



FACULTATEA DE FIZICĂ

MODURI DE OSCILAȚIE CU MOMENT CINETIC ORBITAL ALE CÂMPULUI ELECTROMAGNETIC: LAGUERRE-GAUSS

LUCRARE DE LICENȚĂ

Absolvent

Munteanu Vadim

Conducător științific
Conf. Univ. Dr. Mădălina Boca

București, 2022

Cuprins

1	Introducere	1
2	Tratarea clasica	3
2.1	Soluții tip unda plană	3
2.2	Aproximația paraxială: modurile Gaussiaene	4
2.3	Momentul cinetic al campului EM	8
2.4	Aplicație numerică: Dinamica electronului în câmpuri HG și LG	13
3	Tratarea cuantică	25
3.1	Cuantificarea undelor plane	25
3.2	Cuantificarea modurilor LG	30
4	Aplicație: interacția cu sisteme atomice	31
5	Concluzii	39
A	Anexa	41
A.1	Formularea interacției	41
A.2	Teoria perturbațiilor dependente de timp	42
	Referințe	44

Introducere

În anii recenți a crescut interesul față de fasciculele Laguerre-Gauss și alte fascicule cu *front de undă helicoidal*. Această structură a frontului de undă oferă fasciculului *moment cinetic orbital* [1].

Posibilele aplicații ale luminii cu moment cinetic orbital ce au fost demonstate în laboratoare, dar încă nu au fost comercializate, sunt:

1. Manipularea orientativă a particulelor sau a sistemelor de particule în ”pensete optice” (optical tweezers) [2]
2. Codificarea informațiilor cu lățime de bandă mare în comunicații optice în spațiu liber [3]
3. Codificarea informației cuantice de dimensionalitate mare, pentru posibilele aplicații viitoare a criptografiei cuantice și a calculului cuantic [4]
4. Detecție optică sensibilă [5]

Chiar dacă principiile și metodele de producere a acestor fascicule sunt destul de bine înțelese [6], interacția detaliată a acestor fascicule cu materia este încă slab studiată, investigații teoretice fiind necesare pentru a ghida viitoarele experimente și a dezvolta noi aplicații practice.

O problemă de interes teoretic este găsirea de soluții analitice, eventual aproximative, ale ecuațiilor Maxwell ce descriu câmpuri electomagnetice purtătoare de moment cinetic și studiul proprietăților lor.

În continuare, o primă clasă de procese interesante este legată de transferul de moment cinetic de la câmp la sisteme de particule încărcate, simulări teoretice pornesc de la rezolvarea ecuației de mișcare a unei particule încărcate în prezență unui câmp electromagnetic, și avansează spre cazuri mai complexe, cum ar fi propagarea câmpului în plasmă.

De asemenea, în cadrul fizicii teoretice, există o preocupare pentru cuantificarea acestor soluții speciale ale ecuațiilor Maxwell, ce poartă numele de moduri Gaussiene. Odată introdus câmpul electromagnetic cuantificat, se pot studia, în cadrul mecanicii cuantice, o serie întreagă de procese ce au loc la interacția sistemelor cuantice cu câmpul electromagnetic pot fi descrise teoretic. În particular, este de asemenea interesant de studiat transferul de moment cinetic între câmpul electromagnetic și alte sisteme cuantice.

Teza este structurată în 5 părți: după introducere, Capitolul 2 se ocupă cu descrierea clasică a câmpului electromagnetic, introducând inițial soluțiile de tip undă plană și pe urmă modurile gaussiene, determinate în cadrul aproximăției paraxiale. Este prezentat

un cod numeric dezvoltat în Python pentru determinarea și studiul proprietăților acestor câmpuri. În continuarea capitolului, este prezentat un studiu al mișcării particulei încărcate clasice în prezența unui câmp electromagnetic descris de o soluție de tip Gaussian a ecuațiilor Maxwell . Calculele numerice au fost făcute cu un cod scris de asemenea în Python.

Capitolul urmator se ocupa cu cuantificarea campului electromagnetic, mai intai pentru cazul undelor plane, si apoi pentru solutiile Laguerre-Gauss. Este caracterizat un mod Laguerre Gauss, sunt introdusi operatorii de creare si anihilare si este obtinut Hamiltonianul campului electromagnetic.

Capitolul al patrulea prezintă, în cadrul teoriei perturbațiilor de ordinul al III-lea procesul de emisie a armonicii a doua de către un sistem cuantic interacție cu un câmp electromagnetic cuantificat, descris ca o suprapunere de moduri Laguerre-Gauss. Este prezentată deducerea ratei de tranziție, așa cum apare în literatură și în continuare sunt prezentate reprezentări grafice ale distribuției de intensitate a radiației emise.

În fine, capitolul al cincilea prezintă concluziile. Teza are de asemenea o anexă, în care este discutată teoria perturbațiilor dependente de timp in mecanica cuantică.

Tratarea clasăcă

2.1 Soluții tip undă plană

Ecuațiile lui Maxwell în vid ($\mathbf{j} = \mathbf{0}$, $\rho^C = 0$) sunt invariante dacă inmulțim ecuațiile cu un factor de fază, de asemenea e comod de exprimat câmpurile \mathbf{E} și \mathbf{B} (ne vom limita la câmpuri monocromatice) prin *câmpuri fazoriale* ($\mathcal{E}(\mathbf{r}), \mathcal{B}(\mathbf{r}) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\mathcal{E}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\} \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\mathcal{B}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}\}$$

Astfel, ecuațiile lui Maxwell în vid se reduc la:

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 0 \tag{2.1}$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0 \tag{2.2}$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = i\omega \mathcal{B} \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathcal{B} = -\frac{i\omega}{c^2} \mathcal{E} \tag{2.4}$$

Aplicand rotorul ecuației (2.3) și ținând cont de (2.1) și (2.4) obținem ¹:

$$\nabla^2 \mathcal{E} + k^2 \mathcal{E} = 0 \tag{2.5}$$

unde $k = \frac{\omega}{c}$, k fiind modulul vectorului de undă și c fiind viteza luminii în vid dată de relația: $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$. Ecuația (2.5) este cunoscută sub numele **Ecuația lui Helmholtz**. Putem obține verisuna scalară a ecuației Helmholtz, alegând vectorul de polarizare constant \vec{t} de modul 1 și presupunând că câmpurile au polarizare transversală axei optice, care o luam de-a lungul axei **z**

$$\mathcal{E} \equiv \mathbf{t}U(\mathbf{r}) \Rightarrow \nabla^2 U + k^2 U = 0 \tag{2.6}$$

Rezolvând ecuația lui Helmholtz obținem soluții multiple posibile, fiecare soluție respectând condițiile de frontieră. Aceste soluții sunt numite **moduri**. Modurile sunt ortogonale între ele (în funcție de sistemul care definește condiția de ortogonalitate) și depind de un set de parametri (discreți sau continui). Rezultat important este că toate modurile împreună formează o bază ortogonală completă față de care orice câmp electric din sistem

¹Similar se poate obține și pentru \mathcal{B} , dacă luăm rotorul ecuației (2.4) și ținem cont de aceeași relație

poate fi dezvoltat. Rezolvând ecuația în coordonate carteziene prin separarea variabilelor se obține:

$$U(\mathbf{r}) = E_0 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Rightarrow \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \Re\{\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}\} \quad (2.7)$$

,care reprezintă undă plană ce se propagă în direcția negativă a lui \mathbf{k}

2.2 Aproximația paraxială: modurile Hermite Gauss și Laguerre Gauss

Undele plane sunt soluții simple ale ecuațiilor lui Maxwell, dar ele au o extensie infinită, prin urmare nu pot reprezenta cu acuratețe fasciculele produse de surse laser. Deci avem nevoie de o descriere mai exactă (extensie finită). Acestea pot fi obținute rezolvând ecuația (2.6) în **aproximația paraxială** (considerăm că fasciculele de lumină se propagă pe o direcție specifică z , adică $k_z^2 \gg k_x^2 + k_y^2$). În această aproximare, câmpul electric fazorial are forma [7]:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \psi(\mathbf{r}) e^{ikz} \quad (2.8)$$

Punând (2.8) în (2.5) obținem:

$$\nabla_t^2 \psi + 2ki\partial_z \psi + \partial_z^2 \psi = 0 \quad (2.9)$$

,unde $\nabla_t^2 \equiv \partial_x^2 + \partial_y^2$ este Laplacianul transversal. Mai putem simplifica ecuația presupunând că ψ variază încet cu z , dependența "principală" de z fiind în factorul e^{ikz} . Prin urmare avem că $|\partial_z^2 \psi| \ll 2k|\partial_z \psi|$ (Profilul transversal variază foarte lent pe direcția de propagare), de unde rezultă **Ecuația undelor în aproximarea paraxială**:

$$\nabla_t^2 \psi + 2ki\partial_z \psi = 0 \quad (2.10)$$

Cea mai simplă soluție a acestei ecuații [1] o putem înlocui în (2.8) obținând **modul Gaussian fundamental**:

$$\mathbf{E}_{00}(\rho, z) = \mathbf{E}_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp\left(-\frac{\rho^2}{\omega^2(z)}\right) \exp[i(kz + \arctan \frac{z}{z_0})] \exp\left(i \frac{k\rho^2}{2R(z)}\right) \quad (2.11)$$

,unde:

1. **factorul de amplitudine**
 2. **factorul de fază longitudinal**
 3. **factorul de fază radial**
- $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$ distanța radială

- ω_0 lățimea fasciculului la $z = 0$, numită talia fasciculului
- $\omega(z) = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$ lățimea fasciculului functie de z . Pentru $z \gg z_0$ $\omega(z) \simeq \omega_0 \frac{z}{z_0} = \frac{\pi \omega_0}{\lambda}$. Definim unghiul de divergență al fasciculului (unghi mic) $\theta \simeq \tan \theta = \frac{d\omega(z)}{dz} = \frac{\lambda}{\pi \omega_0}$. De asemenea definim expansiunea unghiulară asimptotică a fasciculului Gaussian ca $2\theta \simeq \frac{2\lambda}{\pi \omega_0} \equiv \frac{4\lambda}{\pi D_0}$, unde $D_0 \equiv 2\omega_0$ este diametrul minim al fasciculului.
- z_0 distanța Rayleigh, distanța la care diametrul fasciculului crește de $\sqrt{2}$ ori $\rightarrow z_0 = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda}$. reprezintă o măsură a domeniului pe care fasciculul poate fi considerat colimat
- $R(z) = z[1 + \frac{z_0^2}{z^2}]$ raza curburii frontului de undă parabolic funcție de z . La $z = 0$, raza de curbură este infinită (frontul de undă este plan). Aceasta scade până la valoarea minimă $R_{min} = 2z_0$ la $z = \pm z_0$ și apoi crește din nou.

Pentru unde sferice avem $\mathcal{E}_{Sph} = \frac{e^{ikr}}{r}$. Cand $z \gg \rho \Rightarrow r = \sqrt{\rho^2 + z^2} \simeq z + \frac{\rho^2}{2z} \Rightarrow \mathcal{E}_{Sph} \simeq \frac{1}{r} e^{ikr} e^{i\frac{k\rho^2}{2z}}$. În concluzie, frontul de undă a fasciculului Gaussian fundamental evoluează similar ca frontul de undă a unei sferice, dar centrul de curbură al frontului fasciculului Gaussian variază cu z .

$$R(z) \simeq \begin{cases} +\infty, & \text{centrat la } z_C = -\infty, \text{ pentru } z \ll z_0 \\ 2z_0, & \text{centrat la } z_C = -z_0, \text{ pentru } z = z_0 \\ z, & \text{centrat la } z_C = 0, \text{ pentru } z \gg z_0 \end{cases}$$

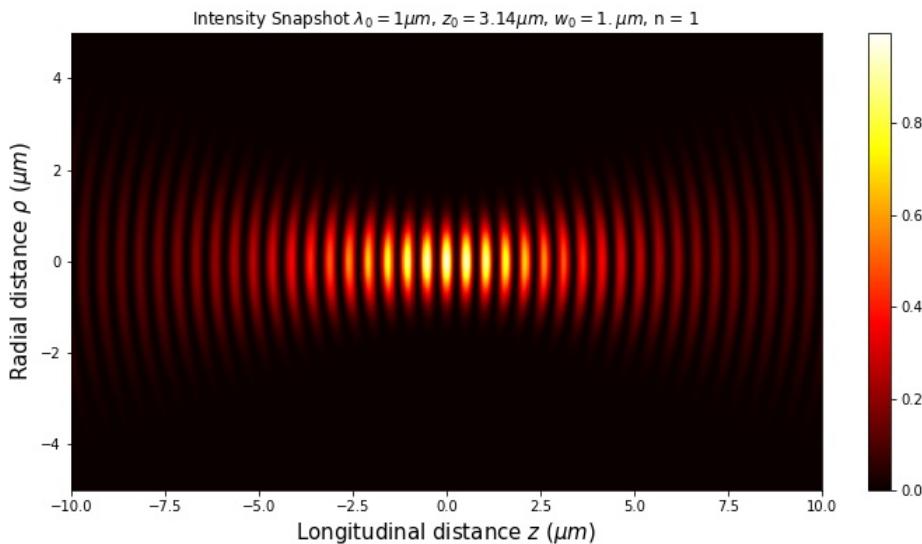


Figura 2.1: Intensitatea $|E_{00}(\rho, z)|^2$ la un moment de timp pentru parametrii $\lambda_0 = 1\mu m$, $\omega_0 = 1\mu m$

Soluțiile generale a ecuației (2.10) în coordonate carteziene sunt cunoscute ca moduri **TEM_{mp}** . Introduse în (2.8), obținem **moduri Hermite-Gauss**:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{mp}(x, y, z) = & \mathbf{E}_0 H_m \left(\frac{\sqrt{2}x}{\omega(z)} \right) H_p \left(\frac{\sqrt{2}y}{\omega(z)} \right) \frac{\omega_0}{\omega(z)} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \right) \cdot \\ & \cdot \exp(i[kz + (1 + m + p) \arctan z/z_0]) \exp \left(i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right) \\ & m, p = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.12)$$

, unde H_m sunt polinoamele Hermite:

$$H_m(u) = (-1)^m e^{u^2} \frac{d^m}{du^m} e^{-u^2}$$

$$H_{m+1}(u) = 2uH_m(u) - 2mH_{m-1}(u), \text{ cu } H_0(u) = 1 \text{ și } H_1(u) = u$$

(2.13a)

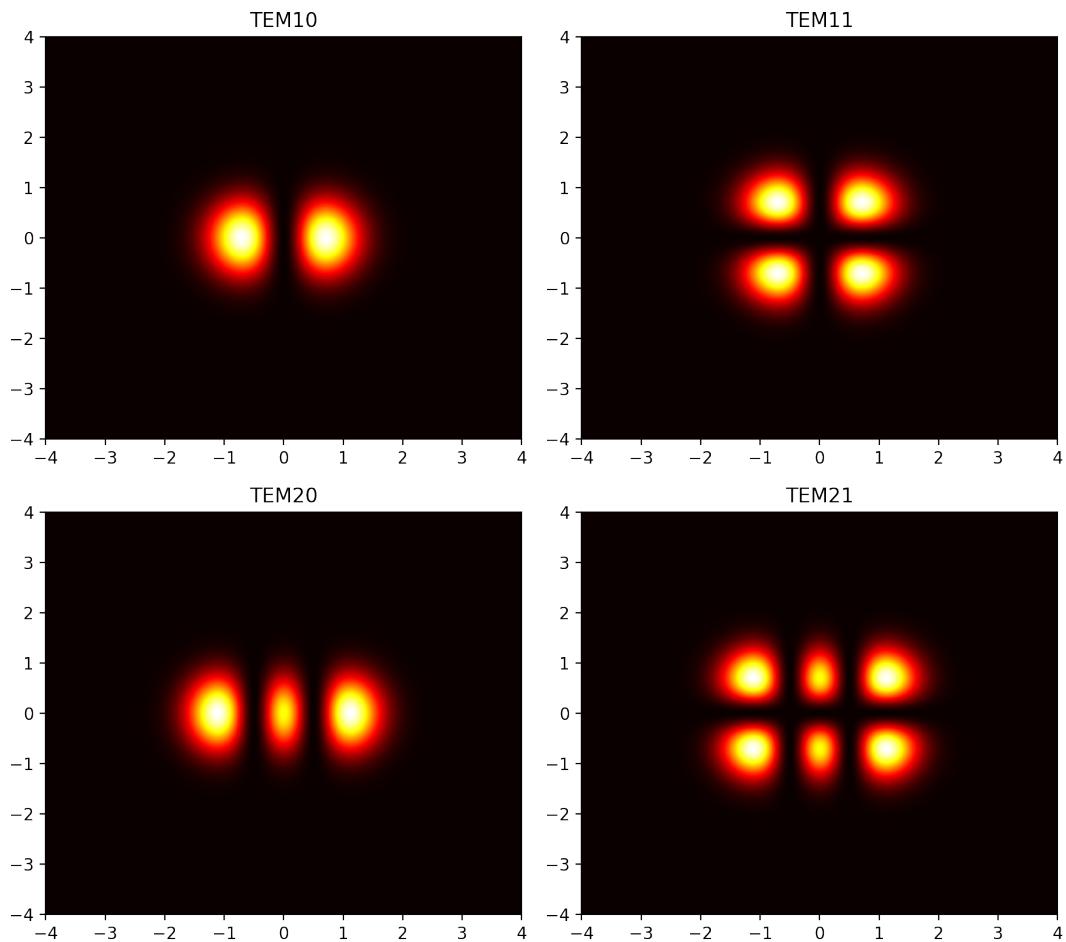


Figura 2.2: Profilurile intensităților, $|E_{mp}(x, y, z = 0)|^2$, a câtorva moduri Gauss-Hermite

Rezolvând ecuația 2.10 în coordonate cilindrice se obțin **moduri Laguerre-Gauss**:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{pm}(\rho, \phi, z) = & E_0 \frac{\omega_0}{\omega(z)} \left(\frac{\sqrt{2} \rho}{\omega(z)} \right)^{|m|} L_p^{|m|} \left(\frac{2\rho^2}{\omega^2(z)} \right) \exp \left(-\frac{\rho^2}{\omega^2(z)} \right) \cdot \\ & \cdot \exp(i[kz + (1 + |m| + 2p) \arctan(\frac{z}{z_0})]) \exp(im\phi) \exp \left(i \frac{k\rho^2}{2R(z)} \right) \\ p = 1, 2, 3, \dots \text{ și } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

, unde L_p^m sunt *polinoamele Laguerre asociate*:

$$L_p^m(u) = \frac{e^u}{p!} u^{-m} \frac{d^p}{du^p} (e^{-u} u^{p+m}) \quad (2.15a)$$

$$(k+1)L_{k+1}^p(u) = (2k+1+p-u)L_k^p(u) - (k+p)L_{k-1}^p(u)$$

, cu $L_0^m(u) = 1$ și $L_1^m(u) = -u + (m+1)$

Numărul întreg m este asociat cu dependența azimutală a modurilor Laguerre-Gauss. Mai exact, modurile cu $m \neq 0$ conservă *momentul kinetic orbital!* [8] (subiectul următoarei secțiuni). Prin urmare, modurile L-G cu $m \neq 0$ pot cauza rotirea unei particule încărcate. Modurile L-G nu sunt de obicei produse de rezonatorii laser. Generarea lor fiind posibilă în laseri cu oglinzi miticulos aliniate.

