Национальный исследовательский университет ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Расчётно-графическая работа по теме:

Предел и производная функции одной переменной

Выполнили:
Бавыкин Роман
Баканова Ирина
Лысенко Данила
Остапенко Иван
Группа P3110
Преподаватели:
Беспалов Владимир Владимирович
Вариант 8

Санкт-Петербург
2020г.

1 Пределы

Дана последовательность a_n и функция $f(x)$. Исследуйте поведение предложенных величин:

1.1 Предел последовательности

$$a_n = \sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{\left(3n^2-1\right)^2} - \sqrt[3]{\left(3n^2+1\right)^2}\right)$$

1.1.1 Вычислите предел последовательности при $n \to \infty$, исследуйте её на монотонность и ограниченность

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2}\left(\sqrt[3]{\left(3n^2-1\right)^2} - \sqrt[3]{\left(3n^2+1\right)^2}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{\left(3n^2-1\right)^2 n^2} - \sqrt[3]{\left(3n^2+1\right)^2 n^2}\right)$$

$$\urcorner\ a = \left(3n^2-1\right)^2 n^2,\ b = \left(3n^2+1\right)^2 n^2$$

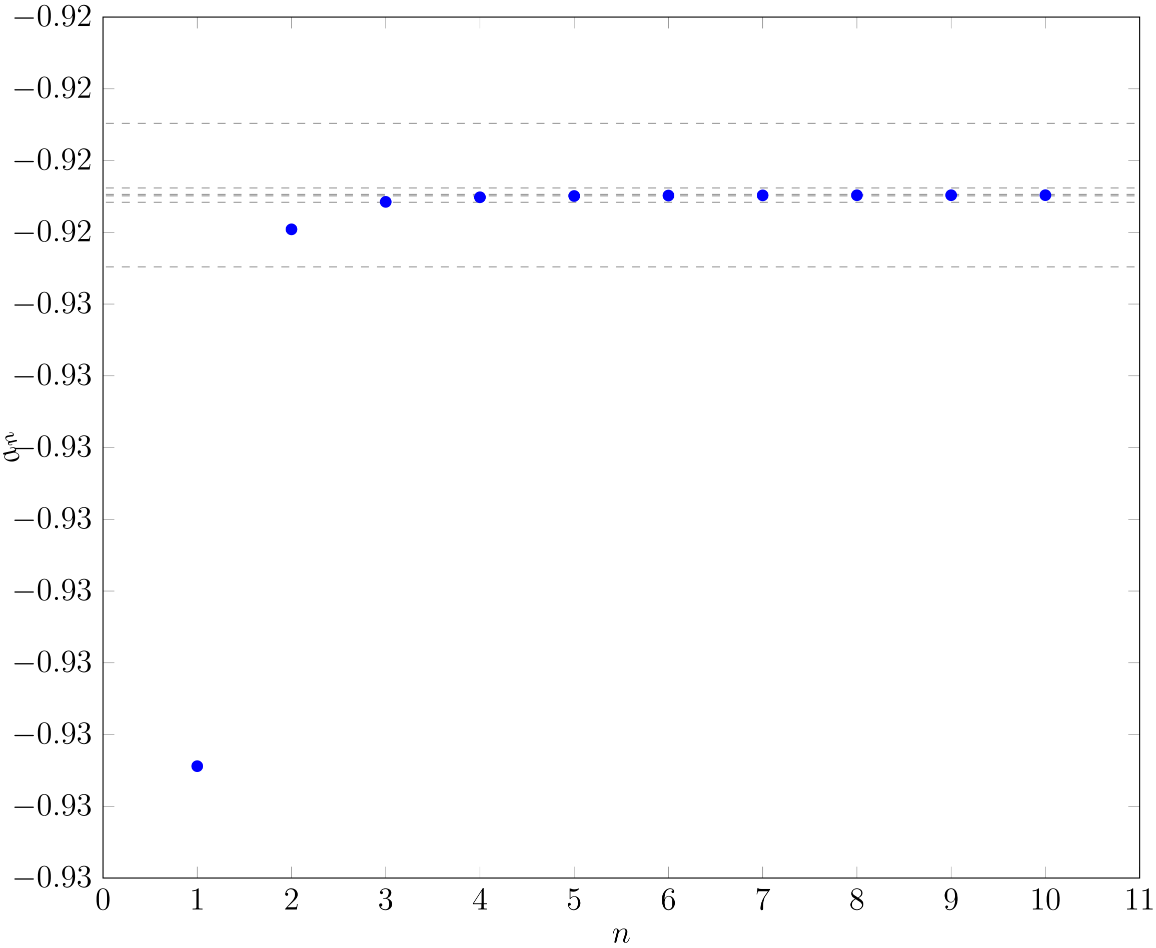
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}} = \lim_{n\to\infty}\frac{a-b}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-12n^4}{\sqrt[3]{81n^{12}-108n^{10}+54n^8-12n^6+n^4}+\sqrt[3]{81n^{12}-18n^8+n^4}+\sqrt[3]{81n^{12}+108n^{10}+54n^8+12n^6+n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{-12}{\sqrt[3]{81-108n^{-2}+54n^{-4}-12n^{-6}+n^{-8}}+\sqrt[3]{81-18n^{-4}+n^{-8}}+\sqrt[3]{81+108n^{-2}+54n^{-4}+12n^{-6}+n^{-8}}} = \frac{-12}{3\sqrt[3]{81}} = \frac{-4}{3\sqrt[3]{3}}$$

