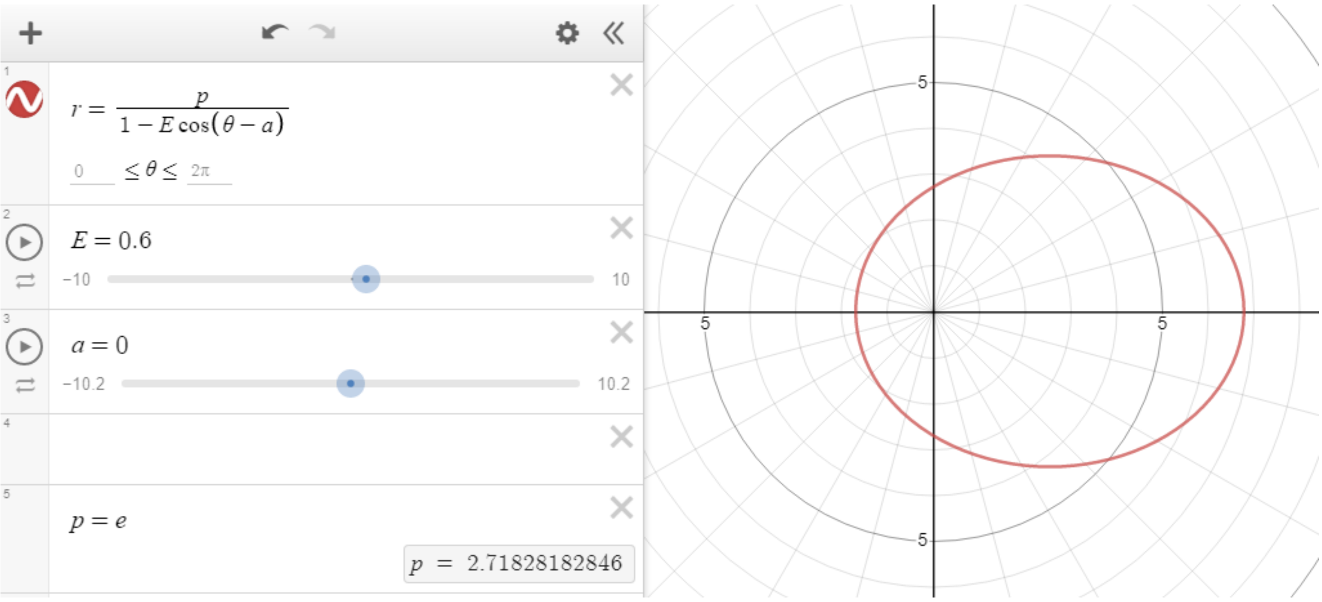
1) Исследуем траекторию в зависимости от произвольных ε и α и при P = e:

E определяет эксцентриситет получаемой фигуры, т е:

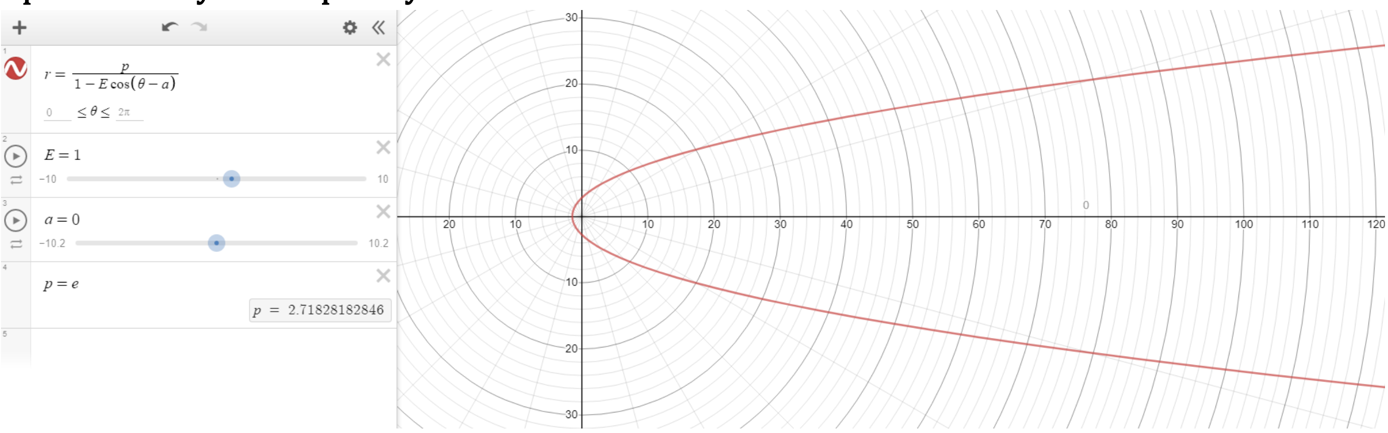
При E = 0 получаем окружность:



