Анализ свойств меры Хартли

Экспериментатор одновременно подбрасывает монету (М) и кидает игральную кость (К). Какое количество информации содержится в эксперименте (Э)?

Аддитивность:

$i(\text{Э}) = i(M) + i(K) => i(12 \text{ исходов}) = i(2 \text{ исхода}) + i(6 \text{ исходов}) : \ \log_x 12 = \log_x 2 + \log_x 6$

Неотрицательность:

Функция $log_x N$ неотрицательно при любом $x > 1$ и $N \geq 1$

Монотонность:

С увеличением $p(M)$ или $p(K)$ функция $i(\text{Э})$ монотонно возрастает.

Принцип неопределённости:

При наличии всегда только одного исхода (монета и кость с магнитом) количество информации равно нулю: $\log_x 1 + log_x 1 = 0$

Мера количества информации по Шеннону

Мера Хартли подходит лишь для систем с равновероятными состояниями. Если состояния системы S не равновероятны, используют меру Шеннона:

$$i(S) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \cdot log_2 p_i,$$

где N – число состояний системы,
pi – вероятность того, что система S находится в состоянии i (сумма всех p_i равна 1).

Клод Шеннон
(1916–2001)

Формула Хартли является частным случаем формулы Шеннона!

Пример 1. Количество информации в акте подбрасывания обычной монеты по формуле Хартли равно $\log_2 2 = 1$ бит. По формуле Шеннона получим то же $i_{s1} = -0,5 * \log_2 0,5 - 0,5 * \log_2 0,5 = 1$ бит.
Пример 2. При подбрасывании монеты со смещённым центром тяжести количество непредсказуемости становится меньше: $i_{s2} = -0,75 * \log_2 0,75 - 0,25 * \log_2 0,25 \approx 0,8$ бит.

Пример использования меры Шеннона

Шулер наугад вытаскивает одну карту из стопки, содержащей 9 известных ему карт: 3 джокера, 3 туза, 1 король, 1 дама и 1 валет. Какое количество информации для шулера содержится в этом событии s?

$$\text{Вероятность вытащить} \left\{ \begin{array}{l} \text{джокера} \\ \text{туза} \\ \text{короля} \\ \text{даму} \\ \text{валета} \end{array} \right\} \text{равна} \left\{ \begin{array}{l} 3/9 = 1/3 \\ 3/9 = 1/3 \\ 1/9 \\ 1/9 \\ 1/9 \end{array} \right.$$

Количество информации, выраженное в тритах, равно:

$$i(s) = -\left(\frac{1}{3}\cdot\log_3\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\log_3\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\cdot\log_3\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot\log_3\frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cdot\log_3\frac{1}{9}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = 1 + \frac{1}{3} \approx \log_3 5 vs \log_3 14$$

Нестрогий вывод формулы Шеннона

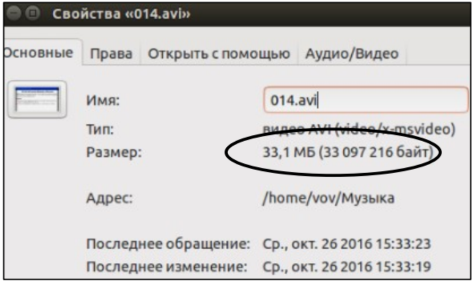
Задача. Монета имеет смещённый центр тяжести. Вероятность выпадения «орла» —- 0,25, вероятность выпадения «решки» —- 0,75. Какое количество информации содержится в одном подбрасывании?

Решение

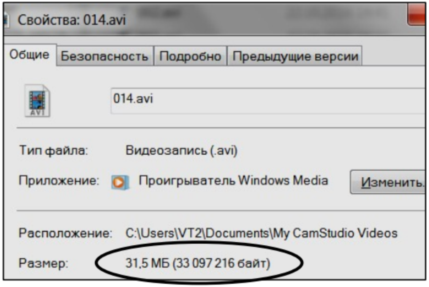
- Пусть монета была подброшена N раз ($N \to \infty$), из которых «решка» выпала M раз, «орёл» — K раз (очевидно, что $N = M + K$).
- Количество информации в N подбрасываниях: $i_N = M * i(\text{«решка»}) + K * i(\text{«орёл»})$.
- Тогда среднее количество информации в одном подбрасывании:
  $i_1 = i_N / N = (M/N) * i(\text{«решка»}) + (K/N) * i(\text{«орёл»}) =$
  $= p(\text{«решка»}) * i(\text{«решка»}) + p(\text{«орёл»}) * i(\text{«орёл»})$.
- Подставив формулу Шеннона для i, окончательно получим:
  $i_1 = -p(\text{«решка»}) * \log_x p(\text{«решка»}) - p(\text{«орёл»}) * \log_x p(\text{«орёл»}) \approx 0,8$ бит

Приставка для единиц измерения количества информации/данных: проблема

Linux Ubuntu 14



Microsoft Windows 7



33 097 216 байт — это 33,1МБ или 31,5 МБ?