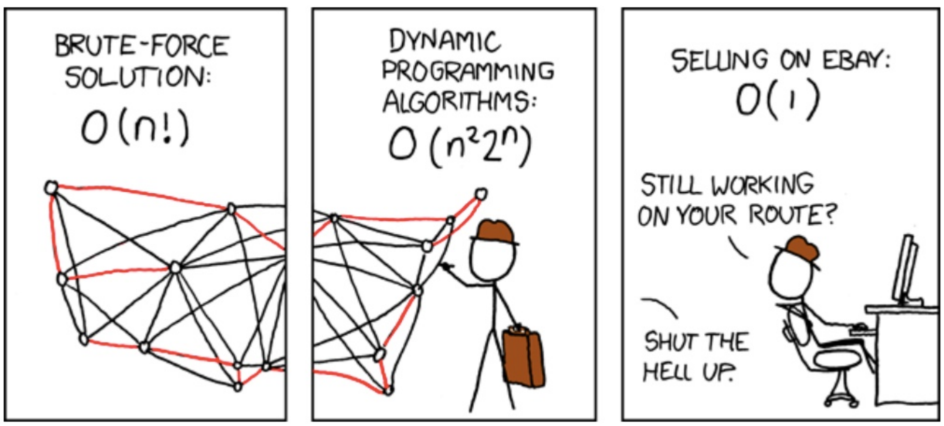
Евклидова задача коммивояжёра

Вадим Плахтинский

Ноябрь 2017



1 История

2 Постановка задачи

TSP:
Дан граф $G = (V, E)$ с неотрицательными весами ребер. В этом графе нужно найти Гамильтонов цикл(цикл графа, проходящий по всем вершинам) минимального веса.

Euclidean TSP:
$V \subset \mathbb{R}^k$, а $E-$ это множество всех пар евклидовых расстояний между вершинами графа.
Так как мы будем решать TSP для $k = 2$, то нам надо найти минимальный по весу гамильтонов цикл у n точек на плоскости. Расстояние мы будем понимать, как евклидову метрику: $d(x, y) = ||x - y||_2$

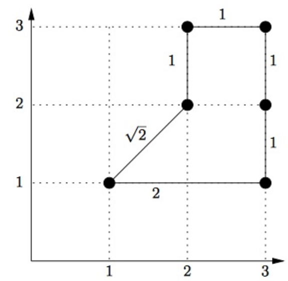


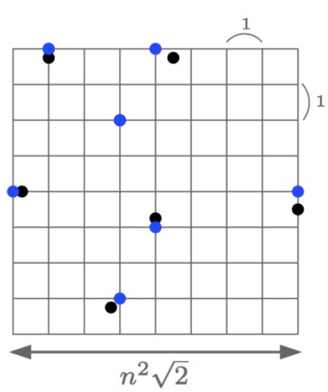
Рис. 1: Стоимость минимального пути составляет $6 + \sqrt(2)$.

3 Приближенное решение

Th. (Aurora, 1996): Для euclidean TSP существует PTAS.
Теорема утверждает, что для $\forall \epsilon > 0$ существует полиномиальный алгоритм, зависящий от n, который вычисляет гамильтонов цикл веса $\leq OPT(1+\epsilon)$

Докозательство:

1. **Изменение координат:**
Поместим "решетку"на нашу плоскость с точками. Каждую точку переместим в ближайшую точку решетки. Наименьший квадрат, который содержит все наши точки имеет сторону $n^2\sqrt{2}$. Под действием нашего преобразования каждая вершина переместилась на расстояние $\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, каждое ребро изменилось не более чем в $\sqrt{2}$ раз. Построим по нему новое оптимальное решение OPT'.



$h : G \longrightarrow G'$

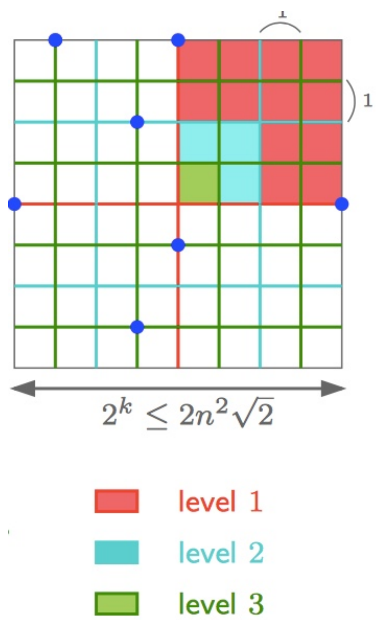
Посмотрим как изменилось оптимальное решение для нового графа:

$$|OPT'| \le h(OPT) \le |OPT| + n\sqrt{2}$$

$$|h^{-1}(OPT')| \le |OPT'| + n\sqrt{2} \le |h(OPT)| + n\sqrt{2} \le |OPT| + 2n\sqrt{2} \le |OPT|(1+\frac{1}{\epsilon})$$

Значит, $h^{-1}(OPT')(1-\epsilon)$ аппроксимирует OPT при $n \ge \frac{1}{\epsilon}$.

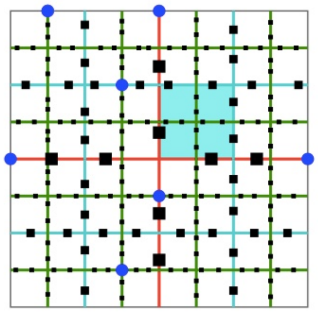
2. **Разбиение на квадраты:**
Начнем разбивать минимальный квадрат, который охватывает наш граф таким образом, чтобы на каждом уровне предыдущий квадрат разбивался на 4 равных. Таких разбиений сделаем k штук, где k находится из $2^{k-1} \le n^2\sqrt{2} \le 2^k$.



Размер $O(n^4)$

3. **Порталы:**
$m := \frac{log(n)}{\epsilon}$. Заметим, что в разбитом квадрате линии можно пересечь только в в определенных точках, назовем их порталами. Всего их $2^i m$, а также по одному порталу на каждом узле решетки. На уровне i каждая линия инцидентна 2^i парам квадратов, не считая узлов решетки. Граница каждого квадрата состоит из линий, поэтому учитывая еще и

углы квадратов, получаем, что на каждый квадрат приходится $4m+4$ порталов.



4. Поиск пути:

TODO

4 Запуски:

1. Сгенерируем набор из 100 случайных точек и посмотрим на время работы.
2. Сгенерируем набор из точек лежащих на одной прямой и посмотрим на время работы.
3. Воспользуемся данным с сайта. Данных в датасете слишком много, поэтому сначала уменьшим их кол-во и посмотрим на результат. В зависимости от времени решим, сможем ли мы запустить на полном наборе.
4. Возможно, что-то еще.

Список литературы

[1] Sanjeev Arora: Journal of the ACM, 1998

[2] Sanjeev Arora: Polynomial Time Approximation Schemes for Euclidean Traveling Salesman and other Geometric Problems, 1996