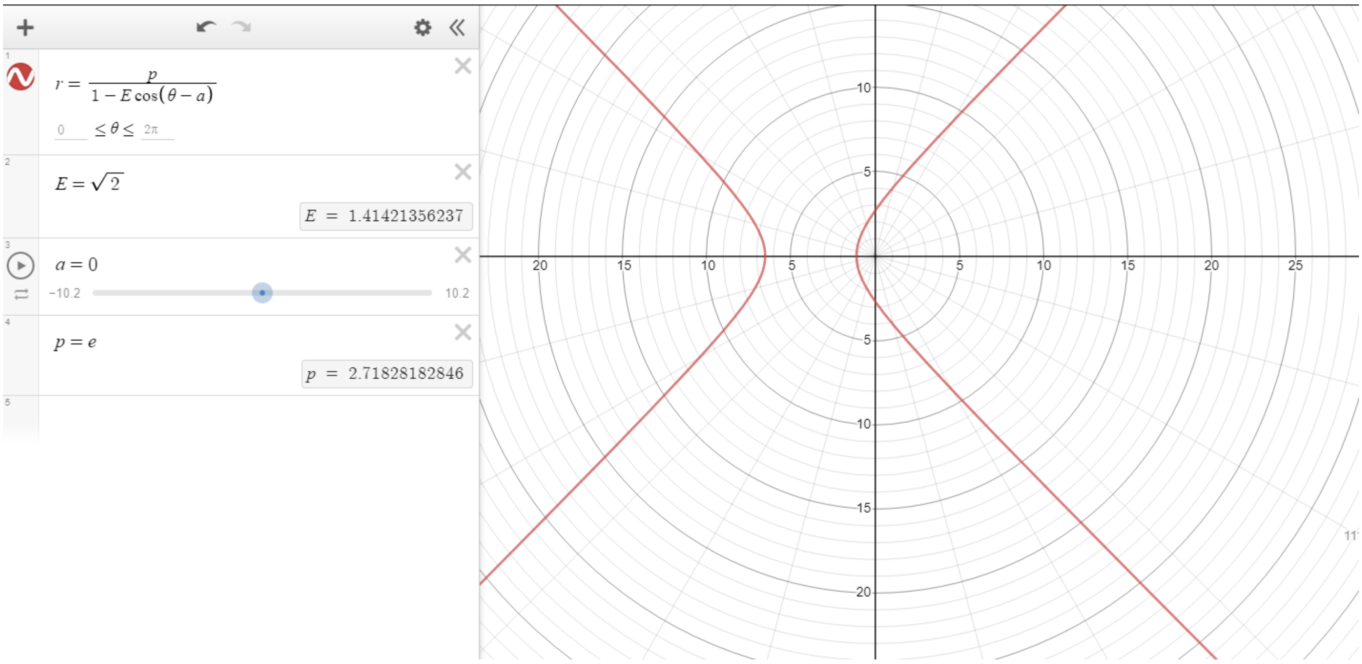
При E ∈ (0; 1) получаем эллипс:



