ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 5

Елементи теорії ігор*.*

Лекції 24, 25. *Загальні питання теорії ігор. Матричні ігри. Необхідні та достатні умови існування сідлових точок функції. Розв'язок матричної гри у чистих стратегіях. -4 год. [1,2].*

Завдання для самостійної роботи. *Стратегії гравців. Функції виграшів гравців. Матрична гра. Теорема про нерівність мінімаксів. Сідлові точки функції. Необхідні та достатні умови існування сідлових точок функції. Мінімаксні стратегії, верхня та нижня ціни гри. Розв'язок гри у чистих стратегіях, ціна гри, оптимальні стратегії гравців.– 8год.[1-3,7,9].*

Елементи теорії матричних ігор

Матрична гра

Матрична гра визначається такими правилами. Грають два гравці P_1 та P_2. Перший з них вибирає число (*стратегію*) i ($i=1,\dots,m$), другий □ число j ($j=1,\dots,n$). Вибір гравці роблять одночасно і незалежно один від одного. Після цього гравець P_1 платить P_2 суму c_{ij}, що визначається умовами конкретної гри (якщо $c_{ij}>0$, то P_1 платить P_2, якщо $c_{ij}<0$, то P_2 платить P_1 суму $|c_{ij}|$). Величини c_{ij}, $i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n,$ відомі кожному з гравців. Потрібно вказати найкращий вибір для кожного гравця.

Розглянемо матрицю

$$\boldsymbol{C} = \left\| \begin{matrix} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & \dots & c_{mj} & \dots & c_{mn} \end{matrix} \right\|$$

і назвемо її *платіжною матрицею* або *матрицею виграшів* гравця P_2. Очевидно, що вибір числа *і* гравцем P_1 можна трактувати, як вибір *і*-го рядка матриці $\boldsymbol{C}$, вибір числа *j* гравцем P_2, як вибір *j*-го стовпця тієї ж матриці.

Зауважимо, що якщо позначити через I та J відповідно множини можливих стратегій гравців P_1 та P_2, тобто $I=\{1,\dots,i,\dots,m\}$, $J=\{1,\dots,j,\dots,n\}$, то матрична гра повністю визначається трійкою $\boldsymbol{G} = (I, J, \boldsymbol{C})$.

Приклад 5.1 (угадування монет). Кожен з двох гравців незалежно один від одного вибирає певний бік монети, називаючи одночасно свій вибір. Якщо вибрані різні боки монети, то перший гравець платить другому одну грошову одиницю, інакше □ другий платить першому гравцеві одну грошову одиницю.

Платіжна матриця цієї гри має вигляд

$$C = \begin{Vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Оптимальні чисті стратегії

Розглянемо матричну гру G з точки зору гравця P_2. Нагадаємо, що він вибирає j-й стовпець $(c_{1j},\ldots,c_{mj})'$ матриці C. При цьому він одержує від першого гравця принаймні

$$\min_{i=1,\ldots,m} c_{ij}.$$

Оскільки гравець P_2 прагне зробити свій виграш максимальним і може довільно вибирати стовпець матриці C, то він вибирає j таким, що максимізує

$$\min_{i=1,\ldots,m} c_{ij}.$$

При цьому гарантований виграш P_2 дорівнює величині

$$\underline{v} = \max_{j=1,\ldots,n} \min_{i=1,\ldots,m} c_{ij}, \qquad (5.1)$$

що називається *нижньою ціною гри* G.

Аналогічним чином можна розглянути цю ж гру з точки зору гравця P_1. Зрозуміло, що матрицею його виграшів є матриця $-C = \|-c_{ij}\|$, $i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$. Міркуючи аналогічно, робимо висновок, що гарантований виграш гравця P_1 складає

$$\max_{i=1,\ldots,m} \min_{j=1,\ldots,n} (-c_{ij}) = -\min_{i=1,\ldots,m} \max_{j=1,\ldots,n} c_{ij}.$$

При цьому гравець P_2 одержить щонайбільше

$$\overline{v} = \min_{i=1,\ldots,n} \max_{j=1,\ldots,n} c_{ij}. \qquad (5.2)$$

Величина $\overline{v}$ називається *верхньою ціною гри* G.

Отже, гравець P_2 може гарантувати собі виграш принаймні $\underline{v}$, а гравець P_1 може перешкодити йому одержати більше $\overline{v}$. Якщо $v = \overline{v} = \underline{v}$, тобто

$$v = \min_{i=1,\ldots,m} \max_{j=1,\ldots,n} c_{ij} = \max_{j=1,\ldots,n} \min_{i=1,\ldots,m} c_{ij}, \qquad (5.3)$$

то гравець P_2 має зрозуміти, що він може одержати v, а його супротивник перешкодить йому одержати більше v. Тому числа i^*, j^* такі, що у співвідношенні (5.3) $c_{i^*j^*} = v$, природно назвати *оптимальними чистими стратегіями* гравців P_1 та P_2 відповідно. У цьому випадку кажуть, що матрична *гра* G *допускає розв'язок у чистих стратегіях*, а величина v називається *ціною гри*.