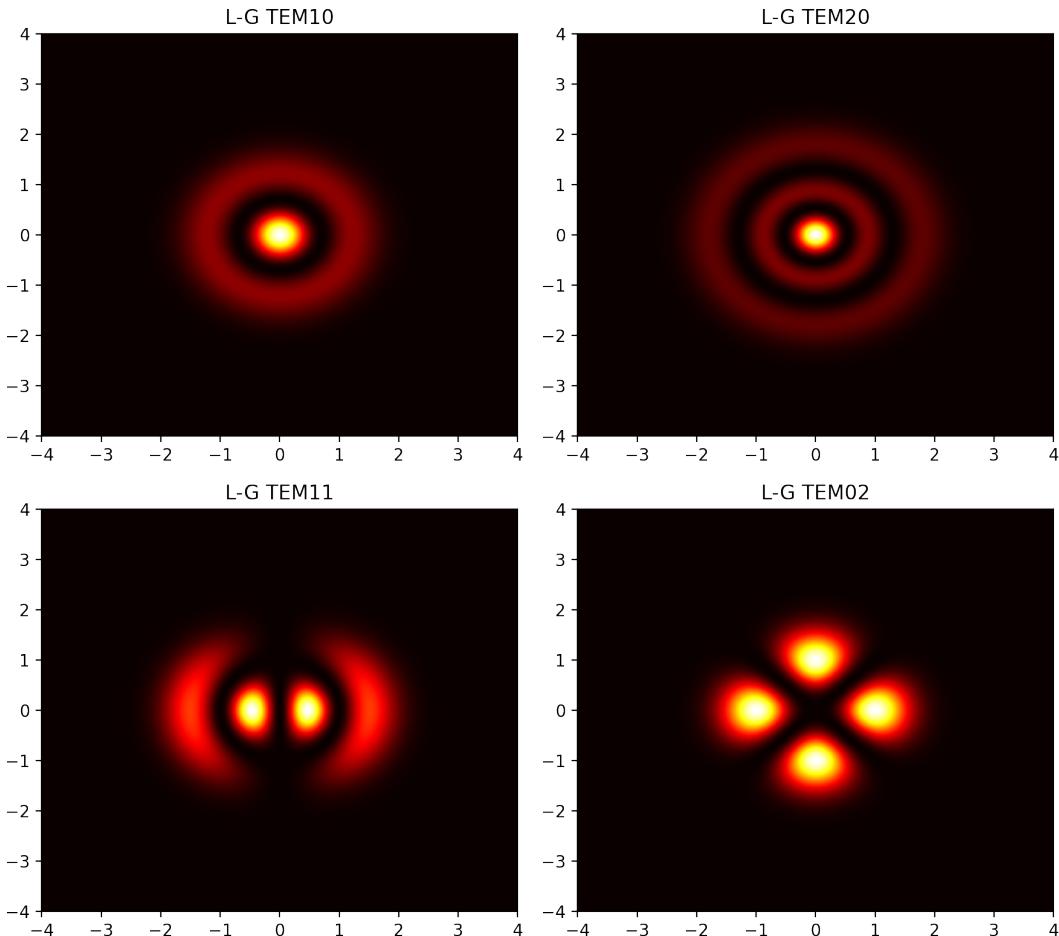


Figura 2.3: Profilurile intensităților, $|E_{mp}(\rho, \phi, z = 0)|^2$, a câtorva moduri Laguerre-Gauss

2.3 Momentul kinetic al campului EM

Conservarea cantităților fizice energie, impuls și moment kinetic pot fi reprezentate prin **ecuația de continuitate**, care leagă densitatea cu fluxul de densitate a mărimilor sus menționate. În continuare, derivăm conservarea energiei câmpului electromagnetic pornind de la ecuațiile lui Maxwell. Vom calcula mărimea $\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ folosind relația: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$ și explicitând rotorurile câmpurilor \mathbf{E} și \mathbf{B} din ecuațiile lui Maxwell. Obținem:

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\epsilon_0 \mathbf{E}^2}{2} \right) - \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad (2.16)$$

Știind că densitatea de energie electromagnetică este $\mathcal{W}_{em} = \frac{1}{2}(\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2)$ și notând $\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ (cunoscut ca **vectorul Poynting**) relația (2.16) poate fi scrisă ca:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}_{em} = -\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} - \nabla \cdot \mathbf{S} \quad (2.17)$$

Integrând ecuația (1.15) pe un domeniu spațial (\mathcal{D} și mărginit de Σ , cu normala \mathbf{n}) în care avem sarcini electrice în mișcare și aplicând legea Gauss, obținem:

$$\frac{d}{dt} W_{em}[\mathcal{D}] = - \int_{\mathcal{D}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dV - \oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.18)$$

, în care $\frac{d}{dt} W_{em}[\mathcal{D}] \equiv \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}_{em} \, dV$ este variația în timp a energiei totale electomagnetice din domeniul \mathcal{D} . Știind că $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ este puterea transferată sarcinilor din unitatea de volum de către câmpul electromagnetic, atunci $\int_{\mathcal{D}} \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \, dV \equiv \frac{d}{dt} W_{mec}[\mathcal{D}]$ (Variația în timp a energiei mecanice totale a purtătorilor de sarcină din \mathcal{D}). Cu toate acestea egalitatea (2.18) se scrie:

$$\frac{d}{dt} \{W_{em}[\mathcal{D}] + W_{mec}[\mathcal{D}]\} = - \oint_{\Sigma} \mathbf{S} \cdot d\mathbf{A} \quad (2.19)$$

Ecuația (2.18) reprezintă forma integrală a legii conservării energiei câmpului electromagnetic (Ec. (2.17) reprezintă forma locală), cunoscută ca **Teorema Poynting**. În cuvinte:

*Variația energiei câmpului electromagnetic dintr-un domeniu al spațiului se datorează, pe de o parte, schimbului de energie cu purtătorii de sarcină electrică, sub formă de energie mecanică a acestora și pe de altă parte, schimbului de energie electromagnetică cu exteriorul, prin intermediul curentului de energie (**vectorul Poynting**) prin frontieră acestui domeniu.*

În cazul în care domeniul nu conține purtători de sarcină ($\mathbf{j} = 0$), ecuația (2.17) devine **ecuația de continuitate pentru energia câmpului electromagnetic**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{W}_{em} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 \quad (2.20)$$

Similar putem deriva o lege de conservare a impulsului electromagnetic pornind de la calculul expresiei $\epsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})$, în care dacă explicităm rotorurile câmpurilor folosind ecuațiile lui Maxwell, obținem egalitatea:

$$\epsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.21)$$

Pe componente ², expresia $\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})$ poate fi scrisă echivalent ca:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})]_i &= \epsilon_{ijk} E_j (\nabla \times \mathbf{E})_k = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} E_j \partial_l E_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) E_j \partial_l E_m = \\ &= E_j \partial_i E_j - E_j \partial_j E_i = \frac{1}{2} \partial_i (E_j E_j) - \partial_j (E_i E_j) + E_i \partial_j E_j = \frac{1}{2} \partial_i \mathbf{E}^2 - \partial_j (E_i E_j) + E_i \nabla \cdot \mathbf{E} = \\ &= \partial_j \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ij} - E_i E_j \right) + E_i \nabla \cdot \mathbf{E} \end{aligned}$$

Similar, $[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})]_i = \partial_j \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{ij} - B_i B_j \right) + B_i \nabla \cdot \mathbf{B}$.

Explicitând divergențele câmpurilor folosind ecuațiile lui Maxwell, și definind $T_{ij}^{(e)} \equiv \epsilon_0 \left(\frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ij} - E_i E_j \right)$ tensorul tensiunii câmpului electric și cu $T_{ij}^{(m)} \equiv \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{ij} - B_i B_j \right)$ tensorul tensiunii câmpului magnetic (tensori simetrici), putem scrie componenta i a membrului stâng ecuației (2.21) sub forma:

$$[\epsilon_0 \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E}) + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})]_i = \partial_j (T_{ij}^{(e)} + T_{ij}^{(m)}) + \rho E_i \equiv \partial_j T_{ij} + \rho E_i \quad (2.22)$$

În care am definit $T_{ij} \equiv T_{ij}^{(e)} + T_{ij}^{(m)}$ tensorul tensiunii câmpului electromagnetic. Vom nota generic vectorial $\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}}$ ($(\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}})_i \equiv \partial_j T_{ij}$). Cu toate acestea, ecuația (1.19) se scrie:

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} + \rho \mathbf{E} = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

Notând $\mathbf{g} \equiv \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$ și știind că $\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ este densitate de forță Lorentz, ecuația de mai sus se scrie astfel:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g} = -\mathbf{f} - \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} \quad (2.23)$$

Acum procedăm similar cum am făcut anterior pentru energia câmpului, adică integrăm pe un domeniu spațial în care avem purtători de sarcină în mișcare și aplicăm legea lui Gauss ținând cont de principiul 2 al lui Newton ($\int_{\mathcal{D}} \mathbf{f} dV \equiv \mathbf{F}[\mathcal{D}]$ forță totală cu care câmpul electromagnetic acționează asupra purtătorilor de sarcină din \mathcal{D} , care după

²În continuare, se folosește convenția de descriere a tensorilor, în care literele latine indexează valorile 1, 2 și 3 corespunzătoare direcțiilor x, y și z. Indicii care se repetă sugerează sumarea după toate cele trei valori. Va fi de asemenea folosit să exprimă produsele vectoriale fără a folosi explicit notația vectorială. Astfel, vom folosi tensorul Levi-Civita ϵ_{ijk} , care îi simetrică la permutări ciclice. Cu aceste notății, componenta i a vectorului $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ este: $\epsilon_{ijk} E_j B_k$. δ_{ij} este Kronecker delta

principiul 2 este $\mathbf{F}[\mathcal{D}] = \frac{d}{dt} \mathbf{G}^{mec}[\mathcal{D}]$. $\mathbf{G}^{em}[\mathcal{D}] \equiv \int_{\mathcal{D}} \mathbf{g} dV$ este impulsul electromagnetic total din \mathcal{D} , iar $\mathbf{G}^{mec}[\mathcal{D}]$ impulsul mecanic total al purtătorilor din \mathcal{D}):

$$\frac{d}{dt} \{ \mathbf{G}^{em}[\mathcal{D}] + \mathbf{G}^{mec}[\mathcal{D}] \} = - \oint_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}} dA \quad (2.24)$$

Prin urmare, \mathbf{g} reprezintă densitatea de impuls electromagnetic, iar ecuația (2.24) reprezintă **forma integrală a conservării impulsului și** (2.23) **forma locală a conservării impulsului**. Considerând un domeniu lipsit de purtători de sarcină, ecuația (2.23) devine **Ecuația de continuitate pentru impulsul electromagnetic**:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{g} + \nabla \cdot \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

Așadar, în comparație cu ecuația (2.17), T_{ij} îi asociat cu componenta i a fluxului densității de impuls prin suprafața orientată în direcția j , iar $\oint_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}} dA$ reprezintă impulsul electromagnetic transferat în unitatea de timp între câmpul interior lui \mathcal{D} și cel din exteriorul lui. $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{T}}$ este intensitatea curentului de impuls electromagnetic.

Densitatea de moment cinetic a câmpului electromagnetic este obținut, în analogie cu mecanica clasice [9]:

$$\mathbf{j}^J \equiv \epsilon_0 \mathbf{r} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{r} \times \mathbf{g} \quad (2.26)$$

Pe componente:

$$j_i^J = \epsilon_0 \epsilon_{ijk} x_j \epsilon_{klm} E_l B_m = \epsilon_0 (E_i x_j B_j - B_i x_j E_j)$$

Momentul cinetic este o mărime ce se conservă, prin urmare căutăm o ecuație de continuitate similară cu cea a impulsului electromagnetic (2.23). O mărime naturală pentru densitatea de flux de moment cinetic este :

$$\mathcal{M}_{li} \equiv \epsilon_{ijk} x_j T_{kl} = \epsilon_{ijk} x_j \left[\frac{1}{2} \delta_{kl} (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}^2) - \epsilon_0 E_k E_l - \frac{1}{\mu_0} B_k B_l \right] \quad (2.27)$$

Făcând contrația cu operatorul nabla

$$\begin{aligned} \partial_l \mathcal{M}_{li} &= \partial_l (\epsilon_{ijk} x_j T_{kl}) = \epsilon_{ijk} \delta_{lj} T_{kl} + \epsilon_{ijk} x_j \partial_l T_{kl} \stackrel{(1.23)}{=} \underset{antisim.}{\epsilon_{ijk}} \overset{sim.}{T_{kj}} - \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial t} g_k \underset{rfixat}{=} \\ &- \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_{ijk} x_j g_k) = - \frac{\partial}{\partial t} j_i^J \end{aligned}$$

obținem **ecuația de continuitate pentru momentul cinetic câmpului electromagnetic**:

$$\frac{\partial}{\partial t} j_i^J + \nabla \cdot \hat{\mathbf{M}} = \mathbf{0} \quad (2.28)$$

Prin urmare, \mathcal{M}_{li} îi asociat cu fluxul componentei i a densității de moment cinetic prin suprafața orientată în direcția l .

Este deseori folositor de separat momentul cinetic total în moment cinetic intern și extern (spin și moment cinetic orbital). Forma acestei separări pentru câmpul electromagnetic rămâne neclară [10], separarea este posibilă dar nici una dintre părți nu pare a fi moment cinetic adevărat. Oricum, pentru fasciculele în aproximația paraxială, separarea are sens fizic și a fost demonstrată experimental [1]. Pentru fasciculele Laguerre-Gauss, dependența azimutală a câmpului electric complex este de tipul $e^{im\phi}$, ceea ce dă forma helicoidală a frontului de undă:

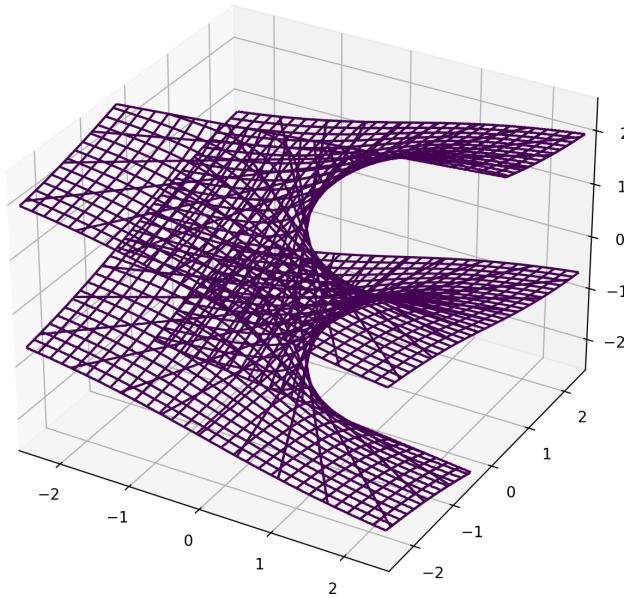


Figura 2.4: Frontul de undă a modului Laguerre-Gauss $p = 0$ $m = 1$

Este clar că o cantitate importantă pentru descrierea momentului cinetic a fasciculelor de lumină este fluxul de moment cinetic. Această este cantitatea de moment cinetic care străbate o suprafață în unitatea de timp.