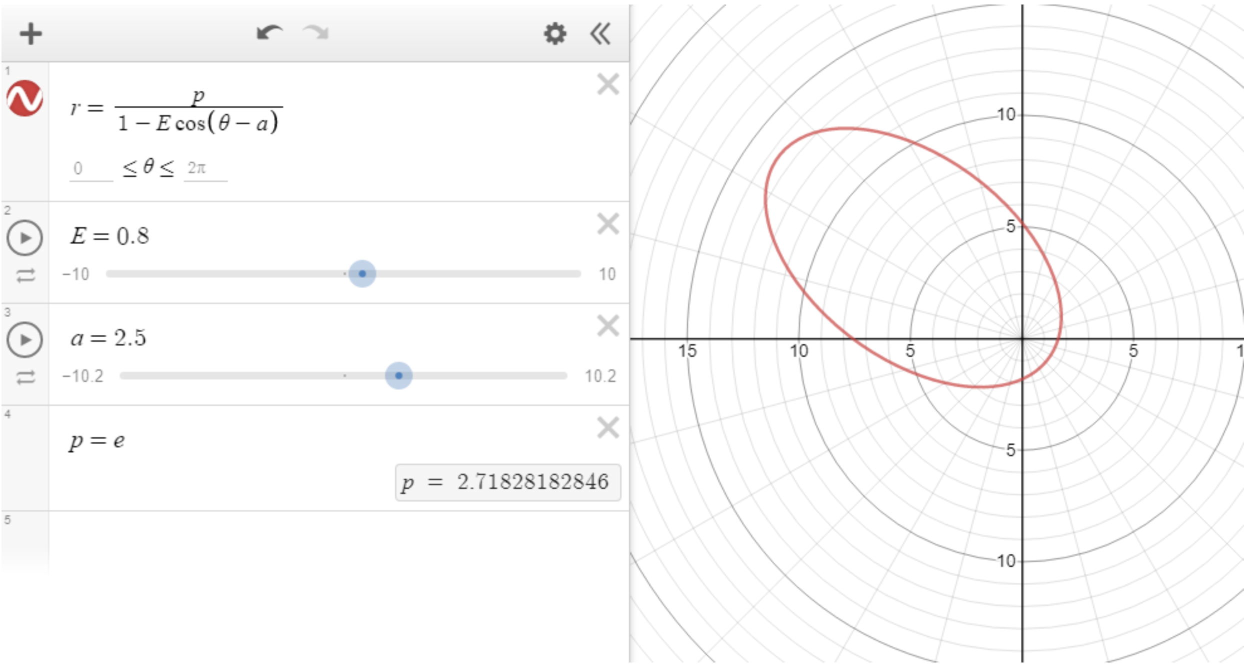
При E = 1 получаем параболу:



А при E > 1 получаем гиперболу:



Параметр a в свою очередь регулирует поворот фигуры в системе координат:



3) Имеем:

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos(\varphi - \alpha)}$$

$$x' = r\cos(\varphi - \alpha)$$

Зная, что $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, получим:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p}{1 - \varepsilon\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

Преобразуем:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{p\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - \varepsilon x}$$

Разделим на $\sqrt{x^2 + y^2}$ обе части:

$$1 = \frac{p}{\sqrt{x^2 + y^2} - \varepsilon x}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p + \varepsilon x$$

Возводим в квадрат обе части:

$$x^2 + y^2 = p^2 + 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2$$

В итоге:

$$(1 - \varepsilon^2)x^2 + y^2 - 2p\varepsilon x - p^2 = 0$$

Исследуем:

При p = 1:

Пусть $\varepsilon = 0$, тогда уравнение примет вид $x^2 + y^2 = 1$ – окружность

Пусть $\varepsilon = 0.6$, тогда уравнение примет вид $\frac{(x-0,9375)^2}{1,953125} + \frac{y^2}{1,5625} = 1$ – эллипс

Пусть $\varepsilon = 1$, тогда уравнение примет вид $y^2 = 2x + 1$ – парабола

Пусть $\varepsilon = \sqrt{2}$, тогда уравнение примет вид $\left(x + \sqrt{2}\right)^2 - y^2 = 1$ – гипербола

Результаты, полученные аналитическим путём совпадают с результатами, полученными при построении фигур при соответствующих параметрах.

4) **p** - длина полухорды, проходящей через фокус перпендикулярно полярной оси (определяет линейные размеры орбиты планеты).