Виявляється, що співвідношення (5.3) виконується далеко не для кожної гри, що визначається платіжною матрицею C. Отже, не кожна гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Приклад 5.2. Розглянемо матричну гру з платіжною матрицею

$$\boldsymbol{C} = \begin{array}{c} \begin{Vmatrix} 50 & 27 & 64 \\ 50 & 5 & 90 \\ 18 & 9 & 12 \\ 25 & 95 & 20 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \mathbf{64} \\ \mathbf{90} \\ \mathbf{18} \\ \mathbf{95} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \mathbf{18} & \mathbf{5} & \mathbf{12} \end{matrix} \end{array}$$

У додатковому рядку підраховані величини

$$\min_{i=1,\dots,4} c_{ij}$$

для кожного j, а в додатковому стовпці величини

$$\max_{j=1,\dots,3} c_{ij}$$

для кожного i. Для цієї гри

$$\min_{i=1,\dots,4} \max_{j=1,\dots,3} c_{ij} = \max_{j=1,\dots,3} \min_{i=1,\dots,4} c_{ij} = 18 = c_{31},$$

тобто співвідношення (5.3) виконується для $i^* = 3$, $j^* = 1$, а $v = 18$.

Очевидно, що якщо один з гравців відступить від своєї оптимальної чистої стратегії, а другий буде її дотримуватися, то становище гравця, що відступає від оптимального вибору, може лише погіршитись.

Приклад 5.3. Для гри "угадування монет", як легко бачити,

$$\overline{v} = \min_{i=1,2} \max_{j=1,2} c_{ij} = 1, \quad \underline{v} = \max_{j=1,2} \min_{i=1,2} c_{ij} = -1, \quad \overline{v} \neq \underline{v},$$

тому ця гра не має розв'язку в чистих стратегіях.

Вияснимо загальні умови, при яких має місце співвідношення (5.3). Нехай $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ дійсна функція дійсних змінних $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$.

Означення 5.1. *Точка* $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ *називається сідловою точкою функції* $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, *якщо для будь-яких* $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$ *має місце нерівність*

$$f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) \le f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*). \tag{5.4}$$

Як частинний випадок маємо: сідловою точкою матриці $\boldsymbol{C} = \|c_{ij}\|$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$, *називається пара* (i^*,j^*) *така, що*

$$c_{i^*j} \le c_{i^*j^*} \le c_{ij^*} \tag{5.5}$$

для всіх $i=1,\dots,m$ *та* $j=1,\dots,n$.

Кажуть, що матрична гра має сідлову точку, якщо сідлову точку має її платіжна матриця.

Теорема 5.1. *Матрична гра* $\boldsymbol{G}$ *має розв'язок у чистих стратегіях тоді і лише тоді, коли її платіжна матриця* $\boldsymbol{C}$ *має сідлову точку. При цьому, якщо* (i^*,j^*) *сідлова точка матриці* $\boldsymbol{C}$, *то ціна гри* $v = c_{i^*j^*}$.

Доведення цієї теореми безпосередньо випливає з двох лем, що розглядаються нижче.

Лема 5.1. *Нехай для дійсної функції* $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$, *існують*

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \quad \max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

Тоді має місце нерівність

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ge \max_{\boldsymbol{y}\in Y}\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \qquad (5.6)$$

<u>Доведення</u>. За означенням максимуму та мінімуму маємо

$$\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ge f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ge \min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

Оскільки нерівність

$$\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ge \min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

має місце для будь-якого $\boldsymbol{x} \in X$, то

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \ge \min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

З останньої нерівності аналогічним чином робимо висновок про справедливість нерівності (5.6).

Зауважимо, що (5.6) має місце і для частинного випадку, коли функція $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ визначає матрицю $\boldsymbol{C} = \|c_{ij}\|$, $i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n$. При цьому

$$\min_{i=1,\ldots,m}\ \max_{j=1,\ldots,n} c_{ij} \ge \max_{j=1,\ldots,n}\ \min_{i=1,\ldots,m} c_{ij}.$$

Лема 5.2. *Нехай виконані умови леми 5.1. Для того, щоб виконувалось співвідношення*

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{y}\in Y}\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \qquad (5.7)$$

необхідно і достатньо, щоб функція $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ мала сідлову точку. При цьому для сідлової точки $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$

$$f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*) = \min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{y}\in Y}\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}). \qquad (5.8)$$

<u>Доведення</u>.

Необхідність. Нехай має місце співвідношення (5.7). Покажемо, що функція $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ має сідлову точку. Позначимо через $\boldsymbol{x}^*$ та $\boldsymbol{y}^*$ точки, що визначаються з умов

$$\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*) = \max_{\boldsymbol{y}\in Y}\min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).$$

Праві частини останніх співвідношень рівні внаслідок (5.7), отже

$$\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}) = \min_{\boldsymbol{x}\in X} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*).$$

З останньої рівності за означенням мінімуму маємо

$$\max_{\boldsymbol{y}\in Y} f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*),$$

звідки, приймаючи до уваги означення максимуму, одержуємо

$$f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \qquad (5.9)$$

для всіх $\boldsymbol{y} \in Y$.