Cel mai studiat exemplu de moment cinetic optic (transportat de un fascicul) este cel al fasciculului cu simetrie cilindrică în jurul axului optic (alegem ca de obicei axaz). Fluxul de densitate de moment cinetic pentru acest fascicul printr-un plan orientat în direcția z este:

$$\mathcal{M}_{zz} \stackrel{(2.27)}{=} y(\epsilon_0 E_x E_z + \frac{1}{\mu_0} B_x B_z) - x(\epsilon_0 E_y E_z + \frac{1}{\mu_0} B_y B_z)$$

Curentul net de moment cinetic printr-un plan de z constant este $\iint \mathcal{M}_{zz} dx dy$. Presupunem că deplasăm axa față de care calculăm fluxul de moment cinetic la $x = -a$, $y = -b$, atunci fluxul total de moment cinetic devine:

$$\iint \mathcal{M}_{zz} \, dx dy \rightarrow \iint \mathcal{M}_{zz} \, dx dy + a \iint T_{yz} \, dx dy - b \iint T_{xz} \, dx dy$$

,unde T_{xz} și T_{yz} sunt componentele x și y a fluxului de impuls prin suprafață. Aceasta arată că toate fasciculele pentru care impulsul total transportat prin suprafață este perpendicular pe suprafață ($\iint T_{xz} \, dx dy = \iint T_{yz} \, dx dy = 0$) vor avea aceeași densitate de flux de moment cinetic pentru orice axă paralelă cu axa fasciculului.

Acum suntem în stare să derivăm expresiile pentru părțile de spin și orbital a fluxului total de moment cinetic. Exprimăm câmpurile prin câmpuri fazoriale și ținem cont de relația $2\Re\{z\} = z + z^*$ pentru z complex, după care efectuăm medierea pe o perioadă ținând cont de $\int_0^T e^{in\omega t} dt = 0$ pentru n întreg nenul, obținem:

$$\bar{\mathcal{M}}_{zz} = \frac{1}{2} \Re \left[y(\epsilon_0 \mathcal{E}_x \mathcal{E}_z^* + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_x^* \mathcal{B}_z) - x(\epsilon_0 \mathcal{E}_y \mathcal{E}_z^* + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B}_y^* \mathcal{B}_z) \right] \quad (2.29)$$

Folosind relațiile (2.3), (2.4) pentru a explicita componentele z a câmpurilor și integrând peste planul xOy se obține:

$$\iint \bar{\mathcal{M}}_{zz} \, dx dy = \frac{\epsilon_0 c^2}{2\omega} \Re \left\{ -i \iint dx dy [-y \partial_y (\mathcal{E}_x \mathcal{B}_x^*) + x \mathcal{E}_y \partial_y \mathcal{B}_x^* + x \mathcal{B}_y^* \partial_y \mathcal{E}_x + x \longleftrightarrow y] \right\} \quad (2.30)$$

,unde $x \longleftrightarrow y$ reprezintă primii trei termeni în care schimbăm x cu y .

Acum dacă se integrează prin părți și se trece la coordonate cilindrice se obține [8]:

$$\frac{\epsilon_0 c^2}{2\omega} \Re \left\{ -i \iint \rho d\rho d\phi \left[(\mathcal{E}_x \mathcal{B}_x^* + \mathcal{E}_y \mathcal{B}_y^*) + \frac{1}{2} (-\mathcal{B}_x^* \partial_\phi \mathcal{E}_y + \mathcal{E}_y \partial_\phi \mathcal{B}_x^* - \mathcal{E}_x \partial_\phi \mathcal{B}_y^* + \mathcal{B}_y^* \partial_\phi \mathcal{E}_x) \right] \right\} \quad (2.31)$$

Putem scrie curentul de moment cinetic total ca suma de doi termeni asociați cu curentul de moment cinetic de spin și de moment cinetic orbital respectiv (expresiile conțin doar câmpuri \rightarrow invariante la transformări de etalonare):

$$M_{zz}^{spin} = \frac{\epsilon_0 c^2}{2\omega} \Re \left[-i \iint \rho d\rho d\phi (\mathcal{E}_x \mathcal{B}_x^* + \mathcal{E}_y \mathcal{B}_y^*) \right] \quad (2.32)$$

$$M_{zz}^{orbit} = \frac{\epsilon_0 c^2}{4\omega} \Re \left[-i \iint \rho d\rho d\phi (-\mathcal{B}_x^* \partial_\phi \mathcal{E}_y + \mathcal{E}_y \partial_\phi \mathcal{B}_x^* - \mathcal{E}_x \partial_\phi \mathcal{B}_y^* + \mathcal{B}_y^* \partial_\phi \mathcal{E}_x) \right] \quad (2.33)$$

Se arată în continuare că această separare are sens fizic. Se consideră efectele unui element birefringent care are o axă 'rapidă' și o axă 'lentă' cu indicii de refracție n_r și respectiv n_l . Pentru simplitate luăm ca aceste axe să fie x și y respectiv. Efectul asupra câmpurilor de către elementul birefringent este adăugarea unei modificare de fază:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x &\rightarrow \mathcal{E}_x \exp(in_r kL) & \mathcal{B}_y &\rightarrow \mathcal{B}_y \exp(in_r kL) \\ \mathcal{E}_y &\rightarrow \mathcal{E}_y \exp(in_l kL) & \mathcal{B}_x &\rightarrow \mathcal{B}_x \exp(in_l kL)\end{aligned}$$

, unde k este numărul de undă, iar L e distanța de propagare. Se poate observa că această transformare modifică partea de spin (2.32) și lasă nemodificată partea orbitală (2.33). Dacă considerăm un element care modifică faza azimutală a câmpurilor:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_x &\rightarrow \mathcal{E}_x \exp(im\phi) & \mathcal{B}_y &\rightarrow \mathcal{B}_y \exp(im\phi) \\ \mathcal{E}_y &\rightarrow \mathcal{E}_y \exp(im\phi) & \mathcal{B}_x &\rightarrow \mathcal{B}_x \exp(im\phi)\end{aligned}$$

, atunci se modifică partea orbitală (2.33), iar partea de spin (2.32) rămâne nemodificată. Menționăm că această demonstrație este validă doar în aproximarea paraxială.

2.4 Aplicație numerică: Dinamica electronului în câmpuri HG și LG

În această secțiune ne propunem să obținem traекторia unui electron, care interacționează prin forța Lorentz cu câmpul electromagnetic caracteristic fasciculelor HG și LG.

Pentru a ne asigura că o tratare nerelativistă este posibilă, considerăm laseri ce generează câmpuri cu $E_0 = 10^8 \text{ V/m}$ și evaluăm raportul:

$$\frac{eA_0}{m_e c}$$

În care produsul dintre sarcina electronului și modulul potențialului vector eA_0 este impulsul cinematic al electronului într-un câmp electromagnetic. Din $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi$ $\xrightarrow{\text{Et.Coulomb}}$ $A_0 = \frac{E_0}{\omega}$. Alegând un laser ce generează lumină roșie ($\lambda = 750\text{nm}$):

$$\frac{eA_0}{m_e c} = \frac{eE_0\lambda}{2\pi m_e c^2} \simeq 2.33 \cdot 10^{-5}$$

Urmează acum să rezolvăm numeric ecuația:

$$m_e \ddot{\mathbf{r}} = -e(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (2.34)$$

Aplicația numerică o realizăm în Python, pentru câmpuri HG, folosind următoarele biblioteci:

- **Sympy** - pentru manipularea simbolică a ecuațiilor
- **Numpy** - manipularea vectorilor omogeni (arrays)
- Modulul *integrate* din **Scipy** pentru a rezolva numeric sistemul de ecuații omogene
- **Matplotlib** - pentru reprezentările grafice

În primul rând trebuie să definim funcțiile vectoriale $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ și $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ pornind de la forma analitică a câmpului HG (2.13a). Pentru aceasta folosim **Sympy** și ecuațiile (2.1)³.

```

import numpy as np
import sympy as smp
from sympy import hermite as H

x, y, z, w0, k, z0 = smp.symbols('x y z omega_0 k z_0', real = True)
m, p = smp.symbols('m p', integer = True, positive = True)
w, R = smp.symbols('omega R', cls = smp.Function)
w = w(z)
R = R(z)

E_x = H(m, smp.sqrt(2)*x / w)*H(p, smp.sqrt(2)*y / w)* w0/w * smp.exp(- (x**2
    + y**2) / w**2) * smp.exp(smp.I*(k*z + (1 + m + p) * smp.atan2(z, z0))) *
    smp.exp(smp.I * k * (x**2 + y**2) / (2*R))

E_x = E_x.subs([(w, w0*smp.sqrt(1 + (z/z0)**2)), (R, z*(1 + (z0/z)**2))])

E_y = 0

E_z = smp.I/k * smp.diff(E_x, x).simplify()

iw_B_x = smp.diff(E_z, y) - smp.diff(E_y, z)

iw_B_y = -smp.diff(E_z, x) + smp.diff(E_x, z)

iw_B_z = smp.diff(E_y, x) - smp.diff(E_x, y)

E_x_f = smp.lambdify([m, p, z0, w0, k, x, y, z], E_x)
E_y_f = smp.lambdify([m, p, z0, w0, k, x, y, z], E_y)
E_z_f = smp.lambdify([m, p, z0, w0, k, x, y, z], E_z)

iw_B_x_f = smp.lambdify([m, p, z0, w0, k, x, y, z], iw_B_x)
iw_B_y_f = smp.lambdify([m, p, z0, w0, k, x, y, z], iw_B_y)
iw_B_z_f = smp.lambdify([m, p, z0, w0, k, x, y, z], iw_B_z)

```

Urmează acum secțiunea numerică, care începe cu definirea constantelor, scalarea ecuațiilor de mișcare și transformarea a celor 3 ecuații diferențiale de ordinul 2 (2.34) în 6 de ordinul unu:

$$\begin{aligned}
q_0 &= -e & m_0 &= m_e & d_0 &= 1\mu m & t_0 &= 10^{-13} s \\
E_0 &= 10^8 V/m & B_0 &= \frac{1}{c}E_0 & \alpha &= \frac{1}{137.036} & v_0 &= 10\alpha c.
\end{aligned}$$

³Considerăm $\mathcal{E}_y = 0$ și că dependența principală a lui $\mathcal{E}_z \sim \mathcal{E}_x$ față de z este de forma e^{ikz} . Astfel, $\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} \simeq ik\mathcal{E}_z$. Cu toate acestea, (2.1) $\Leftrightarrow \mathcal{E}_z = \frac{i}{k} \frac{\partial \mathcal{E}_x}{\partial x}$

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{v}}} = -\frac{E_0 e t_0}{m v_0} (\tilde{\mathbf{E}} + \frac{v_0}{c} \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}}), & \tilde{v}_i = -K_1 (\tilde{E}_i + 10\alpha \epsilon_{ijk} \tilde{v}_j \tilde{B}_k), & K_1 \approx 7.3 \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \frac{v_0 t_0}{d_0} \tilde{\mathbf{v}}, & \tilde{x}_i = K_2 \tilde{v}_i, & K_2 \approx 5.3 \end{cases}$$

De asemenea se importeaza biblioteca pentru plotare **Matplotlib** și funcția care va rezolva efectiv sistemul de ecuații diferențiale *solve_ivp* din modulul *integrate* al bibliotecii **Scipy**:

```
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import solve_ivp

c = 13.7 # v0 (zece viteze atomice) ----- viteza luminii in vid
alpha = 1/137.036
la = 0.75 #micrometru-----lungimea de unda pt rosu
w_0 = 2*la #micrometru ----- largimea fasciculului
k = 2*np.pi/la # 1/micrometru----- modulul vectorului de unda in directia z
w = c * k
z_0 = np.pi*w_0**2 / la #micrometru-----distanta_Rayleigh
K_1 = 7.3; K_2 = 5.3
```

Definim funcția *field(t, r, m, p)*, care întoarce funcțiile vectoriale $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ și $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$ căutate:

```
def field(t, r, m, p):
    """
    Function that returns
    (E, B) at time t at point r
    r = (x[0], x[1], x[2])
    m, p integers greater than zero
    """
    E = []
    B = []

    E.append(E_x_f(m, p, z_0, w_0, k, r[0], r[1], r[2]))
    E.append(E_y_f(m, p, z_0, w_0, k, r[0], r[1], r[2]))
    E.append(E_z_f(m, p, z_0, w_0, k, r[0], r[1], r[2]))

    B.append(-1j / w * iw_B_x_f(m, p, z_0, w_0, k, r[0], r[1], r[2]))
    B.append(-1j / w * iw_B_y_f(m, p, z_0, w_0, k, r[0], r[1], r[2]))
    B.append(-1j / w * iw_B_z_f(m, p, z_0, w_0, k, r[0], r[1], r[2]))

    return np.nan_to_num(np.real(np.array([E, B])*np.exp(-1j*w*t)))
```

Acum urmează să rezolvăm efectiv sistemul de ecuații $\frac{dS}{dt} = \mathbf{f}(t, \mathbf{S})$, sau scris explicit în formă matricială:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{v}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_2 v_1 \\ K_2 v_2 \\ K_2 v_3 \\ -K_1 (E_1 + v_2 B_3 - v_3 B_2) \\ -K_1 (E_2 - v_1 B_3 + v_3 B_1) \\ -K_1 (E_3 + v_1 B_2 - v_2 B_1) \end{bmatrix}$$

, unde E_i și B_i sunt funcții de $(t, [x_1, x_2, x_3])$. Sistemul de ecuații îl rezolvăm cu metoda **Radau**, care este o metodă implicită Runge-Kutta de ordin 5 [11]. De asemenea, pentru rezolvare e necesară definirea condițiilor initiale $S_0 = [x_1^0, x_2^0, x_3^0, v_1^0, v_2^0, v_3^0]$:

```
m, p = (1, 0) #indicii modului HG

E = lambda t, r : field(t, r, m, p)[0]
B = lambda t, r : field(t, r, m, p)[1]

def dSdt(t, S):
    x1, x2, x3, v1, v2, v3 = S

    return [K_2 * v1,
            K_2 * v2,
            K_2 * v3,
            -K_1 * (E(t, np.array([x1, x2, x3]))[0] + 10*alpha*(v2*B(t,
                np.array([x1, x2, x3]))[2] - v3*B(t, np.array([x1, x2,
                x3]))[1])),
            -K_1 * (E(t, np.array([x1, x2, x3]))[1] - 10*alpha*(v1*B(t,
                np.array([x1, x2, x3]))[2] + v3*B(t, np.array([x1, x2,
                x3]))[0])),
            -K_1 * (E(t, np.array([x1, x2, x3]))[2] + 10*alpha*(v1*B(t,
                np.array([x1, x2, x3]))[1] - v2*B(t, np.array([x1, x2,
                x3]))[0]))]

x1_0, x2_0, x3_0 = np.array([1., -5., 0.05]) #x3_0 diferit de zero
v1_0, v2_0, v3_0 = np.array([0., 0.5, 0.])

S_0 = (x1_0, x2_0, x3_0, v1_0, v2_0, v3_0)

t0 = 0; tf = 3.5
t = np.linspace(t0, tf, 1024)
sol = solve_ivp(dSdt, (t0, tf), y0=S_0, method = 'Radau', t_eval=t, rtol
=1e-3, atol=1e-6)
```

După ce am rezolvat ecuațiile, reprezentăm grafic rezultatele:

```
plt.style.use(['science', 'notebook', 'grid'])
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize = (10, 8))

E_c = sol.y[3]**2 + sol.y[4]**2 + sol.y[5]**2
ax.plot(t, E_c, 'g')

ax.set_xlabel('$t \setminus (t_0)$', fontsize = 15)
ax.set_ylabel(r'$E_c \setminus (\frac{m_e v_0^2}{2})$', fontsize = 15)

# plt.savefig('HG_E_c.png', dpi=200)

plt.show()
```