афелий (апогелий) — наиболее удалённая от Солнца точка орбиты.

Перигелий – наиболее приближенная к солнцу точка орбиты.

$p = \frac{b^2}{a}$ – для эллипса

$r = a \pm \varepsilon x$ – фокальные радиусы

$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ – директрисы

Геометрический смысл: Сумма расстояний от точки эллипса до фокусов постоянна($r_1+r_2=2a$)

Плутон:

Движение по эллиптической орбите.

Афелий = 7375,93 млн км

Перигелий = 4436,82 млн км

Эксцентриситет 0,2488 км/с

Фокальный параметр:

$$p = \frac{4436{,}82^2}{7375{,}93} = 2668{,}9 \text{ млн км}$$

Директрисы и фокальные радиусы (геометрический смысл фокального параметра):

$$x = \pm\frac{7375{,}93}{0{,}2488} = \pm 29646$$

$$r_1 = 7375{,}93 + 0{,}2488 * 29646 = 14751{,}86$$

$$r_2 = 7375{,}93 - 0{,}2488 * 29646 = 0$$

$$r_1 + r_2 = 14751{,}86 = 2a$$

Ответ: $p =$ 2668,9 млн км

Нептун:

Движение по эллиптической орбите.

Афелий = 4545,62 млн км

Перигелий = 4444,45 млн км

Эксцентриситет 0,0113 км/с

Фокальный параметр:

$$p = \frac{4444{,}45^2}{4545{,}62} = 4345{,}5 \text{ млн км}$$

Директрисы и фокальные радиусы (геометрический смысл фокального параметра):

$$x = \pm\frac{4545{,}62}{0{,}0113} = \pm 402267{,}3$$

$$r_1 = 4545{,}62 + 0{,}0113 * 402267 = 9091{,}24$$

$$r_2 = 4545{,}62 - 0{,}0113 * 402267 = 0$$

$$r_1 + r_2 = 9091{,}24 = 2a$$

Ответ: $p =$ 4345,5 млн км

Вывод: До сих пор орбиты спутников принимались невозмущенными. Однако фактические орбиты искусственных спутников эволюционируют под влиянием различных возмущающих факторов. Для орбит искусственных спутников Земли наиболее существенными возмущающими факторами являются влияние атмосферы и влияние сжатия Земли. Как известно , влияние атмосферы в первом приближении не вызывает изменения положения орбиты в пространстве, а вызывает только эволюцию формы орбиты. Такая эволюция орбиты при исследовании вращательного движения спутников легко может быть учтена параметрически (введением в соответствующие формулы вместо постоянных значений фокального параметра P и эксцентриситета e медленно меняющихся со временем значений P и e).

5) Космическая скорость – величина, выведенная по законам движения по окружности для определённого космического тела, зависящая во многом от его формы и массы. Используются для расчётов траекторий небесных тел и космических кораблей. (Простыми словами — это скорость, позволяющая любому объекту преодолеть тяготение небесного тела и их системы.)

Первая космическая скорость - это скорость, необходимая объекту для движения по орбите планеты, но недостаточная для преодоления ее гравитации. Фактически, объект будет постоянно падать на Землю по касательной к ее поверхности, но его ускорение, перпендикулярное центру планеты, будет постоянно гнать его вперед.

Вторая космическая скорость - это скорость, которую необходимо придать объекту для преодоления им гравитационного притяжения небесного тела и не попадания в его орбиту.

Третья космическая скорость нужна для того, чтобы преодолеть притяжение Солнца и покинуть пределы Солнечной системы.

Четвертая космическая скорость разная во всех местах галактики и зависит от удаленности от ее центра и распределения массы вещества.

Физические характеристики, влияющие на траекторию движения тела в Солнечной системе - масса тела, с которым первоначальное тело связано гравитацией, расстояние между телами, т. е. все физические величины, входящие в закон Всемирного тяготения. Также роль играет скорость перемещения тел, относительная и абсолютная.

Задание 2. Поверхности второго порядка

Задания выполняются командами по вариантам. Для графического представления рекомендуется использовать редактор GeoGebra.