Аналогічно встановлюється, що для всіх $\boldsymbol{x} \in X$

$$f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \le f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*),$$

що разом з (5.9) означує $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$, як сідлову точку функції $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Достатність. Нехай $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ — сідлова точка функції $f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Покажемо, що при цьому виконується (5.8). З означення сідлової точки (5.4) маємо

$$\max_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \le \min_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*).$$

За означенням мінімуму та максимуму

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le \max_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}),$$

$$\max_{\boldsymbol{y} \in Y} \min_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \ge \min_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*),$$

тому з останніх трьох нерівностей маємо

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{\boldsymbol{y} \in Y} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \le f(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \le \max_{\boldsymbol{y} \in Y} \min_{\boldsymbol{x} \in X} f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),$$

що у сукупності з (5.6) завершує доведення (5.8).

Зауважимо, що сформульована вище теорема 5.1 є частинним випадком леми 5.2.

Лекція 26. *Змішане розширення матричної гри. Теорема про матричні ігри та ЛП. Теорема про розв'язність матричної гри у змішаних стратегіях.– 2год. [1].*

Завдання для самостійної роботи. *Змішані стратегії. Змішане розширення матричної гри. Оптимальні стратегії гравців та ціна гри у змішаному розширенні матричної гри. Перехід до змішаних стратегій. Теорема про матричні ігри та ЛП. Теорема про розв'язність матричної гри у змішаних стратегіях. -4год. [1-3,7,9].*

Оптимальні змішані стратегії

У попередньому розділі було показано, що для матричних ігор з сідловою точкою можна розумним чином означити поняття оптимальних чистих стратегій гравців. У той же час очевидно, що при відсутності сідлової точки в платіжній матриці гри жодному з гравців не слід постійно використовувати одну і ту ж чисту стратегію.

У зв'язку з цим цілком природною є спроба означити поняття оптимальної стратегії для матричних ігор без сідлової точки в класі так званих *змішаних стратегій*.

Означення 5.2. *Змішаною стратегією гравця* P_1 *називається вектор*

$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m), \ x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, m, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

а змішаною стратегією гравця P_2 — *вектор*

$$\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)', \ y_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Величини x_i ($i=1,\ldots,m$) та y_j ($j=1,\ldots,n$) трактуються як ймовірності, з якими гравці P_1 та P_2 вибирають відповідно i-й рядок та j-й стовпець матриці $\boldsymbol{C}$.

Зрозуміло, що i-у чисту стратегію гравця P_1 можна розглядати як частинний випадок його змішаної стратегії $\boldsymbol{x}$ при $x_i = 1$, $x_k = 0$, $k \neq i$. Це ж стосується і j-ї чистої стратегії гравця P_2.

Позначимо через X та Y, відповідно, множини змішаних стратегій першого та другого гравців, тобто

$$X = \{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_m) : x_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, m, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\},$$

$$Y = \{\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_n)' : y_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, n, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}.$$

Якщо гравець P_1 використовує свою змішану стратегію $\boldsymbol{x} \in X$, а P_2 — $\boldsymbol{y} \in Y$, то *математичне сподівання плати гравця* P_1 *гравцеві* P_2 (*середній виграш гравця* P_2) знаходиться звичайним чином

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x} \boldsymbol{C} \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j . \tag{5.10}$$

Трійка $\overline{\boldsymbol{G}} = (X, Y, F)$ називається *змішаним розширенням матричної гри* або *усередненням матричної гри* $\boldsymbol{G}$.

Міркуючи аналогічно випадку чистих стратегій, приходимо до висновку, що гравець P_1 може забезпечити собі середній програш не більше

$$\min_{\boldsymbol{x} \in X} G(\boldsymbol{x}) = \min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{\boldsymbol{y} \in Y} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \tag{5.11}$$

а гравець P_2 може забезпечити собі середній виграш не менше

$$\max_{\boldsymbol{y} \in Y} H(\boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{y} \in Y} \min_{\boldsymbol{x} \in X} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{5.12}$$

Задачі (5.11) та (5.12) є задачами пошуку гарантованих змішаних стратегій першим та другим гравцем відповідно.

Якщо для деяких змішаних стратегій $\boldsymbol{x}^* \in X$, $\boldsymbol{y}^* \in Y$

$$F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}) \le F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) \le F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}^*), \tag{5.13}$$

для всіх $\boldsymbol{x} \in X$, $\boldsymbol{y} \in Y$, тобто якщо $(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*)$ є сідловою точкою функції $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, то, як було доведено раніше,

$$F(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{y}^*) = \min_{\boldsymbol{x} \in X} \max_{\boldsymbol{y} \in Y} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{y} \in Y} \min_{\boldsymbol{x} \in X} F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{5.14}$$

Аналогічно випадку існування розв'язку гри G у чистих стратегіях можна дати такі означення.

