A. N. Kolmogorov, On the representation of continuous functions of many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1957, Volume 114, Number 5, 953–956

Доклады Академии наук СССР
1957. Том 114, № 5

МАТЕМАТИКА

Академик А. Н. КОЛМОГОРОВ

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ В ВИДЕ СУПЕРПОЗИЦИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО И СЛОЖЕНИЯ

Целью заметки является краткое изложение доказательства следующей теоремы:

Теорема. *При любом целом* $n \geqslant 2$ *существуют такие определенные на единичном отрезке* $E^1 = [0; 1]$ *непрерывные действительные функции* $\psi^{pq}(x)$, *что каждая определенная на* n*-мерном единичном кубе* E^n *непрерывная действительная функция* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *представима в виде*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{q=1}^{q=2n+1} \chi_q \left[\sum_{p=1}^{n} \psi^{pq}(x_p) \right], \tag{1}$$

где функции $\chi_q(y)$ *действительны и непрерывны.*

При $n = 3$, положив

$$\varphi_q(x_1, x_2) = \psi^{1q}(x_1) + \psi^{2q}(x_2), \quad h_q(y, x_3) = \chi_q[y + \psi^{3q}(x_3)],$$

получаем из (1)

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum_{q=1}^{7} h_q[\varphi_q(x_1, x_2,), x_3], \tag{2}$$

что является небольшим усилением результата В. И. Арнольда [2], который показал, что любая непрерывная функция трех переменных представима в виде суммы девяти слагаемых того же вида, как слагаемые, входящие в формулу (2) в числе семи. Результаты моей заметки [1] не вытекают из сообщаемой сейчас новой теоремы в их точных формулировках, но принципиальное их содержание (в смысле возможности представления функций нескольких переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных и их приближения суперпозициями фиксированного вида из многочленов от одного переменного и сложения) очевидным образом содержится в новой теореме. Метод доказательства новой теоремы элементарнее методов работ [1,2], сводясь к прямым конструкциям и подсчетам. Исчезла, в частности, необходимость употребления деревьев из компонент линий уровня. Фактически, однако, конструкции, употребленные в этой заметке, были найдены путем анализа конструкций, употреблявшихся в [1,2], и отбрасывания в них деталей, излишних для получения конечного результата.

§ 1. Построение функций ψ^{pq}. Индексы p, q, k, i всюду далее пробегают целые значения

$$1 \leqslant p \leqslant n, \quad 1 \leqslant q \leqslant 2n+1, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad 1 \leqslant i \leqslant m_k = (9n)^k + 1.$$

При суммировании и перемножении в этих пределах пределы не обозначаются.

Рассмотрим сегменты

$$A^q_{k,i}=\left[\frac{1}{(9n)^k}\left(i-1-\frac{q}{3n}\right),\ \frac{1}{(9n)^k}\left(i-\frac{1}{3n}-\frac{q}{3n}\right)\right].$$

Сегменты $A^q_{k,i}$ имеют длину $\frac{1}{(9n)^k}\left(1-\frac{1}{3n}\right)$, а при фиксированных k и q получаются один из другого при переходе от i к $i'=i+1$ с помощью сдвига вправо на расстояние $\frac{1}{(9n)^k}$, т. е. расположены не только без перекрытий, но с промежутками длины $\frac{1}{3n(9n)^k}$, с точностью же до наличия этих промежутков покрывают весь единичный отрезок E^1. В соответствии с этим кубики

$$S^q_{k,i_1\ldots i_n}=\underset{p}{\boxed{\times}}A^q_{k,i_p}$$

с ребрами длины $\frac{1}{(9n)^k}$ при фиксированных k и q покрывают единичный куб E^n с точностью до разделяющих их щелей ширины $\frac{1}{3n(9n)^k}$. Легко проверяется следующая лемма.

Лемма 1. *Система всех кубиков $S^q_{k,i_1\ldots i_n}$ с постоянным k и переменными q и $i_1,\ldots,i_n$ покрывает единичный куб E^n так, что каждая точка из E^n оказывается покрытой не менее $n+1$ раз.*

При помощи индукции по k может быть доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Можно подобрать константы $\lambda^{pq}_{k,i}$ и ε_k так, что будут выполнены условия:*

1) $\lambda^{pq}_{k,i}<\lambda^{pq}_{k,i+1}\leqslant\lambda^{pq}_{k,i}+\frac{1}{2^k}$;

2) $\lambda^{pq}_{k,i}\leqslant\lambda^{pq}_{k+1,i'}\leqslant\lambda^{pq}_{k,i}+\varepsilon_k-\varepsilon_{k+1}$, *если сегменты $A^q_{k,i}$ и $A^q_{k+1,i'}$ пересекаются;*

3) *сегменты* $\Delta^q_{k,i_1\ldots i_n}=\left[\sum_p\lambda^{pq}_{k,i_p};\ \sum_p\lambda^{pq}_{k,i_p}+n\varepsilon_k\right]$ *при фиксированных k и q попарно не пересекаются.*

Легко заметить, что из 1) и 3) вытекает

4) $\varepsilon_n\leqslant\frac{1}{2^k}$.

На основе указанных ранее свойств сегментов $A^q_{k,i}$ и свойств 1), 2) и 4) констант $\lambda^{pq}_{k,i}$ и ε_k без большого труда доказывается следующая лемма.

Лемма 3. *При фиксированных p и q требования*

5) $\lambda^{pq}_{k,i}\leqslant\psi^{pq}(x)\leqslant\lambda^{pq}_{k,i}+\varepsilon_k$ *при* $x\in A^q_{k,i}$

однозначно определяют на E^1 непрерывную функцию ψ^{pq}.