Последовательность монотонно возрастает.
Последовательность ограничена сверху $y = \frac{-4}{3\sqrt[3]{3}}$, и ограничена снизу: $y = \sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{16}$

1.1.2 Постройте график общего члена последовательности в зависимости от номера n.



1.1.3 Проиллюстрируйте сходимость (расходимость), ограниченность и монотонность последовательности.

$\varepsilon_1 = 0,001, \ N_1 = 2;$
$\varepsilon_1 = 0,0001, \ N_2 = 3;$
$\varepsilon_1 = 0,00001, \ N_3 = 6.$

1.2 Предел функции

$f(x) = \left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0,3x-3}$

1.2.1 Вычислите предел функции при $x \to \infty$, исследуйте её на монотонность и ограниченность.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0,3x-3} = \lim_{x\to+\infty} \left(\left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0,3x} \left(\frac{1-2x}{5-3x}\right)^{3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0,3x} \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1-2x}{5-3x}\right)^{3} =$$

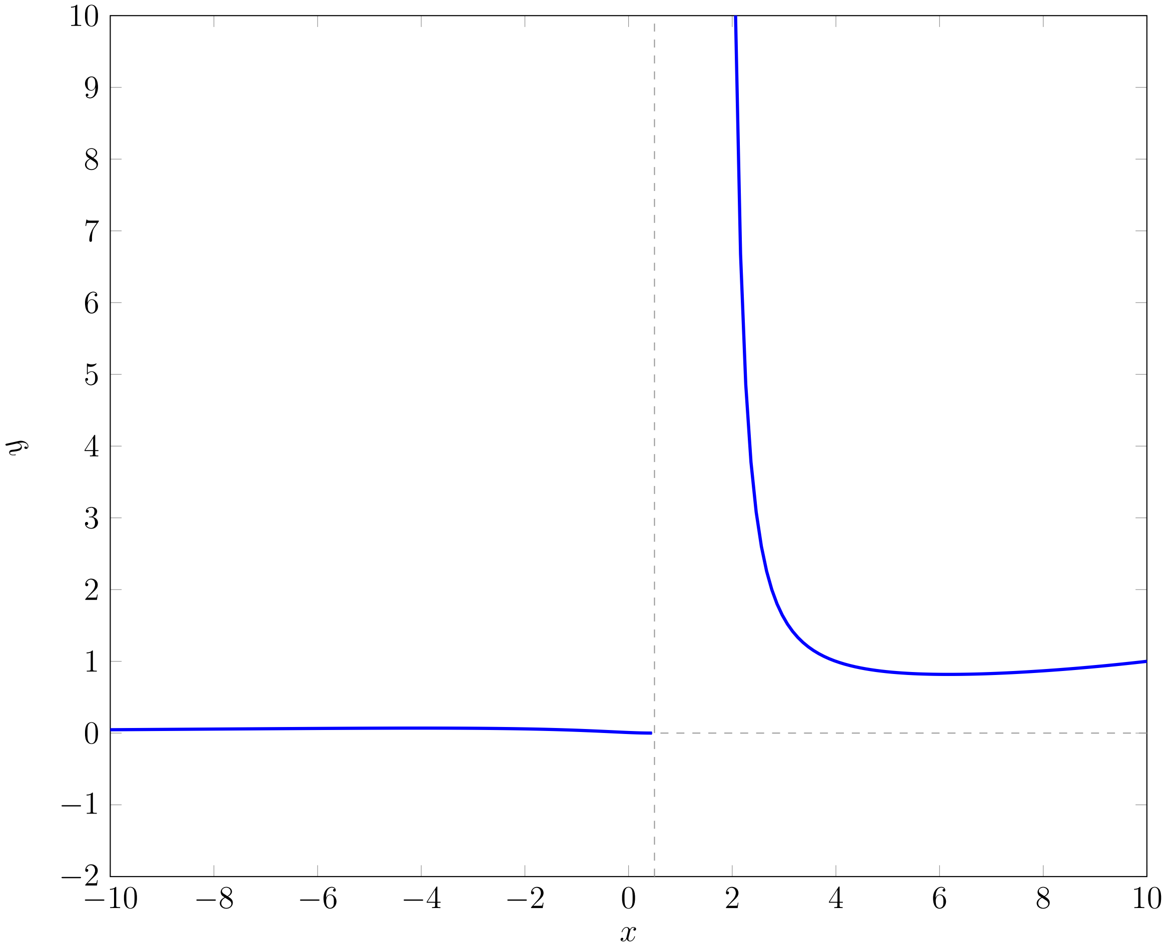
$$+\infty \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{5}{x}-3}\right)^{3} = +\infty \cdot \frac{8}{27} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0,3x-3} = \lim_{x\to-\infty} \left(\left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0,3x} \left(\frac{1-2x}{5-3x}\right)^{3}\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{5-3x}{1-2x}\right)^{0,3x} \cdot \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1-2x}{5-3x}\right)^{3} =$$