Компоненти x^* та y^* сідлової точки (x^*, y^*) функції $F(x,y)$ називаються *оптимальними змішаними стратегіями* відповідно гравців P_1 та P_2, а $F(x^*, y^*)$ □ *ціною гри* $\boldsymbol{G}$. При цьому кажуть, що *матрична гра має розв'язок у змішаних стратегіях.*

Теорема 5.2. *Задачі (5.11), (5.12) гравців P_1 та P_2 еквівалентні відповідно таким ЗЛП:*

$$\left.\begin{array}{l} x_{m+1} \to \min, \\ \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \le x_{m+1}, \ j = 1, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \\ x_i \ge 0, \ i = 1, \dots, m; \end{array}\right\} \tag{5.15}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_{n+1} \to \max, \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j \ge y_{n+1}, \ i = 1, \dots, m, \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, \\ y_j \ge 0, \ j = 1, \dots, n. \end{array}\right\} \tag{5.16}$$

Доведення. Покажемо, що задача (5.11) еквівалентна задачі (5.15). Зрозуміло, що для будь-якої обмеженої на замкненій множині D функції $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ задача

$$\max_{\boldsymbol{y}\in Y} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \to \min_{\boldsymbol{x}\in X}$$

еквівалентна задачі

$$z \to \min,\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le z,\ (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in D.$$

У зв'язку з цим задача (5.11) еквівалентна задачі

$$\left.\begin{array}{l} x_{m+1} \to \min, \\ \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} x_i c_{ij} y_j \le x_{m+1}, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1,\ x_i \ge 0,\ i=1,\dots,m, \\ \sum\limits_{j=1}^{n} y_j = 1,\ y_j \ge 0,\ j=1,\dots,n. \end{array}\right\} \tag{5.17}$$

Тому досить показати, що множина допустимих розв'язків задачі (5.17) співпадає з допустимою множиною задачі (5.15).

Дійсно, нехай $\boldsymbol{x}$ задовольняє умови задачі (5.17). Тоді, зокрема, $\boldsymbol{x}$ задовольняє і умови задачі (5.15). Для цього досить в (5.17) покласти $y_j = 1$ при деякому j та $y_k = 0$, $k \ne j$. Тепер нехай $\boldsymbol{x}$ задовольняє обмеження задачі (5.15). Помноживши обидві частини кожної з нерівностей

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i \le x_{m+1},\ j=1,\dots,n, \text{ на } y_j \ge 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1,$$

і підсумовуючи по j, одержимо

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i c_{ij} y_j \le x_{m+1},$$

тобто $\boldsymbol{x}$ задовольняє обмеження задачі (5.17).

Доведення еквівалентності задач (5.12) та (5.16) аналогічне.

Лема 5.3. *Задачі* (5.15), (5.16) *є двоїстими ЗЛП.*

Доводиться ця лема простою перевіркою, виходячи з означення двоїстих *ЗЛП*.

Теорема 5.3 (про мінімакс). *Будь-яка матрична гра має розв'язок у змішаних стратегіях.*

Доведення. За теоремою 5.2 для *ЗЛП* (5.15)

$$\min_{D} x_{m+1} = \min_{\boldsymbol{x}\in X}\max_{\boldsymbol{y}\in Y} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{5.18}$$

а для ЗЛП (5.16)

$$\max_{D} y_{n+1} = \max_{\boldsymbol{y}\in Y}\min_{\boldsymbol{x}\in X} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{5.19}$$

де області D та $\overline{D}$ визначаються обмеженнями розглядуваних задач. За лемою 5.3 *ЗЛП* (5.15) та (5.16) є двоїстими. Якщо існує розв'язок однієї з пари двоїстих *ЗЛП*, тобто існує

$$\min_{D} x_{m+1} \quad \text{або} \quad \max_{\overline{D}} y_{n+1},$$

то за теоремою двоїстості існує розв'язок і другої задачі, причому

$$\min_{D} x_{m+1} = \min_{\overline{D}} y_{n+1}.$$

Враховуючи (5.18) та (5.19), звідси маємо

$$\min_{\boldsymbol{x}\in X} \max_{\boldsymbol{y}\in Y} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max_{\boldsymbol{y}\in Y} \min_{\boldsymbol{x}\in X} F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

а це означає, що існують оптимальні змішані стратегії гравців у розглядуваній матричній грі.

Легко бачити, що *ЗЛП* (15), (16) завжди мають розв'язок. Розглянемо, наприклад, задачу (5.15). Оскільки x_{m+1} за знаком не обмежене, то множина D не є порожньою (будь-яке $\boldsymbol{x} \in X$ є допустимим розв'язком). Через те, що

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1, \ x_i \geq 0, \ i = 1,\ldots,m,$$

величина $\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i$ обмежена знизу для будь-якого $j=1,\ldots,n$. Звідси випливає, що x_{m+1} обмежена знизу, отже існує $\min_{D} x_{m+1}$.