Даны уравнения следующих поверхностей:

4	$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}=z$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

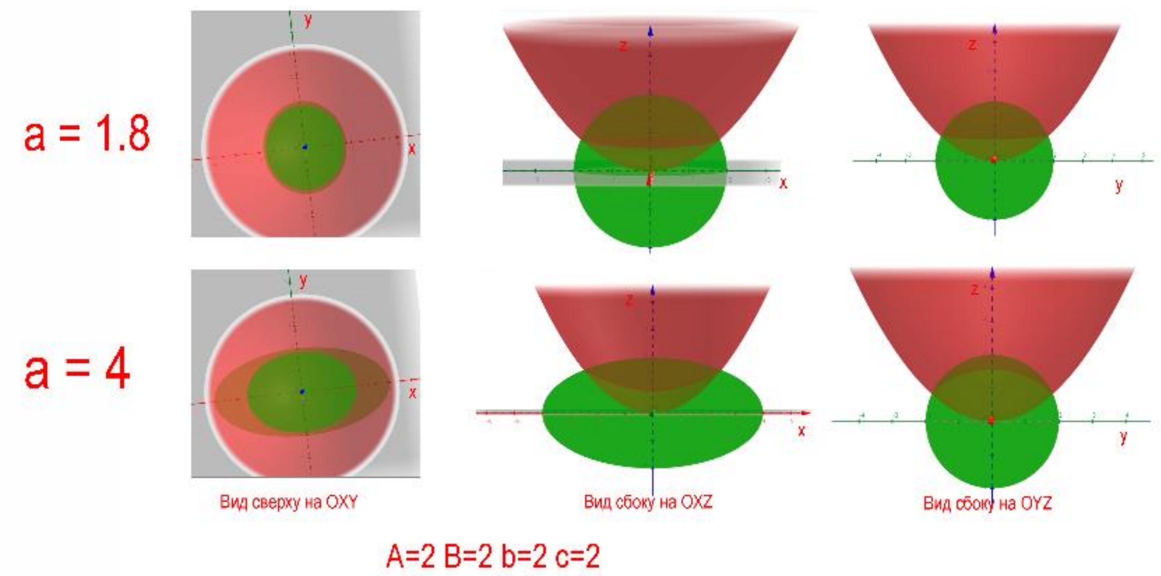
1) Зафиксируйте параметры *A*, *B* первой поверхности. Изменяя параметры *a*, *b*, *c*, второй поверхности, проведите графическое исследование формы пересечения поверхностей.
2) Подберите параметры второй поверхности так, чтобы линия пересечения являлась плоской кривой. Выведите её уравнение.

Выполнение:

Пункт 1

Исследуем графически:

Модель можно посмотреть по ссылке.



Из построения очевидно, что первая поверхность – **параболоид**, а вторая – **эллипсоид.**

Исследуем кривую их пересечения:

Исследуем проекции полученной кривой на плоскости OXY, OXZ, OYZ.

Если мы будем увеличивать |a|, то эллипсоид будет “растягиваться” по OX, а если уменьшать, то он будет “сжиматься”.

Для параметра |b| аналогично происходит с осью OY, для |c| – с OZ.

На плоскость **OXY** проекция будет **эллипсом**, растягивающимся по OX при увеличении |a|, по OY при увеличении |b|, растягивается по обеим осям OY, OX при увеличении |c|.

На плоскость **OXZ** проекция будет **параболой**, либо **прямой параллельной OX** в случае, когда прямая пересечения является плоской кривой(см п2).

На плоскость **OYZ** проекция будет **параболой**, либо **прямой параллельной OY** в случае, когда прямая пересечения является плоской кривой(см п2).

При этом если одна из проекций на OXZ, OYZ – парабола, вторая тоже парабола(очевидно).

Рассмотрим этот случай:

Одна из двух парабол (проекций на оси OXZ, OYZ) всегда направлена ветвями вверх, а вторая – вниз. При этом изменяя коэффициенты можно заметить, направление ветвей параболы зависит от параметров **a, b**. Форма ветвей зависит от всех параметров: **a, b, c.**

Координаты точек пересечения кривой с плоскостями OXZ, OYZ зависят от параметров **a, c** и **b, c** соответственно.