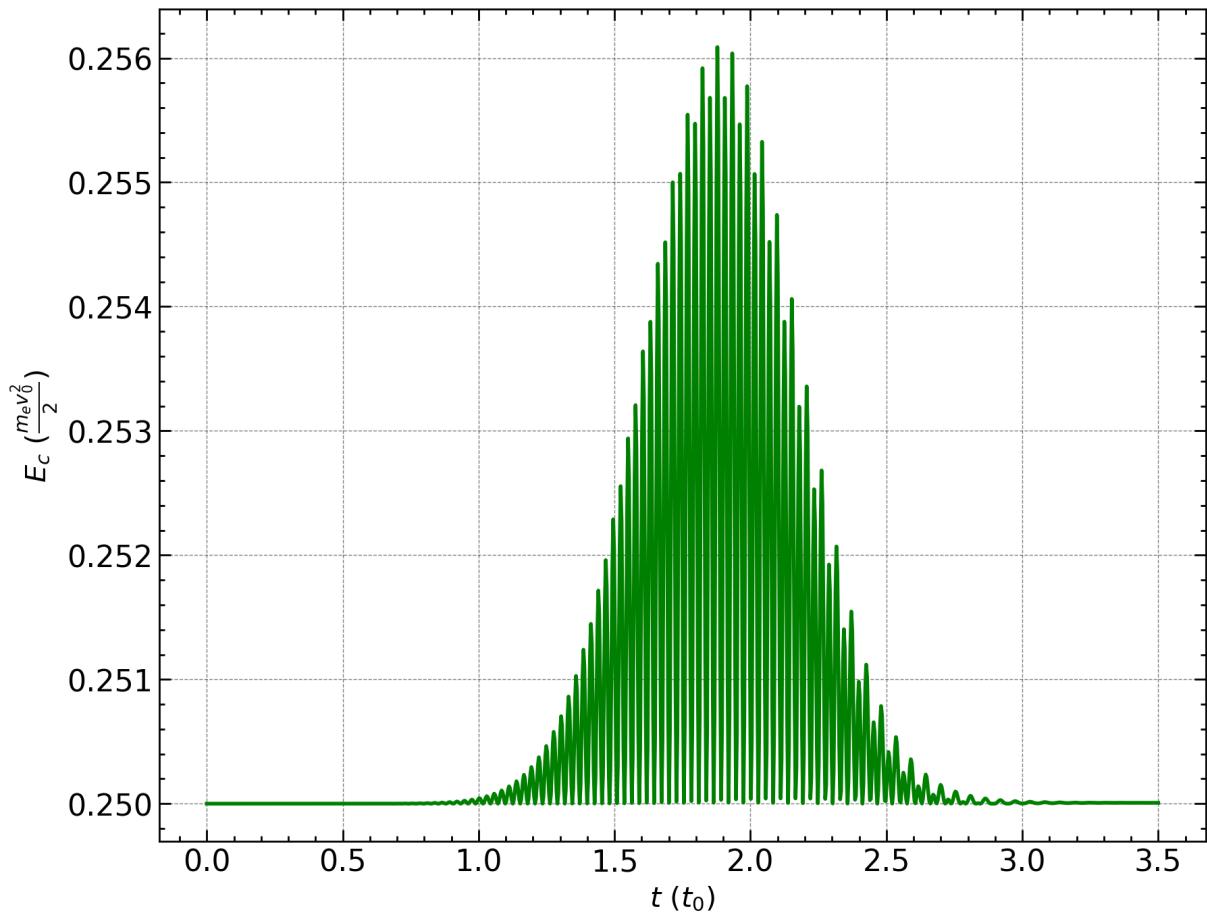


Figura 2.5: Energia cinetică funcție de timp

```

vx = sol.y[3]; vy = sol.y[4]; vz = sol.y[5]
r = np.array([x, y, z]).T
v = np.array([vx, vy, vz]).T
L = np.cross(r, v)
Ls = np.linalg.norm(L, axis=1)

plt.style.use(['science', 'notebook', 'grid'])
fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize = (10, 8))

ax.plot(t, Ls, 'r')

ax.set_xlabel('$t \backslash (t_0)$', fontsize = 15)
ax.set_ylabel(r'$|L| \backslash (m_e d_0 v_0)$', fontsize = 15)

#plt.savefig('HG_L.png', dpi=200)
plt.show()

```

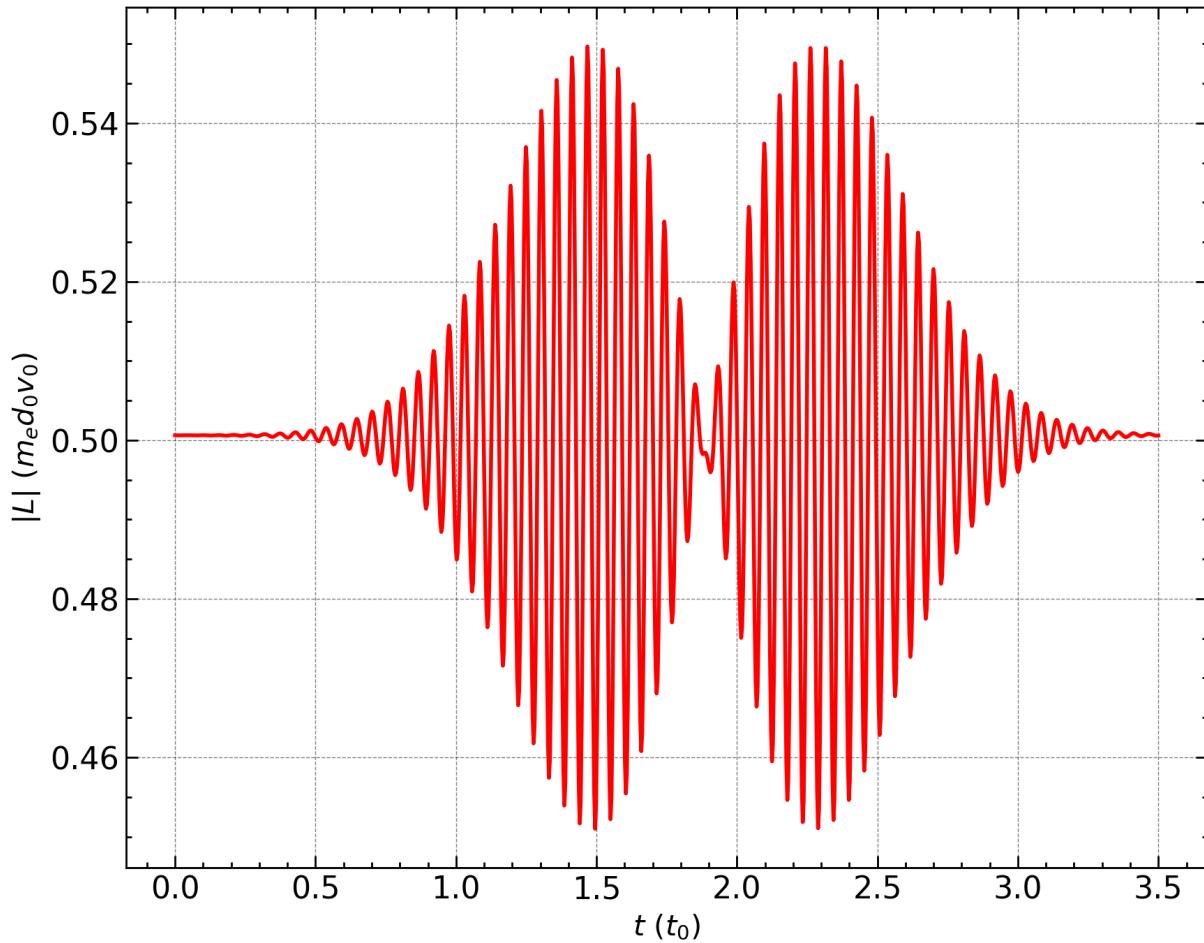


Figura 2.6: Modulul momentului cinetic al electronului funcție de timp

```

plt.style.use(['science', 'notebook', 'grid'])

x = sol.y[0]; y = sol.y[1]; z = sol.y[2]
fig = plt.figure(figsize = (10, 8))
plt.plot(t, sol.y[2])

plt.xlabel('$t \backslash (t_0)$', fontsize = 15)
plt.ylabel('$z \backslash (\mu m)$', fontsize = 15)

#plt.savefig('HG_zt.png', dpi=200)

plt.show()

```

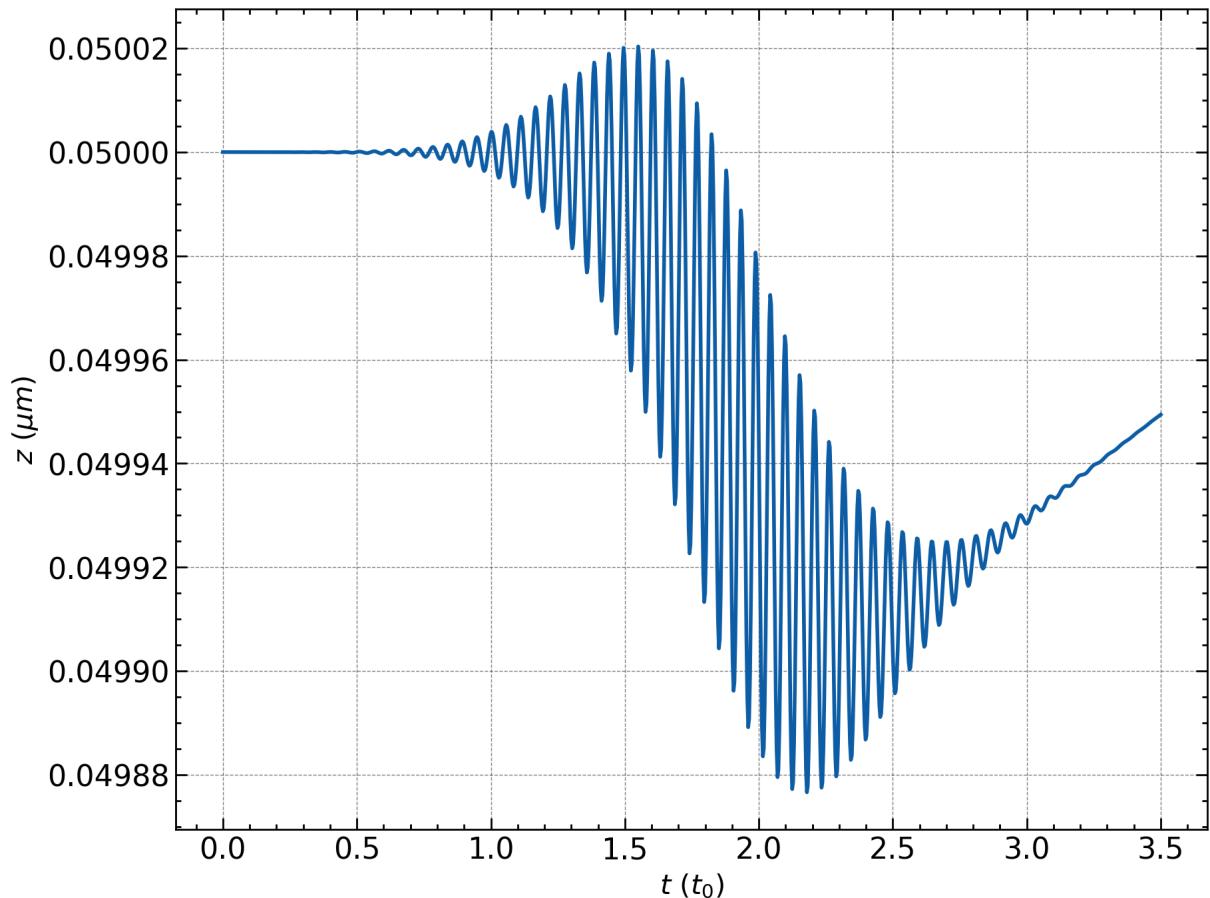


Figura 2.7: Coordonata z funcție de timp

```

plt.style.use(['default'])

fig, ax = plt.subplots(subplot_kw={"projection": "3d"}, figsize = (10, 10))

ax.plot3D(x, y, z.min())

ax.plot(x, y, z, "r", markersize=5)

ax.set_title('HG({:}, {:}) $x_0$ = {:} $v_0$ = {:} $t \in$ [{:.2f},
{:,.2f}].format(m, p, S_0[:3], S_0[3:], t0, tf))

ax.set_xlim(x.min(), x.max())
ax.set_ylim(y.min(), y.max())
ax.set_zlim(z.min(), z.max())

ax.set_xlabel("x", labelpad = 20)
ax.set_ylabel("y", labelpad = 20)
ax.set_zlabel("z", labelpad = 20)

ax.view_init(elev=30, azim=70)

# plt.savefig('HG_3d.png', dpi=200)

```

```
plt.show()
```

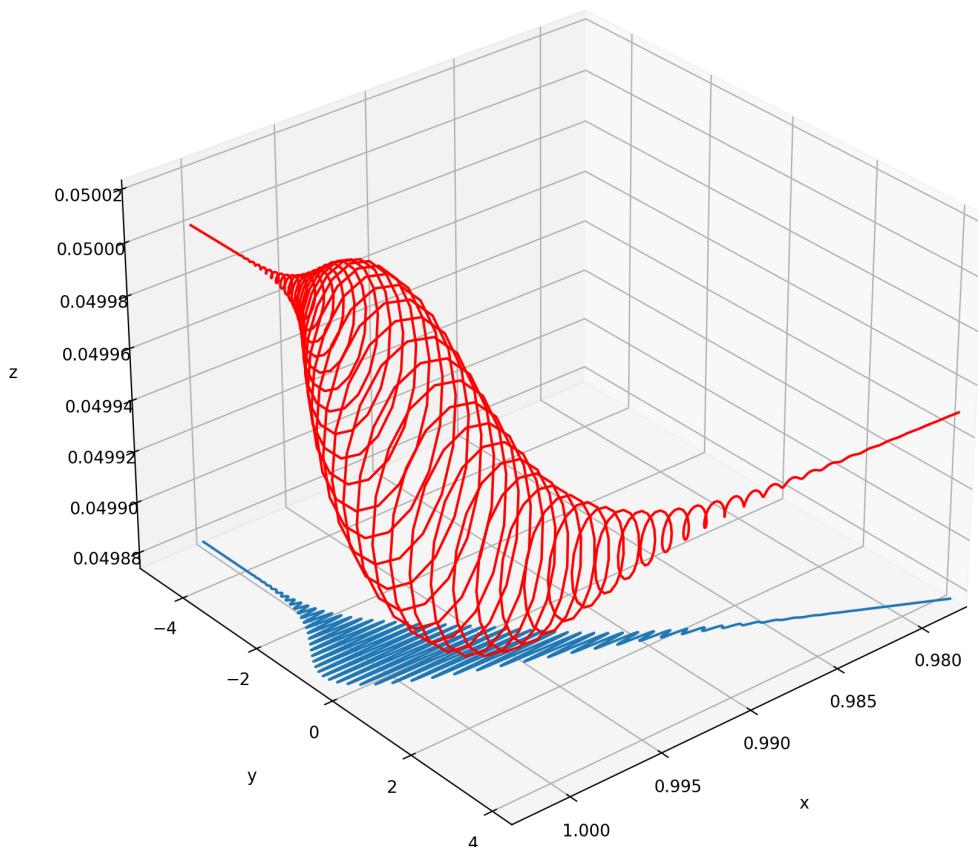


Figura 2.8: Traiectoria obținută pentru condițiile initiale $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ și modul HG(1, 0)

Se poate observa că electronul interacționează într-o zonă mică spațială, după care își continuă mișcarea ca particulă liberă. Este un comportament așteptat, deoarece fasciculele sunt puternic colimate în jurul originii (pentru lărgimea minimă a fasciculu de ordinul lungimii de undă). Aceasta se poate observa dacă ne uităm la figura (2.2).

Rezolvare similară se poate implementa pentru moduri LG, ținând cont de trecerea de la coordonate cilindrice la coordonate carteziene în secțiunea simbolică:

```
import numpy as np
import sympy as smp
from sympy import assoc_laguerre as L
```

```

r, fi, x, y, z, w0, k, z0 = smp.symbols('rho phi x y z omega_0 k z_0', real =
    True)
p, m = smp.symbols('p m', integer = True)
w, R = smp.symbols('omega R', cls = smp.Function)
w = w(z)
R = R(z)

E_x = w0/w * (smp.sqrt(2)*r/w)**smp.Abs(m) * L(p, smp.Abs(m), 2*r**2 / w**2) *
    smp.exp(- r**2 / w**2) * \
    smp.exp(smp.I*(k*z + (1 + smp.Abs(m) + 2*p)) * smp.atan2(z, z0)) *
    smp.exp(smp.I*m*fi) * smp.exp(smp.I * k * r**2 / (2*R))

E_x = E_x.subs([(w, w0*smp.sqrt(1 + (z/z0)**2)), (R, z*(1 + (z0/z)**2)), (r,
    smp.sqrt(x**2 + y**2)), (fi, smp.atan2(y, z))])

E_y = 0

E_z = smp.I/k * smp.diff(E_x, x).simplify()