Приклад 5.4. Розглянемо матричну гру з платіжною матрицею

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Легко бачити, що

$$\overline{v} = \min_{i=1,2} \max_{j=1,2} c_{ij} = 4, \quad \underline{v} = \max_{j=1,2} \min_{i=1,2} c_{ij} = -2, \quad \overline{v} \neq \underline{v},$$

тому гра не має сідлової точки.

Нехай $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2)'$ □ змішані стратегії гравців P_1, P_2 відповідно.

Середній виграш гравця P_2 визначається так:

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{y}' = y_1\,(\square 3\,x_1 + 4\,x_2) + y_2\,(5\,x_1 \,\square\, 2\,x_2).$$

Задачі (5.11), (5.12) мають вигляд:

$$\max_{y} [y_1\,(-3\,x_1 + 4\,x_2) + y_2(5\,x_1 - 2\,x_2)] \to \min_{x}$$

$$\min_{x} [y_1\,(-3\,x_1 + 4\,x_2) + y_2(5\,x_1 - 2\,x_2)] \to \max_{y}$$

де $\boldsymbol{x}\in X=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2):\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1+x_2=1\}$, $\boldsymbol{y}\in Y=\{\boldsymbol{y}=(y_1,y_2)':\ y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0,\ y_1+y_2=1\}$.

Задачі (5.15) та (5.16) записуються так:

$$
\begin{array}{ll}
x_3 \to \min, & y_3 \to \max, \\
-3\,x_1 + 4\,x_2 \le x_3, & -3\,y_1 + 5\,y_2 \ge y_3, \\
5\,x_1 - 2\,x_2 \le x_3, & 4\,y_1 - 2\,y_2 \ge y_3, \\
x_1 + \quad x_2 = 1, & y_1 + \quad y_2 = 1, \\
x_1 \ge 0, x_2 \ge 0; & y_1 \ge 0, y_2 \ge 0.
\end{array}
$$

Розв'язуючи останні *ЗЛП*, знаходимо оптимальні змішані стратегії $\boldsymbol{x}^*=(3/7,4/7)$, $\boldsymbol{y}^*=(1/2,1/2)$ гравців P_1 та P_2 відповідно. При цьому ціна гри $v=F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)=1$.

Лекція 27. *Теорема про активні стратегії. Ітеративні методи розв’язування матричних ігор.-2год. [1]*

Завдання для самостійної роботи. *Означення активної стратегії гравця. Теорема про активні стратегії. Застосування теореми про активні стратегії до розв’язування гри 2х2. Ітеративні методи розв’язування матричних ігор, метод Брауна-Робінсон. -4год. [1-3,7,9].*

Теорема про активні стратегії.

Як відомо, у матричних іграх з сідловою точкою жодному з гравців не слід відступати від своєї оптимальної чистої стратегії за умови, що його противник дотримується своєї оптимальної чистої стратегії. Дослідимо наслідки аналогічних дій гравців у матричній грі, що не має сідлової точки. За теоремою про мінімакс (основною теоремою матричних ігор) така гра завжди має розв'язок у змішаних стратегіях.

Нехай $\boldsymbol{x}^*=(x^*_1,...,x^*_m)$, $\boldsymbol{y}^*=(y^*_1,...,y^*_n)'$ □ оптимальні змішані стратегії гравців P_1 та P_2 відповідно. Назвемо $i(j)$-у стратегію гравця P_1 (P_2) активною (суттєвою), якщо $x^*_i > 0$ $(y^*_j > 0)$.

Теорема 5.4 (про активні стратегії). *Якщо гравець P_2 дотримується своєї оптимальної стратегії $\boldsymbol{y}^*$, то його середній виграш*

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}^*) = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{y}^* \qquad (5.20)$$

залишається незмінним і рівним ціні гри $v=F(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ незалежно від стратегії гравця P_1, якщо лише він не виходить за межі своїх активних стратегій (користується будь-якою з них у чистому вигляді, або змішує їх у будь-яких пропорціях).

<u>Доведення</u>. Не обмежуючи загальності будемо вважати, що всі стратегії гравця P_1 є активними, тобто $x^*_i > 0$, $i=1,\ldots,m$. Якщо це не так, то завжди можна перейти до еквівалентної матричної гри, викреслюючи в платіжній матриці рядки, що відповідають $x^*_i = 0$.

Оскільки оптимальні змішані стратегії $\boldsymbol{x}^*$ та $\boldsymbol{y}^*$ гравців P_1 та P_2 утворюють сідлову точку $(\boldsymbol{x}^*,\boldsymbol{y}^*)$ функції $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{y}$, то

$$v = \boldsymbol{x}^*\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{y}^* \le \boldsymbol{x}\,\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{y}^* \qquad (5.21)$$

для всіх $\boldsymbol{x} \in X$.