$$0 \cdot \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{\frac{1}{x}-2}{\frac{5}{x}-3}\right)^{3} = 0 \cdot \frac{8}{27} = 0$$

Функция возрастает, при $x \in (-\infty; -4,0279) \bigcup [6,1694; +\infty)$
Функция убывает, при $x \in [-4,0279; 0.5) \bigcup [\frac{5}{3}; 6,1694]$
Данная функция ограничена снизу $y = 0$

1.2.2 Постройте график функции в зависимости от x.



2 Дифференциал

Дана задача. Проведите исследование:

Длина телеграфного провода $s = 2b\left(1 + \frac{2f^2}{3b^2}\right)$, где $2b$ – расстояние между точками подвеса, а f – наибольший прогиб. На сколько увеличится прогиб f , когда провод от нагревания увеличится на ds?

2.1 Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.

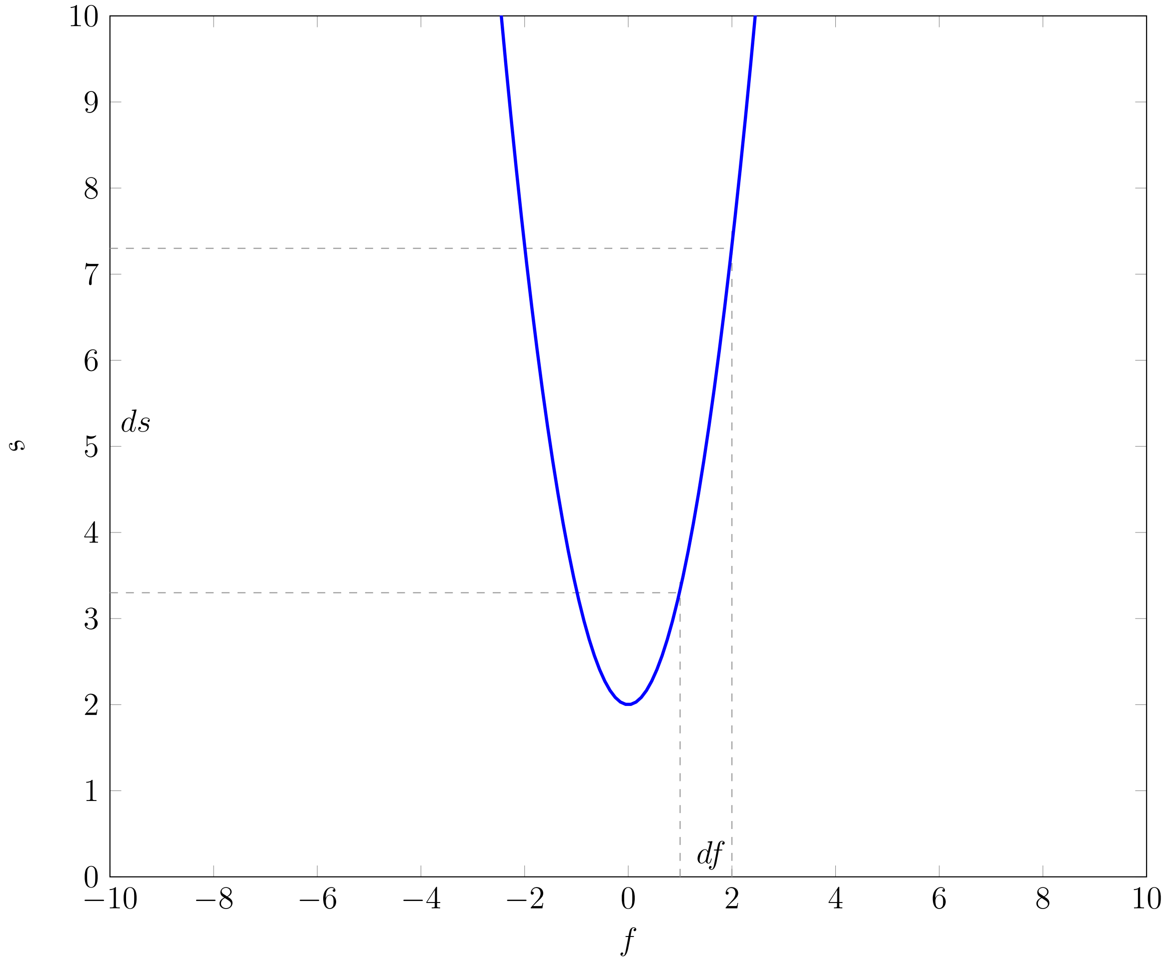
ds - на сколько увеличился провод;
df - на сколько увеличится прогиб;
$s' = \frac{ds}{df}$; $df = \frac{ds}{s'} = \frac{ds}{\left(2b\left(1+\frac{2f^2}{3b^2}\right)\right)'}$

2.2 Решите задачу аналитически.