```

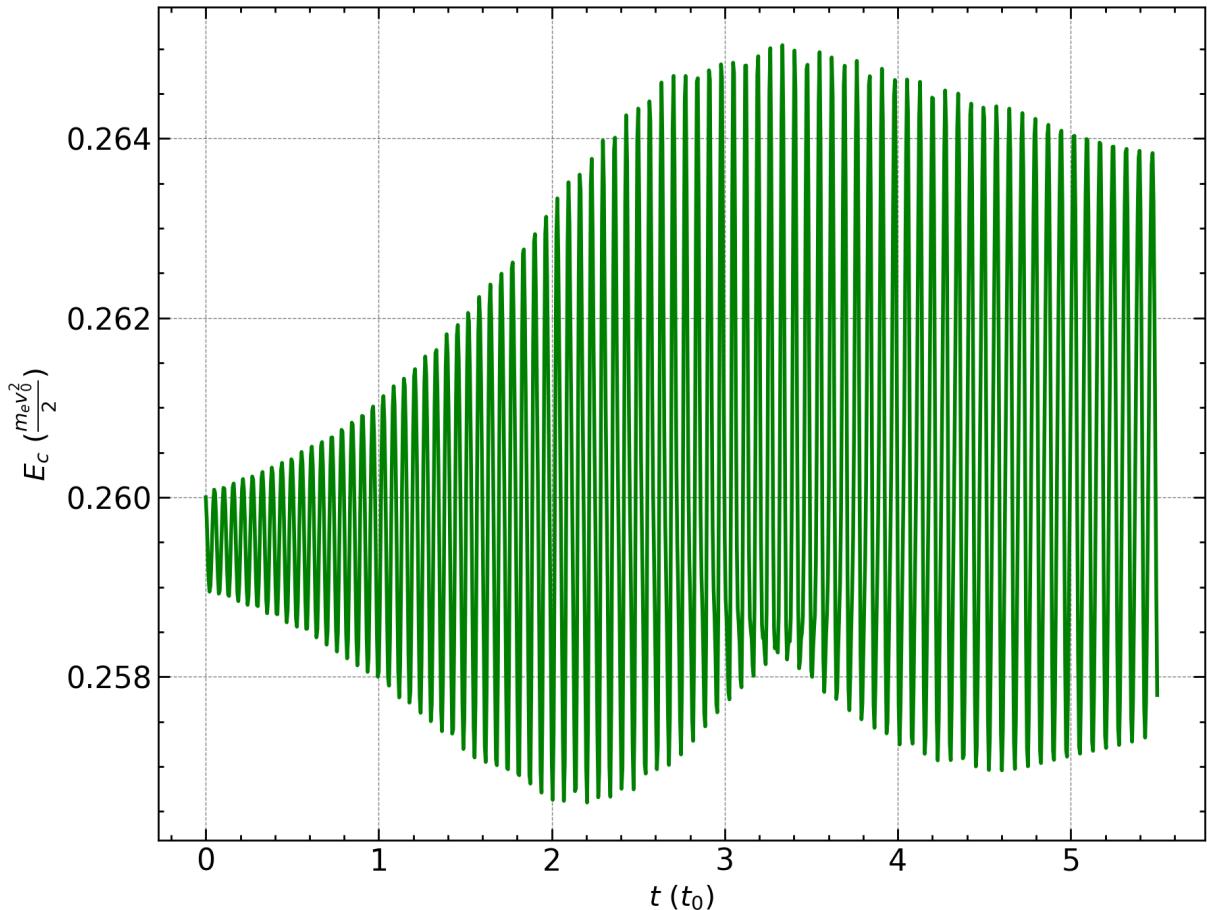


Figura 2.9: Energia cinetică funcție de timp

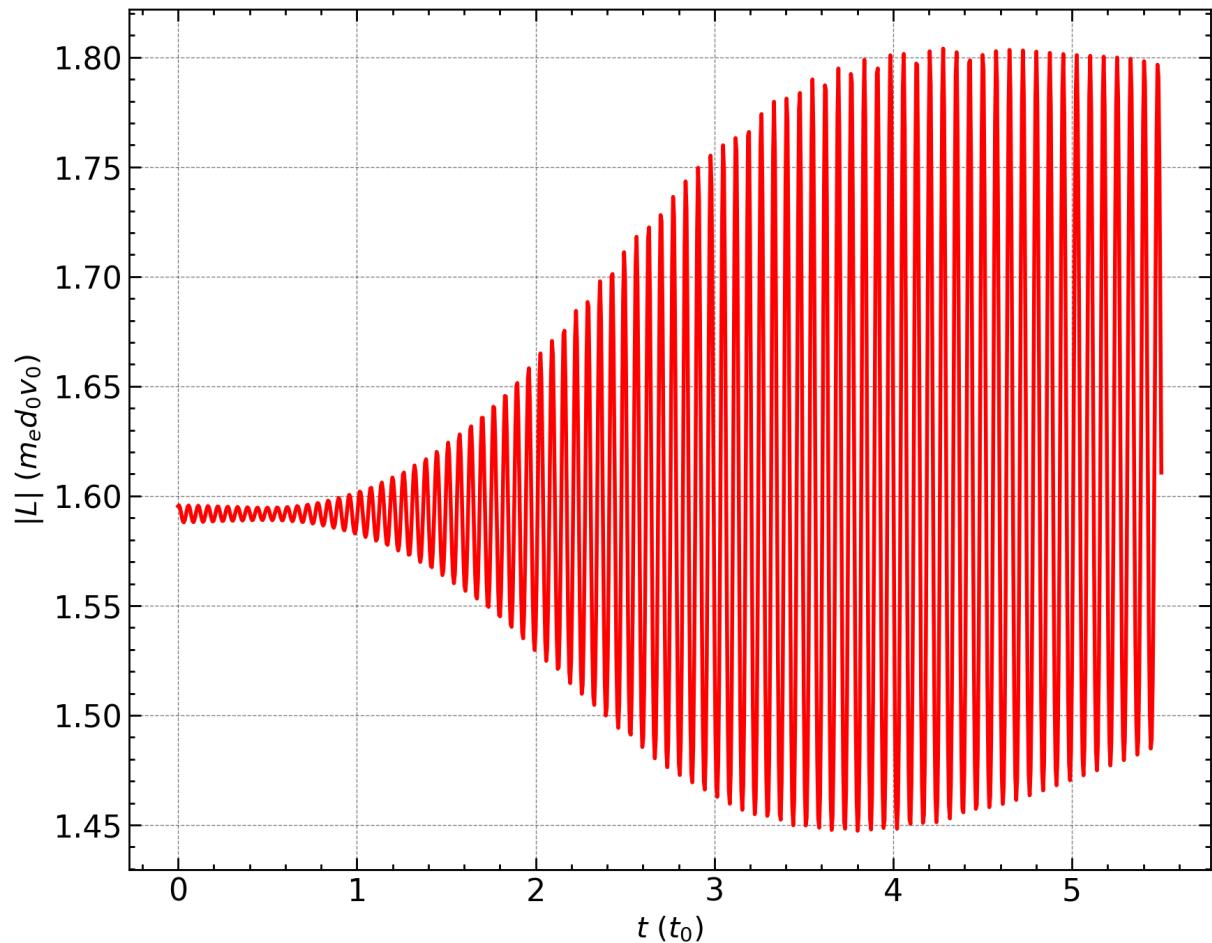


Figura 2.10: Momentul cinetic al electronului functie de timp

2.4. APLICAȚIE NUMERICĂ: DINAMICA ELECTRONULUI ÎN CÂMPURI HG SI LG23

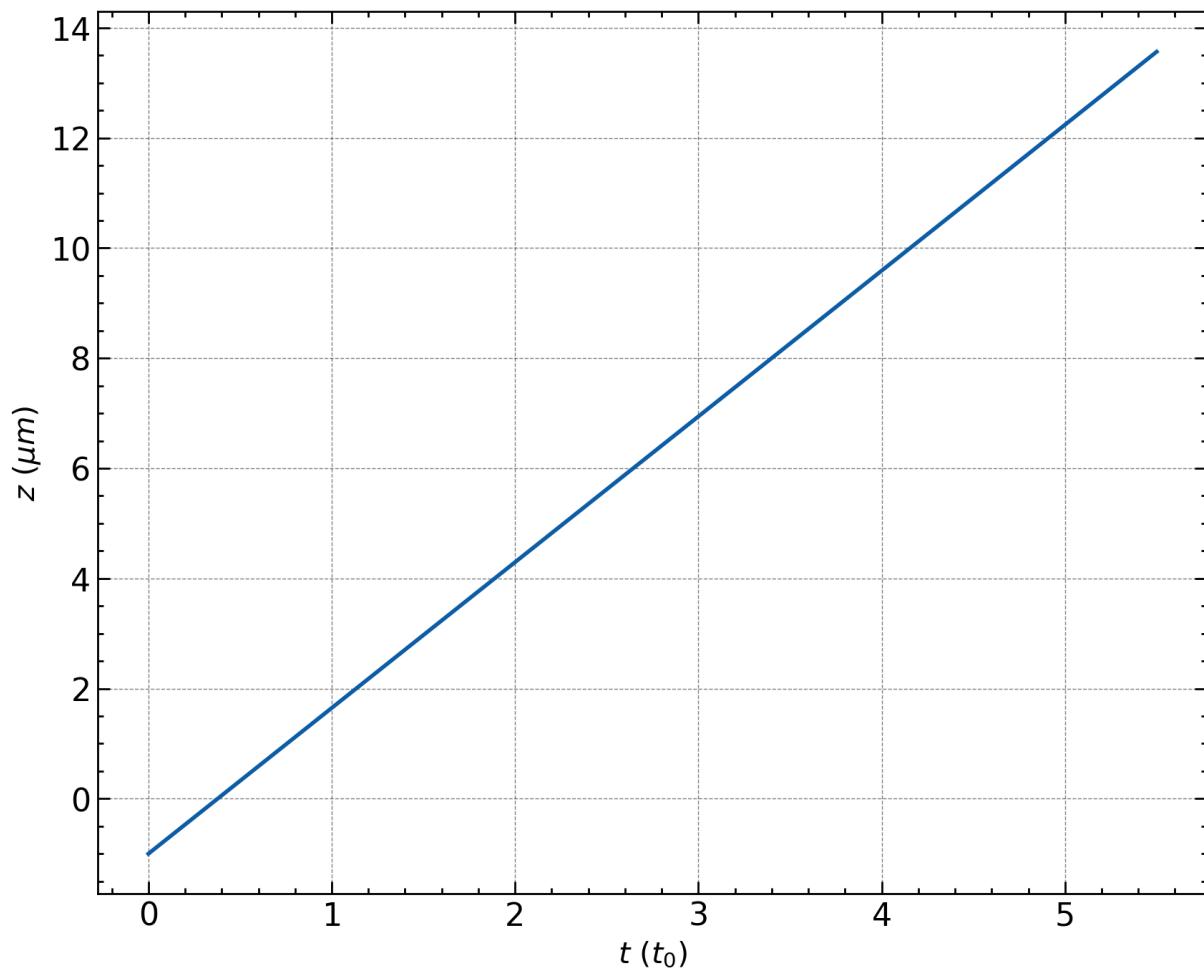


Figura 2.11: Coordonata z funcție de timp

$$\text{LG}(2,0) \quad \mathbf{x}_0 = (1.5, -3.0, -1.0) \quad \mathbf{v}_0 = (0.0, 0.1, 0.5) \quad t \in [0.00, 5.50]$$

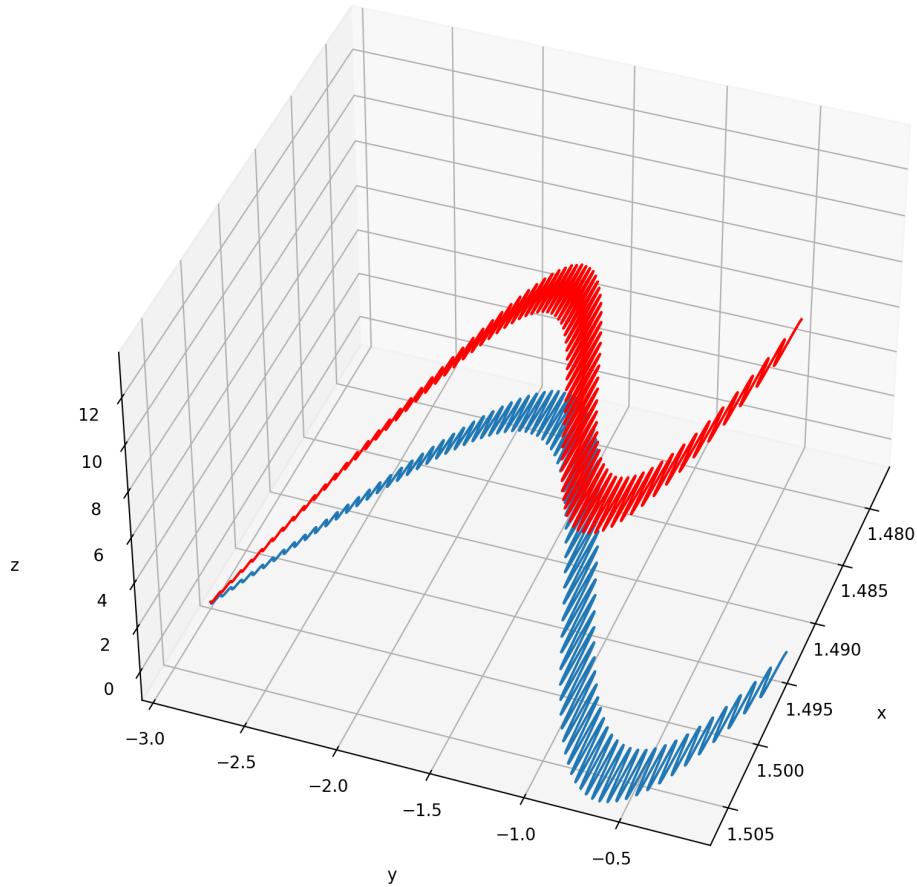


Figura 2.12: Traекторia obținută pentru condițiile inițiale $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ și modul $\text{LG}(2, 0)$

Tratarea cuantică

Câmpul electromagnetic liber este tratat în teoria cuantică prin analogie cu modul în care sistemele formate din particule sunt descrise în mecanica cuantică. Astfel, ca oricărui sistem de particule, câmpului electromagnetic liber i se asociază un *spațiu al stărilor* denumit *spațiul Fock* și notat \mathcal{U}_{Fock} , iar mărimilor fizice care caracterizează câmpul li se asociază *operatori hermitici* acționând în acest spațiu. Se asociază operatori potențialelor vector și scalar și, prin intermediul lor, câmpului electric și inducției magnetice. Sistemul fictiv la care se referă afirmațiile care urmează este câmpul electromagnetic închis într-o cutie de volum V și care satisface condițiile de periodicitate pe peretii cutiei. Rezultatele cu sens fizic se obțin în limita $V \rightarrow \infty$.

3.1 Cuantificarea undelor plane

Etalonarea Coulomb este folosită de obicei în mecanica cuantică nerelativistă, astfel se lucrează cu un singur operator vectorial $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t)$, un operator autoadjunct atașat potențialului vector, operator care acționează în spațiul stărilor câmpului electromagnetic și care are divergență egală cu zero (Et. Coulomb):

$$\nabla \cdot \hat{\mathbf{A}} = 0, \quad \hat{\phi} = 0 \quad (3.1)$$

Așa cum am menționat și în tratarea clasică, un *mod de oscilație* a undei plane e caracterizat de parametrii (în cazul nostru continuu) vectorul de undă \mathbf{k} (implicit și pulsăția $\omega = c|\mathbf{k}|$) și vectorul de polarizare $\boldsymbol{\epsilon}$, cu $\boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{k} = 0$. I se asociază unui *mod de oscilație* operatorul potențialului vector $\hat{\mathbf{A}}_{mod}(\mathbf{r}, t)$ cu expresia:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{C} [\boldsymbol{\epsilon} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{a}_{mod} + \boldsymbol{\epsilon}^* e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{a}_{mod}^\dagger], \quad (3.2)$$

unde operatorul \hat{a}_{mod} , denumit operator de anihilare asociat modului de oscilație respectiv, este un operator cu proprietatea:

$$[\hat{a}_{mod}, \hat{a}_{mod}^\dagger] = \hat{I}. \quad (3.3)$$

Vectorii $\boldsymbol{\epsilon}$ în general sunt complecsi și sunt aleși normați astfel încât $\boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 1$.

Câmpului electric și magnetic, ținând cont de ecuațiile lui Maxwell în vid, le sunt asociate operatorii:

$$\hat{E}_{mod}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{C}i\omega [\epsilon e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{a}_{mod} - \epsilon^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{a}_{mod}^\dagger] \quad (3.4)$$

$$\hat{B}_{mod}(\mathbf{r}, t) = i\mathcal{C}\mathbf{k} \times [\epsilon e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{a}_{mod} - \epsilon^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \hat{a}_{mod}^\dagger] \quad (3.5)$$

Operatorii asociați întregului câmp se obțin prin suprapunerea contribuțiilor tuturor modurilor de oscilație:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{mod} \hat{A}_{mod}(\mathbf{r}, t) \quad (3.6)$$

Suma \sum_{mod} este extinsă, asupra a două posibilități de polarizare ϵ_1 și ϵ_1 și ϵ_2 , cu $\epsilon_1 \cdot \epsilon_2$, atașate amândouă aceluiasi vector de propagare \mathbf{k} , și asupra tuturor vectorilor de propagare permise de condițiile de periodicitate. Explicitarea sumei ar cere completarea notației prin detalierea indicelui "mod" atașat operatorilor de anihilare și creare.

Diferitele moduri de oscilație se presupun a fi independente, proprietate oglindită în relațiile:

$$[\hat{a}_{mod1}, \hat{a}_{mod2}] = [\hat{a}_{mod1}, \hat{a}_{mod2}^\dagger] = 0, \quad (3.7)$$

relații valabile pentru orice două moduri de oscilație distințe.