Вибираючи i-у чисту стратегію для гравця P_1, з (5.21) одержимо

$$v \le \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, y^*_j, \quad i=1,\ldots,m\ . \qquad (5.22)$$

Покажемо, що в (5.22) для кожного $i=1,\ldots,m$ насправді має місце рівність, тобто

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j^*,\ i = 1,\ldots,m\ . \qquad (5.23)$$

Від супротивного. Нехай існують такі i, що

$$v < \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j^*.$$

Не обмежуючи загальності, можна записати, що

$$v < \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j^*,\ \ i = 1,\ldots,k,$$

$$v = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j^*,\ \ i = k+1,\ldots,m,\ \ k = 1,\ldots,m.$$

Домножуючи обидві частини кожного з цих співвідношень на x^*_i $(x^*_i > 0)$ і підсумовуючи результати по $i = 1,\ldots,m$, матимемо

$$v = \sum_{i=1}^{m} x_i^* v < \sum_{i=1}^{m} x_i^* \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j^* = v.$$

Одержане протиріччя встановлює вірність рівностей (5.23).

Нехай $\boldsymbol{x} \in X$. Домножуючи співвідношення (5.23) на x_i та підсумовуючи результати по $i = 1,\ldots,m$, матимемо

$$v = \sum_{i=1}^{m} x_i v = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j^* = \boldsymbol{x}\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^*,$$

що і треба було довести.

Зауважимо, що твердження теореми про активні стратегії залишається вірним, якщо поміняти місцями гравців P_1 та P_2.

Доведена теорема також дає можливість знайти в явному вигляді оптимальні змішані стратегії гравців P_1, P_2 та ціну матричної гри 2×2. Отже, нехай

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{Vmatrix}$$

є платіжною матрицею гри. Зауважимо, що $x^*_1 > 0$, $x^*_2 > 0$, бо інакше матрична гра мала б сідлову точку. Із співвідношень (5.23) маємо

$$c_{11} y^*_1 + c_{12} y^*_2 = v,$$
$$c_{21} y^*_1 + c_{22} y^*_2 = v.$$

Додаючи до цих рівнянь очевидне $y^*_1 + y^*_2 = 1$, одержуємо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими y^*_1, y^*_2, v. Розв'язавши цю систему, маємо

$$y_1^* = \frac{c_{22} - c_{12}}{m},\quad y_2^* = \frac{c_{11} - c_{21}}{m},\quad v = \frac{|\boldsymbol{C}|}{m},$$

де $m = c_{11} + c_{22} - c_{12} - c_{21}$, а $|\boldsymbol{C}|$ — визначник матриці $\boldsymbol{C}$.

Аналогічно одержується оптимальна змішана стратегія гравця P_1:

$$x_1^* = \frac{c_{22} - c_{21}}{m}, \quad x_2^* = \frac{c_{11} - c_{12}}{m}.$$

Приклад 5.5. Для матричної гри з платіжною матрицею

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}$$

маємо: $m = -3 - 2 - 5 - 4 = -14$, $|\boldsymbol{C}| = 6 - 20 = -14$. Отже, $\boldsymbol{x}^* = (3/7, 4/7)$, $\boldsymbol{y}^* = (1/2, 1/2)$, $v = 1$.

Ітеративний метод Брауна-Робінсон

У попередньому розділі було показано, як знайти точні значення оптимальних змішаних стратегій гравців у матричній грі, що не має сідлової точки. На практиці часто буває достатнім знайти наближення до оптимальних змішаних стратегій, що забезпечують середній виграш, близький до ціни гри. У такому разі можна застосувати один з ітеративних методів розв'язування матричної гри.

Розглянемо ітеративний метод, запропонований Брауном і обгрунтований Робінсон (*метод Брауна-Робінсон*).

В основі цього методу лежить такий принцип: кожен з гравців прагне збільшити свій виграш, вважаючи, що майбутнє подібне минулому. При цьому вважається також, що жоден з гравців не знає своєї оптимальної змішаної стратегії. Такий принцип приводить до деякої послідовності партій гри, для кожної з яких можна підрахувати наближені значення оптимальних змішаних стратегій кожного з гравців, а також нижню та верхню границі для ціни гри.

У першій партії гравці P_1, P_2 вибирають довільно свої чисті стратегії, відповідно, i_1 та j_1. Формується m-вимірний вектор $\boldsymbol{x}^1 = (0,...,0,1,0,...,0)$, в якому 1 міститься на i_1-у місці і який характеризує частоти вибору гравцем P_1 своїх чистих стратегій, та n-вимірний вектор $\boldsymbol{y}^1 = (0,...,0,1,0,...,0)'$, де 1 розміщена на j_1-у місці і який характеризує частоти вибору чистих стратегій гравцем P_2. Нехай після s партій маємо $\boldsymbol{x}^s = (x_1^s, ..., x_i^s, ..., x_m^s)$ та $\boldsymbol{y}^s = (y_1^s, ..., y_j^s, ..., y_n^s)'$ — вектори частот вибору чистих стратегій гравцями P_1 та P_2 відповідно.