Также если одна проекция - прямая, то вторая тоже.

Пункт 2

<u>**Рассмотрим уравнение пересечения поверхностей:**</u>

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = z \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases}$$

Замечание 1: A, B, a, b, c ≠ 0(иначе равенство в исходных уравнениях не выполняется)(1)

Чтобы кривая пересечения поверхностей была плоской, одна из переменных(*x, y, z*) в ее уравнении должна быть **зафиксирована**(*равняться некоторой константе*).

Чтобы из уравнения однозначно вычислить одну из переменных, нужно при помощи изменения констант {a, b, c, A, B} уничтожить две переменные из трех(*преобразовать уравнение так, чтобы в результирующем уравнении осталась только одна переменная и константы*).

Докажем, что это выполняется только при |A/a|=|B/b|.

Доказательство:

Докажем от противного. Пусть C = |A/a| D = |B/b| **и** $\boldsymbol{D \neq C}$(Замечание 2). С учетом этого преобразуем уравнение:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - z = 0 \\ \frac{C^2x^2}{A^2} + \frac{D^2y^2}{B^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Умножим уравнение 1 на C^2 и вычтем его из уравнения 2:

$$\frac{D^2y^2}{B^2} - \frac{C^2y^2}{B^2} + \frac{z^2}{c^2} + zC^2 - 1 = 0$$

$$\frac{zC^2c^2 + z^2}{c^2} + \frac{(D^2 - C^2)y^2}{B^2} = 1$$

Очевидно, уравнение не имеет единственного решения для какой-либо переменной(т. к. в уравнении две неизвестных(из Замечания 2: $D^2 - C^2 \neq 0$, тогда y не сократить. z очевидно тоже не сокращается)), **ч. т. д.**

Тогда кривая пересечения плоская при |A/a|=|B/b|. Введем C=A/a=B/b.

С учетом этого найдем уравнение кривой пересечения:

Преобразуем исходное уравнение с учетом C=A/a=B/b:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - z = 0 \\ \frac{C^2x^2}{A^2} + \frac{C^2y^2}{B^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \end{cases}$$

Умножим уравнение 1 на C^2 и вычтем его из уравнения 2:

$$C^2z + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

$$\frac{-c^2 + z^2 + c^2C^2z}{c^2} = 0^{\backslash * c^2}$$

$$-c^2 + z^2 + c^2C^2z = 0$$

Подставим C=A/a:

$$z^2 + \frac{c^2A^2}{a^2}z - c^2 = 0$$

$$z = \frac{-\frac{c^2A^2}{a^2} \pm \sqrt{\frac{c^4A^4}{a^4} + 4c^2}}{2}$$

Т. к. z > 0(из $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = z$*), то нам подходит только положительный z.*

$$z = \frac{-\frac{c^2A^2}{a^2} + \sqrt{\frac{c^4A^4}{a^4} + 4c^2}}{2}$$

Так, мы нашли z при котором поверхности пересекаются, причем кривая пересечения является плоской. Чтобы найти ее уравнение подставим z в уравнение первой кривой. Получим уравнение:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \frac{-\frac{c^2A^2}{a^2} + \sqrt{\frac{c^4A^4}{a^4} + 4c^2}}{2}$$

$$\frac{x^2}{A^2 * \frac{-\frac{c^2A^2}{a^2} + \sqrt{\frac{c^4A^4}{a^4} + 4c^2}}{2}} + \frac{y^2}{B^2 * \frac{-\frac{c^2A^2}{a^2} + \sqrt{\frac{c^4A^4}{a^4} + 4c^2}}{2}} = 1$$

Замечание 3: c,A,a≠0 из Замечания 1,поэтому мы смогли поделить обе части пред. уравнения на $\frac{-\frac{c^2a^2}{A} + \sqrt{\frac{c^4a^4}{A^2} + 4c^2}}{2}$.

Выведенное уравнение – каноническое уравнение эллипса. Тогда в случае, когда кривая пересечения поверхностей является плоской, эта кривая – эллипс.