Vom calcula energia totală a radiației conținută în cutie de volum V. Pentru claritate rescriem expresia câmpurilor \mathbf{E} , \mathbf{B} pentru cazul multimod ca:

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{mod} \mathcal{C}_{mod} i \omega_{mod} [\epsilon_{mod} e^{i(\mathbf{k}_{mod}\cdot\mathbf{r}-\omega_{mod}t)} \hat{a}_{mod} - \epsilon_{mod}^* e^{-i(\mathbf{k}_{mod}\cdot\mathbf{r}-\omega_{mod}t)} \hat{a}_{mod}^\dagger] \quad (3.8)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{mod} i \mathcal{C}_{mod} \mathbf{k}_{mod} \times [\epsilon_{mod} e^{i(\mathbf{k}_{mod}\cdot\mathbf{r}-\omega_{mod}t)} \hat{a}_{mod} - \epsilon_{mod}^* e^{-i(\mathbf{k}_{mod}\cdot\mathbf{r}-\omega_{mod}t)} \hat{a}_{mod}^\dagger] \quad (3.9)$$

Știind că densitatea de energie este: $\hat{\mathcal{W}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\epsilon_0 \hat{\mathbf{E}}^2}{2} + \frac{\hat{\mathbf{B}}^2}{2\mu_0}$, ne punem scopul să calculăm mai întâi contribuția termenului ce conține câmpul electric folosind (2.8). Pentru a evita confuziile, vom nota indicii de sumare peste moduri cu m_1 și m_2 :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{W}}_e(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\epsilon_0}{2} \sum_{m_1, m_2} \mathcal{C}_{m_1} \mathcal{C}_{m_2} \omega_{m_1} \omega_{m_2} \times \\ &[\epsilon_{m_1} \cdot \epsilon_{m_2} e^{i[(\mathbf{k}_{m_1} + \mathbf{k}_{m_2}) \cdot \mathbf{r} - (\omega_{m_1} + \omega_{m_2})t]} \hat{a}_{m_1} \hat{a}_{m_2} + \epsilon_{m_1}^* \cdot \epsilon_{m_2}^* e^{-i[(\mathbf{k}_{m_1} + \mathbf{k}_{m_2}) \cdot \mathbf{r} - (\omega_{m_1} + \omega_{m_2})t]} \hat{a}_{m_1}^\dagger \hat{a}_{m_2}^\dagger + \\ &\epsilon_{m_1} \cdot \epsilon_{m_2}^* e^{i[(\mathbf{k}_{m_1} - \mathbf{k}_{m_2}) \cdot \mathbf{r} - (\omega_{m_1} - \omega_{m_2})t]} \hat{a}_{m_1} \hat{a}_{m_2}^\dagger + \epsilon_{m_1}^* \cdot \epsilon_{m_2} e^{-i[(\mathbf{k}_{m_1} - \mathbf{k}_{m_2}) \cdot \mathbf{r} - (\omega_{m_1} - \omega_{m_2})t]} \hat{a}_{m_1}^\dagger \hat{a}_{m_2}^\dagger] \end{aligned} \quad (3.10)$$

În continuare calculăm media pe o perioadă a expresiei precedente, precum și integrala sa peste volumul V (pentru a obține energia totală din cutie). Calculul mediei pe o perioadă,

asa cum am discutat anterior la calculul mediei temporale a fluxului de moment cinetic (1.29) este:

$$\langle \hat{W}_e(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \hat{W}_e(\mathbf{r}, t) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (3.11)$$

Termenii care se integreaza efectiv sunt exponentialele dependente de timp, care dau rezultatul:

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^{\pm i(\omega_{m_1} + \omega_{m_2})t} dt = 0, \quad \frac{1}{T} \int_0^T e^{\pm i(\omega_{m_1} - \omega_{m_2})t} dt = \delta_{\omega_{m_1}, \omega_{m_2}} \quad (3.12)$$

astfel, primii doi termeni din expresia (2.10) se anuleaza, iar din sumele duble ale termenilor 3 și 4 supraviețuiesc termenii cu $\omega_{m_1} = \omega_{m_2}$.

Pentru a calcula energia totală din volumul V integrăm cei doi termeni rămași folosind relația:

$$\int_V e^{\pm (\mathbf{k}_{m_1} - \mathbf{k}_{m_2}) \cdot \mathbf{r}} dV = V \delta_{\mathbf{k}_{m_1}, \mathbf{k}_{m_2}} \quad (3.13)$$

Astfel, în urma integrării peste volum din suma dublă peste moduri supraviețuiesc doar termenii care au $\mathbf{k}_{m_1} = \mathbf{k}_{m_2}$. Deoarece vectorii de polarizare ϵ corespunzători unui mod sunt legați de \mathbf{k} , fiind ortogonali pe k , odată ce $\mathbf{k}_{m_1} = \mathbf{k}_{m_2}$ rezultă $\epsilon_{m_1} = \epsilon_{m_2}$, adică de fapt din suma dublă peste moduri rămâne o singură sumă. Folosind și normarea vectorilor de polarizare $\epsilon^* \cdot \epsilon = 1$, găsim:

$$\hat{W}_e = \frac{\epsilon_0}{2} \sum_{mod} \mathcal{C}_{mod}^2 \omega_{mod}^2 \left[\hat{a}_{mod}^\dagger \hat{a}_{mod} + \hat{a}_{mod} \hat{a}_{mod}^\dagger \right] \quad (3.14)$$

Pentru a calcula contribuția termenului magnetic la energie, observăm că singura diferență ar fi înlocuirea:

$$\epsilon_0 \omega_{mod} \epsilon_{mod} \longrightarrow \frac{1}{\mu_0} \mathbf{k}_{mod} \times \epsilon_{mod} \quad (3.15)$$

Deoarece pentru un mod dat \mathbf{k} și ϵ sunt ortogonali rezultă că modulul produsului vectorial $\mathbf{k}_{mod} \times \epsilon_{mod}$ este de fapt egal cu modulul lui \mathbf{k} , aunci se vede cu ușurință că:

$$\epsilon_0 |\omega_{mod} \epsilon_{mod}|^2 = \frac{1}{\mu_0} |\mathbf{k}_{mod} \times \epsilon_{mod}|^2 \quad (3.16)$$

, astfel că termenul electric și magnetic contribuie egal la energia totală. Atunci energia totală a sistemului este:

$$\hat{W} = \epsilon_0 V \sum_{mod} \mathcal{C}_{mod}^2 \omega_{mod}^2 \left[\hat{a}_{mod}^\dagger \hat{a}_{mod} + \hat{a}_{mod} \hat{a}_{mod}^\dagger \right] \quad (3.17)$$

Folosindu-ne de relația de comutare (2.3), putem scrie ecuația precedentă ca:

$$\hat{W} = 2\epsilon_0 V \sum_{mod} \mathcal{C}_{mod}^2 \omega_{mod}^2 \left(\hat{a}_{mod}^\dagger \hat{a}_{mod} + \frac{1}{2} \hat{I} \right) \quad (3.18)$$

Termenul constant ce conține operatorul unitate poate fi inclus într-o redefinire a nivelului zero:

$$\hat{W} = 2\epsilon_0 V \sum_{mod} \mathcal{C}_{mod}^2 \omega_{mod}^2 \hat{a}_{mod}^\dagger \hat{a}_{mod} \quad (3.19)$$

Expresia operatorului energie câmpului electromagnetic din volumul V arată la fel ca operatorul energiei unui sistem de oscilatori liniari armonici pentru care a fost redefinită energia de zero:

$$\hat{H}_{em} = \sum_{mod} \hat{H}_{mod} = \sum_{mod} \hbar \omega_{mod} \hat{a}_{mod}^\dagger \hat{a}_{mod} \quad (3.20)$$

Prin compararea celor două relații precedente se observă că (alegem \mathcal{C} să fie real) $\mathcal{C} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega V}}$. Astfel, expresia operatorului $\hat{\mathbf{A}}$ devine:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{mod} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 \omega_{mod} V}} \left[\boldsymbol{\epsilon}_{mod} e^{i(\mathbf{k}_{mod} \cdot \mathbf{r} - \omega_{mod} t)} \hat{a}_{mod} + \boldsymbol{\epsilon}_{mod}^* e^{-i(\mathbf{k}_{mod} \cdot \mathbf{r} - \omega_{mod} t)} \hat{a}_{mod}^\dagger \right] \quad (3.21)$$

Dacă ignorăm prezența celorlalte moduri de oscilație, definim un spațiu al stărilor atașat unui singur mod de oscilație, spațiu în care vectorii proprii ai lui \hat{H}_{mod} formează o bază. Ecuația de valori proprii asociată operatorului \hat{H}_{mod} o vom reda cu notăriile de mai jos:

$$\hat{H}_{mod} |n; \text{ mod}\rangle = n\hbar\omega |n; \text{ mod}\rangle, \quad n \text{ întreg} \geq 0. \quad (3.22)$$

Energia fiecărui mod de oscilație este deci cuantificată. Din interpretarea pe care teoria cuantică o dă valorilor proprii ale operatorului asociat unei observabile, rezultă că energia unui mod de oscilație nu poate fi decât un multiplu al energiei elementare $\hbar\omega_{mod}$ (cuantă de energie). Numărul n este denumit număr de ocupare sau număr de fotoni al modului "mod". Vectorii se presupun normați, iar ortogonalitatea vectorilor care corespund la valori proprii diferite,

$$\langle n; \text{ mod} | n'; \text{ mod}\rangle = \delta_{nn'}, \quad (3.23)$$

decongură din caracterul autoadjunct al operatorului energie.

Pentru fiecare mod de oscilație, se definește și un operator al numărului de fotoni, direct legat de operatorul energiei,

$$\hat{N}_{mod} \equiv \hat{a}_{mod}^\dagger \hat{a}_{mod}. \quad (3.24)$$

Vectorii proprii ai operatorului numărului de fotoni (totuna cu vectorii proprii ai energiei) pot fi obținuți prin aplicarea repetată a operatorului de creare asupra vectorului $|0; mod\rangle$, care descrie starea de vid pentru modul de oscilație considerat:

$$|n; mod\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0; mod\rangle \quad (3.25)$$

Se presupune că vectorul $|0; mod\rangle$ este normat și atunci constanta din expresia precedentă asigură normarea vectorului $|n\rangle$, implicată de relația (2.23). De asemenea relația (2.25) implică alegerea unui factor de fază pentru fiecare vector relativ la vectorul $|0; mod\rangle$. Este important de menționat că starea artificială $|0; mod\rangle$, aici introdusă ca un artificiu matematic, nu reprezintă starea de vacuum a câmpului electromagnetic; semnificația fizică a acestei diferențe este aceea că nu este posibil ca un sistem să genereze spontan un mod. Relațiile care redau modul de acțiune al operatorilor \hat{a}_{mod} și \hat{a}_{mod}^\dagger asupra unui vector $|n; mod\rangle$ (vezi cuantificarea oscillatorului liniar armonic),

$$\begin{aligned} \hat{a}_{mod} |n; mod\rangle &= \sqrt{n} |n-1; mod\rangle, \quad (n \neq 0), \quad \hat{a}_{mod} |0; mod\rangle \equiv |\text{zero}\rangle, \\ \hat{a}_{mod}^\dagger |n; mod\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1; mod\rangle. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Prin $|\text{zero}\rangle$ a fost notat vectorul zero al spațiului Fock.

Dacă ținem seama de existența tuturor modurilor de oscilație, spațiul stărilor câmpului electromagnetic se prezintă ca fiind produsul direct de spații asociate fiecărui mod. O bază a acestui spațiu o formează vectorii produs direct

$$|\text{Fock}\rangle \equiv \prod_{mod} \otimes |n; mod\rangle \equiv |n_1, n_2, \dots, n_p, \dots\rangle. \quad (3.27)$$

Se observă în relația de mai sus că acești vectori sunt caracterizați printr-un sir infinit de întregi nenegativi, câte un întreg pentru fiecare mod de oscilație.

Un vector Fock este vector propriu al energiei (2.20) corespunzător valorii proprii:

$$W_{\text{Fock}} = \sum_{mod} n_{mod} \hbar \omega_{mod}. \quad (3.28)$$

Vectorii Fock de asemenea sunt normați, iar vectorii distincți sunt reciproc ortogonali. Din vectorii Fock se construiesc *stările staționare* ale câmpului electromagnetic, descrise de vectorii de stare

$$|\psi_{stat}^{\text{Fock}}\rangle = |\text{Fock}\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} W_{\text{Fock}} t} \quad (3.29)$$

Starea de *vid* a întregului câmp, notată $|\text{vid}\rangle$, corespunde la valori nule ale tuturor numerelor de ocupare.

3.2 Cuantificarea modurilor LG

Cuantificarea modurilor LG se face printr-un calcul similar pornind de la forma potențialului vectorial $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ dezvoltat în modurile sus menționate:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k, \lambda, p, m} \left\{ \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(k) a_{k, \lambda, p, m} u_{pm}(\rho, \phi, z) \exp(-i\omega t) + c.c \right\} , \quad (3.30)$$

unde $a_{k, \lambda, p, m} u_{pm}(\rho, \phi, z)$ reprezintă modul pm (vezi ecuația (1.14) cu unica modificare că $\mathbf{E}_0 \rightarrow C_p^{|m|}$, unde $C_p^{|m|}$ e coeficientul de normare) ponderat cu coeficientul $a_{k, \lambda, p, m}$, λ reprezintă polarizarea, iar *c.c* este conjugata complexă a primului termen. E important de menționat că suma se face după modulul vectorilor de undă, propagarea fiind fixată în direcția z (consecință directă a aproximăției paraxiale).

Urmând mersul calculului ca în cazul cuantificării undelor plane se ajunge la următoarele mărimi de interes cuantificate [12]:

$$\hat{H}_{em} = \sum_{k, \lambda, p, m} \hbar \omega \hat{a}_{pm}^{\dagger(\lambda)}(k) \hat{a}_{pm}^{(\lambda)}(k) \quad (3.31)$$

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{k, \lambda, p, m} \left(\frac{\hbar}{\epsilon_0 c k V} \right)^{1/2} \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(k) \hat{a}_{pm}^{(\lambda)}(k) u_{pm}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + c.h \quad (3.32)$$

$$\hat{\mathbf{E}}^\perp(\mathbf{r}, t) = \sum_{k, \lambda, p, m} i \left(\frac{\hbar c k}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(k) \hat{a}_{pm}^{(\lambda)}(k) u_{pm}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + c.h \quad (3.33)$$

$$\hat{\mathbf{B}}^\perp(\mathbf{r}, t) = \sum_{k, \lambda, p, m} i \left(\frac{\hbar k}{\epsilon_0 c V} \right)^{1/2} \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(k) (\hat{k} \times \hat{a}_{pm}^{(\lambda)}(k)) u_{pm}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + c.h. \quad (3.34)$$

Notăția \perp sugerează direcția transversală față de direcția de propagare. V reprezintă volumul de cuantificare, iar *c.h* conjugata complexă a primului termen în fiecare caz. Evident operatorii de creare și anihilare $\hat{a}_{pm}^{(\lambda)}(k)$, $\hat{a}_{pm}^{\dagger(\lambda)}(k)$ respectă regulile de comutare statisticii Bose-Einstein:

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}_{pm}^{(\lambda)}(k), \hat{a}_{p'm'}^{(\lambda')}(k') \right] &= 0 \\ \left[\hat{a}_{pm}^{\dagger(\lambda)}(k), \hat{a}_{p'm'}^{\dagger(\lambda')}(k') \right] &= 0 \\ \left[\hat{a}_{pm}^{(\lambda)}(k), \hat{a}_{p'm'}^{\dagger(\lambda')}(k') \right] &= \delta_{k, k'} \delta_{\lambda, \lambda'} \delta_{p, p'} \delta_{m, m'} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Un mod particular a câmpului EM e reprezentat de ketul $|n(k, \lambda, p, m)\rangle$, unde n este numărul de ocupare. O stare generală a câmpului EM este produsul direct al tuturor modurilor ce creează câmpul:

$$|n_1(k_1, \lambda_1, p_1, m_1)\rangle \otimes |n_2(k_2, \lambda_2, p_2, m_2)\rangle \dots \equiv |n_1(k_1, \lambda_1, p_1, m_1), n_2(k_2, \lambda_2, p_2, m_2)\rangle \quad (3.36)$$

¹ $C_p^{|m|} = \omega_0 \sqrt{\frac{2^{|m|+1} p!}{\pi (p+|m|)!}}$

Aplicație: Sisteme atomice simple în interacție cu moduri helicoidale

Procesul de care ne ocupăm este generarea de armonice de ordinul II, ce va fi descris în cadrul teoriei perturbațiilor a mecanicii cuantice. Folosim expresiile câmpului cuantificat prezentate în secțiunea precedentă, iar elemente de teoria perturbațiilor sunt discutate în anexă.

Ca și în cazul secțiunii precedente, partea teoretică urmează prezentarea din [12]. Procesul pe care îl studiem constă în absorbția și emisia de către atom a unui foton cu frecvență egală cu dublul frecvenței fotonilor din fascicul incident, sistemul atomic rămânând în starea inițială; pentru conservarea energiei se vede deci că va fi necesară absorbția a doi fotoni.

Astfel, putem scrie acum starea inițială și, respectiv, finală ale sistemului total, atom plus câmp cuantificat.

$$|i\rangle = |E_0\rangle \otimes |n(\Lambda), 0(\Lambda')\rangle \quad (4.1)$$

$$|f\rangle = |E_0\rangle \otimes |(n-2)(\Lambda), 1(\Lambda')\rangle. \quad (4.2)$$

Cu Λ, Λ' am notat ansamblul numerelor cuantice ale fotonilor implicați în proces

$$\Lambda \equiv k, \lambda, p, m, \quad \Lambda' \equiv k', \lambda', p', m'. \quad (4.3)$$

iar $|E_0\rangle$ este starea sistemului atomic, aceeași înainte și după tranziție.