Визначаючи свій вибір i_{s+1} у $(s+1)$-й партії, гравець P_1 підраховує свій середній програш

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^s = \left(\sum_{j=1}^{n} c_{1j} y_j^s, ..., \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j^s, ..., \sum_{j=1}^{n} c_{mj} y_j^s \right)' \qquad (5.24)$$

за s попередніх партій (це для нього минуле) і, прагнучи його мінімізувати, знаходить

$$i_{s+1} = \arg \min_{i=1,...,m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} y_j^s. \qquad (5.25)$$

Міркуючи аналогічно, гравець P_2 підраховує свій середній виграш

$$\boldsymbol{x}^s \boldsymbol{C} = \left(\sum_{i=1}^{m} c_{i1} x_i^s, \ldots, \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i^s, \ldots, \sum_{i=1}^{m} c_{in} x_i^s \right)' \qquad (5.26)$$

за s попередніх партій і, прагнучи його максимізувати, знаходить свій вибір j_{s+1} у $(s+1)$-й партії гри з умови

$$j_{s+1} = \arg \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i^s . \qquad (5.27)$$

Потім знаходяться вектори частот вибору чистих стратегій гравцями P_1 та P_2 за результатами проведених $(s+1)$-ї партій згідно формул

$$\boldsymbol{x}^{s+1} = \frac{1}{s+1} \left[s\, \boldsymbol{x}^{s+1} + \boldsymbol{I}_m(i_{s+1}) \right], \qquad (5.28)$$

$$\boldsymbol{y}^{s+1} = \frac{1}{s+1} \left[s\, \boldsymbol{y}^{s+1} + \boldsymbol{I}_n(j_{s+1}) \right], \qquad (5.29)$$

де $\boldsymbol{I}_m(i_{s+1}) = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ – m-вимірний вектор з одиницею на i_{s+1}-у місці, а $\boldsymbol{I}_n(j_{s+1}) = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)'$ – n-вимірний вектор з одиницею на j_{s+1}-у місці.

Має місце таке твердження.

Теорема 5.5. *Для ітеративного методу Брауна-Робінсон існують границі*

$$\lim_{s\to\infty} \boldsymbol{x}^s = \boldsymbol{x}^*, \quad \lim_{s\to\infty} \boldsymbol{y}^s = \boldsymbol{y}^*,$$

де $\boldsymbol{x}^*$, $\boldsymbol{y}^*$ – оптимальні змішані стратегії гравців P_1 та P_2. Крім того,

$$\lim_{s\to\infty} \max_{j=1,\ldots,n} \boldsymbol{x}^s \boldsymbol{C} = \lim_{s\to\infty} \min_{i=1,\ldots,m} \boldsymbol{C} \boldsymbol{y}^s = v,$$

де $v = \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{C} \boldsymbol{y}^*$ – ціна гри.

Пропускаючи доведення цієї теореми через його громіздкість, зауважимо, що збіжність методу Брауна-Робінсон досить повільна, що, проте, не є великою перешкодою, якщо цей метод реалізується на *ЕОМ*.

Приклад 5.6. Нехай матрична гра задається платіжною матрицею

$$\boldsymbol{C} = \begin{Vmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}.$$

Далі, використовуючи співвідношення (5.24)–(5.29), виконуються обчислення для декількох послідовних ітерацій методу Брауна-Робінсон розв'язування цієї матричної гри.

1)		$i_1 = 1$,	$\boldsymbol{x}^1 = (1,0)$,
		$j_1 = 1$,	$\boldsymbol{y}^1 = (1,0)'$.
2) $\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^1 = (-3,4)'$,	$\min \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^1 = -3$,	$i_2 = 1$,	$\boldsymbol{x}^2 = (1,0)$,
$\boldsymbol{x}^1\boldsymbol{C} = (-3,5)$,	$\max \boldsymbol{x}^1\boldsymbol{C} = 5$,	$j_2 = 2$,	$\boldsymbol{y}^2 = (1/2,1/2)'$.
3) $\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^2 = (1,1)'$,	$\min \boldsymbol{C}\boldsymbol{y}^2 = 1$,	$i_3 = 2$,	$\boldsymbol{x}^3 = (2/3,1/3)$,

$\boldsymbol{x}^2\,\boldsymbol{C} = (\square\,3, 5)$,	$\max \boldsymbol{x}^2\,\boldsymbol{C} = 5$,	$j_3 = 2$,	$\boldsymbol{y}^3 = (1/3, 2/3)'$.
4) $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{y}^3 = (7/3, 0)'$,	$\min \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{y}^3 = 0$,	$i_4 = 2$,	$\boldsymbol{x}^4 = (1/2, 1/2)$,
$\boldsymbol{x}^3\,\boldsymbol{C} = (-2/3, 8/3)$,	$\max \boldsymbol{x}^3\,\boldsymbol{C} = 8/3$,	$j_4 = 2$,	$\boldsymbol{y}^4 = (1/4, 3/4)'$.
5) $\boldsymbol{C}\,\boldsymbol{y}^4 = (3, -1/2)'$,	$\min \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{y}^4 = 1/2$,	$i_5 = 2$,	$\boldsymbol{x}^5 = (2/5, 3/5)$,
$\boldsymbol{x}^4\,\boldsymbol{C} = (1/2, 3/2)$,	$\max \boldsymbol{x}^4\,\boldsymbol{C} = 3/2$,	$j_5 = 2$,	$\boldsymbol{y}^5 = (1/5, 4/5)'$.