$df = \frac{ds}{\left(2b\left(1+\frac{2f^2}{3b^2}\right)\right)}' = \frac{ds}{2b\left(\frac{2f^2}{3b^2}\right)'} = \frac{ds}{\frac{8f}{3b}} = \frac{3b}{8f}ds$

2.3 Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Сверьтесь с аналитическим решением.

В зависимости от значения b, график функции будет переноситься выше или ниже относительно оси Oy и растягиваться, относительно оси Oy. Сделаем иллюстрацию для фиксированного значения $b = 1$.



2.4 Запишите ответ.

3 Наибольшее и наименьшее значение функции

Дана задача. Проведите исследование:

От канала шириной 2 м под прямым углом отходит канал шириной 4 м. Стенки каналов прямолинейны. Найдите наибольшую длину бревна l, которое можно сплавлять по этим каналам из одного в другой.

3.1 Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.

$l = x + y = \frac{2}{\sin\alpha} + \frac{4}{\cos\alpha};$

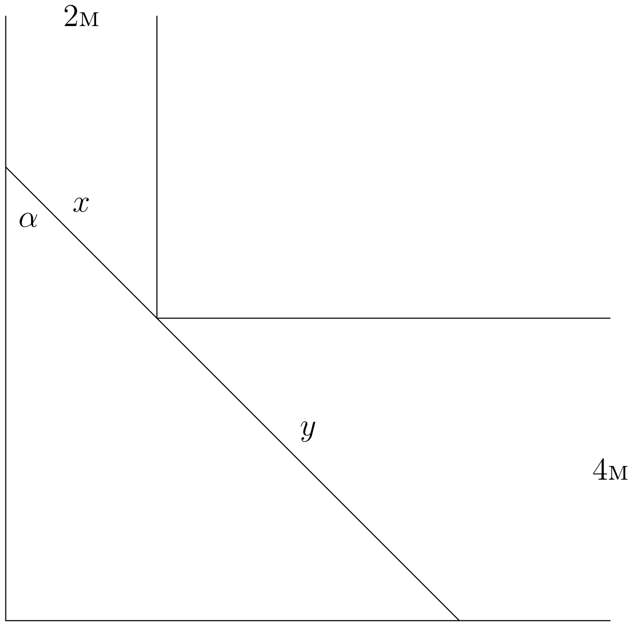
3.2 Решите задачу аналитически.