Hamiltonianul total al sistemului atomic va fi

$$\hat{H} = \hat{H}_{at} + \hat{H}_{em} + \hat{H}_i \quad (4.4)$$

unde H_{at} este hamiltonianul sistemului atomic, pe care nu îl vom detalia aici, H_{em} este hamiltonianul câmpului electromagnetic definit în (3.31). Hamiltonianul de interacție va fi scris folosind aproximarea dipolară. Presupunem că sistemul atomic este situat în fascicul helicoidal, în punctul de coordonate $\mathbf{r} \equiv (r, \phi, z)$. Deoarece mărimea sistemului atomic este foarte mică față de lungimea de undă a câmpului electromagnetic, atomul percep câmpul electric ca fiind omogen, hamiltonianul de interacție fiind astfel, în aproximarea dipolară,

$$\hat{H}_i = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \hat{\mathbf{E}}^\perp(\mathbf{r}) \quad (4.5)$$

unde $\boldsymbol{\mu}$ este momentul de dipol al sistemului atomic. Pentru simplitate, vom transcrie expresia câmpului electric (3.33) în forma prescurtată

$$\hat{\mathbf{E}}^\perp(\mathbf{r}, t) = \sum_{\rho} \boldsymbol{\varepsilon}_{\rho}(\mathbf{r}) \hat{a}_{\rho} e^{-i\omega_{\rho} t} + c.h. \quad (4.6)$$

unde cu ρ am notat mulțimea numerelor cuantice, iar $\boldsymbol{\varepsilon}_\rho$ este notația prescurtată

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\rho(\mathbf{r}) \equiv \left(\frac{\hbar ck}{\epsilon_0 V} \right)^{1/2} \boldsymbol{\epsilon}^{(\lambda)}(k) u_{pm}(\mathbf{r}) \quad (4.7)$$

Este convenabil să scriem produsul scalar $\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$ ca o contracție după componente carteziene

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_\rho = \mu_i \varepsilon_{\rho,i} \quad (4.8)$$

Astfel, hamiltonianul de interacție devine

$$\hat{H}_i = - \sum_\rho (\hat{\mu}_i \varepsilon_{\rho,i}(\mathbf{r}) \hat{a}_\rho e^{-i\omega_\rho t} + \hat{\mu}_i \varepsilon_{\rho,i}^*(\mathbf{r}) \hat{a}_\rho^\dagger e^{i\omega_\rho t}) \quad (4.9)$$

Folosind expresia (A.13) a seriei de perturbație a amplitudinii de tranziție, observăm cu ușurință că procesul care ne interesează pe noi, în care sunt absorbiți doi fotoni de frecvență ω și este emis un foton de frecvență 2ω poate fi descris în ordinul minim 3 al teoriei de perturbație.

$$M_{fi}^{(3)} = \frac{1}{(i\hbar)^3} \langle E_0 | \otimes \langle (n-2)(\Lambda), 1(\Lambda') | \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 \times \quad (4.10)$$

$$\hat{H}_I(t_1) \hat{H}_I(t_2) \hat{H}_I(t_3) |E_0\rangle \otimes |n(\Lambda), 0(\Lambda')\rangle \quad (4.11)$$

În ecuația precedentă $\hat{H}_I(t)$ reprezintă acum hamiltonianul de interacție \hat{H}_i scris în *formalismul de interacție*

$$H_I(t) = - \sum_\rho (\hat{\mu}_{Ii}(t) \varepsilon_{\rho,i}(\mathbf{r}) \hat{a}_\rho e^{-i\omega_\rho t} + \hat{\mu}_{Ii}(t) \varepsilon_{\rho,i}^*(\mathbf{r}) \hat{a}_\rho^\dagger e^{i\omega_\rho t}) \quad (4.12)$$

cu $\boldsymbol{\mu}_I(t)$ operatorul momentului de dipol al sistemului atomic scris în formalismul Dirac (de interacție)

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H_{att} t} \hat{\boldsymbol{\mu}} e^{-\frac{i}{\hbar} H_{att} t} \quad (4.13)$$

iar $\mu_{Ii}(t)$ componenta carteziană i a acestuia. Înănd cont de expresia stărilor inițiale și finale observăm că din sumele ce reprezintă hamiltonienii de interacție contribuie doar două feluri de termeni: cei cu $\rho \equiv \Lambda$ și care conține operatorul de anihilare - acest termen trebuind să apară de două ori, pentru a anihila cele două fotoni absorbiți de frecvență ω , și, respectiv, un termen cu $\rho \equiv \Lambda'$, care conține operatorul de creare al fotonului emis ω' , și care apare o singură dată. În funcție de ordinea în care apar aceștia, se formează trei termeni distincți sub integrala triplă din expresia amplitudinii de tranziție. Gasim astfel

$$M_{fi}^{(3)} = \frac{\sqrt{n(\Lambda)(n(\Lambda) - 1)}}{(i\hbar)^3} \langle E_0 | \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 \hat{\mathcal{Q}} |E_0\rangle \quad (4.14)$$

cu

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{Q}} = & \hat{\mu}_{Ii}(t_1) \varepsilon_{\Lambda,i}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t_1} \hat{\mu}_{Ij}(t_2) \varepsilon_{\Lambda,j}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t_2} \hat{\mu}_{Ik}(t_3) \varepsilon_{\Lambda',k}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega' t_3} + \\ & \hat{\mu}_{Ii}(t_1) \varepsilon_{\Lambda,i}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t_1} \hat{\mu}_{Ij}(t_2) \varepsilon_{\Lambda',j}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega' t_2} \hat{\mu}_{Ik}(t_3) \varepsilon_{\Lambda,k}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t_3} + \\ & \hat{\mu}_{Ii}(t_1) \varepsilon_{\Lambda',i}^*(\mathbf{r}) e^{i\omega' t_1} \hat{\mu}_{Ij}(t_2) \varepsilon_{\Lambda,j}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t_2} \hat{\mu}_{Ik}(t_3) \varepsilon_{\Lambda,k}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t_3} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Explicităm calculul primului termen din expresia precedentă, restul fiind calcul identic

$$M_{fi}^{(3,1)} = \frac{\sqrt{n(\Lambda)(n(\Lambda) - 1)}}{(i\hbar)^3} \varepsilon_{\Lambda,i}(\mathbf{r}) \varepsilon_{\Lambda,j}(\mathbf{r}) \varepsilon_{\Lambda',k}^*(\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 \times \\ \langle E_0 | \mu_{I,i}(t_1) \mu_{I,j}(t_2) \mu_{I,k}(t_3) | E_0 \rangle e^{-i\omega(t_1+t_2)+i\omega't_3} \quad (4.16)$$

Introducem operatori unitate scriși ca suma de proiectori pe stările atomice și găsim

$$\langle E_0 | \mu_{I,i}(t_1) \mu_{I,j}(t_2) \mu_{I,k}(t_3) | E_0 \rangle = \sum_{r,s} \langle E_0 | \mu_{I,i}(t_1) | r \rangle \langle r | \mu_{I,j}(t_2) | s \rangle \langle s | \mu_{I,k}(t_3) | E_0 \rangle \quad (4.17)$$

Fiecare dintre elementele de matrice formate pot fi prelucrate, de exemplu, ca

$$\langle E_0 | \mu_{I,i}(t_1) | r \rangle = \langle E_0 | e^{\frac{i}{\hbar} H_{at} t_1} \mu_i e^{-\frac{i}{\hbar} H_{at} t_1} | r \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_r) t_1} \mu_i^{0,r} \quad (4.18)$$

cu

$$\mu_i^{0,r} \equiv \langle E_0 | \mu_i | r \rangle \quad (4.19)$$

Astfel, contribuția primului termen la amplitudinea de tranziție va fi

$$M_{fi}^{(3,1)} = \frac{\sqrt{n(\Lambda)(n(\Lambda) - 1)}}{(i\hbar)^3} \varepsilon_{\Lambda,i}(\mathbf{r}) \varepsilon_{\Lambda,j}(\mathbf{r}) \varepsilon_{\Lambda',k}^*(\mathbf{r}) \sum_{r,s} \mu_i^{0,r} \mu_j^{r,s} \mu_k^{s,0} \times \\ \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 e^{-i\omega(t_1+t_2)+i\omega't_3} e^{\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_r) t_1} e^{\frac{i}{\hbar} (E_r - E_s) t_2} e^{\frac{i}{\hbar} (E_s - E_0) t_3} \quad (4.20)$$

Integrala triplă precedentă poate fi calculată astfel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 e^{-i\omega(t_1+t_2-2t_3)} e^{\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_r) t_1} e^{\frac{i}{\hbar} (E_r - E_s) t_2} e^{\frac{i}{\hbar} (E_s - E_0) t_3} = \\ \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_r - \hbar\omega) t_1} \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{\frac{i}{\hbar} (E_r - E_s - \hbar\omega) t_2} \int_{-\infty}^{t_2} dt_3 e^{\frac{i}{\hbar} (E_s - E_0 + \hbar\omega') t_3} = \\ \frac{\hbar}{i(E_s - E_0 + \hbar\omega')} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 e^{\frac{i}{\hbar} (E_0 - E_r - \hbar\omega +) t_1} \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 e^{\frac{i}{\hbar} (E_r - E_0 - \hbar\omega + \hbar\omega') t_2} = \\ \frac{\hbar}{i(E_s - E_0 + 2\hbar\omega)} \frac{\hbar}{i(E_r - E_0 - \hbar\omega + \hbar\omega')} \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 e^{\frac{i}{\hbar} (2\hbar\omega - \hbar\omega') t_1} = \quad (4.21)$$

Integrala rămasă este o funcție δ care exprimă conservarea energiei

$$\omega' = 2\omega \quad (4.22)$$

pe care am anticipat-o deja la inceputul secțiunii. În final, expresia lui $M_{fi}^{(3,1)}$ va fi

$$M_{fi}^{(3,1)} = \frac{\sqrt{n(\Lambda)(n(\Lambda) - 1)}}{(i\hbar)^3} \varepsilon_{\Lambda,i}(\mathbf{r}) \varepsilon_{\Lambda,j}(\mathbf{r}) \varepsilon_{\Lambda',k}^*(\mathbf{r}) \sum_{r,s} \mu_i^{0,r} \mu_j^{r,s} \mu_k^{s,0} \times \\ \frac{\hbar}{i(E_s - E_0 + 2\hbar\omega)} \frac{\hbar}{i(E_r - E_0 + \hbar\omega)} 2\pi\delta(\omega' - 2\omega) \quad (4.23)$$

Ceilalți doi termeni se calculează analog, și în final rezultatul este

$$M_{fi}^{(3)} = - \frac{\sqrt{n(\Lambda)(n(\Lambda) - 1)}}{(i\hbar)} \varepsilon_{\Lambda,i}(\mathbf{r}) \varepsilon_{\Lambda,j}(\mathbf{r}) \varepsilon_{\Lambda',k}^*(\mathbf{r}) 2\pi\delta(\omega' - 2\omega) \beta_{ijk}(\omega) \quad (4.24)$$

unde $\beta_{ijk}(\omega)$ sunt componentele unui tensor de rang 3, numit *hiperpolarizabilitatea* sistemului atomic.

$$\begin{aligned} \beta_{ijk}(\omega) = & \sum_{s,r} \left[\frac{\mu_i^{0r} \mu_j^{rs} \mu_k^{s0}}{(E_r - E_0 - 2\hbar\omega)(E_s - E_0 - \hbar\omega)} \right. \\ & \left. + \frac{\mu_k^{0r} \mu_i^{rs} \mu_j^{s0}}{(E_r - E_0 + \hbar\omega)(E_s - E_0 - \hbar\omega)} + \frac{\mu_j^{0r} \mu_k^{rs} \mu_i^{s0}}{(E_r - E_0 + \hbar\omega)(E_s - E_0 + 2\hbar\omega)} \right] \end{aligned} \quad (4.25)$$

În final introducem expresiile explicite ale modurilor helicoidale

$$\varepsilon_{\Lambda}(\mathbf{r}) \rightarrow \varepsilon_{\lambda,p,m}(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = \frac{C_p^{|m|}}{w_0} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{|m|} L_p^{|m|} \left(\frac{2r^2}{w_0^2} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{w_0^2} \right) e^{ikz - im\phi} \varepsilon^{\lambda}(\mathbf{k}) \quad (4.26)$$

și forma finală a amplitudinii de tranziție va fi

$$\begin{aligned} M_{fi}(\mathbf{r}) = & \frac{i}{\hbar} \left(\frac{\hbar c}{\varepsilon_0 V} \right)^{3/2} (k^2 k' n(n-1))^{1/2} \frac{\left(C_p^{|m|} \right)^2 C_{p'}^{|m'|}}{w_0^3} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0} \right)^{m'+2m} \\ & \exp \left(-\frac{3r^2}{w_0^2} \right) L_{p'}^{m'} \left(\frac{2r^2}{w_0^2} \right) \left[L_p^m \left(\frac{2r^2}{w_0^2} \right) \right]^2 \left(\varepsilon_i^{\lambda'} \right)^* \varepsilon_j^{\lambda} \varepsilon_k^{\lambda} \beta_{ijk} \\ & \times \exp[-i\Delta\theta] (2\pi)\delta(2\omega - \omega') \end{aligned} \quad (4.27)$$

cu

$$\Delta\theta = (m' - 2m)\phi + (k' - 2k)z \quad (4.28)$$

În expresia precedentă observăm că toate detaliile legate de structura sistemului atomic sunt concentrate în contractia tensorului hiperpolarizabilității cu componente polarizației, $(\varepsilon_i^{\lambda'})^* \varepsilon_j^{\lambda} \varepsilon_k^{\lambda} \beta_{ijk}$.

Amplitudinea de tranziție depinde de poziția \mathbf{r} a sistemului atomic în câmp. Putem observa cu ușurință că dacă am avea o multitudine de sisteme atomice, distribuite în toată regiunea de interacție, atunci amplitudinea totală de tranziție s-ar scrie ca o sumă de contribuții de la fiecare atom, și acestea ar da interferență distructivă, cu excepția cazului $\Delta\theta = 0$. Condiția anterioară implica $k' = 2k$, condiție deja realizată prin întrmediul funcției δ ce exprimă conservarea energiei, și $m' = 2m$, ceea ce reprezintă o condiție de conservare a momentului cinetic aparută în mod natural în calcul, și nu impusă de noi inițial.

Acum putem calcula rata de tranziție pornind de la probabilitatea de tranziție:

$$p_{fi} \equiv |M_{fi}|^2 \quad (4.29)$$

Introducem notația simplificatoare:

$$M_{fi} = \frac{2\pi i}{\hbar V^{3/2}} e^{-i\Delta\theta} \delta(2\omega - \omega') \mathcal{C} \quad (4.30)$$

cu

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \left(\frac{\hbar c}{\varepsilon_0}\right)^{3/2} (k^2 k' n(n-1))^{1/2} \frac{\left(C_p^{|m|}\right)^2 C_{p'}^{|m'|}}{w_0^3} \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_0}\right)^{m'+2m} \\ &\times \exp\left(-\frac{3r^2}{w_0^2}\right) L_{p'}^{m'}\left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right) \left[L_p^m\left(\frac{2r^2}{w_0^2}\right)\right]^2 \left(\varepsilon_i'^{\lambda'}\right)^* \varepsilon_j^\lambda \varepsilon_k^\lambda \beta_{ijk} \end{aligned}$$

Folosim $\delta^2(2\omega - \omega') = \delta(2\omega - \omega') \frac{\tau}{2\pi}$ cu τ durata totală presupusă lungă a interacției. Probabilitatea de tranziție va fi

$$p_{fi} = \frac{4\pi^2}{\hbar^2 V^3} \frac{\tau}{2\pi} |\mathcal{C}|^2 \delta(2\omega - \omega') \quad (4.31)$$

p_{fi} e probabilitatea de tranziție către o stare în care fotonul emis e pe un mod bine determinat: \mathbf{k}', ϵ' fixe. În realitate, într-un experiment nu se poate detecta această stare. Măsurăm probabilitatea totală ca fotonul emis să aibă impulsul într-un interval mic, $d^3\mathbf{k}'$. Numarul de stări cuprinse în acest interval este

$$dN = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{k}' \quad (4.32)$$

Atunci probabilitatea care se poate măsura este

$$dp = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{k}' = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{4\pi^2}{\hbar^2 V^2} \frac{\tau}{2\pi} |\mathcal{C}|^2 \delta(2\omega - \omega') d\mathbf{k}' \quad (4.33)$$

Definim rata de tranziție ca probabilitatea de tranziție pe unitatea de timp

$$d^3\Gamma = \frac{dp}{\tau} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\hbar^2 V^2} |\mathcal{C}|^2 \delta(2\omega - \omega') d\mathbf{k}' \quad (4.34)$$

scriem elementul de volum $d^3\mathbf{k}'$ ca $d\Omega_{\mathbf{k}'} k'^2 dk'$

$$\begin{aligned} d^3\Gamma &= \frac{dp}{\tau} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\hbar^2 V^2} |\mathcal{C}|^2 \delta(2\omega - \omega') d\Omega_{\mathbf{k}'} k'^2 dk' \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\hbar^2 V^2} |\mathcal{C}|^2 \delta(2\omega - \omega') d\Omega_{\mathbf{k}'} k'^2 \frac{1}{c} d\omega' \end{aligned} \quad (4.35)$$

Nu detectăm frecvența, deci integrăm peste ω' folosind δ

$$d^2\Gamma = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\hbar^2 V^2} |\mathcal{C}|^2 k'^2 \frac{1}{c} d\Omega_{\mathbf{k}'} \quad (4.36)$$

Intensitatea radiantă se definește ca puterea emisă pe unitatea de unghi solid, adică: numărul de fotoni pe unitatea de timp pe unitatea de unghi solid \times energia unui foton.

$$\mathcal{I} = \frac{d^2\Gamma}{d\Omega_{k'}} \hbar\omega' = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\hbar^2 V^2} |\mathcal{C}|^2 k'^2 \frac{1}{c} \hbar\omega' \quad (4.37)$$

Tinând cont de condiția ca (4.28) să se anuleze și $\omega' = 2\omega$. Explicitând expresia lui \mathcal{C} , avem:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \frac{2k^3}{\pi^2 \hbar V^2} |\mathcal{C}|^2 = \frac{2k^3}{\pi^2 \hbar V^2} \beta_{vec}^2 u_{pm}(\mathbf{r})^4 2k^3 \left(\frac{\hbar c}{\epsilon_0}\right)^3 \langle n(n-1) \rangle \\ &\times \frac{(C_{p'}^{[2m]})^2}{\omega_0^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_0}\right)^{4m} \left[L_{p'}^{2m}\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right)\right]^2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