Зауважимо, що раніше (приклад 5.5) для цієї матричної гри були знайдені точні значення оптимальних змішаних стратегій гравців та ціна: $\boldsymbol{x}^* = (3/7, 4/7)$, $\boldsymbol{y}^* = (1/2, 1/2)$, $v = 1$.

ЗАВДАННЯ МОДУЛЬНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ №5

Приклад типового завдання .

1. Визначити знак ціни гри з такою матрицею виграшів 2-го гравця:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 7 \\ 9 & 3 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Виконати чотири ітерації методом Брауна-Робінсон за кожного гравця. Визначити на їх основі наближення до оптимальних змішаних стратегій гравців та до верхньої та нижньої ціни гри.

2. Сформулювати теорему про активні стратегії для 1-го гравця. Розв’язати на її основі гру з матрицею

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Вірне чи невірне таке твердження:

якщо у грі двох осіб з нульовою сумою один з гравців має одну оптимальну чисту стратегію, то те ж саме є справедливим і для іншого гравця?

Відповідь аргументувати (або доведенням, або прикладом чи контрприкладом).

4. Розв’язати гру з такою матрицею виграшів 2-го гравця:

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 5 \\ 3 & 2 \\ 4 & 9 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}$$

5. Вірне чи невірне таке твердження:

якщо гра двох осіб з нульовою сумою має ситуацію рівноваги, то жоден з гравців не може збільшити свій очікуваний виграш, відступивши від своєї мінімаксної стратегії?

Відповідь аргументувати (або доведенням, або прикладом чи контрприкладом).

Контрольні запитання до змістового модуля 5.

1. Опис соціально-економічного явища у вигляді конфлікту, складові конфлікту.
2. Стратегії гравців. Ситуації у конфлікті. Функції виграшів гравців.
3. Безкоаліційна гра. Антагоністична гра.
4. Біматрична гра. Матрична гра.
5. Прийнятна ситуація для гравця.
6. Ситуація рівноваги у безкоаліційній грі. Розв’язування безкоаліційної гри.
7. Стратегічна еквівалентність ігор, її властивості.
8. Теорема про ситуації рівноваги стратегічно еквівалентних ігор.
9. Ігри з нульовою та сталою сумою. Теорема про стратегічну еквівалентність ігор з нульовою та сталою сумами.
10. Ситуації рівноваги в антагоністичниї іграх, сідлові точки.
11. Теорема про нерівність мінімаксів.
12. Необхідні та достатні умови існування сідлових точок функції.
13. Матричні ігри, мінімаксні стратегії, верхня та нижня ціни гри.
14. Розв’язок гри в чистих стратегіях, ціна гри, оптимальні стратегії гравців.
15. Змішані стратегії.
16. Змішане розширення матричної гри.
17. Оптимальні стратегії гравців та ціна гри у змішаному розширенні матричної гри.
18. Лема про перехід до змішаних стратегій.
19. Теорема про матричні ігри та ЛП.
20. Теорема про розв’язність матричної гри у змішаних стратегіях.
21. Означення активної стратегії гравця.
22. Теорема про активні стратегії.
23. Застосування теореми про активні стратегії до розв’язування гри 2х2.
24. Ітеративні методи розв’язування матричних ігор, метод Брауна-Робінсон.

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА:

Основна:

1. Ю.Д.Попов, В.І.Тюптя, В.І.Шевченко “Методи оптимізації”, К.,2000.
2. Ю.М.Ермольев и др. “Математические методы исследования операций”, К.1977.
3. И.Н.Ляшенко и др. “Линейное и нелинейное программирование”, К.,1978.
4. И.А.Калихман, «Сборник задач по математическому программированию», М., 1975.
5. В.Ф.Капустин. Практические занятия по курсу математического программирования. Издательство Ленинградского университета, 1976.

Додаткова:

6. Ю.Д.Попов, В.І.Тюптя, В.І.Шевченко “Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт з методів оптимізації”, К.1995, 1998, 2000.
7. Ю.П.Зайченко, “Исследование операций”, К.,1988г.
8. Ю.П.Зайченко, С.А.Шумилова “Исследование операций”, зб.задач, К.,1984г.
9. В.Г.Карманов. “Математическое программирование”, М.1975.