$l' = 2(-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + 2\frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha})$ $l` = 0;$ $2\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = 0;$ $\tan^3\alpha = \frac{1}{2};$ $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}};$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}};$ $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{\sqrt[3]{4}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}};$

$l = 2\sqrt{\frac{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{4}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}} + 4\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$

3.3 Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Сверьтесь с аналитическим решением.



3.4 Запишите ответ.

$l = 2\sqrt{\frac{1+\sqrt[3]{4}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{4}+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}}} + 4\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$

4 Исследование функции

Даны функции $f(x)$ и $g(x)$. Проведите поочерёдно их полные исследования:

$f(x) = \frac{2x^3-5x^2+14x-6}{4x^2}$;

$g(x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}\cos x}$

4.1 $f(x)$

4.1.1 Найдите область определения функции.

$D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

4.1.2 Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции.

$f(-x) = \frac{2(-x)^3-5(-x)^2+14(-x)-6}{4(-x)^2} = \frac{-2x^3-5x^2-14x-6}{4x^2}$;

$f(-x) \neq f(x);\ f(-x) \neq -f(x) \Rightarrow$ функция не является ни чётной, ни нечётной.

Функция не является периодичной.

4.1.3 Исследуйте функцию на нулевые значения и найдите промежутки ее знакопостоянства.

$f(x) = 0,\ x = \frac{1}{2}$

$f(x) > 0,$ при $x \in (\frac{1}{2}; +\infty)$;

$f(x) < 0,$ при $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \backslash \{0\}$

4.1.4 Исследуйте функцию с помощью первой производной: найдите интервалы монотонности и экстремумы функции.

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2x^2} + \frac{3}{x^3}$;
$f'(x) = 0$; $\frac{1}{2} - \frac{7}{2x^2} + \frac{3}{x^3} = 0$;
$x_{min} = \{-2; 3\}$; $x_{max} = -1$.
Функция убывает, при x $\in (-\infty; -2] \bigcup [-1; 3] \setminus \{0\}$;
функция возрастает, при $\in [-2; -1] \bigcup [3; +\infty)$

4.1.5 Исследуйте функцию с помощью второй производной: найдите интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.

$f''(x) = \frac{7}{x^3} - \frac{9}{x^4}$;
Точка перегиба - $x = \frac{9}{7}$,
функция выпукла, $x \in (-\infty; \frac{9}{7}) \setminus \{0\}$,
функция вогнута, $x \in (\frac{9}{7}; +\infty)$