Замечание. Легко видеть, что по построению функции ψ^{pq} оказываются монотонно возрастающими. Это их свойство могло бы быть включено в формулировку нашей теоремы.

Из 5) и 3) вытекает

6) $\sum_p\psi^{pq}(x_p)\in\Delta^q_{k,i_1\ldots i_n}$ *при* $(x_1,\ldots,x_n)\in S^q_{k,i_1\ldots i_n}$.

§ 2. Построение функций χ^q. Установив существование функций ψ^{pq} и констант $\lambda^{pq}_{k,i}$ и ε_k, обладающих свойствами 1)—6), переходим к доказательству основной теоремы. Искомые функции $\chi^q(y)$ будут построены в виде

$$\chi^q=\lim_{r\to\infty}\chi^q_r,$$

где $\chi^r_0\equiv0$, а χ^q_r для $r>0$ будут определены с помощью индукции по r одновременно с натуральными k_r.

Мы будем при этом употреблять обозначения

$$f_r(x_1, \ldots, x_n) = \sum_q \chi_r^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right], \tag{3}$$

$$M_r = \sup_{E^n} |f - f_r|. \tag{4}$$

Очевидно, что

$$f_0 \equiv 0, \quad M_0 = \sup_{E^n} |f|.$$

Допустим, что непрерывные функции χ_{r-1}^q и номер k_{r-1} уже определены. Тем самым определена на E^n и непрерывная функция f_{r-1}. Так как диаметры кубиков $S_{k,i_1\ldots i_n}^q$ при $k \to \infty$ стремятся к нулю, то можно выбрать k_r столь большим, чтобы колебание разности $f - f_{r-1}$ на любом $S_{k_r,i_1\ldots i_n}^q$ не превосходило $\frac{1}{2n+2} M_{r-1}$.

Пусть $\xi_{k,i}^q$ — произвольные точки из соответствующих сегментов $A_{k,i}^q$. На сегменте $\Delta_{k,i_1\ldots i_n}^q$ положим

$$\chi_r^q(y) = \chi_{r-1}^q(y) + \frac{1}{n+1}\left[f(\xi_{k,i_1}^q, \ldots, \xi_{k,i_n}^q) - f_{r-1}(\xi_{k,i_1}^q, \ldots, \xi_{k,i_n}^q)\right]. \tag{5}$$

Очевидно, что фиксированные таким образом значения функции χ_r^q подчинены неравенству

$$|\chi_r^q(y) - \chi_{r-1}^q(y)| \leqslant \frac{1}{n+1} M_{r-1}. \tag{6}$$

Вне сегментов $\Delta_{k,i_1\ldots i_n}^q$ доопределим функцию χ_r^q произвольно, но с соблюдением этого же неравенства (6) и непрерывности.

Оценим теперь $f - f_r$ в произвольной точке $(x_1, \ldots, x_n)$ из E^n. Очевидно, что

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f_r(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - f_{r-1}(x_1, \ldots, x_n) -$$
$$- \sum_q \left\{ \chi_r^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right] - \chi_{r-1}^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right] \right\}. \tag{7}$$

Сумму $\sum_q$ в (7) представим в виде $\sum' + \sum''$, где сумма $\sum'$ распространена на некоторые $n+1$ значений q, для которых точка $(x_1, \ldots, x_n)$ входит в какой-либо из кубиков $S_{k,i_1\ldots i_n}^q$ (такие существуют по лемме 1), а сумма $\sum''$ распространена на остающиеся n значения q.

Для каждого слагаемого из $\sum'$ получаем в силу (5)

$$\chi_r^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right] - \chi_{r-1}^q \left[\sum_p \psi^{pq}(x_p) \right] =$$
$$= \frac{1}{n+1}\left[f(\xi_{k,i_1}^q, \ldots, \xi_{k,i_n}^q) - f_{r-1}(\xi_{k,i_1}^q, \ldots, \xi_{k,i_n}^q)\right] =$$
$$= \frac{1}{n+1}\left[f(x_1, \ldots, x_n) - f_{r-1}(x_1, \ldots, x_n)\right] + \frac{\omega^q}{n+1}, \tag{8}$$

где

$$|\omega^q| \leqslant \frac{1}{2n+2} M_{r-1}. \tag{9}$$

Слагаемые из $\sum''$ оцениваются при помощи (6). Из (5) вместе с (8), (9) и (6) получаем

$$|f - f_r| = \left| \frac{1}{n+1} \sum' \omega^q + \sum'' (\chi_r^q - \chi_{r-1}^q) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2n+2} M_{r-1} + \frac{n}{n+1} M_{r-1} = \frac{2n+1}{2n+2} M_{r-1}. \tag{10}$$

Так как неравенство (10) справедливо в любой точке $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, то

$$\begin{gathered} M_r \leqslant \frac{2n+1}{2n+2} M_{r-1}, \\ M_r \leqslant \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^r M_0. \end{gathered} \tag{11}$$

Из (6) и (11) вытекает, что разности $\chi_r^q - \chi_{r-1}^q$ не превосходят по абсолютной величине соответствующих членов абсолютно сходящегося ряда

$$\sum_r \frac{1}{n+1} M_{r-1}.$$

Поэтому функции χ_r^q при $r \to \infty$ равномерно сходятся к непрерывным предельным функциям χ^q.

Из соотношений (3) и (4) и оценки (11) предельным переходом при $r \to \infty$ получаем равенство (1), чем и заканчивается доказательство теоремы.

Поступило
20 VI 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, ДАН, **108**, № 2 (1956). [2] В. И. Арнольд, ДАН, **114**, № 4 (1957).