2. Р е ш е н и е. Пусть OC – медиана треугольника OAB_1 (рис 1.).На продолжении отрезка OC за точку C возьмем точку D так,

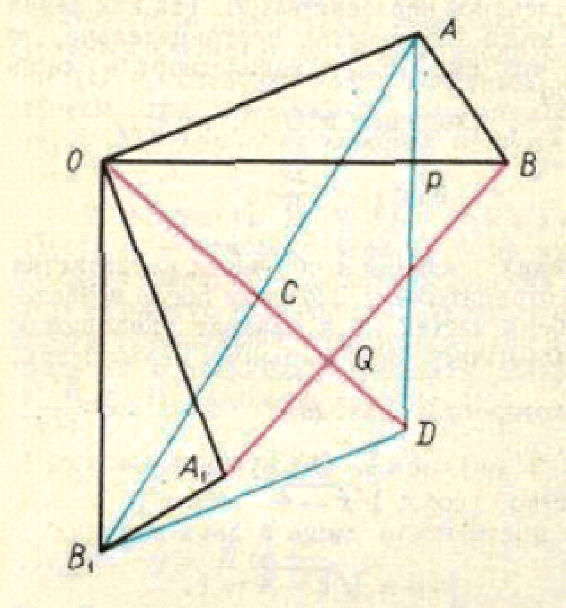

Рис. 1.

что $OC = OD$; тогда OB_1DA – параллелограмм. Поскольку $OA = OA_1$, $AD = OB_1 = OB$ и $\angle OAD = \angle A_1OB$ (как углы в соответственно перпендикулярными сторонами), то $\triangle AOD = \triangle A_1OB$. Далее, $\triangle OPA = \triangle OQA_1$, а $\angle APO = 90°$ *(ибо* $AD \| OB_1$, *а* $OB_1 \perp OB$); поэтому $OC \perp A_1B$. Аналогично доказывается и второе утверждение задачи

3. $x_1 = 3$, $y_1 = (2k+1)\pi$, где $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $0 < x_2 < 1$, y_2 - любое вещественное число. У к а з а н и е. Пусть $\mathbf{z} = log_3 x$; тогда предложенное неравенство записывается в виде

$$z + \frac{1}{z} \ll -2\cos y \qquad (1)$$

Но при любом z> 0 имеем $z + \frac{1}{z} \geq 2$, а потому неравенство (1) может быть справедливым только для тех y, для которых $2 \ll -2 \cos y$, то есть при $\cos y = -1$. Далее, из (1) получаем $z = 1$. Если же $z < 0$, то $z + \frac{1}{z} \ll -2$, а $-2 \ll -2\cos y$ при любом y, то есть неравенство (1) справедливо при всех $z < 0$

4.Решение существует, если $b < -1$, а α – любое действительное число, или если $b \geq -1$, а

$$\kappa\pi - \arcsin A + \phi \ll \alpha \ll \kappa\pi + $$
$$+ \arcsin A + \phi, \kappa = 0, \pm1, \pm2, ..., \qquad (2)$$

где A *и* ϕ *определяются равенствами*

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{b+1}{2}, A = \frac{|b-1|}{\sqrt{b^2+2b+5}}. \qquad (3)$$

У к а з а н и е. Так как $x \neq \frac{\pi}{2}(2\kappa+1)$, $y \neq \frac{\pi}{2}(2\kappa+1)$, то исходная система эквивалентна следующей (проверьте!):

$$\begin{cases} x + y = \alpha \\ 2\sin(x+y) - (b-1)\cos(x+y) = \\ = (b-1)\cos(x-y) \end{cases}$$

Следовательно, исходная система имеет решение тогда и только тогда, когда $(b\text{-}1)\cos(x-y) = 2\sin\alpha - (b+1)\cos\alpha$.(4)
Если $b \neq 1$, то из (4) получаем, что параметры *a и b* должны удовлетворять условию

$$|\frac{2\sin a - (b+1)\cos a}{b-1}| \ll 1.$$

Вводя ϕ *и* A по формулам (3), это условие представим в виде $/\sin\alpha - \phi \ll A$. Таким образом, либо $A > 1$ (то есть $b < -1$) и α – любое действительное, либо $A \ll 1$ (то есть $b \geq -1$, $b \neq 1$), а для α получаются неравенства (2). В случае $b = 1$ соотношение (4) исследуется непосредственно.