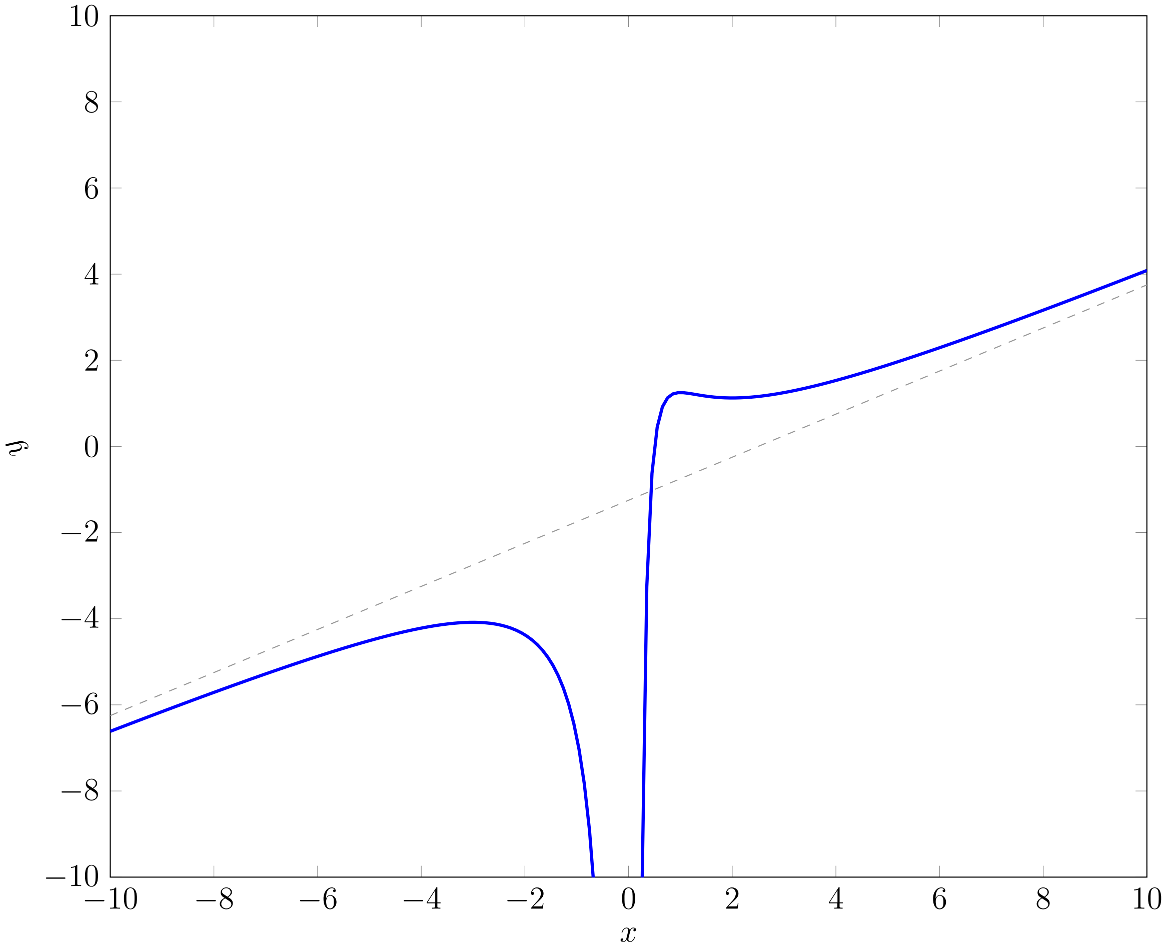
4.1.6 Проверьте наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.

$x = 0$ - точка разрыва второго рода, является вертикальной асимптотой;
уравнение наклонной асимптоты: $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$

4.1.7 Найдите точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найдите значения функции в некоторых дополнительных точках.

График пересекает ось Ox в точке $x = \frac{1}{2}$

4.1.8 Постройте график. Отметьте на нём все результаты исследования.



4.2 $g(x)$

4.2.1 Найдите область определения функции.

$D = \mathbb{R}$

4.2.2 Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции.

Функция является чётной:
$g(-x) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}\cos(-x)} = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}\cos x} = g(x);$
Функция является периодической, период 2π:
$g(x+2\pi) = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}\cos(x+2\pi)} = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}\cos x} = g(x).$

4.2.3 Исследуйте функцию на нулевые значения и найдите промежутки ее знакопостоянства.

Функция не имеет нулевых значений, функция возрастает, при $x \in \mathbb{R}$.

4.2.4 Исследуйте функцию с помощью первой производной: найдите интервалы монотонности и экстремумы функции.

$g'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x \cdot e^{\sqrt{2}\cos x},$
$x_{max} = 2\pi n,\ x_{min} = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z},$

функция возрастает, при $(2n+1)\pi \le x \le 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$,
функция убывает, при $2\pi n \le x \le (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.

4.2.5 Исследуйте функцию с помощью второй производной: найдите интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.

$g''(x)\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\sqrt{2}\cos x}\left(\sin^2 x - \cos x\right)$,
точки перегиба: $x = \pm\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$,
функция выпукла, при $x \in (-\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\pi n; +\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\pi n),\ n \in \mathbb{Z}$,
функция вогнута, при $x \in (+\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\pi n; -\arccos\frac{-1+\sqrt{5}}{2} + 2\pi(n+1)),\ n \in \mathbb{Z}$.

4.2.6 Проверьте наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции.

У данной функции асимптоты отсутствуют.

4.2.7 Найдите точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найдите значения функции в некоторых дополнительных точках.

График пересекает ось Oy, при $y = \frac{1}{2}e^{\sqrt{2}}$

4.2.8 Постройте график. Отметьте на нём все результаты исследования.