,unde $\beta_{vec}^2 = \left\langle \left| (\varepsilon_i^{\lambda'})^* \varepsilon_j^{\lambda} \varepsilon_k^{\lambda} \beta_{ijk} \right|^2 \right\rangle$ și prin *phase* am notat faza modului LG (vezi 2.15a)

Având radianța incidentă medie (energia W pe unitatea de suprafată L^2 pe unitatea de timp $t = L/c$) a fasciculului incident cu un număr mediu $\langle n \rangle$ în aproximarea paraxială (densitatea de energie $w = \epsilon_0 E^2$):

$$\bar{I}_{inc} = \frac{W}{L^2 t} = \frac{\langle n \rangle (\hbar c k) u_{pm}(\mathbf{r})^2}{L^2 t} = \langle n \rangle \left(\frac{\hbar c^2 k}{V}\right) u_{pm}(\mathbf{r})^2 \quad (4.39)$$

,putem scrie (4.38) ca:

$$\mathcal{I} = \frac{4k^4 \beta_{vec}^2}{\pi^2 \epsilon_0^3} \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2} \bar{I}_{inc}^2 \frac{(C_{p'}^{[2m]})^2}{\omega_0^2} \exp\left(-\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}r}{\omega_0}\right)^{4m} \left[L_{p'}^{2m}\left(\frac{2r^2}{\omega_0^2}\right)\right]^2 \quad (4.40)$$

Acum putem să reprezentăm calitativ (până la factorul $\frac{4k^4 \beta_{vec}^2}{\pi^2 \epsilon_0^3} \frac{\langle n(n-1) \rangle}{\langle n \rangle^2}$) cum ar arăta profilul intensității fasciculului emergent în imediata apropiere cu suprafața mediului cu care interacționează, știind iradianța medie a fasciculului incident:

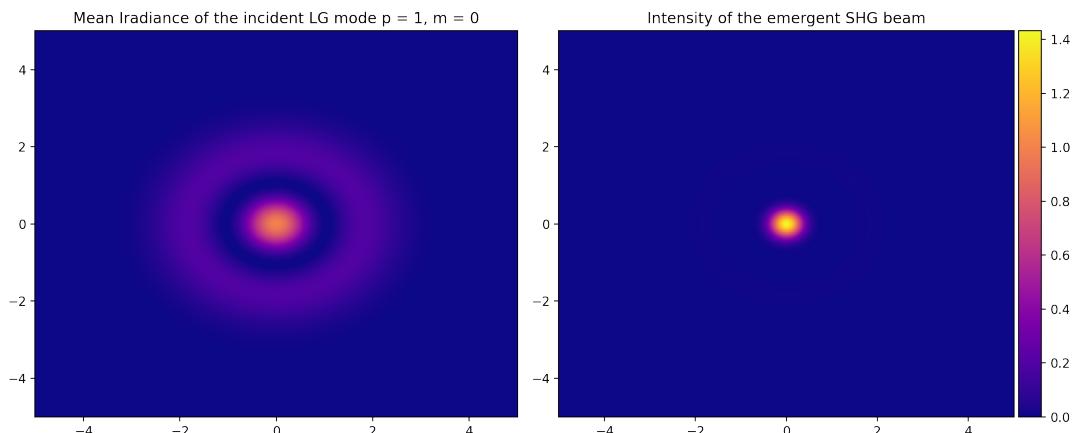


Figura 4.1: Iradianța medie a modului $p = 1, m = 0$ (stânga) și profilul intensității fasciculului emergent (dreapta)

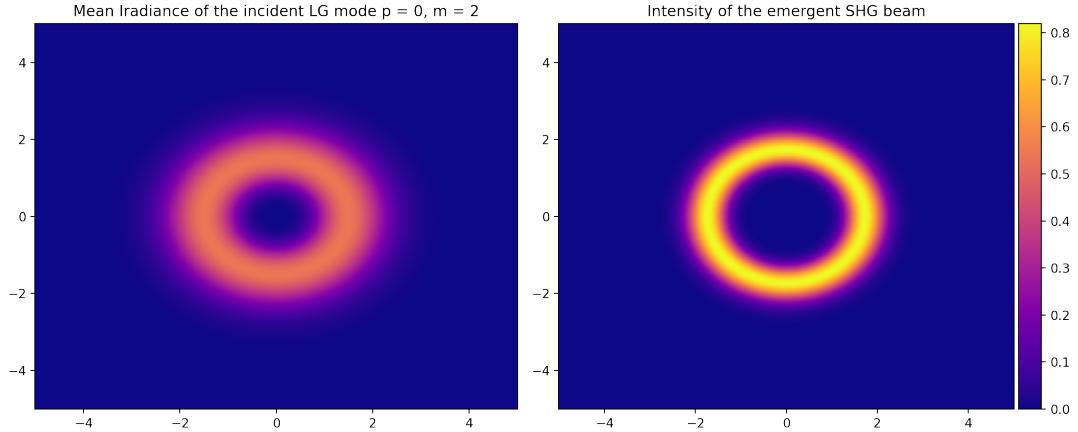


Figura 4.2: Iradianța medie a modului $p = 0, m = 2$ (stânga) și profilul intensității fasciculului emergent (dreapta)

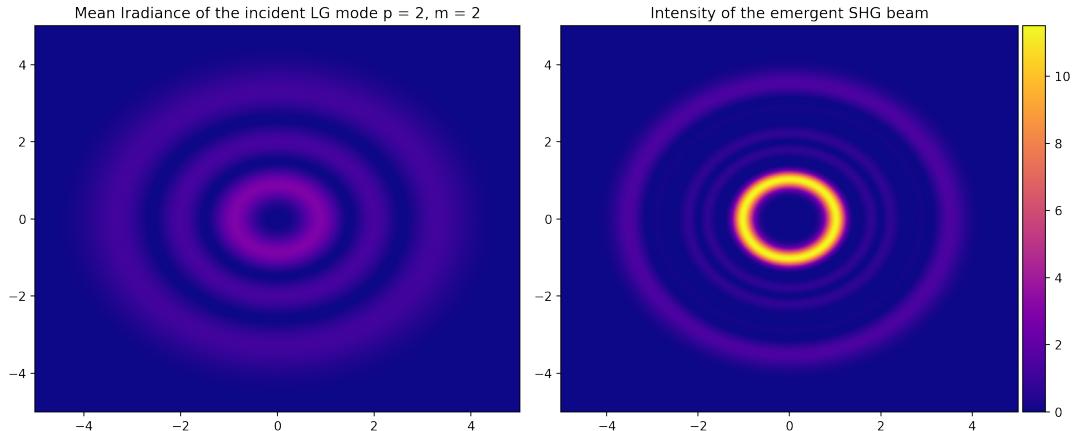


Figura 4.3: Iradianța medie a modului $p = 2, m = 2$ (stânga) și profilul intensității fasciculului emergent (dreapta)

Concluzii

- Am prezentat o clasă de soluții ale sistemului de ecuații Maxwell: undele plane, modurile Hermite-Gauss (HG) și Laguerre Gauss (LG), și am discutat proprietățile lor.
- Am prezentat o aplicație în cadrul formalismului mecanicii clasice nerelativiste: studiul mișcării unei particule încărcate în câmp electromagnetic descris de o soluție LG a ecuațiilor Maxwell. Simularea noastră duce la un rezultat care era de așteptat: electronul interacționează puternic pe o un domeniu spațial finit, după care își continuă deplasarea de particulă liberă.
- Codul numeric realizat pentru cercetarea dinamicii electronului poate fi aplicat și altor sisteme: alte tipuri de particule încărcate (chiar și mezoscopice), alte tipuri de câmpuri, și alte tipuri de forțe.
- De asemenea, codul nostru permite studierea campului electromagnetic. Fiind date valorile numerice ale funcțiilor $E_i(t, [x_1, x_2, x_3])$, $B_i(t, [x_1, x_2, x_3])$, pot fi calculate alte mărimi de interes cum ar fi densitatea de energie, impuls 2.23, moment cinetic orbital 2.27 etc.
- În partea a doua a lucrării am prezentat formalismul electrodinamicii cuantice pentru cuantificarea undelor plane precum și a modurilor LG. Am prezentat o aplicație și anume generarea armonicii a două de către un sistem atomic simplu în interacție cu un mod LG al câmpului electromagnetic. Am reprodus rezultatul teoretic prezentat în literatură, efectuând un calcul de perturbație până în ordinul III [12], și am discutat conservarea energiei și a momentului cinetic orbital.
- Pornind de la rezultatele teoretice descrise anterior, am reprezentat calitativ distribuția de intensitate a armonicilor în imediata vecinătate a zonei de interacție, în funcție de iradianța medie a fasciculului incident.
- În continuare ne propunem dezvoltarea formalismului teoretic pentru studiul altor procese ce au loc la interacția sistemelor atomice cu moduri gaussiene ale câmpului electromagnetic, inițial în cadrul teoriei perturbațiilor, și eventual dincolo de aceasta, în formalism neperturbativ.

Anexa

În această anexă vom prezenta pentru început pe scurt formularile mecanicii cuantice, și în continuare elemente de teoria perturbațiilor dependente de timp.

A.1 Formularea interacției

Formularea mecanicii cuantice cu care suntem familiarizați de la cursul de mecanică cuantică este **formularea Schrodinger**. În această formulare *vectorii de stare depind explicit de timp, dar operatorii nu*:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (\text{A.1})$$

,unde $|\psi(t)\rangle$ reprezintă starea sistemului în formularea Schrodinger. Evoluția temporală a stării se face prin intermediul operatorului de evoluție temporală $\hat{U}(t, t_0) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}}$:

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad (\text{A.2})$$

Formularea respectivă este utilă atunci când descriem fenomene în care Hamiltonienii sunt independenți de timp. Pentru a descrie fenomene în care Hamiltonienii depind de timp se lucrează în formularea Heisenberg și *formularea interacției*. Cea din urmă va fi prezentată în ceea ce urmează. Conexiunea dintre formularea interacției și formularea Schrodinger (în general conexiunile dintre diferite formulări) se face prin transformări unitare. În **formularea interacției**¹ *vectorii de stare și operatorii depind de timp*. Vectorii de stare în formularea interacției se definesc în funcție de vectorii de stare în formularea Schrodinger ca:

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}_0} |\psi(t)\rangle \quad (\text{A.3})$$

,unde Hamiltonianul $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$. \hat{H}_0 reprezintă Hamiltonianul sistemului neperturbat (independent de timp), iar \hat{V} este operatorul asociat perturbației, care poate să depindă de timp. Pentru a găsi evoluția temporală lui $|\psi(t)\rangle_I$, se derivează (A.3) funcție de timp și se obține:

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle_I = \hat{V}_I(t) |\psi(t)\rangle_I \quad (\text{A.4})$$

¹cunoscută de asemenea ca și formularea Dirac

, unde $\hat{V}_I(t) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}_0}\hat{V}e^{-\frac{i}{\hbar}t\hat{H}_0}$ e operatorul perturbației în formularea interacției (relație valabilă pentru orice operator). Ecuația (A.4) reprezintă ecuația lui Schrodinger în formularea interacției. Aceasta arată că evoluția temporală a vectorului de stare este determinată de interacția $\hat{V}_I(t)$.

A.2 Teoria perturbațiilor dependente de timp

Teoria perturbațiilor dependente de timp este utilă în studierea proceselor de emisie și de absorbție a radiației de către atomi și sisteme atomice. Sau în general, pentru studierea tranzițiilor sistemelor cuantice de la o stare energetică la alta. **Scopul principal a teoriei perturbațiilor dependente de timp este de a răspunde la următoarea întrebare: Dacă un sistem este inițial în starea $|i\rangle$ (neperturbată) a lui \hat{H}_0 , care este probabilitatea ca sistemul să fie găsit la un moment de timp mai târziu într-o stare neperturbată $|f\rangle$?**

În continuare, considerăm doar acele fenomene care sunt descrise de Hamiltonieni ce pot fi divizați în două părți, o componentă independentă \hat{H}_0 și o componentă dependentă de timp $\hat{V}(t)$ ce are o contribuție mică față de \hat{H}_0 :

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \hat{V}(t) \quad (\text{A.5})$$

, unde \hat{H}_0 descrie sistemul neperturbat, și se presupune că soluțiile exacte sunt cunoscute:

$$\hat{H}_0 |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle \quad (\text{A.6})$$

Cum $\hat{V}(t)$ afectează sistemul? Când sistemul interacționează cu $\hat{V}(t)$, acesta absoarbe ori emite energie. Acest proces inevitabil supune sistemul unei tranziții de la o stare neperturbată la alta. Pentru a calcula această probabilitate de tranziție vom proceda la rezolvarea ecuației (A.4). Pentru aceasta, vom scrie vectorul de stare în formularea interacției ca:

$$|\psi(t)\rangle_I = e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}_0} |\psi(t)\rangle = \hat{U}_I(t, t_i) |\psi(t)\rangle_I \quad (\text{A.7})$$

, unde operatorul de evoluție temporală în formularea interacției se scrie ca:

$$\hat{U}_I(t, t_i) \equiv e^{\frac{i}{\hbar}t\hat{H}_0} \hat{U}(t, t_i) e^{-\frac{i}{\hbar}t_i\hat{H}_0} \quad (\text{A.8})$$

Dacă introducem (A.7) în (A.4) obținem:

$$i\hbar \frac{d\hat{U}_I(t, t_i)}{dt} = \hat{V}_I(t) \hat{U}_I(t, t_i). \quad (\text{A.9})$$

Soluțiile acestei ecuații, cu condiția inițială $\hat{U}_I(t_i, t_i) = \hat{I}$, sunt date de ecuația integrală:

$$\hat{U}_I(t, t_i) = \hat{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^t \hat{V}_I(t') \hat{U}_I(t', t_i) dt'. \quad (\text{A.10})$$

Teoria perturbațiilor oferă soluții aproximative ecuației integrale de mai sus. Primul ordin al aproximăției se obține punând $\hat{U}_I(t', t_i) = 1$ în integrală, obținându-se astfel $\hat{U}_I^{(1)}(t, t_i) = 1 - i/\hbar \int_{t_i}^t \hat{V}_I(t') dt'$. Substituind $\hat{U}_I(t', t_i) = \hat{U}_I^{(1)}(t', t_i)$ în integrală și obținem ordinul doi al aproximăției:

$$\hat{U}_I^{(2)}(t, t_i) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^t \hat{V}_I(t') dt' + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{t_i}^t \hat{V}_I(t) dt_1 \int_{t_i}^{t_1} \hat{V}_I(t_2) dt_2 \quad (\text{A.11})$$

Ordinul 3 al aproximăției se obține substituind $\hat{U}_I^{(2)}(t, t_i)$ în A.10 și aşa mai departe. În urma unui astfel de proces iterativ se obține:

$$\hat{U}_I(t, t_i) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \times \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n) \quad (\text{A.12})$$

Această serie, cunoscută ca *seria Dyson*, permite calcularea vectorului de stare până la ordinul dorit al perturbației.

Forma generală a amplitudinii de tranziție de la o stare inițială $|i\rangle$ la o stare finală $|f\rangle$, presupunând durata interacției infinită ($t_i \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow \infty$)

$$\begin{aligned} M_{fi} &\equiv \langle f | \hat{U}_I(t, t_i) | i \rangle \\ &= \langle f | \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \dots \times \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n V_I(t_1) V_I(t_2) \dots V_I(t_n) \right\} | i \rangle \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Referințe

- [1] L. Allen, M.J. Padgett, and M. Babiker. Iv the orbital angular momentum of light. volume 39 of *Progress in Optics*, pages 291–372. Elsevier, 1999.
- [2] M. Friese, Jonas Enger, Halina Rubinsztein-Dunlop, and Norman Heckenberg. Optical angular-momentum transfer to trapped absorbing particles. *Physical Review A*, 54, 09 1996.
- [3] Graham Gibson, Johannes Courtial, Miles Padgett, Mikhail Vasnetsov, Valeriy Pas'ko, Stephen Barnett, and Sonja Franke-Arnold. Free-space information transfer using light beams carrying orbital angular momentum. *Optics express*, 12:5448–56, 12 2004.
- [4] Robert Boyd, Anand Jha, Mehul Malik, Colin O'Sullivan, Brandon Rodenburg, and Daniel Gauthier. Quantum key distribution in a high-dimensional state space: Exploiting the transverse degree of freedom of the photon. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 7948, 02 2011.
- [5] Grover Swartzlander, Erin Ford, Rukiah Abdul-Malik, Laird Close, Mary Peters, David Palacios, and Daniel Wilson. Contrast enhancement of binary star system using an optical vortex coronagraph. 06 2008.
- [6] Jochen Arlt, K. Dholakia, Les Allen, and Miles Padgett. The production of multi-ringed laguerre-gaussian modes by computer-generated holograms. *Journal of Modern Optics*, 45:1231–1237, 06 1998.
- [7] Filippus S Roux. -optical waves. In *Laser Beam Propagation*, pages 18–55. CRC Press, 2014.
- [8] Stephen M Barnett. Optical angular-momentum flux. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 4(2):S7–S16, jan 2002.
- [9] John David Jackson. *Classical electrodynamics*. Wiley, New York, NY, 3rd ed. edition, 1999.
- [10] S. J. van Enk and G Nienhuis. Spin and orbital angular momentum of photons. *Europhysics Letters (EPL)*, 25(7):497–501, mar 1994.
- [11] Ernst Hairer and Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, volume 14. 01 1996.
- [12] L C Dávila Romero, D L Andrews, and M Babiker. A quantum electrodynamics framework for the nonlinear optics of twisted beams. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 4(2):S66–S72, mar 2002.