Физический факультет

1. $\frac{q^{mn}-1}{(q^n-1)q^{(m-1)^n}}$. У к а з а н и е. Заметьте, что если ν – средняя скорость на перегоне A_1A_2 после отправления, то на перегоне A_nA_1, завершающем первый круг, средняя скорость равна $\nu^{(n-1)}$, а на перегоне A_1A_2, открывающем второй круг, она равна ν^n.

2. r^2 *cosec* $\alpha \sin\beta \sin 2(\alpha+\beta)\cos(\alpha+ +\beta)$. У к а з а н и е. Рассмотреть отдельно случаи, когда $\angle ODB > \angle MDB$ $\angle ODB < < \angle MDB$, где O – центр круга.

3. x > 2.

4. $\frac{1}{12} \ll a \ll \frac{1}{2}$;
$x = (-1)^n \arcsin\frac{5\alpha \pm \sqrt{\alpha^2+4\alpha}}{2\alpha} + \kappa\pi$,
$\kappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В а р и а н т 1

1. 23. Р е ш е н и е. Искомое число запишем в виде $10x + y$, где x *и* y – целые числа, причем $1 \ll x \ll 9$, $0 \ll y \ll 9$. Так как по условию при делении двузначного числа на xy получили остаток, равный 5, то $xy \neq 0$; следовательно, $1 \ll y \ll 9$. Из условия за дачи получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{10x+y}{x+y} = 4 + \dfrac{3}{x+y}, \\ \dfrac{10x+y}{xy} = 3 + \dfrac{5}{xy}. \end{cases}$$

Подставляя t = 37, 38, 39, 40, 41 в формулы (*) получаем 5 вариантов:

батарей по 6 в	34	26	18	10	2
батарей по 16 в	1	4	7	10	13

б) Здесь дело водится к решению уравнения 6x + 15y = 220. Однако НОД (6,15) = = 3, а 220 не делится на 3. Поэтому уравнение не имеет решений в целых числах.

19. Сумма четного числа нечетных чисел четна, поэтому 45 рублей нельзя разменять указанным способом.

20. Поскольку $a = bd$ и делится на c, а НОД (b,c) = 1, то по лемме 3 число d делится на с.

21. а), б) и г) верны; б) неверно.

22. 1971 = 3^3*43; 1972 = 4 * 17 * 29; 1973 – простое.

23. а) если am делится на n и НОД (m,n) = 1, то $a = \kappa n$, поэтому $b = \kappa m$.

б) пусть в разложении x на простые множители некоторое простое p входит в степени α, а в разложении y – то же p в степени b. Тогда из теоремы о единственности разложения на простые множители $a = \kappa n$, $b = \kappa m$. В разложении t на простые множители включим p с показателем k, и так – для всех простых множителей чисел x и y.

непосредственным вычислением показать, что $AQ = \alpha$

5. $d\sqrt{\kappa}$. У к а з а н и е. Убедиться, что $\triangle\ MQE \sim \triangle\ PNE$, причем EM *и* EP – сходственные стороны.

Факультет психологии

1. 3.

2. Точка P должна совпадать либо с вершиной C, либо с вершиной C_1.

3. $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0$.

4. 11 деьалей вида A, 9 деталей вида B.

5. $a = 1$.

МОСКОВСКИЙ ИНСТИТУТ ИНЖЕНЕРОВ ЖЕЛЕЗНОДОРОЖНОГО ТРАНСПОРТА

1. За 30 дней.

2. $x_1 = 0$, $x_2 =$ -2, $x_{34} =$ -1 $\pm$ $\pm\sqrt{\frac{33}{2}}$.

3. $r = \frac{25}{4}$*см.*